

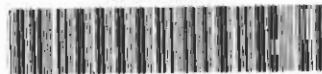
ALGEBRA LINEAL CON DERIVE

ROSA FRANCO ARBELAEZ
Profesora Asociada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLIN
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
Medellín, junio de 1998

DEPTO. DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

UNAL-Medellin



6 4000 00127403 7

PROLOGO

Con el propósito de implementar el uso del Derive en los cursos de Algebra Lineal surgió la idea de escribir esta guía como una ayuda para los estudiantes en su trabajo con computador.

Este folleto contiene una guía básica, una serie de ejercicios resueltos con Derive y una colección de prácticas propuestas. En la guía básica presento, además de las principales funciones de Derive en cuanto a manejo de vectores y matrices, los procedimientos usados en los algoritmos más importantes de un curso básico de Algebra Lineal; cada procedimiento está ilustrado con ejemplos. En la sección de ejercicios resueltos he tratado de cubrir todos los temas del curso de Algebra Lineal y he incluido además un ejercicio relacionado con Geometría Analítica. Finalmente, en esta segunda edición, propongo una serie de prácticas de diferentes temas de Geometría y Algebra Lineal, las cuales pueden ser recomendadas como trabajos para los estudiantes; los ejercicios propuestos ofrecen cierto dinamismo e individualidad porque en muchos de ellos los datos dependen del número del carné del alumno y en algunos otros, se generan aleatoriamente.

Espero haber cumplido mi objetivo de facilitar a profesores y estudiantes de Algebra Lineal el trabajo con Derive.

Quiero expresar mis agradecimientos al profesor Julio César Morales C. por haberme asesorado en la capacitación para el manejo de Derive; igualmente a la profesora Luz Elena Muñoz Sierra, quién después de experimentar el uso de la guía inicial con sus grupos, me hizo importantes sugerencias. Agradezco además al Director del Departamento de Matemáticas, Arturo Jessie Manuel, por animarme a realizar este trabajo y proporcionarme el tiempo y los recursos necesarios.

Rosa Franco Arbeláez

CONTENIDO

Algebra Lineal con Derive. Guía Básica

- I. Entrada de vectores y matrices 1
- II. Funciones para manipular vectores y matrices 2
- III. Cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales 8
- IV. Ajuste de datos por mínimos cuadrados 11
- V. Cómo hallar bases ortonormales (Proceso de Gram-Schmidt) 14
- VI. Cómo hallar valores y vectores propios de una matriz cuadrada 15

EJERCICIOS RESUELTOS

- Rectas y planos 21
- Manipulación de componentes 22
- Operaciones con matrices 23
- Eliminación Gaussiana y espacios fundamentales 25
- Análisis de solubilidad de un sistema 29
- Subespacios de R^n y ortogonalidad 30
- Ajuste por mínimos cuadrados 34
- Bases ortonormales, factorización QR 36
- Determinantes 38
- Valores y vectores propios 40
- Aplicación de valores y vectores propios 41

PRACTICAS PROPUESTAS

1. Rectas y planos 45
2. Operaciones con matrices y vectores 46
3. Eliminación Gaussiana y subespacios fundamentales 47
4. Sistemas de ecuaciones lineales y subespacios fundamentales 48
5. Independencia lineal, bases y dimensión 52
6. Ajuste por mínimos cuadrados 53
7. Ortogonalidad entre vectores y subespacios de R^n 54
8. Determinantes 56
9. Valores y vectores propios 57

ALGEBRA LINEAL CON DERIVE

Guía Básica

Algunas de las funciones que aparecen en esta guía fueron programadas por el profesor Julio César Morales C. del Departamento de Matemáticas y pueden ser utilizadas en la Sala de Informática de la Facultad de Ciencias. A otras les ha cambiado los nombres originales por nombres más cómodos y al finalizar la guía aparece un paralelo entre dichos nombres, para tener en cuenta si se trabaja en otro lugar.

I. Entrada de vectores y matrices.

a) En la línea de comandos :

- 1) Para entrar un vector se selecciona el comando **DECLARE** y en éste se elige **vector**, ésto puede hacerse tecleando primero la letra **D** y luego la letra **R**. Aparece en pantalla lo siguiente :
DECLARE VECTOR : Dimensión : _
Se digita entonces el número de componentes del vector y se da **ENTER** ; luego pide los elementos del vector uno a uno y cuando ha recibido el total de componentes, carga el vector en la ventana de álgebra, asignándole un número (**#n**). Si se desea denotar el vector mediante una letra **v**, por ejemplo, se da luego la instrucción **v:=#n**. Si más adelante se quiere utilizar la letra **v** como argumento de una función, antes de hacerlo se debe inasignar mediante la instrucción **v:=**. Se recomienda no usar las letras **i, j, k, x** como nombres, porque ellas fueron usadas en los programas de algunas funciones.
- 2) Para entrar una matriz se selecciona el comando **DECLARE MATRIX**, digitando la letra **D** y luego la letra **M**. Aparece en pantalla lo siguiente :
DECLARE MATRIX : Rows : _ Columns : _
Se entra el número de filas y el número de columnas. Luego pide uno a uno los elementos de la matriz indicando cada vez su posición.

b) Con el comando **AUTHOR**

- 1) Se entra un vector digitando sus componentes entre corchetes y separados por comas, así : **[_ , _ , ... , _]**.
- 2) Se entra una matriz como un vector de vectores, cuyas componentes son las filas de la matriz, así : **[[_ , _ , ... , _] , [_ , _ , ... , _] , ... , [_ , _ , ... , _]]**.

c) Generando vectores y matrices

Se pueden generar vectores y matrices evaluando una expresión **U(k)** (**U(j,k)**) en una secuencia de valores de **k** (de **j** y **k**) de la siguiente manera :

1) Para vectores:

Con el comando **AUTHOR**, se entra la instrucción **VECTOR (U(k),k,i,f,p)**, donde:

U(k) es la expresión que se quiere evaluar

k es la variable

i es el valor inicial de **k**

f es el valor final de **k**

p es el tamaño del paso

Ejemplo 1 : VECTOR ($k \wedge 2 + 1, k, 1, 7, 2$) genera el vector $[2, 10, 26, 50]$.

Si se omite el argumento p (o el argumento i) DERIVE asume que éste toma como valor 1.

También se puede utilizar la función VECTOR cambiando los 3 últimos argumentos por un vector cuyas componentes sean los valores que debe tomar la variable k.

Ejemplo 2 : VECTOR($k \wedge 2 + 1, k, [3, 7, 13]$) nos genera el vector $[10, 50, 170]$.

2) Para matrices :

Con el comando AUTHOR, se entra la instrucción

VECTOR (VECTOR ($\mu(j, k), k, i_1, f_1, p_1$), j, i_2, f_2, p_2) donde :

$\mu(j, k)$ es la expresión que se quiere evaluar.

i_1, f_1, p_1 : valor inicial, valor final y paso para la variable k.

i_2, f_2, p_2 : valor inicial, valor final y paso para la variable j.

Ejemplo:

VECTOR(VECTOR($j + k, k, 1, 5, 2$), $j, 1, 7, 2$) genera la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Esta función trabaja con $j \in \{1, 3, 5, 7\}$ y $k \in \{1, 3, 5\}$, así : con $j=1$ y $k \in \{1, 3, 5\}$, genera la primera fila $[2, 4, 6]$; con $j=3$ y $k \in \{1, 3, 5\}$ genera la segunda fila $[4, 6, 8]$.

d) Matrices y vectores de componentes aleatorias

- 1) RANDOM_VECTOR(n,s) : genera un vector de orden n, cuyas componentes son números tomados aleatoriamente en el intervalo $(-s, s)$.
- 2) RANDOM_MATRIX(m,n,s) : crea una matriz de orden $m \times n$, cuyas componentes son números tomados aleatoriamente del intervalo $(-s, s)$.

NOTA: La función RANDOM también se puede utilizar para generar polinomios con coeficientes aleatorios, así : RANDOM_POLY(x,n,s) simplifica a un polinomio de grado n en la variable x cuyos coeficientes son números aleatorios tomados en el intervalo $(-s, s)$.

II. Funciones para manipular vectores y matrices.

a) Para selección :

- 1) Para seleccionar la i-ésima componente de un vector X :
X SUB i (el operador sub también se puede entrar presionando las teclas ALT+V y en tal caso aparece en la pantalla como $x \downarrow i$).
Otra función con el mismo efecto es ELEMENT(X,i).

- 2) Para seleccionar la ij -ésima componente de una matriz A :
 $A \text{ SUB } i \text{ SUB } j$
 $A \text{ SUB } [i, j]$
 $\text{ELEMENT}(A, i, j)$.
- 3) Para seleccionar la fila i de la matriz A :
 $A \text{ SUB } i$ o $\text{ELEMENT}(A, i)$, ya que A es un vector de vectores.
- 4) Para seleccionar la j -ésima columna de una matriz A :
 $\text{SELECCIONE}(A, [j])$. Ver función seleccione para varias columnas más adelante.
 El resultado es una matriz de una columna.
- 5) Para seleccionar valores de k que satisfagan una condición μ , dada en función de k :
 $\text{SELECT}(\mu, k, v)$: Selecciona las componentes k del vector v que satisfacen la condición μ .

Ejemplo 1 : $\text{SELECT}(k \wedge 2 - 1 = 0, k, [-1, 1, 5, 0, 1, 3])$ simplifica a $[-1, 1, 1]$.

$\text{SELECT}(\mu, k, m, n, s)$: en este caso k varía de m a n en pasos de tamaño s , si se omite s , éste toma como valor 1.

Ejemplo 2 : La función $\text{PRIME}(k)$ retorna TRUE o FALSE según que el número k sea primo o no primo. Para hallar todos los números primos menores que 100 simplificamos la expresión $\text{SELECT}(\text{PRIME}(k), k, 1, 100)$ la cual nos presenta dichos números en un vector.

b) Para modificaciones

$\text{BORRE}(v, n)$: crea un nuevo vector suprimiendo la n -ésima componente del vector v .

$\text{INSERTE}(\mu, v, n)$: crea un nuevo vector insertando μ antes del n -ésimo elemento del vector v .

$\text{CAMBIEX}(\mu, v, n)$: crea un nuevo vector cambiando por μ la n -ésima componente del vector v .

$\text{APPEND}(v, w)$: construye un vector colocando primero las componentes del vector v y luego las del vector w .

Las cuatro funciones anteriores pueden ser aplicadas a matrices para manipular sus filas.

$\text{CAMBIEX}_c(c, A, i, j)$: crea una nueva matriz cambiando por c la ij -ésima componente de la matriz A .

$\text{BORRE_COL}(A, j)$: crea una nueva matriz suprimiendo la j -ésima columna de la matriz A .

$\text{INSERTE_COL}(u, A, j)$: crea una nueva matriz insertando el vector u como j -ésima columna en la matriz A .

$\text{CAMBIEX_COL}(v, A, j)$: crea una nueva matriz, cambiando por el vector v la j -ésima columna de A .

APPEND _ COL(A, v) : crea una matriz aumentada, agregando a la matriz A, como última columna el vector v.

APPEND _ COLS(A, B) : crea una matriz aumentada (A:B) colocando a la derecha de A la matriz B (si A y B tienen igual número de filas).

SELECCIONE(A, v) : forma una nueva matriz cuyas columnas son las columnas de A indicadas en el vector v.

Ejemplo : **SELECCIONE(A, [1,3,5])** simplifica como una matriz cuyas columnas son $A^{(1)}$, $A^{(3)}$ y $A^{(5)}$ en este orden.

Si alguna de estas funciones se usa con el fin de realizar correcciones sobre un vector (o matriz) v, se debe ejecutar y luego reasignar a v el resultado.

En todos los casos, cuando decimos v es un vector, nos referimos a un vector fila. En la ventana de álgebra podemos distinguir entre vector fila y matriz de una fila, por que el vector tiene sus componentes separadas por comas y la matriz no.

Para operar con vectores y matrices :

A' : Nos da la matriz transpuesta de A.

αA : Multiplica la matriz (o vector) A por el escalar α .

$A \pm B$: Suma o resta dos matrices (o vectores) A y B, de igual orden.

$A \cdot B$: Multiplica la matriz A por la matriz B, si los órdenes de estas matrices son compatibles para el producto.

NOTA :

- (1) A puede ser un vector fila cuyo número de componentes es igual al número de filas de la matriz B y en tal caso el resultado es un vector.
- (2) Si A es una matriz y B es un vector cuyo número de componentes es igual al número de columnas de A entonces $A \cdot B$ nos presenta el producto de A por B como vector (fila).
- (3) Si A y B son dos vectores con igual número de componentes, el resultado de $A \cdot B$ es el producto escalar entre los dos vectores.

CROSS(v, w) : realiza el producto vectorial (o producto cruz) entre dos vectores v y w de \mathbb{R}^3 .

A^{-1} : Calcula la inversa de A, si A es invertible.

ID(n) : construye la matriz identidad de orden n.

A^k : calcula la k_ésima potencia de la matriz cuadrada A, si $k \in \mathbb{Z}^+$; si A es invertible, k puede ser negativo.

ADJOINT(A) : calcula la matriz adjunta de A, si A es cuadrada.

SEUDO_INV(A) : calcula la pseudoinversa de la matriz A.

Observación : Cuando una operación no está definida , por ejemplo, si se pretende hallar la inversa de una matriz no invertible o sumar matrices de diferente orden, Derive deja la operación indicada.

d) Para realizar operaciones elementales de fila

Si A es cualquier matriz de orden $m \times n$:

SWAP(A, i, j) : Intercambia las filas i y j de la matriz A (produce $P_{ij} A$).

SCALE(A, i, c) : Multiplica la fila i de la matriz A por el escalar c (produce $M_i(c)A$).

SUBTRACT(A, i, j, c) : Resta a la fila i de A, c veces la fila j de A (produce la matriz $E_{ij}(c)A$).

PIVOT(A, i, j) : Realiza el proceso de eliminación sobre la columna j de A, restando a todas las filas, a partir de la fila i+1, múltiplos apropiados de la fila i, para conseguir ceros debajo de la posición (i, j).

e) Para hallar números especiales asociados con una matriz o un vector

RANK(A) : Calcula el rango de A.

ABS(v) : Halla la longitud (o norma) del vector v.

TRACE(A) : Halla la traza de la matriz A, si A es cuadrada.

DIMENSION(A) : Nos da el número de filas de A (también actúa sobre cualquier vector, dando su número de componentes).

DET(A) : Calcula el determinante de la matriz A, si A es matriz cuadrada.

COFACTOR(A, i, j) : calcula el cofactor correspondiente a la posición (i, j) de la matriz cuadrada A.

f) Para el proceso de eliminación Gaussiana

ESCALONE(A) : Realiza el proceso de eliminación Gaussiana sobre la matriz A y halla así una matriz escalonada a partir de A.

ESCALONEP(A) : Realiza el proceso de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial** sobre la matriz A y da como resultado la correspondiente matriz escalonada.

Las 2 funciones anteriores actúan únicamente sobre matrices cuyas componentes son todas numéricas.

ESCALONE_(A, B) : Si A y B son matrices con igual número de filas, pega la matriz B a la derecha de la matriz A y realiza luego el proceso de eliminación Gaussiana sobre la matriz obtenida, parando cuando A esté escalonada.

ESCALONEP_(A, B) : pega la matriz B a la derecha de A y realiza la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial en (A:B) hasta escalonar la matriz A.

NOTA : Para que las dos funciones anteriores realicen el proceso requerido, todas las componentes de la matriz A deben ser numéricas ; las de la matriz B pueden ser alfanuméricas.

REDUZCA(A) : Halla una matriz escalonada reducida (con "unos" como pivotes y ceros debajo y encima de cada pivote), por operaciones elementales de fila sobre la matriz A.

REDUZCA_(A, B) : Trabaja igual que la función anterior sobre la matriz aumentada (A:B), siendo A y B matrices con igual número de filas.

ESCALONE_B(A) : Crea un vector genérico, lo agrega como columna a la derecha de la matriz A y luego realiza el proceso de eliminación Gaussiana hasta escalar A. Esta función es muy útil especialmente cuando se quiere hallar restricciones sobre las componentes de un vector genérico b para que el sistema $AX = b$ sea soluble.

Dado un vector d podemos determinar si satisface las restricciones, mediante el comando `MANAGE SUBSTITUTE (M+S)` sustituyendo b_1, b_2, \dots, b_k por las correspondientes componentes del vector d. Otro método consiste en crear en la línea de AUTHOR una función $f(b_1, b_2, \dots, b_k)$, asignándole la matriz escalonada que contiene las restricciones y luego simplificar $f(d_1, d_2, \dots, d_k)$.

NOTA : Una expresión (o subexpresión) resaltada en la ventana de álgebra puede traerse a la línea de AUTHOR, mediante la tecla f_3 para ser insertada en una nueva expresión.

Ejemplo : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

ESCALONE_B(A) nos da como resultado la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & 8 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

Si con el resultado anterior resaltado, activamos el comando `MANAGE SUBSTITUTE` y sustituimos b_1 por 2, b_2 por -1 y b_3 por 0, obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que el sistema $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es soluble.

Otra forma de determinar si $AX=d$ es soluble, es la siguiente : definimos la función

$$f(b_1, b_2, b_3) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & 8 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 - b_1 \end{pmatrix} \text{ y luego simplificamos } f(2, -1, 0).$$

Para una factorización PA=LU de una matriz $A \in R_{m,n}$, se tienen las siguientes funciones:

U_(A) : halla la matriz escalonada U.

INVL_P(A) : calcula la matriz $L^{-1}P$.

L_U(A) : Halla las matrices L y U. Entrega el resultado en la forma $\left(\begin{pmatrix} (L) \\ (U) \end{pmatrix} \quad r \quad s \right)$.

U_P(A) : Halla las matrices U y P. Entrega el resultado en la forma $\left(\begin{pmatrix} (U) \\ (P) \end{pmatrix} \quad r \quad s \right)$.

Ejemplo : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces : $U = U_(A)$ simplifica a $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

INVL_P(A) nos da $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^{-1}P$.

L_U(A) simplifica como $\left(\begin{pmatrix} (1 & 0 & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0 & 0) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (-1 & 0 & 0 & 1) \end{pmatrix} \quad ,4 \quad ,4 \right)$

U_P(A) simplifica como

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right) \begin{array}{c} ,4 \\ ,4 \end{array}$$

Si se requiere usar más adelante las matrices L, U y P, se les puede asignar sus nombres seleccionando la correspondiente matriz y trayéndola a la línea de autor mediante la tecla F_3 .

Obtuvimos: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Con la instrucción $P.A - L.U$ verificamos la factorización; debemos obtener la matriz cero.

CHOLESKY(A): Halla una matriz triangular inferior V, tal que $A = V V^T$ siempre que A sea una matriz definida positiva (simétrica con todos sus valores propios positivos).

III) Cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea A una matriz de orden $m \times n$, b un vector fila de orden m y v un vector fila de orden r ($r \leq n$), cuyas componentes son números enteros entre 1 y n.

RESUELVA(A, b, v): resuelve el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ despejando las variables asociadas con las columnas que se indican en el vector v, en términos de las restantes. Esta función está programada usando la función SOLVE, la cual sirve para resolver ecuaciones lineales. Si desea hallar algunas soluciones particulares puede hacerlo mediante los comandos **MANAGE SUBSTITUTE**; esto también puede lograrse, creando una función cuyos argumentos son las variables libres y cuyo valor es el resultado de la función RESUELVA y evaluando luego dicha función para valores concretos de las variables libres.

Ejemplo: Para resolver el sistema $AX = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

declaramos la matriz A y procedemos como sigue : Ejecutamos la instrucción ESCALONE(A) , la cual simplifica como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, las variables básicas son las asociadas con las columnas 1 y 3.

A continuación damos la instrucción RESUELVA (A, [9,1,8], [1,3]), la cual simplifica como

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3x_2 + 2x_4 + 8}{6} \\ x_3 = \frac{19 - 17x_4}{9} \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema $AX = b$ es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/6 \\ 0 \\ 19/9 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3/6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2/6 \\ 0 \\ -17/9 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Para hallar soluciones particulares, creamos la función $f(x_2, x_4) := \begin{pmatrix} x_1 = \frac{3x_2 + 2x_4 + 8}{6} \\ x_3 = \frac{19 - 17x_4}{9} \end{pmatrix}$

y luego simplificamos para valores concretos. Por ejemplo, $f(-1, 5)$ simplifica como

$$\begin{bmatrix} x_1 = 5/2 \\ x_3 = -22/3 \end{bmatrix} ; \text{ por lo tanto, el vector } \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ -22/3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ es una solución particular del sistema.}$$

Observaciones

1. Recuerde que las letras x, i, j, k no pueden estar asignadas, ya que todas ellas han sido usadas en el programa de la función RESUELVA.
2. Si el sistema de ecuaciones lineales que se quiere resolver no es soluble, la función resuelva entrega como resultado el símbolo [] frente al vector de variables básicas.

RESUELVA_1(A, b) : Resuelve un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es invertible. Entrega como resultado el vector solución.

REGRESIVA(U, v) : Realiza el proceso de sustitución regresiva para el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es U; siendo U una matriz escalonada y v el vector que indica las columnas que contienen pivote; toma como vector de términos independientes la última columna de U.

Combinando la función ESCALONE_(A , B) o la función ESCALONEP_(A , B) con la función REGRESIVA se pueden resolver simultáneamente varios sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes A, siendo B la matriz cuyas columnas son los vectores de términos independientes de dichos sistemas.

Ejemplo:

Si A es la matriz del ejemplo anterior y $B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, la función compuesta

REGRESIVA(ESCALONE_(A , B) , [1 , 3]) simplifica como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/3 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/9 & 19/9 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Este resultado puede interpretarse como sigue:

El sistema $AX = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ tiene por solución $x_1 = 4/3 + 1/2 x_2 + 1/3 x_4$, $x_3 = 19/9 - 17/9 x_4$.

El sistema $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ tiene por solución $x_1 = 1 + 1/2 x_2 + 1/3 x_4$, $x_3 = 1 - 17/9 x_4$.

El sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ no posee solución.

La función REDUZCA_(A , B) también es útil para resolver simultáneamente varios sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes, colocando como matriz B la que tiene por columnas los diferentes vectores de términos independientes; pero antes de aplicarla se debe comprobar que los sistemas en consideración sí sean solubles. El resultado que entrega es el mismo de la función compuesta anterior.

Para resolver simultáneamente los sistemas $AX = B^{(1)}$, $AX = B^{(2)}$, ..., $AX = B^{(r)}$ también se puede simplificar la función compuesta:

VECTOR(RESUELVA(A , B subs , v) , s , l , r), siendo B la matriz cuyas columnas son los vectores de términos independientes; esta función entrega un vector cuyas componentes son las soluciones de los sistemas dados en el orden correspondiente. El tiempo de ejecución de esta función es superior al de las funciones anteriores, pero

compensa al entregar las variables básicas despejadas, lo que no ocurre con las otras funciones.

Ejemplo :

Para resolver simultáneamente los mismos tres sistemas del ejemplo anterior simplificamos la función compuesta VECTOR (RESUELVA(A, B subs, [1,3]), s, 1, 3) y obtenemos :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3x_2 + 2(x_4 + 4)}{6} \\ x_3 = \frac{19 - 17x_4}{9} \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3x_2 + 2(x_4 + 3)}{6} \\ x_3 = \frac{9 - 17x_4}{9} \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} x_1 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \\ \end{array} \right]$$

IV) Ajuste de datos por mínimos cuadrados.

Para hallar la mejor solución, \bar{x} , de un sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, por el método de los mínimos cuadrados, se sigue el algoritmo de las ecuaciones normales, utilizando las funciones hasta ahora vistas para operaciones con matrices y solución de sistemas de ecuaciones lineales. Para el cálculo del error, se puede aplicar la función

ABS al vector $b - A\bar{x}$.

Ejemplo :

Para hallar la recta que mejor se ajusta a los puntos $\left(\begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{l} 1/2 \\ -9/10 \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{l} -1/3 \\ 6/10 \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{l} 1/7 \\ -28/100 \end{array} \right)$, procedemos como sigue :

i) Sustituyendo los datos en la ecuación $y = mx + b$, obtenemos el sistema

$$\begin{array}{l} -m + b = 2 \\ \frac{1}{2}m + b = \frac{-9}{10} \\ \frac{-1}{3}m + b = \frac{6}{10} \\ \frac{1}{7}m + b = \frac{-28}{100} \end{array}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ -1/3 & 1 \\ 1/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9/10 \\ 6/10 \\ -28/100 \end{pmatrix}$$

ii) Entramos la matriz de coeficientes del sistema anterior, mediante el comando `DECLARE MATRIX` y le asignamos la letra A .
El vector b lo entramos como $b := [2, -9/10, 6/10, -28/100]$.

iii) Resolvemos ahora el sistema de las ecuaciones normales, mediante la función `RESUELVA_1(A · A, A · b)`, la cual con el comando `APPROX` simplifica a

$$[-1.93680, 0.0206713].$$

Luego, la mejor solución en términos de mínimos cuadrados, para el sistema $AX = b$

$$\text{es } \bar{x} = [-1.93680, 0.0206713].$$

Así, la recta que mejor se ajusta a los puntos dados, es $y = -1.93680x + 0.0206713$.

iv) Para calcular el error, simplificamos la expresión $ABS(b - A \cdot \bar{x})$, mediante el comando `APPROX` y obtenemos 0.0951520.

v) Para predecir las ordenadas correspondientes a diferentes abscisas x_0 sobre la recta del ajuste, podemos definir una función $y(x) := -1.93680x + 0.0206713$ y luego evaluar simplificando $y(x_0)$; por ejemplo, $y(1/4)$ simplifica como -0.463528.

vi) Para graficar la nube de puntos y la recta que mejor se ajusta a dichos puntos procedemos como sigue:

1) Con el comando `DECLARE MATRIX` entramos la matriz $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -9/10 \\ -1/3 & 6/10 \\ 1/7 & -28/100 \end{pmatrix}$

la cual tiene en su primera columna las abscisas y en su segunda columna las ordenadas de los puntos que deseamos graficar.

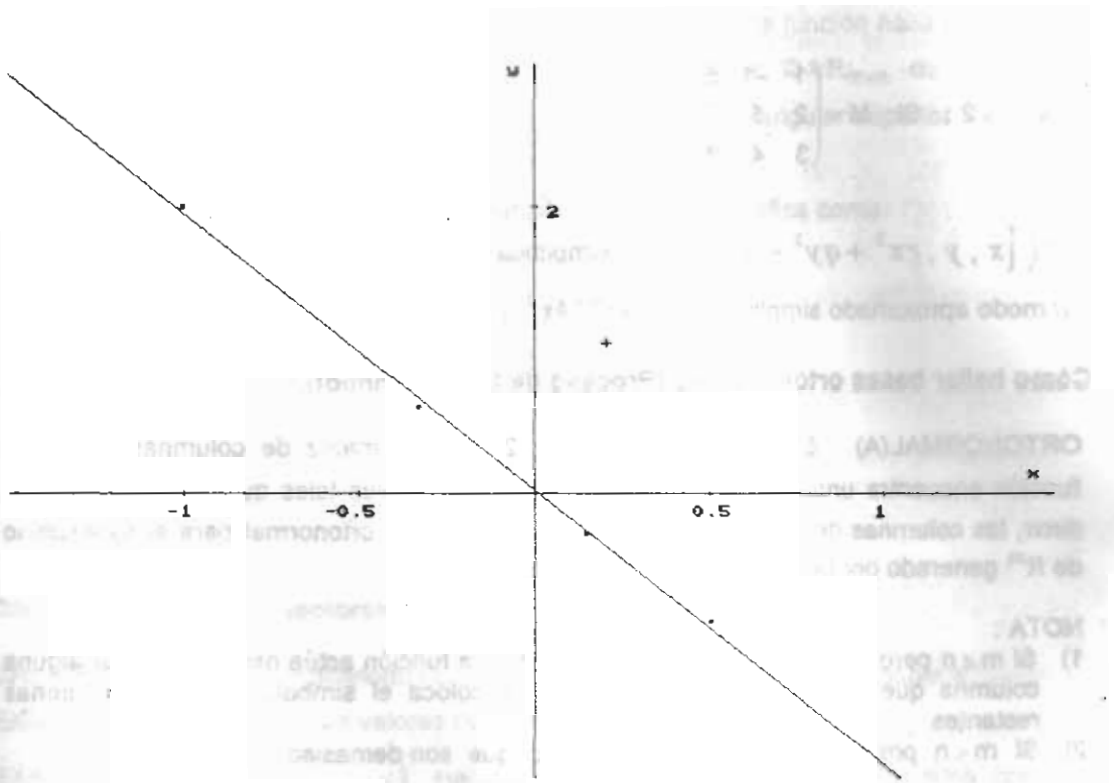
2) Con la matriz N resaltada en la ventana de álgebra, activamos los comandos `PLOT OVERLAY PLOT` y obtenemos así la gráfica de los puntos dados.

3) Resaltando en la ventana de álgebra la expresión

$$-1.93680x + 0.0206713$$

y activando de nuevo el comando `PLOT`, obtenemos la gráfica de la recta, superpuesta con la nube de puntos graficada en 2), en el mismo sistemas de coordenadas cartesianas.

A continuación se presenta la gráfica completa.



NOTA : Derive, tiene una función predefinida para realizar ajustes por mínimos cuadrados; a continuación se describe dicha función y se ilustra con ejemplos.

FIT(v, M) : realiza un ajuste por mínimos cuadrados de una expresión parametrizada dada en el vector v , para el conjunto de datos indicados en la matriz M . Así, si se quiere estimar las constantes a_1, a_2, \dots, a_n para ajustar por mínimos cuadrados el modelo, $y = a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) + \dots + a_n f_n(x_n)$ a los datos $[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1]$, damos la instrucción

FIT $\left([x_1, x_2, \dots, x_n, a_1 f_1(x_1) + \dots + a_n f_n(x_n)], M \right)$, donde M es una matriz de $n+1$ columnas, que tiene en su k -ésima columna los datos correspondientes a $x_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ y en su última columna los datos de la variable dependiente y . Las funciones $f_k(x_k)$ no tienen que ser lineales.

Ejemplo 1: Si
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -9/10 \\ -1/3 & 6/10 \\ 1/7 & -28/100 \end{pmatrix}$$

FIT $\left([x, mx + b], M \right)$ halla la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos dada por $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -9/10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 6/10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1/7 \\ -28/100 \end{pmatrix}$; dicha función simplifica con el comando

APPROX a $0.0206713 - 1.93680x$ (compare con el ejemplo anterior).

Ejemplo 2: Si $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$,

$\text{FIT}([x, y, rx^2 + qy^2 + s], M)$ simplifica en modo exacto a $\frac{2x^2}{7} + \frac{y^2}{21} + \frac{14}{3}$ y en modo aproximado simplifica a $0.285714x^2 + 0.0476190y^2 + 4.66666$.

V) Cómo hallar bases ortonormales (Proceso de Gram-Schmidt).

ORTONORMAL(A): Si $A \in R_{m \times n}$ con $n \geq 2$, es una matriz de columnas L.I., esta función encuentra una matriz Q de columnas ortonormales tales que $R(A) = R(Q)$; es decir, las columnas de la matriz hallada forman una base ortonormal para el subespacio de R^m generado por las columnas de A.

NOTA:

- 1) Si $m \geq n$ pero las columnas de A no son L.I., la función actúa hasta encontrar alguna columna que sea C.L. de las anteriores y coloca el símbolo ? en las columnas restantes.
- 2) Si $m < n$ presenta un mensaje diciendo que son demasiadas columnas.

Si se desea hallar la matriz triangular superior invertible R tal que $A = QR$ basta con simplificar la expresión $R := Q^T \cdot A$ ya que $Q^T Q = I$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallamos una matriz Q de columnas ortonormales y una matriz

R triangular superior invertible tales que $A = QR$ como sigue:

Q := ORTONORMAL(A) nos da la matriz $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$.

$R := Q^T \cdot A$ simplifica como $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$.

De lo anterior podemos concluir que una base ortonormal para $R(A)$ está dada por

$$\left\{ q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \right\} \text{ y se tiene } A^{(1)} = \sqrt{2} q_1, A^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} q_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} q_2.$$

Q_R(A): Si $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$ con $n \geq 2$ es matriz de columnas L.I., esta función halla una matriz de orden 2×1 , tal que su componente (1,1) es una matriz $Q \in \mathbb{R}_{m \times n}$ de columnas ortonormales, su componente (2,1) es una matriz $R \in \mathbb{R}_{n \times n}$ triangular superior invertible y se satisface $R(A) = R(Q)$ y $A = QR$.

Para la matriz A del ejemplo anterior, la función **Q_R(A)** simplifica como

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{array} \right) \\ 0 \quad \left(\begin{array}{c} \sqrt{6}/3 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

VI) Cómo hallar valores y vectores propios de una matriz cuadrada A .

CHARPOLY(A): Halla el polinomio característico de la matriz A en la variable w .

EIGENVALUES(A): Halla los valores propios de la matriz A .

EXACT_EIGENVECTOR(A, μ): Halla los vectores propios de A asociados con el valor propio μ ; presenta como resultado la solución general del sistema $(A - \mu I_n)x = 0$.

Si μ es sólo una aproximación de un valor propio, esta función entrega como resultado el vector cero, ya que en este caso el sistema tiene únicamente la solución trivial; esto también puede ocurrir cuando el valor propio exacto es un número irracional, para el cual *Derive no logra identificar, en la solución del sistema, algunas expresiones de irracionales como equivalentes a cero.*

La función **EXACT_EIGENVECTOR** está realmente limitada a matrices de orden máximo 4×4 ; para matrices de orden mayor que 4, se puede resolver el sistema $(A - \mu I_n)x = 0$ mediante la función **RESUELVA**.

En el caso de tener sólo aproximaciones de los valores propios y para valores propios irracionales con expresiones complicadas, se recomienda la función **APPROX_EIGENVECTOR** que se describe a continuación.

APPROX_EIGENVECTOR(A, μ): Halla un vector propio aproximado de la matriz A , asociado con el valor propio aproximado μ (μ no puede ser valor propio exacto).

Las aproximaciones de los valores propios, pueden hallarse previamente factorizando el polinomio característico en modo aproximado mediante los comandos **FACTOR COMPLEX (F+C)** o simplificando la función **EIGENVALUES(A)** mediante el comando **APPROX**. Si este procedimiento no da resultado, se puede graficar el polinomio mediante el comando **PLOT**, localizar vecindades de las raíces reales y luego activando el comando **SOLVE** sobre el polinomio, obtener dichas raíces en forma aproximada.

Antes de ejecutar la instrucción anterior, se debe colocar en modo aproximado mediante los comandos **OPTIONS PRECISION APPROXIMATE (O+P+A)**.

El resultado de la función anterior es un vector normalizado v . Para ver si v es una buena aproximación se puede multiplicar la matriz A por el vector v , luego dividir por el valor

propio aproximado μ y comparar el resultado con v ; si no da una buena aproximación se debe aumentar el número de dígitos y ejecutar de nuevo la instrucción.

Ejemplo 1.

Si $A = \begin{pmatrix} 7/12 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, para hallar el polinomio característico, los valores propios y los

espacios propios de A , procedemos como sigue :

CHARPOLY(A) simplifica como $\frac{(1-w)(72w^2 - 78w + 19)}{72}$, éste es el polinomio

característico de A y podemos factorizarlo activando los comandos FACTOR COMPLEX con el polinomio resaltado en la ventana de álgebra, se obtiene así:

$$(1-w) \left[w + \frac{\sqrt{17}}{24} - \frac{13}{24} \right] \left[w - \frac{\sqrt{17}}{24} - \frac{13}{24} \right]$$

También podemos calcular los valores propios directamente mediante la función

EIGENVALUES(A) la cual simplifica como $\left[w = 1, w = \frac{\sqrt{17}}{24} + \frac{13}{24}, w = \frac{13}{24} - \frac{\sqrt{17}}{24} \right]$.

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{13 + \sqrt{17}}{24}$ y $\lambda_3 = \frac{13 - \sqrt{17}}{24}$.

Hallemos ahora los espacios propios:

EXACT_EIGENVECTOR $\left(A, \frac{13 + \sqrt{17}}{24} \right)$ simplifica a

$$\left[x_1 = @_1, x_2 = @_1 \left(\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} \right), x_3 = -@_1 \left(\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4} \right) \right].$$

De donde podemos concluir que el espacio propio de A asociado con $\lambda_2 = \frac{13 + \sqrt{17}}{24}$ es

$$E_{\lambda_2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (-1 + \sqrt{17})/4 \\ -(3 + \sqrt{17})/4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Análogamente se pueden hallar E_{λ_1} y E_{λ_3} .

NOTA : El signo $\sqrt{\quad}$ se obtiene presionando simultáneamente las teclas ALT y Q.

Ejemplo 2 :

Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, obtenemos el polinomio característico de A mediante la función

CHARPOLY(A), la cual simplifica como $\frac{-4w^3 - 6w^2 + 3w - 1}{4}$.

EIGENVALUES(A) simplifica a $\left[w = 1, w = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{4}, w = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}i}{4} \right]$.

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{4}$ y $\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}$.

NOTA : La unidad imaginaria se entra presionando simultáneamente la tecla ALT y la letra I, aparece como \hat{i} .

Para hallar el espacio propio de A asociado con el valor propio λ_3 , simplificamos la

expresión EXACT_EIGENVECTOR $\left(A, \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} \right)$ y obtenemos

$$\left[x_1 = @_1, x_2 = -\frac{@_1}{2} - \frac{\sqrt{3}i @_1}{2}, x_3 = -\frac{@_1}{2} + \frac{\sqrt{3}i @_1}{2} \right].$$

Luego, el espacio propio de A asociado con el valor propio $\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}$ está dado por

$$E_{\lambda_3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Análogamente se hallan los otros 2 espacios propios de A.

Ejemplo 3.

Para la matriz $M = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 & 1 \\ 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}$, hallamos el polinomio característico mediante la

función CHARPOLY(M) la cual simplifica como $\frac{1600w^3 - 1200w^2 - 340w + 71}{1600}$.

Para hallar los valores propios simplificamos EIGENVALUES(M) y obtenemos:

$$\left[w = \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{30} \operatorname{SIN} \left(\frac{\operatorname{ATAN} \left(\frac{3\sqrt{399}}{133} \right)}{3} \right)}{15}, w = \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{30} \operatorname{SIN} \left(\frac{\operatorname{ATAN} \left(\frac{3\sqrt{399}}{133} \right)}{3} + \frac{\pi}{3} \right)}{15}, w = \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{30} \operatorname{COS} \left(\frac{\operatorname{ATAN} \left(\frac{3\sqrt{399}}{133} \right)}{3} + \frac{\pi}{6} \right)}{15} \right]$$

EXACT_EIGENVECTOR $\left(M, \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{30} \operatorname{SIN} \left(\frac{\operatorname{ATAN} \left(\frac{3\sqrt{399}}{133} \right)}{3} \right)}{15} \right)$ y obtenemos

$[x_1 = 0 \ x_2 = 0 \ x_3 = 0]$. Obviamente éste no es un vector propio de A.

Hallamos entonces aproximaciones de los valores propios, activando el comando APPROX con el resultado de EIGENVALUES(M) resaltado y obtenemos:

$$[w = 0.147291, w = 0.927523, w = -0.324815].$$

Nos colocamos en modo aproximado, mediante OPTIONS PRECISION APPROXIMATE, para hallar un vector propio aproximado asociado con el valor propio 0.147291; damos la instrucción $v := \text{APPROX_EIGENVECTOR}(M, 0.147291)$, la cual simplifica como $[-0.228396, 0.444750, -0.866043]$.

Para saber si ésta es una buena aproximación, damos la instrucción $t := M.v / 0.147291$, la cual simplifica a $[-0.228403, 0.444754, -0.866046]$; este último vector es muy cercano a v , obsérvese que $\text{ABS}(t-v)$ simplifica como 8.78807×10^{-6} , lo cual indica que $M.v \approx 0.147291v$.

Ejemplo 4.

Veamos cómo hallar los valores de la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

CHARPOLY(E) simplifica como $-w^5 + 2w^4 + 42w^3 - 101w^2 - 14w + 23$.

EIGENVALUES(E) simplifica, en modo exacto, como

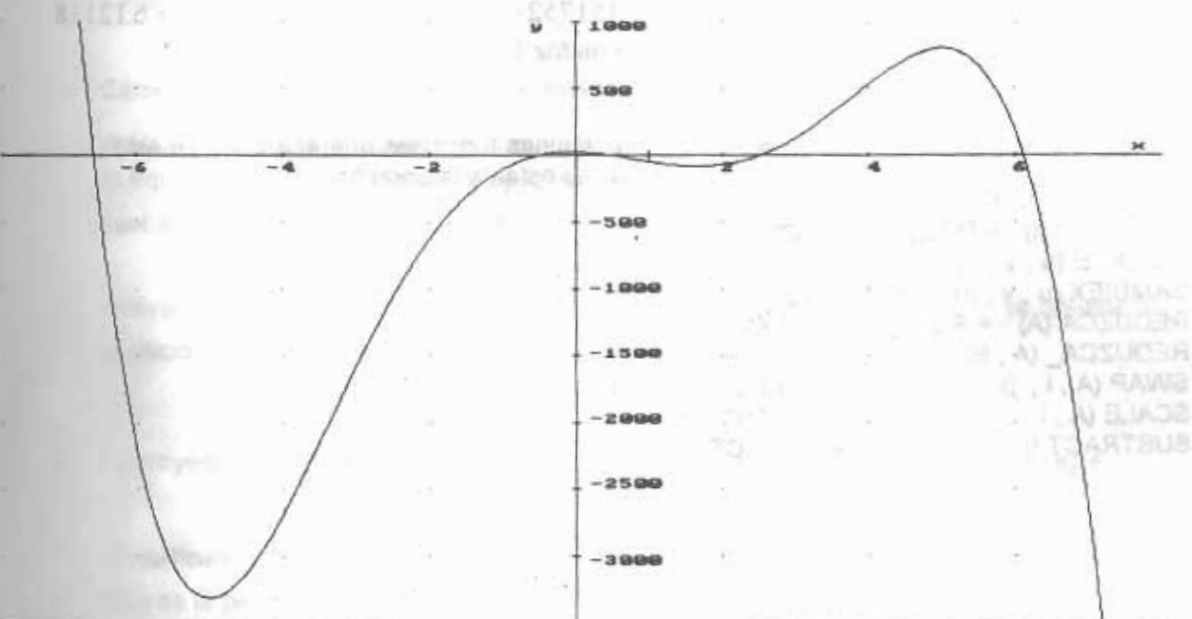
$$[-w^5 + 2w^4 + 42w^3 - 101w^2 - 14w - 23]$$

Como podemos ver, no nos da los valores propios.

Con la misma función, en modo aproximado se obtiene $[6.12119]$, mostrando sólo un valor propio de E.

Al activar los comandos FACTOR COMPLEX obtenemos como resultado el mismo polinomio aún sin factorizar.

Si resaltamos el polinomio característico y activamos luego los comandos PLOT OVERLAY PLOT, obtenemos la gráfica del polinomio (puede verse mejor si cambiamos el rango, activando el subcomando RANGE, Left : -8 RIGHT: 8 BOTTOM : - 3500 TOP : 1000).



TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options

Enter option
Cross x/1

y:0

Scale x:2

y:500

Define, XON
ED-plot

Observando la gráfica podemos ubicar vecindades de las raíces del polinomio; cada uno de los siguientes intervalos contiene una raíz :

$$(-7, -6), (-1, 0), (0, 1), (2, 3), (6, 7).$$

Nos colocamos ahora en modo aproximado (0 + P + A), resaltamos el polinomio en la ventana de álgebra y luego activamos el comando SOLVE. Aparece en pantalla lo siguiente:

SOLVE : Lower : _____ Upper : _____

Digitamos respectivamente los extremos inferior y superior del intervalo en el cual deseamos hallar la raíz.

Se obtiene :

Intervalo	Raíz
$(-7, -6)$	$w = -6.60814$
$(-1, 0)$	$w = -0.497054$
$(0, 1)$	$w = 0.451752$
$(2, 3)$	$w = 2.53225$
$(6, 7)$	$w = 6.12118$

Luego,

$w_1 = -6.60814$, $w_2 = -0.497054$, $w_3 = 0.451752$, $w_4 = 2.53225$, $w_5 = 6.12118$
son aproximaciones de los valores propios de la matriz E.

NOTA

El siguiente es un paralelo entre los nombres de algunas funciones que aparecen en esta guía y los nombres originales en DERIVE, los cuales están a la derecha.

ID(n) := IDENTITY_MATRIX(n)

BORRE(v, n) := DELETE_ELEMENT(v, n)

INSERTE(u, v, n) := INSERT_ELEMENT(u, v, n)

CAMBIEX(u, v, n) := REPLACE_ELEMENT(u, v, n)

REDUZCA(A) := ROW_REDUCE(A)

REDUZCA(A, B) := ROW_REDUCE(A, B)

SWAP(A, i, j) := SWAP_ELEMENTS(A, i, j)

SCALE(A, i, c) := SCALE_ELEMENT(A, i, c)

SUBTRACT(A, i, j, c) := SUBTRACT_ELEMENTS(A, i, j, c).

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 1. (Rectas y planos)

Considere los puntos $A: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C: \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}$, $D: \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Muestre que A, B y C determinan un plano y encuentre para dicho plano un vector normal y su ecuación lineal.
- Encuentre la proyección ortogonal del vector \vec{AC} sobre el vector \vec{AB} .
- Halle la distancia del punto C a la recta determinada por A y B.
- Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta AB.
- Halle la distancia del punto D al plano ABC.

Solución

Entramos los vectores A, B, C, D, mediante los comandos DECLARE VECTOR.

- Hallamos los vectores \vec{AB} y \vec{AC} como sigue:

$$e := B - A \text{ simplifica como } [1, -3, 4]$$

$$f := C - A \text{ simplifica como } [6, 11, 18].$$

Como \vec{AB} no es paralelo a \vec{AC} entonces A, B y C son no colineales y por lo tanto determinan un plano. El vector normal a este plano es el producto vectorial entre \vec{AB} y \vec{AC} (o equivalentemente entre e y f) y lo hallamos mediante la instrucción $n := \text{CROSS}(e, f)$, la cual simplifica como $[-98, 6, 29]$.

Activando el comando SIMPLIFY sobre la expresión $n \cdot ([x, y, z] - A) = 0$ se obtiene la ecuación lineal del plano, dada por: $-98x + 6y + 29z - 197 = 0$.

- La proyección ortogonal de \vec{AC} sobre \vec{AB} está dada por $\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} \right) \vec{AB} = ((e \cdot f) / (e \cdot e)) e$;

simplificando la expresión $p := ((e \cdot f) / (e \cdot e)) \cdot e$ obtenemos $[45/26, -135/26, 90/13]$, ésta es la proyección ortogonal pedida.

- La distancia de C a la recta AB es la longitud del vector $\vec{AC} - \text{proy}_{\vec{AB}} \vec{AC}$ y la podemos hallar mediante la expresión $\text{ABS}(f - p)$ la cual simplifica a $\frac{\sqrt{272506}}{26}$ (en modo aproximado se obtiene 20.0777).

d) Al simplificar la expresión $[x, y, z] = A + t.e$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta AB, dadas por: $[x = t - 1, y = 2 - 3t, z = 4t + 3]$.

e) La distancia del punto D al plano ABC está dada por la magnitud de la proyección ortogonal de \vec{AD} sobre el vector n , normal al plano; se calcula como

$$\left\| \left(\frac{n \cdot (D - A)}{n \cdot n} \right) n \right\| = \frac{|n \cdot (D - A)|}{\|n\|}; \text{ basta entonces con simplificar la expresión}$$

$\frac{ABS(n \cdot (D - a))}{ABS(n)}$ y se obtiene $744\sqrt{10481}/10481$ (en modo aproximado, 7.26727).

EJERCICIO 2 (Manipulación de componentes)

a) Entrar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Realizar cada cambio indicado y luego reasignar el resultado a la variable A

i) Cambiar la componente a_{32} por -5

ii) Insertar como tercera fila el vector $A_2 - 2A_1$

iii) Cambiar la fila 4 de la nueva matriz A por $A_4 - 2A_2 + A_1$

iv) Agregar como última columna a la matriz A, el vector $A^{(2)} - 3A^{(1)}$.

v) Suprimir la 3ª columna de la matriz A.

Solución

a) $A := \left[[2, -1, 3], [4, 1, 0], [-1, 4, 2] \right]$, (también puede entrarse mediante el comando DECLARE MATRIX). Al simplificar esta expresión aparece en la ventana de álgebra la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) i) Para cambiar la componente a_{32} por -5 , simplificamos la expresión

CAMBIEX_(-5, A, 3, 2) y luego reasignamos el resultado a la variable A, mediante $A := \#n$, donde #n es el número asignado a dicho resultado en la ventana de álgebra.

ii) Al simplificar la expresión INSERTE (Asub2 - 2Asub1, A, 3), se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Reasignamos el resultado anterior a la variable A.

iii) Al simplificar la expresión $\text{CAMBIEX}(A_{\text{sub}4} - 2A_{\text{sub}2} + A_{\text{sub}1}, A, 4)$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -7 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

iv) Llamando A, la matriz obtenida en iii), creamos el vector $A^{(2)} - 3A^{(1)}$ como vector fila mediante la expresión $v := A_{\text{sub}2} - 3A_{\text{sub}1}$, la cual simplifica como $[-7, -11, 3, 13]$.

Luego realizamos la instrucción $\text{APPEND_COL}(A, V)$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ -7 & -8 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

v) Si A es la matriz hallada en iv), para suprimir la tercera columna de A, basta simplificar la expresión $\text{BORRE_COL}(A, 3)$ y se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & -11 \\ 0 & 3 & 3 \\ -7 & -8 & 13 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3 (operaciones con matrices)

- Generar una matriz $A \in \mathbb{R}_{4 \times 3}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j} / (i+j)$.
- Generar una matriz $B \in \mathbb{R}_{3 \times 2}$ cuyas componentes sean números aleatorios entre -5 y 5.
- Realizar el producto AB .
 - Realizar el producto $AB^{(1)}$.
 - Hallar la segunda columna de AB , realizando una combinación lineal de las columnas de A.
- Hallar $A^T A$.
- Hallar el rango de $A^T A$; será $A^T A$ invertible?; en caso afirmativo, hallar su inversa.

Solución

- $A := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}((-1)^{i+j} / (i+j), j, 1, 3), i, 1, 4)$ simplifica como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

b) Ejecutando la instrucción $B := \text{RANDOM_MATRIX}(3, 2, 5)$ se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) i) Activando el comando SIMPLIFY sobre la instrucción $A \cdot B$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -1 \\ \frac{9}{5} & \frac{3}{4} \\ -\frac{22}{15} & -\frac{3}{5} \\ \frac{26}{21} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Para hallar el producto $AB^{(1)}$ simplificamos la expresión $A \cdot (B \text{ sub1})$ y obtenemos

$$\left[-\frac{7}{3}, \frac{9}{5}, -\frac{22}{15}, \frac{26}{21} \right]$$

Observe que este resultado coincide con la primera columna del producto AB .

iii) La segunda columna del producto AB está dada por

$$AB^{(2)} = b_{12}A^{(1)} + b_{22}A^{(2)} + b_{32}A^{(3)}$$

y por lo tanto, puede obtenerse mediante la expresión

$$B_{\text{sub}}[1, 2] * (A \text{ sub1}) + B_{\text{sub}}[2, 2] * (A \text{ sub2}) + B_{\text{sub}}[3, 2] * (A \text{ sub3}),$$

$$\text{la cual simplifica a } \left[-1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{2} \right]$$

d) Al simplificar la expresión $M := A^T \cdot A$ obtenemos la matriz $A^T A$ dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{1669}{3600} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{42} \\ -\frac{1}{3} & \frac{869}{3600} & -\frac{4}{21} \\ \frac{1}{42} & -\frac{4}{21} & \frac{26581}{176400} \end{pmatrix}$$

e) Como $M = A^T A$ y la instrucción $\text{RANK}(M)$ simplifica a 3, entonces $\text{rank}(A^T A) = 3$ y como $A^T A$ es de orden 3 concluimos que $A^T A$ sí es invertible y podemos hallar su inversa simplificando la expresión $M \wedge (-1)$; se obtiene así la matriz

$$(A^T A)^{-1} = \frac{100}{5741} \begin{pmatrix} 2120004 & 7819200 & 6199200 \\ 7819200 & 28932804 & 22982400 \\ 6199200 & 22982400 & 18276804 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4 (Eliminación Gaussiana y espacios fundamentales)

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ -6 & 7 & -4 & 3 & -2 \\ -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \end{pmatrix}$$

- Realizar el proceso de eliminación Gaussiana sobre A.
 - Sobre la primera columna mediante SWAP y SUBTRACT
 - Mediante la función PIVOT
 - Mediante la función ESCALONE
- Hallar matrices P, L y U tales que $PA = LU$
- Realizar el proceso de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial sobre A
 - Mediante SWAP y PIVOT
 - Mediante la función ESCALONEP
- Hallar una base y la dimensión para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales asociados con la matriz A.

Solución

Entramos la matriz mediante DECLARE MATRIX y le asignamos la variable A.

- a) i) Como $a_{11} = 0$ intercambiamos las filas 1 y 2 mediante la expresión $B := \text{SWAP}(A, 1, 2)$ la

$$\text{cual simplifica como } B = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & -4 & 3 & -2 \\ -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego simplificamos la expresión $C := \text{SUBTRACT}(B, 3, 1, 1)$ y obtenemos

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -14 & 8 & 6 & -2 \\ -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \end{pmatrix}$$

finalmente simplificamos $D := \text{SUBTRACT}(C, 4, 1, 2)$ y obtenemos la matriz

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -14 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & -70 & 40 & 30 & -10 \end{pmatrix}$$

quedando así lista la eliminación sobre la primera columna.

- ii) Mediante la función PIVOT, después de realizar el intercambio de las filas 1 y 2 de A, actuamos sobre la matriz B, mediante la instrucción PIVOT(B, 1, 1), la cual realiza el proceso de eliminación sobre la primera columna y simplifica directamente como la matriz D.

Para continuar el proceso sobre la segunda columna podemos simplificar la expresión $U := \text{PIVOT}(D, 2, 2)$ y obtenemos

$$U = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- iii) La expresión ESCALONE(A) simplifica directamente a la matriz U.

- b) Hallamos L y U mediante la función L_U(A), la cual simplifica como

$$\left(\left(\begin{matrix} L \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} U \\ \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \right), 4, 4$$

Hallamos U y P mediante la función U_P(A), la cual simplifica como

$$\left(\left(\begin{matrix} U \\ \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} P \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \right), 4, 4$$

Por lo tanto, las matrices P , L y U , tales que $PA = LU$ están dadas por

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Mediante pivoteo parcial.

- i) Para el proceso de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, observemos que la componente de la primera columna con mayor valor absoluto es a_{41} , y por lo tanto debemos empezar por intercambiar las filas 1 y 4 mediante la función $M := \text{SWAP}(A, 1, 4)$, la cual simplifica como

$$M = \begin{pmatrix} -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \\ -6 & 21 & -12 & -3 & 0 \\ -6 & 7 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realizamos ahora eliminación sobre la primera columna, simplificando la función $N := \text{PIVOT}(M, 1, 1)$ y obtenemos:

$$N = \begin{pmatrix} -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \\ 0 & 35 & -20 & -15 & 5 \\ 0 & 21 & -12 & -9 & 3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Para la eliminación sobre la segunda columna, el pivote es 35, por ser el número de mayor valor absoluto, en la columna 2, a partir de la posición $(2, 2)$; simplificamos entonces la expresión $\text{PIVOT}(N, 2, 2)$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -12 & -28 & 16 & 24 & -10 \\ 0 & 35 & -20 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) La función $\text{ESCALONEP}(A)$ simplifica como la misma matriz hallada en c i).

- d) De la matriz escalonada U concluimos que $r(A) = 2$; luego, $\dim R(A^T) = \dim R(A) = 2$ y se tiene:

i) Una base para el espacio fila de A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \\ -12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) Como los pivotes están en las columnas 1 y 2, una base para $R(A)$ es

$$\{A^{(1)}, A^{(2)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ 7 \\ -28 \end{pmatrix} \right\}$$

iii) Para hallar una base de $N(A)$ resolvemos el sistema $AX = 0$, o equivalentemente el sistema $UX = 0$, mediante la expresión

$$\text{RESUELVA } (U, [0, 0, 0, 0], [1, 2]) \text{ y obtenemos } \begin{cases} x_1 = \frac{2x_4 - x_5}{2} \\ x_2 = \frac{4x_3 + 3x_4 - x_5}{7} \end{cases}$$

Luego, la solución general de $AX = 0$ está dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_4 - x_5)/2 \\ (4x_3 + 3x_4 - x_5)/7 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3/7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, una base del espacio nulo de la matriz A es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

iv) Como $r(A) = 2$ entonces $\dim N(A^T) = 4 - r(A) = 2$ y una base para $N(A^T)$ está formada por las dos últimas filas de la matriz $L^{-1}P$; esta matriz se obtiene mediante la instrucción $\text{INVL_P}(A)$, la cual simplifica como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto, una base para } N(A^T) \text{ es } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

EJERCICIO 5 (Análisis de solubilidad de un sistema)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{pmatrix} k^2 & 2k & -1 \\ k^2 & 3k & 1 \\ -k^2 & -3k & k^2 - k - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ (k-7)/2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar todos los valores de k para los cuales el sistema dado posee :

- i) Solución única.
- ii) Infinito número de soluciones.
- iii) Ninguna solución.

b) Resuelva el sistema :

- i) Para un valor de k, con el cual exista solución única.
- ii) Para un valor de k, con el cual existan infinitas soluciones.

Solución

Declaramos la matriz A de coeficientes y el vector de términos independientes b .

Construimos la matriz aumentada (A : b) mediante la función M:= APPEND_COL(A,b) . Para

escalonar esta matriz debemos tener presente que las componentes de A no son numéricas y por lo tanto la función ESCALONE_(A,b) no es aplicable en este caso; procedemos entonces paso a paso mediante la función PIVOT, así :

N:=PIVOT(M, 1, 1) simplifica como

$$\begin{pmatrix} k^2 & 2k & -1 & 3 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & -k & k^2 - k - 2 & \frac{k-1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego ejecutamos la instrucción U:=PIVOT(N, 2, 2) , la cual simplifica como

$$\begin{pmatrix} k^2 & 2k & -1 & 3 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - k & \frac{k-1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, activando el comando FACTOR RATIONAL sobre la matriz U obtenemos

$$\begin{pmatrix} k^2 & 2k & -1 & 3 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-1) & \frac{k-1}{2} \end{pmatrix}$$

De donde podemos concluir lo siguiente :

- a) i) El sistema posee solución única si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ ya que así, todas las columnas de coeficientes poseen pivote.
- ii) El sistema posee infinitas soluciones si $k=1$.

iii) El sistema no es soluble si $k=0$.

b) i) Si $k=3$ el sistema tiene solución única.

Mediante `MANAGE SUBSTITUTE` actuando sobre `U`, sustituimos k por 3 y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos T a esta matriz aumentada, podemos resolver el sistema correspondiente mediante la función `RESUELVA_1(BORRE_COL(T,4), T`sub4)`, la cual simplifica como

$$\left[\frac{23}{54}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{6} \right]$$

ii) Para $k=1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Mediante los comandos `MANAGE SUBSTITUTE` sobre `U`, sustituimos k por 1 y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si a esta matriz la llamamos S , teniendo en cuenta que los pivotes están en las columnas 1 y 2 resolvemos el sistema mediante la función

$$\text{RESUELVA}((\text{BORRE_COL}(S,4)), S'\text{sub4}, [1,2]),$$

al simplificar obtenemos
$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 + 3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

Por lo tanto, para $k=1$ el sistema tiene infinitas soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; x_3 \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 6 : (Subespacios de \mathbb{R}^n y ortogonalidad)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 20 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, c = \begin{pmatrix} -17 \\ 9 \\ 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -40 \\ -64 \\ 38 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}, H = \text{gen } S.$$

- Encuentre H mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.
- Halle una base y la dimensión de H .

- c) Halle una base y la dimensión de H^\perp .
- d) Determine si el vector c pertenece a H y, en caso afirmativo, expréselo como combinación lineal de los vectores de S . De cuántas maneras puede hacerlo?
- e) Halle las matrices de proyección ortogonal sobre H y sobre H^\perp .
- f) Encuentre las componentes ortogonales de d en H y en H^\perp .

Solución

$$H = \text{gen } S = R(A) \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 & -1 \\ 3 & 12 & -1 & 3 \\ 5 & 20 & 0 & 7 \\ 7 & 28 & 7 & 1 \\ 4 & 16 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Mediante DECLARE MATRIX entramos la matriz A y mediante DECLARE VECTOR, entramos el vector c .

- a) Para hallar H , mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores, escalonamos la matriz aumentada $(A:b)$ donde b es vector genérico; con DERIVE este procedimiento se logra simplificando la expresión $ESCALONE_B(A)$ y se obtiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 5 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & (-5b_1 - 25b_2 + 14b_3) / 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-43b_1 - 117b_2 + 42b_3 + 14b_4) / 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-23b_1 - 73b_2 + 28b_3 + 14b_5) / 14 \end{array} \right)$$

Luego,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \in R^5 : \begin{cases} -43b_1 - 117b_2 + 42b_3 + 14b_4 = 0, \\ -23b_1 - 73b_2 + 28b_3 + 14b_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

- b) De la matriz escalonada asociada con A , correspondiente a las cuatro primeras columnas de la matriz resultante en a), observamos que los pivotes aparecen en las columnas 1, 3 y 4 y por lo tanto, una base para $R(A)$ es $\{A^{(1)}, A^{(3)}, A^{(4)}\}$. Luego, $\dim H = 3$ y una base para H es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$c) H^- = (R(A))^+ = N(A^T).$$

Para hallar una base de H^- , hallemos la matriz $L^{-1}P$, correspondiente a la factorización $PA = LU$, mediante la función $\text{Linp} := \text{INVL_P}(A)$, la cual simplifica como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/14 & -25/14 & 1 & 0 & 0 \\ -43/14 & -117/14 & 3 & 1 & 0 \\ -23/14 & -73/14 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $r(A) = 3$, entonces $\dim N(A^T) = 2$ y por lo tanto, una base para $N(A^T)$ está formada por las 2 últimas filas de la matriz $L^{-1}P$, dicha base es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -43/14 \\ -117/14 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23/14 \\ -73/14 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Sobre la matriz obtenida en a) activamos los comandos **MANAGE SUBSTITUTE** y sustituimos b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 , respectivamente por $-17, 9, 10, -7, -1$, así obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se concluye que el sistema $AX = c$ es soluble, por consiguiente c sí pertenece al subespacio H y puede expresarse como combinación lineal de los elementos de S de infinitas maneras, ya que $\dim H < \#(S)$. Para hallar las diferentes maneras de expresar c , basta resolver el sistema $AX = c$ mediante la función $\text{RESUELVA}(A, c, [1, 3, 4])$, la cual simplifica como

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 4x_2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Luego, $c = (2 - 4x_2)A^{(1)} + x_2A^{(2)} - 3A^{(3)}$; $x_2 \in \mathbb{R}$.

Mediante **MANAGE SUBSTITUTE** podemos hallar una solución particular, sustituyendo x_2

por -5 obtenemos $\begin{bmatrix} x_1 = 22 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 0 \end{bmatrix}$. Luego, $c = 22 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 20 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e) $H = R(A) = R(B)$ siendo B la matriz de columnas L.I formada por los vectores $A^{(1)}, A^{(3)}, A^{(4)}$ los cuales constituyen una base para H . Luego, la matriz de proyección ortogonal sobre H está dada por $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ y podemos hallarla mediante el siguiente procedimiento :

i) Formamos la matriz B , simplificando la expresión $B := \text{SELECCIONE}(A, [1, 3, 4])$ y se obtiene la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Calculamos la matriz de proyección ortogonal sobre H al simplificar la expresión $P_1 := B \cdot (B^T B)^{-1} \cdot B^T$ y sacando común denominador obtenemos

$$P_1 = \frac{1}{25678} \begin{pmatrix} 21987 & -6965 & 1970 & 3414 & -4136 \\ -6965 & 5411 & 7502 & 1322 & 1768 \\ 1970 & 7502 & 22616 & 898 & -2878 \\ 3414 & 1322 & 898 & 18840 & 10706 \\ -4136 & 1768 & -2878 & 10706 & 8180 \end{pmatrix}$$

iii) Calculamos la matriz de proyección ortogonal sobre H^\perp , mediante la expresión $ID(5) - P_1$ y sacando común denominador obtenemos

$$\frac{1}{25678} \begin{pmatrix} 3691 & 6965 & -1970 & -3414 & 4136 \\ 6965 & 20267 & -7502 & -1322 & -1768 \\ -1970 & -7502 & 3062 & -898 & 2878 \\ -3414 & -1322 & -898 & 6838 & -10706 \\ 4136 & -1768 & 2878 & -10706 & 17498 \end{pmatrix}$$

Otro método :

Si se tiene en cuenta que $\dim H^\perp < \dim H$, y que $H^\perp = R(M)$ donde M es la matriz cuyas columnas son las transpuestas de las dos últimas filas de la matriz $L^{-1}P$ denotada antes por $Linp$, podemos proceder como sigue :

i) Formamos la matriz M mediante $M := \text{SELECCIONE}(\text{Linp}^*, [4, 5])$,

$$M = \begin{pmatrix} -43/14 & -23/14 \\ -117/14 & -73/14 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Calculamos la matriz de proyección ortogonal sobre H^\perp , mediante la expresión $P_2 := M(M^T M)^{-1} M^T$.

iii) Calculamos la matriz P_1 , de proyección ortogonal sobre H , mediante la expresión $P_1 := \text{ID}(5) - P_2$.

f) La proyección ortogonal del vector d sobre el subespacio H , la obtenemos mediante la

expresión $c_1 := P_1 \cdot d$, la cual simplifica como $\begin{pmatrix} -17 \\ 9 \\ 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Luego, la componente ortogonal del vector d sobre H^\perp , se obtiene al simplificar $d - c_1$ y está

dada por $\begin{pmatrix} -23 \\ -73 \\ 28 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 7: (Ajuste por mínimos cuadrados)

La presión P de un gas correspondiente a diferentes volúmenes V se registró de la siguiente manera:

$V (\text{cm}^3)$	50	60	70	90	100
$P (\text{kgf}/\text{cm}^2)$	64.7	51.3	40.5	25.9	7.8

La ley de los gases ideales está dada por la ecuación $PV^\alpha = c$ donde α y c son constantes.

- Estimar, mediante el método de los mínimos cuadrados lineales, los valores de las constantes α y c .
- Calcular el error en la estimación de α y c .
- Estimar la presión debida al gas cuando éste ocupa un volumen de 80 cm^3 .

Solución

La ecuación $PV^\alpha = c$ no es lineal en α y c pero podemos hallar una ecuación lineal que nos permite estimar α y c ; tomando logaritmos a ambos miembros de la ecuación, obtenemos

$$\ln P + \alpha \ln V = \ln c$$

$$\ln c - \alpha \ln V = \ln P.$$

Al sustituir los datos en esta última ecuación obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\ln \alpha$ y c

$$\ln c - \alpha \ln 50 = \ln 64.7$$

$$\ln c - \alpha \ln 60 = \ln 51.3$$

$$\ln c - \alpha \ln 70 = \ln 40.5$$

$$\ln c - \alpha \ln 90 = \ln 25.9$$

$$\ln c - \alpha \ln 100 = \ln 7.8,$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & -\ln 50 \\ 1 & -\ln 60 \\ 1 & -\ln 70 \\ 1 & -\ln 90 \\ 1 & -\ln 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln c \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 64.7 \\ \ln 51.3 \\ \ln 40.5 \\ \ln 25.9 \\ \ln 7.8 \end{pmatrix}.$$

Para estimar $\ln c$ y α por el método de los mínimos cuadrados, podemos proceder como sigue: Nos colocamos en modo aproximado mediante los comandos `OPTIONS PRECISION APPROXIMATE` y luego simplificamos las siguientes expresiones:

$$u := [50, 60, 70, 90, 100]$$

$$p := [64.7, 51.3, 40.5, 25.9, 7.8].$$

Para generar la matriz de coeficientes del sistema damos la instrucción

$$A := \text{VECTOR}([1, -\ln x], x, u)$$

y al simplificar se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3.91202 \\ 1 & -4.09434 \\ 1 & -4.24849 \\ 1 & -4.49980 \\ 1 & -4.60517 \end{pmatrix}.$$

Generamos el vector de términos independientes simplificando $b := \text{VECTOR}(\ln x, x, p)$ y se obtiene $[4.16976, 3.93769, 3.70130, 3.25424, 2.05412]$.

Para resolver el sistema de ecuaciones normales simplificamos la expresión

$$\text{RESUELVA}_1(A \cdot A, A \cdot b) \text{ y obtenemos } [14.7580, 2.65326].$$

Luego, la solución en términos de mínimos cuadrados del sistema planteado es:

$$\ln c = 14.7580, \quad \alpha = 2.65326.$$

Por lo tanto, la mejor estimación en términos de mínimos cuadrados para c se obtiene al simplificar la expresión $c := \text{EXP}(14.7580)$, la cual nos entrega como resultado 2.56636×10^6 .

b) Para el cálculo del error simplificamos la expresión $\text{ABS}(b - A\bar{X})$, donde

$\bar{X} = [14.7580, 2.65326]$ es la mejor solución del sistema $AX = b$ en términos de mínimos cuadrados, encontramos así que el error es 0.718924.

c) Para estimar la presión debida al gas, para diferentes volúmenes V , definimos la función $p(V) := \frac{c}{V^2}$.

Luego, al simplificar $p(80)$ obtenemos 22.9047 kgf/cm^2 , hemos encontrado así la presión debida al gas cuando ocupa 80 cm^3 .

Otro método :

Mediante la función FIT, podemos hallar $\delta = \text{Inc}$ y α , así : simplificando la expresión

$\text{FIT}([v, \delta - \alpha \ln(v)], [u, \text{VECTOR}(\ln(x), x, p)])$, se obtiene $14.7585 - 2.65336 \ln(v)$ y por lo tanto, $\text{Inc} = 14.7585$ y $\alpha = 2.65336$; ahora, simplificando $c := \text{EXP}(14.7585)$ obtenemos $c = 2.56765 \times 10^6$.

EJERCICIO 8. (Bases ortonormales, factorización QR)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Determine si A posee factorización QR.
- Halle una matriz B de columnas L.I. tal que $R(A) = R(B)$.
- Encuentre la factorización QR de la matriz B hallada en b).
- Halle una base ortonormal para $R(A)$.
- Calcule la mejor solución del sistema $BX = d$ en términos de mínimos cuadrados.
- Calcule las proyecciones ortogonales del vector d sobre $R(A)$ y $N(A^T)$.
- Halle la matriz de proyección ortogonal sobre $R(A)$.

Solución

- Para saber si A tiene sus columnas L.I. simplificamos la expresión $\text{RANK}(A)$ y encontramos que el rango de A es 3, como $r(A) < \#$ de columnas de A , entonces las columnas de A son L.D. y por lo tanto A no posee factorización QR.
- Al simplificar la expresión $\text{ESCALONE}(A)$ obtenemos

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este resultado concluimos que las columnas 1, 2 y 4 de A constituyen una base para $R(A)$ y por lo tanto $B = (A^{(1)} A^{(2)} A^{(4)})$ es una matriz de columnas L.I. tal que $R(A) = R(B)$. Hallamos

B , mediante la expresión $SELECCIONE(A, [1, 2, 4])$ la cual simplifica a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $Q := \text{ORTONORMAL}(B)$ nos entrega la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{390}}{390} & -\frac{3\sqrt{1235}}{2470} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{2\sqrt{390}}{195} & -\frac{6\sqrt{1235}}{1235} \\ 0 & \frac{3\sqrt{390}}{65} & -\frac{11\sqrt{1235}}{2470} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{7\sqrt{390}}{390} & \frac{21\sqrt{1235}}{2470} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1235}}{38} \end{pmatrix}$$

Para hallar R podemos resolver simultáneamente los sistemas $QR^{(j)} = B^{(j)}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; como Q tiene sus columnas ortonormales, las soluciones para estos sistemas son de la forma $R^{(j)} = Q^T B^{(j)}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, $R = Q^T B$.

Al simplificar la expresión $R := Q^T \cdot B$ obtenemos

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{390}}{6} & -\frac{3\sqrt{390}}{65} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{1235}}{65} \end{pmatrix}$$

d) Ya que $R(A) = R(B) = R(Q)$, una base ortonormal para $R(A)$ es el conjunto $\{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}$ formado por las columnas de la matriz Q hallada en c).

e) La solución del sistema $BX = d$ en términos de mínimos cuadrados, es la única solución sistema $RX = Q^T d$; para hallarla, simplificamos la expresión *RESUELVA_1*($R, Q^T \cdot d$)

obtenemos $\left[-\frac{13}{38}, \frac{37}{19}, -\frac{3}{38} \right]$.

Luego, la mejor solución de $BX = d$ en términos de mínimos cuadrados es $\bar{X} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{38} \\ \frac{37}{19} \\ -\frac{3}{38} \end{pmatrix}$.

f) $\text{proy}_{R(A)} d = \text{proy}_{R(B)} d = B\bar{X}$.

Basta entonces con simplificar la expresión $p_1 := B\bar{X}$ y obtenemos $\left[\frac{13}{38}, -\frac{50}{19}, \frac{225}{38}, \frac{61}{38}, -\frac{3}{38} \right]$.

Luego, $\text{proy}_{N(A^T)} d = d - \text{proy}_{R(A)} d$, se obtiene al simplificar $d - p_1$ y está dada por el vector

$\left[\frac{63}{38}, \frac{31}{19}, \frac{41}{38}, -\frac{61}{38}, \frac{41}{38} \right]$.

g) La matriz P de proyección ortogonal sobre $R(A)$ se obtiene al simplificar $Q \cdot Q^T$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{13}{76} & -\frac{6}{19} & -\frac{3}{76} & -\frac{15}{76} & -\frac{3}{76} \\ -\frac{6}{19} & \frac{14}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{3}{76} & -\frac{3}{19} & \frac{65}{76} & \frac{21}{76} & -\frac{11}{76} \\ -\frac{15}{76} & \frac{4}{19} & \frac{21}{76} & \frac{29}{76} & \frac{21}{76} \\ -\frac{3}{76} & -\frac{3}{19} & -\frac{11}{76} & \frac{21}{76} & \frac{65}{76} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 9 (Determinantes)

a) i) Genere la matriz de Vandermonde de orden 4

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

- ii) Halle el determinante de V y factoricelo completamente.
- iii) Halle la traza de V .

b) Encuentre el cofactor V_{14} y factoricelo completamente.

c) i) Evalúe V en $x_i = i, i \in \{1, \dots, 4\}$ y asigne el resultado a la variable A .

- ii) Calcule el determinante de la matriz A .
- iii) Calcule el cofactor A_{23} .
- iv) Calcule la adjunta de la matriz A .
- v) Calcule $A \cdot \text{adj}(A)$.

Solución

a) i) $V := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}((x \downarrow j) \wedge i, j, 1, 4), i, 0, 3)$ simplifica a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

ii) Si simplificamos la expresión $\text{DET}(V)$ y sobre el resultado aplicamos el comando **FACTOR COMPLEX**, obtenemos el determinante de V factorizado de la siguiente manera

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

También puede obtenerse este resultado mediante la instrucción $\text{FACTOR}(\text{DET}(V))$.

iii) La expresión $\text{TRACE}(V)$ simplifica como $x_4^3 + x_3^2 + x_2 + 1$.

b) El cofactor $V_{1,4}$ puede hallarse simplificando la expresión $\text{COFACTOR}(V, 1, 4)$ y al factorizarlo se obtiene $x_1 x_2 x_3 (x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

Se puede realizar ésto directamente simplificando la expresión $\text{FACTOR}(\text{COFACTOR}(V, 1, 4))$

c) i) Activamos el comando **MANAGE SUBSTITUTE** y al sustituir x por $\{1, 2, 3, 4\}$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

Otro método consiste en crear la función $f(x) := V$ y simplificar luego $f(\{1, 2, 3, 4\})$.

Asignamos la matriz anterior a la variable A , mediante $A := \#n$ donde n es el número asignado a dicha matriz en la ventana de álgebra.

ii) $\text{DET}(A)$ simplifica a 12.

iii) $\text{COFACTOR}(A, 2, 3)$ simplifica a -84.

iv) $\text{ADJOINT}(A)$ simplifica a

$$\begin{pmatrix} 48 & -52 & 18 & -2 \\ -72 & 114 & -48 & 6 \\ 48 & -84 & 42 & -6 \\ -12 & 22 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

v) $A \cdot \text{ADJOINT}(A)$ simplifica a

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = (\det A) I_4.$$

EJERCICIO 10 (Valores y vectores propios)

Sea $M = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios de M .

Solución

Entramos la matriz M y luego hallamos su polinomio característico mediante la función CHARPOLY(M) la cual simplifica como

$$-w^5 + w^4 + 52w^3 - 43w^2 + 143w + 1042.$$

Intentamos factorizar este polinomio mediante el comando FACTOR COMPLEX en modo exacto y obtenemos $-w^5 + w^4 + 52w^3 - 43w^2 + 143w + 1042$.

Simplificamos en modo exacto la función EIGENVALUES(M) y obtenemos

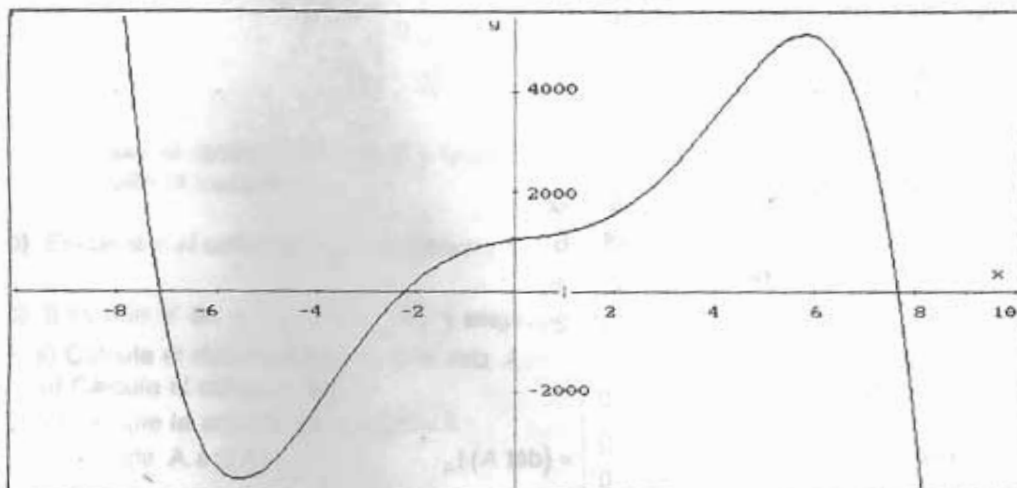
$$[w^5 - w^4 - 52w^3 + 43w^2 - 143w = 1042].$$

Nos pasamos entonces a precisión aproximada (O-P-A) e intentamos nuevamente factorizar el polinomio mediante los comandos FACTOR COMPLEX; obtenemos el mismo resultado:

$$-w^5 + w^4 + 52w^3 - 43w^2 + 143w + 1042.$$

Recurrimos entonces a la gráfica del polinomio característico para hallar vecindades de las raíces reales: Con el polinomio resaltado en la ventana de álgebra activamos los comandos PLOT OVERLAY y luego cambiamos el rango así: LEFT: -10, RIGHT: 10, BOTTOM: -4000, TOP: 5500.

Finalmente activamos de nuevo el comando PLOT dos veces y obtenemos la siguiente gráfica:



Observamos que las raíces reales del polinomio están en los intervalos $(-8, -7)$, $(-3, -2)$ y $(7, 8)$. Hallemos ahora las raíces activando el comando SOLVE(L), con el polinomio resaltado en la ventana de álgebra, así:

Eligiendo LOWER: -8 UPPER: -7, obtenemos $w = -7.13013$.

Eligiendo LOWER: -3 UPPER: -2, obtenemos $w = -2.24321$.

Eligiendo LOWER: 7 UPPER: 8, obtenemos $w = 7.66834$.

Las raíces restantes deben ser números complejos no reales; para hallarlas procedemos como sigue: Construimos el factor cúbico aproximado con los tres valores propios reales, dicho polinomio es $(w + 7.13013)(w + 2.24321)(w - 7.66834)$; a continuación podemos hallar el factor cuadrático, haciendo la división mediante la instrucción QUOTIENT($p(w)$, $q(w)$) donde $p(w)$ es el polinomio característico y $q(w)$ es el factor cúbico; se obtiene así el siguiente polinomio $-w^2 + 2.70499w - 8.49559$. Factorizando este polinomio cuadrático mediante los comandos FACTOR COMPLEX obtenemos: $-(w - 1.35249 + 2.58192i)(w - 1.35249 - 2.58192i)$. Luego los otros dos valores propios aproximados son $1.35249 - 2.58192i$ y $1.35249 + 2.58192i$.

EJERCICIO 11 (Aplicación de valores y vectores propios)

En una población animal, la edad máxima alcanzada por las hembras es de 15 años. Las hembras de dicha población se clasifican en tres grupos de edades $[0,5)$, $[5,10)$, $[10,15)$. De los 2 primeros grupos, cada año pasan al siguiente grupo el 20% y muere el 55%; del tercer grupo, cada año muere el 75%. Además, cada hembra del segundo grupo tiene anualmente 2 crías hembras y cada hembra del tercer grupo aporta 1 cría hembra anual.

- Encuentre una matriz M que permita hallar la población de hembras de dicha especie, por grupo en cualquier año, a partir de las poblaciones en el año inmediatamente anterior.
- Determine si la matriz M es diagonalizable y, en caso afirmativo, halle una matriz S diagonalizante para M y la diagonal asociada D .
- Si inicialmente se tenían 50 hembras en cada grupo, use la función VECTOR para determinar la población de hembras de dicha especie: i) Para el k -ésimo año. ii) Cada 10 años, hasta n años, $n \in \{50, 60, \dots\}$.
- i) Muestre que a largo plazo dicha población tiende a extinguirse.
ii) Entendiendo por extinción completa, que la población esté representada por un número menor que 1, determine en qué década se extinguirá toda la población.
iii) En qué década se extinguirá el grupo $[10,15)$?
iv) En qué década se extinguirá el grupo $[5,10)$?
v) Determine el tiempo aproximado en años que transcurrirá hasta que la población se extinga completamente.

Solución

- a_k : # de hembras en el grupo $[0,5)$ en el k -ésimo año.
- b_k : # de hembras en el grupo $[5,10)$ en el k -ésimo año.
- c_k : # de hembras en el grupo $[10,15)$ en el k -ésimo año.

Para el $(k + 1)$ -ésimo año tenemos:

$$a_{k+1} = 0.25a_k + 2b_k + c_k$$

$$b_{k+1} = 0.2a_k + 0.25b_k$$

$$c_{k+1} = 0.2b_k + 0.25c_k$$

$$\text{Sea } u_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}; \text{ entonces, } u_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 & 1 \\ 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix} u_k.$$

La matriz pedida es :

$$M = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 & 1 \\ 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}$$

- b) Obtenemos el polinomio característico de M mediante la función CHARPOLY(M), la cual simplifica como

$$\frac{1600 w^3 - 1200 w^2 - 340 w + 71}{1600}$$

Como para esta matriz no se encuentran los espacios propios en modo exacto (ver en VI) el ejemplo 3), nos colocamos en precisión aproximada y activamos el comando FACTOR COMPLEX con el polinomio resaltado en la ventana de álgebra y de esta manera obtenemos $(0.927523 - w)(w + 0.324815)(w - 0.147291)$.

Como los tres valores propios son diferentes, M sí es diagonalizable.

Hallemos ahora vectores propios aproximados asociados con los diferentes valores propios mediante la función APPROX_EIGENVECTOR :

APPROX_EIGENVECTOR (M, 0.927523) simplifica a [0.955755 , 0.282126 , 0.0832856],

$$v_1 := [0.955755 , 0.282126 , 0.0832856] .$$

APPROX_EIGENVECTOR(M, - 0.324815) nos da el vector [0.938350, - 0.326487, 0.113597].

$$v_2 := [0.938350 , - 0.326487 , 0.113597] .$$

APPROX_EIGENVECTOR(M, 0.147291) simplifica a [- 0.228396 , 0.444750 , - 0.866043] .

$$v_3 := [- 0.228396 , 0.444750 , - 0.866043] .$$

Como ejercicio calcule $A \cdot v_1 / 0.927523$, $A \cdot v_2 / (-0.324815)$, $A \cdot v_3 / 0.147291$ para comprobar que son buenas aproximaciones.

Ahora construimos la matriz diagonalizante mediante la instrucción $[v_1, v_2, v_3]^T$ la cual

simplifica como $\begin{bmatrix} 0.955755 & 0.938350 & -0.228396 \\ 0.282126 & -0.326487 & 0.444750 \\ 0.0832855 & 0.113596 & -0.866042 \end{bmatrix}$; nombremos esta matriz como

$$S := \begin{bmatrix} 0.955755 & 0.938350 & -0.228396 \\ 0.282126 & -0.326487 & 0.444750 \\ 0.0832855 & 0.113596 & -0.866042 \end{bmatrix}$$

La diagonal asociada es $D = \begin{pmatrix} 0.927523 & 0 & 0 \\ 0 & -0.324815 & 0 \\ 0 & 0 & 0.147291 \end{pmatrix}$.

c) Sabemos que $u_k = M^k u_0 \cong S D^k S^{-1} u_0$ con $u_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$; para hallar u_k podemos definir la función $U(k, u_0) := S \cdot (D \wedge k) \cdot S \wedge (-1) \cdot u_0$.

Por ejemplo, para $k = 5$ y $u_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$, la expresión $u(5, u_0)$ simplifica como

$$[94.9163, 27.7811, 8.28689].$$

Por lo tanto, al finalizar el quinto año habrá aproximadamente 95 hembras en el grupo [0,5), 28 en el grupo [5,10) y 8 en el grupo [10,15).

d) i) Como todos los valores propios de M tienen módulo menor que 1, u_k converge a 0 cuando k tiende a ∞ y por lo tanto, a_k, b_k y c_k también tienden a 0; esto muestra que la población se extinguirá.

Para hallar la sucesión $u_{10}, u_{20}, \dots, u_{10n}$, usamos la función VECTOR como sigue:

Definimos la función $f(n, u_0) := \text{VECTOR}(u(k, u_0), k, 10, n, 10)$ y luego evaluamos $f(n, u_0)$ para diferentes valores de n .

Por ejemplo, $f(50, u_0)$ simplifica como

$$\begin{pmatrix} 64.9049 & 19.1599 & 5.65584 \\ 30.5867 & 9.02882 & 2.66536 \\ 14.4138 & 4.25477 & 1.25604 \\ 6.79246 & 2.00504 & 0.591902 \\ 3.20091 & 0.944866 & 0.278931 \end{pmatrix}$$

$f(70, u_0)$ simplifica como

$$\begin{pmatrix} 64.9049 & 19.1599 & 5.6584 \\ 30.5867 & 9.02882 & 2.66536 \\ 14.4138 & 4.25477 & 1.25604 \\ 6.79246 & 2.00504 & 0.591902 \\ 3.20091 & 0.944866 & 0.278931 \\ 1.50841 & 0.445263 & 0.131444 \\ 0.710832 & 0.209828 & 0.0619428 \end{pmatrix}$$

Considerando que una población se extingue cuando el número aproximado de ejemplares es menor que 1, tenemos:

- ii) La última fila de $f(70, u_0)$ es la única que tiene todas sus componentes menores que 1; esto indica que la población se extinguirá totalmente en la década 7.
- iii) La fila 4 de $f(70, u_0)$ es la primera que tiene su tercera componente menor que 1; luego, el grupo [10,15) se extinguirá en la cuarta década.
- iv) La primera fila de $f(70, u_0)$ que tiene su segunda componente menor que 1 es la quinta; luego, el grupo [5,10) se extinguirá en la quinta década.
- v) Para determinar el tiempo que la población tarda en extinguirse hacemos una tabla de distribuciones de población para los años de la década 7, simplificando la función

VECTOR($u(k, u_0), k, 61, 69$)

y así obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1.39908 & 0.412992 & 0.121918 \\ 1.29768 & 0.383059 & 0.113081 \\ 1.20363 & 0.355296 & 0.104886 \\ 1.11639 & 0.329545 & 0.0972842 \\ 1.03548 & 0.305661 & 0.0902334 \\ 0.960435 & 0.283507 & 0.0836935 \\ 0.890826 & 0.262960 & 0.0776276 \\ 0.826261 & 0.243901 & 0.0720014 \\ 0.766376 & 0.226224 & 0.0667830 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que el tiempo aproximado para que la población se extinga es 66 años, ya que la primera fila de esta matriz con todas las componentes menores que 1 es la sexta.

PRACTICAS PROPUESTAS

1. Rectas y planos

En los ejercicios 1.1, 1.2, 1.3, suponga que $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ son los dígitos de su carné en orden.

EJERCICIO 1.1

Considere los siguientes puntos:

$$A: \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B: \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \quad C: \begin{pmatrix} a_3 + 2 \\ a_4 - 7 \\ a_6 \end{pmatrix}, \quad D: \begin{pmatrix} a_0 - 3 \\ a_1 + 5 \\ a_2 - 8 \end{pmatrix}.$$

- Determine si A, B, C son colineales y, en caso afirmativo, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por ellos.
- Si A, B, C no son colineales, encuentre:
 - La ecuación lineal del plano que ellos determinan.
 - La distancia del punto D al plano ABC.
 - La proyección ortogonal de \vec{AC} sobre \vec{AB} .
 - La distancia del punto C a la recta AB.
 - Las ecuaciones paramétricas de la recta AB.
 - Los ángulos interiores de triángulo ABC.
 - Halle la ecuación de la mediatriz del segmento de recta \overline{BC} , contenida en el plano ABC.
- Determine si los puntos A, B, C y D son coplanares.
- Halle la intersección de los planos cuyas ecuaciones son $a_0x + a_1y + a_2z + 5 = 0$ y $a_3x + a_4y + a_5z - a_6 = 0$.

EJERCICIO 1.2

Para cada par de rectas L_1 y L_2 dadas a continuación:

- Determine si L_1 y L_2 son perpendiculares.
- ¿Será L_1 paralela a L_2 ?
- Si L_1 y L_2 no son perpendiculares ni paralelas, halle el ángulo que ellas forman.
- Determine si L_1 y L_2 son coplanares y, en caso afirmativo, halle la ecuación lineal del plano que las contiene.

$$L_1: \frac{x - a_0}{a_0} = \frac{y + a_1}{a_1 + 2} = \frac{z - a_1}{1}; \quad L_2: \frac{x + a_1}{a_1 + 1} = \frac{-y + a_4}{a_0} = \frac{z}{a_0}$$

$$L_1: \frac{x - a_1}{a_3 + 3} = \frac{y - a_3}{a_4 + 4} = \frac{z + a_2}{a_5 + 5}; \quad L_2: \frac{x + a_1}{a_0} = \frac{y + a_4}{a_0 - 3} = \frac{z - a_5}{a_6 + 7}$$

$$L_1: \frac{x-a_2}{3a_1+1} = \frac{y+3}{2a_2+3} = \frac{z}{9a_3-12} ; L_2: \frac{x-a_0}{\left(a_1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{y-a_2}{\left(\frac{2}{3}a_2+1\right)} = \frac{z-6}{(3a_3-4)}$$

EJERCICIO 1.3

Considere los puntos:

$$A: \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B: \begin{pmatrix} a_0+1 \\ a_1-3 \\ a_2+7 \end{pmatrix}, \quad C: \begin{pmatrix} a_0-7 \\ a_1+2 \\ a_2-5 \end{pmatrix}$$

- Determine si A, B y C son colineales.
- Si A, B y C no son colineales, encuentre las ecuaciones paramétricas de las medianas del triángulo ABC.
- Si A, B y C son colineales, encuentre el lugar geométrico de todas las mediatrices del segmento de recta \overline{AB} .
- Si A, B y C no son colineales, halle el perímetro y el área del triángulo ABC.

2. Operaciones con matrices y vectores

EJERCICIO 2.1

Dadas las matrices y vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & -13 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -7 \\ 6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 13 \\ 5 & -1 & 15 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Hallar: $-3A + 2B^T$, $2AB - 4I_3$, $A(v+5w)$, $5A^{(1)} + 3A^{(2)} - 8A^{(3)} + A^{(4)}$, $2B_1 - 4B_2 + 5B_3 + 7B_4$.
- Encuentre una matriz C tal que $BA + 3C = 12I_4$.

EJERCICIO 2.2

- Genere una matriz $A \in R_{4 \times 5}$, cuyas componentes sean números aleatorios entre -30 y 30.
- Genere una matriz $B \in R_{5 \times 4}$, cuyas componentes sean números aleatorios entre -10 y 10.
- Halle las siguientes matrices: $A + 5B^T$, AB , $7A^T - B$, $AA^T + 2B^TB$.
- Determine si AB es invertible y, en caso afirmativo, halle su inversa.

EJERCICIO 2.3

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 2. Pruebe que $(AB - BA)^2 = \alpha I_2$ para algún valor de α .

EJERCICIO 2.4

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcular A^2 , A^3 , A^4 . Se le ocurre alguna fórmula general

para A^n , $n \in \mathbb{N}$?

EJERCICIO 2.5

Intente deducir una forma general para describir todas las matrices cuadradas de orden 4 que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Eliminación Gaussiana y subespacios fundamentales

EJERCICIO 3.1 Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 4 & 13 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 9 & 16 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & -1 & 10 \\ 5 & -5 & 10 & 15 & 7 & 26 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Encuentre una matriz escalonada a partir de A , por operaciones elementales de fila:
 - Mediante las funciones SWAP y PIVOT.
 - Utilizando la función ESCALONE.
 - Por el método del pivoteo parcial con SWAP y PIVOT.
 - Por el método del pivoteo parcial con ESCALONEP.
- Halle matrices P , L y U tales que $PA = LU$, donde P es de permutación, L es triangular inferior con diagonal unitaria y U es escalonada.
- Encuentre una base para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales asociados con la matriz A .
- Expresé el espacio columna y el espacio nulo de la matriz A , mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.
- Determine si los sistemas $AX = d$ y $AX = e$ son solubles.

EJERCICIO 3.2

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Para cuáles valores de α se satisface $R(A) = \mathbb{R}^3$?

EJERCICIO 3.3

Sean $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ los dígitos de su carné en orden.

a) i) Genere una matriz $M \in \mathbb{R}_{4,6}$, cuyas componentes estén dadas por

$$m_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} a_i a_j}{a_j + 1}, \quad i \in \{1, \dots, 4\}, \quad j \in \{1, \dots, 6\}.$$

ii) Cambie la fila 2 de M por $3M_1 - 4M_3$ y reasigne el resultado a la letra M .

b) Determine el rango de M .

c) Encuentre matrices P, L y U tales que $PM = LU$.

d) Halle una base y la dimensión para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales asociados con M .

e) Expresé $R(M^T)$ y $N(M)$ mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.

EJERCICIO 3.4

Para la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, caracterice todas las matrices A y B tales que

$$AM = 0 \quad \text{y} \quad MB = 0.$$

4. Sistemas de ecuaciones lineales y subespacios fundamentales**EJERCICIO 4.1**

$$\text{Sean: } A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -10 & -1 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & -20 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -22 \\ 25 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 11 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre las restricciones sobre las componentes de un vector $b \in \mathbb{R}^5$, para que b sea combinación lineal de las columnas de A .

b) Es el sistema $AX = d$ soluble? (justifique).

c) Es el sistema $AX = e$ soluble? (justifique).

d) Si alguno de los sistemas descritos en b) y c) es soluble, halle su solución general y exprese la como la suma de una solución particular de él más la solución general del sistema $AX = 0$.

e) Encuentre, si es posible, dos combinaciones lineales de las columnas de A que sean iguales al vector d .

f) Cuál es el espacio nulo de A ? (justifique).

EJERCICIO 4.2

$$\text{Sean : } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -6 & -3 & 4 \\ -5 & 5 & -10 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 17 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre matrices P , L y U tales que $PA = LU$.
- Resuelva simultáneamente los sistemas $AX = d_1$ y $AX = d_2$ y exprese la solución general de cada uno como la suma de una solución particular de él, más la solución general del sistema homogéneo $AX = 0$.
- Cuál es el espacio nulo de A ?
- Exprese el vector d_1 como una combinación lineal de las columnas de A .
- Existirá alguna columna de A que sea combinación lineal de las restantes? Justifique su respuesta y, en caso afirmativo, exprese alguna columna de A como combinación lineal de las restantes.
- Cuál es el espacio columna de A ? (Justifique).

EJERCICIO 4.3

$$\text{Sean : } S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \text{gen}S,$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Halle una matriz $A \in R_{4,5}$, tal que $H = R(A)$.
- Muestre que S es un conjunto linealmente dependiente y encuentre 2 combinaciones lineales no triviales de los vectores de S que produzcan el vector cero.
- Si A es la matriz hallada en 1), encuentre una base y la dimensión para el espacio nulo de A y también para su espacio fila.
- Encuentre una base para H que esté contenida en S .
- Halle H mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.
- Sea A la matriz hallada en 1).
 - Para cuáles vectores $b \in R^4$ es soluble el sistema $AX = b$?
 - Muestre que $AX = d$ es soluble y que $AX = c$ no es soluble.
 - Resuelva el sistema $AX = d$ y exprese su solución general como la suma de una solución particular de él más la solución general del sistema homogéneo $AX = 0$.
 - Exprese, si es posible, el vector d como combinación lineal de los vectores de S .
 - Encuentre matrices P , L y U tales que $PA = LU$.
 - Encuentre una base y la dimensión del espacio nulo izquierdo de A .

- g) Será el vector z un elemento de $N(A^T)$?
- h) Será el sistema $A^T Y = f$ soluble ? Justifique.
- i) Son las filas de la matriz A linealmente independientes ? Justifique.

EJERCICIO 4.4

$$\text{Sea } H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 ; 3x_1 + 4x_4 - x_5 = 0 \right\}.$$

- 1) Encuentre una matriz $B \in \mathbb{R}_{2 \times 5}$ tal que $H = N(B)$.
- 2) Halle una base y la dimensión de H .
- 3) Encuentre una matriz M de columnas L.I. tal que $H = R(M)$.
- 4) Halle una matriz N , cuyas filas sean L.I. tal que $H = R(N^T)$.

EJERCICIO 4.5

Sean $k =$ último dígito de su carné,
 $s =$ penúltimo dígito de su carné,
 $c =$ promedio entre k y s .

- 1) Generar una matriz $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{3 \times 4}$ tal que $b_{ij} = i + j + k^s$.
- 2) Hallar la matriz A que se obtiene al cambiar en la matriz B , la fila 3 por c veces la fila 1.
- 3) Hallar el espacio columna de A mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores e interpretarlo geoméricamente.
- 4) Generar el vector d tal que $d_i = 10 + 4(i + k^s)$, para $i \in \{1, 2, 3\}$ y determinar si el sistema $Ax = d$ es soluble.
- 5) Para el vector e que se obtiene al sustituir en d la componente d_3 por cd_1 :
 - i) Determinar si el sistema $AX = e$ es soluble y, en caso afirmativo, resolver el sistema
 - ii) Decir cuántas combinaciones lineales de las columnas de A producen el vector e y exhibir, si es posible, 2 de ellas.
- 6) Encontrar una base y la dimensión del espacio nulo de A .
- 7) Hallar al menos 2 combinaciones lineales de las columnas de A que produzcan el vector cero.
- 8) Encontrar una base para el espacio nulo izquierdo de la matriz A .
- 9) Expresar $N(A^T)$ mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.

EJERCICIO 4.6

Sean a_1, a_2, a_3, a_4 los últimos 4 dígitos de su carné. Hallar todos los polinomios cúbicos que pasan por los puntos

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + 7 \\ -a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_1 - 5 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Elegir 3 de estos polinomios y graficarlos superpuestos.

EJERCICIO 4.7

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -4x_1 + 8x_2 - 2kx_3 - 10x_4 &= -2k \\ 2x_1 - 3x_2 + k^2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 2k^2x_4 &= k \end{aligned}$$

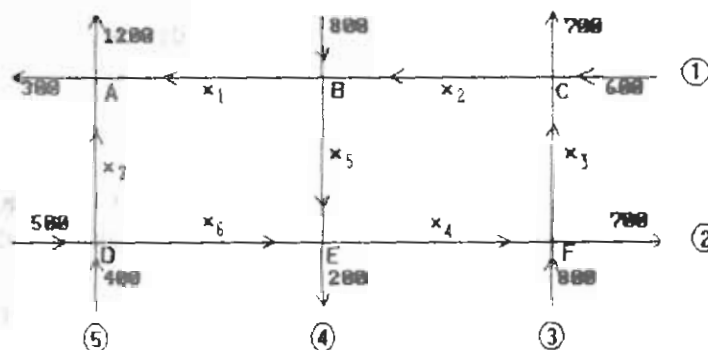
- Halle todos los valores de k para los cuales el sistema :
 - Tiene solución única.
 - No posee solución.
 - Posee infinitas soluciones.
- Para cada valor de k , tal que el sistema tenga infinitas soluciones, encuentre su solución general y exprésela como la suma de una solución particular de él , más la solución general del sistema homogéneo asociado.

EJERCICIO 4.8

- Establecer la ecuación de la curva que pasa por los puntos $\left(\frac{\pi}{2\pi}, \frac{\pi/2}{\pi/4}\right)$ y tiene la forma $a \sin x + b \cos y = 0$.
- Establecer la ecuación de la curva que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y tiene la forma $ae^x + be^{-y} + ce^{2x} + de^{-2y} = 0$.

EJERCICIO 4.9

Considere el siguiente diagrama donde se señala el flujo vehicular por hora sobre las calles aledañas a las intersecciones A,B,C,D,E y F de cierta ciudad.



Suponiendo que los vehículos que entran a una intersección deben también salir, plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar el flujo vehicular por hora, sobre cada

calle, entre cada par de intersecciones. Resolver el sistema planteado. Cuántas soluciones existen? De las soluciones halladas, cuántas tienen sentido en este problema? Determine el número de vehículos entre cada par de intersecciones, que hacen mínimo el flujo vehicular sobre la calle 2 entre las intersecciones E y F.

5. Independencia lineal, bases y dimensión

EJERCICIO 5.1

En el espacio vectorial \mathbb{R}^5 , sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

- Hallar los valores de a para los cuales S es linealmente independiente.
- Es el primer vector combinación lineal de los demás, para algún valor de a ?
- Si $a = -2$, es el cuarto vector combinación lineal de los tres primeros? en caso afirmativo, hallar una combinación lineal de los tres primeros vectores que produzca el cuarto.
- Si $a = -2$, hallar una base para el subespacio generado por S .

EJERCICIO 5.2

Sean:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \text{gen} S; \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad W = \text{gen} T.$$

- Es S linealmente independiente? . Es T linealmente independiente?
- Encuentre :
 - Una base para H y una base para W .
 - H y W mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.
 - Una base para $H \cap W$.

EJERCICIO 5.3

Sea P_2 , el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y coeficientes reales. Determine, para cada conjunto dado, si él es linealmente independiente.

$$S = \{t^2 + t + 51, t - 2, t + 3\}, \quad T = \{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}, \quad L = \{5t^2 - 3t + 8, t^2 + t - 11, t + 3\}.$$

6. Ajuste por mínimos cuadrados

EJERCICIO 6.1

- Sean a_0, a_1, a_2, a_3 los últimos 4 dígitos de su carné; simplificar la expresión $\text{RANDOM}(-a_0 a_1 a_2 a_3)$ y luego realizar lo siguiente :
 - Generar un polinomio cúbico en la variable x con coeficientes aleatorios entre -10 y 10.
 - Generar un vector de orden 8, cuyas componentes sean números aleatorios entre -50 y 50.
- Generar un vector c de orden 8, evaluando el polinomio hallado en 1 a) en cada una de las componentes del vector $v = \frac{1}{10}u$, donde u es el vector hallado en 1 b).
- Crear un vector b de orden 8, tal que $b_i = c_i + (-2)^i \times 10^{-2}$, $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ donde c_i es la i -ésima componente del vector c , hallado en 2.
- Graficar los puntos $\begin{pmatrix} v_i \\ b_i \end{pmatrix}$, $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ (Ayuda : aplique el comando PLOT sobre la matriz $N = \begin{pmatrix} v & b \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$).
- Hallar el polinomio cúbico que mejor se ajusta a la nube de puntos graficada en 4 siguiendo el método de los mínimos cuadrados paso a paso. Hallar el error.
- Graficar el polinomio hallado en 5, superpuesto con la nube de puntos. Qué observa?
- Sea N la matriz cuyas columnas son los vectores v y b . Realizar la instrucción $\text{FIT} \left([x, r + sx + tx^2 + lx^3], N \right)$ y comparar el resultado con el polinomio hallado en 5.

EJERCICIO 6.2

Se supone que el recorrido R , de un auto, en kilómetros por galón, depende del volumen total V de los cilindros del motor, en pulgadas cúbicas, de acuerdo con la función $R = \alpha + \beta v$. Estimar los valores de α y β por el método de los mínimos cuadrados, si se tiene la siguiente información para once modelos diferentes de automóviles :

V	388	312	284	560	340	560	392	388	536	340	444
R	51	57	62	45	44	42	53	48	39	51	41

Graficar los puntos $\begin{pmatrix} V \\ R \end{pmatrix}$ y la recta $R = \alpha + \beta v$ en un mismo sistema de coordenadas.

EJERCICIO 6.3

Un supermercado estima que el número de artículos vendidos de cada uno de sus diferentes productos, y , depende de su precio, t , en miles de pesos, según la función $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Estime los valores de las constantes a_0, a_1, a_2 por el método de los mínimos cuadrados, a partir de la siguiente información:

t	1.95	3.20	8.00	1.00	5.95	4.90	6.95	9.95	4.35	5.00
y	116	137	169	98	163	156	168	163	150	157

Haga un gráfico de la nube de puntos $\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}$ y otro de la curva $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ en el mismo sistema de coordenadas y prediga el número de artículos vendidos si el precio es 6800 pesos.

EJERCICIO 6.4

En una exhibición se registró, para diferentes embarcaciones, su peso p en toneladas y su precio v en millones de pesos según la siguiente tabla :

p	2	4	5	8	10	12
v	10.5	13.5	13.5	20.0	23.0	31.0

Para tratar de relacionar estas dos variables, se hizo una gráfica de v en función de p , la-cual sugirió una relación de la forma $v = r_0 + r_1 p + r_2 p^2$. A partir de los datos dados :

- Estime las constantes r_0, r_1, r_2 correspondientes a la parábola que mejor se ajusta a los datos.
- Estime el error.
- Prediga el precio de una embarcación de 7 toneladas.

EJERCICIO 6.5

Para los puntos

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, P_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, P_3: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, P_4: \begin{pmatrix} 2 \\ 21 \end{pmatrix} \text{ y } P_5: \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- Halle el polinomio cúbico que mejor se ajusta a la nube de puntos y estime el error.
- Grafique la nube de puntos y el polinomio hallado en un mismo sistema de coordenadas.

7. Ortogonalidad entre vectores y subespacios de R^n

EJERCICIO 7.1

$$H = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Encuentre una base y la dimensión de H .
- Encuentre una base y la dimensión de H^\perp .
- Construya una matriz A de columnas L.I. tal que $H = R(A)$.
- Para la matriz A hallada en 3 :
 - Encuentre la factorización QR de A .
 - Encuentre la mejor solución de $AX = b$ en términos de mínimos cuadrados.
- Encuentre las componentes ortogonales de b en H y en H^\perp .
- Halle la distancia de b a H .
- Encuentre una base ortonormal para H .
- Encuentre una base ortonormal para R^5 que contenga la base de H hallada en 7.

9. Halle las matrices de proyección ortogonal sobre H y sobre H^\perp .
 10. Encuentre vectores $h_1 \in H$ y $h_2 \in H^\perp$ tales que $c = h_1 + h_2$.

EJERCICIO 7.2

Sean $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ los dígitos de su carné en orden,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} d_1 x + d_2 y - d_3 z + d_4 w = 0 \\ d_0 x - d_5 z + d_6 v = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

- Hallar:
 - Una base y la dimensión de H .
 - Las matrices de proyección ortogonal sobre H y H^\perp .
 - Una base ortonormal para H .
 - Las componentes ortogonales de b en H y en H^\perp .
 - Una base ortonormal para \mathbb{R}^5 que contenga la base de H , hallada en c).
- Expresar $\text{proy}_H b$ como C.L. de los vectores de la base hallada en 1 c).
- Si A es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base de H hallada en 1 a), hallar:
 - Una matriz Q de columnas ortonormales y una matriz R triangular superior invertible tales que $A = QR$.
 - La mejor solución de $AX = b$ en términos de mínimos cuadrados, utilizando las matrices Q y R .

EJERCICIO 7.3

Sean:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \text{gen} S, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Muestre que S es base para H .
- Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores de S en el orden dado.
 - Encuentre la factorización QR para A .
 - Halle una base ortonormal para $R(A)$.
 - Resuelva el sistema $AX = b$ usando las matrices Q y R .
 - Encuentre la matriz de proyección ortogonal sobre $R(A)$.
 - Halle la mejor solución, en términos de mínimos cuadrados, para el sistema $AX = c$, por dos métodos diferentes:
 - Resolviendo el sistema $AX = p$, donde $p = \text{proy}_{R(A)} c$.
 - Mediante las matrices Q y R .
- Cuáles son las componentes ortogonales del vector c en H y en H^\perp ?

4. Cuál es el complemento ortogonal de H ?
5. Halle una base ortonormal para \mathbb{R}^5 que contenga la base de H hallada en 2. ii).

EJERCICIO 7.4

Sean $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ los dígitos de su carné en orden,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ -d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ -3d_2 \\ d_5 \\ -d_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 - 1 \\ d_2 \\ -4d_3 \\ d_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_0 + 1 \\ d_1 - 4d_2 \\ 3d_3 + d_5 \\ d_4 - d_6 - d_5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} d_1 \\ -3d_2 \\ d_0 \\ d_6 - 7 \end{pmatrix}.$$

Considere el subespacio H de \mathbb{R}^4 , formado por todas las combinaciones lineales de los vectores del conjunto S .

- a) Determine si S es linealmente independiente.
- b) Encuentre una base y la dimensión de H .
- c) Encuentre una base y la dimensión de H^\perp .
- d) Exprese H y H^\perp mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores.
- e) Halle las matrices de proyección ortogonal sobre H y H^\perp .
- f) Encuentre el vector de H^\perp más cercano al vector b .
- g) Halle la distancia del vector b al subespacio H .
- h) Encuentre un subconjunto S' de S tal que S' sea L.I. y además $\text{gen } S' = H$.
- i) Si A es la matriz cuyas columnas son los vectores del conjunto S' hallado en h), encuentre la factorización QR de A .
- j) Halle una base ortonormal para H .
- k) Exprese la proyección ortogonal de b sobre H como combinación lineal de los vectores de la base ortonormal hallada en j).

8. Determinantes

EJERCICIO 8.1

Para cada uno de los siguientes conjuntos, use la función DET y el comando FACTOR, para hallar todos los valores de α para los cuales el conjunto es linealmente dependiente.

$$\text{a) } S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{b) } L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{c) } T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{d) } N = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 5\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

EJERCICIO 8.2

Encuentre el volumen del paralelepípedo de aristas \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} donde :

$$A: \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, B: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, C: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, D: \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8.3

Determine si los puntos $A: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B: \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C: \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D: \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ son coplanares.

Si los puntos anteriores no son coplanares, encuentre el volumen del paralelepípedo de aristas \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} .

EJERCICIO 8.4

Sea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{pmatrix}$

- Genere la matriz A, usando la función VECTOR.
- Halle el determinante de A y factorícelo completamente.
- Evalúe A para $x_i = i+1$, $i \in \{1,2,3,4\}$ y si B es la matriz así obtenida, encuentre la matriz adjunta de B y la inversa de B por el método de la adjunta.

9. Valores y vectores propios**EJERCICIO 9.1**

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 13.7 & 34.8 & -116 \\ -5.8 & -15.3 & 5.8 \\ 0 & 0 & 2.1 \end{pmatrix}$.

- Encuentre el polinomio característico de A.
- Halle todos los valores propios de A con sus respectivas multiplicidades algebraicas.
- Determine si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, halle una matriz S diagonalizante para A y la matriz diagonal asociada Λ .
- Es $A^T - 5I$ una matriz diagonalizable? Justifique y, en caso afirmativo, encuentre una matriz diagonalizante para $A^T - 5I$ y su diagonal asociada.
- Existirá una base para \mathbb{C}^3 formada por vectores propios de A? Justifique su respuesta y, en caso afirmativo, halle una de tales bases.

- f) Es A una matriz invertible? En caso afirmativo, cuáles son los valores propios de A^{-1} ? Justifique sus respuestas.
- g) Existirá una base ortonormal para \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A ? Justifique.

2. Para $A = \begin{pmatrix} 24.55 & 46.60 & 46.60 \\ -4.66 & -8.07 & -9.32 \\ -9.32 & -18.64 & -17.39 \end{pmatrix}$ realice todos los literales indicados en 1.

EJERCICIO 9.2

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 19/10 & -31/20 & 139/60 & 1117/210 & -26/15 \\ -1 & -7/2 & 17/2 & 142/21 & 5/2 \\ 0 & -2 & 14/3 & 142/21 & 5/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3/7 & 0 \end{pmatrix}$.

- Halle el polinomio característico $p(w)$ de A .
- Grafique el polinomio hallado en a) y encuentre aproximaciones de sus raíces reales.
- Encuentre un vector propio, aproximado, asociado a cada valor propio real de A .
- Construya el factor $q(w)$ correspondiente a las raíces halladas y luego encuentre el otro factor aproximado mediante la función $\text{QUOTIENT}(p(w), q(w))$; finalmente, factorice el resultado para hallar las raíces restantes.

EJERCICIO 9.3

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -62.1 & 92.025 & -29.325 & -12.25 & 7.7 \end{pmatrix}$.

- Halle el polinomio característico de A .
 - Encuentre los valores propios de A .
 - Halle los espacios propios de A .
 - Es A diagonalizable?, en caso afirmativo, encuentre una matriz diagonalizante para A y la diagonal asociada.
2. Realice los literales de 1. para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -22.7 & -26.9 & -6.3 & -46.5 \\ -59.7 & -40.9 & 20.9 & -99.5 \\ 15.9 & 9.6 & -8.4 & 26.5 \\ 43.8 & 36.5 & -7.3 & 78.2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 66.2 & 58 & -116 & 116 \\ 120.6 & 89.6 & -42.6 & 201 \\ -21 & -15 & 7.6 & -35 \\ -99.6 & -79 & 28.6 & -169.4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 154 & -24 & -36 & -1608 & -336 \\ -126 & 16 & 18 & 1314 & 270 \\ 54 & 0 & 4 & -540 & -108 \\ 24 & 0 & 0 & -236 & -48 \\ -42 & -12 & -18 & 366 & 70 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2513 & 596 & -414 & -2583 & 1937 \\ 127 & -32 & 33 & 132 & -81 \\ -421 & 94 & -83 & -434 & 306 \\ 2610 & -615 & 443 & 2684 & -1994 \\ 90 & -19 & 29 & 94 & -50 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 9.4

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Encuentre el polinomio característico de A .
 - Halle los valores propios de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas.
 - Determine si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre una matriz diagonalizante para A y la diagonal asociada.
 - Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de A .
 - Encuentre, si es posible, una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal Λ , tales que $Q^T A Q = \Lambda$.
 - Calcule las matrices de proyección ortogonal sobre los diferentes espacios propios de A y exprese, si es posible, la matriz A como una combinación lineal de dichas matrices.
 - Halle las proyecciones ortogonales de b sobre los diferentes espacios propios de A y exprese b y Ab , en términos de dichas proyecciones.
2. En cada caso, realice todos los literales del ejercicio 1.

i) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

ii) $A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 53 & -37 & -6 & -5 \\ -37 & 8 & -33 & 4 \\ -6 & -33 & 45 & -3 \\ -5 & 4 & -3 & 56 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

iii) $A = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 31 & 12 & 9 & -15 \\ 12 & 14 & 36 & -60 \\ 9 & 36 & -7 & -45 \\ -15 & -60 & -45 & 41 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

iv) $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 67 & 5 & -20 & 5 \\ 5 & 47 & 10 & 25 \\ -20 & 10 & 37 & 10 \\ 5 & 25 & 10 & 47 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 9.5

Sean $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ los últimos 6 dígitos de su carné. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & -d_4 & d_5 \\ -d_4 & d_2 & -d_6 \\ d_5 & -d_6 & d_3 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre :
 - El polinomio característico de A
 - Los valores propios de A en forma aproximada (o exacta si es posible).
 - Los espacios propios de A en forma aproximada (o exacta si es posible).
- Es A una matriz diagonalizable? Justifique su respuesta y, en caso afirmativo, encuentre (en forma aproximada o exacta, si es posible) una matriz S diagonalizante para A y la diagonal asociada Λ . Calcule SAS^{-1} y compare con la matriz A . Calcule $S^{-1}AS$ y compare con Λ .

EJERCICIO 9.6

Si d_4, d_5, d_6, d_7 son los últimos cuatro dígitos de su carné, simplificar la instrucción **RANDOM** ($-d_4d_5d_6d_7$) y luego realizar los siguientes literales:

- Generar una matriz $A \in R_{4,4}$ cuyas componentes sean números aleatorios tomados del intervalo $(-5,5)$ y calcular la matriz $M = AA^T$.
- Hallar el polinomio característico de M y graficarlo.
- Hallar los valores propios de M en forma aproximada, o exacta si es posible.
- Hallar los espacios propios de M en forma aproximada, o exacta si es posible.
- Es M una matriz diagonalizable? Justificar su respuesta y, en caso afirmativo, encontrar en forma aproximada, o exacta si es posible, una matriz diagonalizante S para M y la diagonal asociada Λ . Calcular SAS^{-1} y comparar con la matriz M . Calcular $S^{-1}MS$ y comparar con la matriz Λ .

EJERCICIO 9.7

El siguiente modelo para la demanda de automóviles considera sólo factores de distribución, que dependen de la edad y el stock existente. Supongamos que todos los coches tienen edades de 0 a 1, de 1 a 2 o de 2 a 3 años; cuando un coche tiene 3 años se sustituye por uno nuevo, el 10% de los coches son reemplazados cuando tienen 2 años; además el número de coches que se mantiene en circulación es siempre el mismo.

- Halle una matriz A que permita relacionar la distribución de coches según su edad, en cada año, con la correspondiente al año inmediatamente anterior.
- Encuentre los valores propios de A .
- Cuál puede ser la distribución inicial de coches, según su edad, para que dicha distribución se mantenga siempre igual?

EJERCICIO 9.8

Los habitantes de cierta ciudad realizan sus compras en una de las tres cadenas de almacenes existentes X, Y, Z . Cada mes el 20% de los clientes de la cadena Y y el 10% de los de la cadena Z deciden cambiarse para la cadena X ; además la cadena Y capta el 10% de los clientes de X y el 30% de los de Z . Por su parte la cadena Z logra conquistar el 10% de los clientes de cada una de las otras dos cadenas.

- a) Encuentre la distribución de clientes en las tres cadenas para el k -ésimo mes, suponiendo que inicialmente se tenían x , y , z clientes en las cadenas X , Y , Z respectivamente.
- b) Si inicialmente, el 20% de los habitantes le compraba a X , el 30% a Y y el 50% a la cadena Z , encuentre el porcentaje de clientes de cada una de las tres cadenas :
- En el mes 12.
 - A largo plazo.
- c) Para las condiciones iniciales dadas en b) :
- Defina una función que sirva para elaborar una tabla de distribuciones de clientes de las tres cadenas, por años, a partir de la fecha inicial hasta n años.
 - Construya la tabla de distribuciones para 15 años.

EJERCICIO 9.9

Las casas de habitación de cierta ciudad están clasificadas en cuatro estratos para efectos del pago de servicios públicos. Supóngase que cada década, de los habitantes de casas de estrato 1, el 20% se traslada a casas de estrato 2 y el 10% a casas de estrato 3; de los habitantes de casas de estrato 2 el 70% se trasladan a casas de estrato 1, mientras que un 30% pasa a estrato 3. De los habitantes de casas de estrato 3, un 40% pasa a estrato 1 y un 20% a estrato 2. Por otro lado, el 30% de los habitantes de estrato 4 se traslada a estrato 3.

Si inicialmente había 140000 habitantes en el estrato 1, 350000 en el estrato 2, 560000 en el estrato 3 y 420000 en el estrato 4,

- Encuentre la distribución de habitantes, según su estrato, en la k -ésima década
- Puede modelar este problema como un proceso de Markov ? (Justifique) .
- Posee ese proceso una distribución límite ? En caso afirmativo, halle u_∞ .
- A largo plazo, cuál será la distribución de los habitantes según su estrato ?
- Use la función VECTOR para elaborar una tabla que contenga las distribuciones de habitantes según su estrato, para 6 décadas consecutivas a partir del período inicial.

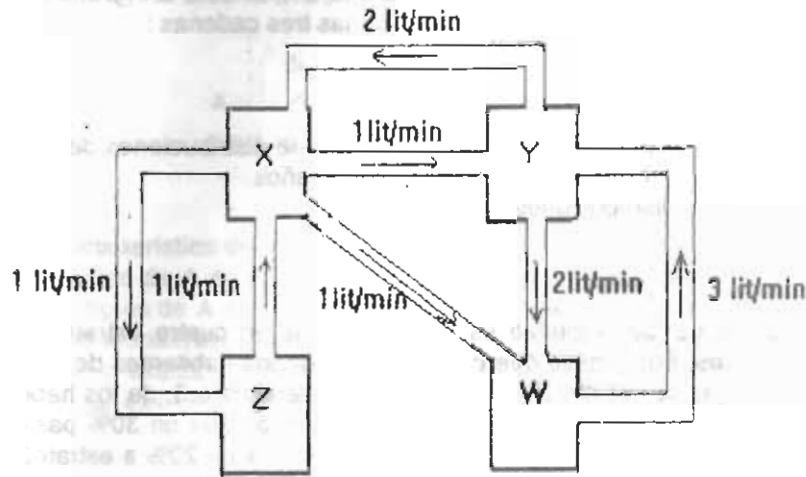
EJERCICIO 9.10

En cierta empresa se ha establecido una rotación de personal entre cuatro dependencias A , B , C y D , de la siguiente manera : cada año el 80% de los empleados de la dependencia A se traslada a la dependencia B ; de los empleados de B , el 75% se traslada a A y el 25% a la dependencia C . Por su parte, el 12.5% de los empleados de C se trasladan a la dependencia A , mientras que 37.5% se traslada a B . Finalmente, el 50% de los empleados de la dependencia D se trasladan a la dependencia A . Si inicialmente se tenían 1610 empleados en A , 1520 en B , 1610 en C y 1700 empleados en D ,

- Encuentre la distribución de empleados en las cuatro dependencias en el k -ésimo año.
- Puede modelar este problema como un proceso de Markov ? (Justifique).
- Posee este proceso una distribución límite ? En caso afirmativo, halle u_∞ .
- A largo plazo, cuál será la distribución de los empleados en las cuatro dependencias ?
- A largo plazo, cuál será la probabilidad de que un empleado, elegido al azar entre los trabajadores de dicha empresa labore en la dependencia B ? .

EJERCICIO 9.11

En una tintorería se realiza un proceso en el que se mezcla un líquido con un polvo químico, haciendo pasar la mezcla por cuatro tanques X , Y , Z , W , cada uno de 10 litros de capacidad, mediante el flujo indicado en la siguiente figura



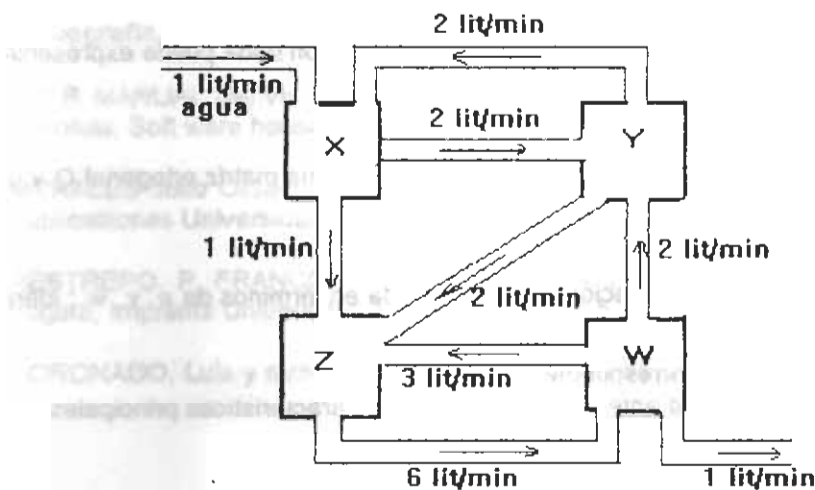
En la figura se indica, por ejemplo, que del tanque X fluye mezcla hacia cada uno de los otros tres tanques a razón de 1 litro por minuto. De Y fluye hacia X a razón de 2 litros por minuto, etc..

Supóngase que inicialmente todos los tanques estaban llenos del líquido y que se colocaron en el tanque X 1000 grs del polvo químico, en Y 2000 grs., en Z 100 grs. y en el tanque W 500 grs.; se desea hallar la cantidad de polvo químico presente en cada tanque para cada instante t .

- Modele este problema como un sistema dinámico con condición inicial.
- Encuentre una función $u(t)$ que permita hallar la cantidad de polvo químico presente en cada tanque para cada instante t .
- Analice la estabilidad del sistema dinámico y prediga el comportamiento de su solución a largo plazo.
- Trabajando en modo aproximado con 6 dígitos:
 - Elabore una tabla que muestre la cantidad de polvo químico presente en cada tanque, cada 20 minutos, desde el instante inicial hasta completar 2 horas y 40 minutos.
 - Construya una tabla que muestre la cantidad de polvo químico presente en cada tanque desde el minuto 130 hasta el minuto 140; determine, a partir de esta tabla, el tiempo aproximado que se tarda en tener en todos los tanques aproximadamente igual cantidad de polvo químico.

EJERCICIO 9.12

En el proceso de limpieza de un conjunto de cuatro tanques X, Y, Z, W, intercomunicados y cada uno de 100 litros de capacidad, se establece un flujo de agua con detergente entre dichos tanques como se indica en la siguiente figura:



Supóngase que inicialmente se colocaron 500 grs de detergente en el tanque X, 1000 grs en Y, 1000 grs en el tanque Z y 500 grs en W.

- Encuentre una función que permita hallar la cantidad de detergente presente en cada tanque para cualquier instante t .
- Construya una tabla en la que se muestre la cantidad de detergente presente en cada tanque, cada hora, durante el segundo día.
- Si se considera que un tanque está prácticamente limpio cuando contiene menos de 1gr de detergente, determine, a partir de la tabla anterior, el tiempo aproximado en horas que demora la limpieza de los cuatro tanques.

EJERCICIO 9.13

Resolver el siguiente sistema dinámico, analizar su estabilidad y predecir el comportamiento de su solución a largo plazo.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -2x(t) + 2y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 2x(t) - 4y(t) + 2w(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= 6z(t) - 6w(t)\end{aligned}$$

$$x(0) = 5 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad z(0) = 7 \quad , \quad w(0) = 1$$

EJERCICIO 9.14

Considere la ecuación cuadrática $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz = 10$.

- a) Si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, muestre que la ecuación dada puede expresarse en forma matricial como $V^T A V = 10$.
- b) Muestre que A es diagonalizable unitariamente y encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal Λ , tales que $Q^T A Q = \Lambda$.
- c) Si $Z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = Q^T V$, exprese la ecuación cuadrática dada en términos de u, v, w ; identifique luego la superficie cuadrática correspondiente.
- d) Grafique la superficie cuadrática anterior e identifique sus características principales.

Bibliografía.

USER MANUAL Derive : Versión 3 : a Mathematical assistant for your personal computer. Honolulu, Soft ware house, 1994, 373 p.

MORALES Julio César. Hagamos matemáticas y gráficas con derive. Medellín, Centro de Publicaciones Universidad Nacional, 1996, 70 p.

RESTREPO, P. FRANCO, R. MUÑOZ, L. E. Algebra Lineal con aplicaciones, Santafé de Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1997, 615 p.

CORONADO, Luis y otros. Prácticas de Matemáticas con derive. Madrid, Clagsa. 1994, 418 p.