



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

**CONTEO SOBRE LOS POLIMINÓS ASOCIADOS
A LAS PALABRAS DE CATALAN**

DIANA ANDREA TOQUICA ARENAS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2022

Conteo sobre los Poliminós asociados a las Palabras de Catalan

Diana Andrea Toquica Arenas

Trabajo Final presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director:

Ph. D. José Luis Ramírez Ramírez

Línea de investigación:

Combinatoria Enumerativa

Grupo de investigación:

DiscreMath: Matemáticas Discretas y Ciencias de la
Computación

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2022

Resumen

Las palabras de Catalan son palabras sobre los números naturales cuyo crecimiento está restringido. El conjunto de palabras de Catalan está enumerado por los números de Catalan. En este trabajo se presentan las funciones generatrices para los poliminós asociados a las palabras de Catalan de acuerdo al área, el semiperímetro, los puntos interiores y el grado de los vértices. Además se muestran los resultados obtenidos para las relaciones de recurrencia y fórmulas exactas para el número total de estos parámetros.

Palabras Claves

Números de Catalan, palabras de Catalan, poliminós, área, semiperímetro, puntos interiores, grados de los vértices.

Abstract

Catalan words are restricted growth words over the positive integers. The Catalan words are enumerated by the well-known Catalan sequence. In this work we give the generating functions for polyominoes associated to Catalan words according to the area, semiperimeter, interior lattice points and vertices degrees.

We also find recurrence relations and exact formulas for the total number of these statistics.

Keywords

Catalan numbers, Catalan words, polyominoes, area, semiperimeter, interior lattice points, vertices degree.

*"Tibi se cor meum totum subiicit,
Quia te contemplans totum deficit."*

St. Tomasso d'Aquino

*"Totus tuus ego sum, et omnia mea tua
sunt. Accipio te in mea omnia.
Praebe mihi cor tuum, Maria"*

St. Louis-Maria Grignon

Índice general

1. Los números y palabras de Catalan	10
1.1. Números de Catalan	10
1.1.1. Conteo de las triangulaciones de un polígono convexo con $n + 2$ vértices	11
1.1.2. Conteo de los árboles binarios con n vértices	14
1.1.3. Conteo de las trayectorias de Dyck de longitud $2n$	15
1.2. Palabras de Catalan	17
2. Área y Semiperímetro	21
2.1. Función generatriz para la estadística del Área y Semiperímetro	21
2.1.1. Función generatriz para el Área	25
2.2. Distribución conjunta para el área y el semiperímetro	27
2.3. Fórmula para el semiperímetro total	29
2.4. Fórmula para el área	32
3. Puntos Interiores	34
3.1. Función generatriz para los Puntos Interiores	34
3.2. Fórmula para el total de Puntos Interiores	39
4. Grado de los Vértices	44
4.1. Función generatriz para el Grado de los Vértices	44
4.2. Fórmula para el total de los Vértices de cada Grado	50
5. Conclusiones y trabajo futuro	54
Bibliografía	56

Introducción

Los números de Catalan son una de las sucesiones de números más importantes en la combinatoria dado que está relacionada con varios objetos combinatorios. El matemático americano Richard Stanley mostró 214 objetos combinatorios enumerados por los números de Catalan [9]. Estos números han sido estudiados desde hace un poco más de doscientos años.

La historia de los números de Catalan involucra distintos matemáticos y escuelas científicas [7]. Inicialmente, se tienen registros que estos números estuvieron involucrados en el estudio de la relación entre las identidades trigonométricas y las series de potencia realizado por el astrónomo y matemático mongol Sharabiin Myangat en 1730, pero la relación con los números de Catalan en su trabajo fue observada por Luo Jianjin sólo hasta 1988. Por otro lado, en la década de 1750 Leonhard Euler le propuso a Johann Segner el problema de contar el número de triangulaciones de un polígono de n lados. Como resultado de este estudio se obtuvo la recurrencia de los números de Catalan C_n dada por

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad n \geq 0, \quad C_0 = 1.$$

Euler intercambió algunas cartas con Goldbach y Segner durante 1750, lo cual dio lugar (especialmente por la asesoría dada por Segner) a la definición de C_n como el número de triangulaciones de un polígono con $n + 2$ lados y, además se establecieron los valores para C_n con $n \leq 8$ e incluso definió la función generatriz para los números de Catalan como

$$A(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 14x^3 + 42x^4 + 132x^5 + \dots = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x^2}.$$

En Octubre de 1951, Goldbach notó que la función generatriz $A(x)$ satisfacía la igualdad

$$1 + xA(x) = A(x)^{\frac{1}{2}},$$

y sugirió que esta ecuación podría ser utilizada para encontrar los números de Catalan usando los coeficientes de una familia infinita de ecuaciones. Esta observación junto con los resultados

de Segner y Euler dieron una prueba acerca de la recurrencia y la función generatriz de los números de Catalan.

En 1838, el matemático Orly Terquem planteó el cuestionamiento sobre una forma más sencilla de deducir los resultados de Segner y Euler, lo cual dio lugar a una solución dada por Gabriel Lemé que usaba un argumento de doble conteo sobre el número de triangulaciones A_n de un polígono de $n + 2$ lados con una de sus $n - 1$ diagonales orientadas. Inspirado por este trabajo, el estudiante de Joseph Liouville, Eugène Charles Catalan se interesó en el estudio y fue el primero en obtener las fórmulas

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Historicamente, esta sucesión de números ha sido conocida como los *números de Segner* o los *números de Euler-Segner* pero, según [7], desde las investigaciones realizadas por el matemático norteamericano John Riordan en la década de 1960, se le atribuye el nombre de los números de Catalan.

Dentro de los objetos combinatorios contados por C_n se encuentran las trayectorias de Dyck de longitud $2n$. Una trayectoria de Dyck es una concatenación de pasos en el plano cartesiano que inicia en el punto $(0, 0)$ y finaliza en $(2n, 0)$, formada por pasos de la forma $U = (1, 1)$ y $D = (1, -1)$ de manera que dicha trayectoria no pasa por debajo del eje x . En la Figura 1 se muestran las trayectorias de Dyck de orden 6.

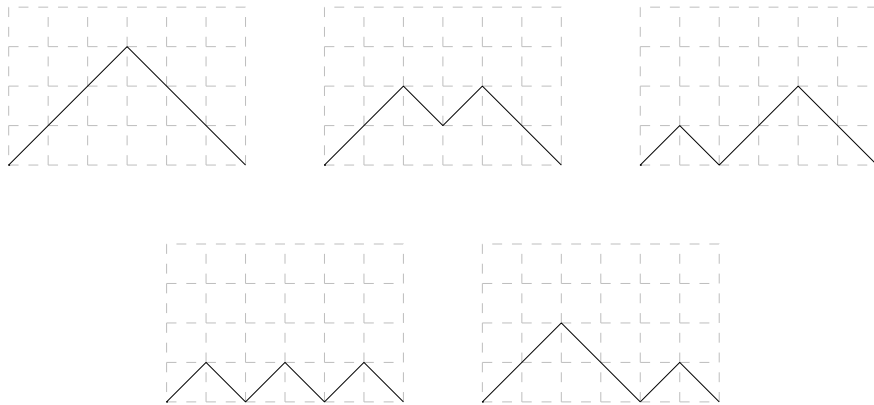


Figura 1: Trayectorias de Dyck de longitud 6.

Los números de Catalan también cuentan las palabras de Catalan. Una palabra de Catalan ω de longitud n es una concatenación de enteros positivos $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$ tal que $\omega_1 = 1$ y $1 \leq \omega_i \leq \omega_{i-1} + 1$ para $i = 2, \dots, n$. El conjunto de las palabras de Catalan de longitud n se nota por C_n . Por ejemplo, si $n = 3$ se tiene que $C_3 = \{111, 112, 121, 122, 123\}$ y si $n = 4$, se

tiene que

$$\mathcal{C}_4 = \{1111, 1112, 1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234\}.$$

Una palabra de Catalan ω puede ser representada por un poliminó o diagrama de barras cuya i -ésima columna contiene w_i bloques para $1 \leq i \leq n$. Por ejemplo, la palabra $123455422 \in \mathcal{C}_9$ puede ser representada por el diagrama de barras de la Figura 2.

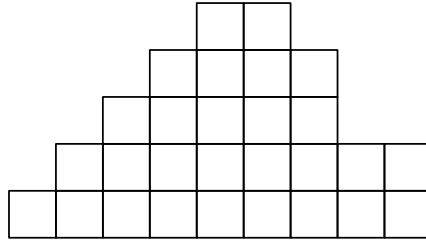


Figura 2: Diagrama de barras de la palabra de Catalán 123455422.

A partir de la representación como poliminó, surgen preguntas acerca de estadísticas o parámetros que se pueden definir sobre ellas. Por ejemplo, se puede considerar el área de la representación de $\omega \in \mathcal{C}_n$ dada por la cantidad de bloques de la representación o el semiperímetro de la representación dado por la mitad del perímetro de la misma; el estudio de estas estadísticas fue desarrollado por Callan, Mansour y Ramírez en el 2021 [1]. También se define la estadística de los puntos interiores del diagrama de barras la cual está dada por el total de vértices que son adyacentes a exactamente cuatro bloques de la representación y el grado de cada uno de los vértices de cada bloque de la representación definido como la cantidad de aristas incidentes al vértice en cuestión.

Este documento está dividido en 4 capítulos. En el Capítulo 1 de este documento se hace una presentación de las generalidades de los números de Catalan así como de las biyecciones con algunos objetos combinatorios: las triangulaciones de un polígono con $n + 2$ vértices, el números de árboles binarios con n vértices, las trayectorias de Dyck de longitud $2n$ y las palabras de Catalan de longitud n . En el Capítulo 2 se muestran las técnicas utilizadas para obtener resultados relacionados con el Área y el Semiperímetro de los diagramas de barras asociados a las palabras de Catalan. En el Capítulo 3 se presentan los resultados obtenidos en relación al número de Puntos Interiores de los poliminós. Finalmente, el Capítulo 4 trata sobre el Grado de los Vértices al considerar el poliminó como un grafo.

Resultados obtenidos con el desarrollo de este trabajo:

- **Artículo de investigación:** Counting lattices points on bargraphs of Catalan words.

T. Mansour, J.L. Ramirez, D.A. Toquica. Mathematics in Computer Science, (2021), 701-713.

■ **Conferencias:**

- Congreso CONVImaTE. *Algunas estadísticas sobre los poliminós asociados a las palabras de Catalan*. Evento virtual con apoyo de la Universidad del Valle. 24 de enero de 2022.
- Seminario Sabanero de Combinatoria. *Polominós asociados a las Palabras de Catalan*. Universidad Pontificia Javeriana. 19 de mayo de 2022.
- VII Encuentro Colombiano de Combinatoria ECCO2022. *Algunas Estadísticas sobre los Poliminós asociados a las Palabras de Catalan*. Universidad Pontificia Javeriana. 22 de junio de 2022.

Capítulo 1

Los números y palabras de Catalan

En este capítulo se muestran algunas generalidades acerca de los números y las palabras de Catalan que son la base para todo el trabajo.

1.1. Números de Catalan

Los números de Catalan C_n son una sucesión de números naturales cuya fórmula está dada por

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0$$

y que satisface la recurrencia

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad (1.1)$$

donde $C_0 = 1$ y $n \geq 0$.

De lo anterior, se tiene que los valores iniciales de C_n son

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 14, \quad 42, \quad 132, \quad 429, \quad 1430, \quad \dots$$

Teorema 1. *La función generatriz de los números de Catalan está dada por*

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (1.2)$$

Demostración. Multiplicando (1.1) por x^n y sumando sobre $n \geq 0$ se tiene

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) x^n.$$

Del producto de Cauchy se obtiene que

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C^2(x),$$

de donde la solución para $0 = xC^2(x) - C(x) + 1$ es

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Utilizando el teorema del binomio para el exponente $\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - \dots,$$

y, la solución con signo positivo está dada por

$$C(x) = \frac{1 + 1 - 2x - 2x^2 - \dots}{2x} = \frac{1}{x} - 1 - x - \dots,$$

cuyos coeficientes no coinciden con los valores de C_n . Ahora, la solución con signo negativo está dada por

$$C(x) = \frac{1 - 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \dots}{2x} = 1 + x + 2x^2 \dots +,$$

cuyos coeficientes coinciden con C_n . Por lo tanto,

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

□

A continuación se presentan algunas estructuras combinatorias enumeradas por los números de Catalan, lo cual puede ser visto en más detalle en el libro de Richard Stanley [9]. En particular, se presenta la relación del conteo de las triangulaciones de un polígono convexo con $n + 2$ vértices, los árboles binarios con n vértices y las trayectorias de Dyck de tamaño $2n$ con los números de Catalan.

1.1.1. Conteo de las triangulaciones de un polígono convexo con $n + 2$ vértices

Sea \mathcal{P}_n un polígono convexo con n vértices. Se define una triangulación \mathcal{T} de \mathcal{P}_n como un conjunto de $n - 1$ diagonales que no se cruzan en su interior; lo cual da lugar a $n - 2$ triángulos en el interior de \mathcal{P}_n . Por ejemplo, en la Figura 1.1 se pueden observar las triangulaciones de los polígonos con 3, 4, 5 y 6 vértices.

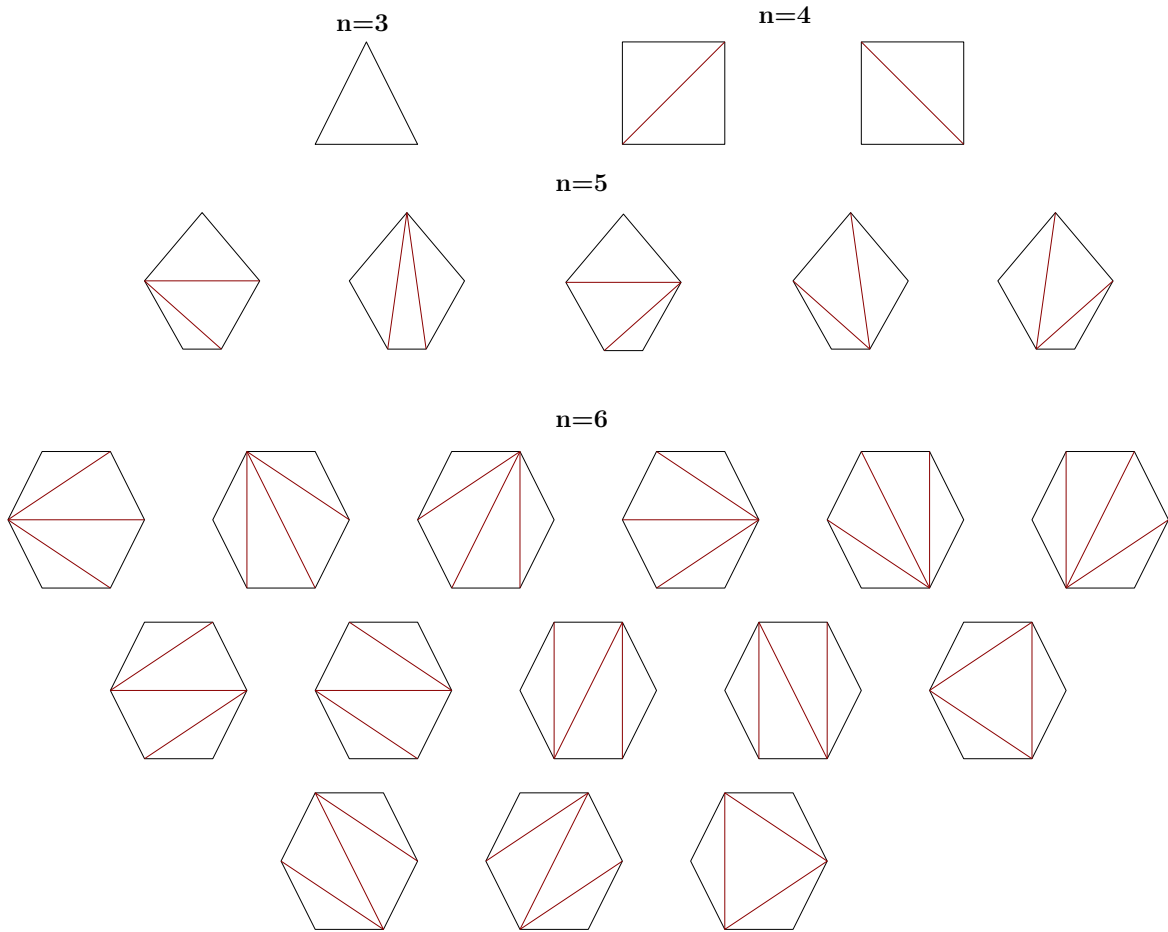


Figura 1.1: Triangulaciones de polígonos convexos con n vértices.

Teorema 2. *El número de triangulaciones de \mathcal{P}_{n+2} está dado por C_n .*

Demostración. Sea t_n la sucesión del número de triangulaciones en \mathcal{P}_{n+2} ; el objetivo es mostrar que t_n satisface la misma recursión que C_n .

Sea \mathcal{P}_{n+2} un polígono convexo con $n + 2$ lados, b un lado de \mathcal{P}_{n+2} y \mathcal{T} una triangulación de \mathcal{P}_{n+2} , ver Figura 1.2.

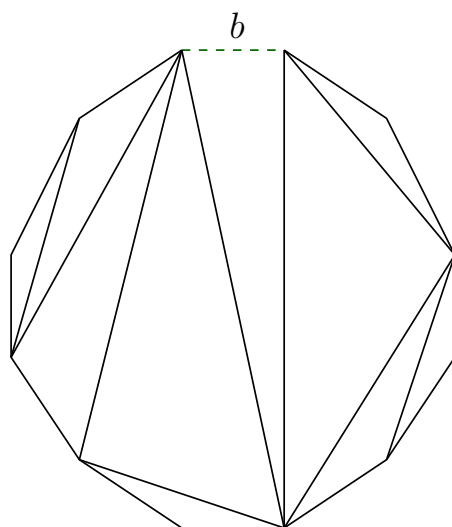


Figura 1.2: Descomposición de un polígono convexo triangulado.

Al eliminar el lado b de \mathcal{P}_{n+2} , se obtienen dos polígonos triangulados, \mathcal{A} y \mathcal{B} , que tienen un vértice en común, como se puede observar en la Figura 1.3.

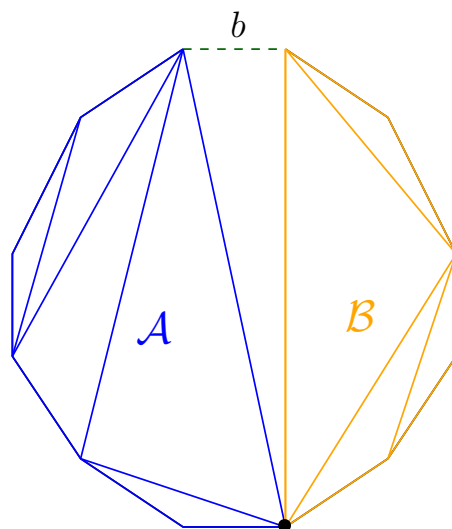


Figura 1.3: Polígonos triangulados resultantes al eliminar un lado del polígono.

Sea a_1 el número de triángulos en \mathcal{A} y sea b_1 el número de triángulos en \mathcal{B} . Es claro que $a_1 + b_1 = n$; por ejemplo, en el polígono en la Figura 1.2 con $n = 9$, fijando b y siguiendo el procedimiento descrito, se tiene que $a_1 = 5$ y $a_2 = 4$, como se ve en la Figura 1.3. En el caso en que \mathcal{A} o \mathcal{B} tenga un sólo lado (esto ocurre cuando el triángulo \mathcal{T} que contiene a b tiene un lado adicional en \mathcal{P}_{n+2} , como en el caso $n = 1$), necesariamente adyacente a b , se considera el lado como un polígono de 3 lados, que tiene $t_0 = 1$ triangulación.

De lo anterior, el número de triangulaciones en \mathcal{P}_{n+2} resulta ser el producto de las triangulaciones en cada \mathcal{A} y \mathcal{B} donde \mathcal{A} tiene $n - a_1$ vértices, es decir t_{n-k} triangulaciones y \mathcal{P}_2 que tiene b_1 vértices es decir t_k triangulaciones.

Por otro lado, dados dos polígonos triangulados con $a_1 + 2$ y $b_1 + 2$ vértices, se pueden unir para formar un polígono triangulado con $n + 2$ lados reversando el proceso descrito previamente. Ahora, como hay t_n triangulaciones de \mathcal{P}_{n+2} , se obtiene la relación de recurrencia

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \cdots + t_n t_0 = \sum_{k=0}^n t_{n-k} t_k$$

que coincide con la recurrencia dada en (1.1), tal como se quería mostrar. \square

1.1.2. Conteo de los árboles binarios con n vértices

Un árbol binario es definido recursivamente de la siguiente forma:

- El conjunto \emptyset es un árbol binario.
- De otra forma, un árbol binario tiene una raíz v , un subárbol izquierdo B_1 y un subárbol derecho B_2 , los cuales son también binarios.
- Un árbol binario se construye poniendo la raíz v en la parte superior, el subárbol izquierdo en la parte izquierda de la raíz y el subárbol derecho en la parte derecha de la raíz. La Figura 1.4 corresponde a los árboles binarios que tienen 3 vértices.

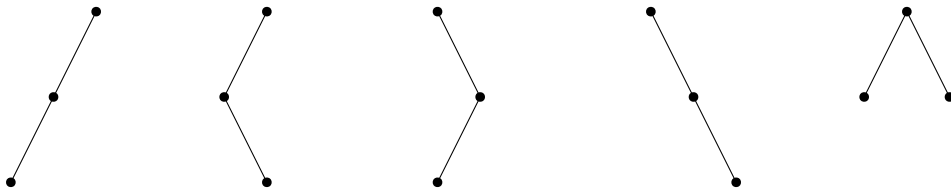


Figura 1.4: Árboles binarios con 3 vértices.

Teorema 3. *El número de árboles binarios con n vértices corresponde al número de Catalan C_n .*

Demostración. Para la demostración se usará el resultado del Teorema 2. Dado un polígono convexo y una triangulación \mathcal{T}_n como la de la Figura 1.2, se fija un lado b del polígono y en cada uno de los triángulos de \mathcal{T}_n se ubica un vértice. Se define v como el vértice ubicado en el triángulo que tiene como uno de sus lados a b ; este vértice será la raíz del árbol binario.

Ahora, a partir de v se buscan los vértices contenidos en los triángulos de \mathcal{T}_n formados por los otros dos lados del triángulo que contiene a v (distintos de b). De forma que estos dos lados se nombran f_1 y f_2 según el sentido de las manecillas del reloj.

Se nombra f'_2 a la arista que une a v con el vértice del triángulo adyacente formado por f_1 , y la arista que une al vértice del triángulo adyacente formado por f_2 , se nombra f'_1 . Este proceso se repite con todos los triángulos de \mathcal{T}_n de forma que al considerar v como la raíz, f'_1 y f'_2 las aristas izquierda y derecha respectivamente se tiene un árbol binario B con n vértices. Lo anterior puede ser visto en la Figura 1.5. Esta correspondencia resulta ser una biyección.

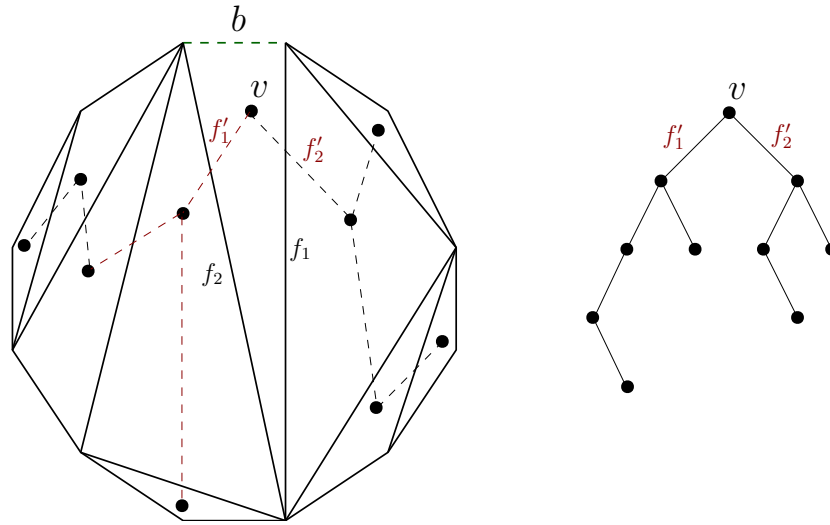


Figura 1.5: Árbol binario asociado a la triangulación de un polígono.

□

1.1.3. Conteo de las trayectorias de Dyck de longitud $2n$

Ahora, se muestra que los números de Catalan cuentan las trayectorias de Dyck de longitud $2n$.

Definición 4. Una trayectoria de Dyck de longitud $2n$ es una concatenación de pasos en el plano cartesiano que inicia en el punto $(0, 0)$ y finaliza en $(2n, 0)$, formada por pasos de la forma $U = (1, 1)$ y $D = (1, -1)$ tal que dicha trayectoria no pasa por debajo del eje x .

En la Figura 1.6 se muestran las trayectorias de Dyck de longitud 6.

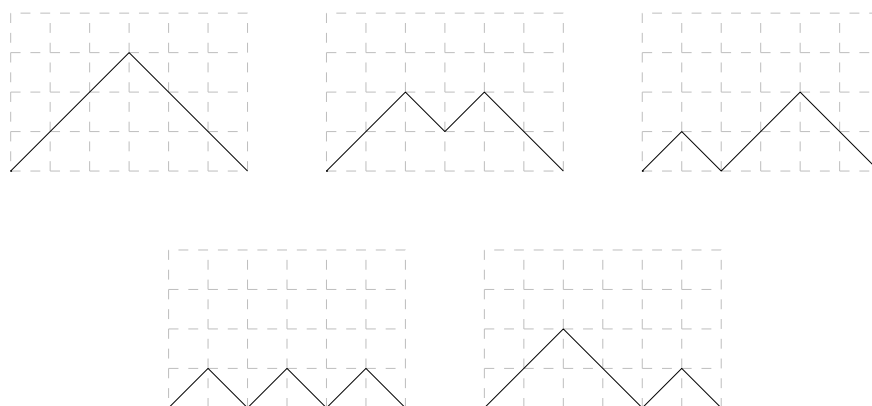


Figura 1.6: Trayectorias de Dyck de longitud 6.

A continuación, se muestra la relación de las trayectorias de Dyck con los números de Catalan.

Teorema 5. *El número de trayectorias de Dyck de orden n está dado por el número de Catalan C_n , para $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $n \geq 0$. La cantidad de pasos para llegar de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ está dado por $\binom{2n}{n}$ dado que, por definición, la cantidad de pasos en total es $2n$, de los cuales n pasos son de la forma U y n de la forma D . Estas trayectorias podrían cortar al eje x .

Para encontrar el número total de trayectorias de Dyck de longitud $2n$, se restará el número de trayectorias *no permitidas* al resultado anterior, es decir aquellas que pasan debajo del eje x . Para esto, se utilizará una reflexión sobre el eje x .

Sea Q una trayectoria no permitida (ver Figura I en 1.7). Sea $y = -1$ el nuevo eje x para Q . Ahora, sea $P_0 = (x, y)$ el primer punto en el cual Q corta al eje x , y sin pérdida de generalidad, sea $y = -1$ (ver II en la Figura 1.7). Al considerar la reflexión de la trayectoria a la derecha de P_0 , sobre el eje $y = -1$ se tiene que el punto final de esta trayectoria tiene como coordenada $(2n, -2)$ (ver III en la Figura 1.7). Por lo tanto, para contar las trayectorias no permitidas, se cuenta la cantidad de trayectorias (sin restricciones) de $(0, 0)$ hasta $(2n, -2)$.

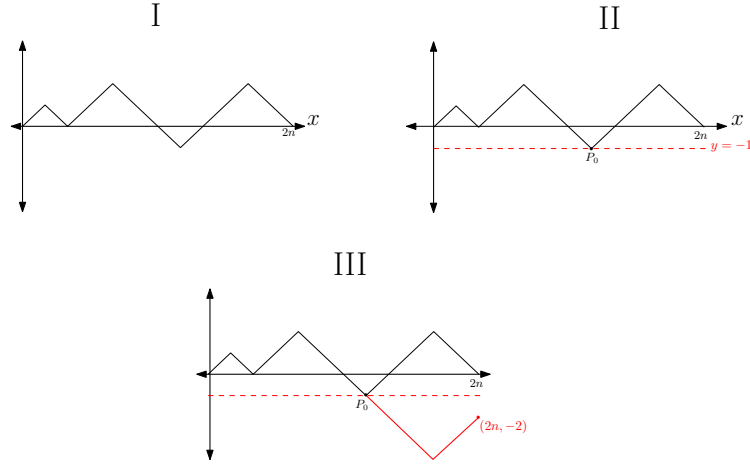


Figura 1.7: Reflexión de una trayectoria no permitidas en las trayectorias de Dyck, sobre un eje distinto a x .

Usando el razonamiento de la primera parte de esta demostración, el número de trayectorias (sin restricciones) de $(0, 0)$ hasta $(2n, -2)$ está dado por $\binom{2n}{n-1}$. Por lo tanto, el número de trayectorias de Dyck de orden $2n$ es

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

que corresponde a la fórmula de C_n . □

1.2. Palabras de Catalan

A continuación se presenta la definición de las palabras de Catalan, las cuales son enumeradas por los números de Catalan.

Definición 6. Una palabra de Catalan ω de longitud n es una concatenación de enteros positivos $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$ tal que $\omega_1 = 1$ y $1 \leq \omega_i \leq \omega_{i-1} + 1$ para $i = 2, \dots, n$. El conjunto de las palabras de Catalan de longitud n se nota por \mathcal{C}_n .

Ejemplo 7. Para $n = 3$ se tiene que

$$\mathcal{C}_3 = \{111, 112, 121, 122, 123\}.$$

Para $n = 4$ se tiene que

$$\mathcal{C}_4 = \{1111, 1112, 1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234\}.$$

En la Figura 1.8 se muestra una representación de los elementos de \mathcal{C}_4 en la cual cada vértice del

árbol representa un término ω_i de la palabra de Catalan ω ; esta palabra puede ser construida recorriendo el árbol desde la raíz hasta el vértice con el último término deseado para ω_4 .

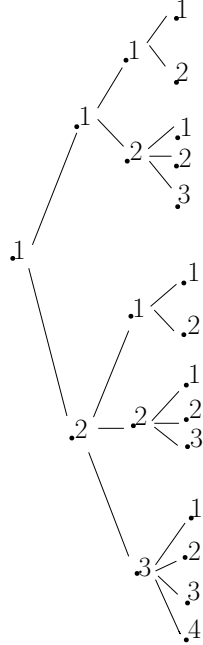


Figura 1.8: Diagrama de árbol como representación de cada $\omega \in \mathcal{C}_4$.

Teorema 8. *Existe una biyección entre las palabras de Catalan de longitud n y las trayectorias de Dyck de longitud $2n$.*

Demostración. Sea P una trayectoria de Dyck de longitud $2n$. Cada paso U se etiqueta con el valor correspondiente a la ordenada del punto al que llega U , de manera que si el siguiente paso sigue siendo U , la etiqueta aumenta en uno más que el anterior hasta llegar a un paso D . En el siguiente paso U de la trayectoria sin etiquetar, se realiza el mismo proceso hasta completar todos los pasos de este tipo en P . Por la definición dada para P y tomando las etiquetas asignadas en cada sucesión de pasos ascendentes, se obtiene una sucesión de número naturales ω_i con $\omega_1 = 1$ y $1 \leq \omega_i \leq \omega_{i-1} + 1$, para $i = 2, \dots, n$, es decir una palabra de Catalan.

Recíprocamente, dada $\omega \in \mathcal{C}_n$ con $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, para ω_1 se traza un paso de la forma U en el plano cartesiano, con punto inicial $(0, 0)$. Si $\omega_{i+1} > \omega_i$ para cada $i = 2, \dots, n$ entonces se dibuja un paso consecutivo al anterior. Si $\omega_{i+1} \leq \omega_i$, se dibujan m , $m \in \mathbb{Z}^+$, pasos D de manera que $\omega_i - (m - 1) = \omega_{i+1}$. Este proceso da una trayectoria P con n pasos U . Al terminar de recorrer cada ω_i , se dibujan n pasos D de forma que la trayectoria finalice en $(2n, 0)$. \square

En la Figura 1.9 se da un ejemplo de la anterior demostración para $\omega = 1123421$.

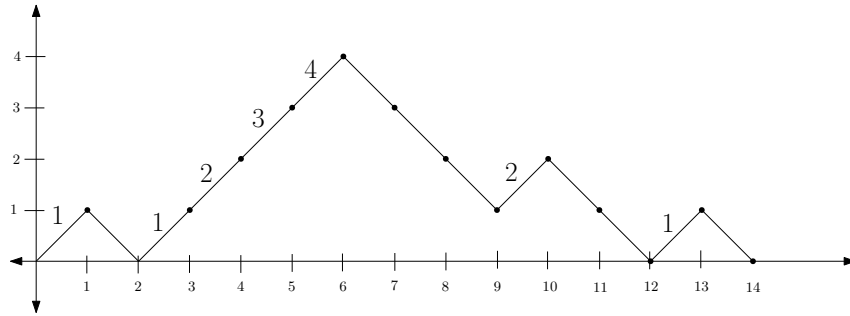


Figura 1.9: Trayectoria de Dyck asociada a la palabra de Catalan 1123421.

Una palabra de Catalan ω puede ser representada por un diagrama de barras (o poliminó) cuya i -ésima columna contiene w_i bloques para $1 \leq i \leq n$. Por ejemplo, la palabra $123455422 \in \mathcal{C}_9$ puede ser representada por el diagrama de barras de la Figura 1.10.

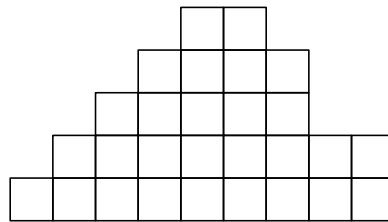


Figura 1.10: Diagrama de barras de la palabra de Catalan 123455422.

Con este tipo de representaciones, surgen preguntas acerca de las estadísticas o parámetros que se puedan definir sobre ellas. Por ejemplo, al considerar el área de la representación de $\omega \in \mathcal{C}_n$ dada por la cantidad de bloques de la representación, el valor del área para la representación de $\omega = 123455422$ es 28 como se puede ver en la Figura 1.10; por otro lado, también se puede considerar el semiperímetro de la representación dado por la mitad del perímetro de la misma, para $\omega = 123455422$ esta estadística resulta ser 14. El estudio de estas estadísticas fue desarrollado por D. Callan, T. Mansour y J. L. Ramírez en el 2021 [1] y estos resultados son presentados en el Capítulo 2 con el objetivo de mostrar las técnicas utilizadas en el desarrollo de la tesis.

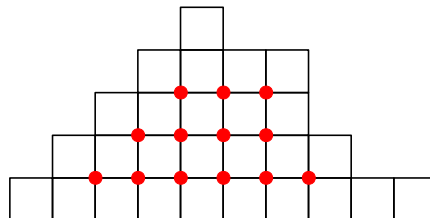


Figura 1.11: Puntos interiores para la representación en diagrama de barras de $\omega = 123455422$

Luego, en el tercer capítulo se estudia el parámetro de los puntos interiores de la representación en el diagrama de barras de $\omega \in \mathcal{C}_n$, el cual está dado por el total de vértices que son adyacentes a exactamente cuatro bloques de la representación. Por ejemplo, en la Figura 1.11 los puntos interiores están representados de color rojo y, por lo tanto, el valor de esta estadística es 13. Para obtener estos resultados se utilizó el método simbólico de Flajolet y Sedgewick [4], y son uno de los aportes de esta tesis que fueron publicados en [6].

Capítulo 2

Área y Semiperímetro

En este capítulo se estudian dos estadísticas de las representaciones en diagrama de barras de una palabra de Catalan $\omega \in \mathcal{C}_n$. Por un lado, la estadística del área notada por $area(\omega)$, que consiste en contar cuántos bloques hay en el diagrama de barras y el semiperímetro $sper(w)$ que es la mitad del perímetro de la representación. Por ejemplo, para la representación de la palabra $\omega = 1234544211$, que puede ser observada en la Figura 2.1, se tiene que $area(w) = 27$ y $sper(w) = 15$.

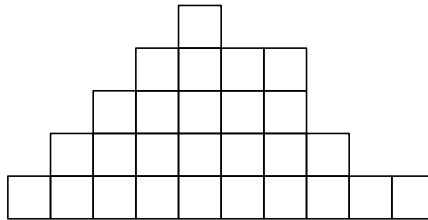


Figura 2.1: Diagrama de barras de la palabra de Catalan 1234544211.

Los resultados presentados a continuación fueron adaptados de [1] para conocer las técnicas que posteriormente fueron utilizadas en el desarrollo de la tesis; estas están basadas en utilizar el método simbólico asociando las construcciones en familias combinatorias con las operaciones sobre funciones generatrices, para mayor detalle ver [4].

2.1. Función generatriz para la estadística del Área y Semiperímetro

Se define la siguiente función generatriz

$$A_i(x; p, q) := \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{w \in \mathcal{C}_{n,i}} p^{sper(w)} q^{area(w)},$$

para $i \geq 1$, donde $\mathcal{C}_{n,i}$ denota el conjunto de palabras de Catalan de longitud n cuyo último término es i . En la Figura 2.2 se observan los diagramas de barras para las palabras de Catalan de longitud a lo más 4 cuyo último término es 1.

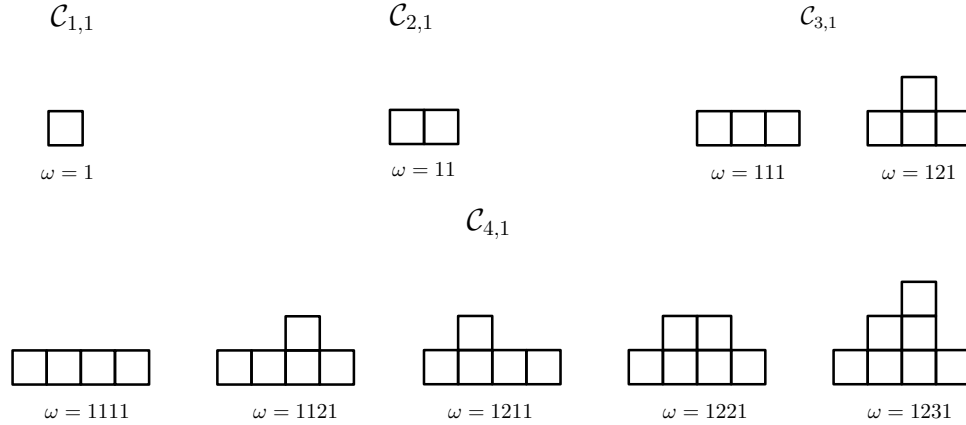


Figura 2.2: Diagramas de barras de los primeros cuatro términos de $\mathcal{C}_{n,1}$.

A partir de estos diagramas se pueden determinar los primeros valores de $A_1(x; p, q)$ como se muestra a continuación. Note que en la Figura 2.3 para $\mathcal{C}_{n,1}$, con $n \geq 3$, el último bloque de cada diagrama de barras aporta p a la fórmula (pues el lado izquierdo ya está contado en el otro extremo del diagrama, luego se cuenta el semiperímetro de los lados de arriba y abajo del último bloque) y una unidad para el área. Es decir que se considera pqx como factor de la expresión de $A_j(x; p, q)$ para el diagrama con longitud $n - 1$. Por lo tanto,

$$A_1(x; p, q) = p^2qx + pqx \sum_{j \geq 1} A_j(x; p, q).$$

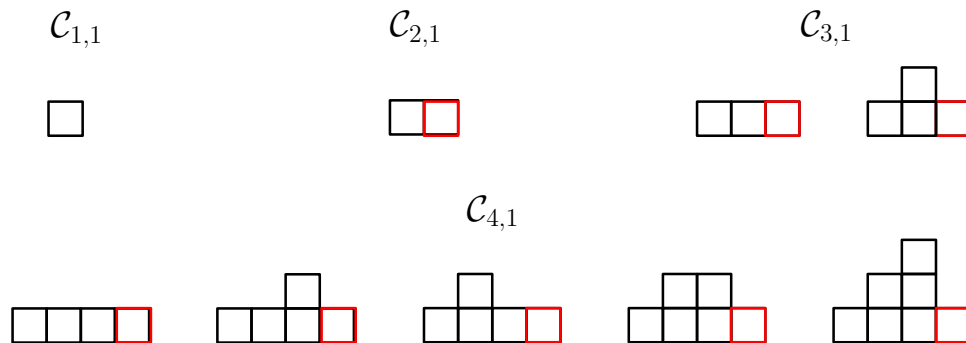


Figura 2.3: Interpretación gráfica de $A_1(x; p, q)$.

Ahora bien, cuando la última columna tiene altura $i \geq 2$, se tienen dos posibilidades para la penúltima columna del diagrama de barras que representa $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ como se observa en la

Figura 2.4. En el primer caso, cuando la columna $n - 1$ tiene 1 bloque menos que la columna n el conteo de la estadística está dado por la función generatriz

$$p^2 q^i x A_{i-1}(x; p, q), \quad (2.1)$$

porque la última columna tiene i bloques (área) y 2 como semiperímetro (dado por el semiperímetro del bloque extra) y una potencia en x por ser la última columna de la representación; además, el diagrama de barras restante está enumerado por $A_{i-1}(x; p, q)$ según la construcción realizada (ver Figura 2.4, izquierda).

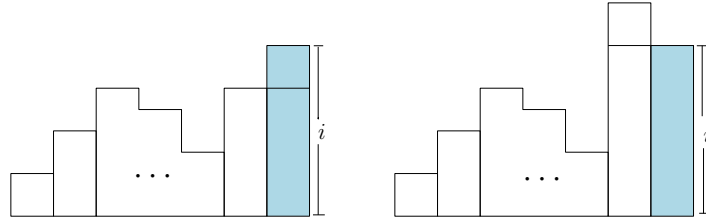


Figura 2.4: Casos posibles en las últimas dos columnas de la representación de $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ para $i \geq 2$.

El segundo caso es cuando la columna $n - 1$ tiene 1 bloque más que la columna n . En este caso el conteo de la estadística está dado por

$$pq^i x \sum_{j \geq i} A_j(x; p, q) \quad (2.2)$$

dado que la última columna tiene i bloques (área) y aporta 1 en el semiperímetro porque se cuenta solo el lado superior de la columna. Por último, el diagrama de barras restante está dado por cada una de las representaciones de las palabras que tienen como último término $j \geq i$, es decir la penúltima columna tiene altura i , para $i \geq 2$ (ver Figura 2.4).

Por lo tanto, sumando (2.1) y (2.2) se tiene que

$$A_i(x; p, q) = p^2 q^i x A_{i-1}(x; p, q) + pq^i x \sum_{j \geq i} A_j(x; p, q), \quad (2.3)$$

para $j \geq 2$.

Ahora, se define la función generatriz en dos variables $A(x; p, q; v) = \sum_{i \geq 1} A_i(x; p, q) v^{i-1}$. Tomando $i = 1$ en (2.3) se tiene que

$$A_1(x; p, q) = p^2 q x + pq x A(x; p, q; 1). \quad (2.4)$$

Por otro lado, multiplicando (2.3) por v^{i-1} y sumando sobre $i \geq 2$ se tiene:

$$\sum_{i \geq 2} A_i(x; p, q) v^{i-1} = \sum_{i \geq 2} p^2 q^i x A_{i-1}(x; p, q) v^{i-1} + \sum_{i \geq 2} p q^i x \sum_{j \geq i} A_j(x; p, q) v^{i-1}.$$

Restándole un término a la sumatoria de la izquierda se tiene

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x \sum_{i \geq 2} A_{i-1}(x; p, q) q^i v^{i-1} + p x \sum_{i \geq 2} q^i \sum_{j \geq i} A_j(x; p, q) v^{i-1}.$$

Reindexando el primer sumando y reorganizando las sumatorias en el segundo, se tiene que

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x q^2 v \sum_{i \geq 1} A_i(x; p, q) v^{i-1} q^{i-1} + p x \sum_{j \geq 2} \sum_{i=2}^j A_j(x; p, q) q^i v^{i-1}.$$

Ahora, utilizando la definición de $A(x; p, q; v)$

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x q^2 v A(x; p, q; qv) + p q x \sum_{i=2}^j A_j(x; p, q) \sum_{i=2}^j (qv)^{i-1}.$$

Dado que $\sum_{i=0}^{j-2} (qv)^{i+1} = \frac{qv - (qv)^j}{1 - qv}$, entonces la ecuación anterior resulta ser

$$\begin{aligned} A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) &= p^2 x q^2 v A(x; p, q; qv) - \frac{p q x}{1 - qv} \sum_{j \geq 2} A_j(x; p, q) (qv)^j \\ &\quad + \frac{p q^2 x v}{1 - qv} \sum_{j \geq 2} A_j(x; p, q). \end{aligned}$$

Ahora, restando un término a cada sumatoria es equivalente a

$$\begin{aligned} A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) &= p^2 x q^2 v A(x; p, q; v) + \frac{p q^2 x v}{1 - qv} A_1(p; q, x) \\ &\quad - \frac{p q x}{1 - qv} \sum_{j \geq 1} A_j(x; p, q) (qv)^j + \frac{p q^2 x v}{1 - qv} \sum_{j \geq 1} A_j(x; p, q) - \frac{p q^2 x v}{1 - qv} A_1(x; p, q). \end{aligned}$$

Y agrupando, se tiene que

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x q^2 v A(x; p, q; qv) - \frac{p q x}{1 - qv} \sum_{j \geq 1} A_j(x; p, q) (qv)^j + \frac{p q^2 x v}{1 - qv} \sum_{j \geq 1} A_j(x; p, q),$$

lo que es

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x q^2 v A(x; p, q; qv) - \frac{pq^2 xv}{1 - qv} A(x; p, q; qv) + \frac{pq^2 xv}{1 - qv} A(x; p, q; 1).$$

Por lo tanto,

$$A(x; p, q; v) - A_1(x; p, q) = p^2 x q^2 v A(x; p, q; v) + \frac{pq^2 xv}{1 - qv} (A(x; p, q; 1) - A(x; p, q; qv)). \quad (2.5)$$

Lo anterior demuestra el siguiente teorema.

Teorema 9. *La función generatriz $A(x; p, q; v)$ satisface la ecuación funcional*

$$A(x; p, q; v) = A_1(x; p, q) + p^2 x q^2 v A(x; p, q; v) + \frac{pq^2 xv}{1 - qv} (A(x; p, q; 1) - A(x; p, q; qv)). \quad (2.6)$$

Ahora, observe que cuando $p = q = 1$ en (2.6), se tiene que

$$A(x; 1, 1; v) = x + xA(x; 1, 1; 1) + xvA(x; 1, 1; v) + \frac{xv}{1 - v} (A(x; 1, 1; 1) - A(x; 1, 1; v))$$

de donde, al agrupar $A(x; 1, 1; 1)$ y $A(x; 1, 1; v)$ se tiene

$$A(x; 1, 1; v) = x + A(x; 1, 1; 1) \left(x + \frac{xv}{1 - v} \right) + A(x; 1, 1; v) \left(xv - \frac{xv}{1 - v} \right),$$

luego,

$$A(x; 1, 1; v) \left(\frac{1 - v + xv^2}{1 - v} \right) = x + A(x; 1, 1; 1) \left(\frac{x}{1 - v} \right) \quad (2.7)$$

Ahora, tomando $v = C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ la función generatriz de los números de Catalan, se tiene que

$$A(x; 1, 1, 1) = C(x) - 1$$

y despejando $A(x; 1, 1; v)$ de (2.7) se tiene que

$$A(x; 1, 1, v) = x \frac{C(x) - v}{1 - v + xv^2}. \quad (2.8)$$

2.1.1. Función generatriz para el Área

A continuación se expande $A(x; 1; q; v)$ para dar su desarrollo en series y así asociarlo con la representación de las palabras de Catalan.

Sea $p = 1$ en (2.5),

$$A(x; 1, q; v) = qx + \frac{qx}{1 - qv} A(x; 1, q; 1) - \frac{q^3 xv^2}{1 - qv} A(x; 1, q; qv). \quad (2.9)$$

Asumiendo que $|x| < 1$ y $|q| < 1$ e iterando esta ecuación un número infinito de veces se tiene:

$$A(x; 1, q; v) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} q^{i^2} x^i v^{2i-2} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 - q^j v} + \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} q^{i^2} x^i v^{2i-2} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 - q^j v} A(x; 1, q; 1). \quad (2.10)$$

Observe que al hacer $\prod_{j=1}^i \frac{1 - q^j v}{1 - q^j v}$ se tiene que el primer término de la primera sumatoria es qx y por lo tanto se puede reescribir (2.10) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A(x; 1, q; 1) &= \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} q^{i^2} x^i v^{2i-2} \prod_{j=1}^i \frac{1 - q^j v}{1 - q^j v} + \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} q^{i^2} x^i v^{2i-2} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 - q^j v} A(x; 1, q; 1) \\ &= \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} q^{i^2} x^i v^{2i-2} (1 - q^i v + A(x; 1, q; 1)) \prod_{j=1}^i \frac{1}{1 - q^j v}. \end{aligned}$$

Tomando $v = 1$ en la anterior expresión se tiene

$$A(x; 1, q; 1) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} x^i (1 - q^i + A(x; 1, q; 1)) \prod_{j=1}^i \frac{1}{1 - q^j},$$

que es equivalente a la siguiente fracción

$$A(x; 1, q; 1) = \frac{\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{q^{i^2} x^i}{\prod_{j=1}^i (1 - q^j)}}{1 - \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{q^{i^2} x^i}{\prod_{j=1}^i (1 - q^j)}}, \quad (2.11)$$

con lo cual se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 10. La función generatriz del área de las palabras de Catalan está dada por

$$\begin{aligned}
A(x; 1, q; 1) &= \frac{\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{q^{i^2} x^i}{\prod_{j=1}^i (1 - q^j)}}{1 - \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{q^{i^2} x^i}{\prod_{j=1}^i (1 - q^j)}}, \\
&= qx + (q + 1)q^2 x^2 + q^3(q^3 + q^2 + 2q + 1)x^3 + \\
&\quad (q + 1)(q^5 + 2q^3 + q^2 + 2q + 1)q^4 x^4 + \dots
\end{aligned}$$

Particularmente, para $n = 3$ se tiene

$$q^3(q^3 + q^2 + 2q + 1)x^3,$$

es decir que para los diagramas asociados a las palabras de Catalan de longitud 3, uno tiene área 6, otro tiene área 5, dos tienen área 4 y uno tiene área 3; como se observa en la Figura 2.1.1.

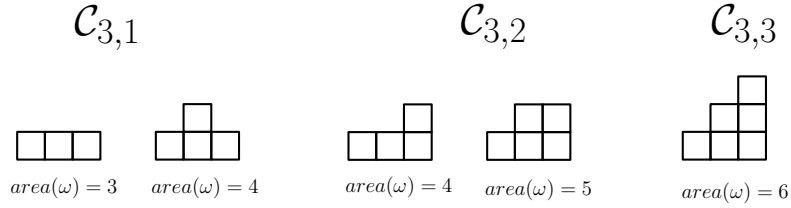


Figura 2.5: Área para $\omega \in \mathcal{C}_{3,i}$ con $i = 1, 2, 3$.

2.2. Distribución conjunta para el área y el semiperímetro

Ahora se define la distribución conjunta sobre $\mathcal{C}_{n,i}$ para el área y el semiperímetro como sigue

$$a_{n,i}(p, q) := \sum_{\omega \in \mathcal{C}_{n,i}} p^{sper(\omega)} q^{area(\omega)}. \quad (2.12)$$

Teorema 11. Para $n \geq 2$ y $1 \leq i \leq n$

$$a_{n,i}(p, q) = qa_{n,i-1}(p, q) + (p - 1)pq^i a_{n-1,i-1}(p, q) - p^2 q^i a_{n-1,i-2}(p, q)$$

con condiciones iniciales $a_{n,i}(p, q) = pq \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}(p, q)$ y $a_{n,2}(p, q) = qa_{n,1}(p, q) + p(p - 1)q^2 a_{n-1,1}(p, q)$ para $n \geq 2$ y $a_{1,1}(p, q) = p^2 q$.

Demostración. Observe que cada $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ puede ser descompuesta en $\omega = \omega' i$, donde $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,j}$, con $j \geq i - 1$. Si $j = i - 1$, se tiene que la distribución conjunta para ω está dada por

$p^2q^i a_{n-1,i-1}(p, q)$ dado que el último bloque tiene como área i y aporta 2 al semiperímetro de ω ; además, la distribución conjunta de ω' es $a_{n-1,i-1}(p, q)$. Esta situación se puede ver en la Figura 2.6

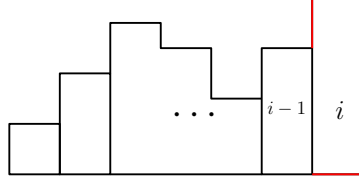


Figura 2.6: Diagrama de barras de $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ cuya descomposición es $\omega = \omega' i$ con $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,i-1}$.

Por otro lado, si $i \leq j \leq n-1$ se tiene que la última columna aporta 1 al semiperímetro e i al área y la distribución conjunta de ω' está dada por $a_{n-1,j}(p, q)$, lo cual es ilustrado en la Figura 2.7.

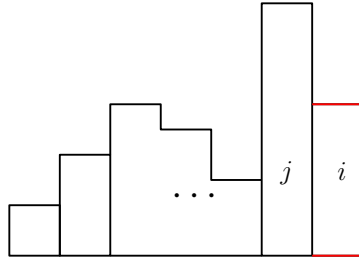


Figura 2.7: Diagrama de barras de $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ cuya descomposición es $\omega = \omega' i$ con $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,j}$ para $i \leq j \leq n-1$.

De lo anterior, haciendo la sumatoria sobre todos los valores de j se tiene que

$$a_{n,i}(p, q) = p^2q^i a_{n-1,i-1}(p, q) + pq^i \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}(p, q). \quad (2.13)$$

Ahora restando $qa_{n,i-1}(p, q)$ a (2.13), se tiene

$$a_{n,i}(p, q) - qa_{n,i-1}(p, q) = p^2q^i a_{n-1,i-1}(p, q) - p^2q^i a_{n-1,i-2}(p, q) - pq^i a_{n-1,i-1}(p, q),$$

lo cual es equivalente a

$$a_{n,i}(p, q) = qa_{n,i-1}(p, q) + (p-1)pq^i a_{n-1,i-1}(p, q) - p^2q^i a_{n-1,i-2}(p, q).$$

□

2.3. Fórmula para el semiperímetro total

El semiperímetro total de los elementos en $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$, se nota $s(n, i)$, donde n es la longitud de ω e i es el último término de ω . En la siguiente matriz están los primeros valores de $s(n, i)$

$$[s(n, i)]_{n,i \geq 1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 32 & 21 & 8 & 0 & 0 \\ 105 & 110 & 75 & 36 & 10 & 0 \\ 378 & 392 & 273 & 144 & 55 & 12 \end{pmatrix}$$

Particularmente, para $n = 3$ se tiene que $\mathcal{C}_3 = \{111, 121, 112, 122, 123\}$ y teniendo en cuenta los diagramas de barras para cada uno de estos elementos (ver Figura 2.8) se tiene que $s(3, 1) = 9$, $s(3, 2) = 10$ y $s(3, 3) = 6$ como se puede observar en la matriz.

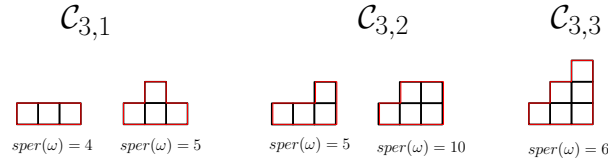


Figura 2.8: Semiperímetro de los diagramas de barras para los elementos de \mathcal{C}_3 .

En el siguiente teorema se da una recurrencia para la sucesión $s(n, i)$.

Teorema 12. Para $n \geq 2$ y $2 \leq i \leq n$ se tiene que

$$s(n, i) = \frac{n(3i-1)i(i+1)}{(2n-i)(2n-i-1)} \binom{2n-i}{n} + \sum_{j=i-1}^{n-1} s(n-1, j),$$

donde $s(n, 1) = \sum_{j=1}^{n-1} s(n-1, j) + C_{n-1}$ para $n \geq 2$ y $s(1, 1) = 2$, con C_n el n -ésimo número de Catalan.

Demostración. Dada $\omega \in \mathcal{C}_{n,1}$ observe que para el caso $s(n, 1)$ se tiene que el conteo se reduce a encontrar $s(n-1, j)$ donde $1 \leq j \leq n-1$. Dado que el último bloque aporta 1 al conteo y el proceso resulta ser análogo a adicionar un bloque a cada una de las palabras de Catalan de longitud $n-1$ cuyo último término es j , lo cual está enumerado por \mathcal{C}_{n-1} ; entonces la expresión para $s(n, 1)$ está dada por

$$\sum_{j=1}^{n-1} s(n-1, j) + C_{n-1}.$$

Ahora, note que para $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$ con $2 \leq i \leq n$ y $n \geq 2$, usando la descomposición de la Figura 2.4, si la columna $n - 1$ de la representación de ω es menor en un bloque a la columna n se tiene que $s(n, i)$ está dado por $s(n - 1, j - 1)$ y dado que la última columna aporta 2 al semiperímetro y la cantidad de palabras con esta condición está dada por

$$|\mathcal{C}_{n-1,i-1}| = c(n - 1, i - 1), \quad (2.14)$$

la expresión para este caso es

$$s(n - 1, i - 1) + 2c(n - 1, i - 1).$$

Dado que el anterior razonamiento es válido también para el segundo caso (en el que la columna $n - 1$ tiene un bloque más que la columna n), excepto que la última columna aporta 1 al semiperímetro y como $i \leq j \leq n - 1$, entonces

$$s(n, i) = s(n - 1, i - 1) + 2c(n - 1, i - 1) + \sum_{j=i}^{n-1} (s(n - 1, j) + c(n - 1, j)).$$

Usando la identidad combinatoria

$$\sum_{j=i}^n c(n, j) = \sum_{j=i}^n \frac{j}{n} \binom{2n - 1 - j}{n - 1} = \frac{i + 1}{n + 1} \binom{2n - i}{n - i}, \quad (2.15)$$

se tiene la siguiente expresión

$$s(n, i) = s(n - 1, i - 1) + 2 \frac{i - 1}{n - 1} \binom{2n - i - 2}{n - 2} + \sum_{j=i}^{n-1} \left(s(n - 1, j) + \frac{j}{n - 1} \binom{2n - j - 3}{n - 2} \right).$$

Ahora, amplificando la sumatoria y organizando los términos, lo anterior es equivalente a

$$2 \frac{i - 1}{n - 1} \binom{2n - i - 2}{n - 2} + \sum_{j=i-1}^{n-1} s(n - 1, j) + \sum_{j=i}^{n-1} \binom{2n - j - 3}{n - 2}. \quad (2.16)$$

Ahora, por (2.15), la ecuación (2.16) resulta ser equivalente a

$$2 \frac{i - 1}{n - 1} \binom{2n - i - 2}{n - 2} + \frac{i + 1}{n} \binom{2n - i - 2}{n - i - 2} + \sum_{j=i-1}^{n-1} s(n - 1, j).$$

Finalmente, usando propiedades de las combinaciones y agrupando términos se tiene que

$$s(n, i) = \frac{n(3i-1)i(i+1)}{(2n-i)(2n-i-1)} \binom{2n-i}{n} + \sum_{j=i-1}^{n-1} s(n-1, j),$$

como se quería mostrar. \square

Corolario 13. *El semiperímetro total de todas las palabras de Catalan de longitud n está dado por*

$$s(n) = \frac{1}{2} \left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} \right).$$

Demostración. Usando la expresión dada para $A(x; p, q; v)$ en (2.5), la cual cuenta el área p y el semiperímetro q en el diagrama de barras, se obtiene:

$$A(x; p, 1; v) = p^2x + pxA(x; p, 1; 1) + p^2xvA(x; p, 1; v) + \frac{pxv}{1-v}(A(x; p, 1; 1) - A(x; p, 1; v)),$$

lo cual es equivalente a

$$A(x; p, 1; v) \left(1 + \frac{pxv}{1-v} - p^2xv \right) = p^2x + \left(px + \frac{pxv}{1-v} \right) A(x; p, 1; 1). \quad (2.17)$$

Supongamos que

$$A(x; p, 1; v) \left(1 + \frac{pxv}{1-v} - p^2xv \right) = 0.$$

Utilizando el método Kernel, sea v_0 una solución de $1 + \frac{pxv}{1-v} - p^2xv = 0$ con

$$v_0 = \frac{1 + xp^2 - xp - \sqrt{(xp^2 - xp + 1)^2 - 4xp^2}}{2p^2x}.$$

Ahora, al reemplazar v_0 en (2.17) y despejar $A(x; p, 1; 1)$ se tiene

$$A(x; p, 1; 1) = p(-1 + v_0) = -\frac{p^2x + \sqrt{((p-1)px+1)^2 - 4p^2x} + px - 1}{2px}. \quad (2.18)$$

Observe que el desarrollo en series de (2.18) es

$$A(x; p, 1, 1) = p^2x + (p^4 + p^3)x^2 + (p^6 + 3p^5 + p^4)x^3 + (p^8 + 6p^7 + 6p^6 + p^5)x^4 + \dots \quad (2.19)$$

Es importante notar que en la serie dada en (2.19), los coeficientes corresponden al semiperímetro de las palabras de Catalan con la longitud correspondiente al exponente del término. Por ejemplo en el caso del término x^3 , las palabras de Catalan de longitud 3 una tiene semiperímetro 6, tres tienen semiperímetro 5 y una cuyo semiperímetro es 4 (las cuales pueden ser

vistas en la Figura 2.9). Es decir que $\sum_{i=1}^3 s(3, i) = 6 + 15 + 4 = 25$. Observe que al derivar $(p^6 + 3p^5 + p^4)x^3$ respecto a p y evaluarlo en $p = 1$ se obtiene el mismo resultado.

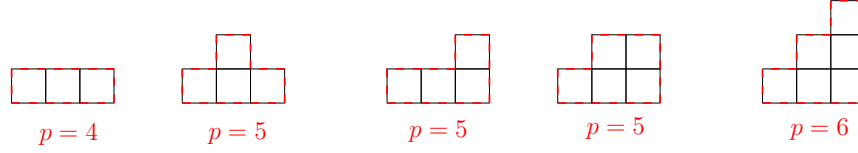


Figura 2.9: Diagrama de barras de los elementos de $\mathcal{C}_{3,i}$, con $1 \leq i \leq 3$

Lo anterior puede ser descrito tomando la derivada de (2.18) respecto a p lo cual resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial p} A(x; p, 1; 1) \Big|_{p=1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x} - x - x\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}},$$

que es equivalente a

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{2x\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{2x}. \quad (2.20)$$

Al hacer el desarrollo en series de $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ los coeficientes son 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, \dots , y coinciden con los coeficientes del binomio central $\binom{2n}{n}$. Es decir que $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

De lo anterior, los coeficientes de (2.20) están dados por

$$\frac{1}{2} \left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} \right).$$

□

2.4. Fórmula para el área

De manera análoga a lo que se hizo para el semiperímetro, se pueden obtener fórmulas para el área total. Dada $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$, se nota el área total de ω por $t(n, i)$, donde n es la longitud de ω e i es el último término de ω . En la siguiente matriz aparecen los primeros valores de $t(n, i)$ cuyos primeros valores son

$$[t(n, i)]_{n, i \geq 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 32 & 24 & 8 & 0 & 0 \\ 107 & 121 & 93 & 50 & 15 & 0 \\ 428 & 470 & 363 & 214 & 90 & 21 \end{pmatrix}$$

En el caso $n = 3$, para los diagramas de barras de cada uno de los elementos de \mathcal{C}_3 (ver Figura 2.1.1) se tiene que $t(3, 1) = 7$, $t(3, 2) = 9$ y $t(3, 3) = 6$ como se puede observar en la matriz.

En el siguiente teorema se da una recurrencia para la sucesión $t(n, i)$. Su demostración es análoga a la del Teorema 12.

Teorema 14. *Para $n \geq 2$ y $2 \leq i \leq n$*

$$t(n, i) = \frac{i^2}{2n - i} \binom{2n - i}{n} + \sum_{j=i-1}^{n-1} t(n - 1, j),$$

con $t(n, i) = \sum_{j=1}^{n-1} t(n - 1, j) + C_{n-1}$ para $n \geq 2$ y $t(1, 1) = 1$, donde C_n es el n -ésimo número de Catalan.

Corolario 15. *El área total sobre todas las palabras de Catalan de longitud n está dado por*

$$t(n) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right) \quad (2.21)$$

Demostración. Sea $B(x, v) = \frac{\partial}{\partial q} A(x; 1, q; v) |_{q=1}$. Diferenciando (2.9) respecto a q se tiene

$$B(x; v) = \frac{\partial}{\partial q} \left[qx + \frac{qx}{1 - qv} A(x; 1, q; 1) - \frac{q^3 xv^2}{1 - qv} A(x; 1, q; qv) \right]_{q=1}$$

lo cual es

$$B(x; v) = x + \frac{x}{(1 - v)^2} A(x; 1, 1; 1) + \frac{x}{1 - v} B(x; 1) - \frac{xv^2(3 - 2v)}{(1 - v)^2} A(x; 1, 1; v) - \frac{xv^2}{1 - v} B(x; v)$$

Ahora, usando que $A(x; 1, 1; v) = x \frac{C(x) - v}{1 - v + xv^2}$, la anterior ecuación es equivalente a

$$\frac{(1 - v + xv^2)^3}{1 - v} B(x; v) = \frac{x(1 - v + xv^2)^2}{1 - v} B(x; 1) + x(1 - xv^2) + xv(v - 2).$$

Derivando dos veces respecto a v y tomando $v = C(x)$, se tiene que

$$B(x; 1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2(1 - 4x)}.$$

Ahora, dado que $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}$, lo anterior es

$$B(x; 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 4x} - \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} \right) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right),$$

como se quería mostrar. □

Capítulo 3

Puntos Interiores

En este capítulo se estudia el número de los puntos interiores de una representación en diagrama de barras para una palabra de Catalan ω , notada por $int(\omega)$. Esta estadística que resulta ser el número de los vértices adyacentes a exactamente cuatro bloques de la representación. Estos resultados son novedosos y fueron publicados en [6] como parte del desarrollo esta tesis.

3.1. Función generatriz para los Puntos Interiores

En la Figura 3.1 se observan los puntos interiores para los diagramas de barras de los primeros cinco términos de $\mathcal{C}_{n,1}$.

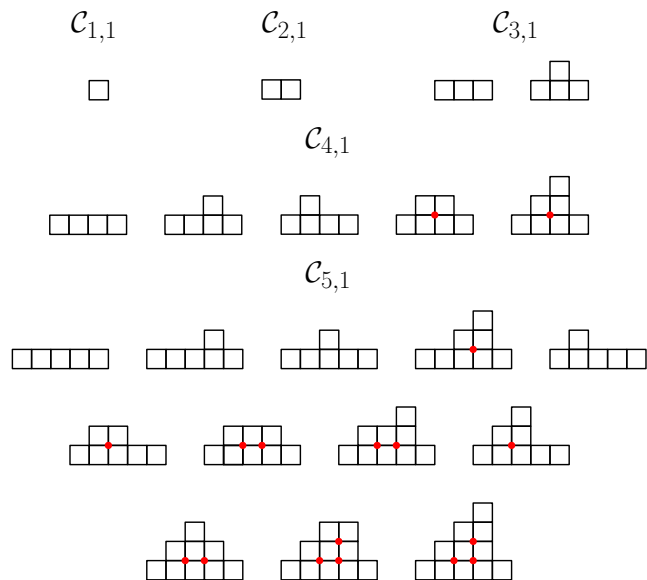


Figura 3.1: Puntos interiores para los cinco primeros términos de $\mathcal{C}_{n,1}$.

Se define la función generatriz para el número total de puntos interiores de la representación en diagrama de barras de las palabras de Catalan cuyo último término es j de la siguiente forma

$$A_j(x, q) = \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{w \in \mathcal{C}_{n,j}} q^{\text{int}(w)}.$$

En el caso en que $j = 1$ se tiene que,

$$A_1(x; q) = x + x \sum_{j \geq 1} A_j(x; q). \quad (3.1)$$

Ahora, para $j \geq 2$ se tienen dos situaciones, una en la cual la última barra del gráfico difiere de 1 bloque de la barra inmediatamente anterior y otra en la cual la última barra sea menor que la de la posición $n - 1$, tal como se muestra en la Figura 3.2.

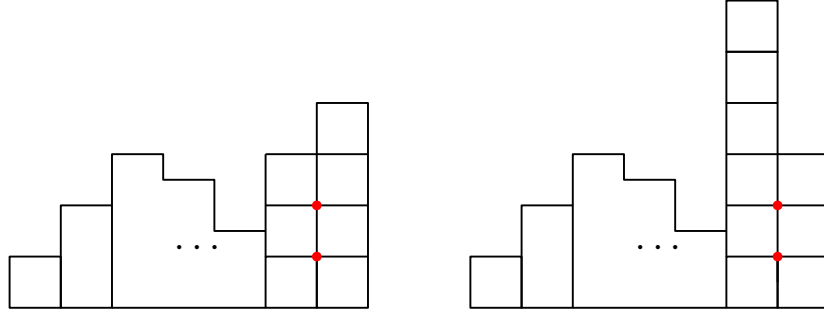


Figura 3.2: Puntos interiores en la descomposición de $\omega \in \mathcal{C}_{n,j}$, para $j \geq 2$

En el primer caso, la cantidad de puntos interiores definidos en las últimas dos columnas del poliminó está dado por $j - 2$ y el resto de puntos interiores es contado por $A_{j-1}(x, y)$ y, por lo tanto, la expresión es

$$q^{j-2} x A_{j-1}(x; q).$$

Por otro lado, en el segundo caso se tiene que la cantidad de puntos interiores determinados por las últimas dos columnas del poliminó son $j - 1$. Dado que la columna $n - 1$ puede tener tamaño $l \geq j$, la expresión que cuenta los puntos interiores en este caso es

$$q^{j-1} x \sum_{l \geq j} A_l(x; q).$$

Por lo tanto, en el caso en que $j \geq 2$ se tiene que

$$A_j(x; q) = q^{j-2} x A_{j-1}(x; q) + q^{j-1} x \sum_{l \geq j} A_l(x; q). \quad (3.2)$$

Ahora, se define la función en dos variables $A(x; q; v) = \sum_{j \geq 1} A_j(x; q)v^{j-1}$. Tomando $j = 1$ se tiene

$$A_1(x; q; v) = x + xA(x; q; 1) \quad (3.3)$$

Multiplicando (3.2) por v^{j-1} y sumando sobre $j \geq 2$ se tiene:

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = \sum_{j \geq 2} q^{j-2} x v^{j-1} A_{j-1}(x; q) + \sum_{j \geq 2} q^{j-1} x v^{j-1} \sum_{l \geq j} A_l(x; q).$$

Reorganizando el índice de la primera sumatoria, lo anterior es equivalente a

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = \frac{x}{q} \sum_{j \geq 1} A_j(x; q) q^{j-1} v^{j-1} + \sum_{j \geq 2} q^{j-1} x v^{j-1} \sum_{l \geq j} A_l(x; q).$$

Cambiando el orden de las sumatorias en el segundo término:

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = vx A(x; q; qv) + x \sum_{l \geq 2} \sum_{j=2}^l A_l(x; q) (qv)^{j-1},$$

y usando las propiedades de la sumatoria

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = xv A(x; q; qv) + x \sum_{l \geq 2} A_l(x; q) \sum_{j=2}^l (qv)^{j-1},$$

lo anterior es equivalente a

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = xv A(x; q; qv) + x \sum_{l \geq 2} A_l(x; q) \sum_{j=0}^{l-2} (qv)^{j+1}.$$

Calculando la última serie y aplicando nuevamente algunas propiedades de la sumatoria se tiene la siguiente expresión

$$A(x; q; v) - A_1(x; q; v) = xv A(x; q; qv) + \frac{xqv}{1 - qv} \sum_{l \geq 2} A_l(x; q) - \frac{x}{1 - qv} \sum_{l \geq 2} A_l(x; q) (qv)^l.$$

Restando un término en cada una de las sumatorias se tiene que

$$\begin{aligned} A(x; q; v) - A_1(x; q; v) &= xvA(x; q; qv) + \frac{xqv}{1 - qv} \sum_{l \geq 1} A_l(x; q) \\ &\quad - \frac{xqv}{1 - qv} A_1(x; q) - \frac{xqv}{1 - qv} \sum_{l \geq 1} A_l(x; q)(qv)^{l-1} + \frac{xqv}{1 - qv} A_1(x; q) \end{aligned}$$

lo cual resulta ser equivalente a la siguiente expresión como resultado de agrupar términos

$$\begin{aligned} A(x; q; v) &= A_1(x; q; v) + xvA(x; q; qv) + \frac{xqv}{1 - qv} A(x; q; 1) - \frac{xqv}{1 - qv} A(x; q; qv) \\ &= x + xA(x; q; 1) + xvA(x; q; qv) + \frac{xqv}{1 - qv} A(x; q; 1) - \frac{xqv}{1 - qv} A(x; q; qv) \\ &= x + \left(x + \frac{xqv}{1 - qv}\right) A(x; q; 1) + \left(xv - \frac{xqv}{1 - qv}\right) A(x; q; qv) \\ &= x + \left(\frac{x}{1 - qv}\right) A(x; q; 1) + \left(\frac{xv - xqv^2 - xqv}{1 - qv}\right) A(x; q; qv). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(x; q; v) = x + \frac{x}{1 - qv} A(x; q; 1) + \frac{xv(1 - q - qv)}{1 - qv} A(x; q; qv) \quad (3.4)$$

Para encontrar la función generatriz esperada, se realizarán algunas iteraciones sobre (3.4). Naturalmente, la iteración 1 está dada por la misma expresión dada en (3.4) y tomando $v = qv$, se tiene la *iteración 2*:

$$\begin{aligned} A(x; q; v) &= x + \frac{x}{1 - qv} A(x; q; 1) \\ &\quad + \frac{xv(1 - q - qv)}{1 - qv} \left(x + \frac{x}{1 - q^2v} A(x; q; 1) + \frac{xqv(1 - q - q^2v)}{1 - q^2v} A(x; q; q^2v) \right), \end{aligned}$$

que resulta ser equivalente a la siguiente expresión después de agrupar términos

$$\begin{aligned} A(x; q; v) &= x + \frac{x^2v(1 - q - qv)}{1 - qv} + \left(\frac{x}{1 - qv} + \frac{x^2v(1 - q - qv)}{(1 - qv)(1 - q^2v)} \right) A(x; q; 1) \\ &\quad + \left(\frac{x^2qv^2(1 - q - qv)(1 - q - q^2v)}{(1 - qv)(1 - q^2v)} \right) A(x; q; q^2v). \end{aligned}$$

Ahora, tomando $v = q^2v$ en la expresión anterior, se tiene la *iteración 3* después de agrupar

términos convenientemente:

$$\begin{aligned}
A(x; q; v) &= \left(x + \frac{x^2 v(1-q-qv)}{1-qv} + \frac{x^3 q v^2 (1-q-qv)(1-q-q^2 v)}{(1-qv)(1-q^2 v)} \right) \\
&\quad + \left(\frac{x}{1-qv} + \frac{x^2 v(1-q-qv)}{(1-qv)(1-q^2 v)} + \frac{x^3 q v^2 (1-q-qv)(1-q-q^2 v)}{(1-qv)(1-q^2 v)(1-q^3 v)} \right) A(x; q; 1) \\
&\quad + \left(\frac{x}{1-qv} + \frac{x^2 v(1-q-qv)}{(1-qv)(1-q^2 v)} + \frac{x^3 q^3 v^3 (1-q-qv)(1-q-q^v)(1-q-q^3 v)}{(1-qv)(1-q^2 v)(1-q^3 v)} \right) A(x; q; q^3 v)
\end{aligned}$$

Iterando infinitamente esta expresión, se puede inferir que:

$$A(x; q; v) = \sum_{i \geq 1} x^i v^{i-1} q^{\binom{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j v}{1-q^j v} + \sum_{i \geq 1} \frac{x^i v^{i-1} q^{\binom{i-1}{2}}}{1-qv} \prod_{j=2}^i \frac{1-q-q^{j-1} v}{1-q^j v} A(x; q; v).$$

Al cambiar el índice de la segunda productoria de la expresión anterior y después de agrupar términos, se tiene

$$A(x; q; v) = \sum_{i \geq 1} x^i v^{i-1} q^{\binom{i-1}{2}} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j v}{1-q^j v} + \frac{1}{1-qv} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j v}{1-q^{j+1} v} A(x; q; 1) \right],$$

de donde, al hacer $v = 1$ se obtiene:

$$A(x; q; 1) = \sum_{i \geq 1} x^i q^{\binom{i-1}{2}} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j}{1-q^j} + \frac{1}{1-q} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j}{1-q^{j+1}} A(x; q; 1) \right], \quad (3.5)$$

con lo cual se ha demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 16. *La función generatriz de los puntos interiores de las palabras de Catalan está dada por*

$$A(x; q; 1) = \frac{\sum_{i \geq 1} x^i q^{\binom{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j}{1-q^j}}{1 - \sum_{i \geq 1} x^i q^{\binom{i-1}{2}} \frac{1}{1-q} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-q-q^j}{1-q^{j+1}} A(x; q; 1)}, \quad (3.6)$$

y los primeros términos del desarrollo en serie de $A(x; q; 1)$ son

$$x + 2x^2 + (3 + 2q)x^3 + (5 + 4q + 3q^2 + 2q^3)x^4 + (8 + 10q + 6q^2 + 9q^3 + 4q^4 + 3q^5 + 2q^6)x^5 + \dots$$

De este Teorema, se puede notar que en el caso $n = 3$ el término del desarrollo en series

de la función generatriz es

$$(5 + 4q + 3q^2 + 2q^3)x^4,$$

lo cual significa que para los diagramas de barras asociados a las palabras de Catalan de longitud 4, cinco tienen 0 puntos interiores, cuatro tienen 1 punto interior, tres tienen 2 puntos interiores y dos tienen 3, como se observa en la Figura 3.3.

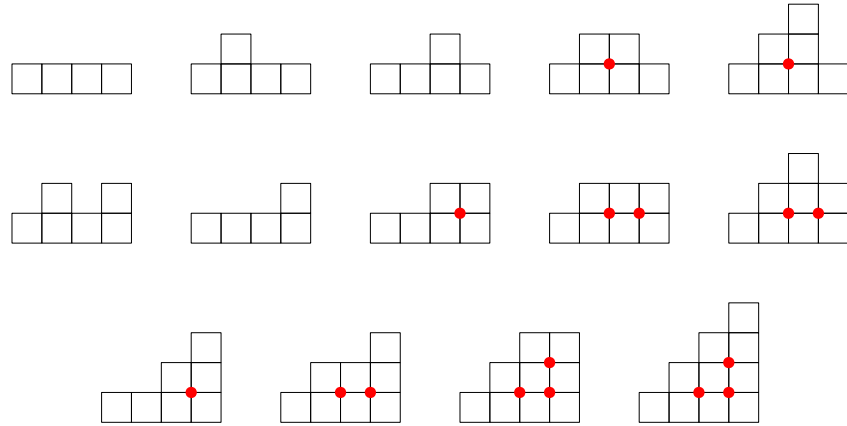


Figura 3.3: Puntos interiores para cada elemento de $\mathcal{C}_{4,i}$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

3.2. Fórmula para el total de Puntos Interiores

Dada $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$, se nota a los puntos interiores del diagrama de barras asociado como $w(n, i)$, cuyos primeros valores son

$$2, 16, 92, 464, 2186, \dots$$

para $n \geq 3$.

En el siguiente teorema se da la función generatriz para el total de puntos interiores sobre todos los diagrama de barras asociados a cada palabra de Catalan en \mathcal{C}_n .

Teorema 17. *La función generatriz para el número total de puntos interiores sobre todas las palabras de Catalan de longitud n está dada por*

$$\sum_{n \geq 0} w(n)x^n = \frac{1 - 4x + 2x^2 - (1 - 2x)\sqrt{1 - 4x}}{x(1 - 4x)}.$$

Demostración. Sea $B(x, v) = \frac{\partial}{\partial q} A(x; q; v) |_{q=1}$. De (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} A(x; q; v) |_{q=1} = & \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x}{1-qv} \right) A(x; 1, 1) + \frac{x}{1-v} \frac{\partial}{\partial q} (A(x; q; 1)) |_{q=1} + \\ & \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{xv(1-q-qv)}{1-qv} \right) |_{q=1} A(x; 1, v) - \frac{xv}{1-v} \frac{\partial}{\partial q} (A(x; q; qv)) |_{q=1}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $B(x, 1) = \frac{\partial}{\partial q} A(x; q; 1) |_{q=1}$

$$\begin{aligned} B(x, v) = & \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x}{1-qv} \right) A(x; 1, 1) + \frac{x}{1-v} B(x, 1) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{xv(1-q-qv)}{1-qv} \right) |_{q=1} A(x; 1, v) \\ & - \frac{xv}{1-v} \frac{\partial}{\partial q} (A(x; q; qv)) |_{q=1} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Ahora, considerando que $A(x; q; qv) = \sum_{j \geq 1} A_j(x; q)(qv)^{j-1}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial q} (A(x; q; 1)) = \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\partial}{\partial q} A_j(x; q) |_{q=1} qv^{j-1} + ((j-1)A_j(x; 1))v^{j-2} \right].$$

Adicionalmente, dado que $v \frac{\partial}{\partial v} A(x; 1; v) = \sum_{j \geq 1} (j-1)A_j(x; 1)v^{j-1}$, luego

$$\frac{\partial}{\partial q} (A(x; q; 1)) = \frac{\partial}{\partial q} A(x; q; v) |_{q=1} + v \frac{\partial}{\partial v} A(x; 1; v).$$

Usando lo anterior para reescribir (3.7), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} B(x, v) = & \frac{xv}{(1-v)^2} [C(x) - 1] + \frac{x}{1-v} B(x, 1) \\ & + \frac{xv}{(1-v)^2} A(x; 1; v) - \frac{xv^2}{1-v} [B(x, v) + v \frac{\partial}{\partial v} A(x; 1; v)] \end{aligned}$$

Como $A(x; 1; v)$ se puede deducir de (3.4) tomando $q = 1$, de forma que $A(x; 1; v) = \frac{x(C(x)-v)}{1-v+xv^2}$, entonces

$$\begin{aligned} B(x, v) \left(\frac{1-v+xv^2}{1-v} \right) = & \frac{xv}{(1-v)^2} C(x) - \frac{xv}{(1-v)^2} + \frac{x}{1-v} B(x, 1) + \\ & \frac{xv}{(1-v)^2} \frac{x(C(x)-v)}{(1-v+xv^2)} - \frac{x^2 v C(x) - x^2 v^2}{(1-v+xv^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{(1-v+xv^2)^3}{1-v} B(x,v) &= C(x)(xv-x^2v-x^2v^2-x^3v^3) \\ &+ \frac{x(1-v+xv^2)^2}{1-v} B(x,1) + (x^2v^2+x^3v^4-xv) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ahora, dado que a partir de $1-v+xv^2$ se obtiene la función generatriz para los números de Catalan, $C(x)$, al tomar la segunda derivada de (3.9) respecto a v y tomando $v=C(x)$, el término que acompaña a $B(x,v)$ se anula y por lo tanto esta ecuación es equivalente a

$$0 = 1 - 4x - \sqrt{1-4x} + 2x^2 + 2x\sqrt{1-4x} - x(1-4x)B(x,1),$$

de donde, al agrupar términos y despejar $B(x,1)$ se llega a la expresión

$$\frac{1-4x+2x^2-(1-2x)\sqrt{1-4x}}{x(1-4x)}.$$

□

A continuación se muestra una fórmula para el número total de puntos interiores sobre todas las palabras de longitud n , con $n \geq 1$. Para demostrarlo, se usará el teorema de Pick cuyo enunciado es el siguiente.

Teorema 18 (Teorema de Pick). *Para cualquier polígono convexo \mathcal{P} cuyos vértices tienen coordenadas enteras en el plano, se tiene la siguiente relación*

$$\text{área de } \mathcal{P} = \text{puntos interiores de } \mathcal{P} + \frac{1}{2} \text{puntos en la frontera de } \mathcal{P} - 1.$$

Usando también los resultados sobre al área $t(n)$ y el semiperímetro $s(n)$ de las palabras de Catalan (ver Capítulo 2), en el siguiente Corolario se da una expresión para el total de puntos interiores.

Corolario 19. *El número total de puntos interiores sobre todas las palabras de Catalan de longitud n está dado por*

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n+2}{n+1} \right) + C_n,$$

para $n \geq 1$.

Demostración. Sea D el diagrama de barras asociado a $\omega \in \mathcal{C}_n$. Usando el teorema de Pick, se tiene

$$\text{Área de } D = \text{puntos interiores de } D + \frac{\text{puntos frontera de } D}{2} - 1$$

Haciendo la suma sobre todos los diagramas de barras posibles para $\omega \in \mathcal{C}_n$ y usando los Corolarios

13 y 15, lo anterior puede reescribirse de la siguiente forma

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} \right) + C_n,$$

lo cual resulta ser

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n+2}{n+1} \right) + C_n.$$

□

Ahora, sea $w(n, i)$ el número de puntos interiores en todos los diagramas de barras de $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$. Los primeros valores son

$$[w(n, i)]_{n,i \geq 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 25 & 27 & 18 & 6 & 0 & 0 \\ 464 & 554 & 510 & 368 & 200 & 75 & 15 \end{pmatrix},$$

donde la suma sobre cada fila n es $w(n)$.

Para $\mathcal{C}_{4,3} = \{1123, 1223, 1233\}$ se tiene que $w(4, 3) = 6$, lo cual puede ser visto en la Figura 3.4 donde se encuentra la representación en diagrama de barras de cada $\omega \in \mathcal{C}_{4,3}$.

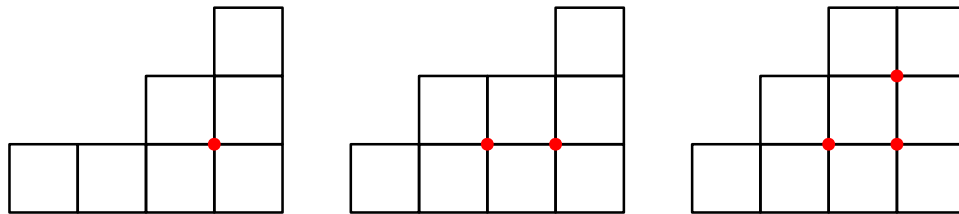


Figura 3.4: Puntos interiores para cada $\omega \in \mathcal{C}_{4,3}$.

Teorema 20. Para $n \geq 2$ y $2 \leq j \leq n$,

$$w(n, j) = \frac{(1-j)(j^2 + j + n - 2jn)}{(2n-j-1)(2n-j)} \binom{2n-j}{n} + \sum_{l=j-1}^{n-1} w(n-1, l),$$

con $w(n, 1) = \sum_{l=1}^{n-1} w(n-1, l)$ para $n \geq 2$ y $w(1, 1) = 0$.

Demostración. Usando la definición de las palabras de Catalan, observe que cada $\omega \in \mathcal{C}_{n,j}$ para $j \geq 2$ puede descomponerse en $\omega = \omega'j$ donde $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,l}$ para $j-1 \leq l \leq n-1$. Por lo tanto,

- si $l = j-1$ se tiene que la expresión para los puntos interiores del diagrama de barras asociado a $\omega \in \mathcal{C}_{n-1,l}$ está dada por $w(n-1, j-1)$ agregando $(j-2)c(n-1, j-1)$ pues en las últimas dos columnas se forman $j-2$ puntos interiores (ver la representación de la izquierda en la Figura 3.2) por cada diagrama de barras asociado a las palabras de Catalan de longitud $n-1$ que terminan en el símbolo $j-1$, lo cual es $c(n-1, j-1)$.
- si $j \leq l \leq n-1$ entonces los puntos interiores del diagrama de barras asociados están dados por la expresión $\sum_{l=j}^{n-1} w(n-1, l)$ agregándole $j-1$ puntos interiores (ver la representación de la derecha en la Figura 3.2) por cada diagrama de barras asociado a las palabras de Catalan de longitud $n-1$ y cuyo último término es l , lo que es $(j-1)c(n-1, l)$.

De lo anterior se tiene que

$$w(n, j) = w(n-1, j-1) + (j-2)c(n-1, j-1) + \sum_{l=j}^{n-1} w(n-1, l) + (j-1)c(n-1, l),$$

lo cual, utilizando que

$$\sum_{l=j} c(n, j) = \frac{j+1}{n+1} \binom{2n-j}{n-j} \quad \text{y} \quad c(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n-1-k}{n-1}$$

es igual a

$$(j-2) \frac{j-1}{n-1} \binom{2n-j-1}{n-1} + (j-1) \frac{j+1}{n} \binom{2n-j-2}{n-j-1} + \sum_{l=j-1}^{n-1} w(n-1, l)$$

□

Capítulo 4

Grado de los Vértices

Dada una palabra de Catalan $\omega \in \mathcal{C}_{n,i}$, cada vértice del diagrama de barras asociado tiene grado 2, 3 o 4, lo cual se denota por $\deg_k(\omega)$ con $k = 2, 3, 4$.

Por ejemplo, para el diagrama de barras en la Figura 4.1 se tiene que dada $\omega = 1232123443$, $\deg_2(\omega) = 12$, $\deg_3(\omega) = 12$ y $\deg_4(\omega) = 18$. En general, se van a representar los vértices de grado 2 con color verde, con rojo los de grado 3 y con morado los de grado 4.

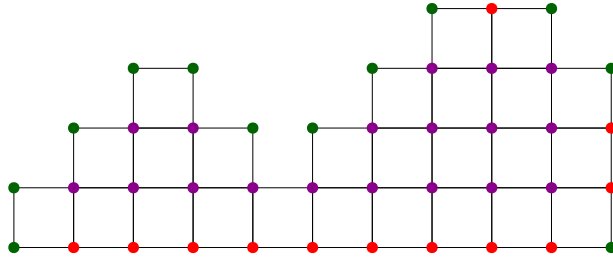


Figura 4.1: Diagrama de barras asociado a $\omega = 1232123443$

4.1. Función generatriz para el Grado de los Vértices

Se define la función generatriz multivariada para el grado de los vértices de $\omega \in \mathcal{C}_{n,j}$ por

$$D_j(x; q_2, q_3, q_4) := \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{\omega \in \mathcal{C}_{n,j}} q_2^{\deg_2(\omega)} q_3^{\deg_3(\omega)} q_4^{\deg_4(\omega)}.$$

En la Figura 4.2 se representan los grados de cada vértice de los diagramas de barras asociados a los elementos de cada $\mathcal{C}_{n,1}$ con $n \leq 4$.

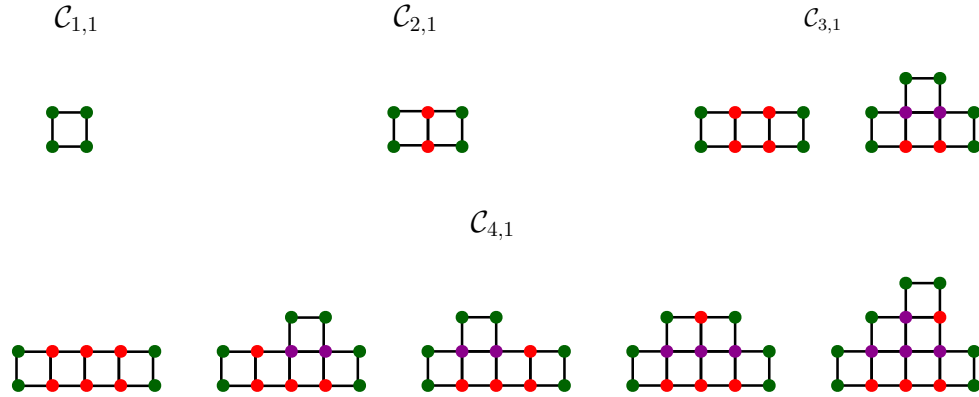


Figura 4.2: Grados de los vértices en los diagrama de barras de los primeros valores de $\omega \in \mathcal{C}_{n,1}$.

Para calcular el grado de los vértices de $\omega \in \mathcal{C}_{n,1}$, se descompone de la forma $\omega = \omega'1$ donde $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,j}$ y a la representación de w' se le agrega el último bloque que aporta q_2^2 a la función $D_j(x; q_2, q_3, q_4)$ como se muestra en la Figura 4.3.



Figura 4.3: Grado del bloque que se agrega a la representación de w' para calcular $D_1(x; q_2, q_3, q_4)$.

A su vez, al agregar el último bloque, se modifican los grados de los dos vértices adyacentes a la última columna de ω' como se explica a continuación:

- Cuando la altura de la columna $n - 1$ es $j = 1$:
El grado de los vértices en el diagrama de barras de ω' está dado por $D_1(x; q_2, q_3, q_4)$ junto con $q_2^2 x$ que es el grado de los vértices que aporta el último bloque. Sin embargo, los grados de los vértices del penúltimo bloque adyacentes a q_2^2 inicialmente eran q_2^2 (ver la representación de la izquierda en la Figura 4.4) y pasaron a ser q_3^2 (ver la representación de la derecha en la Figura 4.4). Entonces, tomando $D_1(x; q_2, q_3, q_4)q_2^2 x$, multiplicando por q_3^2 y dividiendo por q_2^2 se tiene que el grado de los vértices de este diagrama de barras está dado por

$$D_1(x; q_2, q_3, q_4)q_3^2 x.$$

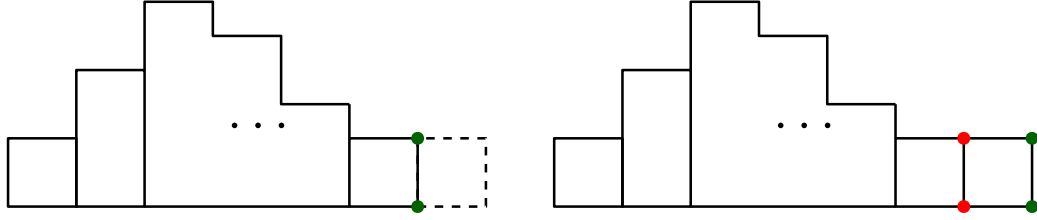


Figura 4.4: Cambio en el grado de los vértices de las últimas dos columnas del diagrama de barras para $\omega = \omega'1$ con $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,1}$.

- Cuando la altura de la columna $n - 1$ es $j \geq 2$:

Siguiendo el razonamiento del caso anterior, el grado de los vértices en el diagrama de barras de ω' está dado por $D_1(x; q_2, q_3, q_4)$ junto con $q_2^2 x$. Dado que los grados de los vértices del penúltimo bloque adyacentes a q_2^2 inicialmente eran $q_2 q_3$ (como se puede ver en la representación de la izquierda de la Figura 4.5) y pasaron a ser $q_4 q_3$ (como se observa en la representación de la derecha de la Figura 4.5), entonces, multiplicando por $q_2^2 q_4 q_3$, dividiendo por $q_2 q_3$ y sumando para todos los valores de j se tiene que el grado de los vértices de este diagrama de barras está dado por

$$q_2 q_4 x \sum_{j \geq 2} D_j(x; q_2, q_3, q_4).$$

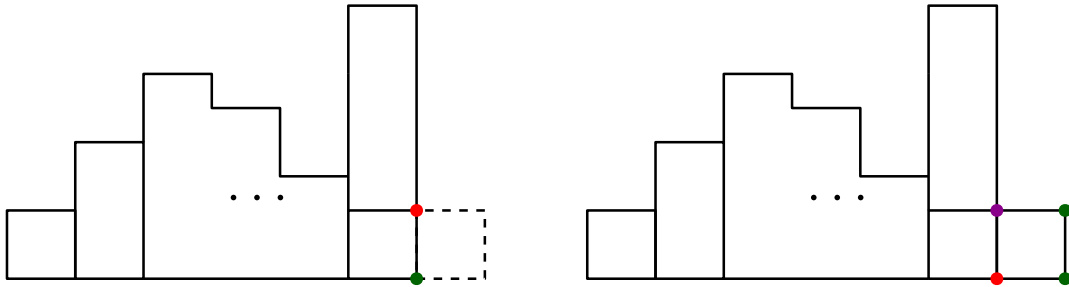


Figura 4.5: Cambio en el grado de los vértices de las últimas dos columnas del diagrama de barras para $\omega = \omega'1$ con $\omega' \in \mathcal{C}_{n-1,j}$ con $j \geq 2$.

Por lo anterior,

$$D_1(x; q_2, q_3, q_4) = q_2^4 x + x q_3^2 D_1(x; q_2, q_3, q_4) + q_2 q_4 x \sum_{j \geq 2} D_j(x; q_2, q_3, q_4). \quad (4.1)$$

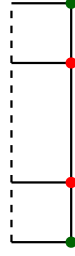


Figura 4.6: Grado de la columna que se agrega a la representación de ω' para calcular $D_j(x; q_2, q_3, q_4)$

Por otro lado, cuando la última columna de la representación es de altura $j \geq 2$ esta siempre aporta $q_2^2 q_3^{j-1} x$ como se puede ver en la Figura 4.6 y modifica el grado de los vértices de la columna $n - 1$ que son adyacentes a la columna n , como se explica a continuación:

- La columna $n - 1$ es de tamaño $j - 1$

Inicialmente los vértices de la columna $n - 1$ adyacentes a la columna n , tienen grado $q_2^2 q_3^{j-2}$ como se puede ver en la representación de la izquierda de la Figura 4.7 y al agregar la columna n de tamaño j estos vértices resultan tener grado $q_2^2 q_3^2 q_4^{j-1}$ como se puede ver en la izquierda de la misma Figura 4.7.

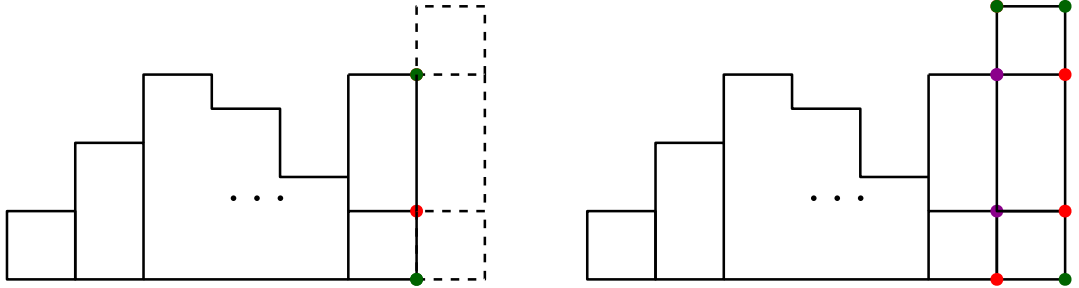


Figura 4.7: Cambio en el grado de los vértices de la columna $n - 1$ cuando se agrega una columna de tamaño $j - 1$.

Por lo tanto, la expresión para este caso es

$$\frac{q_2^2 q_3^{j-1} q_2 q_3 q_4^{j-1}}{q_2 q_3^{j-2}} x = q_2^2 q_3^2 q_4^{j-1} x$$

- La columna $n - 1$ es de altura j

En el diagrama de barras de la izquierda de la Figura 4.8 se puede observar que los vértices de la columna $n - 1$ adyacentes a la columna n , tienen grado $q_2^2 q_3^{j-1}$ y al agregar la columna n de tamaño j estos vértices resultan tener grado $q_3^2 q_4^{j-1}$ como se puede ver en el diagrama de barras de la derecha de la Figura 4.8.

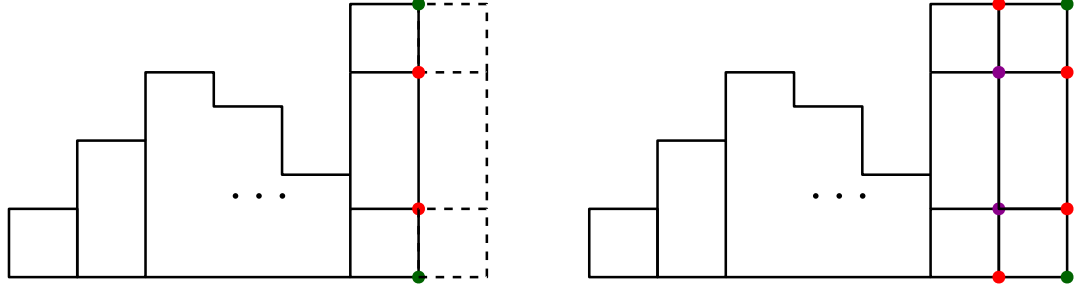


Figura 4.8: Cambio en el grado de los vértices cuando la columna $n - 1$ tiene altura j .

Luego la expresión que determina este caso es

$$\frac{q_2^2 q_3^{j-1} q_3^2 q_4^{j-1}}{q_2^2 q_3^{j-1}} x = q_3^2 q_4^{j-1} x$$

- La columna $n - 1$ tiene tamaño $l > j$

Los vértices de la columna $n - 1$ adyacentes a la columna n , tienen grado $q_2 q_3^j$ inicialmente, como se puede ver en la representación de la izquierda de la Figura 4.9 y al agregar la columna n de tamaño j estos vértices pasan a tener grado $q_3 q_4^j$ como se puede ver en la representación de la derecha de la Figura 4.9.

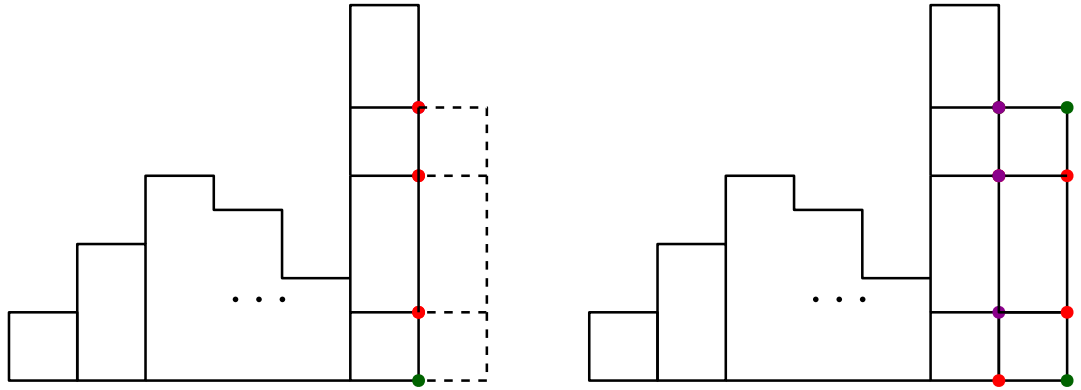


Figura 4.9: Cambio en el grado de los vértices cuando la altura de la columna $n - 1$ es $l > j$.

Por lo tanto, la expresión para los grados de los vértices de la última columna en este caso es

$$\frac{q_2^2 q_3^{j-1} q_3^j q_4^j}{q_2 q_3^j} x = q_2 q_4^j x$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que para $j \geq 2$

$$\begin{aligned}
D_j(x; q_2, q_3, q_4) &= q_2 q_3^2 q_4^{j-1} x D_{j-1}(x; q_2, q_3, q_4) \\
&\quad + q_3^2 q_4^{j-1} x D_j(x; q_2, q_3, q_4) + q_2 q_4^j x \sum_{l>j} D_l(x; q_2, q_3, q_4).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora, se define $D(x; q_2, q_3, q_4; v) = \sum_{j \geq 1} D_j(x; q_2, q_3, q_4) v^{j-1}$. Entonces, multiplicando (4.2) por v^{j-1} , sumando sobre $j \geq 2$ y usando (4.1) se tiene

$$\begin{aligned}
D(x; q_2, q_3, q_4; v) &= q_2^4 x + \left(q_2 q_3^2 q_4 x v + q_3^2 x - \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4 v} \right) D(x; q_2, q_3, q_4; q_4 v) \\
&\quad + \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4 v} D(x; q_2, q_3, q_4; 1). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Asumiendo que $|x| < 1$ y $|q_i| < 1$ para $i = 2, 3, 4$ e iterando (4.3) un número infinito de veces, es decir haciendo $v = qv, v = q^2v, \dots, v = q^jv$ para $j \geq 3$, se tiene

$$\begin{aligned}
D(x; q_2, q_3, q_4; v) &= q_2^4 x \left(1 + \sum_{l \geq 1} \prod_{i=1}^l T(q_4^{i-1} v) \right) + \\
&\quad \left(\frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4 v} + \sum_{l \geq 1} \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4^{l+1} v} \prod_{i=1}^l T(q_4^{i-1} v) \right) D(x; q_2, q_3, q_4; 1),
\end{aligned}$$

donde $T(v) = q_2 q_3^2 q_4 x v + q_3^2 x - \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4 v}$.

Usando lo anterior, haciendo $v = 1$ y despejando para $D(x; q_2, q_3, q_4; 1)$ se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 21. *La función generatriz para el grado de los vértices de los diagramas de barras asociados a las palabras de Catalan está dada por*

$$D(x; q_2; q_3, q_4; v) = \frac{q_2^4 x \left(1 + \sum_{l \geq 1} \prod_{i=1}^l T(q_4^{i-1} v) \right)}{1 - \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4} - \sum_{l \geq 1} \frac{q_2 q_4 x}{1 - q_4^{l+1}} \prod_{i=1}^l T(q_4^{i-1})},$$

cuya expansión en series es

$$D(x; q_2; q_3, q_4; v) = q_2^4 x + (q_2^5 q_3^2 q_4 + q_2^4 q_3^2) x^2 + (q_2^6 q_3^4 q_4^3 + q_2^6 q_3^2 q_4^2 + q_2^5 q_3^4 q_4 + q_2^5 q_3^4 q_4 + q_2^4 q_3^4) x^3 + \dots$$

Lo anterior significa que para las palabras de Catalan de longitud 3 un diagrama de barras tiene 6 vértices de grado dos, 4 de grado tres y 3 de grado cuatro; otro con 6 vértices de grado dos, 2 vértices de grado tres y 2 vértices de grado dos; otro diagrama de barras con 5 vértices de grado dos, 4 vértices de grado tres y 1 de grado cuatro y, finalmente otro de con 4 vértices de grado cuatro y 4 vértices de grado tres. Esto se observa en la Figura 4.10.

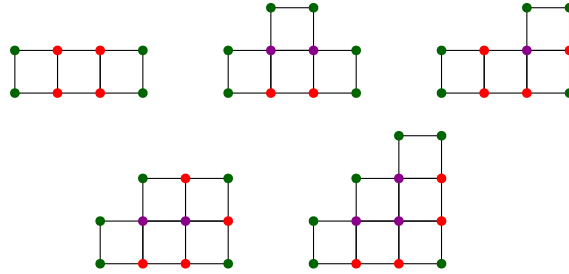


Figura 4.10: Grados de los vértices para los diagramas de barras asociados a las palabras de Catalan de longitud 3.

4.2. Fórmula para el total de los Vértices de cada Grado

Sea $\mathbf{tdeg}_k(n)$ el número total de vértices de grado k , para $k = 2, 3, 4$ en $\omega \in \mathcal{C}_n$. En esta sección se enuncian y demuestran las funciones generatrices para cada k .

Por ejemplo, en el caso de \mathcal{C}_4 se tiene que $\mathbf{tdeg}_2 = 83$, $\mathbf{tdeg}_3 = 72$ y $\mathbf{tdeg}_4 = 43$ como se puede ver en la Figura 4.11.

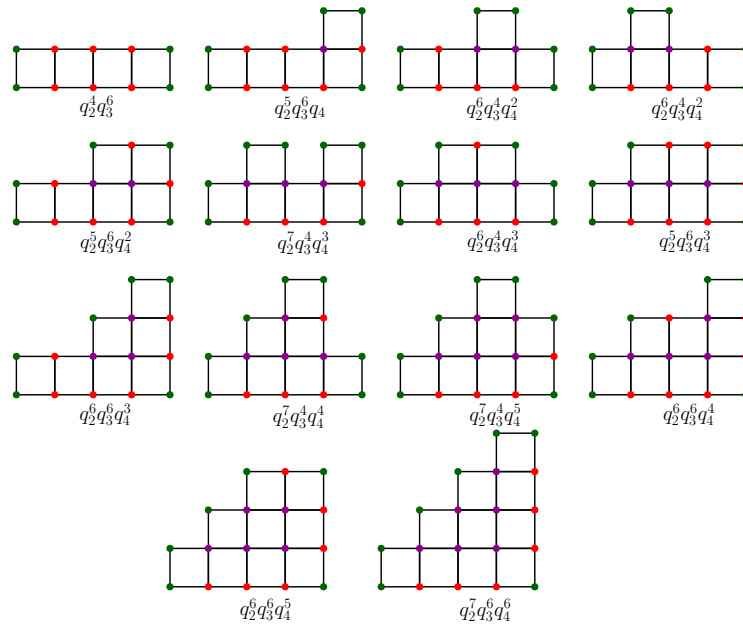


Figura 4.11: Grados de los vértices para cada $\omega \in \mathcal{C}_4$.

Corolario 22. La función generatriz para el total de vértices de grado 2 es

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} tdeg_2(n)x^n &= \frac{2 - 13x + 20x^2 - (2 - 9x - 2x^2)\sqrt{1 - 4x}}{2x(1 - 4x)} \\ &= 4x + 9x^2 + 26x^3 + 83x^4 + 280x^5 + 978x^6 + 3498x^7 + 12727x^8 + \dots\end{aligned}$$

Más aún, $tdeg_2(n) = \frac{(3n^2+10n-5)}{n(n+1)} \binom{2n-2}{n-1}$.

Demostración. Haciendo $q_3 = q_4 = 1$ en (4.3) y agrupando los términos con $D(x; q_2, 1, 1; v)$ se tiene

$$D(x; q_2, 1, 1; v) \left[1 - q_2xv - x + \frac{q_2x}{1-v} \right] = q_2^4x + \frac{q_2x}{1-v} D(x; q_2, 1, 1; 1).$$

Sea

$$v_0 = \frac{1 - x + q_2x - \sqrt{1 - 2x - 2q_2x + x^2 + 2q_2x^2 - 3q_2^2x^2}}{2q_2x}$$

tal que $1 - q_2xv_0 - x + \frac{q_2x}{1-v_0} = 0$. De forma que

$$-q_2^3(1 - v_0) = D(x; q_2, 1, 1, 1),$$

lo cual al reemplazar por el valor de v_0 , derivar y reemplazar $q_2 = 1$ se tiene que la función generatriz que cuenta todos los vértices de grado 2 en el diagrama de barras es

$$\frac{2 - 13x + 20x^2 - (2 - 9x - 2x^2)\sqrt{1 - 4x}}{2x(1 - 4x)}.$$

El desarrollo en series de esta función generatriz es $4x + 9x^2 + 26x^3 + 83x^4 + 280x^5 + 978x^6 + 3498x^7 + 12727x^8 + \dots$. lo cual puede verse particularmente para el caso de x^4 en la Figura 4.11. □

Corolario 23. La función generatriz para el total de vértices de grado 3 es

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} tdeg_3(n)x^n &= \frac{-1 + 4x + (1 - 2x - 2x^2)\sqrt{1 - 4x}}{2 - 8x} \\ &= 4x^2 + 18x^3 + 72x^4 + 280x^5 + 1080x^6 + 4158x^7 + 16016x^8 + \dots\end{aligned}$$

Más aún, $tdeg_3(n) = \frac{6(n-1)}{n+1} \binom{2n-2}{n-1}$.

Demostración. De forma análoga al Corolario 22, sea $q_2 = q_4 = 1$ en (4.3) y agrupando los términos $D(x; 1, q_3, 1; v)$ se tiene

$$D(x; 1, q_3, 1; v) \left[1 - q_3^2xv - q_3^2x + \frac{x}{1-v} \right] = x + \frac{x}{1-v} D(x; 1, q_3, 1; 1).$$

Sea

$$v_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4q_3^2 x (q_3^2 x - x - 1)}}{2q_3^2 x}$$

tal que $1 - q_3^2 xv - q_3^2 x + \frac{x}{1-v} = 0$, de forma que

$$v_0 - 1 = D(x; 1, q_3, 1; 1),$$

con lo cual después de solucionar, derivar respecto a q_3 y reemplazar $q_3 = 1$ se obtiene la función generatriz deseada y cuyo desarrollo en series es

$$4x^2 + 18x^3 + 72x^4 + 280x^5 + 1080x^6 + 4158x^7 + 16016x^8 + \dots,$$

que puede ser visto en la Figura 4.11 para el término x^4 . □

Corolario 24. *La función generatriz para el total de vértices de grado 4 es*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} tdeg_4(n)x^n &= \frac{3 - 8x - (3 - 2x)\sqrt{1 - 4x}}{2 - 8x} \\ &= x^2 + 8x^3 + 43x^4 + 204x^5 + 914x^6 + 3968x^7 + 16895x^8 + 71012x^9 + \dots \end{aligned}$$

Más aún, $tdeg_4(n) = 2 \cdot 4^{n-1} - (5n - 3)C_{n-1}$.

Demostración. Haciendo $q_2 = q_3 = 1$ en (4.3) se tiene

$$D(x; 1, 1, q_4; v) = x + \frac{(1 - q_4 - q_4^2 v^2)x}{1 - q_4 v} D(x; 1, 1, q_4; q_4 v) + \frac{q_4 x}{1 - q_4 v} D(x; 1, 1, q_4; 1).$$

Se define $B(x; v) = \frac{\partial}{\partial q_4} D(x; 1, 1, q_4; v) |_{q_4=1}$. Derivando la ecuación anterior respecto a q_4 , se obtiene

$$\begin{aligned} B(x; v) &= \frac{(v^3 - 2v^2 + v - 1)x}{(v - 1)^2} D(x; 1, 1, 1; v) + \frac{v^2 x}{v - 1} \left(B(x; v) + v \frac{\partial}{\partial v} D(x; 1, 1, 1; v) \right) \\ &\quad + \frac{x}{(v - 1)^2} D(x; 1, 1, 1; 1) + \frac{x}{1 - v} B(x; 1), \end{aligned} \quad (4.4)$$

lo cual, reemplazando $D(x; 1, 1, 1; v)$ por $\frac{x(C(x)-v)}{1-v+xv^2}$ y $D(x; 1, 1, 1; 1)$ por $C(x) - 1$, derivando dos veces con respecto a v y tomando $v = C(x)$ es

$$B(x; 1) = \frac{3 - 8x - (3 - 2x)\sqrt{1 - 4x}}{2 - 8x}.$$

El desarrollo en series de esta última función generatriz es

$$x^2 + 8x^3 + 43x^4 + 204x^5 + 914x^6 + 3968x^7 + 16895x^8 + 71012x^9 + \cdots ,$$

es decir que en el caso de $n = 4$ hay 43 vértices de grado 4, lo cual puede ser visto en la Figura 4.11. □

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

Durante la realización de este trabajo resultó determinante interpretar adecuadamente las técnicas utilizadas y los resultados obtenidos previamente por Callan, Mansour y Ramírez para el Área y el Semiperímetro de los poliminós asociados a las palabras de Catalan [1] con la biyección entre \mathcal{C}_n y las trayectorias de Dyck, la aplicación del método simbólico para la obtención de funciones generatrices así como del método Kernel para las fórmulas cerradas de cada parámetro.

Con lo anterior, definir adecuadamente los parámetros de los Puntos Interiores y el Grado de los Vértices, interpretarlos en los poliminós asociados a las palabras de Catalan y la exploración con el software *Mathematica* para verificar las conjeturas realizadas durante el proceso, dieron lugar a los resultados obtenidos junto con Mansour y Ramírez en [6].

Trabajo futuro

A raíz de la investigación realizada en este documento, surge la pregunta sobre la incidencia de números primos en las sucesiones encontradas de los parámetros estudiados en este trabajo, así como de la biyección con otros objetos combinatorios. Adicionalmente, resulta interesante preguntarse por la categorificación de las secuencias de enteros obtenidas en cada uno de los parámetros, considerándolas como invariantes de objetos en una categoría dada en particular.

Por otro lado, dada la relación entre los números de Markov y las fracciones continuas [8], surge la pregunta sobre si existe alguna relación con los parámetros definidos en este trabajo y los grafos serpiente mostrados en la Figura 5.1; la biyección entre los grafos serpiente y las fracciones continuas ha sido estudiado en varios artículos de los autores I. Çanakçı y R. Schiffler, para más detalle se puede ver [3]. Más aún, la relación de estos grafos con los

números de Catalan tiene que ver con que a cada triangulación de un polígono con $n + 3$ lados es posible asociarle un grafo serpiente, cuyos emparejamientos perfectos permiten obtener una fórmula para las variables en un álgebra de conglomerado del tipo Dynkin. A partir de esto, con especializaciones apropiadas a mutaciones de estas álgebras se generan soluciones a la ecuación de Markov. Existen muchas mas conexiones de caminos de Dyck y frisos de Coxeter con algebras de conglomerado.

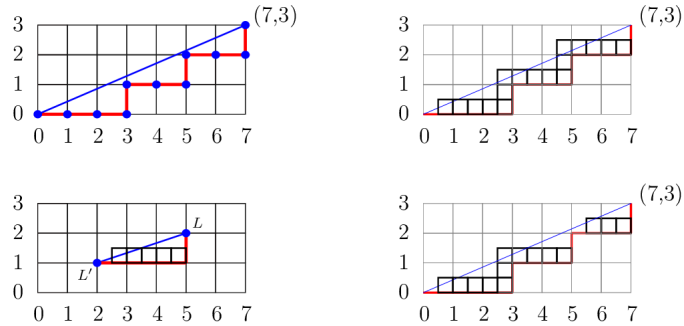


Figura 5.1: Grafo serpiente asociado a una trayectoria de Christoffel. Tomado de [2]

Además está la inquietud sobre cómo definir y contar parámetros como los de este trabajo sobre un objeto similar a un politopo de tres dimensiones construidos como $\omega \times \omega'$ para $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_n$ donde ω define el largo y alto del objeto y ω' su ancho; esto teniendo presente el trabajo realizado con la teoría de Erhart sobre el número de puntos reticulares de un politopo y sus triangulaciones [5].

Finalmente, con base en los comentarios y preguntas realizadas en las conferencias donde se mostraron los resultados de este trabajo, surgen preguntas a cerca de las permutaciones en las palabras de Catalan y su incidencia en los parámetros definidos para los poliminós asociados. Por ejemplo para $\omega = 12334$ y $\omega' = 12343$ en \mathcal{C}_5 se tiene que $int(\omega) = in(\omega')$ como se ve en la Figura 5.2. Además de estudiar la relación entre los Puntos Interiores de estos poliminós y las trayectorias de Dyck, así como alguno de los otros objetos combinatorios que cuentan los números de Catalan.

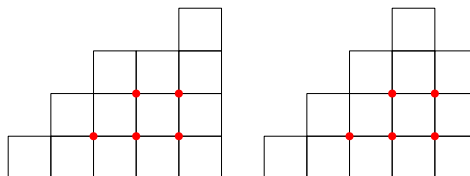


Figura 5.2: Puntos interiores en $\omega = 12334$ y $\omega' = 12343$ de \mathcal{C}_5 .

Bibliografía

- [1] D. Callan, T. Mansour, J. Ramírez. Statics on bargraphs of Catalan words. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, (2021), 177-196.
- [2] I. Çanakçı, R. Schiffler. Snake graphs and Continued Fractions. *European Journal of Combinatorics*, (2020), 1-19.
- [3] I. Çanakçı, R. Schiffler. Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces. *Journal of Algebra*, (2013), 240-281.
- [4] P. Flajolet, R. Sedgewick. Analytic Combinatorics. *Cambridge University Press*, (2009).
- [5] J. Loera, J. Rambau, F. Santos. Triangulations. Structures for Algorithms and Applications. *Springer Berlin, Heidelberg*, (2010).
- [6] T. Mansour, J.L Ramírez, D.A Toquica. Counting lattices points on bargraphs of Catalan words. *Mathematics in Computer Science*, (2021), 701-713.
- [7] I. Park. Catalan Numbers Page. <https://www.math.ucla.edu/~pak/lectures/Cat/pakcat.htm>.
- [8] M. Rabideau, R. Schiffler. Continued fractions and ordered in Markov numbers. *Advances in Mathematics*, (2020), 107-231.
- [9] R. Stanley. Catalan Numbers. *Cambridge University Press*, (2015).