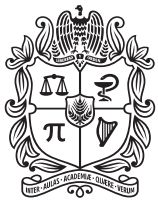

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Metasuperficies para Filtrado y Absorción en el Rango de Microondas

Juan Pablo Del Risco Giraldo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2016

Metasuperficies para Filtrado y Absorción en el Rango de Microondas

Juan Pablo Del Risco Giraldo

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias Físicas

Director:
Doctor Juan Domingo Baena Doello

Línea de Investigación:
Electromagnetismo Aplicado
Grupo de Investigación:
Grupo de Física Aplicada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2016

A mi familia.

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional en este trabajo.

Al director de este trabajo, Juan Domingo Baena, por su orientación y dedicación en este proceso de investigación.

A Carolina Munera y Elizabeth Urrego por su gran ayuda en los difíciles procesos administrativos.

A la Universidad Nacional de Colombia por la formación recibida en estos años.

A COLCIENCIAS por su financiación a través del programa joven investigador.

Al grupo CMUN de la Universidad Nacional de Colombia por su ayuda para financiar este doctorado.

A la Universidad de Sevilla, en especial a los profesores Vicente Losada y Francisco Medina, y la colaboración de Francisco Fernández en el proceso de fabricación y caracterización en algunas de las estructuras fabricadas para este trabajo.

A la Universidad ITMO, en especial al profesor Pavel Belov y la colaboración de Stanislav Glybovski y Alexey Slobozhanyuk en el proceso de fabricación y caracterización en algunas de las estructuras fabricadas para este trabajo.

Resumen

En este trabajo se exploró, inicialmente, la implementación de un modelo de impedancias superficiales en arreglos periódicos bidimensionales. Con este objetivo y para simplificar razonablemente el modelo se tomó únicamente el término dipolar de la expansión, además, se supuso que los dipolos son puntuales. En primera instancia, este modelo se aplicó para obtener las condiciones sobre las polarizabilidades en las partículas de un arreglo periódico para obtener absorción perfecta. Posteriormente, se obtuvieron algunas propiedades interesantes de las metasuperficies autocomplementarias, que en conjunto con el modelo de impedancias superficiales fueron útiles para diseñar y modelar una metasuperficie autocomplementaria con la propiedad de conversión de polarización lineal a circular, dentro de la cual se logra obtener anchos de banda porcentuales de $\approx 53\,\%$ experimentalmente. En otra aplicación, por medio de los modelos de líneas de transmisión se diseñaron dos metasuperficies para el filtrado en ángulo y frecuencia alcanzado un ancho de banda angular de 8.9° centrado en incidencia normal para uno de los casos. Finalmente, se diseño y modeló un resonador tipo Fabry-Pérot metamaterial con base en medios dieléctricos artificiales con constantes dieléctricas elevadas, a través de los cuales se llegó a obtener para uno de los casos que la longitud de onda en el espacio libre es aproximadamente 74 veces más grande que el espesor del dispositivo.

Palabras clave: Metasuperficie, impedancia superficial, superficie autocomplementaria, convertidor de polarización, filtro angular, resonador Fabry-Pérot.

Abstract

In this work, we initially explored the implementation of a surface impedance model in bidimensional periodic arrangements. With this objective and to simplify the model, only the dipole term was retained, in addition, it was assumed that the dipoles are punctual. In a first step, this model was applied to obtain the conditions on the polarizabilities of the particles in a periodic arrangement in order to reach perfect absorption. Later, some interesting properties of self-complementary metasurfaces were achieved, which together with the surface impedance model were useful for designing and modelling a self-complementary metasurface with the linear-to-circular polarization conversion property, within which it is possible to reach bandwidths percentages of $\approx 53\,\%$ experimentally. In another application, via the transmission line models, two metasurfaces were designed for angle and frequency filtering, achieving an angular bandwidth of 8.9° centered on normal incidence. Finally, a

Fabry-Pérot metamaterial resonator was designed and modelled based on artificial dielectric media with high dielectric constant, through which it was attained for a specific sample that the wavelength in the free space is approximately 74 times greater than the thickness of the device.

Key words: Metasurface, surface impedance, selfcomplementary surface, polarization converter, angular filter, Farbry-Perot resonator.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Lista de tablas xiii

Lista de figuras xv

Introducción 1

1. Modelo de Impedancias Superficiales 5
1.1. Fuentes y Campos en Diferentes Representaciones 6
1.2. Relación entre Corrientes Superficiales y Admitancias Superficiales 8
1.3. Admitancias Superficiales y Polarizabilidades en Sistemas Interactuantes . . 11
1.4. Modelo de Impedancias Superficiales para Pantallas con Simetría de inversión y Espejo 18
1.5. Absorbente Perfecto 22

2. Restricciones Fundamentales de Metasuperficies Autocomplementarias 29
2.1. Constancia en el Desfase entre los Coeficientes de Reflexión y Transmisión . 31
2.2. Validación Numérica 36
2.3. Resultados Experimentales 44

3. Convertidores de Polarización Lineal a Circular Delgados de Banda Ancha Basados en Metasuperficies Autocomplementarias de Zigzag 51
3.1. Teoría 52
3.2. Validación Numérica 55
3.3. Efecto del Sustrato Dieléctrico 57
3.4. Resultados Experimentales 58

4. Metasuperficies para Filtrado Angular **63**
4.1. Modelos para Filtros Angulares 64
4.1.1. Modelo de Línea de Transmisión 67
4.1.2. Modelos de Circuito para Filtros Angulares 69
4.2. Filtro Angular de Anillos Resonantes 72
4.2.1. Resultados Numéricos para un Filtro Angular de Anillos Resonantes . 78
4.3. Filtro Angular con Base en Elementos Resonantes Extendidos 81
4.3.1. Resultados Numéricos para un Filtro Angular de Resonadores Extendidos 83
4.4. Resultados Experimentales 86

5. Resonador Fabry-Pérot Metamaterial **91**
5.1. Teoría 92
5.1.1. Modelo de Línea de Transmisión 97
5.2. Validación Numérica 102

Conclusiones **111**

Productos **115**

Bibliografía **117**

Lista de Tablas

1.1. Fuentes de campo, densidades de corriente eléctrica y magnética, y ecuaciones de Maxwell en diferentes representaciones de los campos. 7

2.1. Desempeño de las pantallas autocomplementarias. 1$^{\text{ra}}$ columna: nombre de las estructuras. 2$^{\text{da}}$ columna: frecuencias donde la magnitud de los coeficientes de transmisión y reflexión son iguales. 3$^{\text{ra}}$ columna: Tamaños eléctricos de las celdas unidades. 4$^{\text{ta}}$ columna: anchos de banda porcentual de la razón axial a 3 dB. 39
2.2. Comparación de variables relevantes obtenidas mediante simulación, entre parches rectangulares con la misma geometría con diferentes materiales y espesores. 47

3.1. Comparación entre las metasuperficies simuladas en la Figura 3.4. 57
3.2. Comparación entre las metasuperficies simuladas de la Figura 3.5. 60

4.1. Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.7 (a) con los parámetros geométricos $a = 8.0$ mm, $w = d = 0.4$ mm y $s = 1.4$ mm. 80
4.2. Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.9 (a) con los parámetros geométricos $a = 10.0$ mm, $g = 1.0$ mm y $s = 0.5$ mm. 84
4.3. Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.12 (a). La superficie se hizo con cobre y el sustrato de soporte fue ARLON CuClad 250LX. 89

5.1. Parámetros característicos de la estructura en la Figura 5.6 (a) con las variaciones correspondientes de g y s. 104
5.2. Parámetros característicos de la estructura en la Figura 5.8 (a) con variaciones del ancho w. 106

Lista de Figuras

1.1. Diagrama de los campos macroscópicos involucrados en el proceso de dispersión. Se ha recurrido a representar la incidencia normal con el campo eléctrico polarizado en y para facilitar la comprensión del diagrama. Los superíndices "inc", "r" y "t" representan a la onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. 9

1.2. (a) Diagrama del arreglo periódico de dispersores. Se ha representado únicamente la incidencia normal con el campo eléctrico polarizado en y. El vector $\vec{r}_l$ se mide desde el dipolo l-ésimo en dirección al dipolo j-ésimo.(b) Diagrama de la onda plana incidiendo oblicuamente sobre la superficie, con ángulo azimutal $\phi^{\text{inc}} = 90°$ y ángulo polar θ^{inc}. En rojo se especifica el desfase agregado a la onda por la distancia entre los dispersores y la incidencia oblicua. 12

1.3. Diagrama de los campos macroscópicos involucrados en el proceso de dispersión. El superíndice + simboliza aquellos campos cuyo vector de onda está dirigido hacia la superficie, es decir, los campos incidente. Por otra parte, el superíndice − simboliza a los campos que se propagan fuera de la superficie, es decir, los campos transmitidos y reflejados. 19

1.4. Impedancias equivalentes para describir a la celda unitaria en presencia de un campo eléctrico incidente polarizado en x (a) y y (b). 20

1.5. (a) Vista lateral y superior de la celda unitaria con los respectivos parámetros geométricos. La onda plana incide en ángulo normal a la superficie con el campo eléctrico polarizado en y. (b) Modo par de la celda unitaria, principalmente excitado por el campo magnético. (c) Modo impar de la celda unitaria, principalmente excitado por el campo eléctrico. 24

1.6. Diagrama de las interacciones que describen los parámetros circuitales L, M y C. Como se observa, L y C incluyen la interacción de un anillo consigo mismo y con los anillos al mismo costado, mientras que M describe la interacción de un anillo con los que están en el costado opuesto. Por simplicidad se han distanciado los anillos dentro de la celda para distinguir las interacciones. . . 26

1.7. Potencia absorbida (líneas sólidas) y reflejada (líneas punteadas) en función de la frecuencia para diferentes valores de conductividad. 27

2.1. Ejemplos de superficies autocomplementarias. Se considera que estas se extienden infinitamente horizontal y verticalmente 29
2.2. Diagrama de las ondas planas linealmente polarizadas involucradas en el proceso de dispersión de una metasuperficie autocomplementaria bajo incidencia normal. 31
2.3. Diagrama teórico de la trayectoria, en el plano complejo, de los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas polarizadas en el eje x o y. 34
2.4. Metasuperficie autocomplementaria iluminada por una onda plana linealmente polarizada. En el conjunto de frecuencias de trabajo (ω_c), la mitad de la potencia incidente se transmite con polarización circular mientras que la otra mitad se refleja con polarización circular de helicidad opuesta a la transmitida. 35
2.5. Estructura autocomplementaria de la rejilla de tiras paralelas. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados. 40
2.6. Simulación de la sección eficaz de dispersión diferencial (escala lineal) para la rejilla de tiras paralelas a 32.8 GHz. Se muestra la dispersión bajo diferentes ángulos de incidencia: (a) $\theta = 0°$, (b) $\theta = 30°$ y (c)(a) $\theta = 60°$. 41
2.7. Estructura autocomplementaria de SRRs y C-SRRs. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados. 42
2.8. Estructura autocomplementaria de parches y huecos rectangulares. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados. 43
2.9. Simulación de la sección eficaz de dispersión diferencial (escala lineal) para la rejilla de tiras paralelas a 32.8 GHz. Se muestra la dispersión bajo diferentes ángulos de incidencia: (a) $\theta = 0°$, (b) $\theta = 30°$ y (c)(a) $\theta = 60°$. 44
2.10. Montaje experimental. La muestra es un arreglo autocomplementario de parches rectangulares y huecos. Ésta rodeó de material absorbente a fin de reducir la difracción de borde. La muestra se fabricó en ARLON-25N cuyos parámetros son: constante dieléctrica $\epsilon_r = 3.38$, tangente de pérdidas $\tan\delta = 0.0025$, espesor del dieléctrico $h = 0.5$ mm, y espesor de la capa de cobre $m = 18$ μm. 45
2.11. Coeficientes de transmisión medidos (línea sólida) bajo incidencia normal comparados con la simulación numérica (línea punteada) para la estructura fabricada. 45
2.12. Bosquejo de las diferentes polarizaciones utilizadas para comprobar la estabilidad angular. 48

2.13. Coeficientes de transmisión medidos bajo incidencia oblicua para el arreglo autocomplementario de parches y huecos rectangulares. 49

3.1. Metasuperficie de zigzag iluminada por una onda plana linealmente polarizada. A la frecuencia de trabajo, la mitad de la potencia se transmite y la otra mitad se refleja con helicidad opuesta. 52
3.2. Modelo circuital para una celda unitaria de un zigzag autocomplementario cuando es iluminado por una onda plana polarizada en x (a) y y (b). 53
3.3. Resultados teóricos (línea negra sólida) y simulados de los coeficientes de transmisión y reflexión (magnitud y fase) para ondas incidentes polarizadas en x y y, además se muestra la relación axial para el caso de una onda incidiendo con un ángulo de polarización $\alpha = 45°$. Los resultados simulados son representados para metasuperficies con diferentes valores del ángulo β. Las curvas simuladas corresponden a las geometrías ilustradas en la Figura 3.4. Note que la curva para $\beta = 18.0°$ (línea verda) se solapa casi a la perfección con la curva teórica. 55
3.4. Celdas unitarias simuladas. El azul claro representa el vacío mientras que el gris el conductor eléctrico perfecto. Cada estructura puede ser identificada por el ángulo del zigag β. 56
3.5. Coeficientes de transmisión y reflexión de una metasuperficie de zigzag autocomplementaria (a) y de un zigzag sintonizado. En ambos casos la superficie fue grabada en una lámina de cobre sobre un sustrato dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon_r = 3.38(1 - \mathrm{j}0.0025)$. Las gráficas muestran magnitud y fase de los coeficientes de transmisión y reflexión tanto como la razón axial (RA). Cada gráfica contiene resultados simulados (líneas solidas sin símbolos) y experimentales (líneas solidas con símbolos). 59
3.6. Montaje experimental. (a) Bosquejo de la cámara anecoica con la muestra entre las dos antenas de bocina. El ángulo θ^{inc} representa el ángulo de incidencia. (b) Fotografía de la muestras fabricada rodeada de absorbentes de microondas. Metasuperficie fabricada del zigzag (c) autocomplementario y (d) sintonizado. 60
3.7. Diferentes planos de incidencia y estados de polarización para la incidencia oblicua. 61
3.8. Medidas de los coeficientes de transmisión y razones axiales bajo incidencia oblicua para el zaigzag autocomplementario (a) y el zaigzag sintonizado. La zona resaltada en rosa indica un incremento de fase de 90° 62

4.1. Diagrama de la onda plana incidente y el vector de onda de la onda superficial. (a) Proyección de la relación de dispersión sobre la superficie de la onda plana que se propaga en espacio libre (líneas grises), y la relación de dispersión del modo superficial (línea roja) para el caso que es creciente (b) y decreciente (c). 64
4.2. (a) Curvas del módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (θ_{i}), con sus respectivas frecuencias de resonancia asociadas (f_{ri}). (b) Perfil de la transmisión en función del ángulo de incidencia para la frecuencia fija f_{r1}. (c) Curvas del módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (θ_{i}), con sus respectivas frecuencias de resonancia asociadas (f'_{ri}). (d) Perfil de la transmisión en función del ángulo de incidencia para la frecuencia fija f'_{r1}. 66
4.3. (a) Línea de transmisión y (b) el modelo de circuito asociado a ésta. 67
4.4. Secciones de líneas de transmisión sin pérdidas no convencionales que sirven para modelar filtros angulares. En cada una de las secciones de línea se ha cambiado el inductor o el condensador de la Figura 4.3 (b) por otro(s) elemento(s) de circuito. Las líneas en rojo representan el elemento efectivo por el cual se sustituirán los elementos encerrados para poder utilizar el modelo de líneas de transmisión convencionales. 70
4.5. (a) Celda unitaria de una superficie compuesta por EC-SRRs. El campo incidente está polarizzado en el modo TE_y (b) Distribución de corrientes sobre el anillo con el campo incidente descrito en (a). (c) Modelo de circuito del EC-SRR. La fuente V representa a la excitación debida al campo externo. . 73
4.6. (a) Celda unitaria del filtro angular hecho con EC-SRRs conectados. En direcciones x y y hay condiciones periódicas (b) Sección de la línea de transmisión que describe a la celda unitaria con la polarización del campo mostrado en (a). (c) Distribución de la corriente en el EC-SRR conectado. 74
4.7. (a) Celda unitaria del filtro angular hecho con EC-SRRs rectangulares conectados. En direcciones x y y hay condiciones periódicas, mientras que en dirección z hay una única celda unitaria (b) Sección de la línea de transmisión que describe a la celda unitaria con la polarización del campo mostrado en (a). Este modelo tiene en cuenta la interacción con las celdas que se encuentran por encima y debajo por medio del condensador C_1. 76

4.8. (a) En rojo se muestra la relación de dispersión de la onda que se propaga en la superficie del filtro angular hecho con la cadenas de EC-SRRs (Figura 4.7 (a)). Las líneas en gris representan las proyecciones de la relación de dispersión de la onda externa que incide con polarización TE_y y un ángulo θ^{inc}. (b) Módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (líneas sólidas), y frecuencias de resonancia esperadas de las intersecciones entre la relación de dispersión de la onda superficial con las ondas externas. (c) Perfil del módulo de la transmisión en función del ángulo de incidencia para las frecuencias de resonancia de las curvas en (b). La estructura se simuló en conductor eléctrico perfecto con los parámetros $a = 8.0$ mm, $w = d = 0.4$ mm y $s = 1.4$ mm. 79
4.9. (a) Celda unitaria del filtro angular de resonadores extendidos. (b) Corriente superficial en dirección y del modo propio. (c) Campo eléctrico entre las tiras, en dirección x. 82
4.10. Sección de línea de transmisión que modela a la celda unitaria de la Figura 4.9 (a). 83
4.11. (a) Relación de dispersión de la onda superficial (línea roja) para la estructura de resonadores extendidos con los parámetros de la Figura 4.9 (a). Las líneas grises son las proyecciones de las relaciones de dispersión de la onda externa incidiendo con diferentes ángulos (θ^{inc}). (b) Módulo de la transmisión de función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (líneas sólidas), y frecuencias de resonancia esperadas de las interacciones entre la relación de dispersión de la onda superficial y las relaciones de dispersión de la onda externa incidiendo con ángulo θ^{inc}. Perfil del módulo de la transmisión en función del ángulo de incidencia para las frecuencias de resonancias de las curvas en (b). Estas curvas se obtuvieron de simular la estructura con conductor eléctrico perfecto. 85
4.12. (a) Celda unitaria del filtro angular hecha con EC-SRRs rectangulares con los parámetros geométricos de interés. (b) Vista de la superficie fabricada con los parámetros geométricos y del dieléctrico, el material conductor es cobre. (c) Diagrama del montaje experimental. 86
4.13. Módulo de la transmisión en función de la frecuencia obtenida por medio de (a) medidas experimentales y (b) la simulación del filtro angular de EC-SRRs rectangulares conectados con los parámetros de la Figura 4.12. (c) Relación de dispersión simulada (línea roja), extraída de los parámetros experimentales (puntos rojos) y ajuste de los datos experimentales (línea negra). Las líneas grises son las relaciones de dispersión teóricas de la onda externa que incide con ángulo θ^{inc}. (d) Perfil simulado del coeficiente de transmisión en función del ángulo de incidencia a frecuencias fijas. 88

5.1. (a) Sección del material resonador tipo Fabry-Pérot (RFP). Celda unitaria del RFP vista en perspectiva (b), vista frontal (c) y lateral (d). La celda unitaria se replica periódicamente en el plano xy, y en dirección z se replica un número finito de veces. 92
5.2. Celda unitaria con todas las capas en fase (a) y líneas de campo eléctrico cualitativas en presencia de un campo eléctrico polarizado en y (b). Celda unitaria con la capa central desfasada en ($a/2$, $a/2$) respecto sus vecinas (c) y líneas de campo eléctrico (líneas negras) y corriente eléctrica (líneas rojas) cualitativas en presencia de un campo eléctrico polarizado en y (d). 93
5.3. (a) Modelo de circuito de la celda unitaria mostrada en la Figura 5.1 (b). (b) Modelo homogeneizado de la LDA. 94
5.4. (a) Las líneas negra y roja representan la permitividad efectiva relativa en función de los parámetros s y g respectivamente. (b) Permitividad efectiva relativa en función del periodo a. 96
5.5. (a) Vista lateral de la sección del RFP en estudio, con la descripción cualitativa de las líneas de campo eléctrico. (b) Modelo de línea de transmisión para modelar la propagación a través del RFP. 98
5.6. (a) Celda unitaria implementada en la simulación. (b) Módulo de la transmisión en función de la frecuencia del resultado obtenido mediante simulación numérica, en línea negra, y mediante la relación (5.11), en línea roja. 102
5.7. Estudio paramétrico del comportamiento de la transmisión en función de la frecuencia para la estructura de la Figura 5.6 (a) con variación en (a) distancia entre parches de la misma capa "g" y (b) distancia entre capas "s". 103
5.8. Vista en perspectiva de una sección del RFP cubierto delante y detrás por una superficie reflectiva (a), y el coeficiente de transmisión en función de la frecuencia obtenido mediante simulación y el modelo para diferentes anchos w (b). 105
5.9. (a) Vista en perspectiva y (b) lateral de la celda unitaria simulada. Los parámetros geométricos correspondientes son $a = 8$ mm, $b = 18$ μm, $s = 0.203$ mm y $g = 0.6$ mm. Se utilizó cobre como conductor y sustrato Rogers 4003. (c) Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia 107
5.10. Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes valores de tangente de pérdidas (a), y conductividades (b). 108
5.11. (a) Vista en perspectiva y (b) lateral de una sección del RFP cubierto por superficies reflectivas. Los parámetros geométricos correspondientes son $a = 8$ mm, $b = 18$ μm, $s = 0.203$ mm, $g = 0.6$ mm y $w = 3$ mm. Se utilizó cobre como conductor y sustrato Rogers 4003. (c) Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia 109

5.12. Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes valores de tangente de pérdidas (a), y conductividades (b), correspondientes a la estructura de la Figura 5.11 (a) 110

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\vec{E}$	Campo eléctrico	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$
$\vec{H}$	Intensidad del campo magnético	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
$\vec{J}$	Densidad volumétrica de corriente eléctrica	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$
$\vec{J}_\mathrm{s}$	Densidad superficial de corriente eléctrica	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
$\vec{K}$	Densidad volumétrica de corriente magnética	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Cm}}$
$\vec{K}_\mathrm{s}$	Densidad superficial de corriente magnética	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$
Z	Impedancia	Ω
Z_0	Impedancia del espacio libre	Ω
Y	Admitancia	Ω^{-1}
R	Resistencia	Ω
G	Conductancia	Ω^{-1}
L	Inductancia	H
C	Capacitancia	F
$\overline{\overline{Z}}_\mathrm{s}$	Impedancia superficial	Ω
$\overline{\overline{Y}}_\mathrm{s}$	Admitancia superficial	Ω^{-1}
$\vec{r}$	Vector de distancia	m
$\vec{n}$	Vector normal a la superficie partiendo del medio incidente	1
$\vec{p}$	Dipolo eléctrico	Cm
$\vec{m}$	Dipolo magnético	Am^2
$\overline{\overline{C}}$	Constante de acoplamiento entre campos y dipolos	$\frac{1}{\mathrm{m}^3}$

Símbolo	Término	Unidad SI
	de igual naturaleza (eléctrica-eléctrica o magnética-magnética)	
$\overline{\overline{C}}^{\text{em}}$	Constante de acoplamiento entre campos y dipolos	$\frac{1}{\text{m}^3}$
	de diferente naturaleza (magnética-eléctrica o eléctrica-magnética)	
c	Velocidad de la luz	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
f	Frecuencia de la onda	Hz
$\vec{k}$	Vector de onda	$\frac{1}{\text{m}}$
$\overline{\overline{S}}$	matriz de dispersión	1
t	Coeficiente de transmisión	1
r	Coeficiente de reflexión	1
T	Transmitancia	1
R	Reflectancia	1
RA	Razón axial	1
Q	Factor de calidad	1
N	Número de celdas unitarias	1
a ó b	Parámetro de red	m

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
σ	Conductividad	$\frac{S}{\text{m}}$
ϵ_0	Permitividad eléctrica del espacio libre	$\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
ϵ	Permitividad eléctrica del medio	$\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
ϵ_{r}	Permitividad eléctrica relativa	
μ_0	Permeabilidad magnética	$\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$
γ	Constante de propagación	$\frac{1}{\text{m}}$
α	Constante de atenuación	$\frac{1}{\text{m}}$
$\overline{\overline{\alpha}}^{\text{ee}}$	Polarizabilidad eléctrica-eléctrica	m^3

Símbolo	Término	Unidad SI
$\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}}$	Polarizabilidad magnética-magnética	m^3
$\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}$	Polarizabilidad eléctrica-magnética	m^3
$\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}}$	Polarizabilidad magnética-eléctrica	m^3
α	angulo del plano de polarización	$^\circ$
θ^{inc}	Ángulo polar de la onda incidente	$^\circ$
ϕ^{inc}	Ángulo azimutal de la onda incidente	$^\circ$
ω	Frecuencia angular	$\frac{1}{\mathrm{s}}$

Subíndices

Subíndice	Término
0	Estado de referencia
r	Estado de resonancia
t	Componente tangencial
s	Variable definida en la superficie
s	elementos en serie
p	elementos en paralelo
ef	Sistema efectivo
iz	Medido hacia la izquierda
de	Medido hacia la derecha
x, y o z	Componente a lo largo del eje x, y o z

Superíndices

Superíndice	Término
inc	Asociado a la onda incidente
loc	Asociado a la onda local

Superíndice	**Término**
s	Asociado a la onda superficial

Introducción

Como es usual en las ciencias, la invención de un concepto o una rama de las ciencias no coincide con las primeras aplicaciones, descubrimientos o en general cualquier contribución asociada a éstos. De igual forma, aunque el término "metamaterial" es relativamente reciente, sus inicios pueden remontarse justo a finales del siglo XIX, con el primer experimento en microondas con estructuras hoy en día conocidas como quirales, llevado a cabo por Jagadish Chunder Bose [1]. Sin embargo, es a finales de la segunda guerra mundial, con el diseño de los primeros dieléctricos artificiales para el rango de microondas, a través del cual se impulsa la investigación en esta área [2–6].

Finalizando la década de los 60s, Veselago publicó un desarrollo teórico que se considera el inició formal de la investigación en los metamateriales [7]. En éste, Veselago investigó la propagación de una onda plana en un material cuya permitividad y permeabilidad son negativas. Como resultado obtuvo que para una onda plana monocromática que se propaga en este medio la dirección del vector de Poynting es antiparalela a la dirección de la velocidad de fase. Posteriormente, en el año de 1999 John Pendry identificó un camino práctico para hacer un metamaterial zurdo, el cual no sigue las reglas convencionales de la mano derecha [8, 9]. En el año 2000, Smith obtuvo un nuevo tipo de medio zurdo el cual posee, simultaneamente, permitividad y permeabilidad negativas y logró llevar a cabo un experimento en el rango de microondas para comprobar dichas propiedades [10]. A partir de esta época muchos investigadores han trabajado en el área de los metamateriales para extraer todas sus aplicaciones en varios campos. De lo anterior que la historia de los metamateriales deba ser comprendida como la evolución de un grupo específico de materiales artificiales, los cuales interactúan con la radiación electromagnética.

Desde este punto de vista se ha llegado al consenso que los metamateriales deben entenderse como aquellos materiales artificiales compuestos por celdas unitarias pequeñas comparadas con la longitud de onda, que en conjunto exhiben una respuesta eléctrica (representada por la permitividad eléctrica efectiva del medio, ϵ_{ef}) o magnética (representada por la permeabilidad magnética efectiva del medio, μ_{ef}) que no se encuentra de forma natural [11–13]. A partir de esta definición, las metasuperficies son la extensión o reducción natural de los metamateriales al espacio bidimensional, es decir, son arreglos bidimensionales, delgados y con celdas unitarias pequeñas comparadas con la longitud de onda.

Las metasuperficies, al igual que los metamateriales, dan la libertad para manipular la onda por medio cambios abruptos de las propiedades ópticas [14]. En los últimos años, las metasuperficies se han convertido en una de las áreas de mayor crecimiento en el electromagnetismo.

Entre las funcionalidades más estudiadas en metasuperficies se pueden mencionar la selectividad en frecuencia por medio de una banda de paso o rechazo, superficies de alta impedancia, absorbente perfecto de banda angosta, rotor de polarización, selector de polarización circular, convertidor de polarización lineal a circular y transmitarray y reflectarrays para focalizar ondas [15].

Este trabajo está centrado en cuatro áreas, en primer lugar, los absorbentes de banda angosta. A pesar de que las pérdidas suelen ser evitadas, en algunos casos pueden ser una característica deseable. En el 2008, se construyó una metasuperficie cuya celda unidad es una tira metálica y un anillo resonador eléctrico (ERR por sus siglas en ingles) Ésta estructura tiene la característica que, bajo incidencia normal, los modelos computacionales mostraron que absorbe casi la totalidad de la onda a una frecuencia de 11.5 GHz y experimentalmente es cercana al 88 % [16]. No obstante, debido a la falta de simetría de la celda unitaria, para un ángulo de incidencia de 20° la absorción decae al 5 %. En trabajos posteriores se sustituyó el ERR por partículas en forma de cruz [17] y cuadradas [18], con la primera aumenta la frecuencia de resonancia y se logra una mejor absorción a nivel experimental (97 %). La segunda partícula mejora considerablemente el comportamiento para incidencia oblicua, logrando absorciones superiores al 90 % para ángulos hasta de 65°. Dado que estas partículas no son iguales por ambas caras, su respuesta depende de la dirección de incidencia. En este trabajo se propondrá un modelo de impedancias superficiales para tratar de dar cuenta del comportamiento de los absorbentes. Por otra, con base en esta teoría se diseña un absorbente perfecto en el rango de microondas con base en anillos acoplados.

En segundo lugar se explora la aplicación de convertidores de polarización lineal a circular. Estos dispositivos se han desarrollado con base en dieléctricos artificiales anisótropos, de forma que se garantice que el camino óptico en una de las direcciones es tal que se encuentra desfasado en 90° respecto a la componente ortogonal [19, 20]. Por otra parte, otra contribución se basa en líneas de meandros, los cuales mediante la sintonización de la estructura logran obtener los desfases deseados a una frecuencia específica. En este trabajo de tesis se explorarán los convertidores de polarización con en base en algunas propiedades de las metasuperficies autocomplementarias.

En tercer lugar se estudian los filtros angulares. En ésta área se han diseñado dispositivos hechos con multicapas de cuarto de longitud de onda [21–23], pantallas de metal perforadas y cavidades tipo Fabry-Pérot separadas por rejillas [24–28]. En trabajos más recientes se han propuesto materiales con bandas prohibidas, de modo que al cambiar el ángulo de incidencia, la relación de dispersión de la onda cae en la región prohibida y no permite la transmisión

de la onda [29–31]. En éste trabajo se realiza un desarrollo teórico para comprender, desde los modelos de circuito, el funcionamiento de los filtros angulares. Además, se proponen dos filtros angulares, el primero hecho con cadenas de anillos de Pendry conectados, la segunda con base en resonadores extendidos [32, 33].

Por último, se diseñó un Fabry-Perot con base en un metamaterial delgado. Para ésto, se utilizaron láminas dieléctricas artificiales de alta permitividad [34–38]. Con el objetivo de describir analíticamente el comportamiento de esta estructura se recurrió a los modelos de líneas de transmisión, posteriormente, utilizando la matriz de transferencia, se dedujeron los coeficientes de transmisión y reflexión para el bloque entero [39].

1 Modelo de Impedancias Superficiales

Imagina una colección numerosa de objetos sobre la cual incide una onda electromagnética, la cual es caracterizada por la longitud de onda, λ^{inc}. Debido a los detalles geométricos en cada objeto de la colección, al igual que las propiedades del material con el que está hecho cada uno, calcular el campo total dispersado, computando uno a uno, puede resultar muy complejo [40].

Si los objetos que pertenecen a esta colección resultan ser muy pequeños comparados con λ^{inc}, entonces los detalles individuales pierden importancia para describir la forma en que interactúa la onda electromagnética con éstos. Por lo anterior, en la práctica se promedian los efectos individuales, con lo cual se logra sustituir la colección inhomogénea por un medio material homogéneo caracterizado por solo dos parámetros macroscópicos efectivos (en primera aproximación): la permitividad eléctrica (ϵ) y la permeabilidad magnética (μ) [41].

Como se intuye de lo mencionado, es la longitud de onda, λ^{inc}, quien determina si un objeto puede verse o no como un medio material, mientras que los parámetros macroscópicos efectivos, ϵ y μ, determinan el patrón de dispersión. Por lo tanto, aunque una colección inhomogénea no satisfaga la definición intuitiva de un medio, para una onda electromagnética puede que no haya diferencia alguna [13].

Como síntesis, el objeto práctico de una teoría de homogeneización es remplazar una colección de objetos por un medio homogéneo equivalente que produce, aproximadamente, los mismos campos dispersados.

En el caso de estructuras delgadas, es decir, aquellos arreglos cuyo espesor es tan pequeño comparado con la longitud de onda que se pueden ver como superficies, aunque no existe una prohibición en definir la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, ésta carece de rigurosidad conceptual puesto que estos parámetros se definen para medios materiales.

En este capítulo se aborda el proceso de homogeneización en estructuras delgadas desde el punto de vista de las impedancias superficiales, es decir, por medio de la relación entre las densidades de corrientes eléctrica y magnética (efectiva) superficiales con los campos eléctricos y magnéticos de interés. Además, se busca establecer una relación entre las admitancias con las polarizabilidades asociadas a las partículas, y éstos con los coeficientes de transmisión. En el trabajo realizado por Ortiz *et. al.* [42] se considera a cada partícula como independiente de las vecinas, sin embargo, para éste trabajo se tendrá en cuenta el acoplamiento con las partículas vecinas por medio de la matriz de acoplamiento.

Con el fin de aclarar algunos aspectos del proceso de homogeneización, a continuación se presenta el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell en diferentes representaciones. Vale la pena aclarar que con "representaciones" se hace referencia a las diferentes formas de expresar las ecuaciones de Maxwell en términos, por ejemplo, de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, en cuyo caso las fuentes de los campos poseen cierto valor, los cuales son diferentes a los obtenidos en la representación $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

1.1. Fuentes y Campos en Diferentes Representaciones

Considérese un sistema con las fuentes de cargas y corrientes eléctrica y magnética ρ^{e}, ρ^{m}, $\vec{J}$ y $\vec{K}$, respectivamente. Es claro que las fuentes de carga y corriente magnética no existen, sin embargo, se introducen como un artilugio matemático con el objetivo de facilitar pasos posteriores. Teniendo en cuenta estas fuentes y suponiendo una dependencia armónica en el tiempo ($e^{-\mathrm{i}\omega t}$), las ecuaciones de Maxwell en el dominio de las frecuencias son [41, 43]:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho^{\mathrm{e}}, & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= \rho^{\mathrm{m}}, \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= \mathrm{i}\omega\vec{B} - \vec{K}, & \vec{\nabla}\times\vec{H} &= -\mathrm{i}\omega\vec{D} + \vec{J}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde el campo de desplazamiento eléctrico ($\vec{D}$) y la intensidad del campo magnético ($\vec{H}$) se pueden expresar en términos de la polarización y magnetización como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \tag{1.2}$$

con ϵ_0 y μ_0 la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, respectivamente. Adicionalmente, las densidades de carga y corrientes cumplen la ecuación de continuidad:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \mathrm{i}\omega\rho^{\mathrm{e}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{K} = \mathrm{i}\omega\rho^{\mathrm{m}}. \tag{1.3}$$

Ahora, con base a las relaciones (1.1) y (1.2) se desarrollan algunas posibles representaciones de las ecuaciones de Maxwell.

Tabla 1.1: Fuentes de campo, densidades de corriente eléctrica y magnética, y ecuaciones de Maxwell en diferentes representaciones de los campos.

Representación	$\vec{E}$ - $\vec{B}$	$\vec{E}$ - $\vec{H}$	$\vec{D}$ - $\vec{B}$	$\vec{D}$ - $\vec{H}$
$\rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}$	$\rho^{\mathrm{e}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$	$\rho^{\mathrm{e}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$	ρ^{e}	ρ^{e}
$\rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}}$	ρ^{m}	$\rho^{\mathrm{m}} - \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$	ρ^{m}	$\rho^{\mathrm{m}} - \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$
$\vec{J}_{\mathrm{ef}}$	$-\mathrm{i}\omega\vec{P} + \vec{J} + \vec{\nabla}\times\vec{M}$	$-\mathrm{i}\omega\vec{P} + \vec{J}$	$\vec{\nabla}\times\vec{M} + \vec{J}$	$\vec{J}$
$\vec{K}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{K}$	$-\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{M} + \vec{K}$	$-\epsilon_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{P} + \vec{K}$	$-\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{M} + \vec{K} - \epsilon_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{P}$
Ley de Gauss eléctrica	$\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}$	$\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}$
Ley de Gauss magnética	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}}$	$\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}}$	$\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}}$
Ley de Faraday-Lenz	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mathrm{i}\omega\vec{B} - \vec{K}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mathrm{i}\omega\mu_0\vec{H} - \vec{K}_{\mathrm{ef}}$	$\epsilon_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{D} = \mathrm{i}\omega\vec{B} - \vec{K}_{\mathrm{ef}}$	$\epsilon_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{D} = \mathrm{i}\omega\mu_0\vec{H} - \vec{K}_{\mathrm{ef}}$
Ley de Ampere	$\mu_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mathrm{i}\omega\epsilon_0\vec{E} + \vec{J}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\mathrm{i}\omega\epsilon_0\vec{E} + \vec{J}_{\mathrm{ef}}$	$\mu_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mathrm{i}\omega\vec{D} + \vec{J}_{\mathrm{ef}}$	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\mathrm{i}\omega\vec{D} + \vec{J}_{\mathrm{ef}}$

Representación $\vec{E}$ - $\vec{B}$

A partir de la sustitución directa de (1.2) en (1.1) las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\begin{aligned} \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho^{\mathrm{e}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}, & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= \rho^{\mathrm{m}}, \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= \mathrm{i}\omega\vec{B} - \vec{K}, & \mu_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{B} &= -\mathrm{i}\omega\epsilon_0\vec{E} - \mathrm{i}\omega\vec{P} + \vec{J} + \vec{\nabla}\times\vec{M}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Comparando (1.1) con (1.4) se identifica que las fuentes efectivas de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (densidades efecticas de carga) y las corrientes asociadas son:

$$\begin{aligned} \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}} &= \rho^{\mathrm{e}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}, & \rho^{\mathrm{m}}_{\mathrm{ef}} &= \rho^{\mathrm{m}}, \\ \vec{J}_{\mathrm{ef}} &= -\mathrm{i}\omega\vec{P} + \vec{J} + \vec{\nabla}\times\vec{M}, & \vec{K}_{\mathrm{ef}} &= \vec{K}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como se observa, la densidad de carga y corriente magnética permanecen inalteradas en ésta representación. Adicionalmente, las densidades y corrientes efectivas en (1.5) cumplen

la ecuación de continuidad. Al sustituir las fuentes efectivas en (1.4), éstas pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ef}}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \rho^{\mathrm{m}}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \mathrm{i}\omega \vec{B} - \vec{K}, & \mu_0^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\mathrm{i}\omega \epsilon_0 \vec{E} + \vec{J}_{\mathrm{ef}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Siguiendo un procedimiento similar se pueden derivar las fuentes de campo y corrientes en diferentes representaciones de los campos. Algunos ejemplos de éstas se muestran en la Tabla 1.1.

Nótese que ρ^{e}, ρ^{m}, $\vec{J}$ y $\vec{K}$ en la Tabla 1.1 se refieren a densidades de carga y corrientes libres (fuentes reales), sin embargo, como no se han encontrado monopolos magnéticos, entonces $\rho^{\mathrm{m}} = \vec{K} = 0$. Es importante tener en cuenta la representación de los campos en la cual se está trabajando, porque de esta forma las fuentes y las corrientes efectivas quedan completamente determinadas y no se deben confundir con las correspondientes en otras representaciones.

1.2. Relación entre Corrientes Superficiales y Admitancias Superficiales

Imagina una onda plana que incide sobre un arreglo periódico bidimensional y delgado, como se ilustra en la Figura 1.1, en el cual no hay cargas ni corrientes libres. Se supondrá que la longitud de onda es muy grande comparada con el espesor del arreglo y el tamaño de la celda unitaria. Como se mencionó anteriormente, si no se pasa por alto el hecho que el arreglo posee un espesor no nulo, al igual que una polarización y una magnetización derivadas de la estructura de la celda unitaria, entonces las corrientes "medidas" corresponden a las fuentes libres, por lo tanto no hay carga ni corriente magnética. Sin embargo, al sustituir este sistema por uno efectivo, donde el arreglo bidimensional es una superficie de espesor nulo, entonces aparecen discontinuidades en los campos eléctricos y magnéticos tangenciales, los cuales son provocados por corrientes magnéticas y eléctricas superficiales efectivas derivadas de la polarización y magnetización, es decir:

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) = -\vec{K}_{\mathrm{s,ef}}, \qquad \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) = \vec{J}_{\mathrm{s,ef}}, \tag{1.7}$$

donde $\vec{J}_{\mathrm{s,ef}}$ y $\vec{K}_{\mathrm{s,ef}}$ son las densidades efectivas de corriente eléctrica y corriente magnética superficial, las cuales tienen unidades de A/m y V/m, respectivamente. En esta misma ecuación, los campos eléctricos y magnéticos descritos corresponden a los macroscópicos totales a cada lado de la superficie según la Figura 1.1. Por otra parte, en la aproximación

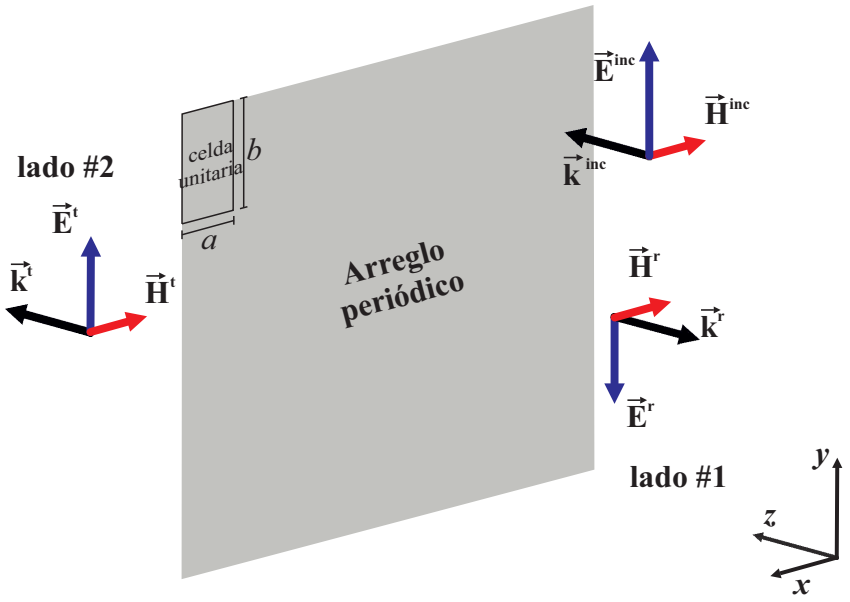

Figura 1.1: Diagrama de los campos macroscópicos involucrados en el proceso de dispersión. Se ha recurrido a representar la incidencia normal con el campo eléctrico polarizado en y para facilitar la comprensión del diagrama. Los superíndices "inc", "r" y "t" representan a la onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

de primer orden, la corriente superficial se puede relacionar con los campos macroscópicos totales de la forma:

$$\vec{J}_{\mathrm{s,ef}} = \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ee}} \cdot \vec{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}} + Z_0 \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{em}} \cdot \vec{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}}, \qquad Y_0 \vec{K}_{\mathrm{s,ef}} = \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{me}} \cdot \vec{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}} + Z_0 \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{mm}} \cdot \vec{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}}. \tag{1.8}$$

$\overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ee}}$, $\overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{em}}$, $\overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{me}}$ y $\overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{mm}}$ son las admitancias superficiales que relacionan al par corriente-campo de naturaleza, eléctrica-eléctrica, eléctrica-magnética, magnética-eléctrica y magnética-magnética, respectivamente. Además, $Z_0 = Y_0^{-1} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ es la impedancia del vacío, la cual se ha colocado convenientemente para que todas las admitancias superficiales tengan las mismas unidades de Ω^{-1}.

En (1.8) el subíndice "t" representa la componente tangencial de los campos. Nótese que en esta relación se pudieron haber escrito las tres componentes del campo macroscópico total, sin embargo, debido a que se están considerando ondas planas, lo cual implica que $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ y $\vec{k}\cdot\vec{H} = 0$, entonces la componente normal a la superficie de cada campo no es independiente de la componente tangencial, por lo cual se pueden reducir las tres componentes del campo a solo dos, y las nueve componentes de cada matriz de admitancia a solo cuatro.

Vale la pena notar que en la primera relación de (1.8) se ha incluido una contribución magnética explicita, la cual usualmente no se tiene en cuenta, sin embargo, está presente en

el caso más general. Bajo la consideración de ondas planas, debido a que el campo eléctrico y magnético están relacionados de forma simple, ambas relaciones en (1.8) podrían escribirse en términos únicamente del campo eléctrico o del campo magnético, lo cual se convierte en un problema de elección de representación.

Puesto que en el sistema efectivo el arreglo periódico ha sido sustituido por una superficie, entonces los campos macroscópicos se pueden calcular como un promedio sencillo entre los campos macrocópicos totales en cada región:

$$\vec{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}} = \frac{\vec{E}_{1,\mathrm{t}} + \vec{E}_{2,\mathrm{t}}}{2}, \qquad \vec{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tot}} = \frac{\vec{H}_{1,\mathrm{t}} + \vec{H}_{2,\mathrm{t}}}{2}. \tag{1.9}$$

Nótese que expresar las corrientes en términos de los campos macroscópicos totales en (1.8) tiene cierta arbitrariedad, puesto que todos los campos macroscópicos están relacionados entre si y como tal se pueden escribir las corrientes en términos de $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ e incluso $\vec{E}^{\mathrm{inc}}$, teniendo en cuenta que estos cambios afectan las propiedades de las admitancias superficiales. El campo que se elija dependerá de cada caso y según permita expresar de manera simple cada problema. Por sencillez en el manejo de las ecuaciones, se eligen a los campos incidentes para establecer la relación entre corrientes y admitancias, con la cual (1.8) se puede escribir:

$$\vec{J}_{\mathrm{s,ef}} = \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ee}} \cdot \vec{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} + Z_0 \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{em}} \cdot \vec{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}}, \qquad Y_0 \vec{K}_{\mathrm{s,ef}} = \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{me}} \cdot \vec{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} + Z_0 \overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{mm}} \cdot \vec{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}}. \tag{1.10}$$

Con el fin de expresar las corrientes superficiales que dan cuenta del salto de la componente tangencial del campo eléctrico y magnético, se parte de las ecuaciones de Maxwell en (1.1), que en ausencia de fuentes libres se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \mathrm{i}\omega \vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\mathrm{i}\omega \vec{D}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por conveniencia se elige representar los campos como $(\vec{E} + \vec{P}_{\mathrm{n}}/\epsilon_0)$-$(\vec{H} + \vec{M}_{\mathrm{n}})$, donde el subíndice "n" hace referencia a la componente normal a la superficie, y teniendo en cuenta que $\vec{P} = \vec{P}_{\mathrm{n}} + \vec{P}_{\mathrm{t}}$ y $\vec{M} = \vec{M}_{\mathrm{n}} + \vec{M}_{\mathrm{t}}$, entonces las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}_{\mathrm{n}} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_{\mathrm{t}}, \qquad \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} + \vec{M}_{\mathrm{n}} \right) = -\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{M}_{\mathrm{t}}, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}_{\mathrm{n}} \right) &= \mathrm{i}\omega\mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}_{\mathrm{n}} \right) + \mathrm{i}\omega\mu_0 \vec{M}_{\mathrm{t}} + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}_{\mathrm{n}}, \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{H} + \vec{M}_{\mathrm{n}} \right) &= -\mathrm{i}\omega\epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}_{\mathrm{n}} \right) - \mathrm{i}\omega \vec{P}_{\mathrm{t}} + \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\mathrm{n}}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde se pueden identificar las fuentes de dichos campos, además de las corrientes asociadas:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{ef}}^{\mathrm{e}} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_{\mathrm{t}}, & \rho_{\mathrm{ef}}^{\mathrm{m}} &= -\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{M}_{\mathrm{t}}, \\ \vec{J}_{\mathrm{ef}} &= -\mathrm{i}\omega \vec{P}_{\mathrm{t}} + \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\mathrm{n}}, & \vec{K}_{\mathrm{ef}} &= -\mathrm{i}\omega\mu_0 \vec{M}_{\mathrm{t}} - \vec{\nabla} \times \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}_{\mathrm{n}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Siguiendo el procedimiento convencional, se consiguen derivar las condiciones de frontera (1.7), donde las corrientes superficiales efectivas provienen de la polarización y la magnetización. Además, como en el sistema efectivo los dipolos ocupan un área y no un volumen, entonces la polarización y la magnetización son superficiales y por lo tanto las corrientes superficiales son:

$$\vec{J}_{\mathrm{s,ef}} = -\mathrm{i}\omega\vec{P}_{\mathrm{s,t}} + \vec{\nabla}\times\vec{M}_{\mathrm{s,n}}, \qquad \vec{K}_{\mathrm{s,ef}} = -\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{M}_{\mathrm{s,t}} - \vec{\nabla}\times\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_{\mathrm{n}}. \tag{1.15}$$

Nótese que las densidades de corriente volumétricas en (1.14) y las superficiales en (1.15) son, por la forma en que se han definido, tangentes a la superficie, lo cual significa que las componentes normales de estas corrientes son nulas.

1.3. Admitancias Superficiales y Polarizabilidades en Sistemas Interactuantes

En la sección anterior se relacionaron las corrientes eléctricas y magnéticas efectivas con las admitancias superficiales. En esta sección, bajo la aproximación dipolar, se busca establecer relaciones entre las admitancias superficiales y las polarizabilidades asociadas a las partículas, con la característica de que se tienen en cuenta que las partículas interactúan entre si, a diferencia de algunos trabajos donde se consideran aisladas [42].

Como se mencionó anteriormente, se supone que la celda unitaria es pequeña comparada con la longitud de onda de forma que los dipolos se pueden considerar puntuales, como se ilustra en la Figura 1.2 (a). Considere el dipolo j-ésimo del arreglo y los campos circundantes sobre éste, entonces en aproximación lineal el dipolo eléctrico, $\vec{p}_j$, y el dipolo magnético, $\vec{m}_j$, se pueden ligar con los campos por medio de las polarizabilidades como [44]:

$$\vec{p}_j = \epsilon_0\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}}\cdot\vec{E}^{\mathrm{loc}} + \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}}{c}\cdot\vec{H}^{\mathrm{loc}}, \qquad \vec{m}_j = Y_0\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}}\cdot\vec{E}^{\mathrm{loc}} + \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}}\cdot\vec{H}^{\mathrm{loc}}, \tag{1.16}$$

donde $\overline{\overline{\alpha}}$ representa una matriz de polarizabilidades y los superíndices ee, em, me y mm se refiere al par dipolo-campo de naturaleza eléctrica-eléctrica, eléctrica-magnética, magnética-eléctrica y magnética-magnética, además, la constante c representa la velocidad de la luz

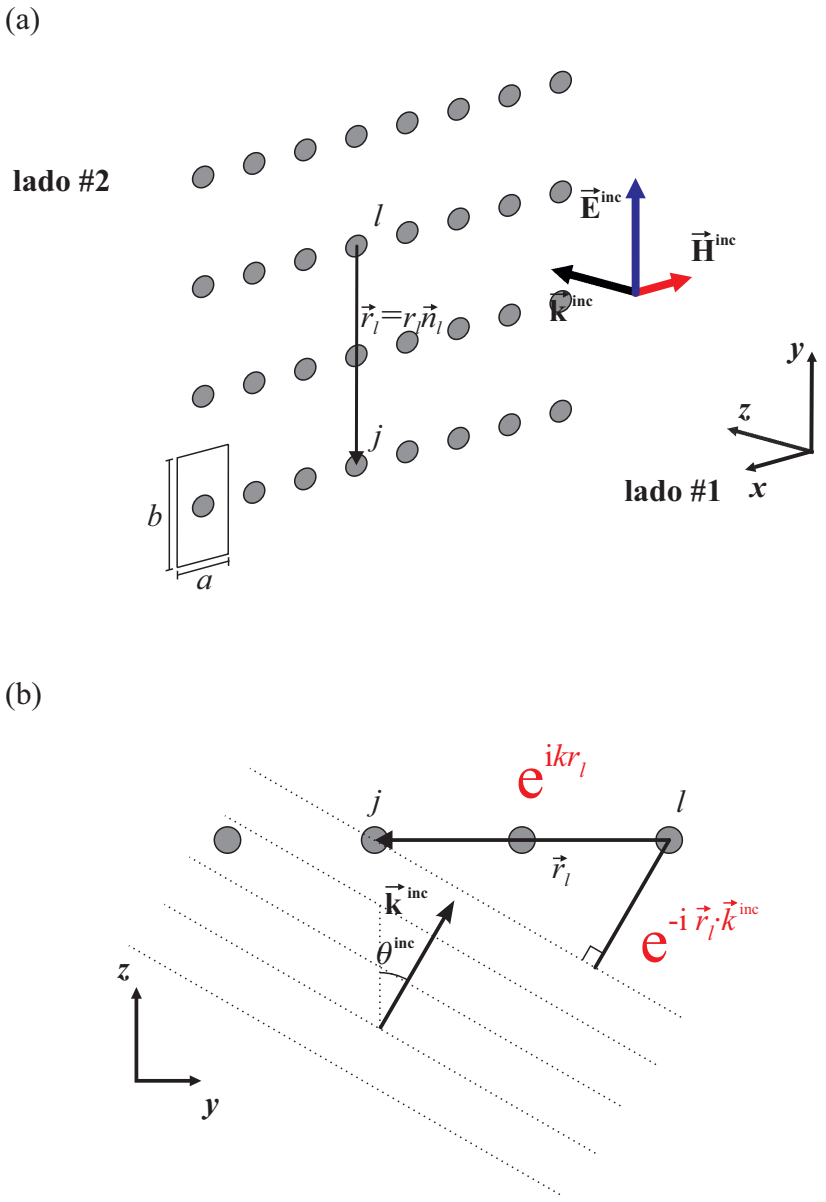

Figura 1.2: (a) Diagrama del arreglo periódico de dispersores. Se ha representado únicamente la incidencia normal con el campo eléctrico polarizado en y. El vector $\vec{r}_l$ se mide desde el dipolo l-ésimo en dirección al dipolo j-ésimo.(b) Diagrama de la onda plana incidiendo oblicuamente sobre la superficie, con ángulo azimutal $\phi^{\text{inc}} = 90°$ y ángulo polar θ^{inc}. En rojo se especifica el desfase agregado a la onda por la distancia entre los dispersores y la incidencia oblicua.

en el vacío. Los campos con el superíndice "loc" simboliza al sumatorio de todos los campos presentes en el punto donde se localiza el dipolo j-ésimo, menos el propio, es decir, el campo

incidente más los campos producidos por todos los otros dipolos.

$$\vec{E}^{\text{loc}} = \vec{E}^{\text{inc}} + \sum_{l\neq j} \vec{E}\left(\vec{p}_l\right) + \vec{E}\left(\vec{m}_l\right), \qquad \vec{H}^{\text{loc}} = \vec{H}^{\text{inc}} + \sum_{l\neq j} \vec{H}\left(\vec{p}_l\right) + \vec{H}\left(\vec{m}_l\right). \tag{1.17}$$

A partir de la teoría electromagnética, es conocido que los campos producidos por dipolos puntuales son [41]:

$$\vec{E}\left(\vec{p}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi\epsilon_0 r_l}\left\{k^2\left(\vec{n}_l \times \vec{p}_l\right)\times\vec{n}_l + \left[3\vec{n}_l\left(\vec{n}_l\cdot\vec{p}_l\right) - \vec{p}_l\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\}, \tag{1.18}$$

$$\vec{E}\left(\vec{m}_l\right) = -\frac{e^{\mathrm{i}kr_l}Z_0}{4\pi r_l}k^2\left(\vec{n}_l\times\vec{m}_l\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr_l}\right), \tag{1.19}$$

$$\vec{H}\left(\vec{m}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi r_l}\left\{k^2\left(\vec{n}_l \times \vec{m}_l\right)\times\vec{n}_l + \left[3\vec{n}_l\left(\vec{n}_l\cdot\vec{m}_l\right) - \vec{m}_l\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\}, \tag{1.20}$$

$$\vec{H}\left(\vec{p}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}c}{4\pi r_l}k^2\left(\vec{n}_l\times\vec{p}_l\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr_l}\right). \tag{1.21}$$

En estas expresiones, $k = \omega/c$ es el modulo vector de onda a la frecuencia de interés (ω), r_l es la distancia medida desde el dipolo l-ésimo hasta el dipolo j-ésimo y $\vec{n}_l$ es un vector unitario en dirección al dipolo j-ésimo medido desde el dipolo l-ésimo. Por conveniencia se desea expresar los campos (1.18) a (1.21) mediante una relación lineal con los dipolos eléctricos y magnéticos, entonces éstas se pueden reescribir matricialmente como:

$$\vec{E}\left(\vec{p}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi\epsilon_0 r_l}\left\{-k^2\left[\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right] + \left[3\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\}\cdot\vec{p}_l, \tag{1.22}$$

$$\vec{E}\left(\vec{m}_l\right) = -\frac{e^{\mathrm{i}kr_l}Z_0}{4\pi r_l}k^2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr_l}\right)\overline{\overline{N}}_{2,l}\cdot\vec{m}_l, \tag{1.23}$$

$$\vec{H}\left(\vec{m}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi r_l}\left\{-k^2\left[\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right] + \left[3\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\}\cdot\vec{m}_l, \tag{1.24}$$

$$\vec{H}\left(\vec{p}_l\right) = \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}c}{4\pi r_l}k^2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr_l}\right)\overline{\overline{N}}_{2,l}\cdot\vec{p}_l, \tag{1.25}$$

donde las matrices $\overline{\overline{N}}_{1,l}$ y $\overline{\overline{N}}_{2,l}$ provienen de los productos entre el vector unitario $\vec{n}_l$ con los dipolos $\vec{m}_l$ y $\vec{p}_l$, y se definen según las relaciones en (1.26).

$$\overline{\overline{N}}_{1,l} = \begin{pmatrix} n_{x,l}^2 & n_{x,l}n_{y,l} & n_{x,l}n_{z,l} \\ n_{x,l}n_{y,l} & n_{y,l}^2 & n_{z,l}n_{y,l} \\ n_{x,l}n_{z,l} & n_{y,l}n_{z,l} & n_{z,l}^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\overline{N}}_{2,l} = \begin{pmatrix} 0 & -n_{z,l} & n_{y,l} \\ n_{z,l} & 0 & -n_{x,l} \\ -n_{y,l} & n_{x,l} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Es conocido que el valor de los dipolos eléctricos y magnéticos depende del origen de coordenadas desde el cual se observe, sin embargo, los campos generados por éstos no cambian[1]. En el caso de arreglos periódicos, todos los dipolos son iguales cuando el origen se fija en el mismo punto de cada celda unitaria. Debe recordarse que en el arreglo en consideración no existen cargas ni corrientes libres, sino que hay aquellas debidas a los efectos de polarización y magnetización, estos últimos originados por la presencia de una excitación externa.

Como se puede intuir de la Figura 1.2 (b), en incidencia normal se pueden sustituir directamente las relaciones (1.18) a (1.21) en (1.16) y (1.17), y teniendo en cuenta que todos los dipolos eléctricos y magnéticos del arreglo son iguales, se puede obtener éstos como función única de los campos incidentes y las polarizabilidades de las partículas. Sin embargo, cuando la onda incide oblicua a la superficie, se debe tener en cuenta que cada dipolo está retardado debido a que el frente de onda no incide al mismo tiempo sobre todo el arreglo. Éste factor de corrección tiene un valor de $e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l}$, donde $\vec{k}$ es el vector de onda y $\vec{r}_l = r_l\vec{n}_l$ es el vector de distancia medido desde el dipolo l-ésimo hacia el j-ésimo, de modo que el valor corregido de cada dipolo del arreglo es $\vec{p}_l = \vec{p}e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l}$. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, las expresiones en (1.16) se puede escribir como:

$$\vec{p} = \epsilon_0\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}}\left\{\vec{E}^{\mathrm{inc}} + \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\overline{C}}\cdot\vec{p} + \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}}\cdot\vec{m}\right\} + \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}}{c}\left\{\vec{H}^{\mathrm{inc}} - \frac{1}{\mu_0}\overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}}\cdot\vec{p} + \overline{\overline{C}}\cdot\vec{m}\right\}, \tag{1.27}$$

$$\vec{m} = Y_0\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}}\left\{\vec{E}^{\mathrm{inc}} + \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\overline{C}}\cdot\vec{p} + \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}}\cdot\vec{m}\right\} + \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}}\left\{\vec{H}^{\mathrm{inc}} - \frac{1}{\mu_0}\overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}}\cdot\vec{p} + \overline{\overline{C}}\cdot\vec{m}\right\}. \tag{1.28}$$

Nótese que en estas expresiones se ha tenido en cuenta que todos los dipolos son iguales. Puesto que a los términos de la matriz $\overline{\overline{C}}$ se les conoce como constantes de acoplamiento [45], entonces a $\overline{\overline{C}}$ se le llamará matriz de acoplamiento, mientras que $\overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}}$ será llamada matriz de acoplamiento magneto-eléctrica ya que relaciona dipolos de naturaleza diferente. Conforme a las relaciones (1.17), (1.22) a (1.26) las matrices de acoplamiento son:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{C}} &= \sum_{l\neq j} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l}\frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi r_l}\left\{-k^2\left[\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right] + \left[3\overline{\overline{N}}_{1,l} - \overline{\overline{1}}\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\},\\ \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} &= \sum_{l\neq j} -e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l}\frac{e^{\mathrm{i}kr_l}Z_0}{4\pi r_l}k^2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr_l}\right)\overline{\overline{N}}_{2,l}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Se puede observar en (1.27) y (1.28) que si el acoplamiento entre las partículas vecinas es muy débil ($\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} = 0$), entonces las matrices que relacionan a cada dipolo con los campos incidentes corresponden a las polarizabilidades de las partículas. Al combinar adecuadamente (1.27) y (1.28) también se puede establecer una relación lineal entre cada dipolo con los

[1] En esta afirmación no se tienen en cuenta los orígenes de coordenadas en movimiento

campos incidentes, sin embargo, la matriz que los relaciona no es la polarizabilidad de la partícula ($\overline{\overline{\alpha}}$), sino la polarizabilidad efectiva ($\overline{\overline{\beta}}$), es decir:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{ee}} \cdot \vec{E}^{\mathrm{inc}} + \frac{\overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{em}}}{c} \cdot \vec{H}^{\mathrm{inc}}, \qquad \vec{m} = Y_0 \overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{me}} \cdot \vec{E}^{\mathrm{inc}} + \overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{mm}} \cdot \vec{H}^{\mathrm{inc}}, \tag{1.30}$$

lo cual equivale a un sistema de partículas no interactuantes, por lo tanto, el campo local es igual al campo incidente. Las polarizabilidades efectivas, $\overline{\overline{\beta}}$, quedan definidas como:

$$\overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{ee}} = \left[\left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right) - \overline{\overline{A}}_2 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{B}}_1\right]^{-1} \cdot \left[\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}} + c\overline{\overline{A}}_2 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}}\right], \tag{1.31}$$

$$\overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{em}} = \left[\left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right) - \overline{\overline{A}}_2 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{B}}_1\right]^{-1} \cdot \left[\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}} + c\overline{\overline{A}}_2 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}}\right], \tag{1.32}$$

$$\overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{me}} = \left[\left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right) - \overline{\overline{B}}_1 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{A}}_2\right]^{-1} \cdot \left[\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}} + \overline{\overline{B}}_1 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right)^{-1} \cdot \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}}}{c}\right], \tag{1.33}$$

$$\overline{\overline{\beta}}^{\mathrm{mm}} = \left[\left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{B}}_2\right) - \overline{\overline{B}}_1 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{A}}_2\right]^{-1} \cdot \left[\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}} + \overline{\overline{B}}_1 \cdot \left(\overline{\overline{1}} - \overline{\overline{A}}_1\right)^{-1} \cdot \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}}{c}\right], \tag{1.34}$$

y las matrices $\overline{\overline{A}}_1$, $\overline{\overline{A}}_2$, $\overline{\overline{B}}_1$ y $\overline{\overline{B}}_2$ son:

$$\overline{\overline{A}}_1 = \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}} \cdot \overline{\overline{C}} - Y_0 \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}} \cdot \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} \qquad \overline{\overline{A}}_2 = \epsilon_0 \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{ee}} \cdot \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} + \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}}{c} \cdot \overline{\overline{C}} \tag{1.35}$$

$$\overline{\overline{B}}_1 = c\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}} \cdot \overline{\overline{C}} - \frac{\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}}}{\mu_0} \cdot \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} \qquad \overline{\overline{B}}_2 = Y_0 \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}} \cdot \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} + \overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{mm}} \cdot \overline{\overline{C}} \tag{1.36}$$

Matriz de acoplamiento $\overline{\overline{C}}$

Con el objetivo de reducir la expresión de la matriz $\overline{\overline{C}}$, a continuación se van a explorar algunas propiedades de ésta. Como se supuso anteriormente, el arreglo está restringido al plano xy, lo cual tiene como consecuencia que los elementos de la matriz $N_{1,(i,3)} = N_{1,(3,i)} = 0$ para i =1, 2 y 3. Teniendo en cuenta este hecho, los elementos de la diagonal son:

$$C_i = \sum_{l \neq j} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}kr_l}}{4\pi r_l} \left\{-k^2\left[n_{i,l}^2 - 1\right] + \left[3n_{i,l}^2 - 1\right]\left(\frac{1}{r_l^2} - \frac{\mathrm{i}k}{r_l}\right)\right\}. \tag{1.37}$$

Reescribiendo $r_l = a\sqrt{l_x^2 + l_y^2\tau^2}$, donde $\tau = b/a$ es el cociente entre los parámetros de red y l_x, l_y son enteros que indican la posición del dipolo teniendo como centro el dipolo j-ésimo,

$(l_{x,j}, l_{y,j}) = (0,0)$:

$$C_x = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}}{4\pi} \left\{ \frac{(ka)^2 l_y^2\tau^2}{\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)^{3/2}} + \frac{2l_x^2 - l_y^2\tau^2}{l_x^2+l_y^2\tau^2} \left[\frac{1}{\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)^{3/2}} - \frac{\mathrm{i}ka}{l_x^2+l_y^2\tau^2} \right] \right\}, \tag{1.38}$$

$$C_y = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}}{4\pi} \left\{ \frac{(ka)^2 l_x^2}{\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)^{3/2}} + \frac{2l_y^2\tau^2 - l_x^2}{l_x^2+l_y^2\tau^2} \left[\frac{1}{\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)^{3/2}} - \frac{\mathrm{i}ka}{l_x^2+l_y^2\tau^2} \right] \right\}, \tag{1.39}$$

$$C_z = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}}{4\pi\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}} \left\{ (ka)^2 - \frac{1}{l_x^2+l_y^2\tau^2} + \frac{\mathrm{i}ka}{\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}} \right\}. \tag{1.40}$$

En la notación empleada $C_x = C_{(1,1)}$, $C_y = C_{(2,2)}$ y $C_z = C_{(3,3)}$. Los únicos términos no nulos fuera de la diagonal son los correspondientes a $C_{(1,2)} = C_{xy} = C_{yx} = C_{(2,1)}$, en cuyo caso se obtiene:

$$C_{xy} = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}}{4\pi} \frac{l_x l_y \tau}{\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)^{3/2}} \times \left\{ -(ka)^2 + \frac{3}{l_x^2+l_y^2\tau^2} - \frac{3\mathrm{i}ka}{\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}} \right\}. \tag{1.41}$$

De modo que la matriz $\overline{\overline{C}}$ se puede escribir como:

$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} C_x & C_{xy} & 0 \\ C_{xy} & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_z \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Matriz de acoplamiento Magnetoeléctrico $\overline{\overline{C}}^{\mathbf{em}}$

Similarmente al caso de la matriz de acoplamiento $\overline{\overline{C}}$, debido a que el arreglo se restringe al plano xy, entonces $N_{2,(1,2)} = N_{2,(2,1)} = 0$. Además, puesto que la matriz $\overline{\overline{N}}_2$ es antisimétrica,

como consecuencia $C^{\mathrm{em}}_{(i,j)} = -C^{\mathrm{em}}_{(j,i)}$. Nótese que solo hay cuatro elementos no nulos en la matriz y puesto que es antisimetría, se reducen a solo dos valores independientes:

$$C^{\mathrm{em}}_{xz} = C^{\mathrm{em}}_{(1,3)} = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}} Z_0}{4\pi\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)} l_y\tau \left[(ka)^2 + \frac{\mathrm{i}ka}{\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}\right], \tag{1.43}$$

$$C^{\mathrm{em}}_{zy} = C^{\mathrm{em}}_{(3,2)} = \frac{1}{a^3} \sum_{(l_x,l_y)\neq(0,0)} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}_l} \frac{e^{\mathrm{i}ka\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}} Z_0}{4\pi\left(l_x^2+l_y^2\tau^2\right)} l_x \left[(ka)^2 + \frac{\mathrm{i}ka}{\sqrt{l_x^2+l_y^2\tau^2}}\right]. \tag{1.44}$$

De modo que $\overline{\overline{C}}^{em}$ se puede escribir como:

$$\overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{\mathrm{em}}_{xz} \\ 0 & 0 & -C^{\mathrm{em}}_{(zy)} \\ -C^{\mathrm{em}}_{xz} & C^{\mathrm{em}}_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Vale la pena notar que si la onda incide normalmente $\overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} = \overline{\overline{0}}$ y $\overline{\overline{C}}$ es diagonal, como consecuencia los dipolos de diferente naturaleza quedan desacoplados.

Relación Entre las Admitancias Superficiales y las Polarizabilidades Efectivas

Teniendo en cuenta que la polarización y magnetización superficiales se relacionan con los dipolos como $\vec{P}_{\mathrm{s}} = \vec{p}/A$ y $\vec{M}_{\mathrm{s}} = \vec{m}/A$, donde $A = ab$ es el área de la celda unitaria, se pueden encontrar las corrientes superficiales efectivas según (1.15). Los rotacionales en estas ecuaciones se pueden solucionar teniendo en cuenta que la variación espacial es de la forma $e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$, la cual proviene del retardo de la señal debido a la incidencia oblicua (invirtiendo el sentido del vector $\vec{r}_l$). Entonces, al sustituir dichas corrientes (en las que se han utilizado los dipolos dados por (1.30)) en la relación (1.10), agrupando los términos con los mismos campos, se obtiene que las impedancias superficiales efectivas se relacionan con los dipolos como [42]:

$$\overline{\overline{Y}}^{\mathrm{ee}}_{\mathrm{s}} = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{A} \begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{ee}}_x - u_y\beta^{\mathrm{me}}_{zx} - u_y\beta^{\mathrm{em}}_{xz} + u_y^2\beta^{\mathrm{mm}}_z & \beta^{\mathrm{ee}}_{xy} - u_y\beta^{\mathrm{me}}_{zy} + u_x\beta^{\mathrm{em}}_{xz} - u_xu_y\beta^{\mathrm{mm}}_z \\ \beta^{\mathrm{ee}}_{yx} + u_x\beta^{\mathrm{me}}_{zx} - u_y\beta^{\mathrm{em}}_{yz} - u_xu_y\beta^{\mathrm{mm}}_z & \beta^{\mathrm{ee}}_y + u_x\beta^{\mathrm{me}}_{zy} + u_x\beta^{\mathrm{em}}_{yz} + u_x^2\beta^{\mathrm{mm}}_z \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$\overline{\overline{Y}}^{\mathrm{em}}_{\mathrm{s}} = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{A} \begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{em}}_x - u_y\beta^{\mathrm{mm}}_{zx} + u_y\beta^{\mathrm{ee}}_{xz} - u_y^2\beta^{\mathrm{me}}_z & \beta^{\mathrm{em}}_{xy} - u_y\beta^{\mathrm{mm}}_{zy} - u_x\beta^{\mathrm{ee}}_{xz} + u_xu_y\beta^{\mathrm{me}}_z \\ \beta^{\mathrm{em}}_{yx} + u_x\beta^{\mathrm{mm}}_{zx} + u_y\beta^{\mathrm{ee}}_{yz} + u_xu_y\beta^{\mathrm{me}}_z & \beta^{\mathrm{em}}_y + u_x\beta^{\mathrm{mm}}_{zy} - u_x\beta^{\mathrm{ee}}_{yz} - u_x^2\beta^{\mathrm{me}}_z \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

$$\overline{\overline{Y}}^{\mathrm{me}}_{\mathrm{s}} = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{A} \begin{pmatrix} \beta^{\mathrm{me}}_x + u_y\beta^{\mathrm{ee}}_{zx} - u_y\beta^{\mathrm{mm}}_{xz} - u_y^2\beta^{\mathrm{em}}_z & \beta^{\mathrm{me}}_{xy} + u_y\beta^{\mathrm{ee}}_{zy} + u_x\beta^{\mathrm{mm}}_{xz} + u_xu_y\beta^{\mathrm{em}}_z \\ \beta^{\mathrm{me}}_{yx} - u_x\beta^{\mathrm{ee}}_{zx} - u_y\beta^{\mathrm{mm}}_{yz} + u_xu_y\beta^{\mathrm{em}}_z & \beta^{\mathrm{me}}_y - u_x\beta^{\mathrm{ee}}_{zy} + u_x\beta^{\mathrm{mm}}_{yz} - u_x^2\beta^{\mathrm{em}}_z \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

$$\overline{\overline{Y}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{mm}} = \frac{-\mathrm{i}\omega\epsilon_0}{A}\begin{pmatrix} \beta_x^{\mathrm{mm}} + u_y\beta_{zx}^{\mathrm{em}} + u_y\beta_{xz}^{\mathrm{me}} + u_y^2\beta_z^{\mathrm{ee}} & \beta_{xy}^{\mathrm{mm}} + u_y\beta_{zy}^{\mathrm{em}} - u_x\beta_{xz}^{\mathrm{me}} - u_xu_y\beta_z^{\mathrm{ee}} \\ \beta_{yx}^{\mathrm{mm}} - u_x\beta_{zx}^{\mathrm{em}} + u_y\beta_{yz}^{\mathrm{me}} - u_xu_y\beta_z^{\mathrm{ee}} & \beta_y^{\mathrm{mm}} - u_x\beta_{zy}^{\mathrm{em}} - u_x\beta_{yz}^{\mathrm{me}} + u_x^2\beta_z^{\mathrm{ee}} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Donde $\vec{u}$ es el vector unitario del vector de onda ($\vec{k} = k\vec{u}$) y los términos de la matriz de polarizabilidades efectivas son:

$$\overline{\overline{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_x & \beta_{xy} & \beta_{xz} \\ \beta_{yx} & \beta_y & \beta_{yz} \\ \beta_{zx} & \beta_{zy} & \beta_z \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

En esta sección se han logrado determinar las admitancias superficiales a partir de la polarizabilidad de la partícula, lo que al combinar con las condiciones de frontera pueden ser de ayuda para determinar los campos dispersados. A continuación se presenta un ejemplo, el cual será de utilidad para capítulos posteriores.

1.4. Modelo de Impedancias Superficiales para Pantallas con Simetría de inversión y Espejo

En esta sección se introduce un modelo de impedancias superficiales para predecir el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión de una metasuperficie cuya celda unitaria tiene simetría de inversión, además de la simetría de espejo respecto del plano xz o yz, sobre la cual incide una onda plana en ángulo normal como se muestra en la Figura 1.3.

Como se considera que la periodicidad de una metasuperficie es mucho más pequeña que la longitud de onda, se puede concebir un modelo de circuito para describir la celda unitaria. Ya que en general las celdas no tienen simetría de rotación de 90° en el eje z, la impedancia efectiva asociada a la celda cuando una onda incide polarizada en x es diferente a la impedancia efectiva asociada a la incidencia con polarización en y, como se ilustra en las figuras 1.4 (a) y (b). En vista que la pantalla puede ser modelada como una lamina que soporta corrientes superficiales efectivas, la condición de frontera del campo magnético es:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{\mathrm{s}} \quad (1.51)$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular a la superficie que apunta desde el lado #1 al #2, $\vec{H}_2$ y $\vec{H}_1$ son los campos magnéticos macroscópicos a ambos lados de la superficie evaluados en la frontera $z = 0$ y $\vec{J}_{\mathrm{s}}$ es la densidad de corriente superficial. Según la Figura 1.3, cada

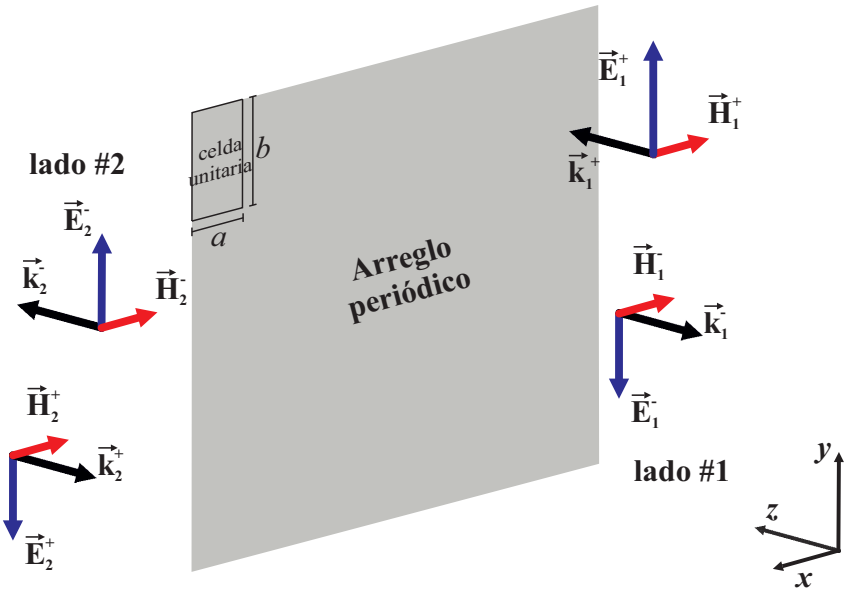

Figura 1.3: Diagrama de los campos macroscópicos involucrados en el proceso de dispersión. El superíndice + simboliza aquellos campos cuyo vector de onda está dirigido hacia la superficie, es decir, los campos incidente. Por otra parte, el superíndice − simboliza a los campos que se propagan fuera de la superficie, es decir, los campos transmitidos y reflejados.

campo magnético en (1.51) puede ser descompuesto como combinación lineal de dos ondas planas viajando en direcciones opuestas, y usando la relación de ondas planas entre el campo eléctrico y magnético, se obtiene:

$$\vec{z} \times (\vec{H}_2^+ + \vec{H}_2^- - \vec{H}_1^+ - \vec{H}_1^-) = Y_0(\vec{E}_2^+ - \vec{E}_2^- + \vec{E}_1^+ - \vec{E}_1^-), \tag{1.52}$$

donde $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ es la admitancia de la onda en espacio libre. El superíndice "+" corresponde a las ondas que viajan hacia la metasuperficie, lo cual coincide con las ondas incidentes a cada lado de la estructura, mientras que el superíndice "−" simboliza las ondas que se viajan en dirección opuesta a la metasuperficie, las cuales corresponden a la superposición de las ondas reflejada y transmitida. Al asumir una respuesta lineal de la corriente eléctrica en (1.51), con la adición de la simetría de inversión, por lo que desaparece la contribución magnética de (1.8),

$$\vec{J}_s = \bar{\bar{Y}}_s \cdot (\vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^-), \tag{1.53}$$

con $\bar{\bar{Y}}_s$ la matriz de admitancia superficial. En (1.53) se ha definido la corriente como función única de los campos en el lado #1 debido a la continuidad del campo eléctrico tangencial, por lo tanto $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$. Además, como el campo macroscópico total es el promedio entre los campos macroscópicos a cada lado, éste es igual al campo del lado #1 o #2. Insertando

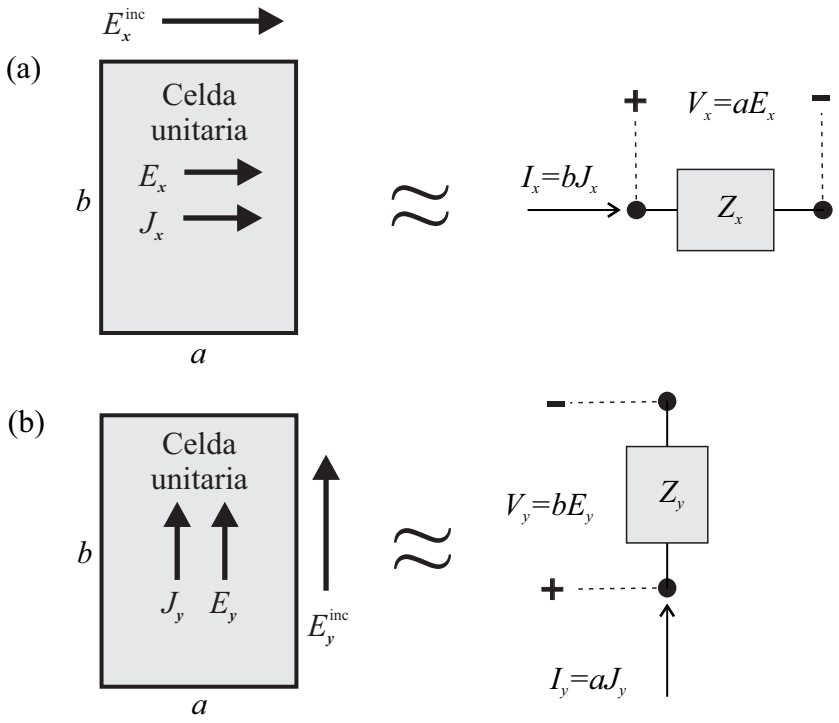

Figura 1.4: Impedancias equivalentes para describir a la celda unitaria en presencia de un campo eléctrico incidente polarizado en x (a) y y (b).

(1.52) y (1.53) en (1.51), se obtiene

$$Y_0(\vec{E}_2^+ - \vec{E}_2^- + \vec{E}_1^+ - \vec{E}_1^-) = \bar{\bar{Y}}_s \cdot (\vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^-). \tag{1.54}$$

Ahora, utilizando la definición de la matriz de dispersión (ver Capítulo 2) y asumiendo que la onda incidente viaja desde el lado #1 al lado #2, entonces (1.54) se convierte en

$$Y_0(-\bar{\bar{S}}_{21} + \bar{\bar{1}} - \bar{\bar{S}}_{11}) \cdot \vec{E}_1^+ = \bar{\bar{Y}}_s \cdot (\bar{\bar{1}} + \bar{\bar{S}}_{11}) \cdot \vec{E}_1^+. \tag{1.55}$$

Combinando estas ecuaciones con (2.4), la matriz de dispersión puede ser resuelta como:

$$\bar{\bar{S}}_{11} = \frac{-Z_0}{Z_0\bar{\bar{1}} + 2\bar{\bar{Z}}_s}, \quad \bar{\bar{S}}_{21} = \frac{2\bar{\bar{Z}}_s}{Z_0\bar{\bar{1}} + 2\bar{\bar{Z}}_s}, \tag{1.56}$$

donde $\bar{\bar{Z}}_s = \bar{\bar{Y}}_s^{-1}$ es el tensor de impedancia superficial y $Z_0 \approx 377\ \Omega$ es la impedancia de espacio libre. La simetría de espejo en la geometría conlleva a que impedancia sea una matriz diagonal [46] con componentes:

$$\bar{\bar{Z}}_s = \begin{pmatrix} Z_{sx} & 0 \\ 0 & Z_{sy} \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Insertando (1.57) en (2.2), se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\bar{S}}_{11} &= \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-Z_0}{Z_0+2Z_{sx}} & 0 \\ 0 & \frac{-Z_0}{Z_0+2Z_{sy}} \end{pmatrix}, \\ \bar{\bar{S}}_{21} &= \begin{pmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2Z_{sx}}{Z_0+2Z_{sx}} & 0 \\ 0 & \frac{2Z_{sy}}{Z_0+2Z_{sy}} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.58}$$

Antes de escribir una función dependiente de la frecuencia para la impedancia superficial, es necesario conectar la impedancia de circuito de la celda unitaria con la impedancia superficial de toda la metasuperficie. Cuando la celda unitaria es cuadrada, la impedancia superficial es equivalente a la impedancia de circuito. Sin embargo, este no es el caso para una celda rectangular, en cuyo caso aparece el cociente entre los lados de la celda unitaria, también llamada relación de aspecto. Para explicar ésto, considere una celda unitaria rectangular con dimensión a a lo largo de la dirección x y b a lo largo de la dirección y, como se muestra en la Figura 1.3, y asuma polarización x para la onda incidente. Con ésto, la impedancia superficial en polarización x, Z_{sx}, es definida como:

$$E_x = Z_{sx} J_x, \tag{1.59}$$

donde E_x y J_x son el campo eléctrico y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente, dirigidas a lo largo del eje x. Por otra parte, la impedancia de circuito de la celda, Z_x, se define como:

$$V_x = Z_x I_x, \tag{1.60}$$

donde el voltaje la lo largo de la dirección x es $V_x = aE_x$ y la corriente a lo largo de la misma dirección es $I_x = bJ_x$. Comparando (1.59) y (1.60), se obtiene:

$$Z_{sx} = Z_x b/a. \tag{1.61}$$

Siguiendo pasos similares para la polarización y, se puede obtener:

$$Z_{sy} = Z_y a/b. \tag{1.62}$$

Insertando (1.61) y (1.62) dentro de (1.58), los coeficientes de transmisión y reflexión se transforman en

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{-Z_0}{Z_0 + 2Z_x b/a}, \quad r_y = \frac{-Z_0}{Z_0 + 2Z_y a/b}, \\ t_x &= \frac{2Z_x b/a}{Z_0 + 2Z_x b/a}, \quad t_y = \frac{2Z_y a/b}{Z_0 + 2Z_y a/b}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

A modo de ejemplo, suponga que la celda unitaria se comporta como un condensador con un campo polarizado en x, mientras que se comporta como un inductor para un campo

polarizado en y. Con estas suposiciones, las impedancias de circuito de la celda unitaria son, $Z_x = (\mathrm{j}\omega C)^{-1}$ y $Z_y = \mathrm{j}\omega L$, que al ser introducidas en (1.63) se obtiene:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{-1}{1-\mathrm{j}\omega_{cx}/\omega}, \quad r_y = \frac{-1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_{cy}}, \\ t_x &= \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_{cx}}, \quad t_y = \frac{1}{1-\mathrm{j}\omega_{cy}/\omega}, \end{aligned} \tag{1.64}$$

donde

$$\omega_{cx} = \frac{2b}{aZ_0C}, \quad \omega_{cy} = \frac{Z_0 b}{2aL}. \tag{1.65}$$

Se puede demostrar que estas dos frecuencias coinciden con el cruce entre las magnitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión tanto para polarización x como y.

1.5. Absorbente Perfecto

Suponga un arreglo periódico y cuadrado de partículas que poseen simetría de espejo respecto del plano xz o yz y de inversión respecto al origen. Sobre este arreglo incide, en ángulo normal, una onda plana polarizada en y como se ilustra en la Figura 1.1 (con $a = b$). Como consecuencia de lo anterior las matrices de acoplamiento son:

$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} C_x & 0 & 0 \\ 0 & C_x & 0 \\ 0 & 0 & C_z \end{pmatrix}, \qquad \overline{\overline{C}}^{\mathrm{em}} = \overline{\overline{0}}. \tag{1.66}$$

y por la simetría de inversión, las polarizabilidades cruzadas de las partículas, $\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{em}}$ y $\overline{\overline{\alpha}}^{\mathrm{me}}$, deben ser nulas. Además, la simetría de espejo de la celda unitaria no permite que se excite algún campo en una dirección ortogonal al campo incidente [46]. Teniendo en cuenta estas propiedades y que el campo eléctrico está polarizado en y, los dipolos se pueden expresar como:

$$p_y = \epsilon_0 \beta^{\mathrm{ee}} E_y^{\mathrm{inc}}, \qquad m_x = \beta^{\mathrm{mm}} H_x^{\mathrm{inc}}. \tag{1.67}$$

En el sistema efectivo el arreglo dipolos puede ser visto como una superficie que soporta corrientes eléctricas y magnéticas efectivas. Según la Tabla 1.1, la representación E-H permite expresar las densidades de corrientes eléctricas y magnéticas superficiales en términos de los dipolos por medio de las relaciones:

$$\vec{J}_{\mathrm{s}} = -\mathrm{i}\omega \frac{\vec{p}}{a^2}, \qquad \vec{K}_{\mathrm{s}} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 \frac{\vec{m}}{a^2}, \tag{1.68}$$

con lo cual las condiciones de frontera quedan:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_{\mathrm{s}}, \qquad \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = -\vec{K}_{\mathrm{s}}. \tag{1.69}$$

Según el diagrama de la Figura 1.1 los campos E y H se pueden descomponer como:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}^{\mathrm{inc}} + \vec{E}^{\mathrm{r}}, \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}^{\mathrm{t}}, \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}^{\mathrm{inc}} + \vec{H}^{\mathrm{r}}, \qquad \vec{H}_2 = \vec{H}^{\mathrm{t}}, \end{aligned} \tag{1.70}$$

y a partir de las definiciones de los coeficientes de transmisión y reflexión [41]:

$$t_y = \frac{E_y^{\mathrm{t}}}{E_y^{\mathrm{inc}}}, \qquad r_y = \frac{E_y^{\mathrm{r}}}{E_y^{\mathrm{inc}}}, \tag{1.71}$$

se obtiene que las polarizabilidades en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión son:

$$\beta^{\mathrm{ee}} = \frac{-\mathrm{i}a^2 c}{\omega}(t_y - 1 + r_y), \qquad \beta^{\mathrm{mm}} = \frac{-\mathrm{i}a^2 c}{\omega}(t_y - 1 - r_y). \tag{1.72}$$

Para el caso de absorción perfecta se requiere que la superficie no transmita ni refleje ($t_y = r_y = 0$). En estas condiciones el campo macroscópico en la región #1 se reduce al campo incidente, lo cual significa que los campos producidos por $\vec{J}_{\mathrm{s}}$ en esta región deben ser iguales en magnitud y en dirección opuesta a los campos producidos por $\vec{K}_{\mathrm{s}}$. Por otra parte, en la región #2 el campo total debe ser nulo, por lo que es necesario que la suma de los campos producidos por las corrientes efectivas deben ser iguales en magnitud y en dirección opuesta al campo incidente, de forma que las condiciones de frontera se transforman en:

$$-\vec{n} \times \vec{H}^{\mathrm{inc}} = \vec{J}_{\mathrm{s}}, \qquad \vec{n} \times \vec{E}^{\mathrm{inc}} = \vec{K}_{\mathrm{s}}, \tag{1.73}$$

y las polarizabilidades son:

$$\beta^{\mathrm{ee}} = \beta^{\mathrm{mm}} = \frac{\mathrm{i}a^2 \lambda^{\mathrm{inc}}}{2\pi}. \tag{1.74}$$

Nótese que la condición de absorción perfecta (1.74) no depende explícitamente del material del cual esté hecha la partícula, sin embargo, las pérdidas son necesarias para que haya disipación. A continuación, se muestra un resonador que es útil para diseñar un absorbente perfecto.

Diseño de un Absobente Basado en Resonadores SRRs

En el 2016 se propuso la partícula ilustrada en la Figura 1.5 (a), la cual está inspirada en SRRs (por sus siglas en ingles *"split ring resonators"*), con el fin de construir una metasuperficie

transparente que modifique la fase de la onda transmitida de modo que es posible provocar refracción anómala, enfocar el haz incidente y en general cualquier aplicación que requiera modificar la fase del frente de onda [47, 48].

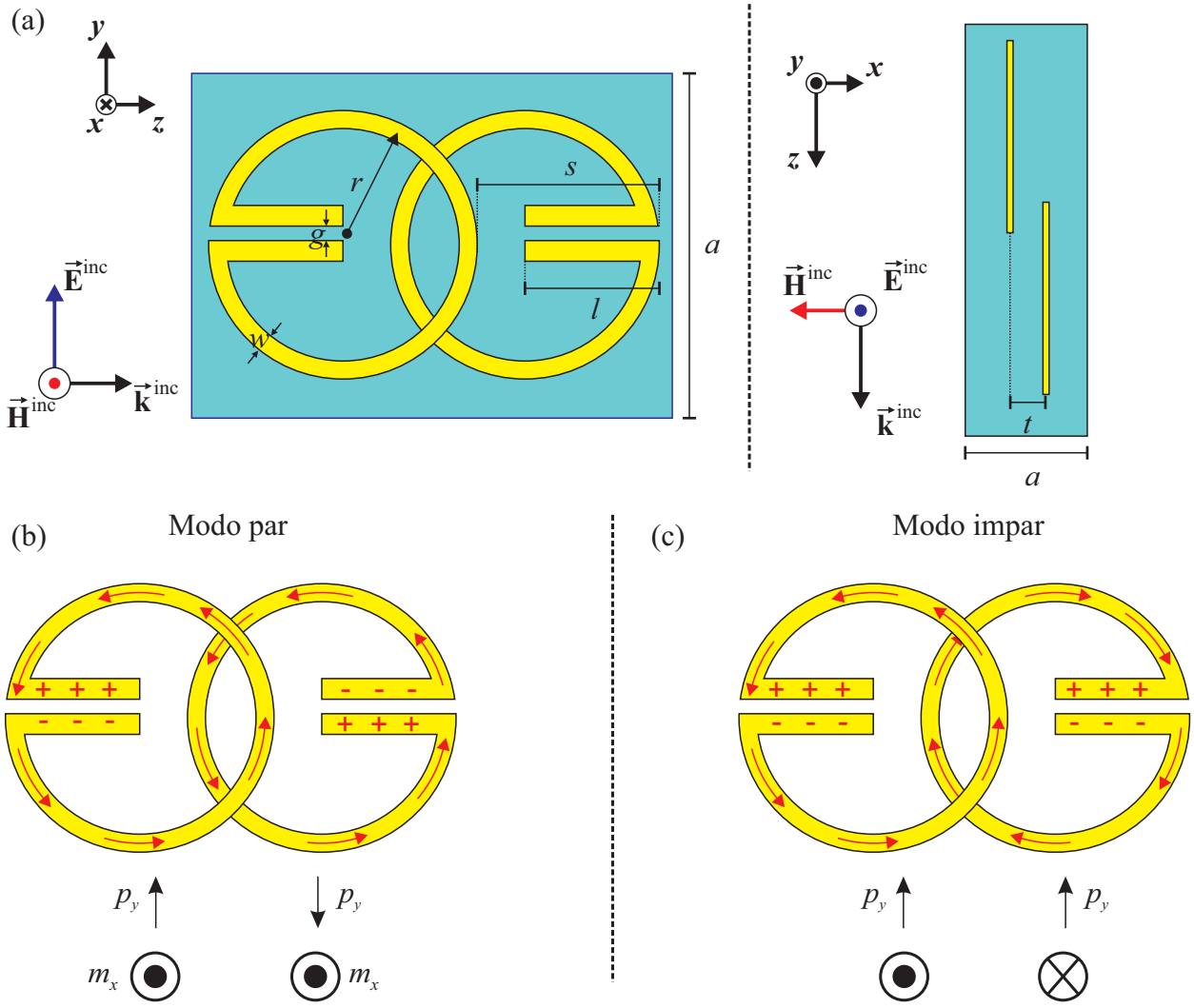

Figura 1.5: (a) Vista lateral y superior de la celda unitaria con los respectivos parámetros geométricos. La onda plana incide en ángulo normal a la superficie con el campo eléctrico polarizado en y. (b) Modo par de la celda unitaria, principalmente excitado por el campo magnético. (c) Modo impar de la celda unitaria, principalmente excitado por el campo eléctrico.

Con el fin de construir una metasuperficie transparente con la celda unitaria de la Figura 1.5 (a), se establecen condiciones periódicas en el plano xy, mientras que en dirección z

solo hay una única celda de profundidad. Vale la pena aclarar que el modo que se transmite completamente corresponde al de una onda plana en incidencia normal y linealmente polarizada en el eje y. Observe que bajo estas condiciones la celda unitaria tiene las simetrías de inversión y de espejo en el plano xz, por lo tanto, la condición de transparencia ($t_y = e^{\mathrm{i}\phi}$, $r_y = 0$) aplicada sobre (1.72) implica que las polarizabilidades son:

$$\beta^{\mathrm{ee}} = \beta^{\mathrm{mm}} = \frac{-\mathrm{i}a^2 c}{\omega}(e^{\mathrm{i}\phi} - 1), \tag{1.75}$$

que en similitud a la condición de absorción perfecta, también implica la igualdad de las polarizabilidades. En las figuras 1.5 (b) y (c) se muestran las distribuciones de las corrientes eléctricas para el modo par e impar de la celda unitaria, respectivamente. Por modo par se entiende a aquel modo donde las corrientes eléctricas de ambos anillos tienen el mismo sentido de giro, mientras que al impar cuando giran en sentidos opuestos. En vista que los anillos son iguales, el modo par no posee dipolo eléctrico neto, mientras que el modo impar no posee dipolo magnético neto. Londoño *et. al.* en el trabajo [48] lograron demostrar que las polarizabilidades efectivas son:

$$\beta^{\mathrm{ee}} = -\frac{2g^2}{\epsilon_0(L-M)\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \qquad \beta^{\mathrm{mm}} = -\frac{2(\pi r^2)^2\mu_0}{L+M}\left(1 - \frac{\omega_+^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \tag{1.76}$$

donde g es el gap entre las tiras, r es el radio medio de cada anillo y las frecuencias características $\omega_\pm$ son:

$$\omega_\pm = \frac{1}{\sqrt{C(L \pm M)}}. \tag{1.77}$$

Los parámetros circuitales L, M, y C dan razón de las interacciones de la celda unitaria consigo misma y con celdas vecinas. En la Figura (1.6) se muestra esquemáticamente las interacciones incluidas en cada parámetro. Como se observa, L tiene en cuenta la interacción magnética de un anillo consigo mismo y también encierra las interacciones con todos los anillos en el mismo costado. Por otra parte, M encierra la interacción magnética de un anillo con todos los anillos del costado opuesto. Por último, el condensador, C, tiene en cuenta la interacción eléctrica de un anillo consigo mismo (asociado principalmente a las tiras en el interior del anillo) y con los anillos en el mismo costado. Por la forma en que se han definido estos parámetros, en general pueden ser números complejos.

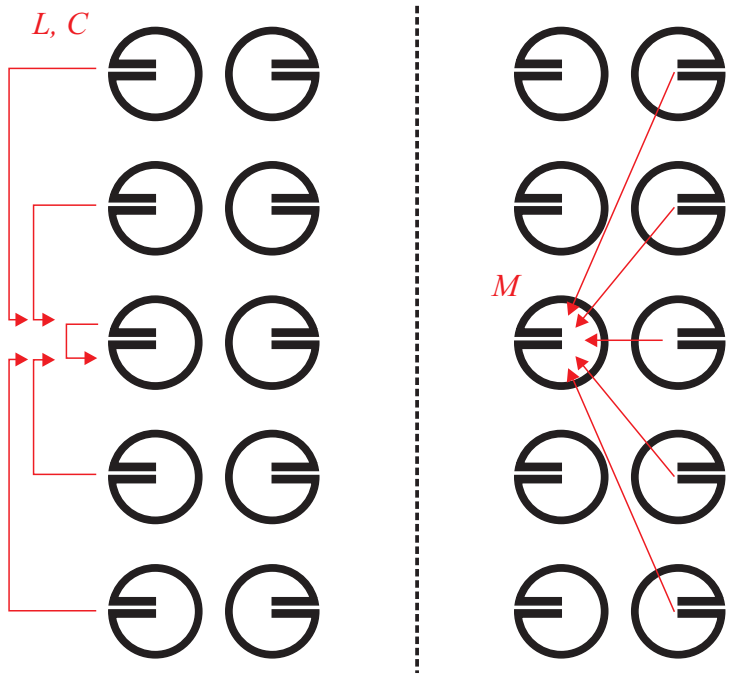

Figura 1.6: Diagrama de las interacciones que describen los parámetros circuitales L, M y C. Como se observa, L y C incluyen la interacción de un anillo consigo mismo y con los anillos al mismo costado, mientras que M describe la interacción de un anillo con los que están en el costado opuesto. Por simplicidad se han distanciado los anillos dentro de la celda para distinguir las interacciones.

Vale la pena recordar que β^{ee} está asociado al modo impar, mientras que β^{mm} al modo par. Se puede demostrar que si $M = 0$, lo cual se logra al variar el desplazamiento relativo entre los dos anillos (s), los dos modos resuenan a la misma frecuencia. Además, al exigir que las polarizabilidades sean iguales (condición de absorción perfecta y transmisión completa) se obtiene que:

$$\frac{r^2}{\lambda_{\mathrm{r}} g} \sim \frac{1}{20}, \tag{1.78}$$

siendo λ_{r} la longitud de onda a la que resuena el sistema y c la velocidad de la luz. Finalmente, teniendo en cuenta que el sistema se sintoniza para que la inductancia M sea nula, las polarizabilidades efectivas se pueden escribir como:

$$\beta^{\mathrm{ee}} = -\frac{2g^2}{\epsilon_0 L\omega^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \qquad \beta^{\mathrm{mm}} = -\frac{2(\pi r^2)^2\mu_0}{L}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1.79}$$

Al exigir la condición (1.78), se garantiza que para al menos una frecuencia se tendrá la igualdad entre las polarizabilidades. La diferencia entre la absorción perfecta y la transmisión completa está en el material del cual esté hecho los resonadores, ya que para la absorción se requieren polarizabilidades imaginarias, mientras que para la trnasmisión se requieren complejos. Para el caso en que los resonadores estén hechos de conductor eléctrico perfecto, se puede obtener la transmisión completa ya que no hay pérdidas, sin embargo, al introducir un valor finito en la conductividad, la onda es parcialmente absorbida y en caso de tener la conductividad adecuada, se absorbe completamente. A continuación se presentan algunos resultados numéricos interesantes, en los cuales queda en evidencia la importancia de la conductividad para el fenómeno de absorción.

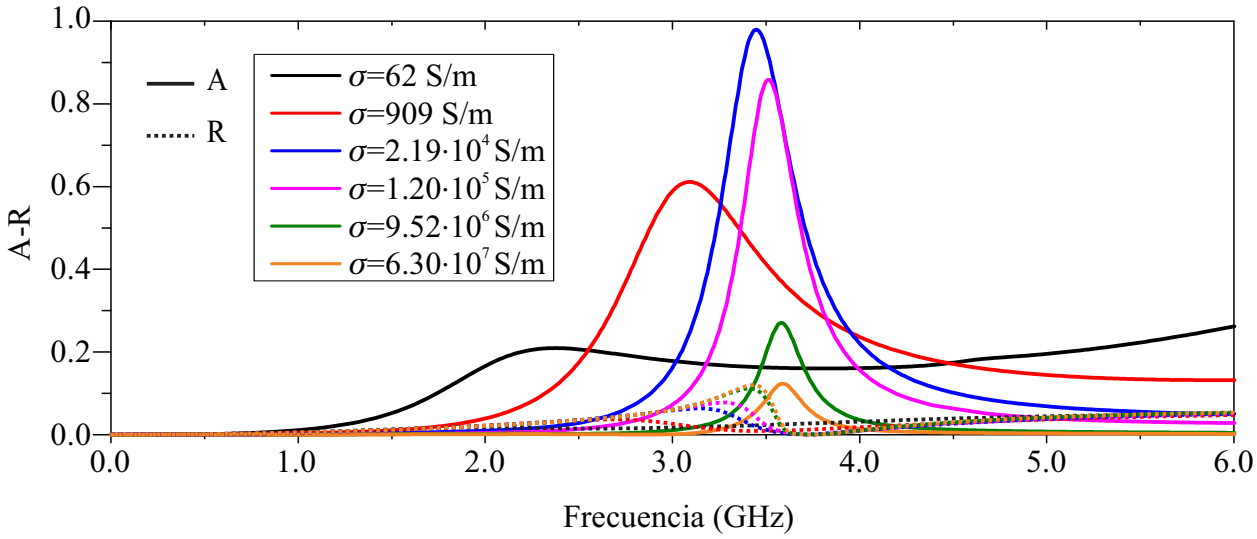

Figura 1.7: Potencia absorbida (líneas sólidas) y reflejada (líneas punteadas) en función de la frecuencia para diferentes valores de conductividad.

Con el fin de obtener una superficie absorbente, se simuló en el software *CST Microwave Studio* ® la estructura de la Figura 1.5 (a) con los parámetros $a = 10$ mm, $t = 0.5$ mm, $r = 4$ mm, $g = w = 0.5$ mm, $s = 5.5$ mm y $l = 6.6$ mm y se realizó un barrido en el valor de la conductividad (σ). Cabe mencionar que la estructura se simuló en espacio libre con condiciones periódicas de frontera en direcciones x y y, mientras que en dirección z se colocaron dos puertos de Bloch-Floquet distanciados 100 mm entre ellos y con los anillos en el centro.

Como se puede observar, la potencia reflejada (R) siempre es baja, lo cual significa que la potencia de la onda incidente debe dividirse entre la potencia transmitida (T) y la absorbida

(A). En vista que $T \gg R$ y $A \gg R$, entonces se debe cumplir que para todas las conductividades, las polarizabilidades deben ser aproximadamente iguales en la resonancia. El caso de mayor absorción se da cuando $\sigma = 2.19$ S/m y en tal caso, la absorción alcanza el nivel del 98 % a una frecuencia de 3.45 GHz con un ancho de banda de 14 %. A medida que la conductividad aumenta, la absorción disminuye y la estructura empieza a comportarse como el transmisor que, idealmente, si se eleva la conductividad al infinito, entonces se logrará transmitir el 100 % de la onda.

2 Restricciones Fundamentales de Metasuperficies Autocomplementarias

En este capitulo se exponen algunas propiedades fundamentales de las metasuperficies autocomplementarias, las cuales, como se verá más adelante, resultan favorables para el diseño de metasuperficies con la propiedad de conversión de polarización lineal a circular. Se introduce el término metasuperficie debido a que la celda unitaria es mucho más pequeña que la longitud de onda de trabajo. Por otra parte, la autocomplementariedad se refiere a que la superficie del sistema original y la asociada al sistema complementario[1] son la misma adicionando una transformación de traslación pequeña comparada con la longitud de onda de trabajo y menor al parámetro de red en cada dirección, ejemplos de estas estructuras se muestran en la Figura 2.1.

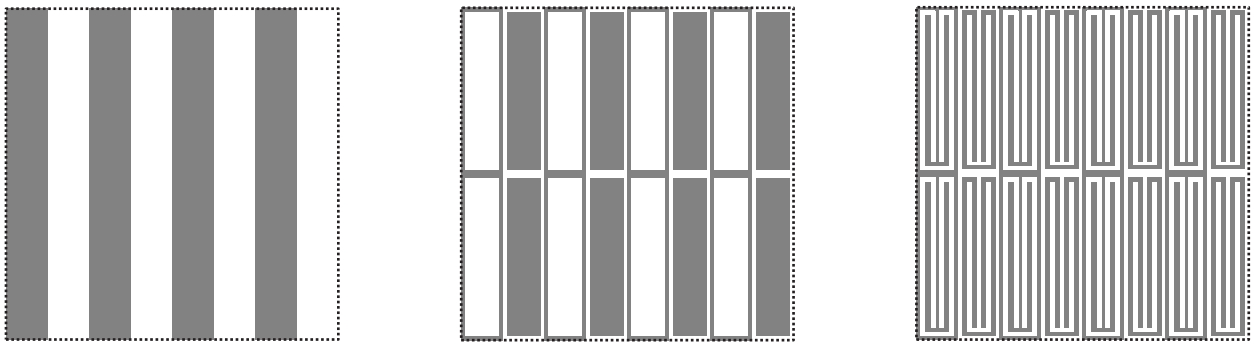

Figura 2.1: Ejemplos de superficies autocomplementarias. Se considera que estas se extienden infinitamente horizontal y verticalmente

Algunas metasuperficies autocomplemetarias se han empleado para diseñar filtros/polarizadores en el rango de gigahercios, y mediante escalamientos de la geometría se ha logrado extender a ondas milimétricas [32, 49, 50], con la peculiaridad que si la superficie tiene una banda

[1] En superficies hechas de conductor eléctrico perfecto y sin sustrato dieléctrico, la superficie complementaria se obtiene de la original al intercambiar el metal con aire.

de paso para determinada polarización, en la polarización ortogonal resultará en una banda de rechazo a la misma frecuencia. En adición, estas metasuperficies también se han utilizado para simular lineas de transmisión reconfigurables a fin de permitir la propagación de ondas en modos cuasi-TEM [51]. No obstante, este trabajo se centra en la posibilidad de utilizar cualquier metasuperficie autocomplementaria resonante como un convertidor de polarización lineal a circular, propiedad que no ha sido explorada.

Las ondas electromagnéticas polarizadas circularmente suelen ser empleadas para el comando guiado y sistemas de navegación global, así como en comunicaciones satelitales. Ésto con el fin de evitar dificultades por el desconocimiento del plano de polarización de la onda electromagnética entrante debido a la rotación de Faraday en la ionosfera, al igual que el desconocimiento del estado de polarización de la misma. Desde la década de 1960, los convertidores de polarización lineal a circular, los cuales son componentes de antenas de polarización circular en el rango de microondas, han sido desarrollados basados en estructuras periódicas multicapa simulando medios artificiales anisótropos [19, 20]. Un diseño temprano de estos dispositivos consistía en estructuras polarizadoras de meandros estudiados en los trabajos [52–56]. En estos dispositivos, a una frecuencia específica, los coeficientes de transmisión para dos polarizaciones lineales ortogonales son iguales en magnitud y, al mismo tiempo, están desfasadas en 90°. Por lo tanto, una onda linealmente polarizada incidiendo normal a la estructura, con el campo eléctrico orientado a 45° en el plano de polarización, se transmite como una onda circularmente polarizada. Diseños recientes que utilizan la misma idea fueron reescalados y fabricados para el rango de ondas milimétricas [57]. No obstante, estas estructuras tienen el inconveniente que su ancho es comparable a la longitud de onda de trabajo, lo cual limita substancialmente sus potenciales aplicaciones. Para superar esta desventaja, durante la última década se han propuesto varias superficies selectivas en frecuencia (FSS por sus siglas en ingles) y metasuperficies de espesor despreciable frente a la longitud de onda [58–61]. Para todos los convertidores mencionados, la diferencia de fase entre los coeficientes de transmisión de dos polarizaciones lineales ortogonales es dependiente de la frecuencia y el desfase exacto de 90° puede ser obtenido únicamente para un grupo discreto de frecuencias.

A diferencia de lo mencionado anteriormente, se demostrará teórica y experimentalmente que las metasuperficies autocomplementarias también proveen la conversión de polarización lineal a circular, con la ganancia de que tiene un desfase exacto de 90° para cualquier frecuencia.

2.1. Constancia en el Desfase entre los Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Considere una metasuperficie autocomplementaria general la cual es iluminada por una onda plana linealmente polarizada, como se muestra en la Figura 2.2. Por definición, las metasuperficies tienen una periodicidad eléctrica pequeña, por lo cual el campo dispersado puede ser modelado como una única onda plana sobre cada punto de la celda unitaria y a cada lado de la estructura, es decir, los lóbulos secundarios están prohibidos. Por simplicidad, de ahora en adelante supondremos que la onda incide normalmente a excepto que se diga lo contrario.

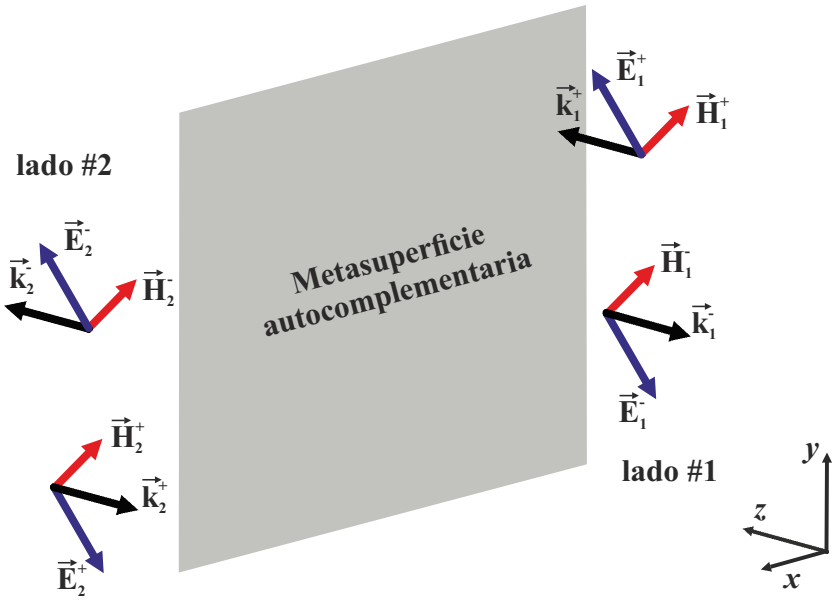

Figura 2.2: Diagrama de las ondas planas linealmente polarizadas involucradas en el proceso de dispersión de una metasuperficie autocomplementaria bajo incidencia normal.

En ambos lados de la metasuperficie, el campo electromagnético puede ser descrito como la superposición de dos ondas planas viajando en direcciones opuestas. Se introduce la notación $\vec{E}_1^+$ y $\vec{E}_2^+$ para los campos eléctricos asociados a las ondas que viajan en dirección hacia la metasuperficie desde los lados #1 y #2, respectivamente, mientras que $\vec{E}_1^-$ y $\vec{E}_2^-$ a los campos eléctricos de las ondas que se propagan alejándose de la metasuperficie. Con lo mencionado, la matriz de los parámetros $\overline{\overline{S}}$ se define como

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_1^- \\ \vec{E}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}_1^+ \\ \vec{E}_2^+ \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es tangente a la superficie, éste puede ser descompuesto en dos componentes ortogonales linealmente polarizadas en direcciones x y y. Con el fin de evitar los efectos de polarización cruzada se asume que la celda unitaria tiene simetría de espejo en el plano xz o yz[2]. Independientemente de cual de estos sea el plano de simetría, las componentes de polarización cruzada se anulan en la matriz de los parámetros de dispersión [46]:

$$\bar{\bar{S}} = \left(\begin{array}{cc|cc} r_x & 0 & t_x & 0 \\ 0 & r_y & 0 & t_y \\ \hline t_x & 0 & r_x & 0 \\ 0 & t_y & 0 & r_y \end{array}\right), \tag{2.2}$$

donde r_x, r_y, t_x y t_y representan los coeficientes de reflexión y transmisión para las ondas polarizadas en x y y. Utilizando la continuidad del campo eléctrico tangencial:

$$\vec{E}_1^+ + \vec{E}_1^- = \vec{E}_2^+ + \vec{E}_2^-, \tag{2.3}$$

y asumiendo que el campo incidente se propaga del lado #1 al #2, es decir, $\vec{E}_1^+ \neq 0$ y $\vec{E}_2^+ = 0$, es claro que

$$\bar{\bar{1}} + \bar{\bar{S}}_{11} = \bar{\bar{S}}_{21}, \tag{2.4}$$

o equivalentemente,

$$1 + r_x = t_x, \quad 1 + r_y = t_y. \tag{2.5}$$

Adicionalmente, asumiendo que la metasuperficie está hecha de materiales sin pérdidas, la ley de la conservación de la energía implica las siguientes relaciones:

$$|r_x|^2 + |t_x|^2 = 1, \quad |r_y|^2 + |t_y|^2 = 1, \tag{2.6}$$

lo cual significa que la suma de las potencias transmitidas y reflejadas son iguales. Combinando las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtiene:

$$\left|r_x + \frac{1}{2}\right| = \left|r_y + \frac{1}{2}\right| = \left|t_x - \frac{1}{2}\right| = \left|t_y - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

[2]La transformación para la simetría de reflexión en el plano xz es $(x, y, z) \longrightarrow (x, -y, z)$, en cambio, si el plano de simetría está en yz la transformación es $(x, y, z) \longrightarrow (-x, y, z)$.

La interpretación geométrica de (2.7) es simple: los coeficientes de reflexión y transmisión deben tomar valores en la trayectoria de una circunferencia en el plano complejo de radio 1/2, centrada en $(-1/2, 0)$ para la reflexión y $(1/2, 0)$ para la transmisión. Este hecho fue estudiado por Barlevy [62] aunque cabe mencionar que la demostración es de mayor complejidad.

A partir del principio de Babinet [41], válido para superficies complementarias hechas de conductor sin pérdidas, se obtiene que [63] $r_x = -t_y^{\mathrm{c}}$, $r_y = -t_x^{\mathrm{c}}$, $r_x^{\mathrm{c}} = -t_y$ y $r_y^{\mathrm{c}} = -t_x$, donde el superíndice "c" representa el coeficiente asociado al sistema complementario. En general, para el problema complementario se asume una rotación de 90° en el estado de polarización de los campos incidentes. Ésta es la razón por la cual se utilizaron los subíndices x y y en cada una de las ecuaciones anteriores. Debido que la superficie es autocomplementaria, los coeficientes asociados al sistema complementario son iguales a los coeficientes del sistema original, es decir, $t_i^c = t_i$ y $r_i^c = r_i$ con $i = x$ o y, y como consecuencia el conjunto de ecuaciones (2.5) toma la forma:

$$t_x + t_y = 1, \quad r_x + r_y = -1, \tag{2.8}$$

adicionalmente, la conservación de la energía en (2.6) toma la forma

$$|r_x|^2 + |r_y|^2 = 1, \quad |t_x|^2 + |t_y|^2 = 1. \tag{2.9}$$

Finalmente, al tener en cuenta que los coeficientes de transmisión y reflexión pueden ser tratados como vectores bidimensionales en el plano complejo, al combinar las ecuaciones (2.7) y (2.8) es sencillo demostrar que su producto escalar convencional debe ser cero:

$$(t_{x\mathrm{r}}, t_{x\mathrm{i}}) \cdot (t_{y\mathrm{r}}, t_{y\mathrm{i}}) = (t_{x\mathrm{r}}, t_{x\mathrm{i}}) \cdot (1 - t_{x\mathrm{r}}, -t_{x\mathrm{i}}) = 0, \tag{2.10}$$

$$(r_{x\mathrm{r}}, r_{x\mathrm{i}}) \cdot (r_{y\mathrm{r}}, r_{y\mathrm{i}}) = (r_{x\mathrm{r}}, r_{x\mathrm{i}}) \cdot (-1 - r_{x\mathrm{r}}, -r_{x\mathrm{i}}) = 0, \tag{2.11}$$

donde los subíndices "r" e "i" se refieren a la parte real e imaginaria de los coeficientes referidos. Este resultado implica que los coeficientes de transmisión (reflexión) en direcciones ortogonales están desfasados 90° en el plano complejo a cualquier frecuencia. Adicionalmente, es fácil demostrar que las diferencias de fase son

$$\arg(t_y) - \arg(t_x) = -\left(\arg(r_y) - \arg(r_x)\right) = \pm 90^{\circ}. \tag{2.12}$$

Estas propiedades se ilustran en la Figura 2.3. Allí, los coeficientes de transmisión y reflexión se representan como vectores del plano complejo que se mueven en las circunferencias de radio 1/2 predichas en (2.7) y consecuentemente, el movimiento debe preservar el ángulo entre t_x y t_y (r_x y r_y) igual a $\pm 90^{\circ}$. La elección del signo + o − en (2.12) depende de cada sistema en particular.

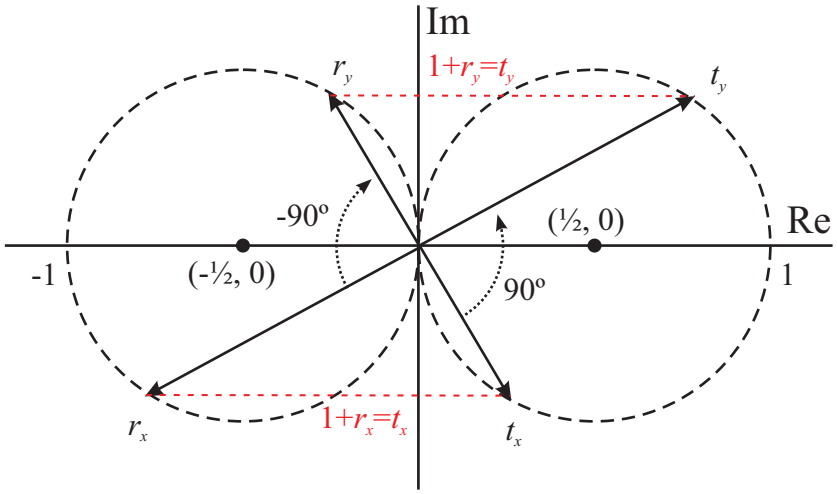

Figura 2.3: Diagrama teórico de la trayectoria, en el plano complejo, de los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas polarizadas en el eje x o y.

Condiciones para la Conversión de Polarización Lineal a Circular

Centremos la atención en el proceso de conversión de polarización lineal a circular ilustrada en la Figura 2.4. En esta figura, una onda plana linealmente polarizada es convertida en dos ondas planas circularmente polarizadas, correspondientes a la onda transmitida y a la onda reflejada. Es claro que para obtener polarización circular en la transmisión y en la reflexión, la metasuperficie debe introducir una diferencia de fase de $\pm 90°$ entre las componentes ortogonales x y y en las ondas transmitida y reflejada. A su vez, las magnitudes de las componentes ortogonales deben ser iguales. Como se demostró en 2.1, la diferencia de fase de $\pm 90°$ es garantizada por la autocomplementariedad de la pantalla, sin embargo, la igualdad de las amplitudes de las componentes ortogonales depende de la frecuencia y la orientación relativa entre el campo incidente y la metasuperficie. Con objeto de caracterizar esta orientación, se define el estado de polarización de la onda incidente a través del ángulo α entre el eje principal x de la metasuperficie y el campo eléctrico incidente, tal como se muestra en la Figura 2.4. La reflectancia y transmitancia para un ángulo α general es:

$$\begin{aligned} R &= |r_x|^2 \cos^2(\alpha) + |r_y|^2 \sin^2(\alpha), \\ T &= |t_x|^2 \cos^2(\alpha) + |t_y|^2 \sin^2(\alpha), \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $|r_x|^2$, $|r_y|^2$, $|t_x|^2$ y $|t_y|^2$ son las reflectancias y transmitancias para ondas linealmente polarizadas con los campos eléctricos incidentes a lo largo de los ejes x o y según cada caso.

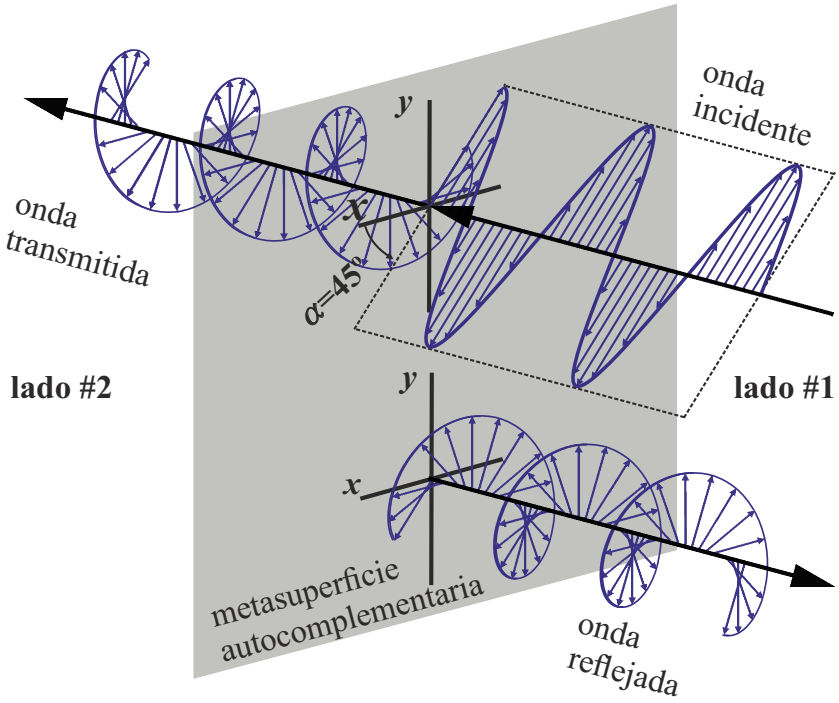

Figura 2.4: Metasuperficie autocomplementaria iluminada por una onda plana linealmente polarizada. En el conjunto de frecuencias de trabajo (ω_c), la mitad de la potencia incidente se transmite con polarización circular mientras que la otra mitad se refleja con polarización circular de helicidad opuesta a la transmitida.

La condición de polarización circular implica que

$$\frac{|r_x|^2\cos^2(\alpha)}{|r_y|^2\sin^2(\alpha)} = \frac{|t_x|^2\cos^2(\alpha)}{|t_y|^2\sin^2(\alpha)} = 1, \tag{2.14}$$

lo cual significa que las contribuciones a las potencias transmitidas y reflejadas en las direcciones ortogonales x y y deben ser iguales. Optimizando la transmitancia o reflectancia en (2.13) como función del ángulo α con las ligaduras (2.9) y (2.14), se demuestra que el valor que maximiza las potencias transmitida y reflejada es $\alpha = 45°$, y adicionalmente $|r_x| = |r_y| = |t_x| = |t_y| = 1/\sqrt{2}$. Sin embargo, como se puede inferir en los resultados de la sección 1.4, según el tipo de impedancia que describa a la metasuperficie en dirección x y y, la igualdad de los módulos entre los coeficientes de transmisión y reflexión se cumple con exactitud para un conjunto discreto de frecuencias ω_c. Teniendo en cuenta que en general la frecuencia es diferente de ω_c, la polarización resultante es elíptica. Esta propiedad puede ser caracterizada por medio de la razón axial, RA, la cual se define como la razón entre los ejes

mayor y menor de la elipse de polarización. Este puede ser calculado como [64]:

$$RA = \sqrt{\frac{|E_x|^2 + |E_y|^2 + \left|E_x^2 + E_y^2\right|}{|E_x|^2 + |E_y|^2 - \left|E_x^2 + E_y^2\right|}}, \tag{2.15}$$

donde E_x y E_y son los fasores correspondientes a las componentes x y y de la onda de interés. Ya que las metasuperficies autocomplementarias garantizan un desfase de $\pm 90°$ en la onda transmitida y reflejada, siempre que incida una onda plana linealmente polarizada con un estado de polarización de $\alpha = 45°$, entonces la definición estándar de la razón axial se simplifica a:

$$RA = \text{máx}\left\{\frac{|t_x|}{|t_y|}, \frac{|t_y|}{|t_x|}\right\} = \text{máx}\left\{\frac{|r_x|}{|r_y|}, \frac{|r_y|}{|r_x|}\right\}, \tag{2.16}$$

o en escala de decibelios:

$$RA(\text{dB}) = 20\log_{10}\left[\text{máx}\left\{\frac{|t_x|}{|t_y|}, \frac{|t_y|}{|t_x|}\right\}\right] = 20\log_{10}\left[\text{máx}\left\{\frac{|r_x|}{|r_y|}, \frac{|r_y|}{|r_x|}\right\}\right]. \tag{2.17}$$

Por último, en vista que la conversión de polarización lineal a circular se cumple para un grupo discreto de frecuencias, ω_c, es útil definir el ancho de banda de la razón axial a 3 dB (AB-RA-3dB). Bajo las condiciones establecidas, el AB-RA-3dB se define usualmente como la banda donde la razón axial se desvía del valor ideal de 0dB en $\approx \pm 3$dB[3]. En otras palabras, es la banda de frecuencias donde la potencia transmitida o reflejada en una de las polarizaciones toma valores entre la mitad o el doble de la potencia en la polarización ortogonal.

2.2. Validación Numérica

Como se ha demostrado en la sección 2.1, las metasuperficies[4] autocomplementarias tienen la particularidad que al incidirles normalmente una onda plana linealmente polarizada, con un ángulo de polarización de $\alpha = 45°$, las componentes ortogonales de los campos transmitidos (reflejados) están desfasados en 90°. Debido a esto, cuando se logra la igualdad en la magnitud de las componentes ortogonales de los campos transmitidos (reflejados), se obtiene una onda polarizada circularmente. Una solución sencilla consiste en configurar la fuente

[3]Para calcular la razón axial en decibelios se utiliza la fórmula (2.17) que adquiere el valor de 0dB cuando $RA = 1$ y de ≈ 3dB cuando $RA = \sqrt{2}$.

[4]Se aclara que es una metasuperficie para referenciar que la longitud de onda es pequeña respecto a la celda unitaria y no hay lóbulos secundarios.

para que el plano de polarización del campo eléctrico incidente esté a un ángulo de 45° y para una frecuencia específica lograr que $|r_x| = |r_y| = |t_x| = |t_y| = 1/\sqrt{2}$. Dicho resultado es posible según las trayectorias de la Figura 2.3 cuando $\overline{t}_x = t_y = -r_x = -\overline{r}_y = (0.5\ ,\ 0.5)$. Lógicamente, la solución al intercambiar los subíndices x y y también es válida.

Con el fin de validar la teoría de la sección 2.1, se propusieron las tres estructuras autocomplentarias de la Figura 2.1 y se simularon en el software comercial *CST Microwave Studio* ®. Para satisfacer todas las suposiciones de la teoría, las superficies fueron grabadas en conductor eléctrico perfecto, sin substrato. En las Figuras 2.5, 2.7 y 2.8 se muestran los volúmenes y parámetros de simulación completos para cada caso. Se imponen dos modos de Bloch-Floquet localizados a 10 mm de la superficie de metal en la dirección z. En las otras direcciones se impusieron condiciones periódicas, de modo que la celda unitaria y la onda incidente se repinten en direcciones x y y. A fin de obtener resultados precisos, se tuvieron en cuenta todos los modos de Bloch-Floquet en el receptor.

Las gráficas de las magnitudes en la segunda columna de las Figuras 2.5, 2.7 y 2.8 muestran que hay varias frecuencias donde la magnitud de los coeficientes de transmisión y reflexión de polarizaciones ortogonales se cruzan al nivel de $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ (o -3 dB). En esas frecuencias particulares, la mitad de la potencia se transmite mientras que la otra es reflejada. De mayor relevancia, en la tercera columna de las Figuras 2.5, 2.7 y 2.8, es claro que el desfase entre las curvas es constante e igual a 90° para cualquier frecuencia. Estos hechos concuerdan exactamente con los presentados en la Figura 2.3 y las ecuaciones (2.7) a (2.11).

Las regiones sombreadas de rojo y amarillo en las Figuras 2.5, 2.7 y 2.8 indican los límites donde los rayos difractados pueden aparecer. Estos son conocidas como reflexiones de Bragg por la comunidad de físicos o como lóbulos de rejilla en la comunidad de ingenieros. La región roja inicia cuando la periodicidad más grande, $D = \text{máx}\,(a, b)$, es igual a la longitud de onda, λ. En esta región, los rayos difractados aparecen aún en incidencia normal, de modo que la teoría de la sección 2.1 no es válida. El área en amarillo se refiere a la región "peligrosa"donde $\lambda/2 < D < \lambda$ y, consecuentemente, las reflexiones de Bragg pueden aparecer para incidencia oblicua. En esta región la teoría aún es válida bajo incidencia normal, sin embargo falla después de cierto ángulo límite. Finalmente, la región blanca es la región "segura"por el hecho que desaparecen las reflexiones de Bragg. Estas propiedades se derivan directamente de las condiciones de difracción para una red periódica [65]: $\Delta\vec{k} = \vec{k'} - \vec{k} = \vec{G}$, donde $\vec{k}$ y $\vec{k'}$ son los vectores de onda de la onda incidente y dispersada, respectivamente, y $\vec{G}$ es un vector de la red recíproca. Es decir, para un arreglo bidimensional rectangular de dispersores con la traslación fundamental $\vec{a}_1 = a\hat{x}$, $\vec{a}_2 = b\hat{y}$, y $\vec{a}_3 = \infty\hat{z}$, la base de la red recíproca correspondiente es formada por $\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\hat{x}$, $\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{b}\hat{y}$, y $\vec{b}_3 = 0\hat{z}$. Los últimos vectores pueden

ser usados para obtener cualquier vector de la red recíproca como $\vec{G} = n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2 + n_3\vec{b}_3 = \frac{2\pi n_1}{a}\hat{x} + \frac{2\pi n_2}{b}\hat{y} + G_z\hat{z}$, donde n_1 y n_2 son número enteros y G_z es un número real. Sustituyendo el último resultado en la condición de reflexiones de Bragg:

$$\begin{aligned} \sin\theta'\cos\phi' - \sin\theta\cos\phi &= n_1\frac{\lambda}{a} \\ \sin\theta'\sin\phi' - \sin\theta\sin\phi &= n_2\frac{\lambda}{b} \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde θ, ϕ, θ' y ϕ' son las coordenadas esféricas angulares del vector de onda $\vec{k}$ y $\vec{k'}$, respectivamente. Tomando el valor absoluto en ambos lados de (2.18) y maximizando el lado izquierdo, es fácil demostrar que la reflexión de Bragg de orden (n_1, n_2) solo puede ocurrir cuando $2 > \frac{|n_1|\lambda}{a}$ y $2 > \frac{|n_2|\lambda}{b}$. Por lo tanto, es imposible cumplir ambas condiciones al mismo tiempo cuando $\lambda > 2\,\text{máx}\,(a, b)$, a no ser que $n_1 = n_2 = 0$ lo cual se corresponde con el caso convencional de un rayo transmitido a lo largo de la dirección incidente ó el rayo presenta una reflexión de espejo convencional. Similarmente, para el caso de incidencia normal, es fácil ver desde (2.18) que las reflexiones de Bragg se eluden cuando $\lambda > \text{máx}\,(a, b)$.

A pesar que, en principio, todas las superficies mencionadas puede ser útiles para la conversión de polarización lineal a circular, éstas muestran rendimientos muy diferentes lo cual hace a algunas de ellas más adecuadas que otras, como puede deducirse de la Tabla 2.1. La 3^{ra} y 4^{ta} columna de esta tabla proporciona información importante acerca de la calidad de respuesta de cada estructura: el tamaño eléctrico de la celda unidad y los valores del AB-RA-3dB. A fin de escoger la mejor estructura, la celda unidad debe tener un tamaño eléctrico lo más pequeño posible con el fin de evitar reflexiones de Bragg y hacer que la estructura se asemeje a una superficie homogénea a distancia cercana. Por otra parte, el valor del AB-RA-3dB relativo es algunas veces muy reducido lo cual es problemático desde un punto de vista práctico. Ya que se garantiza que la diferencia de fase entre t_x y t_y es 90°, debido a la autocomplementariedad, y asumiendo que la onda incidente está linealmente polarizada con su campo eléctrico a 45° respecto al eje principal, entonces la razón axial coincide con $RA = \text{máx}\,\{|t_x|/|t_y|, |t_y|/|t_x|\}$ para la onda transmitida y $RA = \text{máx}\,\{|r_x|/|r_y|, |r_y|/|r_x|\}$ para la onda reflejada. Es claro de las Figuras 2.5, 2.7 y 2.8 que esto ocurre para todo el rango de frecuencia hasta el inicio de la región roja, donde la diferencia de las fases no es 90°. En vista de las consideraciones anteriores, los valores interesantes de la 3^{ra} y 4^{ta} columna de la tabla 2.1 han sido puestos en negrilla que corresponden a tamaño eléctrico pequeño y valores de AB-RA-3dB grandes.

Tabla 2.1: Desempeño de las pantallas autocomplementarias. 1$^{\text{ra}}$ columna: nombre de las estructuras. 2$^{\text{da}}$ columna: frecuencias donde la magnitud de los coeficientes de transmisión y reflexión son iguales. 3$^{\text{ra}}$ columna: Tamaños eléctricos de las celdas unidades. 4$^{\text{ta}}$ columna: anchos de banda porcentual de la razón axial a 3 dB.

Descripción de la estructura	f_c(GHz)	$\frac{\text{máx}\,(a,b)}{\lambda_c}$	$\frac{(\Delta f)_{3\text{ dB}}}{f_c}$ (%)
Rejilla de Tiras Paralelas	32.8	0.875	**22**
Arreglo de SRRs y C-SRRs	2.17	0.116	0.57
	2.20	0.118	0.75
	4.82	0.257	0.23
	4.85	0.258	0.062
	5.98	**0.319**	**7.6**
	7.32	**0.390**	**5.2**
	8.15	0.435	0.39
	8.34	0.444	1.8
	11.44	0.611	0.44
	11.66	0.623	0.91
	14.46	0.773	0.10
	14.51	0.773	0.05
	16.79	0.894	0.014
	16.82	0.894	0.015
Arreglo de Parches y Huecos Rectangulares	6.40	**0.341**	**9.2**
	8.07	**0.430**	**6.3**

Rejilla de Tiras Paralelas

La estructura mostrada en la Figura 2.5 (a) fue previamente estudiada en el 2002 por Brand [66] quien demostró que la simple estructura de tiras paralelas puede ser utilizada como un polarizador circular divisor de haz. Él siguió una demostración matemática rigurosa la cual es únicamente válida para esta estructura. Es importante notar que en este trabajo se presenta una teoría más simple que es capaz de generalizar este fenómeno inusual a cualquier pantalla conductora autocomplementaria.

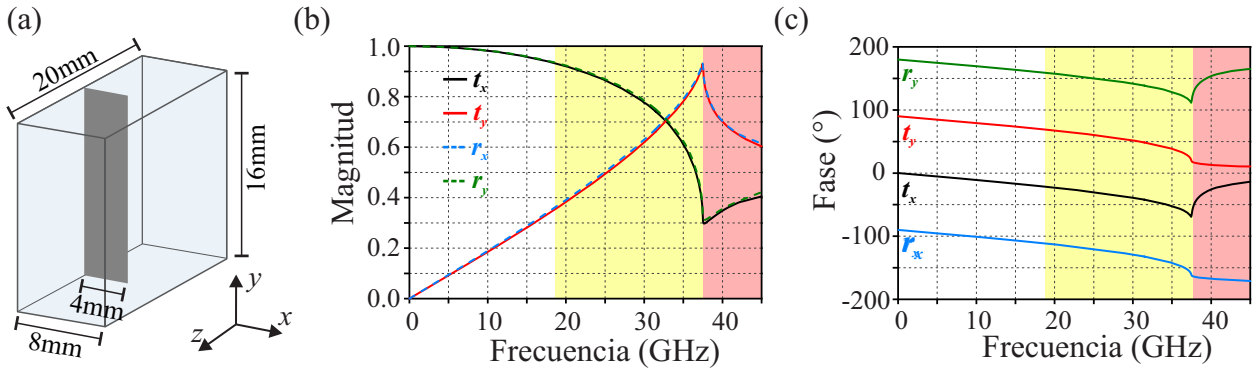

Figura 2.5: Estructura autocomplementaria de la rejilla de tiras paralelas. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados.

En la Figura 2.5 (b) se muestra que las magnitudes de todos los coeficientes se igualan a $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ para una frecuencia de 32.8 GHz cuando la razón entre la periodicidad de la estructura es $D = a = 8$ mm ($b = 0$) y el tamaño eléctrico es $D/\lambda = 0.87$, lo cual está de acuerdo con los resultados previos de Brand [66]. En principio, a esta frecuencia la conversión de polarización lineal a circular debería ser posible. Sin embargo, esta estructura tiene un inconveniente importante: la frecuencia de cruce (f_c, 2da columna de la Tabla 2.1) está dentro la región amarilla. Esta región fue definida anteriormente con la condición $\frac{\lambda}{2} < D < \lambda$ la cual, transformada a frecuencias, es equivalente a 18.75 GHz $< f <$ 37.5 GHz. En otras palabras, las reflexiones de Bragg, o lóbulos de rejilla, pueden aparecer bajo incidencia oblicua. Usando la ecuación (2.18), es sencillo obtener que la reflexión de Bragg de primer orden aparece para ángulos de incidencia tan pequeños como $\theta > 8.6°$ (con $\phi = 180°$, $\theta' < 90°$, y $\phi' = 0°$). Por lo tanto, esta superficie no es adecuada para hacer un divisor de haz típico trabajando a un ángulo de incidencia de 45°, ya que parte de la energía puede ser dispersada fuera del haz principal.

Para ilustrar el efecto de la difracción, la sección eficaz de dispersión diferencial es representada en la Figura 2.6 (a, b y c) para diferentes ángulos de incidencia: $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$ (en todos los casos con $\phi^{inc} = 180°$). Bajo incidencia normal, solo los lóbulos a lo largo de la dirección incidente aparecen (haz reflejado y transmitido). Sin embargo, para los casos de 30° y 60°, las reflexiones de Bragg (o lóbulos de rejilla) surgen en direcciones que no se corresponden con los rayos esperados para la incidencia en una superficie homogénea. Puede comprobarse fácilmente que estas direcciones se corresponden con las obtenidas en la fórmula (2.18). La energía que llevan estos lóbulos secundarios (o de rejilla) es comparable a la energía del lóbulo principal. Incluso, en el caso de 60°, los lóbulos secundarios son casi iguales al lóbulo principal. Por lo tanto, la fuga de energía a direcciones laterales no es

despreciable.

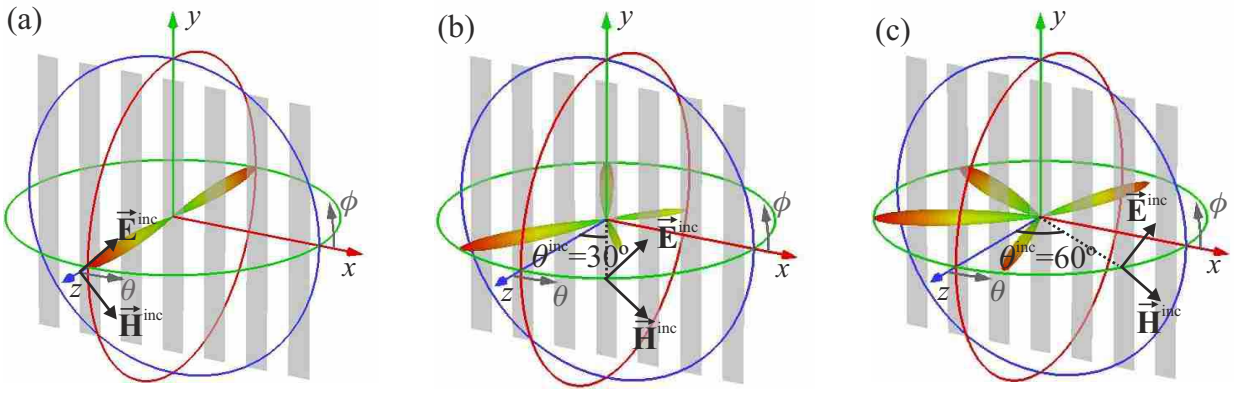

Figura 2.6: Simulación de la sección eficaz de dispersión diferencial (escala lineal) para la rejilla de tiras paralelas a 32.8 GHz. Se muestra la dispersión bajo diferentes ángulos de incidencia: (a) $\theta = 0°$, (b) $\theta = 30°$ y (c)(a) $\theta = 60°$.

Arreglo de SRRs y C-SRRs

Con el objetivo de evitar las reflexiones de Bragg o lóbulos de rejilla, la celda unitaria debería tener dimensiones más pequeñas que la mitad de la longitud de onda asociada. En este sentido, un posible candidato podría ser el anillo resonante cortado (SRR por sus siglas en ingles) [9], utilizado frecuentemente para el diseño de metamateriales, cuyo tamaño eléctrico es varias veces más pequeño que la longitud de onda de resonancia. En la Figura 2.7 (a) se muestra una estructura hecha a partir de la variación del SRR original y su complementaria, llamada C-SRR. Observe que la presencia del SRR en conjunto con el C-SRR en la celda unidad es necesaria a fin de garantizar la autocomplementariedad.

En la Figura 2.7 (b) se muestran las amplitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión. Se puede observar en esta figura la aparición de muchas resonancias, la mayoría de ellas son muy delgadas y hay una de ancho considerable cercana a 6.7 GHz. Se ha comprobado cuidadosamente que alrededor de cada resonancia hay un par de frecuencias donde se cumple exactamente que $|t_x| = |t_y| = |r_x| = |r_y|$. La información específica de todas las frecuencias que cumplen la condición están contenidas en la 3^{ra} fila de la Tabla 2.1. En la Figura 2.7 (c), se confirma la constancia del desfase de 90°.

En principio, las frecuencias más interesantes deberían ser las más bajas debido a que la muestra parecería más homogénea (2.17 GHz y 2.20 GHz en este caso). Sin embargo, a pesar

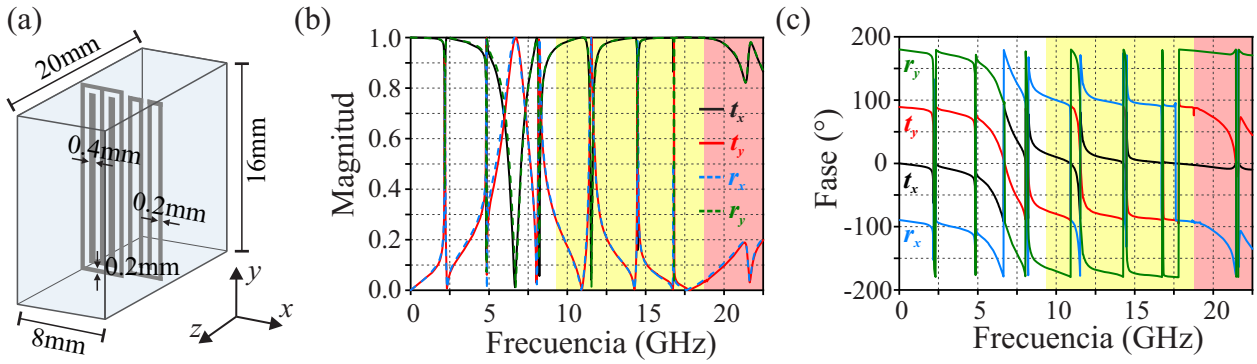

Figura 2.7: Estructura autocomplementaria de SRRs y C-SRRs. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados.

de que no se muestra acá, se ha encontrado que al cambiar el conductor eléctrico perfecto por cobre y al colocarlo sobre un sustrato dieléctrico típico de microondas, el fenómeno es destruido para esas frecuencias. Ésto puede ser atribuido al factor de calidad extremadamente alto del primer pico/valle. La atenuación del primer pico/valle debido a las pérdidas y los desfases en frecuencia diferentes para el pico y el valle debido a la presencia del sustrato dieléctrico impiden el cruce entre las curvas. Además la constante dieléctrica del sustrato desplaza hacia abajo la frecuencia de cada resonador que forma la celda unitaria. Desafortunadamente el desplazamiento en la frecuencia del SRR y el C-SRR no son iguales al otro. Por lo tanto estas frecuencias no resultan de interés desde un punto de vista práctico. Usando el mismo argumento todos los cruces de frecuencias correspondientes a resonancias muy delgadas (con ancho de banda relativo cercano o por debajo del 1 % en la Tabla 2.1) deben ser descartados para aplicaciones reales.

Al final, las únicas frecuencias útiles son $f_1 = 5.98$ GHz y $f_2 = 7.32$ GHz (ver Tabla 2.1). Afortunadamente, estas frecuencias están dentro de la región blanca donde las reflexiones de Bragg no pueden ocurrir. De hecho, las longitudes de los lados más grandes son $b = 0.319\lambda_1$ y $b = 0.390\lambda_2$, respectivamente, ambas más pequeñas que 0.5λ. Los anchos de banda relativos son del 7.60 % y 5.20 % los cuales, a pesar de que son significativamente más pequeños que el 22 % obtenido con la rejilla de tiras paralelas, son suficientes para la persistencia del fenómeno cuando se introducen materiales realistas. Este punto será clarificado en la sección experimental.

De hecho, estudiando las corrientes superficiales mediante simulaciones a 6.70 GHz, se observó que el patrón de esta no tiene en cuenta la estructura de los SRR y C-SRR, en cambio es como el patrón de un simple parche rectangular con el mismo contorno cuando su longitud

es cercana a $\lambda/2$. Debido a esto, en la siguiente subsección se remueven el SRR y el C-SRR y se remplazan por un hueco y una parche rectangular, respectivamente.

Arreglo de Parches y Huecos Rectangulares

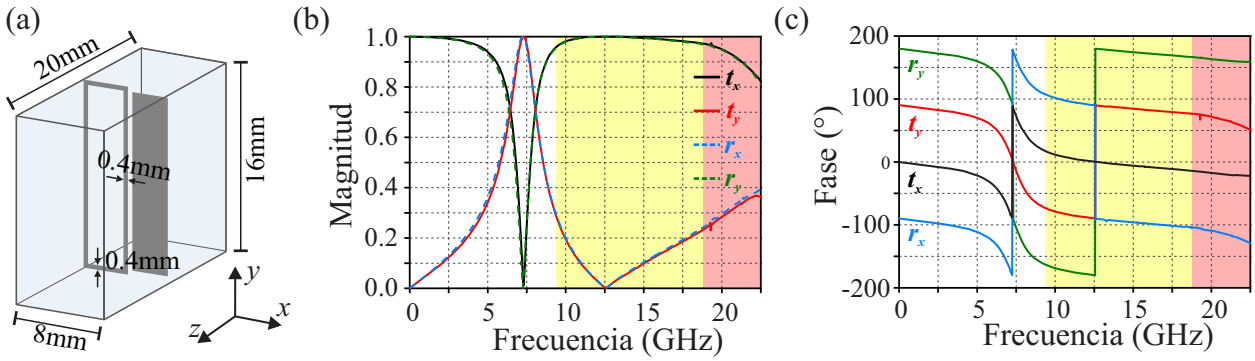

Figura 2.8: Estructura autocomplementaria de parches y huecos rectangulares. (a) Celda unitaria con parámetros de simulación, (b) magnitud y (c) fase de los coeficientes de transmisión y reflexión simulados.

En la Figura 2.8 se muestra la estructura y los resultados de simulación de los coeficientes de transmisión y reflexión (magnitud y fase). Los resultados para esta estructura son muy similares a los anteriores. La autocomplementariedad garantiza que la diferencia de fase es 90° para cualquier frecuencia. Se observa que los cruces entre las magnitudes de los coeficientes se da al nivel de $1/\sqrt{2}$ a $f_1 = 6.40$ GHz y $f_2 = 8.07$ GHz los cuales son cercanos a los valores de la celda unitaria basada en SRRs y C-SRRs alrededor de su resonancia más ancha. El tamaño eléctrico es suficientemente pequeño para cada cruce ($b = 0.341\lambda_1$ y $b = 0.430\lambda_2$) y adicionalmente, el ancho de banda se mejora un poco, siendo ahora 9.2 % y 6.3 % (ver Tabla 2.1, cuarta fila) gracias a la eliminación de las resonancias vecinas que comprimían la curva de ambos lados.

En la Figura 2.9 se representa la sección eficaz de dispersión diferencial para tres direcciones de incidencia diferentes (todas con $\phi = 180°$): $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$. Se observa que solo los rayos transmitido y reflejado convencionales aparecen, mientras que las reflexiones de Bragg no se manifiestan. La razón es que el lado más grande de la celda unitaria es más pequeño que la mitad de la longitud de onda tal que la condición de difracción (2.18) no puede ser cumplida. Esta es una gran ventaja en comparación a la rejilla de tiras paralelas (compare con la Figura 2.6 (a), (b) y (c)).

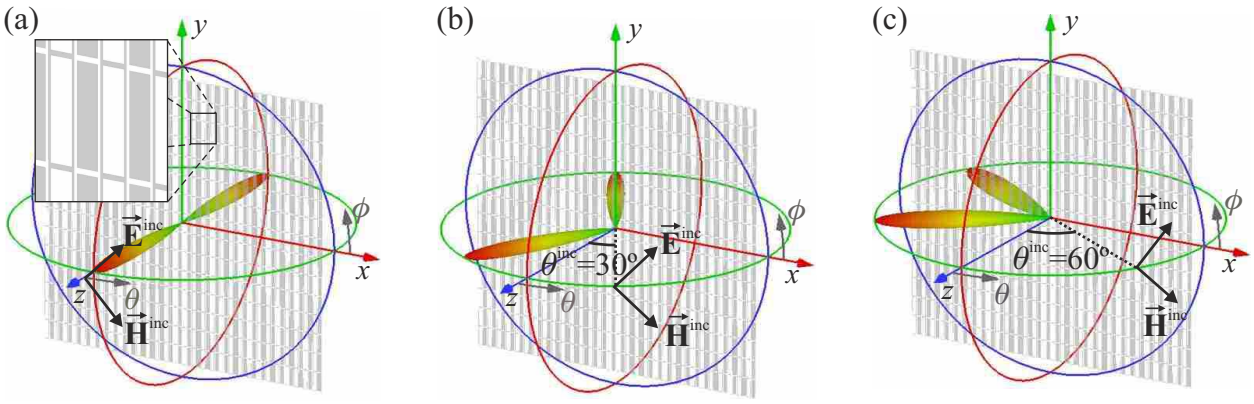

Figura 2.9: Simulación de la sección eficaz de dispersión diferencial (escala lineal) para la rejilla de tiras paralelas a 32.8 GHz. Se muestra la dispersión bajo diferentes ángulos de incidencia: (a) $\theta = 0°$, (b) $\theta = 30°$ y (c)(a) $\theta = 60°$.

2.3. Resultados Experimentales

Los resultados presentados anteriormente han sido validados experimentalmente. En la Figura 2.10 se muestra el montaje experimental, incluyendo las dimensiones y las propiedades de los materiales utilizados para fabricar la muestra. La estructura que se fabricó corresponde al arreglo autocomplementario de parches y huecos rectangulares. Los parámetros de la celda unitaria coinciden con aquellos en la Figura 2.8. La muestra fue colocada en medio de dos antenas de bocina de banda ancha separadas por una distancia de 3 m, además fue rodeada por absorbentes piramidales a fin de reducir la difracción de borde. El montaje permite ambas rotaciones mostradas en el recuadro de la Figura 2.10. Los coeficientes de transmisión medidos bajo incidencia normal son comparados con los resultados de simulación en la Figura 2.11 mostrando un buen acuerdo cuantitativo. Con el objetivo de suprimir los efectos de las múltiples reflexiones entre la muestra y las antenas se emplea un método de filtrado en el dominio del tiempo [67].

En principio, las resonancias para las polarizaciones x y y de la pantalla autocomplementaria deberían estar a la misma frecuencia en la medida que se cumplen todos los requerimientos del principio de Babinet. Rigurosamente, este principio solo es satisfecho cuando la pantalla es impresa en un conductor eléctrico perfecto bidimensional plano [41]. Sin embargo, inspeccionando los coeficientes de transmisión experimentales mostrados en la Figura 2.11, se puede observar una diferencia de 0.3 GHz entre las resonancias de las polarizaciones x y y. Además, la misma diferencia de frecuencias puede ser observada desde las curvas simuladas cuando los parámetros reales del material son considerados. Esta diferencia relativa entre fre-

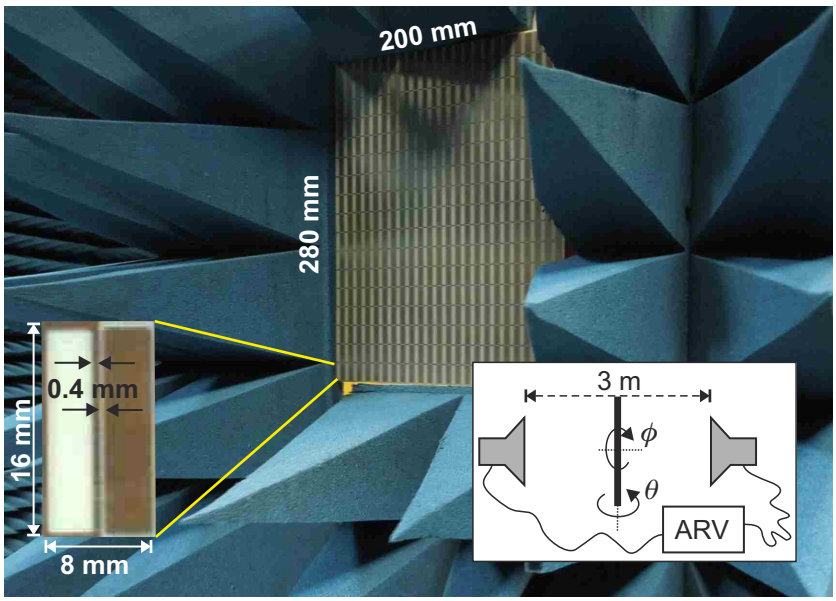

Figura 2.10: Montaje experimental. La muestra es un arreglo autocomplementario de parches rectangulares y huecos. Ésta rodeó de material absorbente a fin de reducir la difracción de borde. La muestra se fabricó en ARLON-25N cuyos parámetros son: constante dieléctrica $\epsilon_r = 3.38$, tangente de pérdidas $\tan\delta = 0.0025$, espesor del dieléctrico $h = 0.5$ mm, y espesor de la capa de cobre $m = 18$ μm.

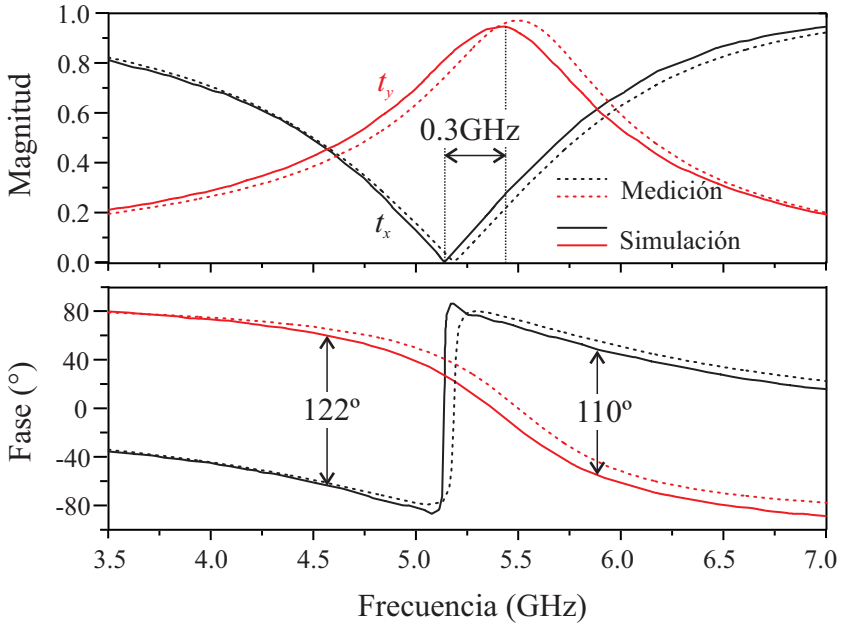

Figura 2.11: Coeficientes de transmisión medidos (línea sólida) bajo incidencia normal comparados con la simulación numérica (línea punteada) para la estructura fabricada.

cuencias de resonancia se deben principalmente a la presencia del sustrato dieléctrico el cual corre al rojo ambas frecuencias pero en cantidades diferentes, desde los 7.2 GHz sin sustrato dieléctrico baja a 5.1 GHz para t_x y 5.4 GHz para t_y. En la Tabla 2.2, se comparan algunas variables relevantes, obtenidas mediante simulación, de parches rectangulares geométricamente idénticos con diferentes materiales y espesores. f_{c1} y f_{c2} son las frecuencias donde los coeficientes de transmisión en polarización x y y se cortan por primera y segunda vez. $|t(f_{c1})|$ y $|t(f_{c2})|$ las amplitudes de la transmisión a dichas frecuencias. $\Delta\phi = \phi_{ty} - \phi_{tx}$ es la diferencia de fase entre los coeficientes t_y y t_x para las frecuencias especificadas. Adicionalmente, se da el espesor del metal en cada caso, m, el espesor del dieléctrico, h, la constante dieléctrica del sustrato, ϵ_r, y la tangente de pérdidas $\tan\delta$. Las superficies comparadas corresponden al caso ideal (2^{ra} fila), la muestra fabricada en ARLON 25N (3^{ra} fila), un sustrato delgado con permitividad moderada conocida como ARLON 250-LX-0053-53-55 (5^{ta} fila) y un sustrato de baja constante dieléctrica con espesor moderado llamado ARLON FOAMCLAD RF 100 (6^{ta} fila).

En la muestra fabricada, los corrimientos al rojo de $|t_x|$ y $|t_y|$ son diferentes debido a que las distribuciones de campo eléctrico son diferentes. Cerca a la resonancia, la densidad de energía eléctrica está altamente concentrada entre las ranuras ortogonales para el campo eléctrico externo. Ya que las ranuras verticales son más largas que las horizontales, las curvas de t_x deberían ser más sensibles a la presencia del sustrato dieléctrico que t_y, como se observa en la Figura 2.11. Mediante la comparación con la 4^{ta} fila de la Tabla 2.2 se puede verificar que la desviación se debe al dieléctrico y no a las pérdidas o espesor del metal.

Esta estructura resonó exactamente a la misma frecuencia que la estructura hecha de conductor eléctrico perfecto y no se observa un desplazamiento relativo entre el valle de t_x y el pico de t_y. Además, la diferencia de fase en los cruces fue de $95.9°$ y $-89.5°$ (ver 4^{ta} fila en la Tabla 2.2) los cuales son cercanos a valor deseado de $\pm 90°$. La pequeña desviación remanente puede atribuirse al efecto de las pérdidas óhmicas y el espesor del metal.

A pesar de la desviación del experimento a la teoría debido al dieléctrico, hay dos frecuencias particulares que proporcionan coeficientes de transmisión iguales en magnitud para polarizaciones ortogonales. Sin embargo, el desplazamiento relativo en frecuencia afecta a las curvas de fase y la diferencia de fase correspondiente no es exactamente $\pm 90°$ pero es alrededor de $122°$ para el corte justo debajo de la frecuencia de resonancia f_0 y $-110°$ para el corte justo por encima de f_0. Estos valores pueden considerarse lejanos del desfase deseado de $\pm 90°$ si la tolerancia en una determinada aplicación es muy estricta. A fin de perfeccionar este dispositivo, se pueden emplear sustratos con constantes dieléctricas lo más cercana posible a la unidad o con espesor muy pequeño, tal como el ARLON FOAMCLAD RF 100 o ARLON

Tabla 2.2: Comparación de variables relevantes obtenidas mediante simulación, entre parches rectangulares con la misma geometría con diferentes materiales y espesores.

Descripción de la FSS	f_{c1}(GHz)	$\|t\|(f_{c1})$	$\Delta\phi(f_{c1})$	f_{c2}(GHz)	$\|t\|(f_{c2})$	$\Delta\phi(f_{c2})$
Caso ideal: $m = 0$, $h = 0$, $\epsilon_r = 1$, $\tan\delta = 0$	6.41	0.701	+90.9°	8.07	0.708	-89.9°
Fabricado: $m = 18$ μm, $h = 0.5$ mm, $\epsilon_r = 3.38$, $\tan\delta = 0.0025$	4.62	0.432	+127°	5.97	0.616	-102°
Lámina de Cu sin sustrato: $m = 18$ μm, $h = 0$ mm, $\epsilon_r = 1$, $\tan\delta = 0$	6.40	0.664	+95.9°	8.06	0.702	-89.5°
Sustrato delgado: $m = 18$ μm, $h = 0.135$ mm, $\epsilon_r = 2.53$, $\tan\delta = 0.002$	5.65	0.579	+108°	7.22	0.677	-93.2°
Sustrato de ϵ_r baja: $m = 35$ μm, $h = 0.991$ mm, $\epsilon_r = 1.3$, $\tan\delta = 0.0025$	6.01	0.611	+103°	7.58	0.685	-91.7°

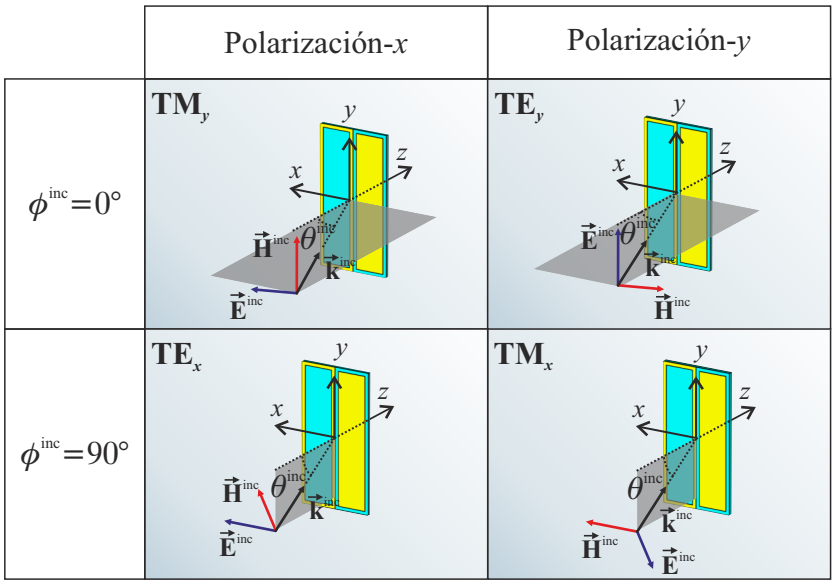

Figura 2.12: Bosquejo de las diferentes polarizaciones utilizadas para comprobar la estabilidad angular.

250-LX-0053-53-55 (6^{ta} y 5^{ta} fila en la Tabla 2.2, respectivamente). Lo anterior demuestra que es posible perfeccionar el resultado para obtener resultados cercanos a los valores ideales de $|t| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ y $\Delta\phi = \pm 90°$.

Finalmente, para demostrar la estabilidad angular de este dispositivo, se midieron los coeficientes de transmisión para diferentes ángulos de incidencia para las polarizaciones convencionales TE$_x$, TM$_x$, TE$_y$, y TM$_y$. Por claridad, estos cuatro tipos de polarizaciones son ilustrados en la Figura 2.12. Los resultados de la medición se muestran en la Figura 2.13, aunque con una notación más sencilla mostrada en la Figura 2.12. En la Figura 2.13 el subíndice x ó y en los coeficientes de transmisión se refiere a que el campo eléctrico transmitido tiene componente en dirección x ó y y se entiende como polarización-x ó y en la Figura 2.12. Además, θ^{inc} y ϕ^{inc} son el ángulo polar y el ángulo azimutal de la onda incidente, respectivamente. Es notable que los coeficientes de transmisión son muy estables hasta los 30°, a pesar de que hay un desplazamiento relativo en frecuencia para $t_x(\phi^{\text{inc}} = 90°, \theta^{\text{inc}} = 30°)$ y $t_y(\phi^{\text{inc}} = 90°, \theta^{\text{inc}} = 30°)$. Puesto que estos dos modos tienen una componente transversal del vector de onda a lo largo del eje y, estas desviaciones pueden ser reducidas por el incremento de la distancia vertical entre los elementos (parches metálicos o huecos).

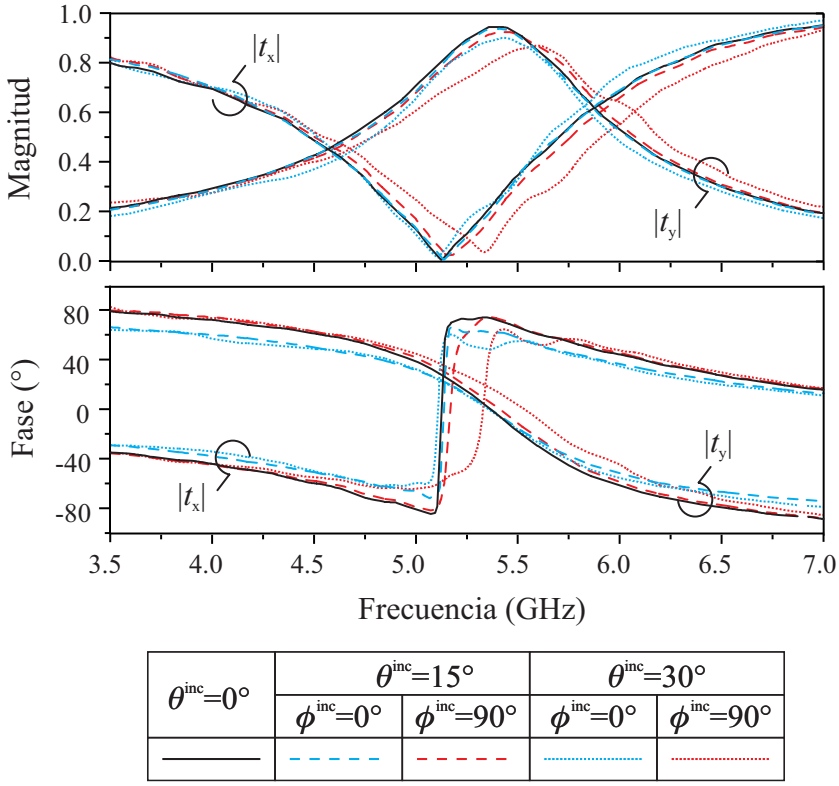

Figura 2.13: Coeficientes de transmisión medidos bajo incidencia oblicua para el arreglo autocomplementario de parches y huecos rectangulares.

3 Convertidores de Polarización Lineal a Circular Delgados de Banda Ancha Basados en Metasuperficies Autocomplementarias de Zigzag

Como se demostró en el Capítulo 2, las metasuperficies autocomplementarias resultan ser idóneas en el diseño de dispositivos de conversión de polarización lineal a circular puesto que preservan, independientemente de la frecuencia, un desfase de $\pm 90°$ entre los coeficientes de transmisión (reflexión) de polarizaciones ortogonales, a excepción que el tamaño de la celda unitaria sea igual o más grande que la longitud de onda de trabajo ya que marca la aparición de lóbulos secundarios en incidencia normal. A pesar de dichas ventajas, los tres diseños del Capítulo 2 poseen anchos de banda de la razón axial a 3 dB (AB-RA-3dB) muy pequeños[1], aún en el caso ideal que consiste de conductor eléctrico perfecto sin sustrato, lo cual puede no ser deseado para ciertas aplicaciones. Por lo anterior, en este capítulo se proponen metasuperficies autocomplementarias compuestas por tiras metálicas en forma de zigzag, por ejemplo la mostrada en la Figura 3.1, como convertidores de polarización lineal a circular de banda ancha. A continuación, se proporciona un estudio completo y sistemático de la geometría de zigzag desde la teoría hasta la demostración experimental. Utilizando el modelo de impedancias superficiales de la sección 1.4, se obtienen las fórmulas teóricas para los coeficientes de transmisión y reflexión tanto como la razón axial. En primer lugar, la teoría es validada a través de simulaciones numéricas para una metasuperficie de zigzag de conductor eléctrico perfecto sin sustrato. Después, se evalúan los efectos de un sustrato dieléctrico y una conductividad eléctrica finita en el metal. Finalmente, se proporciona una demostración experimental completa.

[1] La rejilla de tiras paralelas tiene un ancho de banda moderado pero tiene un tamaño eléctrico comparable a la longitud de onda de trabajo.

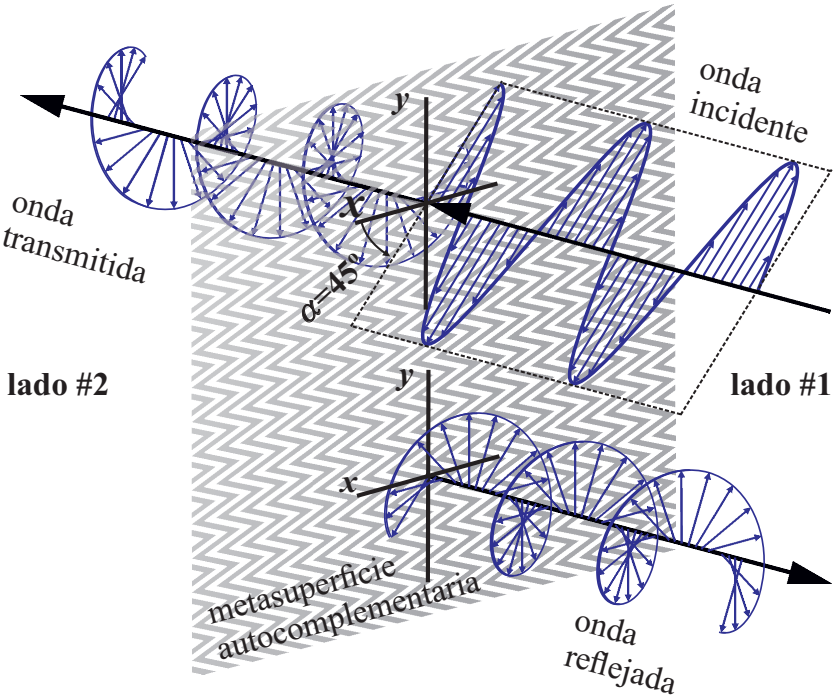

Figura 3.1: Metasuperficie de zigzag iluminada por una onda plana linealmente polarizada. A la frecuencia de trabajo, la mitad de la potencia se transmite y la otra mitad se refleja con helicidad opuesta.

3.1. Teoría

En esta sección se particulariza el modelo de impedancias superficiales desarrollado en la sección 1.4 para predecir el comportamiento de una metasuperficie autocomplementaria de zigzag.

Debido a que se considera que la periodicidad de la metasuperficie es mucho más pequeña que la longitud de onda de trabajo, se puede concebir un modelo de circuito para describir la celda unitaria. Para el caso de una onda plana con polarización x, las cargas eléctricas se acumulan en los bordes de las tiras metálicas y en consecuencia la celda unitaria se comporta como un capacitor (C) (ver Figura 3.2 (a)). Por otra parte, para una onda plana con polarización y, se inducen corrientes eléctricas superficiales a lo largo de la tira de metal siguiendo trazos curvados, y cada celda unitaria puede ser modelada como un inductor (L) (ver Figura 3.2 (b)).

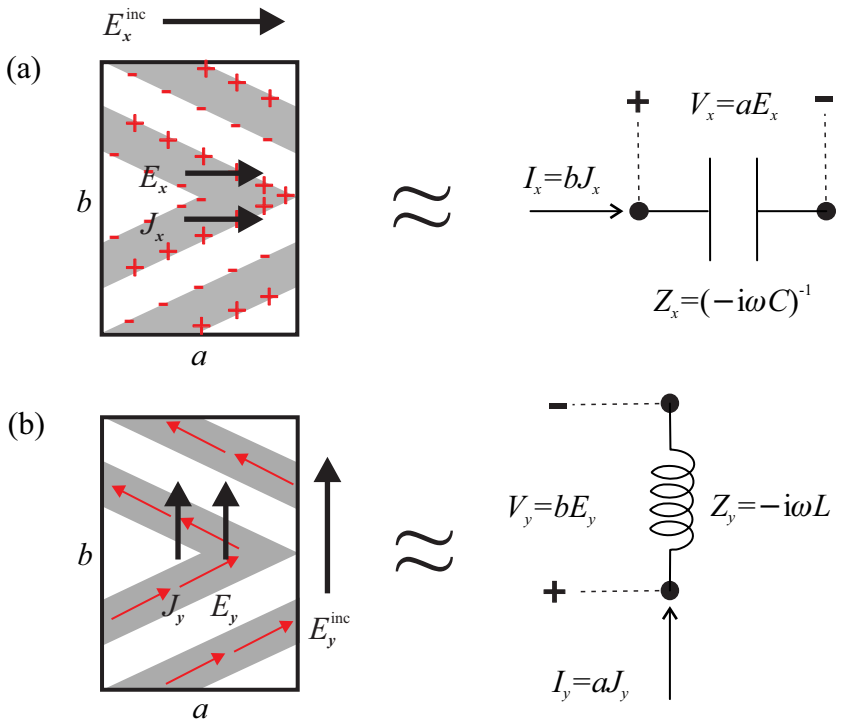

Figura 3.2: Modelo circuital para una celda unitaria de un zigzag autocomplementario cuando es iluminado por una onda plana polarizada en x (a) y y (b).

Como se demostró en la sección 1.4, los coeficientes de transmisión y reflexión son

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{-Z_0}{Z_0 + 2Z_x b/a}, \quad r_y = \frac{-Z_0}{Z_0 + 2Z_y a/b}, \\ t_x &= \frac{2Z_x b/a}{Z_0 + 2Z_x b/a}, \quad t_y = \frac{2Z_y a/b}{Z_0 + 2Z_y a/b}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde Z_0 es la impedancia del espacio libre, Z_x y Z_y son las impedancias que describen el comportamiento de la celda unitaria en direcciones x y y, respectivamente, derivadas del modelo de circuito asociado, y a y b son las dimensiones de la celda unitaria. Ahora, las impedancias de circuito de la celda unitaria, $Z_x = (\mathrm{j}\omega C)^{-1}$ y $Z_y = \mathrm{j}\omega L$ (según se muestra en la Figura 3.2), pueden ser introducidas en 3.1 para obtener

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{-1}{1 - \mathrm{j}\omega_{cx}/\omega}, \quad r_y = \frac{-1}{1 + \mathrm{j}\omega/\omega_{cy}} \\ t_x &= \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega/\omega_{cx}}, \quad t_y = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\omega_{cy}/\omega} \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

$$\omega_{cx} = \frac{2b}{aZ_0 C}, \quad \omega_{cy} = \frac{Z_0 b}{2aL} \tag{3.3}$$

son las frecuencias a las cuales se igualan las magnitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión para la polarización x y y, respectivamente, lo cual se puede probar desde las relaciones (3.1). La conocida relación de dualidad para circuitos complementarios [68], $ZZ^c = Z_0^2/4$ (Z y Z^c siendo las impedancias de dos circuitos planos complementarios), permite expresar $Z_x Z_y = Z_0^2/4$. Usando esta propiedad en (3.3), es claro que todas las curvas de las magnitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión se cortan a la misma frecuencia $\omega_\mathrm{c} = \omega_{cx} = \omega_{cy}$. Además, desde las relaciones (3.3) y (3.2) se puede confirmar la validez de las restricciones fundamentales de la sección 2.1.

A fin de ilustrar el comportamiento teórico de la metasuperficie, se graficaron las magnitudes y fases de los coeficientes de transmisión y reflexión en función de la frecuencia normalizada por la frecuencia de corte (ω_c). La gráfica de las magnitudes muestra que, la curva de $|t_x| = |r_y|$ decrece mientras que la curva de $|t_y| = |r_x|$ crece, de modo que se interceptan en $\omega = \omega_\mathrm{c}$ al nivel de $1/\sqrt{2}$. La figura de las fases muestra que la diferencia de fase entre t_y y t_x es 90° y 270° = −90° entre r_y y r_x, lo cual está de acuerdo con la relación (2.12).

Finalmente, a partir de la sustitución de las relaciones (3.2) en (2.16) se obtiene que la razón axial se transforma en

$$RA = \text{máx}\left\{\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}, \frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right\} \tag{3.4}$$

o equivalentemente:

$$RA(\text{dB}) = 20\left|\log_{10}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right| \tag{3.5}$$

y al restringir las frecuencias donde la razón axial es menor o igual a 3 dB en (3.5), es fácil obtener que el ancho de banda a 3 dB:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{RA-3dB}}}{\omega_\mathrm{c}} \approx 70.5\,\% \tag{3.6}$$

En la bibliografía consultada, este ancho de banda relativo es más grande que el de los convertidores de polarización lineal a circular basados en superficies selectivas en frecuencias reportados hasta el momento (2016). Nótese que este valor es constante y válido a medida que el tamaño eléctrico de la celda unitaria se hace pequeño, y a su vez marca la cota superior para el valor de la razón axial.

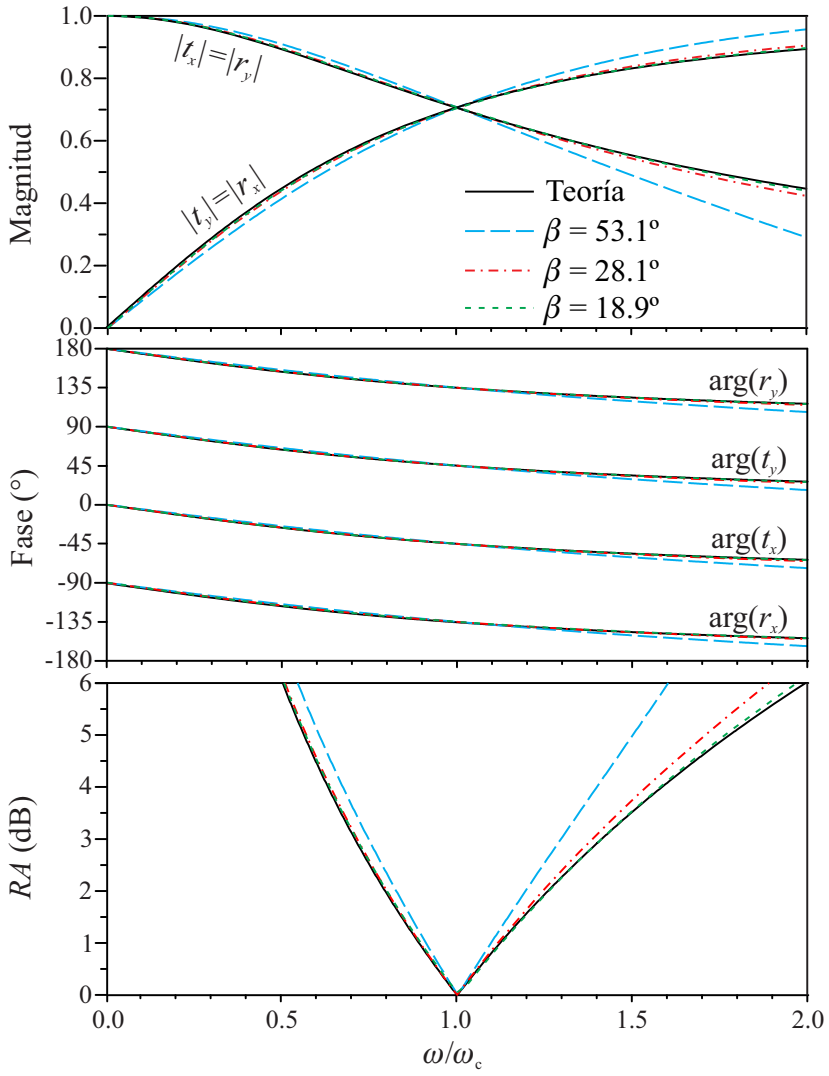

Figura 3.3: Resultados teóricos (línea negra sólida) y simulados de los coeficientes de transmisión y reflexión (magnitud y fase) para ondas incidentes polarizadas en x y y, además se muestra la relación axial para el caso de una onda incidiendo con un ángulo de polarización $\alpha = 45°$. Los resultados simulados son representados para metasuperficies con diferentes valores del ángulo β. Las curvas simuladas corresponden a las geometrías ilustradas en la Figura 3.4. Note que la curva para $\beta = 18.0°$ (línea verda) se solapa casi a la perfección con la curva teórica.

3.2. Validación Numérica

Con el objetivo de validar la teoría, se simularon las tres celdas unitarias mostradas en la Figura 3.4 utilizando el software comercial *CST Microwave Studio* ®. Éstas se consideraron

hechas de conductor eléctrico perfecto sin sustrato y sus parámetros geométricos se muestran en la misma figura. Cada celda unitaria está contenida en un volumen de $6 \times 6 \times 10$ mm el cual está rodeado por condiciones de frontera periódicas en direcciones x y y, mientras que hay dos puertos de Bloch-Floquet a lo largo del eje z. Ya que la periodicidad siempre fue más pequeña que media longitud de onda, solo se impusieron los modos de Bloch-Floquet de orden cero que corresponden a ondas planas linealmente polarizadas con el campo eléctrico a lo largo de los ejes x y y. Cada estructura simulada tiene un valor diferente del ángulo del zigzag β, el cual tomó valores de 53.1°, 28.1° y 18.9°.

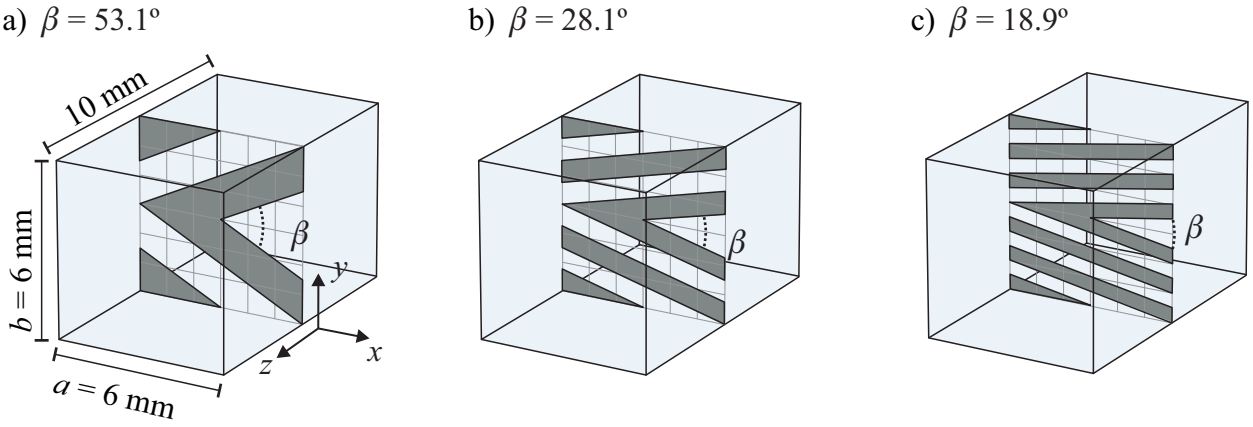

Figura 3.4: Celdas unitarias simuladas. El azul claro representa el vacío mientras que el gris el conductor eléctrico perfecto. Cada estructura puede ser identificada por el ángulo del zigag β.

La magnitud, fase y la razón axial (RA) de las estructuras simuladas son representadas en función de la frecuencia y comparadas con las predicciones teóricas en la Figura 3.3. Vale la pena notar que la frecuencia está normalizada por la frecuencia de corte específica de cada estructura $\omega_c = 2\pi f_c$ (ver los valores de f_c en la Tabla 3.1). En un primer vistazo, la figura muestra un buen comportamiento para todas las geometrías y mejora a medida que decrece el ángulo β. La gráfica de las magnitudes muestra que todas las curvas se cruzan al nivel de $1/\sqrt{2}$ según lo predicho en (3.2). La figura de las fases muestra que $\arg(r_y) - \arg(r_x) = 270° = -90°$ y $\arg(t_y) - \arg(t_x) = 90°$ para cualquier frecuencia, lo cual está de acuerdo con (2.12). Finalmente, la gráfica de la razón axial muestra un valor de 0 dB a la frecuencia de corte para todos los casos y converge al valor predicho en (3.6).

Reduciendo el ángulo β, la capacitancia C y la inductancia L equivalente de la fórmula (3.3) pueden ser incrementadas simultáneamente y, por lo tanto, la frecuencia de cruce puede ser reducida como se muestra en la Tabla 3.1. Esto se debe a que la capacitancia se incrementa cuando las tiras de metal se acercan, y la inductancia crece puesto que el camino de la corriente eléctrica se hace más largo y delgado. Que la frecuencia de cruce disminuya hace

Tabla 3.1: Comparación entre las metasuperficies simuladas en la Figura 3.4.

β	f_c(GHz)	$\frac{a}{\lambda_c}$	$\frac{L}{10^{-9}\mathrm{H}}$	$\frac{C}{10^{-14}\mathrm{C}}$	$\frac{(\Delta f)_{\text{3dB-AR}}}{f_c}(\,\%)$
53.1°	12.6	0.252	2.15	6.07	55.2
28.1°	3.70	0.074	8.18	23.2	67.6
18.9°	1.65	0.033	18.5	52.4	69.7

la dimensión eléctrica de la celda unitaria (a/λ_c) más pequeña, lo cual conduce a una mayor precisión del modelo de impedancia superficial. Lo anterior explica porqué la comparación con la teoría mejora a medida que el ángulo β se reduce. Además, la Tabla 3.1 muestra la capacitancia C y la inductancia L equivalente obtenidas ajustando (3.2) y (3.3) con los resultados numéricos para bajas frecuencias (desde 0 hasta 5 GHz). Es posible comprobar desde estos valores que la relación de dualidad, $L/C = Z_0^2/4$, se cumple con precisión. Vale la pena notar que, aparte de la precisión del método de fabricación, no hay limitaciones fundamentales para reducir indefinidamente el tamaño eléctrico de la celda unitaria mediante la reducción del ángulo β. La última columna de la Tabla 3.1 muestra el AB-RA-3dB para cada estructura. Es claro que, como β se hace pequeño haciendo el modelo de impedancia más preciso, el ancho de banda tiende asintóticamente al valor teórico de 70.5 %. De hecho, éste es 69.7 % para $\beta = 18.9°$.

3.3. Efecto del Sustrato Dieléctrico

En la última sección todas las estructuras fueron impresas en una lámina de conductor eléctrico perfecto sin sustrato. En esta sección, se exploran los efectos de un sustrato dieléctrico soportando la metasuperficie. Además, el conductor eléctrico perfecto es sustituido por cobre con pérdidas. Bajo tales condiciones el principio de Babinet no es exacto y la teoría presentada puede fallar. Afortunadamente, se demostrará que este efecto indeseado puede ser fácilmente evitado por medio de una modificación geométrica simple.

En la Figura 3.5 (a) se simuló nuevamente la metasuperficie de zigzag con $\beta = 53.1°$ grabada en una lámina de cobre soportada por un sustrato dieléctrico con permitividad eléctrica relativa $\epsilon_r = 3.38(1-\mathrm{j}0.0025)$. La presencia del sustrato dieléctrico incrementa la capacitancia C mientras que la inductancia L permanece invariante (compare los valores de las Tablas 3.2 y 3.1 para $\beta = 53.1°$). Como consecuencia directa, la relación de dualidad $L/C = Z_0^2/4$ no se

satisface y, de acuerdo a la fórmula (3.3), $\omega_{cx} < \omega_{cy}$ lo cual significa que las curvas de $|r_x|$ y $|t_x|$ se cruzan a una frecuencia más baja a la que las otras dos curvas $|r_y|$ y $|t_y|$ lo hace. Además, en concordancia con (3.2), $r_x \neq -t_y$ y $r_y \neq -t_x$ como se puede ver en la Figura 3.5 (a). Aún así, existe una frecuencia para la cual $|r_x| = |r_y| > 1/\sqrt{2}$ y simultáneamente $|t_x| = |t_y| < 1/\sqrt{2}$. Sin embargo, la diferencia de fase $\arg(r_y) - \arg(r_x)$ y $\arg(t_y) - \arg(t_x)$ no son constantes y difieren de $\pm 90°$ a la frecuencia de corte. De hecho, a la frecuencia de corte, las diferencias de fase son cerca de 106° entre las transmisiones y $-73°$ entre las reflexiones. Por lo tanto, la razón axial no alcanza 0 dB para un ángulo de polarización de la onda incidente de $\alpha = 45°$, como se puede observar en la Figura 3.5 (a), pero se mantiene por encima de 2.73 dB para la reflexión y 2.56 dB para la transmisión. En otras palabras, una onda linealmente polarizada no será transformada en una onda polarizada circularmente sino en una elíptica.

Con el fin de obtener nuevamente la capacidad de conversión de polarización lineal a circular, es necesario recobrar la relación de dualidad $L/C = Z_0^2/4$. Para compensar el incremento mencionado en la capacitancia debido a la presencia del sustrato dieléctrico, la geometría de la celda unitaria debe ser ajustada. Mediante la reducción del ancho de las tiras metálicas, los bordes de los vecinos se separan y la capacitancia C disminuye. Simultáneamente, la inductancia debe aumentar. De esto se deduce que debe haber una geometría compensada para la cual la relación de dualidad es válida nuevamente. A pesar de que la muestra modificada no es geométricamente autocomplementaria, su respuesta bajo ondas polarizadas en x y y todavía pueden ser modeladas desde dos circuitos duales y, así, deberían ser recobradas todas las propiedades esperadas. Un barrido de parámetros llevó a la superficie de zigzag sintonizada en la Figura 3.5 (b). Note que todas las curvas de las magnitudes se cruzan aproximadamente al nivel de $1/\sqrt{2}$ a una única frecuencia cercana a 8.5 GHz. Más aún, a cualquier frecuencia, $|r_x| \approx |t_y|$ y $|r_y| \approx |t_x|$ y los desfases son $\pm 90°$ nuevamente. La Tabla 3.2 sirve para comparar los funcionamientos de las metasuperficies de zigzag autocomplementaria y sintonizada. Note que, para la estructura sintonizada, $RA = 0$ dB y el AB-RA-3dB (51.4 % en reflexión y 52.8 % en transmisión) casi recobra el valor de la metasuperficie de zigzag en conductor eléctrico perfecto sin sustrato.

3.4. Resultados Experimentales

Para verificar los resultados analíticos y numéricos se fabricaron y caracterizaron dos metasuperficies cuadradas, cada una contiene 32×32 celdas unitarias y 192 mm de longitud en cada lado. Las celdas unitarias corresponden a aquellas representadas en las Figuras 3.5 (a) y (b), es decir, para la metasuperficie de zigzag autocomplementaria y sintonizada. Ambas

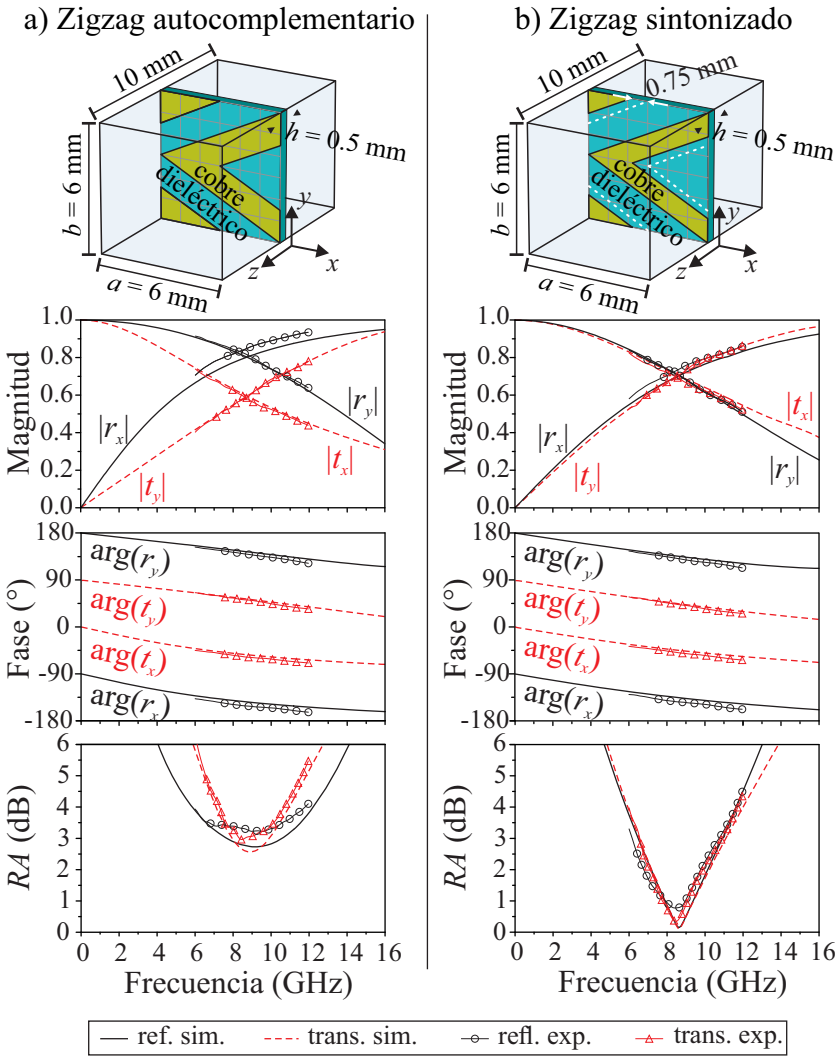

Figura 3.5: Coeficientes de transmisión y reflexión de una metasuperficie de zigzag autocomplementaria (a) y de un zigzag sintonizado. En ambos casos la superficie fue grabada en una lámina de cobre sobre un sustrato dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon_r = 3.38(1 - \text{j}0.0025)$. Las gráficas muestran magnitud y fase de los coeficientes de transmisión y reflexión tanto como la razón axial (RA). Cada gráfica contiene resultados simulados (líneas solidas sin símbolos) y experimentales (líneas solidas con símbolos).

muestras fueron grabadas en un sustrato de ARLON 25N con espesor $h = 0.508$ mm, permitividad relativa $\epsilon_r = 3.38(1 - \text{j}0.0025)$, y cubierta por una película de cobre de 18 μm de espesor. Como se esquematiza en la Figura 3.6 (a), las mediciones fueron realizadas en una cámara anecoica donde la muestra fue localizada entre dos antenas de bocina-TEM de

Tabla 3.2: Comparación entre las metasuperficies simuladas de la Figura 3.5.

Estructura	$RA_{\min}$(dB)	$\frac{(\Delta f)_{\text{3dB-AR}}}{f_{\text{min-AR}}}$ (%)	$\frac{L}{10^{-9}\text{H}}$	$\frac{C}{10^{-14}\text{C}}$
Zigzag	2.73 (ref.)	31.9 (ref.)	2.19	12.4
autocomplementario	2.56 (tra.)	22.0 (tra.)		
Zigzag	0.15 (ref.)	51.4 (ref.)	3.02	9.23
sintonizado	0.09 (tra.)	52.8 (tra.)		

banda ancha en campo lejano. Las antenas fueron conectadas por medio de un cable coaxial calibrado a dos puertos de 50Ω de un analizador de redes vectorial (ARV) Angilent E8362C. La distancia desde la muestra a cada una de las antenas fue 1.6 m. Como se muestra en la Figura 3.6 (b), la muestra se colocó en una ventana cuadrada rodeada de absorbentes con el objetivo de evitar efectos de difracción debido a los bordes. En las Figuras 3.6 (c) y (d) se muestran imágenes magnificadas de las dos muestras manufacturadas. De éstas es posible observar que las desviaciones en las dimensiones respecto a las ideales no superan el 5 %.

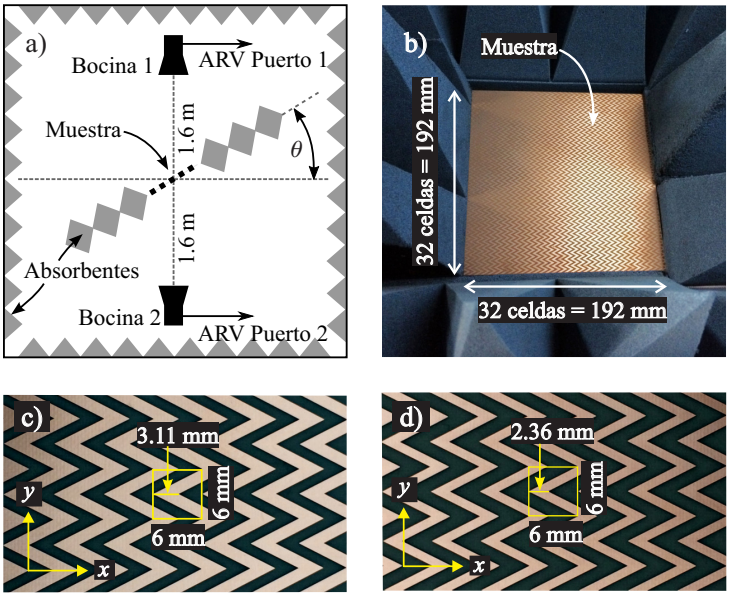

Figura 3.6: Montaje experimental. (a) Bosquejo de la cámara anecoica con la muestra entre las dos antenas de bocina. El ángulo θ^{inc} representa el ángulo de incidencia. (b) Fotografía de la muestras fabricada rodeada de absorbentes de microondas. Metasuperficie fabricada del zigzag (c) autocomplementario y (d) sintonizado.

Los coeficientes de reflexión y transmisión fueron obtenidos por pos-proceso de los S-parámetros complejos medidos por el ARV. Este procedimiento incluye la calibración con los S-parámetros auxiliares correspondientes a la ventana vacía (para las medidas de transmisión) y un plato cuadrado de metal en la ventana remplazando la muestra (para medidas de reflexión). Adicionalmente, se empleó la técnica de filtrado en el dominio del tiempo [67] para suprimir el rizado resultante de las múltiples reflexiones entre la metasuperficie y las antenas de bocina. Los coeficientes de transmisión y reflexión medidos bajo incidencia normal para polarizaciones x y y son comparados con los resultados de simulación en la Figura 3.5.

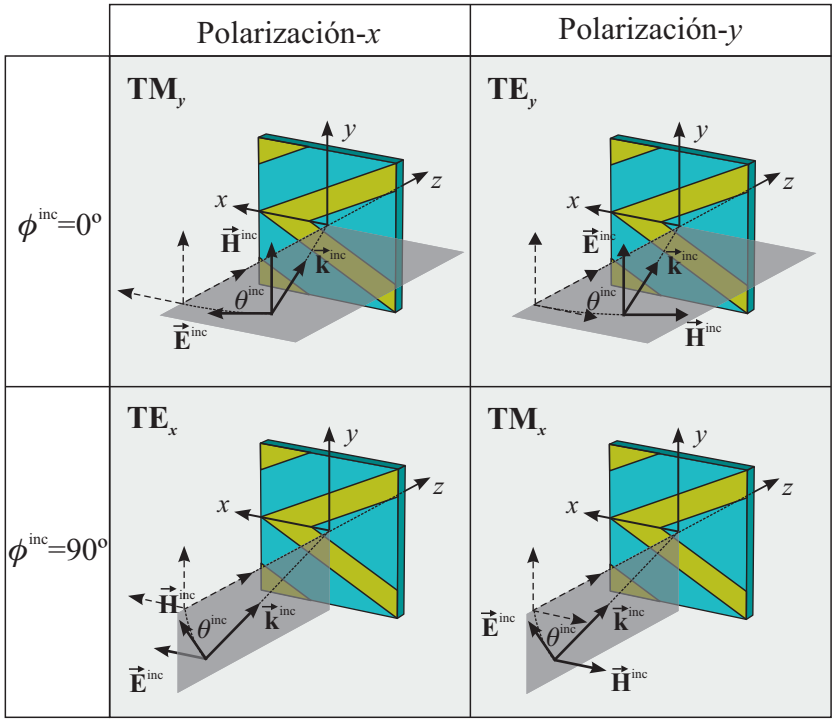

Figura 3.7: Diferentes planos de incidencia y estados de polarización para la incidencia oblicua.

Con el objetivo de estudiar la estabilidad angular de la conversión de polarización lineal a circular, se midieron los coeficientes de transmisión para tres ángulos distintos ($\theta^{inc} = 0°$, 15° y 30°) y dos planos de incidencia ($\phi^{inc} = 0°$ y 90°). Para cada orientación se consideraron el par de estados de polarización ortogonales, TE y TM, como se ilustra en la Figura 3.7.

Similarmente al capítulo anterior, estas pueden ser agrupadas en estados de polarización generalizados x y y con $E_y = 0$ y $E_x = 0$, respectivamente. En realidad, estas suelen ser llamadas TE_x, TE_y, TM_x y TM_y. La magnitud, fase y razón axial (asumiendo $\alpha = 45°$) son presentados en la Figura 3.8 (a) para la metasuperficie de zigzag autocomplementaria y en la Figura 3.8 (b) para la metasuperficie de zigzag sintonizada. Se puede ver que en

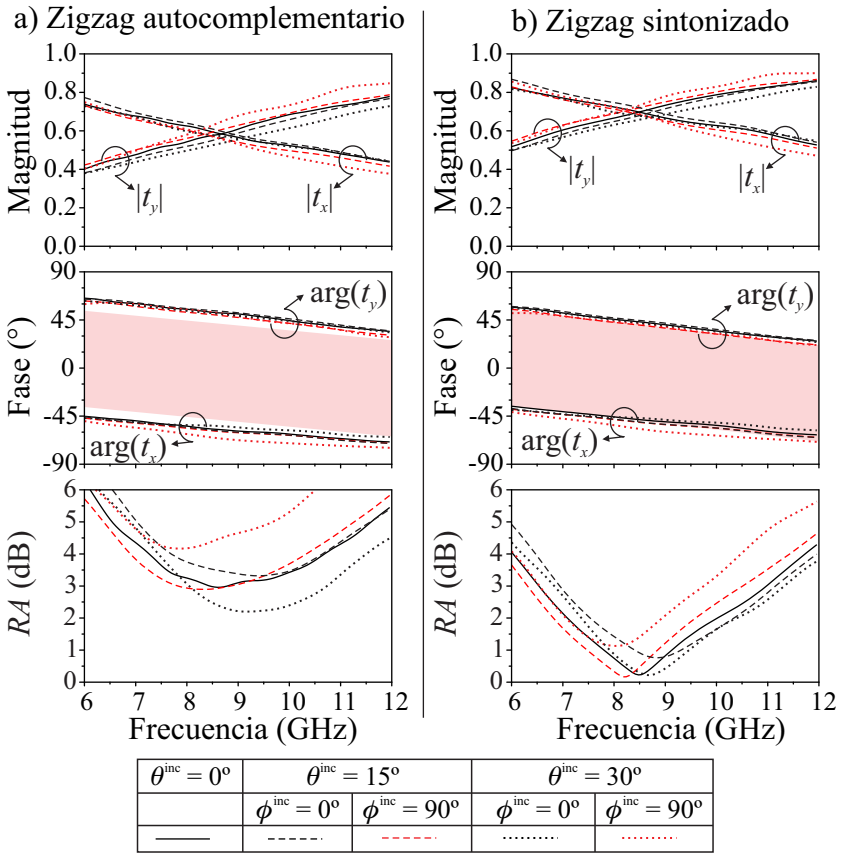

Figura 3.8: Medidas de los coeficientes de transmisión y razones axiales bajo incidencia oblicua para el zaigzag autocomplementario (a) y el zaigzag sintonizado. La zona resaltada en rosa indica un incremento de fase de 90°

la metasuperficie autocomplementaria las curvas de magnitud correspondientes a un ángulo de incidencia dado se cruzan a un nivel cercano a 0.6 (por debajo del $1/\sqrt{2} \approx 0.7$ esperado). En contraste, el nivel de cruce para la estructura sintonizada es aproximadamente igual $1/\sqrt{2}$. Además, la diferencia de fase entre los coeficientes de transmisión para polarizaciones ortogonales es casi independiente de la frecuencia entre 6 a 12 GHz y estable con el cambio del ángulo de incidencia. Es notable que las diferencias de fase son cercanas a $\pm 90°$ en la metasuperficie de zigzag sintonizada mientras que es más grande para la metasuperficie autocomplementaria. Por lo tanto, la sintonización realizada en la geometría de hecho compensa los efectos del sustrato dieléctrico. Finalmente, el zigzag sintonizado muestra una mejor conversión de polarización lineal a circular que la autocomplementaria. Este hecho es claramente ilustrado en la razón axial de las Figuras 3.8 (a) y (b). De estas gráficas es posible concluir que el AB-RA-3dB está siempre por encima del 40 % e igual al 53 % para incidencia normal.

4 Metasuperficies para Filtrado Angular

Los filtros angulares, como su nombre indica, son dispositivos que permiten el paso o rechazo de la radiación electromagnética en función del ángulo. Los dispositivos para filtrado angular son usualmente utilizados para suprimir los lóbulos secundarios radiados, enfocando el haz principal, lo cual evita las interferencias con dispositivos sensibles y oculta en mayor medida la fuente de radiación.

Algunas de las primeras propuestas en esta línea consisten en secciones de cuarto de longitud de onda de dieléctrico, espaciados con aire de media o una longitud de onda de espesor [21–23]. En propuestas posteriores, se sustituyen los dieléctricos por pantallas de metal perforadas o cavidades de Fraby-Perot separadas por rejillas metálicas [24–29]. En la última década se han propuesto materiales con bandas electromagnéticas prohibidas, en las cuales, el cambio del ángulo de incidencia es equivalente a una variación de la longitud de onda y en caso de caer en la banda prohibida, no se permite la transmisión [30, 31].

Entre otras propuestas, Ortiz *et al.* [69] utilizó una cadena de anillos resonantes acoplados (EC-SRRs por sus siglas en inglés "*edge coupled split ring resonators*") y su complementario (EC-CSRR's) para diseñar una metasuperficie que presenta la propiedad de filtrado en ángulo y frecuencia. El avance más significativo de este dispositivo, en comparación a los que se habían diseñado hasta el momento, es que tiene espesor ideal nulo y tamaño eléctrico pequeño para la longitud de onda de trabajo. En este capítulo se proponen dos diseños de metasuperficies con la propiedad de filtrado angular, una de ellas con base al trabajo de Ortiz *et al.* en [69] y la otra metasuperficie inspirada en la idea de resonadores extendidos [33].

4.1. Modelos para Filtros Angulares

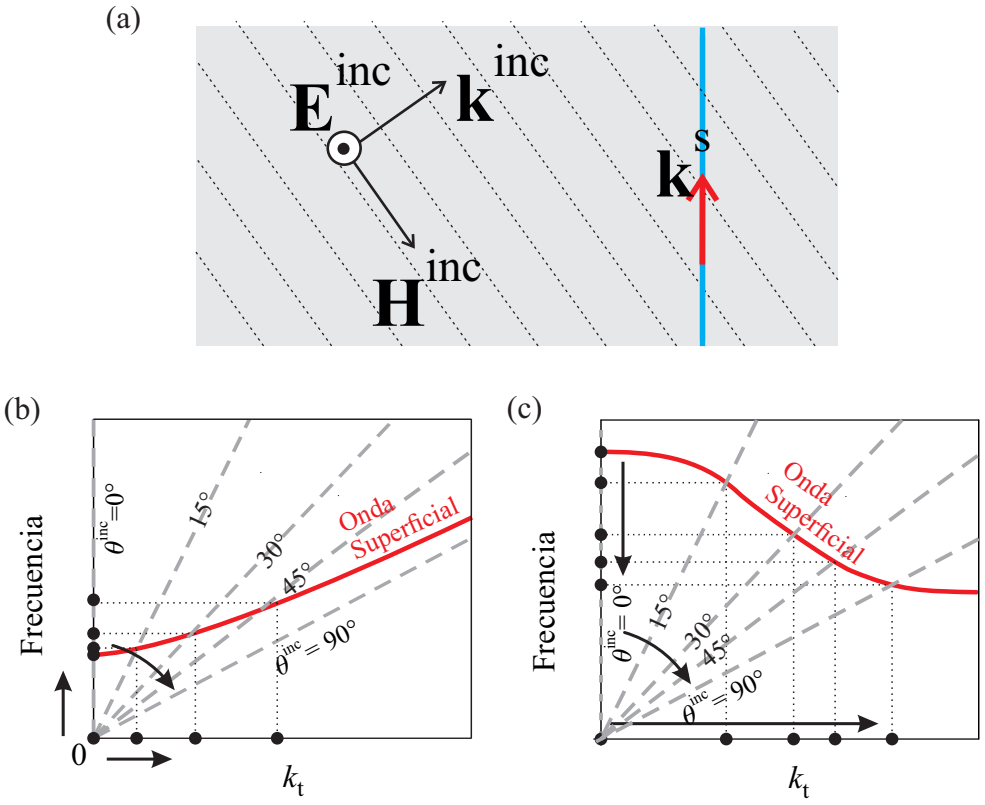

Figura 4.1: Diagrama de la onda plana incidente y el vector de onda de la onda superficial. (a) Proyección de la relación de dispersión sobre la superficie de la onda plana que se propaga en espacio libre (líneas grises), y la relación de dispersión del modo superficial (línea roja) para el caso que es creciente (b) y decreciente (c).

Considere una superficie con un modo superficial de oscilación propio caracterizado por la relación de dispersión $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}(f)$, donde el subíndice t representa la proyección tangencial a la superficie y f es la frecuencia. Ya que el modo propio está restringido a la superficie, el vector de onda $\vec{k}^{\mathrm{s}}(f)$ es, por definición, tangencial. Ahora, supóngase que una onda plana incide sobre la superficie con un cierto ángulo θ^{inc}, como se ilustra en la Figura 4.1 (a), de modo que el vector de onda de la onda externa posee una componente tangencial dada por $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} = k^{\mathrm{inc}} \sin(\theta^{\mathrm{inc}})$. Como es conocido, si la onda externa se acopla con el modo propio de la superficie, entonces se produce una resonancia ya sea una banda de paso o rechazo, además, en el acoplamiento la onda superficial es un modo propagativo. Cabe mencionar que para cualquier $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}}$ y f^{inc}, la onda superficial tendrá $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}}$ y $f^{\mathrm{s}} = f^{\mathrm{inc}}$, sin embargo, esta onda no es un modo propagativo sino evanescente. Lógicamente para excitar el modo superficial

se requiere que el campo externo tenga la forma idónea, que en muchos casos una onda plana no es adecuada, sin embargo, este capítulo se restringe a estos casos.

La relación de dispersión de un modo superficial, en general puede ser creciente o decreciente como se ilustra en la Figura 4.1 (b) y (c). En esta misma figura, las líneas en gris corresponden a la proyección de la relación de dispersión de la onda externa sobre la superficie ($k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} = 2\pi f \sin(\theta^{\mathrm{inc}})/c$). Suponiendo que el campo externo puede excitar al modo propio, entonces para cada ángulo de incidencia la resonancia ocurrirá en el corte con la relación de dispersión de la onda superficial.

Con las relaciones de dispersión ilustradas es evidente que al cambiar el ángulo de incidencia, la frecuencia de resonancia cambia, lo cual implica que el pico de la banda de paso (o rechazo según el tipo de dispersor) se desplaza. Con el objetivo de obtener una mejor imagen del fenómeno, considere una onda externa que incide sobre la superficie con una frecuencia f que puede excitar el modo para un ángulo de incidencia θ^{inc}. Por consiguiente, para este ángulo y frecuencia aparecerá el pico de resonancia correspondiente a la banda de paso (rechazo). Sin embargo, al cambiar el ángulo de incidencia, con la frecuencia fija f, se destruye el acople con el modo superficial y por tanto la onda comienza gradualmente a ser reflejada (transmitida), pues para este nuevo ángulo hay una nueva frecuencia de resonancia.

En la Figura 4.2 (a) se muestra un ejemplo de las curvas de transmisión en función de la frecuencia, en un sistema con bandas de paso a las frecuencias de resonancia f_{i}, cada una correspondiente al ángulo de incidencia θ_{i}. Ahora, fijando la frecuencia en una resonancia (f_{i}) y obteniendo el perfil de la transmisión en función del ángulo se obtiene la Figura 4.2 (b). Esta figura es la que representa la calidad del filtrado angular ya que muestra la porción del campo incidente que se transmite a una frecuencia específica, para diferentes ángulos. De la Figura 4.2 (a) y (b) se obtiene que si se desea un filtro angular muy selectivo, entonces las frecuencias de resonancia asociadas a los ángulos θ_{i} deben alejarse, como se ilustra en la Figura 4.2 (c) y (d). Sin embargo, no se trata únicamente de distanciar las f_{i}, pues si el ancho de banda de cada curva es grande (en las curvas $|t|$ vs $|f|$), entonces la selectividad angular seguirá siendo baja. Por las razones anteriores es lógico que se desee que la relación de dispersión asociada a la onda superficial tenga pendiente grande (en valor absoluto), ya que de este modo las frecuencias de resonancia asociadas a dos ángulos adyacentes estarán más distanciadas y por lo tanto el filtrado en ángulo es más selectivo.

A continuación, se desarrolla una breve descripción del modelo de línea de transmisión con el fin de describir las relaciones de dispersión de los sistemas a tratar. No es sencillo realizar un modelo de circuito para todos los tipo de superficies periódicas, pues cada celda unitaria

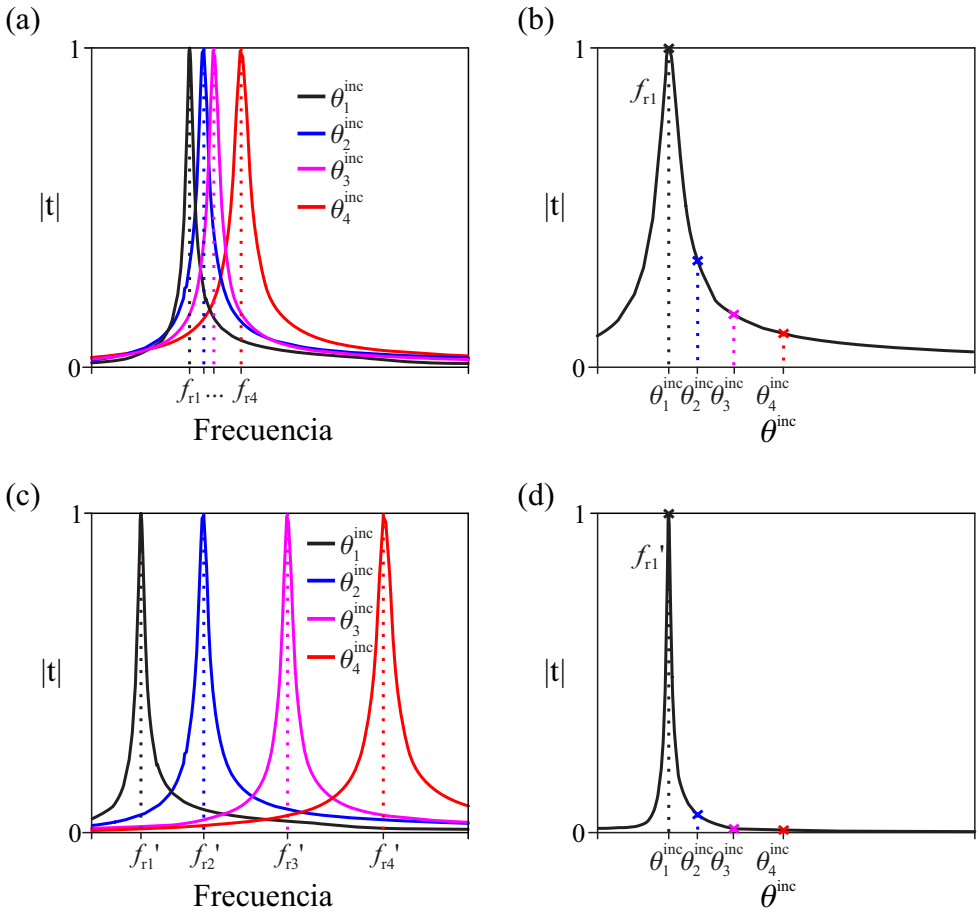

Figura 4.2: (a) Curvas del módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (θ_i), con sus respectivas frecuencias de resonancia asociadas (f_{ri}). (b) Perfil de la transmisión en función del ángulo de incidencia para la frecuencia fija f_{r1}. (c) Curvas del módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (θ_i), con sus respectivas frecuencias de resonancia asociadas (f'_{ri}). (d) Perfil de la transmisión en función del ángulo de incidencia para la frecuencia fija f'_{r1}.

tiene sus particularidades y en algunos casos resulta prácticamente imposible encontrar un circuito equivalente. En los casos que trataremos a continuación, las celdas pueden modelarse de manera relativamente sencilla con la particularidad que pueden reducirse al modelo de línea de transmisión convencional.

4.1.1. Modelo de Línea de Transmisión

En la Figura 4.3 (a) se muestra la línea de transmisión más básica, que consta de dos hilos conductores, con longitud Δx, inmersos en algún medio dieléctrico. Entre los hilos se impone una diferencia de potencial $v(x,t)$, y se induce una corriente $i(x,t)$. Es conocido que este sistema puede ser descrito por el modelo de circuito de la Figura 4.3 (b), donde L representa la inductancia total del sistema, es decir, la autoinductancia de cada hilo y la inductancia mutua. La resistencia R en serie con el inductor se debe las pérdidas puesto que el conductor es real. C es el condensador generado por la proximidad de los hilos cargados y G es la conductancia debido a las pérdidas dieléctricas del medio en que están inmersos los hilos [39, 70].

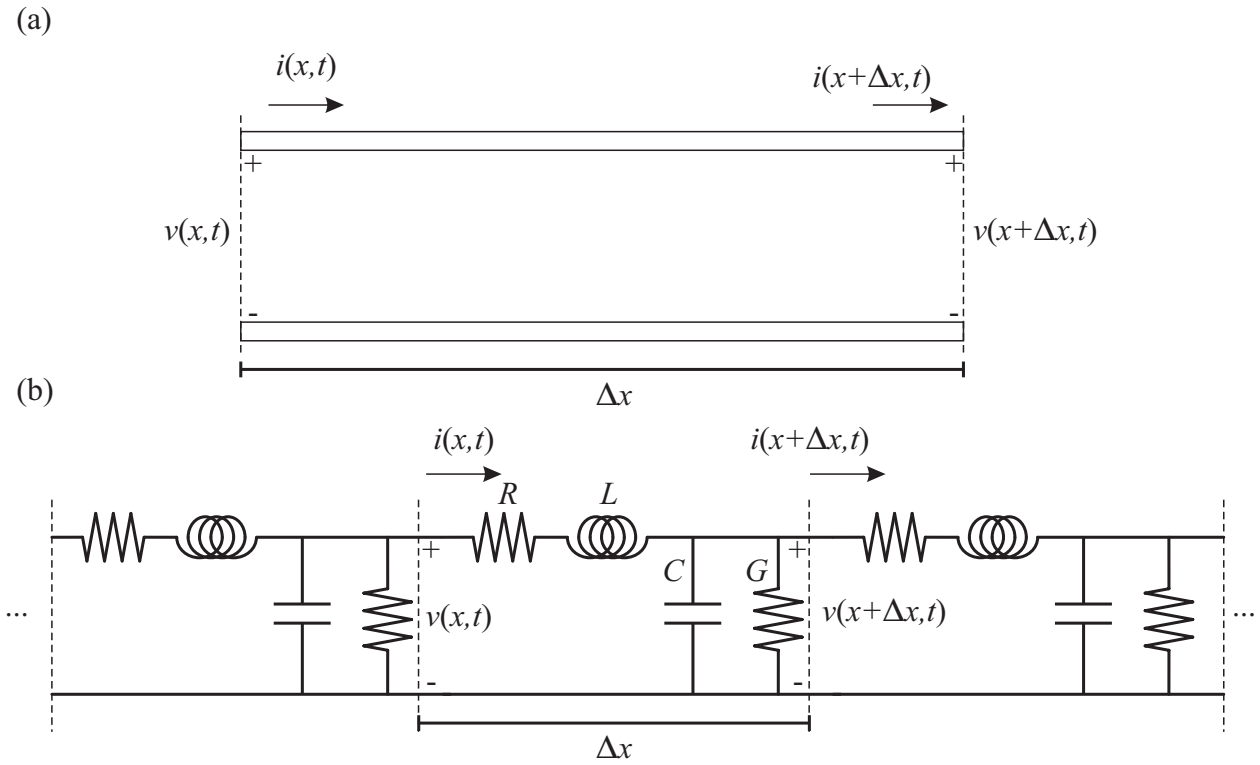

Figura 4.3: (a) Línea de transmisión y (b) el modelo de circuito asociado a ésta.

Aplicando la ley de los voltajes de Kirchhoff al circuito de la Figura 4.3 (b) se obtiene

$$v(x,t) - Ri(x,t) - L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - v(x+\Delta x,t) = 0, \tag{4.1}$$

y de la ley de nodos

$$i(x,t) - Gv(x+\Delta x,t) - C\frac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t} - i(x+\Delta x,t) = 0. \tag{4.2}$$

Dividiendo (4.1) y (4.2) por Δx y tomando el límite cuando tiende a cero, se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -\overline{R} i(x,t) - \overline{L}\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -\overline{G} v(x,t) - \overline{C}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $\overline{A} = A/\Delta x$ representa las cantidades por unidad de longitud. Tomando la solución de la forma $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ en las corrientes y voltajes, donde ω es la frecuencia angular y t es el tiempo, las dos relaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -\left(\overline{R} - \mathrm{i}\omega\overline{L}\right) I(x), \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} &= -\left(\overline{G} - \mathrm{i}\omega\overline{C}\right) V(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

El par de ecuaciones diferenciales en (4.4) se conocen como las ecuaciones del telegrafista o de la línea. Combinando las dos ecuaciones anteriores, derivando una de ellas y sustituyéndola en la otra, se obtienen las ecuaciones de onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0, \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde

$$\gamma = \alpha - ik = \sqrt{(\overline{R} - \mathrm{i}\omega\overline{L})(\overline{G} - \mathrm{i}\omega\overline{C})} \tag{4.6}$$

se conoce como la constante de propagación compleja. El número α describe la atenuación de la onda a lo largo de la línea, mientras que k describe el desfase temporal debido a la longitud de la línea y es la que usualmente en física se nombra como el vector de onda, con la salvedad que en este caso hay un único sentido de propagación. La solución de onda viajera para (4.5) da como resultado

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{\gamma x}, \\ I(x) &= I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{\gamma x}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $e^{-\gamma x}$ representa una onda que se propaga en dirección $+x$, mientras que $e^{\gamma x}$ representa la propagación en dirección $-x$. Al derivar la ecuación del voltaje en (4.7) y comparando con la primera relación de (4.4):

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}\left(V_0^+ e^{-\gamma x} - V_0^- e^{\gamma x}\right), \tag{4.8}$$

Con Z_0 definida como la impedancia característica cuyo valor es

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\overline{R} - \mathrm{i}\omega\overline{L}}{\overline{G} - \mathrm{i}\omega\overline{C}}}. \tag{4.9}$$

Volviendo al dominio del tiempo, el voltaje se puede escribir como

$$V(x) = |V_0^+| \cos(\omega t - kx + \phi^+) e^{-\alpha x} + |V_0^-| \cos(\omega t - kx + \phi^-) e^{\alpha x}, \tag{4.10}$$

Donde la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/k$ y la velocidad de grupo se define como

$$v_\mathrm{g} = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \tag{4.11}$$

Nótese que en ausencia de pérdidas la constante de propagación compleja es

$$\gamma = \alpha - \mathrm{i}k = -\mathrm{i}\omega\sqrt{\overline{L}\ \overline{C}} \tag{4.12}$$

Y por último, la impedancia característica es $Z_0 = \sqrt{\overline{L}/\overline{C}}$. Con base en lo desarrollado, veremos a continuación algunos modelos de circuitos para describir unos cuantos tipos de filtros angulares.

4.1.2. Modelos de Circuito para Filtros Angulares

Como se vio al inicio de esta sección, para tener una superficie con la propiedad de filtrado angular la condición suficiente es que ésta soporte un modo superficial, caracterizado por la relación de dispersión que debe ser creciente o decreciente. Adicionalmente, este modo superficial debe acoplarse con una onda externa. La suposición que la onda incidente es una onda plana no es estricta, el campo incidente puede tener cualquier forma, sin embargo, en muchos casos estos modos son muy complejos por lo cual es preferible restringirse al caso más sencillo. En la Figura 4.4 se muestran algunos circuitos que representan una sección infinitesimal de una linea de transmisión no convencional, sin pérdidas, y como veremos dan como resultado relaciones de dispersión que pueden ser interesantes para el diseño de filtros angulares. Con el fin de facilitar el análisis de estas líneas, se reducirá cada una a la línea convencional mostrada en la Figura 4.3 (b), que en el caso sin pérdidas simplemente consta del inductor y el condensador.

Como es conocido, a partir de la teoría de circuitos convencional es posible ver un condensador (inductor) real como un inductor (condensador) efectivo, negativo, y además dependiente

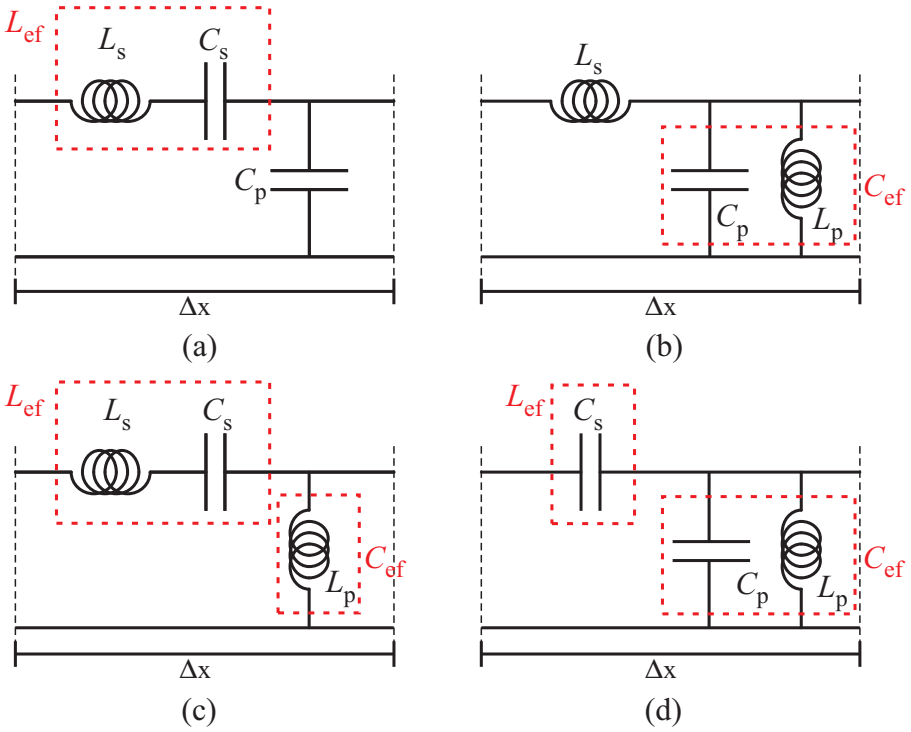

Figura 4.4: Secciones de líneas de transmisión sin pérdidas no convencionales que sirven para modelar filtros angulares. En cada una de las secciones de línea se ha cambiado el inductor o el condensador de la Figura 4.3 (b) por otro(s) elemento(s) de circuito. Las líneas en rojo representan el elemento efectivo por el cual se sustituirán los elementos encerrados para poder utilizar el modelo de líneas de transmisión convencionales.

de la frecuencia. Lo importante es conservar el comportamiento del circuito, lo cual requiere que la impedancia asociada a cada elemento permanezca invariante.

Estableciendo un paralelo entre los circuitos de la Figura 4.4 (a) y la Figura 4.3 (b) se observa que en términos de elementos circuitales, para que los dos sistemas sean iguales se debe sustituir la impedancia resultante del inductor, L_s, y el condensador, C_s, por un único inductor efectivo, L_{ef}. Como la impedancia asociada a la sección del circuito que se va a sustituir debe preservarse en el sistema efectivo y en el original, entonces su valor es

$$Z_s = -i\omega L_{ef} = -i\omega L_s + \frac{i}{\omega C_s}. \tag{4.13}$$

Que al despejar la inductancia efectiva da como resultado

$$L_{ef} = L_s\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right), \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}, \tag{4.14}$$

donde ω_s es una frecuencia característica cuyo significado explicaremos más abajo. Por otra parte, el condensador efectivo es igual al condensador C_p en el circuito. Con estos valores, al sustituir el inductor y el condensador en la constante de propagación compleja de la relación (4.12) se obtiene

$$\gamma = \alpha - ik = -i\sqrt{\overline{L}_s\overline{C}_p\,(\omega^2 - \omega_s^2)}. \tag{4.15}$$

Nótese que en el caso $\omega < \omega_s$ el modo es evanescente, lo cual no es de nuestro interés porque buscamos los modos propios de la superficie. En cambio, en el rango de frecuencias $\omega > \omega_s$ la onda es propagativa y el valor del vector de onda es $k = (\overline{L}_s\overline{C}_p\,(\omega^2 - \omega_s^2))^{1/2}$. A partir de la definición de la velocidad de grupo en la relación (4.11) se obtiene que

$$v_g = \frac{k}{\overline{L}_s\overline{C}_p\sqrt{\frac{k^2}{\overline{L}_s\overline{C}_p} + \omega_s^2}}, \tag{4.16}$$

la cual es positiva y por lo tanto la relación de dispersión es creciente, correspondiendo con el caso de la Figura 4.1 (b). Nótese que la velocidad de grupo siempre es diferente de cero, excepto en el origen, por lo cual en el borde de la zona de Brillouin la relación de dispersión no llega con pendiente cero [65]. Ésto se debe a que el modelo es válido para $k\Delta x \to 0$, que es de donde son válidas las relaciones derivadas del modelo de línea de transmisión.

Mediante un procedimiento similar se puede resolver cada uno de los circuitos en consideración. Para el circuito de la Figura 4.4 (b) se obtiene

$$C_{ef} = C_p\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad L_{ef} = L_s, \tag{4.17}$$

$$\gamma = -i\sqrt{\overline{L}_s\overline{C}_p\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)}, \quad \omega_p = 1/\sqrt{L_pC_p}. \tag{4.18}$$

Como consecuencia de estas relaciones, la línea de transmisión propaga la onda para $\omega > \omega_p$. En este rango se obtiene que la velocidad de grupo es

$$v_g = \frac{k}{\overline{L}_s\overline{C}_p\sqrt{\frac{k^2}{\overline{L}_s\overline{C}_p} + \omega_p^2}}, \tag{4.19}$$

que resulta idéntica en su forma funcional a la velocidad de grupo del primer circuito, por lo tanto en este caso también se tiene una relación de dispersión creciente como la descrita en la Figura 4.1 (b). Para el circuito de la Figura 4.4 (c):

$$C_{ef} = -\frac{1}{\omega^2 L_p}, \quad L_{ef} = L_s\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right), \tag{4.20}$$

$$\gamma = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\overline{L}_\mathrm{s}}{\Delta x^2 \overline{L}_\mathrm{p}}\left(\frac{\omega_\mathrm{s}^2}{\omega^2}-1\right)}. \tag{4.21}$$

En este caso, la línea de transmisión propaga cuando $\omega < \omega_\mathrm{s}$, caso contrario a los primeros modelos desarrollados. Además, en este rango de frecuencias la velocidad de grupo es

$$v_\mathrm{g} = -\frac{\overline{L}_p}{\overline{L}_s}\frac{\omega_s k \Delta x^2}{\left(1+k^2\Delta x^2 \overline{L}_p/\overline{L}_s\right)^{-3/2}}. \tag{4.22}$$

La cual es negativa en el dominio de los valores de k. Este resultado conduce a que la relación de dispersión es decreciente tal y como se ilustra cualitativamente en la Figura 4.1 (c). Por último, para el circuito de la Figura 4.4 (d):

$$C_\mathrm{ef} = C_\mathrm{p}\left(1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right), \quad L_\mathrm{ef} = -\frac{1}{\omega^2 C_\mathrm{s}}. \tag{4.23}$$

$$\gamma = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\overline{C}_\mathrm{p}}{\Delta x^2 \overline{C}_\mathrm{s}}\left(\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}-1\right)}. \tag{4.24}$$

Que al igual del caso anterior, este circuito es propagativo cuando $\omega < \omega_\mathrm{p}$ y la velocidad de grupo es

$$v_\mathrm{g} = -\frac{\overline{C}_s}{\overline{C}_p}\frac{\omega_p k \Delta x^2}{\left(1+k^2\Delta x^2 \overline{C}_s/\overline{C}_p\right)^{-3/2}}, \tag{4.25}$$

que al igual al caso anterior es negativa y por lo tanto la relación de dispersión es decreciente. En resumen, se obtuvo que las relaciones de dispersión asociadas a los circuitos de las figura 4.4 (a) y (b) son crecientes, mientras que las asociadas a los circuitos de las figura 4.4 (c) y (d) son decrecientes. A continuación, se plantean dos ejemplos de filtros angulares, uno de ellos asociados a una relación de dispersión creciente mientras el otro a una decreciente.

4.2. Filtro Angular de Anillos Resonantes

En términos de los parámetros de dispersión se pueden identificar dos tipos de filtros angulares, los de bandas de paso y bandas rechazo. En el trabajo de Ortiz et. al. [69] se propone una metasuperficie como filtro de banda de rechazo, geométricamente inspirado en la partícula resonante conocida como EC-SRR (también conocidos como anillos de Pendry), ilustrada en la Figura 4.5 (a). Según la disposición de la celda unitaria en la figura anterior, únicamente interesa la resonancia excitada por una onda plana con el campo eléctrico a lo largo del eje y, debido a que es la resonancia con la frecuencia más baja, por lo que el proceso de

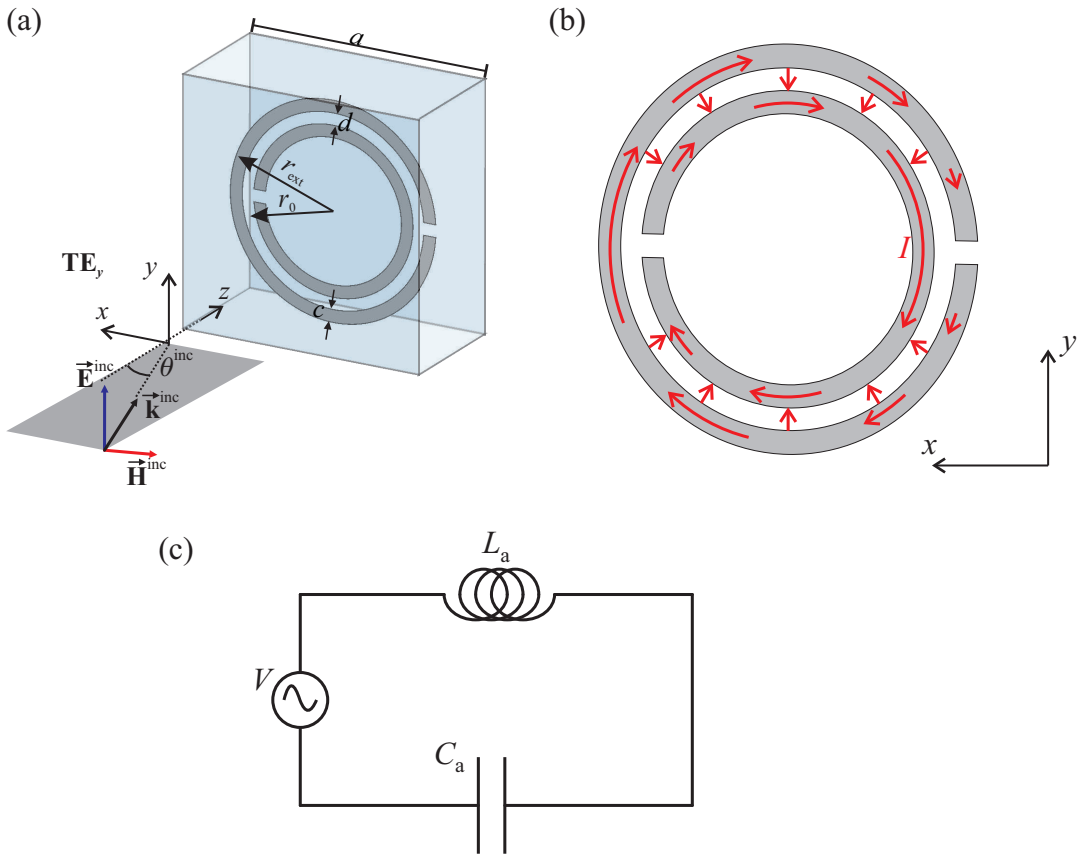

Figura 4.5: (a) Celda unitaria de una superficie compuesta por EC-SRRs. El campo incidente está polarizzado en el modo TE$_y$ (b) Distribución de corrientes sobre el anillo con el campo incidente descrito en (a). (c) Modelo de circuito del EC-SRR. La fuente V representa a la excitación debida al campo externo.

homogeneización tiene mayor validez. La distribución de las corrientes eléctricas se muestra cualitativamente en la Figura 4.5 (b). Este resonador ha sido ampliamente estudiado y se ha encontrado que su comportamiento puede ser descrito sencillamente por un circuito LC [44], el cual es ilustrado en la Figura 4.5 (c). En este modelo el valor del inductor efectivo, L_a, es el correspondiente a la inductancia de un anillo con radio igual al radio medio de los anillos del EC-SRR, r_0. Por otra parte, para el cálculo del condensador efectivo, C_a, se debe tener en cuenta que hay dos condensadores conectados en serie, cada uno asociado al de dos tiras paralelas coplanares de longitud πr_0 [44, 71]. Con el fin de construir el filtro angular propuesto en la referencia [69] se hacen cortes sobre el anillo exterior e interior del EC-SRR, a su vez, mediante pistas de conductor se conecta el anillo interno de una celda con el anillo externo de la celda vecina, tal como se ilustra en la Figura 4.6 (a). Cabe mencionar que la celda unitaria tiene condiciones periódicas en las direcciones x y y, mientras que en z hay una única capa. Además, las conexiones entre las partículas tiene como consecuencia que

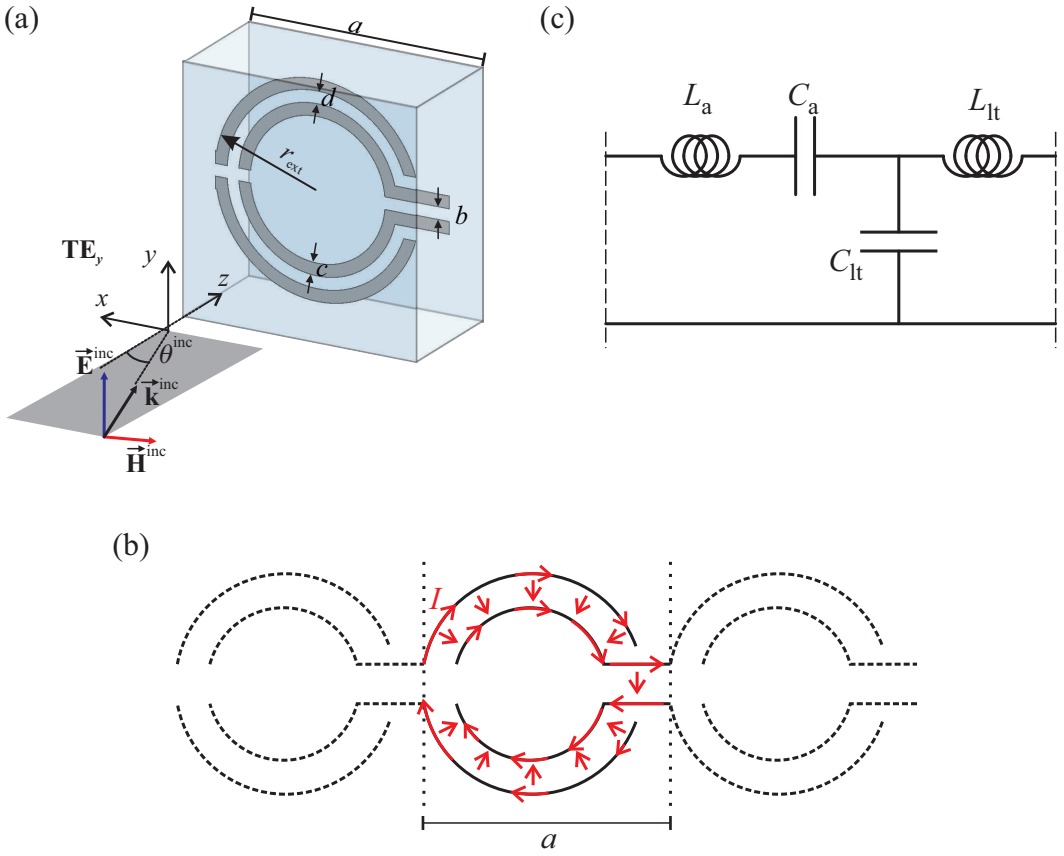

Figura 4.6: (a) Celda unitaria del filtro angular hecho con EC-SRRs conectados. En direcciones x y y hay condiciones periódicas (b) Sección de la línea de transmisión que describe a la celda unitaria con la polarización del campo mostrado en (a). (c) Distribución de la corriente en el EC-SRR conectado.

cada circuito equivalente asociado a la celda unitaria debe estar igualmente comunicado con sus dos vecinas.

En la Figura 4.6 (b) se muestra un diagrama de las corrientes eléctricas en una sección de una cadena de EC-SRRs conectados. Si los cortes sobre cada anillo del EC-SRR son pequeños, es posible afirmar que los elementos del circuito efectivo, L_{a} y C_{a}, no cambian apreciablemente respecto al caso original. Sin embargo, las tiras paralelas que conectan las celdas unitarias introducen un condensador, C_{lt}, y un inductor, L_{lt}, de modo que el circuito equivalente de la celda unitaria se puede aproximar al que se muestra en la Figura 4.6 (c). Para efectos del cálculo numérico, la inductancia y la capacitancia se pueden obtener con buen grado de aproximación como

$$L_{\mathrm{lt}} = \overline{L}_{lt} l = \mu_0 \frac{K(\kappa)}{K'(\kappa)} l, \tag{4.26}$$

$$C_{\mathrm{lt}} = \overline{C}_{\mathrm{lt}} l = \epsilon_0 \frac{K(\kappa)}{K'(\kappa)} \left[1 + \frac{\epsilon - 1}{2} \frac{K'(\kappa)}{K(\kappa)} \frac{K(\kappa_1)}{K'(\kappa_1)} \right] l, \tag{4.27}$$

donde l es la longitud de las tiras, $\overline{L}_{\mathrm{lt}}$ y $\overline{C}_{\mathrm{lt}}$ son la inductancia y la capacitancia por unidad de longitud deducidas a partir de la impedancia característica de un sistema de tiras paralelas coplanares infinitas en el modo impar [71]. K es la función elíptica completa de primera clase y K' su complementaria, $\kappa = a_{lt}/b_{lt}$, $\kappa_1 = \sinh(\pi a_{lt}/2h)/\sinh(\pi b_{lt}/2h)$, $a_{\mathrm{lt}} = d/2$ y $b_{\mathrm{lt}} = c + d/2$, donde c y d son el ancho y la separación de las cintas, respectivamente, mientras que h es el espesor del sustrato.

En un trabajo anterior, Beruete *et al.* [72] demostraron que un arreglo periódico de EC-SRRs es estable bajo incidencia oblicua, es decir, los coeficientes de transmisión y reflexión no varían significativamente al cambiar el ángulo de incidencia. Sin embargo, en el sistema conectado la corriente se transmite de una celda a otra, además, al ser cadenas de longitud infinita el modelo de circuito del sistema no puede ser puntual y por lo tanto es necesario modelarlo mediante líneas de transmisión infinitas. Como se observa en la Figura 4.4 (a), esta sección de la línea de transmisión es similar al de la Figura 4.6 (c), a excepción del elemento inductor L_{lt}, no obstante, ambos casos pueden ser considerados el mismo. Lo anterior se debe a que al replicar el circuito periódicamente se observa que el inductor L_{lt} de una celda está conectado en serie con el inductor L_{a} de la celda vecina, por lo cual es posible agrupar a estos dos en uno único y de acá que éste sistema sea equivalente al mostrado en la Figura 4.4 (a).

Como se ha supuesto que sobre la superficie incide una onda plana, entonces se puede suponer que la diferencia de potencial promedio en la celda y la corriente sobre las pistas tienen dependencia sinusoidal. Además, a partir de la teoría de líneas de transmisión se obtiene que la diferencia en la fase entre la corriente o el voltaje entrante y saliente es de $e^{\mathrm{i}k_{\mathrm{t}}a}$. Al desarrollar las ecuaciones de circuito para la celda unitaria, sin tomar el límite de $a \to 0$, los autores de la referencia [69] obtuvieron que la relación de dispersión para la cadena de anillos es

$$\omega^2 = \frac{C_{\mathrm{lt}} + 2C_{\mathrm{a}}\left(1 - \cos(k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} a)\right)}{C_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{lt}}\left(L_{\mathrm{a}} + L_{\mathrm{lt}}\right)}, \tag{4.28}$$

y al tomar el desarrollo para $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} a \to 0$, despejando el vector de onda, esta relación se transforma en

$$k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = \sqrt{\left(\overline{L}_{\mathrm{a}} + \overline{L}_{\mathrm{lt}}\right)\overline{C}_{\mathrm{lt}}\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{s}}^2\right)}, \quad \omega_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\sqrt{C_{\mathrm{a}}\left(L_{\mathrm{a}} + L_{\mathrm{lt}}\right)}}. \tag{4.29}$$

Como era de esperarse, la relación de dispersión coincide con (4.15), lo cual significa que es creciente y la superficie propaga la onda cuando $\omega > \omega_{\mathrm{s}}$. La diferencia más clara entre (4.29) y (4.28) es que la última tiene derivada nula en los bordes de la zona de Brillouin, mientras que la primera tiene derivada nula únicamente en el origen. Lo anterior puede llevar a pensar que (4.28) es válida para cualquier valor de $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} a$, sin embargo, teniendo en cuenta

que el modelo de linea de transmisión supone que el cambio en la fase de la corriente ocurre únicamente en las tiras que conectan los anillos y no a lo largo de los éstos, entonces (4.28) también se restringe a valores de $k_t^s a$ pequeños.

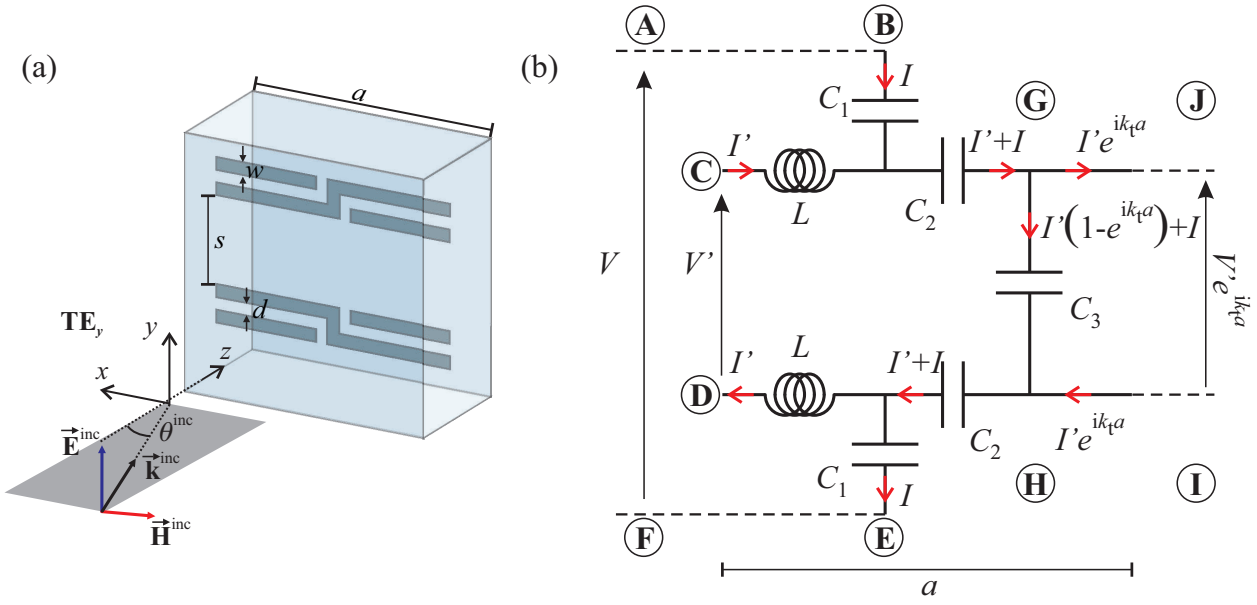

Figura 4.7: (a) Celda unitaria del filtro angular hecho con EC-SRRs rectangulares conectados. En direcciones x y y hay condiciones periódicas, mientras que en dirección z hay una única celda unitaria (b) Sección de la línea de transmisión que describe a la celda unitaria con la polarización del campo mostrado en (a). Este modelo tiene en cuenta la interacción con las celdas que se encuentran por encima y debajo por medio del condensador C_1.

Como se discutió al inicio de este capítulo, para tener un buen filtrado angular es necesario que la pendiente de la relación de dispersión sea lo más grande posible, ya que de esta manera un pequeño cambio en $k_t^s a$ (lo que equivale a un cambio en el ángulo de incidencia) puede implicar un aumento significativo de ω. De (4.28) se obtiene que el valor de la pendiente incrementa a medida que disminuye el valor de C_{lt}, por lo tanto, el valor máximo se obtiene a $C_{lt} = 0$ o, de forma equivalente, cuando los anillos están pegados de modo que $l = 0$ y al tiempo $L_{lt} = 0$. Lógicamente hacer $l = 0$ no es posible con la estructura propuesta porque implica que los anillos se superponen y aparecen algunas interacciones que pueden complicar el análisis. Inspirados en estos factores, se propone la partícula resonante de la Figura 4.7 (a). Como se observa, esta partícula se puede construir con la versión rectangular de la EC-SRR, topológicamente equivalente a la versión circular mostrada en la Figura 4.5 (a), solo que al conectar los anillos se ha reducido la longitud de las tiras de conexión entre las partículas.

En el análisis del filtro angular hecho con cadenas de EC-SRRs circulares se despreció el acoplamiento de una cadena con la cadena superior e inferior. Sin embargo, en este caso, dentro de la celda unitaria, la distancia entre el conjunto de tiras superiores con las tiras inferiores dentro de la misma celda es equiparable a la distancia con las tiras inferiores de la celda superior, por lo cual es necesario incluir dentro del modelo de circuito la interacción con éstas. En la Figura 4.7 (b) se muestra el modelo de circuito de la celda unitaria de la Figura 4.7 (a).

En el circuito de la Figura 4.7 (b), C_1 es el condensador que contiene las interacciones con las primeras vecinas que no pertenecen a la misma cadena, es decir, las celdas unitarias justo por encima y debajo de la celda en cuestión. C_2 es el condensador interno que se forma en el conjunto de tiras superiores o inferiores dentro de la celda, y cumple la función de C_a en las cadenas de EC-SRRs circulares. L es la inductancia efectiva del conjunto de tiras superiores o inferiores, el cual es equivalente a L_a en el sistema de EC-SRRs circulares. C_3 es el condensador que se forma entre el conjunto de tiras superiores e inferiores dentro de la misma celda. I' es la corriente eléctrica que viaja a lo largo de las tiras metálicas y I es la corriente de desplazamiento que comunica a la celda con las primeras vecinas por encima y debajo de ésta. Finalmente, V' es la diferencia de potencial promedio entre el conjunto de tiras superiores e inferiores medidos a la entrada de la celda, mientras que V es la diferencia de potencial promedio de toda la celda. A partir de las soluciones del modelo de líneas de transmisión, en el extremo de esta celda unitaria la corriente y la diferencia de potencial deben tener un desfase de $e^{\mathrm{i}k_\mathrm{t}a}$ respecto al medido en el puerto de entrada. De igual forma, el potencial promedio de la celda y la corriente de desplazamiento que da razón de las interacciones con las vecinas también deben presentar un desfase de $e^{\mathrm{i}k_\mathrm{t}a}$. Aplicando la ley de voltaje a la malla **ABCDEF** se obtiene

$$V = \frac{-2}{\mathrm{i}\omega C_1} I + 2\mathrm{i}\omega L I' + V', \tag{4.30}$$

mientras que en la malla **GHIJ** la ecuación de voltajes es

$$V' e^{\mathrm{i}k_\mathrm{t}^\mathrm{s}a} = \frac{-1}{\mathrm{i}\omega C_3}\left[I'\left(1 - e^{\mathrm{i}k_\mathrm{t}^\mathrm{s}a}\right) + I\right], \tag{4.31}$$

y finalmente para la malla **CGHD** se obtiene

$$V' = -2\mathrm{i}\omega L I' - \frac{2}{\mathrm{i}\omega C_2}\left(I' + I\right) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_3}\left[I'\left(1 - e^{\mathrm{i}k_\mathrm{t}^\mathrm{s}a}\right) + I\right]. \tag{4.32}$$

Buscando la solución a estas ecuaciones que sea diferente a la trivial ($V, I, I', V' \neq 0$), el cálculo permite obtener la relación de dispersión para los modos superficiales del filtro angular hecho con cadenas de EC-SRRs rectangulares:

$$\omega^2 = \frac{2C_3 + C_1 + 2C_2\left(1 - \cos\left(k_\mathrm{t}^\mathrm{s}a\right)\right)}{2LC_3C_2 + 2LC_3C_1 + LC_2C_1}, \tag{4.33}$$

que coincide en la forma funcional de (4.28), lo cual era de esperarse ya que las dos estructuras son topológicamente equivalentes. Además, a partir de las ecuaciones (4.30) a (4.32) se puede obtener la impedancia superficial, puesto que al ser una celda cuadrada, ésta coincide con la impedancia del circuito como se demostró en la sección 1.4. Al solucionar éstas ecuaciones se obtiene que la impedancia superficial es

$$Z_{\mathrm{s}} = -\frac{2}{\mathrm{i}\omega C_1} - \frac{2LC_3\omega^2 - 1 + LC_2\omega^2}{\mathrm{i}\omega\left[\omega^2 LC_2C_3 - C_3 - C_2\left(1 - \cos\left(k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}a\right)\right)\right]}, \tag{4.34}$$

que, como era de esperarse, tiene carácter reactivo pues no hay pérdidas en el sistema. Como se demostró en la sección 1.4, el coeficiente de transmisión de este sistema para incidencia oblicua, con los campos en modo TE_y según la Figura 4.7 (a), es

$$t_y = \frac{2Z_{\mathrm{s}}\left(\theta^{\mathrm{inc}}\right)}{Z_0\left(\theta^{\mathrm{inc}}\right) + Z_{\mathrm{s}}\left(\theta^{\mathrm{inc}}\right)}, \tag{4.35}$$

donde $Z_0(\theta^{\mathrm{inc}})$ es la impedancia característica del vacío para un ángulo de incidencia θ^{inc}. Por otra parte, en la relación (4.34) se sustituye $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = 2\pi(f^{\mathrm{inc}}/c)\sin\left(\theta^{\mathrm{inc}}\right)$, que corresponde al valor de la componente tangencial del vector de onda externo.

4.2.1. Resultados Numéricos para un Filtro Angular de Anillos Resonantes

Con el objetivo de caracterizar el filtro angular construido a partir de la celda unitaria de la Figura 4.7 (a), se utilizó el software comercial *CST Microwave Studio* ®. En la simulación realizada para la obtención de la relación de dispersión se impusieron condiciones periódicas en las direcciones x, y y z. Para este caso, el simulador busca la solución a los modos propios de la estructura para cada variación de $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}a$, el cual impone el desfase entre el inicio y el final de cada celda unitaria. Por otra parte, para la obtención del coeficiente de transmisión para diferentes ángulos de incidencia se impusieron condiciones periódicas en las direcciones x y y, mientras que a lo largo del eje z se colocaron dos puertos de Bloch-Floquet. Desde el puerto emisor se iluminó la estructura con una onda plana polarizada en dirección y y con un ángulo de incidencia θ^{inc}, como se ilustra en la Figura 4.7 (a). Los resultados de estas simulaciones se muestran en la Figura 4.8, los cuales se obtuvieron para la estructura de conductor eléctrico perfecto con los parámetros geométricos $a = 8.0$ mm, $w = d = 0.4$ mm y $s = 1.4$ mm.

La Figura 4.8 (a) muestra la relación de dispersión de la metasuperficie obtenida mediante simulación numérica (línea roja) al igual que las componentes tangenciales de las relaciones

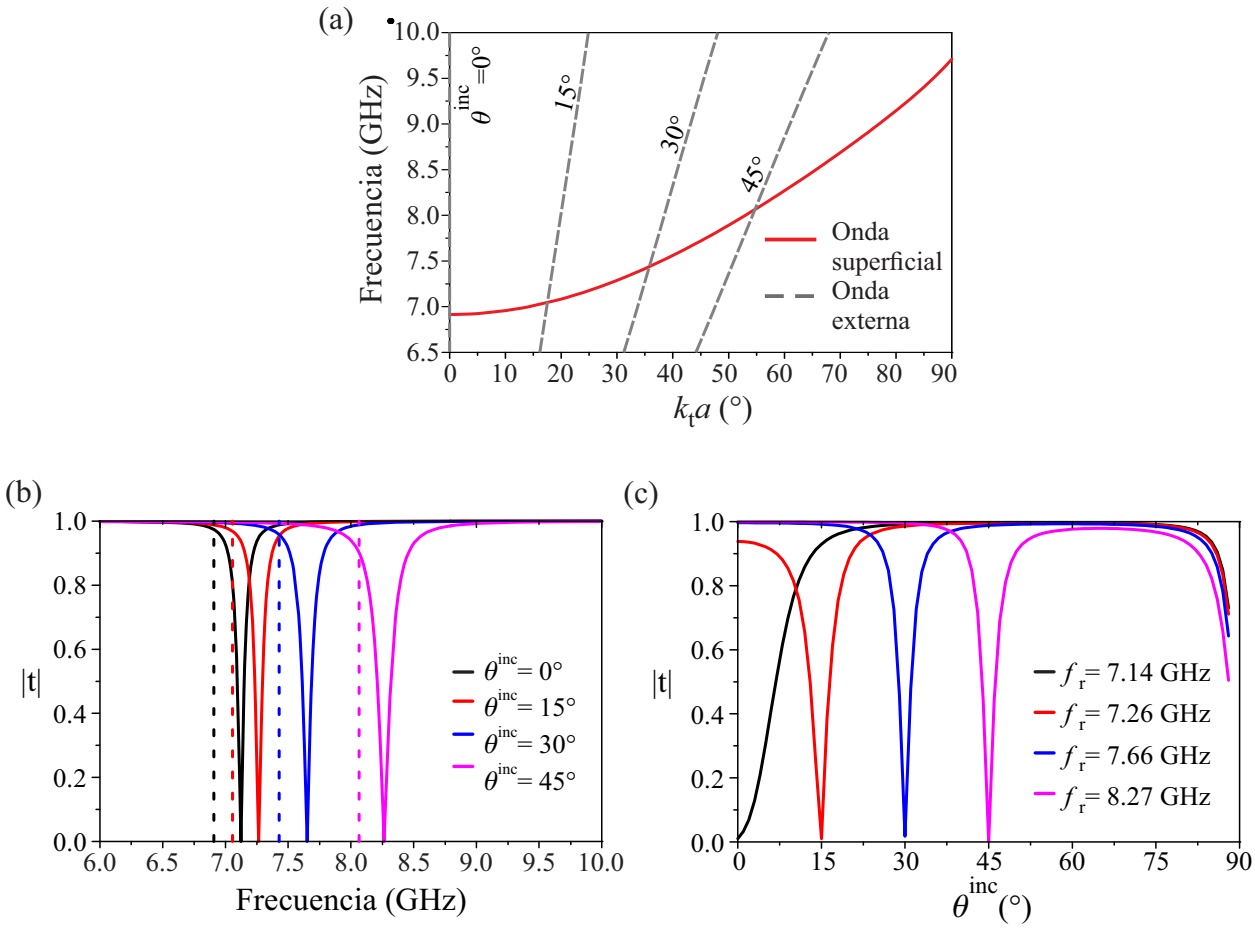

Figura 4.8: (a) En rojo se muestra la relación de dispersión de la onda que se propaga en la superficie del filtro angular hecho con la cadenas de EC-SRRs (Figura 4.7 (a)). Las líneas en gris representan las proyecciones de la relación de dispersión de la onda externa que incide con polarización TE_y y un ángulo θ^{inc}. (b) Módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (líneas sólidas), y frecuencias de resonancia esperadas de las intersecciones entre la relación de dispersión de la onda superficial con las ondas externas. (c) Perfil del módulo de la transmisión en función del ángulo de incidencia para las frecuencias de resonancia de las curvas en (b). La estructura se simuló en conductor eléctrico perfecto con los parámetros $a = 8.0$ mm, $w = d = 0.4$ mm y $s = 1.4$ mm.

de dispersión asociadas a las ondas incidentes para diferentes ángulos de incidencia (líneas grises). En esta figura es importante distinguir entre el vector de onda asociada a la onda superficial, $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$, y la componente tangencial del vector de onda asociado a la onda incidente.

Tabla 4.1: Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.7 (a) con los parámetros geométricos $a = 8.0$ mm, $w = d = 0.4$ mm y $s = 1.4$ mm.

θ^{inc}	$f_{\text{r-rd}}$ (GHz)	f_{r} (GHz)	$\Delta\theta_{\text{iz}}$	$\Delta\theta_{\text{de}}$
0°	6.91	7.14	—	8.9°
15°	7.05	7.26	3.4°	2.6°
30°	7.44	7.66	2.0°	1.9°
45°	8.07	8.27	2.0°	1.9°

Como se mencionó anteriormente, se espera que las resonancias ocurran para las frecuencias de intersección entre la relación de dispersión de la onda superficial con las asociadas a las ondas incidentes. En la Figura 4.8 (b), en líneas sólidas se representa la magnitud del coeficiente de transmisión para diferentes ángulos de incidencia. Las líneas a trozos representan las frecuencias de intersección obtenidas de la Figura 4.8 (a). Las discrepancias entre las frecuencias (alrededor de 0.2 GHz) se deben a los diferentes métodos numéricos por los que se obtuvo cada resultado.

A partir de la Figura 4.8 (b) se observa que la frecuencia de resonancia, f_{r}, se desplaza cuando hay un cambio del ángulo de incidencia. Por lo tanto, para un sistema preparado con ángulo de incidencia el cual tiene una frecuencia de resonancia asociada (θ_1^{int}, $f_{\text{r-1}}$), un cambio en el ángulo de incidencia significa que a la frecuencia $f_{\text{r-1}}$ la onda comienza a ser transmitida, y si dicho cambio de ángulo es suficientemente grande la onda se transmite completamente. Este fenómeno es el que se corresponde con el filtrado angular y se muestra en la Figura 4.8 (c). En ésta figura se muestra la magnitud de la transmisión en función del ángulo de incidencia para diferentes valores de frecuencia, donde cada frecuencia corresponde a la resonancia asociada a uno de los ángulos mostrados en la Figura 4.8 (b).

En la Tabla 4.1 se muestran algunos parámetros importantes para la estructura simulada. θ^{inc} es el ángulo de incidencia de la onda externa, $f_{\text{r-rd}}$ es la frecuencia de resonancia obtenida de la intersección de la relación de dispersión de la estructura con la relación de dispersión de la onda externa proyectada en la superficie para el ángulo de incidencia θ^{inc}. f_{r} es la frecuencia de resonancia obtenida de la curva de transmisión en función de la frecuencia para un ángulo de incidencia θ^{inc}. Por último, $\Delta\theta_{\text{iz}}$ ($\Delta\theta_{\text{de}}$) es el ancho de banda angular medido a partir del ángulo central hacia la izquierda (derecha) para el cual se transmite la

mitad de la potencia (ver Figura 4.8 (c)). Al comparar el comportamiento de esta estructura con el filtro compuesto por cadenas de EC-SRRs circulares se obtiene que, para la frecuencia a la cual la estructura resuena en incidencia normal, el ancho de banda angular es 16°, lo cual resulta ser casi del doble que el filtro compuesto de cadenas de EC-SRRs rectangulares y representa una mejora significativa.

Por último, vale la aclarar que con los parámetros geométricos elegidos el condensador $C_1 = 2C_3$. Lo anterior se debe a que todos los conjuntos de tiras son equidistantes, lo cual implica que el condensador formado entre el conjunto de cintas superior e inferior de la misma celda es igual que el condensador formado por el conjunto de cintas superior (inferior) con el primer conjunto de cintas vecino que no pertenece a la celda unitaria (los primeros vecinos se eligen por encima y debajo).

A continuación se estudia el caso de un filtro angular que presenta una relación de dispersión con pendiente negativa, dicho sistema puede ser reducido, al igual que en este caso, a uno de los circuitos de la Figura 4.4.

4.3. Filtro Angular con Base en Elementos Resonantes Extendidos

En un trabajo reciente [33] se ha planteado la idea de resonadores extendidos, es decir, partículas resonantes que se extienden sobre varias celdas unitarias con el fin de reducir el tamaño eléctrico, de esta forma el arreglo bidimensional o tridimensional conformado por estas partículas puede verse como una superficie o medio homogéneo a la frecuencia de trabajo. Con el fin de construir el filtro angular se ha escogido la celda unitaria de la Figura 4.9 (a). Como se observa en ésta, la partícula resonante es una tira doblada, de longitud l, que se extiende a lo largo de 11 celdas unitarias.

El modo de resonancia de interés para la aplicación de filtrado angular es cuando $\lambda = l$. Para este modo, en incidencia normal, la mitad de la tira tiene corriente en un sentido y la otra mitad en el sentido opuesto, de forma que justo en medio tiene un nodo, como se muestra en la Figura 4.9 (b). Lo anterior conlleva que dentro de la celda unitaria el conjunto de cintas puede verse como dos inductores iguales, $L_s/2$, por los que viajan corrientes en sentidos opuestos. Como se ilustra en la Figura 4.9 (c), la cual muestra el valor del campo eléctrico en dirección x, entre cada par de cintas vecinas se forma un condensador que en conjunto

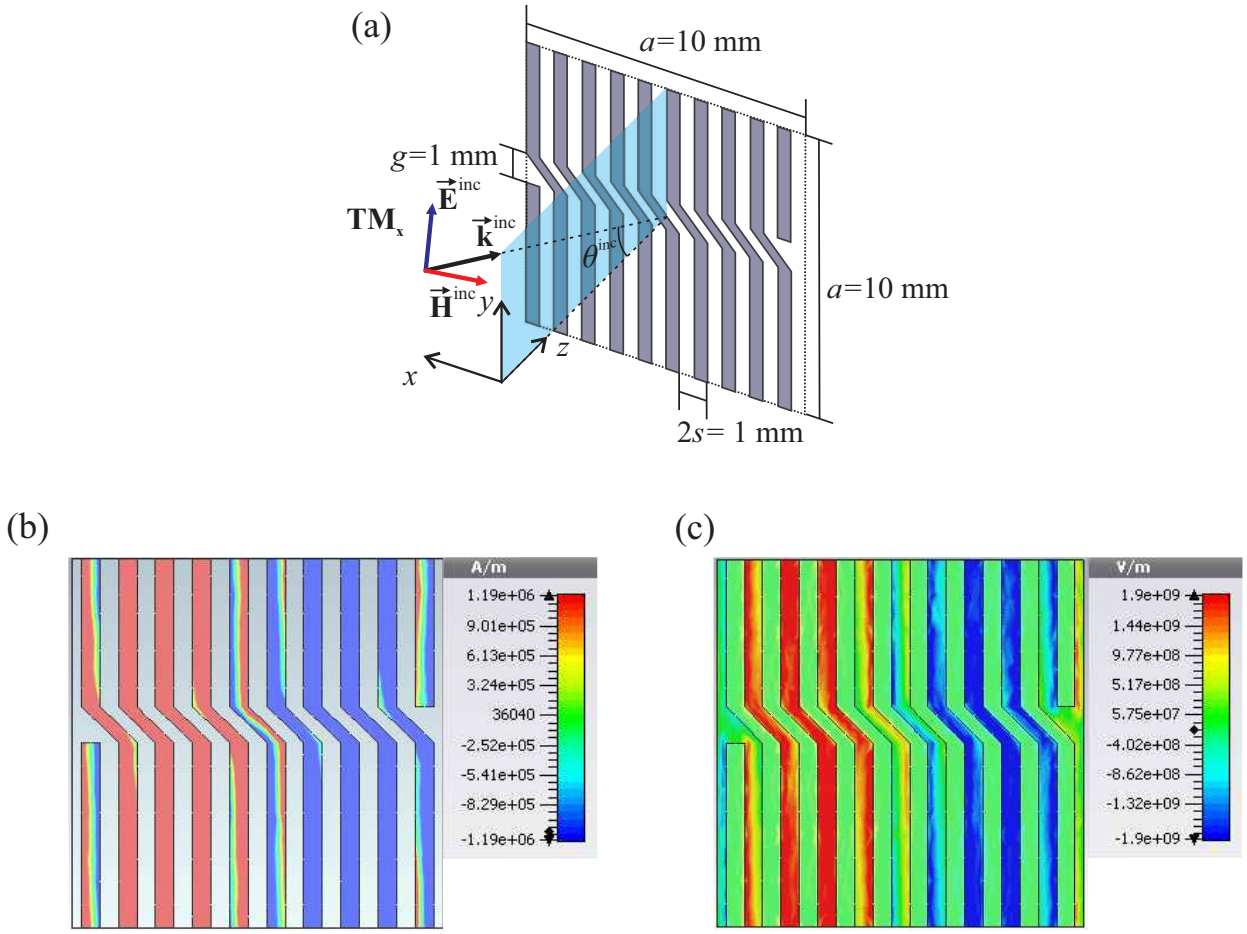

Figura 4.9: (a) Celda unitaria del filtro angular de resonadores extendidos. (b) Corriente superficial en dirección y del modo propio. (c) Campo eléctrico entre las tiras, en dirección x.

pueden verse como uno único en serie ($2C_\mathrm{s}$) con cada uno de los inductores. Por último, entre el sistema de los inductores y condensadores en serie existe un inductor, L_p, que conecta a ambos sistemas, el cual corresponde a la tira central mostrada en la Figura 4.9 (b). Con estos elementos, teniendo en cuenta la distribución de la corriente, se construyó el circuito asociado, el cual se muestra en la Figura 4.10.

A partir del modelo usual de las líneas de transmisión se puede concluir que, al plantear las ecuaciones de Kirchhoff, el circuito de la Figura 4.10 se puede reducir al circuito de la Figura 4.4 (c). Con este resultado se ve claramente que la relación de dispersión para este sistema tendrá pendiente negativa. Al despejar la frecuencia de la relación (4.21) se obtiene

$$\omega^2 = \frac{\omega_\mathrm{s}^2}{(k_\mathrm{t}^\mathrm{s})^2 \Delta y^2 (\overline{L}_\mathrm{p}/\overline{L}_\mathrm{s}) + 1}, \tag{4.36}$$

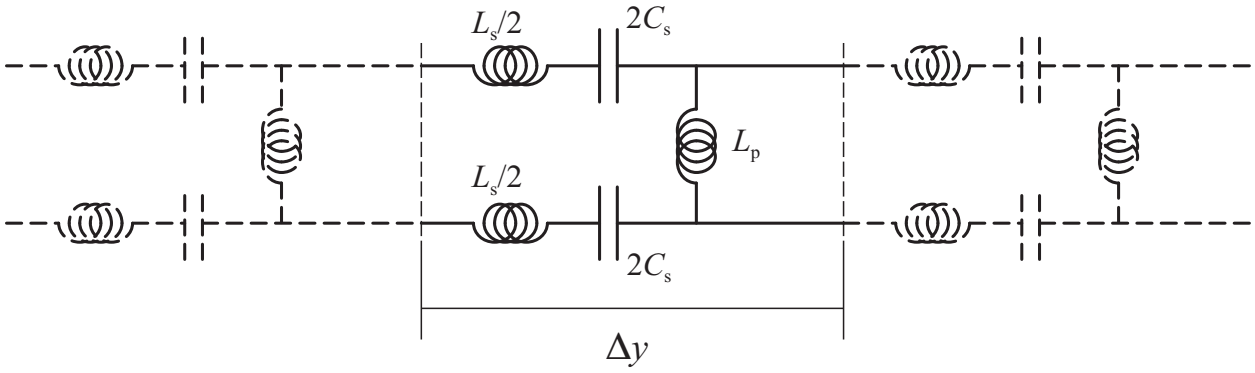

Figura 4.10: Sección de línea de transmisión que modela a la celda unitaria de la Figura 4.9 (a).

donde se ha utilizado $\Delta y = a$ por la dirección en la que se propaga la corriente. En la aproximación de $k_t^s \to 0$ esta relación se transforma en

$$\omega \approx \omega_s - \frac{(k_t^s a)^2(\overline{L}_p/\overline{L}_s)\omega_s}{2}. \tag{4.37}$$

En esta relación se puede ver claramente que en la aproximación de $k_t^s a \to 0$, la relación de dispersión tiene forma de parábola con pendiente negativa. Con esta última relación hay que ser cuidadosos porque la expresión (4.36) se derivó en este mismo límite, por lo tanto, (4.37) es útil para describir la forma de la relación de dispersión justo al inicio. Para evitar confusiones, vale la pena recordar que $\overline{X} = X/a$, donde a es el parámetro de red de la celda.

A partir de la distribución de las corrientes en la Figura 4.9 (b) nótese que para excitar este modo en incidencia normal se requiere (como requisito mínimo) que, en el eje x, la mitad del campo esté distribuida en dirección $+y$ y la otra mitad en $-y$, lo cual no se puede lograr únicamente con una onda plana polarizada en y. Sin embargo, en incidencia oblicua se produce un desbalance en la distribución de las corrientes y permite que la onda plana excite al modo deseado.

4.3.1. Resultados Numéricos para un Filtro Angular de Resonadores Extendidos

Con el fin de validar el modelo anteriormente expuesto, se simuló la celda unitaria mostrada en la Figura 4.9 (a) en el software *CST Microwave Studio* ®. Para obtener la relación de dispersión, la estructura se simuló hecha de conductor eléctrico perfecto y condiciones

periódicas en todas las direcciones. En dirección z las celdas unitarias se distanciaron 200 mm entre ellas. Similarmente al caso del apartado 4.2.1, para obtener el comportamiento del coeficiente de transmisión en función de la frecuencia, se imponen condiciones periódicas en el plano xy, mientras que a lo largo del eje z se colocaron dos puertos de Bloch-Floquet. Desde el puerto emisor se iluminó a la estructura con una onda plana polarizada en dirección y y con ángulo de incidencia θ^{inc}, como se ilustra en la Figura 4.9 (a).

En la Figura 4.11 (a), la línea roja representa la relación de dispersión obtenida mediante simulación numérica. Las líneas grises representan las proyecciones sobre la superficie de la relación de dispersión de la onda externa que incide con ángulo θ^{inc}. Como se espera, cada intersección entre la relación de dispersión de la onda superficial y la onda externa representa una resonancia, sin embargo, debido a la forma del campo incidente se espera que no se excite la resonancia en incidencia normal.

En la Figura 4.11 (b), las líneas sólidas representan el módulo de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia, obtenidos a partir de la simulación con los campos polarizados según la Figura 4.9 (a). Las líneas a trozos representan las frecuencias de intersección entre cada proyección de la relación de dispersión de la onda externa con la onda superficial, las cuales se ilustran en la Figura 4.11 (a), y donde se espera que ocurran las resonancias. Los valores de las frecuencias de resonancia obtenidos se muestran en la Tabla 4.2. Cabe resaltar que, como se mencionó anteriormente, en incidencia normal no aparece la resonancia asociada puesto que el campo externo no tiene la forma idónea para excitarla.

Tabla 4.2: Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.9 (a) con los parámetros geométricos $a = 10.0$ mm, $g = 1.0$ mm y $s = 0.5$ mm.

θ^{inc}	$f_{\text{r-rd}}$ (GHz)	f_{r} (GHz)	$\Delta\theta_{\text{iz}}$	$\Delta\theta_{\text{de}}$
0°	2.91	—	—	—
15°	2.60	2.61	0.2°	0.3°
30°	2.30	2.28	0.5°	0.6°
45°	2.05	2.06	1.2°	1.3°

Por último, en la Figura 4.11 (c) se muestra el perfil del módulo del coeficiente de transmisión para cada una de las frecuencias de resonancia mencionadas en la tercera columna de la

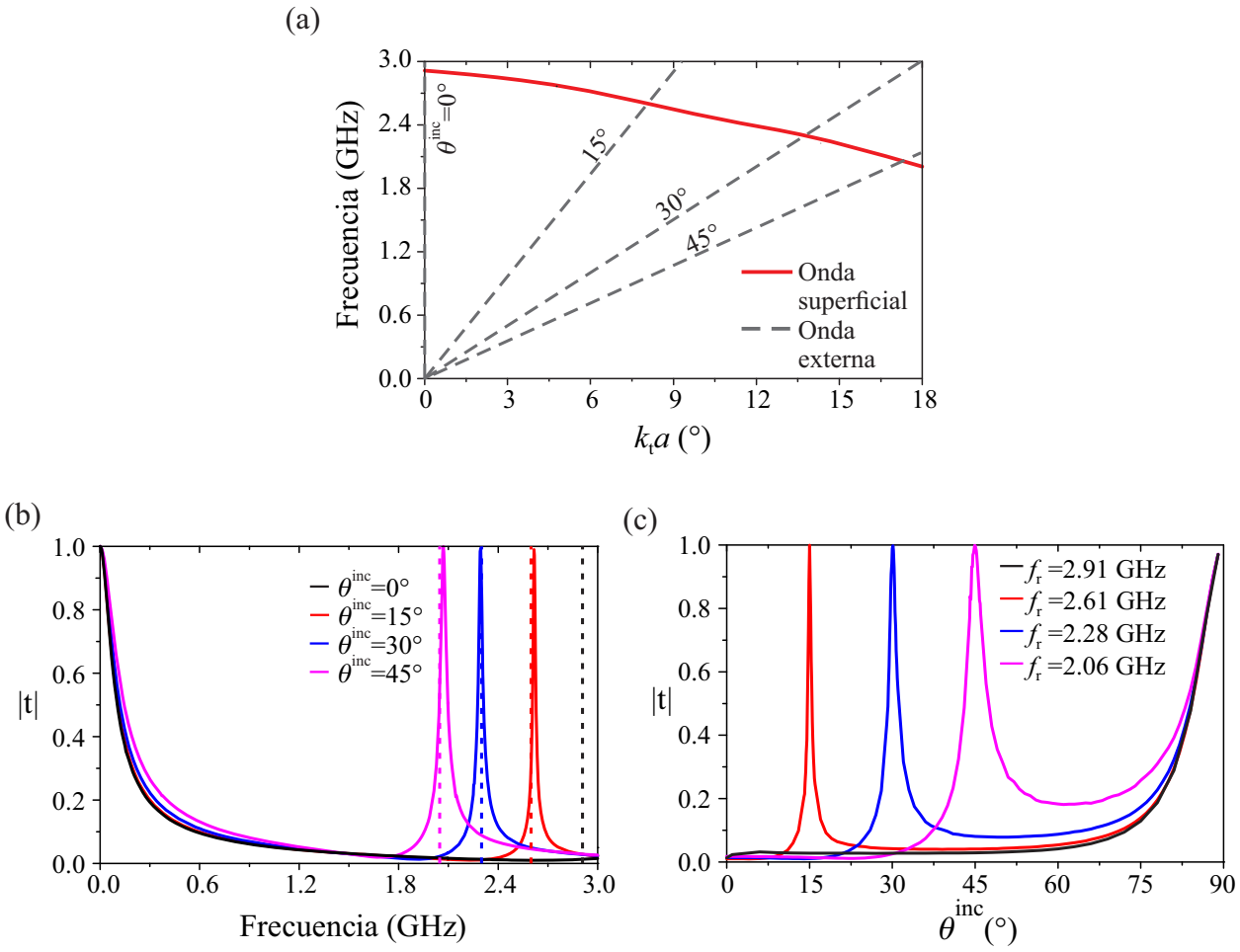

Figura 4.11: (a) Relación de dispersión de la onda superficial (línea roja) para la estructura de resonadores extendidos con los parámetros de la Figura 4.9 (a). Las líneas grises son las proyecciones de las relaciones de dispersión de la onda externa incidiendo con diferentes ángulos (θ^{inc}). (b) Módulo de la transmisión de función de la frecuencia para diferentes ángulos de incidencia (líneas sólidas), y frecuencias de resonancia esperadas de las interacciones entre la relación de dispersión de la onda superficial y las relaciones de dispersión de la onda externa incidiendo con ángulo θ^{inc}. Perfil del módulo de la transmisión en función del ángulo de incidencia para las frecuencias de resonancias de las curvas en (b). Estas curvas se obtuvieron de simular la estructura con conductor eléctrico perfecto.

Tabla 4.2, a excepto de la curva asociada a la frecuencia $f_{\text{r}} = 2.91$ GHz puesto que no se obtuvo ninguna resonancia en la simulación. En las dos últimas columnas de esta tabla se muestran los ángulos de apertura, medidos hacia la izquierda y derecha respecto el ángulo

central, para los cuales la potencia transmitida decae a un 50 % respecto al máximo. Como se observa, al comparar estos valores con los obtenidos para el filtro con cadenas de EC-SRRs (Tabla 4.1), se obtiene que el filtro de resonadores extendidas es más selectivo, sin embargo, cabe recordar que éste es útil fuera de incidencia normal. Por lo anterior, se escoge al filtro angular hecho con cadenas de EC-SRRs para ser fabricado y caracterizado.

4.4. Resultados Experimentales

Como se mencionó anteriormente, para la prueba experimental se escogió el filtro angular hecho con cadenas de EC-SRRs. La superficie fabricada es una muestra cuadrada que tiene 33 celdas unitarias en dirección x y y (26.4 cm de longitud por cada lado). Para grabar la estructura se escogió cobre con $t = 18$ μm de espesor, mientras que el sustrato de soporte fue ARLON CuClad 250LX, el cual tiene una permitividad relativa de $\epsilon_{\mathrm{r}} = 2.55(1 + \mathrm{i}0.0018)$ y un espesor de $h = 0.373$ mm. Los parámetros geométricos se describen en las figuras 4.12 (a) y (b). En el proceso de medición la metasuperficie se rodeó con pirámides absorbentes en el rango de microondas, y se colocó entre las antenas emisora y receptora a 1.6 m de cada una como se ilustra en la Figura 4.12 (c).

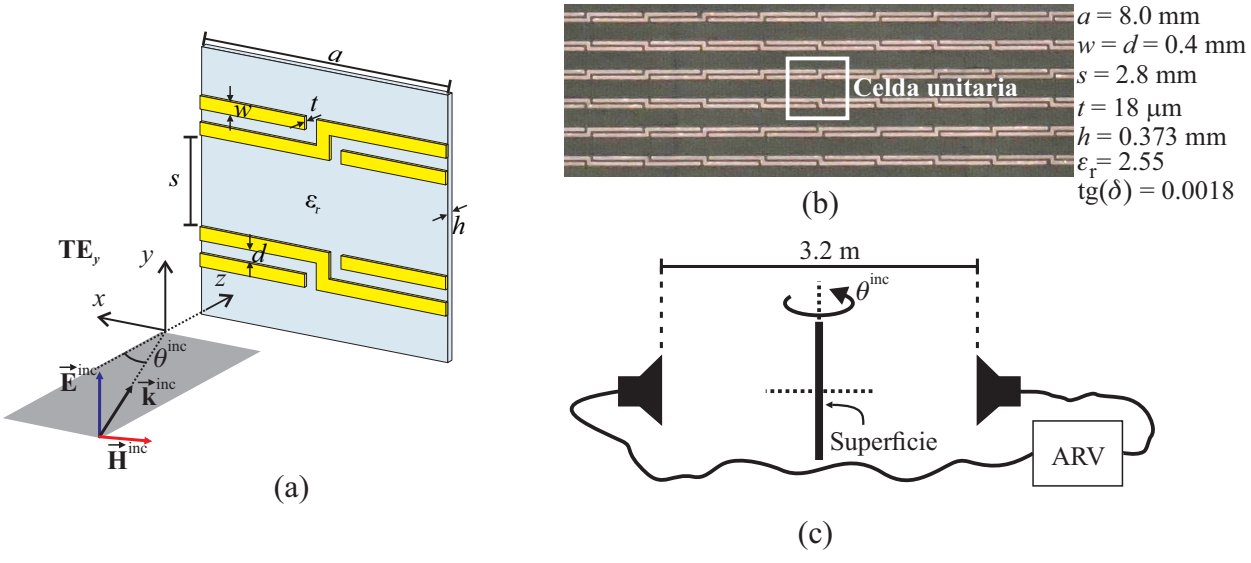

Figura 4.12: (a) Celda unitaria del filtro angular hecha con EC-SRRs rectangulares con los parámetros geométricos de interés. (b) Vista de la superficie fabricada con los parámetros geométricos y del dieléctrico, el material conductor es cobre. (c) Diagrama del montaje experimental.

Es importante recordar que cada celda unitaria representa una sección de una línea de transmisión, por lo cual, debido a que la estructura posee un tamaño finito, la forma en que se termina la cadena en los extremos de la estructura influirá en la porción de la onda superficial que se reflejará. Idealmente, una línea de transmisión finita debería terminarse en una resistencia con valor igual a la impedancia característica de la línea, con el fin de evitar cualquier reflexión en los extremos [39]. Sin embargo, debido a que la impedancia característica de la celda unitaria cambia en función del ángulo de incidencia, no hay una impedancia de carga fija que se pueda adaptar a la condición de cierre adecuada para todos los ángulos. Por lo anterior, se decidió terminar la cadena sin ninguna impedancia adaptada en los extremos, de modo que la primera y última celda del arreglo son como la ilustrada en la Figura 4.12 (a), lo cual no significa que sea completamente abierta. Por lo anterior, se espera que exista alta reflexión en los bordes de la metasuperficie, lo cual, como veremos a continuación, se traducirá en una baja transmisión de la onda externa.

En la Figura 4.13 (a) y (b), las líneas sólidas representan el modulo del coeficiente de transmisión en función de la frecuencia, en polarización TE_y (ver Figura 4.12 (a)), para diferentes ángulos de incidencia ($\theta^{\mathrm{inc}} = 0°$, 10°, 15°, 20°, 30° y 45°) obtenidos a partir de las medidas experimentales y de las simulaciones, respectivamente. Por otra parte, las líneas a trozos representan las frecuencias de resonancia, obtenidas a partir de las intersecciones entre la relación de dispersión de la onda superficial simulada con las proyecciones de las relaciones de dispersión de la onda externa a diferentes ángulos de incidencia, tal como se ilustra en la Figura 4.13 (c).

Al comparar la profundidad de los picos de los coeficientes de transmisión teóricos y experimentales es evidente la influencia de la forma en que se terminaron las cadenas, sin embargo, nótese que el fenómeno de filtrado angular, el cual se expresa mediante el desplazamiento de la frecuencia de resonancia, sigue presente, con un acuerdo excelente de las frecuencias predichas por la simulación. En la Tabla 4.3 se muestra una comparación entre las frecuencias de resonancia obtenidas para cada ángulo y extraídas de los datos experimentales, simulación y de las intersecciones de las relaciones de dispersión simuladas.

En la Figura 4.13 (c), los puntos rojos representan la relación de dispersión extraída de los datos experimentales para el filtro angular fabricado. Esta figura se construyó a partir de las frecuencias de resonancia de los coeficientes de transmisión en la Figura 4.13 (a), mientras que los valores del vector de onda tangencial, $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$, se obtienen a partir de la relación[1]:

$$k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} = \frac{2\pi f^{\mathrm{inc}}}{c} \sin\left(\theta^{\mathrm{inc}}\right). \tag{4.38}$$

[1]Se debe recordar que en la resonancia $k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = k_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}}$.

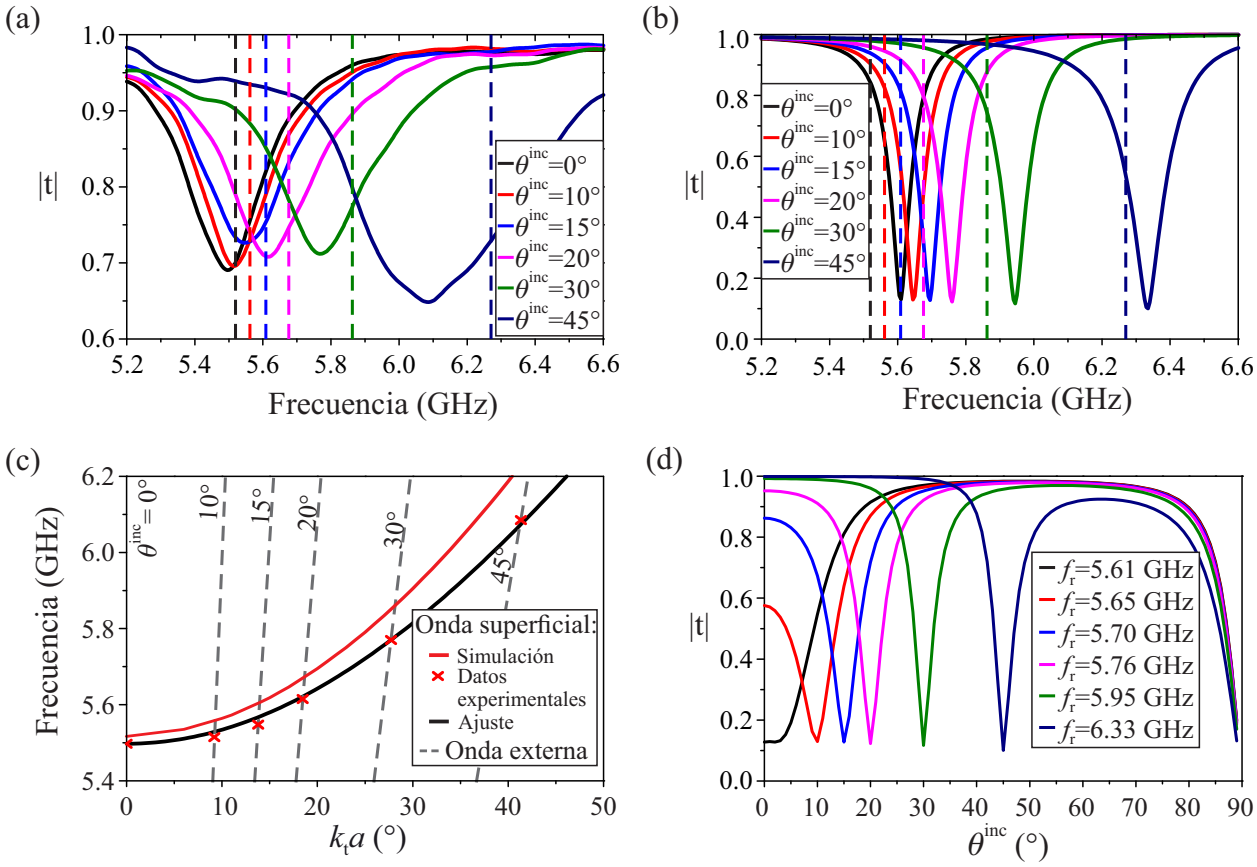

Figura 4.13: Módulo de la transmisión en función de la frecuencia obtenida por medio de (a) medidas experimentales y (b) la simulación del filtro angular de EC-SRRs rectangulares conectados con los parámetros de la Figura 4.12. (c) Relación de dispersión simulada (línea roja), extraída de los parámetros experimentales (puntos rojos) y ajuste de los datos experimentales (línea negra). Las líneas grises son las relaciones de dispersión teóricas de la onda externa que incide con ángulo θ^{inc}. (d) Perfil simulado del coeficiente de transmisión en función del ángulo de incidencia a frecuencias fijas.

Como se vio anteriormente, la relación de dispersión que describe al filtro angular de la Figura 4.12 (a) esta dada por (4.33) que en su forma funcional corresponde a:

$$f = f_0\sqrt{(1+\alpha)^{-1}\left[1+\beta\left(1-\cos(k_t^s a)\right)\right]}, \tag{4.39}$$

donde α y β están relacionadas con los parámetros circuitales, y f_0 es la frecuencia de resonancia en el sistema desconectado. Esta afirmación acerca de f_0 se cumple a medida que las conexiones con las celdas vecinas no modifican significativamente la geometría original del EC-SRR, lo cual se satisface para la versión circular de la partícula más no para la rectangular. Se realizó un ajuste de los datos experimentales por medio de (4.39) y el resultado

Tabla 4.3: Parámetros característicos para el filtro angular construido a partir de la celda de la Figura 4.12 (a). La superficie se hizo con cobre y el sustrato de soporte fue ARLON CuClad 250LX.

θ^{inc}	$f_{\text{r-rd}}^{\text{sim}}$ (GHz)	$f_{\text{r}}^{\text{sim}}$ (GHz)	$f_{\text{r}}^{\text{exp}}$ (GHz)	$\Delta\theta_{\text{iz}}^{\text{sim}}$	$\Delta\theta_{\text{de}}^{\text{sim}}$
0°	5.52	5.61	5.50	—	12.6°
10°	5.56	5.65	5.52	—	6.0°
15°	5.61	5.70	5.55	5.4°	4.9°
20°	5.68	5.76	5.62	4.1°	4.1°
30°	5.86	5.95	5.77	3.0°	3.5°
45°	6.27	6.33	6.09	2.9°	3.1°

se muestra en la Figura 4.13 (c) (línea negra). Los parámetros obtenidos para el ajuste son $\alpha = 0.15$, $\beta = 0.88$, y $f_0 = 5.90GHz$.

Finalmente, en la Figura 4.13 (d) se muestra el perfil del módulo del coeficiente de transmisión en función del ángulo de incidencia para diferentes valores de frecuencia, este resultado se extrajo a partir de las simulaciones. En las dos últimas columnas de la Tabla 4.3 se muestran los anchos de banda angulares, medidos hacia la izquierda y derecha respecto al ángulo de mínima transmisión, dentro de los cuales la potencia transmitida es menor al 50 %.

A modo de recomendación, con el objetivo de reducir las reflexiones en los bordes del filtro angular fabricado se puede recurrir a elementos activos o a potenciómetros, de modo que dependiendo del ángulo de incidencia se modifique el valor de la resistencia y se reproduzcan las condiciones para evitar la reflexión de la onda superficial.

5 Resonador Fabry-Pérot Metamaterial

Los dispositivos basados en resonadores tipo Fabry-Pérot (RFPs) son ampliamente utilizados en el rango de las microondas [73] y óptica [74]. Estos se componen típicamente de bloques transparentes de dieléctricos cubiertos con películas delgadas de alta reflexión. En la mayoría de las frecuencias la transmisión es casi nula, sin embargo, para un conjunto periódico de frecuencias ésta se puede considerar completa, lo cual ocurre cuando el espesor del RFP es un múltiplo entero de la longitud de onda asociada al campo incidente. Además, cuán mayor es la reflectancia en los extremos del Fabry-Pérot , más alto es el factor de calidad (Q). No es difícil obtener RFP con $Q = 10^4$, no obstante, el hecho que el espesor del dispositivo deba ser comparable o más grande que la longitud de onda puede verse como un inconveniente de gran importancia. Con el objeto de reducir considerablemente el espesor, debe utilizarse un dieléctrico con alta permitividad, de modo que la longitud de onda dentro del núcleo dieléctrico sea mucho más pequeña que la longitud de onda en el espacio libre. En microondas y óptica, los materiales usuales suelen tener permitividades relativas entre 1 y 10 y solo para un reducido número de casos este se aproxima a 100. Por otra parte, ha sido demostrada la posibilidad de tener laminas dieléctricas artificiales (LDAs) con permitividades extremadamente altas por encima de 1000 [34–38, 75]. Las LDAs han sido utilizadas cono filtros de banda de paso [34–36], blindaje para líneas de transmisión integradas [37], y antenas de silicio de alta ganancia [38]. Recientemente, se ha reportado un método con el fin de calcular con precisión los parámetros efectivos de un dieléctrico artificial integrado de alta permitividad [75].

En este capítulo se exploró la implementación de un RFP delgado basado en LDAs de alta permitividad. Para ello se desarrolló un modelo analítico el cual es útil para predecir el coeficiente de transmisión del RFP desde sus parámetros geométricos. Por último, se diseñó un RFP cuyo espesor es 74 veces más pequeño que la longitud de onda en espacio libre para la frecuencia de resonancia más baja, con factor de calidad $Q \approx 8.1 \times 10^3$.

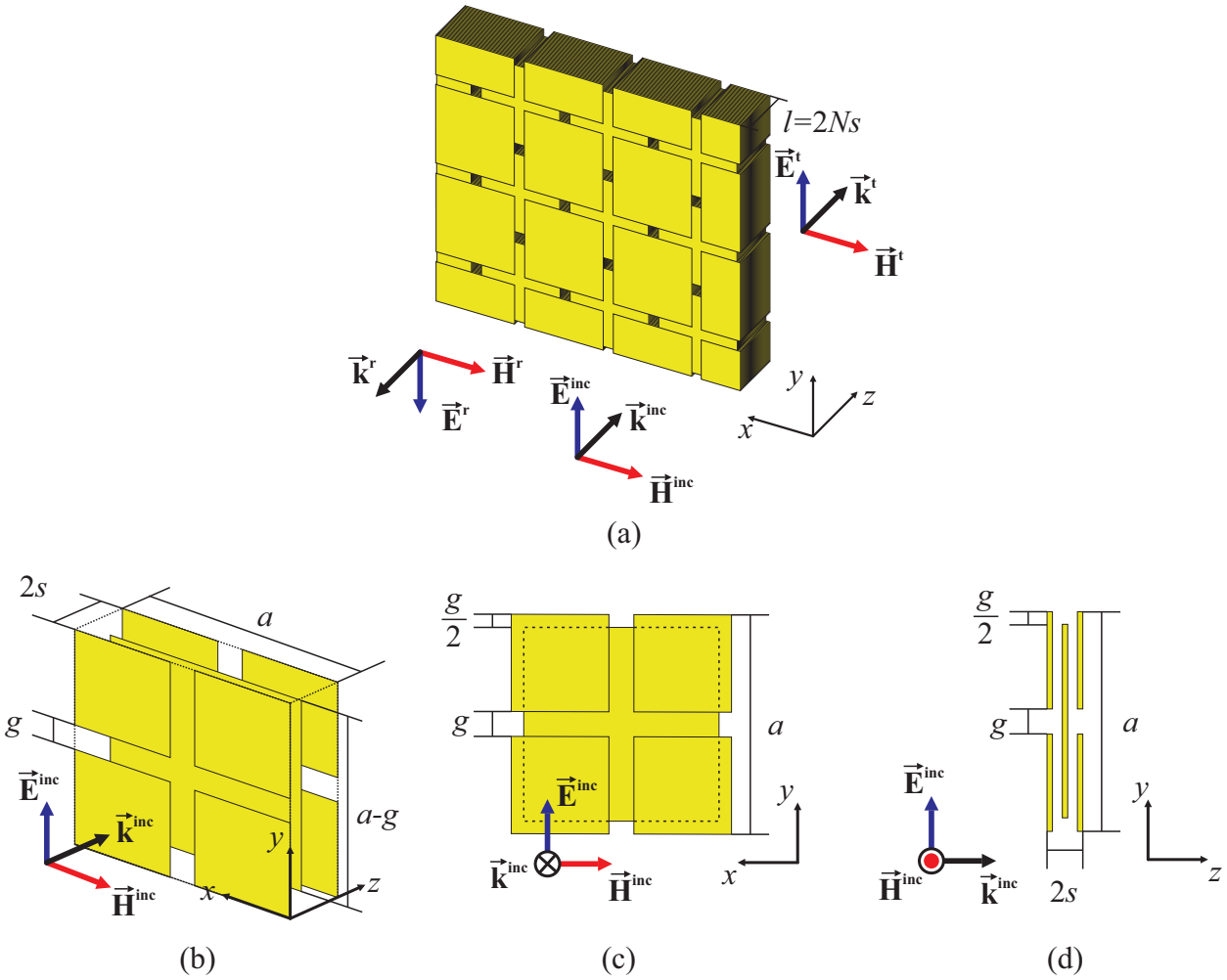

Figura 5.1: (a) Sección del material resonador tipo Fabry-Pérot (RFP). Celda unitaria del RFP vista en perspectiva (b), vista frontal (c) y lateral (d). La celda unitaria se replica periódicamente en el plano xy, y en dirección z se replica un número finito de veces.

5.1. Teoría

Considérese una LDA compuesta de muchas capas, sobre las cuales se ha grabado el mismo arreglo periódico de cuadrados metálicos. Adicionalmente, asúmase que las capas están densamente empaquetadas, manteniendo constante la distancia entre ellas, pero cada una desplazada lateralmente respecto a las dos capas vecinas más cercanas, que corresponde a un desplazamiento en el plano xy según se muestra en la Figura 5.1. Por simplicidad, el metal se considera conductor eléctrico perfecto suspendido en el espacio libre. Además, la

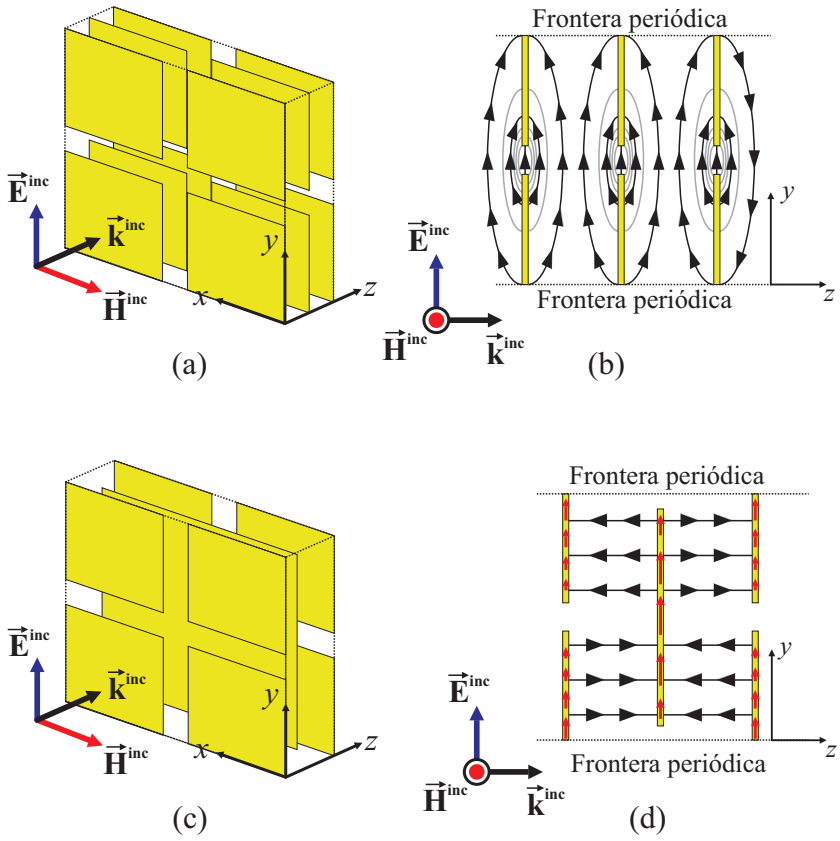

Figura 5.2: Celda unitaria con todas las capas en fase (a) y líneas de campo eléctrico cualitativas en presencia de un campo eléctrico polarizado en y (b). Celda unitaria con la capa central desfasada en $(a/2,\, a/2)$ respecto sus vecinas (c) y líneas de campo eléctrico (líneas negras) y corriente eléctrica (líneas rojas) cualitativas en presencia de un campo eléctrico polarizado en y (d).

celda unitaria tiene condiciones periódicas de frontera en las direcciones x y y, mientras que en dirección z se replica un número finito de veces. Cuando la placa central no se encuentra desplazada respecto a sus vecinas, como se ilustra en la Figura 5.2 (a) y (b), en presencia de una onda plana polarizada en y (o x pues tiene simetría de rotación de 90°), la carga positiva se concentra en los cuadrados superiores de la celda unitaria. Puesto que las capas vecinas poseen la misma distribución, las cargas del mismo signo quedan enfrentadas y como consecuencia no se producen acoples capacitivos entre capas diferentes. Sin embargo, al desplazar la placa central en $(a/2,\, a/2)$, tal y como se muestra en la Figura 5.2 (c) y (d), cualitativamente la distribución de carga en cada capa de conductor no cambia respecto al caso anterior, pero el desplazamiento del conductor central provoca que las cargas de signos opuestos queden enfrentadas y por lo tanto se acopla capacitivamente con los ocho cuadrados en frente y detrás.

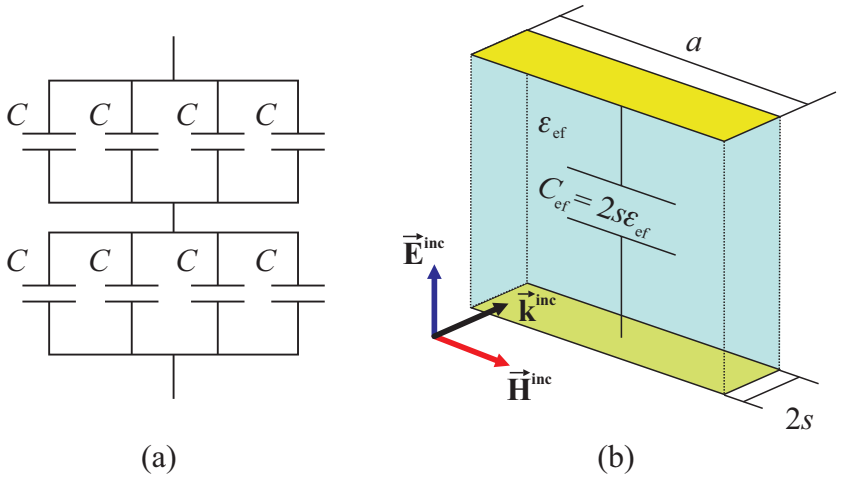

Figura 5.3: (a) Modelo de circuito de la celda unitaria mostrada en la Figura 5.1 (b). (b) Modelo homogeneizado de la LDA.

En la estructura de la Figura 5.2 (c), asumiendo que los condensadores entre los costados de dos capas vecinas (cara a cara) dominan sobre los condensadores debido a los bordes en la misma capa, entonces la corriente de desplazamiento en estos últimos puede ser despreciada. Ya que los cuatro cuadrados conductores superiores tienen el mismo tamaño, la diferencia de potencial en dirección y en cada uno de ellos es la misma, lo cual es aplicable de igual forma a las cuatro placas inferiores. Se puede observar en la Figura 5.2 (d) que la corriente eléctrica que llega a los cuatro parches superiores es debida a la corriente de desplazamiento con la placa central, que a su vez proviene de la corriente eléctrica de los cuatro parches inferiores. Con base en este razonamiento, se obtiene que los cuatro condensadores[1] superiores están en paralelo, al igual que los cuatro inferiores, y entre el sistema de la parte superior e inferior de la celda unitaria existe una conexión por la cual se transmite la corriente eléctrica. De esta forma la celda unitaria podría ser remplazada por el modelo de circuito mostrado en la Figura 5.3 (a). Para salvaguardar este modelo, un criterio suficiente es que $a \gg g \gg s$, donde la segunda parte de la desigualdad asegura que el condensador debido a los bordes será despreciable frente al producido por el acople de los costados de distintas capas. Al tiempo, la primera parte de la desigualdad anterior permite aproximar cada uno de los condensadores entre distintas capas al condensador de placas paralelas con área $(a/2-g)^2$, que corresponde al área de superposición entre los cuadrados metálicos, distanciados en una longitud s (ver los parámetros geométricos en la Figura 5.1). Esta área no es rigurosa, debido a que en los bordes de cada parche las líneas de campo se curvan y abarcan un área un poco mayor a la estipulada, de acá la importancia que $a \gg g$.

[1]Cada condensador formado por un parche con la placa central.

Utilizando las reglas definidas para conexiones en serie y en paralelo, el modelo de circuito de la Figura 5.3 (a) puede ser remplazado por un único condensador efectivo de valor $C_{\text{ef}} = 2C = 2\epsilon_0(a/2 - g)^2/s$. Asumiendo que la periodicidad es mucho más pequeña que la longitud de onda en el material, la heteroestructura puede verse como un material homogéneo que ocupa el mismo espacio con una permitividad eléctrica efectiva (ϵ_{ef}) que lo caracteriza. Además, debido a que el condensador efectivo se excita en presencia de un campo eléctrico polarizado en dirección y, éste se puede ver como un condensador de placas paralelas distanciadas una cantidad a en la dirección y como se ilustra en la Figura 5.3 (b). Por lo tanto, el condensador efectivo en términos de la permitividad efectiva del medio debe ser $C_{\text{ef}} = \epsilon_{\text{ef}} 2sa/a$. Igualando las dos fórmulas previas, se obtiene que la permitividad efectiva es:

$$\epsilon_{\text{ef}} = \epsilon_0 \frac{(a/2 - g)^2}{s^2} \tag{5.1}$$

A partir de (5.1) se observa que la permitividad efectiva es muy sensible a los cambios en la separación entre las capas (s) y a cambios del tamaño de la celda unitaria (a). Ya que el modelo supone que el tamaño de la celda es mucho más grande que el gap entre parches de la misma capa y a su vez que la separación entre capas, se esperan valores de permitividad efectiva muy grandes y del orden de $\epsilon_0 a^2/s^2$. Con el fin de obtener la curva de ϵ_{ef}, se escogió una estructura de conductor eléctrico perfecto, sin sustrato y con parámetros centrales $a =$ 8 mm, $s = 0.1$ mm y $g = 0.6$ mm. En la Figura 5.4 (a) las líneas negra y roja representan la permitividad eléctrica efectiva relativa en función de s y g, respectivamente, preservando constantes los otros parámetros anteriormente mencionados. Mediante la relación (5.1), se obtiene que la permitividad efectiva calculada para la estructura de parámetros centrales es $\epsilon_{\text{ef}} = 1156\epsilon_0$. Como se esperaba, la permitividad efectiva del sistema es muy sensible a las variaciones de s, de modo que para $s = 7.6 \times 10^{-2}$ mm se obtiene $\epsilon_{\text{ef}} \approx 2000\epsilon_0$, la cual es mucho mayor que los valores típicos de permitividad en materiales en el rango de microondas. En el extremo opuesto, cuando $s = 0.6$ mm, la permitividad es aproximadamente $32\epsilon_0$, la cual ronda los valores más grandes de las permitividades en el rango de microondas. Debido a que $a \gg g$ (aproximadamente 13 veces más grande cuando $g = 0.6$ mm) el término cuadrático de g en la expansión del numerador en la relación (5.1) puede ser despreciado. De acá que la apariencia de la permitividad efectiva en función del parámetro g sea el de una recta. Para este caso, ϵ_{ef} adquiere valores entre $1156\epsilon_0$ y $1560\epsilon_0$, donde el último se logró para una separación entre cuadrados de $g = 0.05$ mm.

En la Figura 5.4 (b) se muestra el comportamiento de la permitividad eléctrica efectiva relativa en función del parámetro de red (a), que toma valores entre 4.0 mm y 15.0 mm y como resultado se obtienen valores de permitividad efectivas que van desde $196\epsilon_0$ hasta $4761\epsilon_0$,

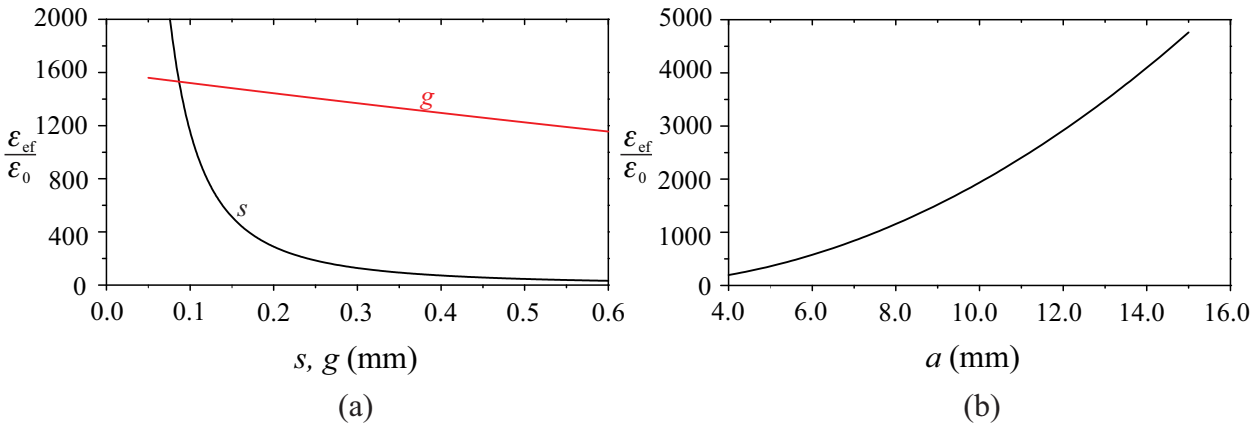

Figura 5.4: (a) Las líneas negra y roja representan la permitividad efectiva relativa en función de los parámetros s y g respectivamente. (b) Permitividad efectiva relativa en función del periodo a.

respectivamente. Como se observa de esta figura, a pequeñas variaciones del parámetro de red la permitividad efectiva sufre grandes cambios. Ahora, aumentar considerablemente el parámetro de red no es viable, porque en algún punto se hará comparable con la longitud de onda y las variaciones en las fases de las corrientes entre dos puntos del conductor se harán notables. Debido a ésto pierde sentido el modelo de homogeneización propuesto, pues no considera cambios de fase a lo largo de las placas y se recurre a un modelo circuito de elementos localizados. Desde este punto de vista, manteniendo a salvo las suposiciones del modelo, es preferible disminuir la distancia entre capas (s) y el gap entre los cuadrados de la misma capa (g). Lógicamente, al momento de definir los parámetros de fabricación, cada uno posee límites en lo permitido por el método que se utilizará, por lo cual hay que encontrar un compromiso entre los parámetros en cuestión y que se mantenga en lo límites del modelo.

En lo descrito hasta el momento, se ha modelado a la celda unitaria como una capa dieléctrica que en conjunto forman una LDA. A continuación, teniendo en cuenta la homogeneización realizada sobre la celda, se desarrolla un modelo para describir el comportamiento de este sistema. Este modelo es equivalente a describir la propagación a través de un bloque dieléctrico de permitividad ϵ_{ef} con una capa reflectante infinitesimalmente delgada a la entrada y salida del bloque, es decir, un interferómetro de Fabry-Pérot . De lo anterior que al sistema real se le conozca como un RFP.

5.1.1. Modelo de Línea de Transmisión

En la Figura 5.5 (a) se muestra el RFP compuesto por la celda unitaria de la Figura 5.1. Cabe recordar que el RFP es infinito en direcciones x y y, mientras que en z tiene un espesor[2] igual a $l = 2Ns$, donde N es el número de veces que se ha replicado la celda unitaria en dirección z. Además, sobre el material incide una onda plana que viaja en dirección z y como la celda unitaria posee simetría de rotación de 90°, no es relevante si la onda incide con polarización x o y y, por el teorema de superposición, ante una onda plana que resulte de la combinación lineal de ambas, la estructura tendrá el mismo comportamiento [46]. Con el fin de caracterizar la propagación a través de este RFP, se puede utilizar un modelo de línea de transmisión, como se muestra en la Figura 5.5 (b). En esta figura, 1, r y t simbolizan a la onda incidente normalizada, la onda reflejada y la onda transmitida, respectivamente, mientras que cada I_i representa una corriente en el circuito y V_i es la diferencia de potencial medida en la línea de referencia del $\#i$. Finalmente, $\overline{\overline{T}}_{ij}$ es la matriz de transferencia entre el línea de referencia $\#i$ y $\#j$.

Por otra parte, las secciones de líneas de transmisión en el centro del sistema representa la LDA resultante de la homogeneización que se realizó anteriormente, la cual posee una impedancia característica efectiva de $Z_{\text{ef}} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_{\text{ef}}}$. Las secciones de líneas de transmisión al inicio y al final describen al espacio libre, medio por el cual se propaga la onda antes y después de la LDA, por lo cual se consideran que son semi-infinitas y el valor de la impedancia característica corresponde a la impedancia del espacio libre, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Por último, Z_{s} representa una impedancia superficial a la entrada y la salida del sistema. El origen de estas impedancias superficiales reside en que las dos caras externas del sistema, la primera y última cara, poseen un acoplamiento distinto a las caras internas que no queda descrito dentro del proceso de homogeneización. Como se explicó anteriormente, debido a la distribución de carga que se forma en las placas, los campos al interior del material pueden ser descritos cualitativamente mediante la Figura 5.5 (a). Sin embargo, cada una de las dos caras externas al no tener otra capa con quien acoplarse, se acopla consigo misma formando condensadores entre los parches cuadrados conductores de la misma capa. Son precisamente estos condensadores al exterior del material, quienes originan las impedancias Z_{s}, las cuales para este caso serán capacitivas y dependiendo de que tan grande sea su valor puede influir ínfima o considerablemente en la forma de las curvas de transmisión. Seguidamente, se presenta la solución de la línea de transmisión de la Figura 5.5 (b) en cada una de las regiones.

[2]De momento se considera que el conductor tiene espesor nulo.

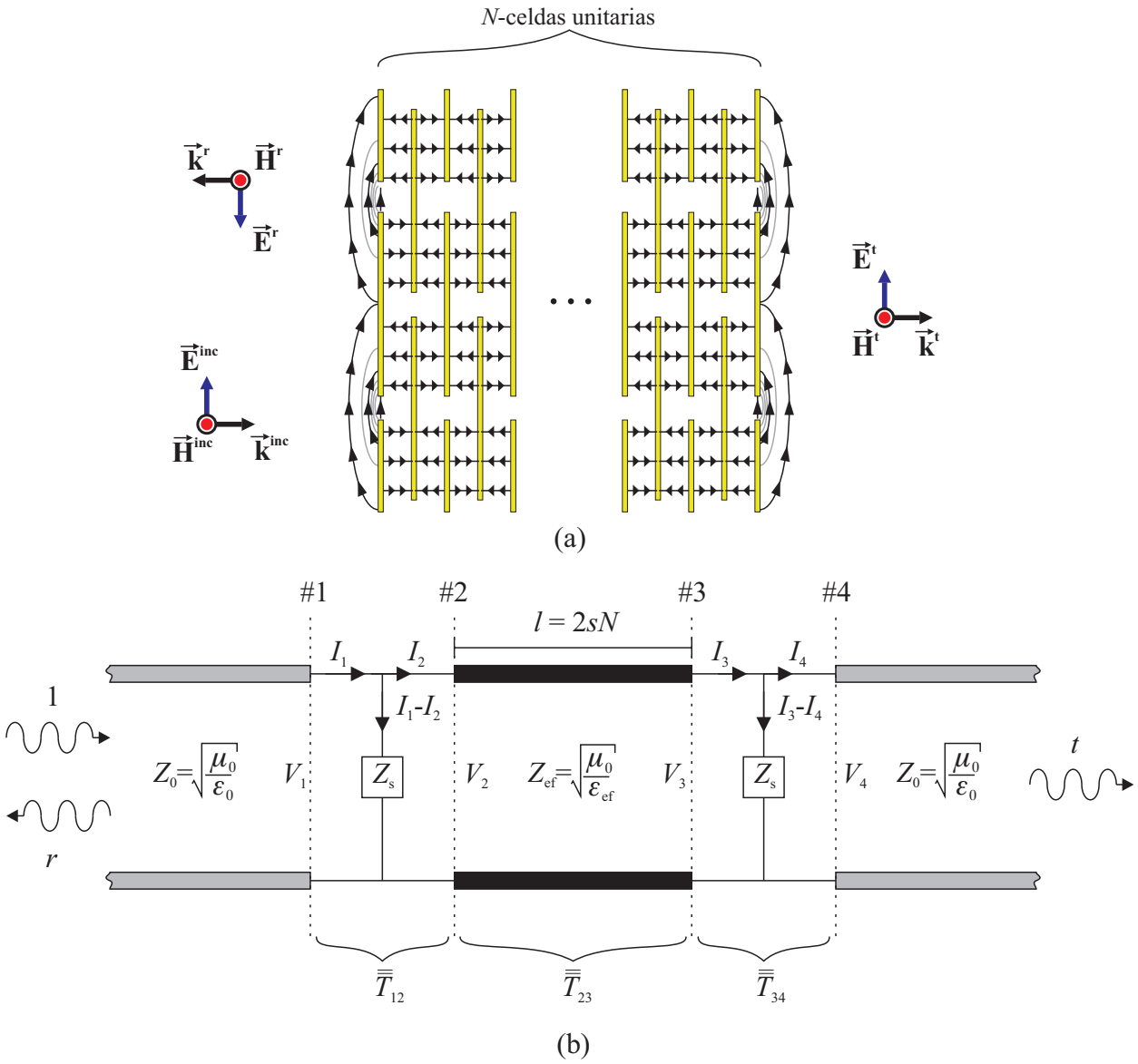

Figura 5.5: (a) Vista lateral de la sección del RFP en estudio, con la descripción cualitativa de las líneas de campo eléctrico. (b) Modelo de línea de transmisión para modelar la propagación a través del RFP.

Región entre las fronteras #1 y #2

La región delimitada entre las líneas de referencia #1 y #2 describe la interfaz infinitesimal del cambio de línea de transmisión entre el espacio libre y el medio efectivo, con una impedancia superficial en paralelo. Es de conocimiento en los modelos de líneas de transmisión sin pérdidas [39], que al conectar dos líneas con impedancias características diferentes,

inevitablemente una porción de la onda incidente se reflejará, por lo cual se debe considerar la propagación hacia la derecha e izquierda en las corriente y en los voltajes. Teniendo en cuenta lo anterior, las ecuaciones de circuito aplicadas a esta región dan como resultado:

$$\begin{aligned} V_1^+ &= I_1^+ Z_0, & V_1 &= V_1^+ + V_1^-, \\ V_2^+ &= I_2^+ Z_{\text{ef}}, & V_2 &= V_2^+ + V_2^-, \\ V_1^- &= -I_1^- Z_0, & V_{Z1} &= (I_1 - I_2) Z_{\text{s}}, \\ V_2^- &= -I_2^- Z_{\text{ef}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Donde los superíndices + o − se refieren al sentido de propagación hacia la derecha o izquierda, respectivamente. Teniendo en cuenta que $V_1 = V_2 = V_{Z1}$, en el cual V_{Z1} es la diferencia de potencial medido en la impedancia superficial, resolviendo las ecuaciones de circuito (5.2) se pueden relacionar los voltajes en el plano #1 con los medidos en #2 a través de la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}+Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_0-Y_{\text{ef}}}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^+ \\ V_2^- \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\overline{\overline{T}}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}+Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_0-Y_{\text{ef}}}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Con $Y_0 = 1/Z_0$ la admitancia del vacío, y $Y_{\text{s}} = 1/Z_{\text{s}}$ la admitancia superficial. La matriz que relaciona las diferencias de potencial viajando a derecha e izquierda es, por definición, la matriz de transferencia en la interfaz [76].

Región entre las fronteras #2 y #3

Esta región comprende únicamente la propagación de las ondas a lo largo de la línea de transmisión con Z_{ef}, donde no hay cambio en la impedancia característica del medio y como consecuencia no hay reflexiones al interior de línea. De ésto que las diferencias de potencial en las fronteras #2 y #3 se relacionen mediante el cambio de fase debido a la propagación en la línea, que matricialmente se puede escribir [39]:

$$\begin{pmatrix} V_2^+ \\ V_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_{\text{ef}}l} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_{\text{ef}}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3^+ \\ V_3^- \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$\overline{\overline{T}}_{23} = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\beta_{\text{ef}}l} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\beta_{\text{ef}}l} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Con $\beta_{\text{ef}} = \omega\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}\mu_0}$ la constante de propagación de la línea y l la longitud de la línea. Cabe mencionar que la frontera #3 se encuentra justo antes de la impedancia superficial de salida.

Región entre las fronteras #3 **y** #4

Finalmente, esta última región describe la interfaz en el cambio de línea de transmisión con Z_{ef} a la línea con Z_0, además de una impedancia superficial conectada en paralelo en medio de las dos líneas. La solución de esta interfaz es igual a la solución entre las fronteras #1 y #2 pero intercambiando los subíndices del espacio libre (0) y el medio efectivo (ef):

$$\begin{pmatrix} V_3^+ \\ V_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0+Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_{\text{ef}}-Y_0}{2Y_{\text{ef}}} \\ \frac{Y_{\text{ef}}-Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_4^+ \\ V_4^- \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\overline{\overline{T}}_{34} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0+Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_{\text{ef}}-Y_0}{2Y_{\text{ef}}} \\ \frac{Y_{\text{ef}}-Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

A partir de las relaciones (5.3), (5.5) y (5.7), se obtiene que las diferencias de potencial en la frontera #1 y #4 se relacionan mediante la multiplicación de las matrices de transferencia:

$$\begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}+Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_0-Y_{\text{ef}}}{2Y_0} \\ \frac{Y_0-Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} & \frac{Y_0+Y_{\text{ef}}-Y_{\text{s}}}{2Y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\beta_{\text{ef}}l} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\beta_{\text{ef}}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0+Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{s}}+Y_{\text{ef}}-Y_0}{2Y_{\text{ef}}} \\ \frac{Y_{\text{ef}}-Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} & \frac{Y_{\text{ef}}+Y_0-Y_{\text{s}}}{2Y_{\text{ef}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_4^+ \\ V_4^- \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Que al operar da como resultado:

$$\begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_4^+ \\ V_4^- \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= e^{\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}-Y_0-Y_{\mathrm{s}})(-Y_{\mathrm{ef}}+Y_0+Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}} + e^{-\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0+Y_{\mathrm{s}})^2}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}},\\
M_{12} &= e^{\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0-Y_{\mathrm{s}})(-Y_{\mathrm{ef}}+Y_0+Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}} + e^{-\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0+Y_{\mathrm{s}})(Y_{\mathrm{ef}}-Y_0+Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}},\\
M_{21} &= e^{\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}-Y_0-Y_{\mathrm{s}})(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0-Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}} + e^{-\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0+Y_{\mathrm{s}})(-Y_{\mathrm{ef}}+Y_0-Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}},\\
M_{22} &= e^{\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(Y_{\mathrm{ef}}+Y_0-Y_{\mathrm{s}})^2}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}} + e^{-\mathrm{i}\beta_{\mathrm{ef}}l}\frac{(-Y_{\mathrm{ef}}+Y_0-Y_{\mathrm{s}})(Y_{\mathrm{ef}}-Y_0+Y_{\mathrm{s}})}{4Y_0Y_{\mathrm{ef}}}.
\end{aligned}$$

Al comparar con las definiciones de los parámetros S, se obtiene que el coeficiente M_{11} es el inverso del coeficiente de transmisión para una onda que incide desde #1, como se ilustra en la Figura 5.5 (c) [39]. Desarrollando el término correspondiente al coeficiente de transmisión se llega a:

$$t = \frac{Y_0Y_{\mathrm{ef}}}{-\mathrm{i}\sin(2\pi f\sqrt{\epsilon_{\mathrm{ef}}\mu_0}l)\left[\frac{Y_0^2+Y_{\mathrm{ef}}^2+Y_s^2}{2}+Y_0Y_s\right]+\cos(2\pi f\sqrt{\epsilon_{\mathrm{ef}}\mu_0}l)\left[Y_0Y_{\mathrm{ef}}+Y_{\mathrm{ef}}Y_s\right]}. \tag{5.11}$$

Vale la pena aclarar que esta solución es igual a la obtenida mediante el planteamiento del sistema efectivo por medio de las condiciones de frontera aplicadas a los campos. Comparando al sistema efectivo con un Fabry-Pérot son totalmente equivalentes, con la particularidad que las impedancias superficiales, que hacen las veces de superficies reflectoras, varían con la frecuencia. De hecho, como se mencionó anteriormente, para esta estructura se espera que la admitancia superficial corresponda a la admitancia de un capacitor, es decir, $Y_{\mathrm{s}} = -\mathrm{i}2\pi f C_{\mathrm{s}}$. Esta admitancia tiene como consecuencia que a frecuencias tendiendo a cero la transmisión se hace completa, lo cual le diferencia de un Fabry-Pérot usual. En cuanto al rango de frecuencias restante, la variación de la reflectividad para cada frecuencia conlleva a que la profundidad de los valles cambie, al igual que el ancho de banda absoluto. Claro está que la notoriedad de dichos cambios dependen en cuanto cambie la reflectividad a la entrada y salida. A continuación, se realizará la verificación numérica del modelo desarrollado, comparando los resultados obtenidos mediante la relación (5.11) con los obtenidos mediante simulación numérica.

5.2. Validación Numérica

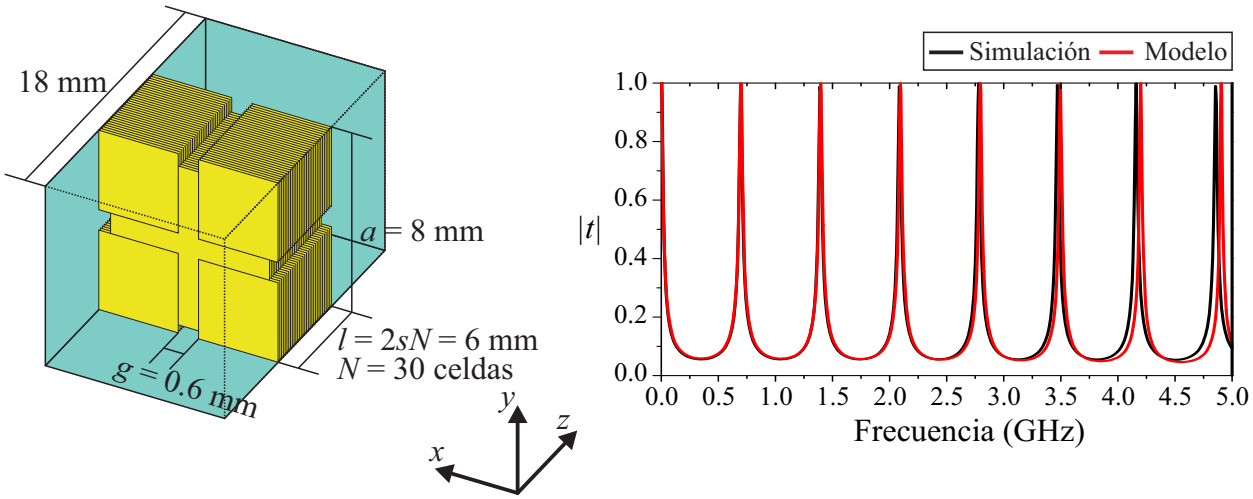

Figura 5.6: (a) Celda unitaria implementada en la simulación. (b) Módulo de la transmisión en función de la frecuencia del resultado obtenido mediante simulación numérica, en línea negra, y mediante la relación (5.11), en línea roja.

Para validar el modelo de líneas de transmisión, se simuló la estructura ilustrada en la Figura 5.6 (a) utilizando el software comercial *CST Microwave Studio*®. La muestra se compone de 30 celdas unitarias dirección z. La estructura se implementó utilizando conductor eléctrico perfecto, sin sustrato dieléctrico y con los parámetros geométricos que se muestran en la figura. A lo largo de las direcciones x y y se impusieron condiciones de frontera periódicas, mientras que hay dos puertos de Bloch-Floquet a 6 mm de los bordes de la estructura en el eje z. La onda externa es una onda plana viajando en la dirección z. La correspondiente magnitud del coeficiente de transmisión en función de la frecuencia es mostrado en la Figura 5.6 (b). La línea sólida negra corresponde a la simulación mientras que la roja se deriva de la relación (5.11). La curva simulada presenta un grupo discreto de frecuencias con transmisión completa uniformemente distanciadas en 0.701 GHz.

Utilizando la propiedad que en resonancia la longitud es $l = n\lambda/2 = n\lambda_0/2\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}/\epsilon_0}$, donde λ es la longitud de onda en el medio, λ_0 la longitud de onda en el espacio libre, n es un número entero, se puede derivar desde la simulación que la permitividad efectiva del medio es $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{sim}} = 1270\epsilon_0$. Este valor no es lejano del obtenido mediante la ecuación (5.1), el cual es $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{m}} = 1156\epsilon_0$, donde los subíndices "m" o "sim" simbolizan que la cantidad proviene del modelo o es extraído de simulación con la relación mencionada al inicio de este párrafo,

respectivamente. Como se puede observar, hay un acuerdo excelente entre la simulación y el modelo de línea de transmisión y tal como se había predicho, cuando $f = 0$ GHz, la transmisión es completa. Cabe recordar que el valor del condensador en las caras externas queda como un parámetro libre a ajustar, en este caso se obtiene que la impedancia superficial es $Y_s = -\mathrm{i}(1.64 \times 10^{-12}\mathrm{F})f$.

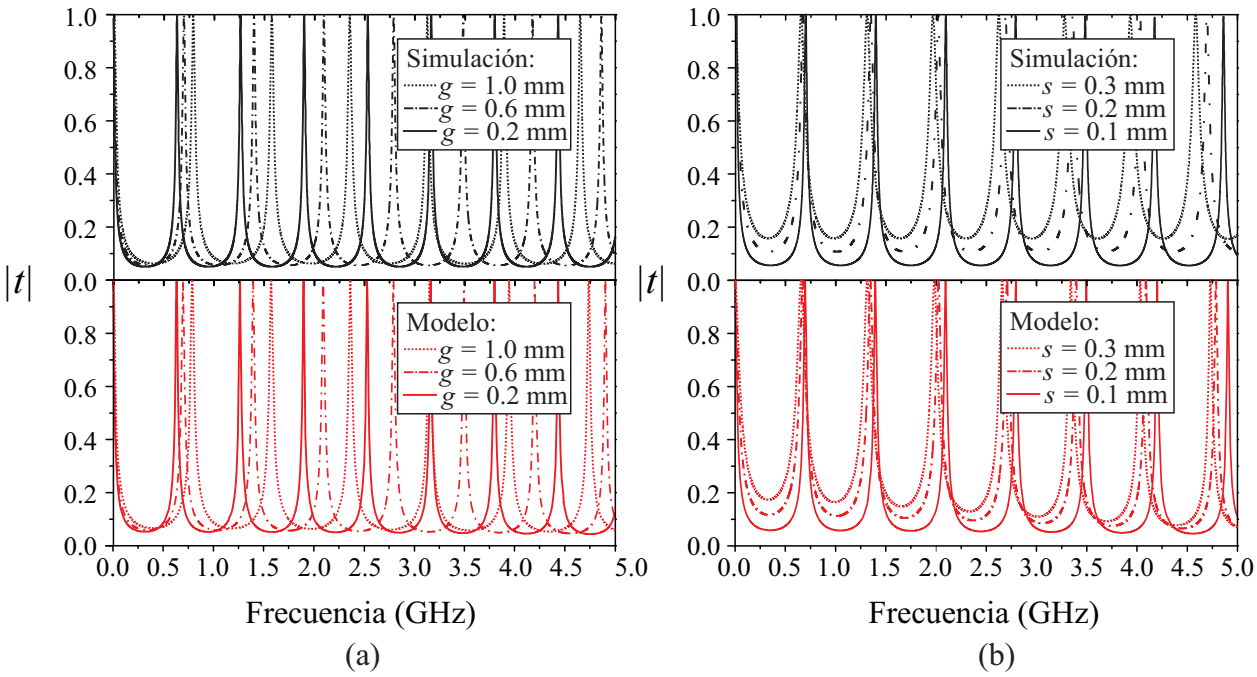

Figura 5.7: Estudio paramétrico del comportamiento de la transmisión en función de la frecuencia para la estructura de la Figura 5.6 (a) con variación en (a) distancia entre parches de la misma capa "g" y (b) distancia entre capas "s".

Como se infiere de la Figura 5.6 (b), el ancho de banda absoluto (Δf) de cada resonancia no varía de forma visible, lo cual implica que la reflectividad en las fronteras no debe cambiar significativamente. Para demostrar es hecho, se debe obtener la reflexión de la impedancia superficial adaptada a la superficie. Ésta se puede obtener recordando que el sistema no posee pérdidas en la ley de la conservación de la energía ($1 = |Y_{\mathrm{ef}}/Y_0||t|^2 + |r|^2$). La transmisión se puede extraer como la inversa de la componente $(1,1)$ en la matriz de transferencia $\overline{\overline{T}}_{12}$ de la relación (5.4), de modo que el módulo al cuadrado de la reflexión es:

$$|r|^2 = 1 - \left|\frac{Y_{\mathrm{ef}}}{Y_0}\right| \left|\frac{2Y_0}{Y_0 + Y_{\mathrm{ef}} + Y_s}\right|^2 \tag{5.12}$$

Debido a que la admitancia efectiva es mucho mayor que la admitancia superficial y la admitancia del espacio libre en el rango de frecuencias considerado, el módulo de la reflexión en la interfaz es básicamente constante y aproximadamente $|r| \approx \sqrt{1 - 4Y_0/Y_{\mathrm{ef}}}$, por lo cual

Tabla 5.1: Parámetros característicos de la estructura en la Figura 5.6 (a) con las variaciones correspondientes de g y s.

Estructura	Q	λ_0 (m)	$\epsilon_{\text{ef}}^{\text{m}}/\epsilon_0$	$\epsilon_{\text{ef}}^{\text{sim}}/\epsilon_0$	Error ϵ_{ef}(%)	Y_{s}
$g = 1.0$ mm	22	0.381	900	1009	11	-i $(8.98 \times 10^{-12}\text{F})f$
$g = 0.6$ mm	28	0.428	1156	1270	9	-i $(10.30 \times 10^{-12}\text{F})f$
$g = 0.2$ mm	32	0.473	1444	1556	7	-i $(9.61 \times 10^{-12}\text{F})f$
$s = 0.3$ mm	10	0.457	128	161	20	-i $(7.73 \times 10^{-12}\text{F})f$
$s = 0.2$ mm	14	0.445	289	344	16	-i $(8.98 \times 10^{-12}\text{F})f$
$s = 0.1$ mm	28	0.428	1156	1270	9	-i $(10.30 \times 10^{-12}\text{F})f$

la influencia en el cambio de la impedancia superficial es despreciable. En esta estructura se obtiene que el factor de calidad, $Q = f/\Delta f$, del primer pico a frecuencia no nula es $Q \approx 28$; este resultado es válido para simulación y el modelo de línea de transmisión. Por otra parte, es importante notar que el parámetro de red es $a \approx \lambda_0/53$, y el espesor del material es $l \approx \lambda_0/71$.

Con el fin de estudiar el comportamiento de la estructura, se realizaron simulaciones variando los parámetros s y g independientemente, manteniendo invariante los otros parámetros de la Figura 5.6 (a). En la Figura 5.7 se ilustran los resultados obtenidos mediante la simulación y el modelo de líneas de transmisión, mientras que en la Tabla 5.1 están consignados los parámetros característicos de cada estructura. En esta tabla, debido al buen acuerdo entre las curvas del modelo teórico y simulado, no se diferencia entre el factor de calidad (Q) y la longitud de onda en espacio libre (λ_0), ambas calculadas en el primer pico de frecuencia no nula, de una curva u otra.

A partir de la Figura 5.5 (a) se observa que al disminuir la distancia entre los parches, g, cada capa se asemeja más a una lámina continua de conductor perfecto, es decir, un espejo. Lo cual provoca que la reflectivaidad se incremente y como consecuencia el factor de calidad aumente. De modo similar, acercar las capas (disminuir s) tiene el mismo efecto sobre la reflectividad y el factor de calidad. Como se observa, de la Tabla 5.1, el error porcentual entre $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{m}}$ y $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{sim}}$ disminuye cuando g decrece, incluso siendo comparable con s, lo cual viola las condiciones de suficiencia del modelo. Ésto significa que, para $s = 0.1$ mm con cada variación de g, son más relevantes los efectos en la curvatura de las líneas del campo eléctrico entre los

condensadores formados por diferentes capas, en comparación al condensador formado por los bordes de los parches en la misma capa. Lo anterior se corrige disminuyendo g, y como consecuencia el área de superposición considerada en el modelo de placas paralelas es una mejor aproximación. Sin embargo, ésto tiene un límite después del cual el condensador entre los bordes de las placas se hace relevante frente al condensador entre capas diferentes y el modelo pierde validez.

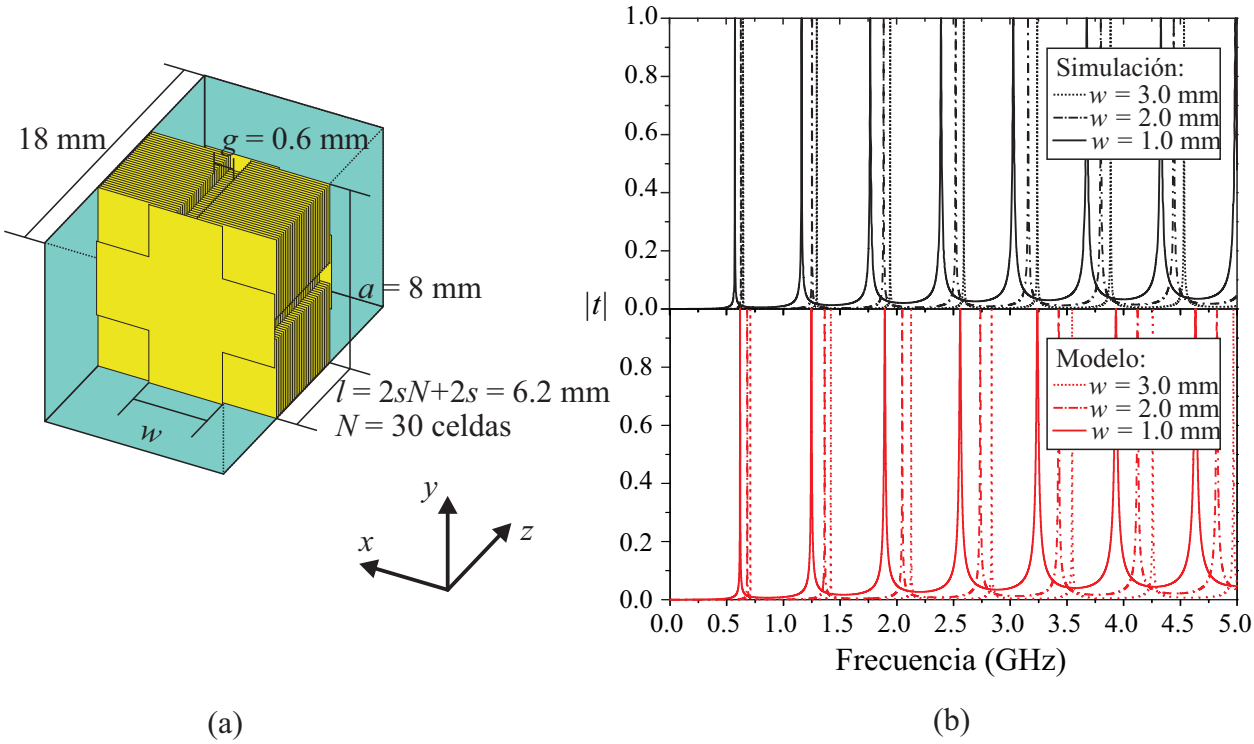

Figura 5.8: Vista en perspectiva de una sección del RFP cubierto delante y detrás por una superficie reflectiva (a), y el coeficiente de transmisión en función de la frecuencia obtenido mediante simulación y el modelo para diferentes anchos w (b).

En el caso que se mantiene $g = 0.6$ mm y se reduce s también se observa una disminución en el error. El motivo de ésto es que al acercar las placas, el condensador formado por dos capas cobra importancia sobre el condensador entre los bordes de los parches. Además, al acercarlas se garantiza una reducción del número de lineas de campo eléctrico que conforman el condensador entre los bordes.

Para incrementar Q, la estructura debe ser cubierta en ambos extremos con una lamina de alta reflectividad. En la Figura 5.8 (a) una superficie metálica en forma de cruz se colocó justo en frente y detrás de la estructura de la Figura 5.6 (a), cada una a distancia s. Estas cruces representan elementos inductivos, por lo que se espera una reflexión fuerte en función

Tabla 5.2: Parámetros característicos de la estructura en la Figura 5.8 (a) con variaciones del ancho w.

Estructura	Q^{sim}	Q^{m}	λ_0^{sim} (m)	λ_0^{m} (m)	$\epsilon_0^{\mathrm{sim}}/\epsilon_0$	Y_{s}
$w = 3.0$ mm	8.1×10^3	8.3×10^3	0.462	0.423	1390	$\mathrm{i}\,(0.88\times10^{-9}\mathrm{H}f)^{-1}$
$w = 2.0$ mm	2.2×10^3	2.0×10^3	0.477	0.440	1483	$\mathrm{i}\,(1.88\times10^{-9}\mathrm{H}f)^{-1}$
$w = 1.0$ mm	4.8×10^2	4.8×10^2	0.521	0.485	1763	$\mathrm{i}\,(4.59\times10^{-9}\mathrm{H}f)^{-1}$

de la frecuencia. Además, la nueva admitancia superficial puede considerarse, en primera aproximación, únicamente inductiva ($Y_s = \mathrm{i}(2\pi f L_{\mathrm{s}})^{-1}$) pues como se intuye de la geometría, a bajas frecuencias la impedancia del inductor asociado a las cruces es menor a la impedancia del condensador que se forma entre la cruz y la primera capa de parches cuadrados. De hecho, al examinar la transmisión en (5.11), se observa que a frecuencias tendiendo a cero la transmisión es nula debido a que Y_{s} se hace infinita. En la Figura 5.8 (b) se puede observar el módulo de la transmisión en función de la frecuencia para distintos anchos de las cruces, w, mientras que en la Tabla 5.2 se muestran algunos parámetros correspondientes a cada estructura extraídos de la simulación y el modelo. Las curvas en negro se han obtenido mediante simulación numérica, mientras que las líneas en rojo corresponden al modelo. Como se observa de esta figura, a diferencia del caso sin cruces (Figura 5.6 y 5.7), el ancho de banda absoluto cambia de pico en pico lo cual significa que la reflectancia en las interfaces varia considerablemente.

En la Tabla 5.2 no se incluye valor de la permitividad efectiva obtenida a partir modelo ya que es única y constante, con un valor de $\epsilon_{\mathrm{ef}}^{\mathrm{m}} \approx 1156\epsilon_0$, pues según el modelo las cruces que se han adicionado a la estructura corresponden a admitancias superficiales con la función de aumentar la reflectividad, mas no se considera que éstas interactúen con las capas internas de modo que modifiquen la permitividad del medio. De esta tabla se puede observar que aumentando el ancho de las cruces, lo cual equivale a reducir la impedancia asociada, el factor de calidad se incrementa significativamente, adquiriendo el valor de $Q \approx 8.1\times10^3$ para el primer pico cuando $w = 3$ mm. En este caso, la separación entre picos fue 0.462 m, lo cual lleva a una permitividad efectiva de $\epsilon_{\mathrm{ef}}^{\mathrm{sim}} \approx 1390\epsilon_0$. Finalmente, vale la pena notar que el espesor de este RFP es $l \approx \lambda_0/74$ y la periodicidad $a \approx \lambda_0/58$. Cabe recordar que los factores de calidad de interferometros de Fabry-Pérot comerciales se encuentran en el orden de 10^4, con el fin de alcanzar dichas magnitudes es suficiente aumentar el ancho de la cruz, de hecho para $w = 3$ mm el factor de calidad es muy próximo a lo deseado.

Todo lo realizado hasta el momento se ha llevado a cabo bajo la suposición que los materiales no poseen pérdidas, es decir, el conductor es conductor eléctrico perfecto y el sustrato dieléctrico tiene la permitividad del espacio libre, ϵ_0, aunque en general podría tener cualquier valor siempre y cuando sea real. En este tipo de fenómenos resonantes, en especial aquellos con un factor de calidad alto, como es el caso de la Figura 5.8, es común que al introducir pérdidas la potencia asociada a la resonancia disminuya considerablemente y sea absorbida en buena parte.

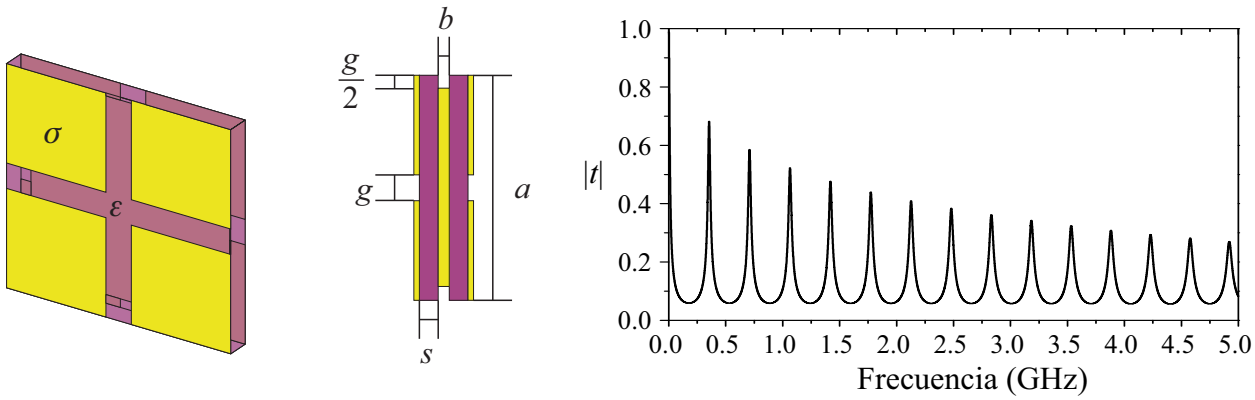

Figura 5.9: (a) Vista en perspectiva y (b) lateral de la celda unitaria simulada. Los parámetros geométricos correspondientes son $a = 8$ mm, $b = 18$ μm, $s = 0.203$ mm y $g = 0.6$ mm. Se utilizó cobre como conductor y sustrato Rogers 4003. (c) Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia

Con el objetivo de estudiar la influencia de las pérdidas en los materiales, se simuló una estructura con la celda unitaria ilustrada Figura 5.9 (a) y (b). Cabe recordar que se imponen condiciones periódicas en direcciones x y y mientras que en z hay 30 celdas unitarias en profundidad. En este caso los parámetros geométricos a y g son iguales a los descritos en la Figura 5.6 (a) mientras que $s = 0.203$ mm y el conductor tiene un espesor de $b = 18$ μm. Por otra parte, se considera que el conductor es cobre, el cual posee una conductividad de $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, y el dieléctrico es Rogers 4003 que posee una permitividad relativa igual a $\epsilon = 3.55(1 + \mathrm{i}0.0027)$. Como se observa en el resultado de la magnitud de la transmisión en función de la frecuencia, mostrado en la Figura 5.9 (c), las frecuencias de resonancia disminuyen comparativamente respecto al caso estudiado en la Figura 5.6 (b), debido al aumento en la permitividad entre las capas de conductor. En un modelo de circuitos es equivalente al efecto de introducir un dieléctrico en cada condensador, formado por los parches conductores (Figura 5.3 (a)), y aunque la distancia entre éstos incrementó, no es suficiente para contrarrestar el corrimiento en las frecuencias provocado por el dieléctrico. De la Figura 5.6 (b), se puede observar que la energía transmitida para el primer pico de

frecuencia no nula es inferior al 50 % (0.707 en escala lineal) y el factor de calidad asociado

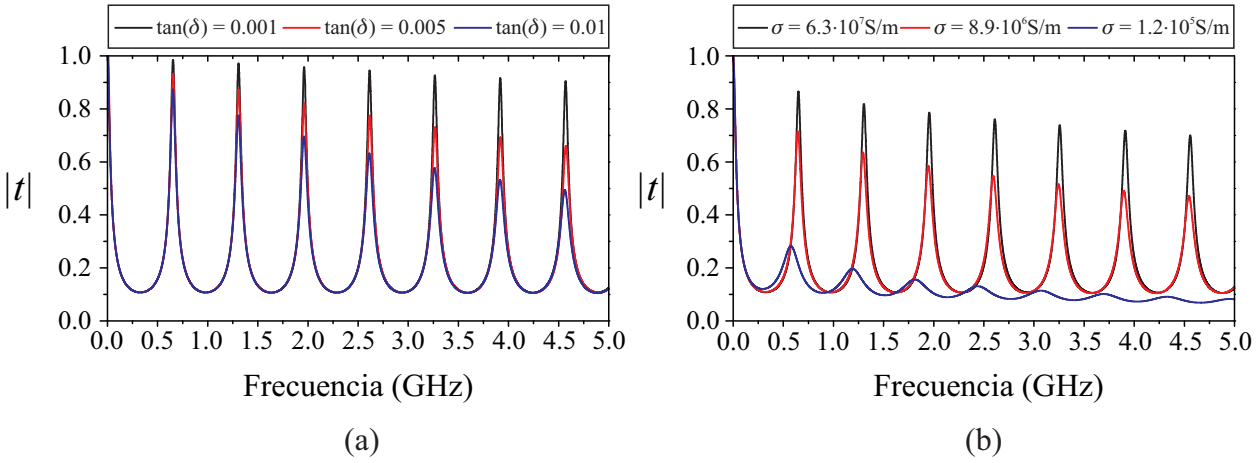

Figura 5.10: Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes valores de tangente de pérdidas (a), y conductividades (b).

es $Q \approx 18$. Además, se obtiene una permitividad efectiva de $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{sim}} \approx 1088$ y los tamaños comparados con la longitud de onda son $l \approx \lambda_0/66$ y $a \approx \lambda_0/104$.

A fin de conocer la relevancia de cada una de las contribuciones en la pérdida de energía, es decir, las causadas por el conductor y por el dieléctrico, se simularon dos variaciones de la estructura de la Figura 5.9 (a). La primera variación consiste en utilizar conductor eléctrico perfecto y cambiar el valor de la tangente de pérdidas del sustrato con permitividad relativa $\epsilon = 1 + \mathrm{i}\tan\delta$. En la segunda variación se fija la permitividad del sustrato, $\epsilon = 1$, y se cambia la conductividad del material conductor. Los resultados obtenidos para cada caso se representan en la Figura 5.10 (a) y (b), respectivamente. Los valores considerados para las tangentes de pérdidas cubren el rango típico de sustratos en los microondas, con el valor más alto asociado sustratos como el FR4, aunque el modulo de la permitividad no es el mismo. Por otra parte, en los materiales conductores más usuales como el cobre y la plata, la conductividad es del orden de 10^7 S/m, mientras que en conductores más pobres como el grafito o el nicromo, es del orden de 10^5 S/m. Como se puede observar en las figuras, en los rangos considerados la variación de la conductividad es la única que produce cambios visibles en las frecuencias de resonancia.

Teniendo en cuenta la información proporcionada por la Figura 5.10, es directo que la principal fuente de pérdidas se concentra en el conductor. Adicionalmente, para la Figura 5.10 (a) los factores de calidad son $Q \approx 14$, 13 y 12 en orden ascendente del valor de $\tan\delta$, mientras que en los resultados de la Figura 5.10 (b) los factores de calidad son $Q \approx 13$, 10 y 3 en

orden descendente de conductividades.

A continuación, se estudia la influencia de las pérdidas en la estructura de la Figura 5.11 (a) y (b) que es equivalente a la estructura de la Figura 5.8 (a) con materiales. La estructura tiene 30 celdas unitarias de profundidad y se replica periódicamente en direcciones x y y.

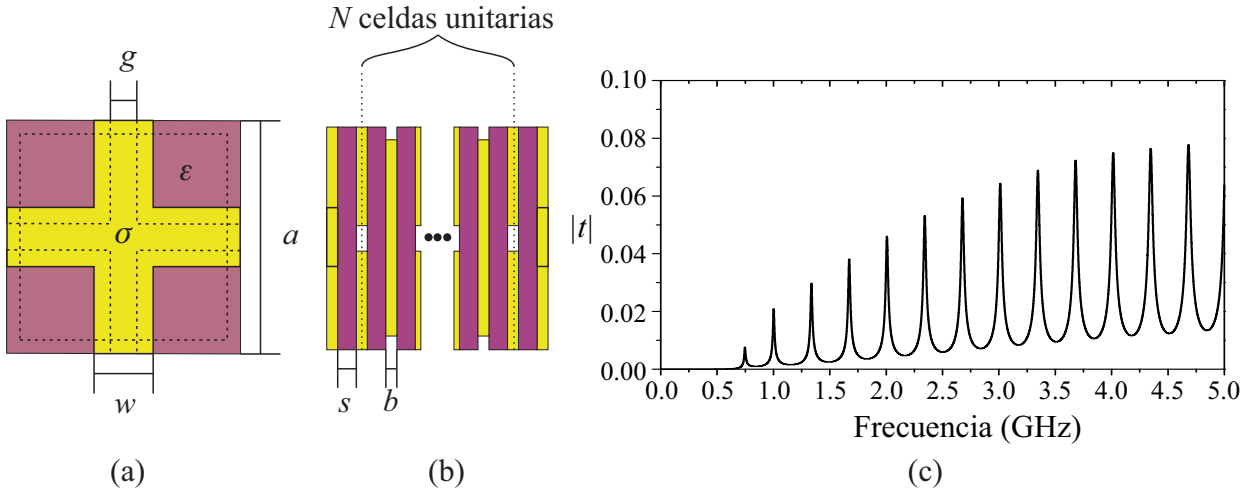

Figura 5.11: (a) Vista en perspectiva y (b) lateral de una sección del RFP cubierto por superficies reflectivas. Los parámetros geométricos correspondientes son $a = 8$ mm, $b = 18$ μm, $s = 0.203$ mm, $g = 0.6$ mm y $w = 3$ mm. Se utilizó cobre como conductor y sustrato Rogers 4003. (c) Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia

Como se puede observar de la Figura 5.11 (c), la energía transmitida es inferior al 0.01 % para el primer pico y va en aumento con cada resonancia, a diferencia del caso ilustrado en la Figura 5.9 que disminuye con el aumento de la frecuencia. En el primer pico se obtiene que $Q \approx 69$, $\epsilon_{\text{ef}}^{\text{sim}} \approx 235 \times 10^2$ mientras que los tamaños comparados con la longitud de onda son $l \approx \lambda_0/31$ y $a \approx \lambda_0/50$.

De igual forma al caso sin superficies reflectantes, para esta estructura se separaron las contribuciones a las pérdidas provenientes del dieléctrico y el material conductor a fin de conocer quien es el principal causante de las pérdidas de energía. Como se observa en la Figura 5.12, es evidente que el conductor es el factor crucial a fin de obtener una mayor transmisión. Sin embargo, teniendo en cuenta que la plata y el cobre hacen parte de los materiales convencionales con mayor conductividad ($\sigma \sim 10^7$ S/m), no hay mucho que se pueda rescatar por esta vía. Por otra parte, se puede estudiar la opción de remplazar el conductor por algún material superconductor de altas temperaturas, y a su vez sustituir el dieléctrico por zafiro que posee una tangente de pérdidas del orden de 10^{-7} a 77 K. Vale

la pena mencionar que los factores de calidad para las curvas de la Figura 5.12 (a) son $Q \approx 8.7 \times 10^2$, 2.0×10^2 y 99 en orden ascendente de las tangentes de pérdidas, mientras que los factores de calidad de las curvas en la Figura 5.12 (b) son $Q \approx 93$, 35 y 4 en orden descendente de conductividades. Es importante notar que estos factores de calidad son muy inferiores a aquel obtenido en la Figura 5.8 que tiene un valor de $Q \approx 8.1 \times 10^3$.

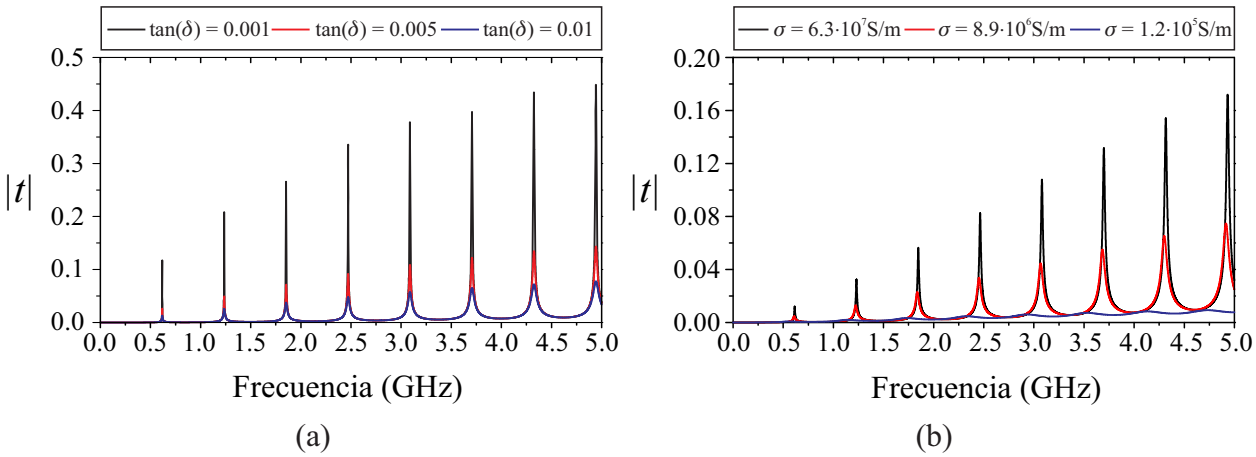

Figura 5.12: Magnitud de la transmisión en función de la frecuencia para diferentes valores de tangente de pérdidas (a), y conductividades (b), correspondientes a la estructura de la Figura 5.11 (a)

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha explorado el diseño y estudio de metasuperficies para el filtrado y absorción en el rango de microondas. A partir de las propiedades electromagnéticas de pantallas conductoras y la modelación de éstas mediante circuitos sencillos y líneas de transmisión, se ha logrado el diseño de algunas aplicaciones en dispositivos de microondas. Con el fin de mostrar el fruto de este trabajo, a continuación se presenta un conjunto de conclusiones fundamentales.

Capítulo 1: Modelo de Impedancias Superficiales

- Se ha desarrollado un modelo de impedancias superficiales para arreglos bidimensionales teniendo en cuenta únicamente los términos dipolares de la expansión, incluyendo las interacciones entre las partículas. Ésto se logró mediante la definición de las polarizabilidades efectivas, donde sus valores tienen en cuenta las interacciones con la red mediante las constantes de interacción. Por otra parte, éste sistema se sustituyó por uno efectivo que soporta corrientes eléctricas y magnéticas efectivas que da razón de las discontinuidades en las componentes tangenciales de los campos.

- En aquellos sistemas que poseen simetría de espejo y la celda unitaria admite ser modelada como un circuito, se ha desarrollado un procedimiento sencillo para relacionar la impedancia asociada al circuito con la impedancia superficial y ésta con los coeficientes de reflexión y transmisión.

- En base a las relaciones entre los campos con las polarizabilidades y la matriz de dispersión, se diseñó un absorbente perfecto resonante en el rango de las microondas. Con este fin se utilizaron resonadores SRRs, en los cuales se modificó su acoplamiento, con el fin de eliminar la reflexión. Posteriormente, se varió la conductividad del material para obtener alta absorción. Para esta estructura se obtuvo una absorción del 98 % a una frecuencia de 3.45 GHz con un ancho de banda del 14 %.

Capítulo 2: Restricciones Fundamentales de Metasuperficies Autocomplementarias

- Utilizando propiedades tales como la conservación de la energía y las condiciones de frontera, se logró demostrar que para cualquier superficie hecha de conductor eléctrico perfecto, los coeficientes de transmisión y reflexión siguen una trayectoria circular en el plano complejo. Estas circunferencias tienen radio $1/2$ para ambos coeficientes, sin embargo, la transmisión está centrada en $(1/2, 0)$, mientras que la reflexión está centrada en $(-1/2, 0)$.

- Se ha encontrado que en cualquier metasuperficie autocomplementaria de conductor eléctrico perfecto, bajo incidencia normal, los coeficientes de transmisión (reflexión) de polarizaciones ortogonales están desfasados en $\pm 90°$, independientemente de la frecuencia de trabajo, siempre y cuando $a < \lambda$, ya que desde este punto aparecen los lóbulos de difracción.

- A modo de aplicación, se implementaron las propiedades de las metasuperficies autocomplementarias en el diseño de varias metasuperficies con la propiedad de conversión de polarización lineal a circular, tanto en la onda reflejada como en la transmitida, logrando un AB-RA-3dB del 9 %.

Capítulo 3: Convertidores de Polarización Lineal a Circular Delgados de Banda Ancha Basados en Metasuperficies Autocomplementarias de Zigzag

- Con base en las propiedades de las metasuperficies autocomplementarias se lograron diseñar varias estructuras con forma de zigzag, en conductor eléctrico perfecto y sin sustrato, que poseen la propiedad de conversión de polarización lineal a circular con AB-RA-3dB superiores al 53 %.

- Utilizando el modelo de impedancias superficiales se ha logrado describir satisfactoriamente el comportamiento de la estructura de zigzag. Además, se demostró que el límite superior del AB-RA-3dB es ≈ 70.5 %.

- Al estudiar los efectos del sustrato dieléctrico y de sustituir el conductor eléctrico perfecto por cobre, se encontró que el fenómeno de conversión de polarización se destruye, sin embargo, mediante el modelo de circuito se logró sintonizar la superficie para

obtener nuevamente dicho fenómeno.

- A nivel experimental, se fabricó una muestra con la propiedad de conversión de polarización lineal a circular, con un AB-RA-3dB del 52.8 % en transmisión y 51.4 % en reflexión, con un acuerdo excelente con lo obtenido mediante simulaciones numéricas.

Capítulo 4: Metasuperficies para Filtrado Angular

- A partir de los modelos de líneas de transmisión, se exploró un camino para explicar el fenómeno de filtrado en ángulo y frecuencia en algunas metasuperficies. Con este fin, se realizó una descripción de los elementos fundamentales de una línea de transmisión convencional, tales como la constante de propagación, velocidad de grupo, etc, y se modificaron los elementos de impedancia de la línea para obtener diferentes tipos de filtros angulares, los cuales se diferenciaron básicamente por tener una relación de dispersión creciente o decreciente.

- Por otra parte, se logró predecir la frecuencia resonancia del filtro angular para cualquier ángulo de incidencia a partir de la relación de dispersión. Ésto se logró teniendo en cuenta que en la resonancia la onda externa y la onda superficial deben estar acopladas, por tanto, la frecuencia de resonancia es aquella en la cual se interceptan las dos relaciones de dispersión (de la onda externa y la onda superficial).

- Con base en los modelos de líneas de transmisión se propusieron dos metasuperficies con la función de filtrado angular. La primera de ellas se inspiró en cadenas de EC-SRRs rectangulares como optimización de las cadenas de EC-SRRs circulares. Por medio del modelo desarrollado se logró predecir que esta metasuperficie tiene una relación de dispersión creciente para un modo TE_y. Además, en el caso ideal y bajo incidencia normal ésta tiene una apertura angular de 8.9°, dentro de los cuales la potencia transmitida es menor al 50°. La segunda estructura se basó en resonadores extendidos, el cual tiene una relación de dispersión decreciente. Esta estructura posee la particularidad de que una onda plana en modo TM_x no le puede excitar en incidencia normal, sin embargo, bajo incidencia oblicua excita al modo deseado. Además, se pudo comprobar que la apertura angular en incidencia oblicua es mucho más pequeña que en el primer filtro, lo cual le hace muy útil para diseñar filtros angulares fuera de incidencia normal.

Capítulo 5: Resonador Fabry-Pérot Metamaterial

- Se ha diseñado un Fabry-Pérot delgado comparado con la longitud de onda en el vacío. Ésto fue posible utilizando medios dieléctricos artificiales, caracterizados por tener constantes dieléctricas elevadas.

- Con el objetivo de describir el comportamiento de ésta estructura, se recurrió a los modelos de líneas de transmisión para obtener la propagación de la onda a través del medio, donde los resultados de las curvas de transmisión muestran un acuerdo excelente con las simulaciones numéricas.

- En un primer diseño de la estructura, sin sustrato y con conductor eléctrico perfecto, se logró un factor de calidad de $Q \approx 28$. Sin embargo, al agregar una superficie de alta reflectividad, se alcanzó un factor de calidad de $Q \approx 8.1 \times 10^3$.

- Al tener en cuenta los efectos de las pérdidas debido al sustrato dieléctrico y al conductor, se obtiene que la energía transmitida es alrededor del 0.1 %. Sin embargo, se espera que al utilizar materiales no convencionales, como superconductores, se logren obtener transmisiones cercanas al 100 %.

Productos

- J. P. del Risco, J. D. Baena and J. D. Ortiz, "Extremely thin infrared absorbers made of metallo-dielectric core-shell nanospheres," Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), 2013 USNC-URSI, Lake Buena Vista, FL, 2013, pp. 59-59.

- J. P. Del Risco, J. D. Baena, J. D. Ortiz, "Absorbente Perfecto Delgado Con Base En Metamateriales Para Frecuencias Ópticas," 1st Workshop on Metamaterials and Photonic Crystals (MEPHOC), Revista Momento, 2013, Armenia, pp 49-60.

- J. D. Ortiz, J. P. del Risco, J. D. Baena, V. Losada, F. Medina and J. L. Araque, "Metasurfaces for angular filtering and beam scanning," 8th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS), 2014, Lyngby, 2014, pp. 34-36.

- J. D. Baena, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk, S. B. Glybovski and P. A. Belov, "Self-complementary zig-zag metasurfaces for designing circular polarizing beam splitters," 9th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS), 2015, Oxford, 2015, pp. 364-366

- J. P. del Risco and J. D. Baena, "Extremely thin Fabry-Perot resonators based on high permitivity artificial dielectric," 2016 10th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS), Chania, 2016, pp. 40-42.

- J. D. Baena, J. P. del Risco and S. Glybovski, "Low plasma frequency zigzag metamaterials," 2016 10th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS), Chania, 2016, pp. 37-39.

- J. D. Baena, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk, S. B. Glybovski and P. A. Belov, "Self-complementary metasurfaces for linear-to-circular polarization conversion," Phys. Rev. B, vol. 92, issue 24, 2015, pp. 245413, number of pages-9.

- J. D. Baena, S. B. Glybovski, J. P. del Risco, A. P. Slobozhanyuk and P. A. Belov, "Broadband and Thin Linear-to-Circular Polarizers Based on Self-Complementary Zigzag Metasurfaces," IEEE TAP (en publicación).

Bibliografía

[1] N. Engheta and R. Ziolkowski, *METAMATERIALS: Physics and Engineering Explorations*. IEEE Press and John Wiley and Sons, 2006.

[2] P. Ikonen, "Artificial dielectrics and magnetics in microwave engineering: A brief historical revision," *Helsinki University of Technology*, pp. 1–6, 2011.

[3] W. E. Kock, " Metal-lens antennas," in *IRE*, vol. 34, 1946, pp. 828–836.

[4] ——, "Metallic delay lenses," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 58–82, 1948.

[5] S. B. Cohn, "Analysis of the metalstrip delay structure for microwave lenses," *Journal of Applied Physics*, vol. 20, no. 3, pp. 257–262, 1949.

[6] J. Brown, "Artificial dielectrics," *Progress in dielectrics*, vol. 2, pp. 195–225, 1960.

[7] V. G. Veselago., "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of and ," *Sov. Phys. Uspekhi*, vol. 47, no. 11, pp. 2115–2122, 1967.

[8] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robins, and W. J. Stewart, "Low frequency plasmons for thin-wire structure," *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 10, pp. 4785–4809, 1998.

[9] ——, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, p. 2075, 1999.

[10] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, "Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 4184–4187, 2000.

[11] H. Chen, A. J. Taylor, and N. Yu, "A review of metasurfaces: physics and applications," *Reports on Progress in Physics*, vol. 79, no. 7, p. 076401, 2016.

[12] Y. S. Kivshar, "From metamaterials to metasurfaces and metadevices," *Nanosystems: Physics, Chemistry, Methamatics*, vol. 6, no. 3, pp. 346–352, 2015.

[13] D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire, "Metamaterials and Negative Refractive Index," *Science*, vol. 305, no. 5685, pp. 788–792, 2004.

[14] N. Yu and F. Capasso, "Flat optics with designer metasurfaces," *Nature Materials*, vol. 13, pp. 139–150, 2014.

[15] S. B. Glybovski, S. A. Tretyakov, P. A. Belov, Y. S. Kivshar, and C. R. Simovski, "Metasurfaces: From microwaves to visible," *Physics Reports*, vol. 634, pp. 1 – 72, 2016.

[16] N. I. Landy, S. Sajuyigbe, J. J. Mock, D. R. Smith, and W. J. Padilla, "A Perfect Metamaterial Absorber," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, no. 20, p. 207402, 2008. [Online]. Available: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.207402

[17] X. Liu, T. Starr, A. F. Starr, and W. J. Padilla, "Infrared Spatial and Frequency Selective Metamaterial with Near-Unity Absorbance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, no. 20, p. 207403, 2010. [Online]. Available: http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.207403

[18] J. Hao, J. Wang, X. Liu, W. J. Padilla, L. Zhou, and M. Qiu, "High performance optical absorber based on a plasmonic metamaterial," *App. Phys. Lett.*, vol. 96, no. 25, p. 251104, 2010. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1063/1.3442904

[19] J. J. Pakan, "Antenna polarizer having two phase shifting mediums," U.S. Patent No. 2978702, 1961.

[20] D. S. Lerner, "A wave polarization converter for circular polarization," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 13, p. 3, 1965.

[21] R. J. Mailloux and G. R. Forbes, "An array Technique with grating-lobe suppression for limited-scan applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21,

no. 5, pp. 597–602, 1973.

[22] R. J. Mailloux, " Synthesis of spatial filters with Chebyshev characteristics ," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 24, no. 2, pp. 174–181, 1976.

[23] J. H. Pozgay, S. Zamoscianyk, and L. R. Lewis, "Synthesis of Plane Stratified Dielectric Slab Spatial Filters Using Numerical Optimization Techniques," Tech. Rep. ADA037960, Dec. 1976.

[24] A. C. Schell and R. J. Mailloux, "Metallic Grating Spatial Filter for Directional Beam Forming Antenna," Patent US 4 169 268 A, Sep., 1979.

[25] P. R. Franchi and R. J. Mailloux, "Theoretical and Experimental Study of Metal Grid Angular Filters for Sidelobe Suppression," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 3, pp. 445–450, 1983.

[26] E. L. Rope and G. Tricoles, "An Angle Filter Containing Three Periodically Perforated, Metallic Layers," in *IEEE AP-S International Symposium*, Jun. 1979, pp. 818–820.

[27] D. Kinowski and M. Guglielmi, " Synthesis of Angular Bandpass Filters," in *24th European Microwave Conference*, vol. 1, 1994, pp. 448–453.

[28] D. G. Gentle, R. E. Borland, H. D. GrMths, and A. L. Cullen, "A Wire Grid Angular Filter for Antenna Pattern Measurement," in *IEEE AP-S International Symposium*, vol. 2, 1994, pp. 930–933.

[29] D. Kinowski, M. Guglielmi, and A. G. Roederer, "Angular bandpass filters: an alternative viewpoint gives improved design flexibility," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 4, pp. 390–395, 1995.

[30] M. Thevenot, C. Cheype, A.Reineix, and B. Jecko, "Directive photonic-bandgap antennas ," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 11, pp. 2115–2122, 1999.

[31] Y. J. Lee, J. Yeo, R. Mittra, and W. S. Park, "pplication of Electromagnetic Band- gap (EBG) Superstrates With Controllable Defects for a Class of Patch Antennas as Spatial

Angular Filters," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 11, pp. 224–235, 2005.

[32] J. D. Ortiz, J. D. Baena, V. Losada, F. Medina, R. Marqués, and J. L. A. Quijano, "Self-complementary metasurface for designing narrow band pass/stop filters," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 23, no. 6, pp. 291–293, 2013.

[33] J. D. Baena, "Resonating elements longer than the unit cell: A way to make very dense broadband left-handed metamaterials," in *Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS), 2015 9th International Congress on*, 2015, pp. 361–363.

[34] I. Awai, H. Kubo, T. Iribe, D. Wakamiya, and A. Sanada, "An artificial dielectric material of huge permittivity with novel anisotropy and its application to a microwave BPF," in *2003 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 2, 2003, pp. 1085–1088.

[35] A. Munir, N. Hamanaga, H. Kubo, and I. Awai, "Artificial dielectric resonator with novel anisotropic permittivity and its te10d mode waveguide filter application," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E88-C, pp. 40–46, 2005.

[36] I. Awai, Y. Maeda, D. Hanatani, and M. Fujimoto, "Multi-strip LTCC resonator BPF," *IEICE Electron. Express*, vol. 5, no. 22, pp. 978–982, 2008.

[37] Y. Ma, B. Rejaei, and Y. Zhuang, "Artificial Dielectric Shields forIntegrated Transmission Lines," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 18, no. 7, pp. 431–433, 2008.

[38] K. Takahagi and E. Sano, "High-Gain Silicon On-Chip Antenna With Artificial Dielectric Layer," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 10, pp. 3624–3629, Oct 2011.

[39] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2011.

[40] I. Tsukerman and V. A. Markel, "A non-asymptotic homogenization theory for periodic electromagnetic structures," vol. 470, no. 2168, 2014.

[41] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York: Wiley, 1999.

[42] J. D. Ortiz and J. D. Baena, "Estudio de estructuras metalo-dieléctricas periódicas con propiedades electromagnéticas exóticas," Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[43] F. A. Peterson, S. L. Rat, and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, 1st ed. Wiley-IEEE Press, 1997.

[44] R. Marques, F. Martin, and M. Sorolla, *Metamaterials with negative parameters: theory, design and microwave applications*, 1st ed. John Wiley & Sons, 2013.

[45] R. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, ser. IEEE/OUP series on electromagnetic wave theory. IEEE Press, 1991.

[46] V. Dmitriev, "Symmetry properties of electromagnetic planar arrays: Long-wave approximation and normal incidence," *Metamaterials*, vol. 5, p. 141, 2011.

[47] J. D. Baena and M. Londoño, "Broadband transparent metasurfaces for full phase shift and polarization control," in *2016 10th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS)*, 2016, pp. 43–45.

[48] M. Londoño and J. D. Baena, "Metasuperficies Transparentes con Control Total del Salto de Fase," Tesis de maestria, Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[49] M. Beruete, M. Navarro-Cía, I. Campillo, P. Goy, and M. Sorolla, "Quasioptical polarizer based on self-complementary sub-wavelength hole arrays," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 17, no. 12, pp. 834–836, 2007.

[50] M. Navarro-Cía, M. Beruete, and M. Sorolla, *Behaviour of Electromagnetic Waves in Different Media and Structures*. Ali Akdagli InTech, 2011.

[51] D. González-Ovejero, E. Martini, B. Loiseaux, C. Tripon-Canseliet, J. Chazelas, and S. Maci, "Reconfigurable transmission lines based on self-complementary metasurfaces," in *The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014)*, 2014, pp. 271–275.

[52] L. Young, L. A. Robinson, and C. A. Hacking, "Meander-line polarizer," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 21, p. 376, 1973.

[53] J. J. Epis, "Broadband antenna polarizer," U.S. Patent No. 3754271, 1973.

[54] C. Terret, J. R. Levrel, and K. Mahdjoubi, "Susceptance computation of a meander-line polarizer layer," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 32, p. 1007, 1984.

[55] R. S. Chu and K. M. Lee, "Analytical model of a multilayered meander-line polarizer plate with normal and oblique plane-wave incidence," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 35, p. 652, 1987.

[56] B. A. Munk, *Finite Antenna Arrays and FSS*. New York: Wiley-IEEE Press, 2003.

[57] C. Dietlein, A. Luukanen, Z. Popović, and E. Grossman, "A w-band polarization converter and isolator," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 55, p. 1804, 2007.

[58] M. Euler, V. Fusco, R. Cahill, and R. Dickie, "325 GHz single layer sub-millimeter wave FSS based split slot ring linear to circular polarization convertor," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 58, pp. 2457–2459, 2010.

[59] M. Euler, V. Fusco, R. Dickie, R. Cahill, and J. Verheggen, "Sub-mm wet etched linear to circular polarization fss based polarization converters," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 59, p. 3103, 2011.

[60] T. Niemi, A. O. Karilainen, and S. A. Tretyakov, "Synthesis of polarization transformers," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 61, p. 3102, 2013.

[61] Y. Tamayama, K. Yasui, T. Nakanishi, and M. Kitano, "A linear-to-circular polarization converter with half transmission and half reflection using a single-layered metamaterial," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 105, p. 021110, 2014.

[62] A. S. Barlevy and Y. Rahmet-Samii, "Fundamental constraints on the electrical characteristics of frequency selective surfaces," *Electromagnetics*, vol. 17, p. 41, 1997.

[63] R. Marqués, J. D. Baena, M. Beruete, F. Falcone, T. Lopetegi, M. Sorolla, F. Martín,

and J. Garcia, "Ab initio analysis of frequency selective surfaces based on conventional and complementary split ring resonators," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 7, p. S38–S43, 2005.

[64] C. A. Balanis, *Modern Antenna Handbook*. Wiley, 2008.

[65] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed. Wiley, 2004.

[66] G. F. Brand, "The strip grating as a circular polarizing beamsplitter," *Int. J. Infrared Millimeter Waves*, vol. 23, p. 1271, 2002.

[67] R. D. Porrata-Dòria, A. B. Ibars, and L. F. Martínez, "Analysis and reduction of the distortions induced by time-domain filtering techniques in network analyzers," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, vol. 47, p. 930, 1998.

[68] H. G. Booker, "Slot aerials and their relation to complementary wire aerials (Babinet's principle)," *J. Inst. Elect. Eng.*, vol. 93, pp. 620–626, 1946.

[69] J. D. Ortiz, J. D. Baena, V. Losada, F. Medina, and J. Araque, "Spatial Angular Filtering by FSSs Made of Chains of Interconnected SRRs and CSRRs," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 23, no. 9, pp. 477–479, 2013.

[70] J. M. Miranda, J. L. Sebastián, M. SIerra, and J. Margineda, *Ingeniería de Microondas*, 1st ed. Madrid: Pearson Education S.A., 2002.

[71] I. Bahl and P. Bhartia, *Microwave Solid State Circuit Design*. Wiley, 1998.

[72] M. Beruete, M. Sorolla, R. Marques, J. D. Baena, and M. Freire, "Resonance and cross-polarization effects in conventional and complementary split ring resonators periodic screens," *Electromagnetics*, vol. 26, pp. 247–260, 2006.

[73] R. N. Clarke and C. B. Rosenberg, "Fabry-Perot and open resonators at microwave and millimetre wave frequencies, 2-300 GHz," *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 15, no. 1, p. 9, 1982.

[74] G. Hernandez, *Fabry-Perot Interferometers*, ser. Cambridge Studies in

Modern Optics. Cambridge University Press, 1988. [Online]. Available: https://books.google.com.co/books?id=og7uKhM01K8C

[75] S. Barzegar-Parizi and B. Rejaei, "Calculation of effective parameters of high permittivity integrated artificial dielectrics," *IET Microwaves, Antennas Propagation*, vol. 9, no. 12, pp. 1287–1296, 2015.

[76] R. E. Collin, *Foundation for Microwave Engineering*, 2nd ed. Mc Graw Hill, 1992.