UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para la enseñanza de la óptica geométrica usando conceptos de geometría elemental en estudiantes de grado noveno

Diana Carolina Ramírez Moyano

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias.
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.
Bogotá, Colombia

2015

Propuesta didáctica para la enseñanza de la óptica geométrica usando conceptos de geometría elemental en estudiantes de grado noveno

Diana Carolina Ramírez Moyano

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):
Ph.D., Freddy Alberto Monroy Ramírez
Profesor Departamento de Física.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias.
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.
Ciudad, Colombia
2015

A mis padres por su amor, confianza y apoyo incondicional en cada paso de mi vida.

A mi novio por apoyo incondicional, por fortalecer mi confianza y enseñarme a no dejar de soñar.

Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y la vida, por las oportunidades prestadas y logros alcanzados,

A mis padres, María Cristina Moyano y Julio Enrique Ramírez, por todo el apoyo que me brindaron en este largo camino, porque con su respaldo y ayuda incondicional, fortalecieron mis pasos e hicieron posible alcanzar esta nueva meta en mi vida.

A mis profesores, especialmente al profesor Freddy Alberto Monroy, por los conocimientos y experiencias compartidas que permitieron enriquecer mi conocimiento,

A mi compañero de lucha Richard Fabian Reyes, quien estuvo presente en este proceso, por su apoyo incondicional y quien con su paciencia disminuyó mis momentos de angustia y me dio fortaleza para continuar.

A todos ellos mi gratitud pues fueron participes de este gran logro.

Diana Carolina Ramírez Moyano

CONTENIDO

1. **RESUMEN** **10**

ABSTRACT *11*

LISTA DE FIGURAS *12*

LISTA DE TABLAS *14*

LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS *14*

2. INTRODUCCIÓN **15**

3. **OBJETIVOS** **17**

3.1. General *17*

3.2.Específicos *17*

4. **MARCO TEÓRICO** **18**

4.1. Fundamentos desde lo histórico y epistemológico de la óptica *18*

4.2. Fundamento disciplinar *20*

4.2.1. Fundamento disciplinar desde la geometría. 20

4.2.1.1. Conceptos básicos 21

4.2.1.2. Ángulos congruentes 21

4.2.1.3.1. Clasificación de los ángulos 22

4.2.1.4. Rectas paralelas y perpendiculares 24

4.2.1.5. Ángulos entre paralelas 24

4.2.1.6. Triángulo 25

4.2.1.6.1. Clasificación de los triángulos 25

4.2.1.6.2. Congruencia de triángulos 26

4.2.1.6.3. Criterios de congruencia de triángulos 26

4.2.1.6.4. Criterios de semejanza de triángulos 27

4.2.2. Fundamento disciplinar desde la óptica geométrica. *27*

4.2.2.1. Leyes fundamentales de la óptica geométrica 28

3.2.2.2. Reflexión de la luz 29

4.2.2.1.1. Leyes de la reflexión de la luz 30

4.2.2.1.2. Reflexión en espejos planos 31

4.2.2.1.3. La imagen en un espejo plano. 31

4.2.2.1.4. Construcciones geométricas asociadas a las características de las imágenes formadas por reflexión de la luz en superficies lisas. 32

4.2.2.1.5. Refracción de la luz 37

4.2.2.1.5.1. Leyes de la refracción de la luz 37

4.2.2.1.6. Construcciones geométricas de los ángulos de refracción en superficies planas. 37

4.3. Fundamentos pedagógicos 47
4.3.1. Metodología del aprendizaje activo (MAA). 47
4.3.2. Resolución de problemas (RP) 48
5. PROPUESTA DIDÁCTICA 50
5.1. Caracterización de la población: 50
5.2. Descripción de la propuesta 51
5.3. Desarrollo y resultados de la propuesta 51
5.3.1. Actividad diagnóstico 51
5.3.1.1. Resultados de la prueba diagnóstico 52
5.3.2. Talleres de geometría 1 y 2: 55
5.3.2.1. Resultados talleres de geometría 1 y 2 55
5.3.3. Taller experimental 1: Reflexión de la luz. 57
5.3.3.1. Resultados taller experimental 1: reflexión de la luz 57
5.3.4. Taller experimental 2: refracción de la luz. 60
5.3.4.1. Resultados taller experimental 2. 60
5.3.5. Taller de geometría 3 y 4 63
5.3.5.1. Resultados talleres de geometría 3 y 4 64
5.3.6. Prueba de salida - resultados 65
5.3.6.1. Ganancia Hake: 71
6. CONCLUSIONES 73
7. BIBLIOGRAFÍA 75
8.ANEXOS 77
Anexo A. Actividad diagnóstico 77
Anexo B. Taller de geometría 1. 80
Anexo C. Taller de geometría 2. 82
Anexo D. Manual de la práctica. Reflexión de la luz 85
Anexo E. Hoja de predicciones individuales. Práctica reflexión de la luz. 89
Anexo F. Hoja de predicciones grupales. Práctica reflexión de la luz. 90
Anexo G. Hoja de predicciones. Práctica reflexión de la luz. 91
Anexo H. Manual de la práctica refracción de la luz. 93
Anexo I. Hoja de predicciones individuales práctica refracción de la luz. 98
Anexo J. Hoja de predicciones grupales práctica refracción de la luz. 99

Anexo K.. Hoja de resultados práctica refracción de la luz. **..... 100**

Anexo L. Taller de geometría 3**. 101**

Anexo M. Taller de geometría 4..... *104*

Anexo N. Registro de respuestas correctas de la actividad diagnóstico.*..... 108*

Anexo O. Registro respuestas correctas actividad prueba de salida (post-test)*..... 108*

Anexo P. Registro de preguntas correctas del diagnóstico (PRE) y prueba de salida (POST)..... *108*

1. RESUMEN

Este trabajo presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la óptica geométrica a partir de la interpretación, representación y descripción de las imágenes obtenidas por reflexión y refracción de la luz, según el modelo de la óptica geométrica, profundizando en el análisis de los conceptos y aplicaciones de la geometría elemental.

La propuesta se realizó con 30 estudiantes de grado noveno de básica secundaria del Gimnasio Mixto Manuel del Socorro Rodríguez (*GMMSR)*, ubicado en la localidad de Suba, Bogotá y buscó a partir de una serie de talleres de geometría dar un fundamento geométrico que da sentido a las construcciones geométricas de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz en superficies planas.

La eficiencia de la propuesta se midió mediante la comparación de los resultados obtenidos en una prueba diagnóstica y una prueba de salida, donde se evidenció un progreso y mayor apropiación por parte de los estudiantes de las características de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz con sus respectivas representaciones geométricas.

La propuesta es por lo tanto, una alternativa de enseñanza que permite fortalecer los conocimientos en geometría que sustentan las representaciones implementadas por la óptica geométrica.

Palabras claves: óptica geométrica, fenómenos de reflexión y refracción de la luz, conceptos de geometría.

ABSTRACT

This paper shows a teaching proposal in order to explain the geometrical optics from the interpretation, representation and description of the images obtained by reflection and refraction of light. It was based on the model of the geometric optics where concepts and applications of the elementary geometry are analyzed in depth.

This research was carried out with 30 students of ninth grade of Gimnasio Mixto Manuel del Socorro Rodriguez. This is a private school located in Suba, Bogotá. The objective of this study was to develop series of geometrical tasks in order to provide bases which give meaning to geometrical structures of the reflection and refraction phenomena on plane surfaces.

The proposal was validated with the results obtained from the diagnostic test and the post- test where was possible to make clear a good students learning about characteristics of the reflection and refraction phenomena of light with their geometrical representations. Therefore, this study is an alternative of teaching that permit to improve the knowledge about geometry which can support the structures made by geometrical optics

Key words: geometrical optics, phenomena of reflection and refraction of light, geometry concepts.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Representación de los elementos de un ángulo 21
Figura 2. Representación de la bisectriz de un ángulo 22
Figura 3. Clasificación de los ángulos. 22
Figura 4. Representación ángulos adyacentes. 23
Figura 5. Representación ángulos opuestos por el vértice 23
Figura 6. Representación de ángulos formados por dos paralelas y una secante. 24
Figura 7. Clasificación de los triángulos. 25
Figura 8. Representación de triángulos congruentes. 26
Figura 9. Criterios de congruencia de triángulos 26
Figura 10. Criterios de semejanza de triángulos 27
Figura 11. Propagación de la luz en línea recta. 28
Figura 12. Imagen de una vela reflejada por un espejo plano 29
Figura 13. Tipos de reflexiones de acuerdo a la superficie en la que interactúan los rayos de luz 29
Figura 14. Reflexión de la luz en una superficie pulimentada 30
Figura 15. Representación de la reflexión de la luz en un espejo plano 31
Figura 16. Reflexión de un objeto en un espejo plano mostrando la igualdad entre distancia-objeto distancia-imagen y tamaño objeto-tamaño imagen 32
Figura 17. Construcción geométrica distancia-objeto= distancia-imagen 33
Figura 18. Imagen de una persona sobre un espejo plano. 33
Figura 19. Triángulos semejantes de la construcción geométrica de la figura 19. 33
Figura 20. Tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano. 35
Figura 21.Esquema de rayos que representa el tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano. 35
Figura 22. Reflexión de un polígono sobre un espejo plano. 36
Figura 23. Refracción de un rayo de luz. 37
Figura 24. Construcción del rayo refractado. 38
Figura 25. Construcción del rayo refractado. 38
Figura 26. Construcción del rayo refractado. 39
Figura 27. Construcción del rayo refractado. 39
Figura 28. Construcción del rayo refractado. 40
Figura 29. Construcción del rayo refractado. 40
Figura 30 Construcción geométrica del rayo refractado. 41
Figura 31. Construcción del rayo refractado. 41
Figura 32. Construcción del rayo refractado. 42
Figura 33. Construcción del rayo refractado. 42
Figura 34. Construcción del rayo refractado. 43
Figura 35. Construcción del rayo refractado. 43
Figura 36. Construcción del rayo refractado. 44
Figura 37. Construcción del rayo refractado. 44
Figura 38. Construcción del rayo refractado en lámina de caras paralelas. 45
Figura 39. Construcción del rayo refractado en lámina de caras paralelas. 45

Figura 40 Construcción geométrica de los rayos refractados en una lámina de vidrio de caras paralelas. 46
Figura 41. Estudiantes grado 9°. 50
Figura 42.Contraste resultados actividad diagnóstico. 52
Figura 43.Justificación de la prolongación de los rayos 52
Figura 44. Justificación tamaño mínimo del espejo 52
Figura 45.Representación por medio pregunta 6 53
Figura 46. Representación trayectoria de un rayo para observar un pez en el agua. 53
Figura 47.Solución guías 1 y 2 55
Figura 48.Argumento uso de ángulos complementarios. 56
Figura 49. Solución guía de geometría- rectas paralelas. 56
Figura 50. Construcción del ángulo EDP con la bisectriz del ángulo ADP. 56
Figura 51.Relaciones establecidas entre los triángulos de la construcción. 56
Figura 55.Medida del ángulo de incidencia y el ángulo reflejado 58
Figura 56. Práctica reflexión de un rayo de luz 58
Figura 57. Reflexión de una vela 58
Figura 58. Formación del ángulo de incidencia y de reflexión 58
Figura 59. Registro final práctica reflexión de la luz 58
Figura 60. Comparación altura objeto-altura imagen 58
Figura 61.Trayectoria rayo de luz apuntando desde abajo 60
Figura 62.Trayectoria rayo de luz apuntando desde arriba 60
Figura 63. Representación trayectoria de un rayo de luz al pasar aire-agua. 60
Figura 64. Representaciones de los resultados de la práctica 61
Figura 65. Representación geométrica del ángulo de refracción 61
Figura 66. Desarrollo de la práctica refracción 61
Figura 67. Trazo de rayos incidente y refractado sobre la pecera- 61
Figura 68. Representación geométrica- ángulo incidente y ángulo 61
Figura 69.Construcción geométrica ángulo de reflexión 63
Figura 70.Determinar ángulos de refracción y desviación 63
Figura 71.Construcción geométrica reflexión- determinando ángulos 63
Figura 72. Altura mínima de un espejo para que una persona se vea de cuerpo completo 64
Figura 73. Justificación de una estudiante sobre la construcción de los ángulos de reflexión 64
Figura 74. Cantidad de personas que respondieron acertadamente las preguntas de la prueba de salida 65
Figura 75. Contraste de resultados prueba diagnóstico-prueba de salida 66
Figura 76.Justificación trayectoria el rayo al incidir en un espejo 67
Figura 77.Justificación ángulos complementarios 67
Figura 78.Justificación ángulo de incidencia y ángulo de reflexión. 67
Figura 79. Representación trayectoria del rayo de luz para observar un pez en el agua 67
Figura 80. Representación geométrica de la situación del pez en el agua 67

Figura 81. Comparación número de respuestas correctas por estudiante. 69
Figura 82.Comparación % por estudiante en el pre y post-test. 70

LISTA DE TABLAS

Tabla1. Registro de % obtenido por cada estudiante 70
Tabla 2. Zonas de ganancia normalizada 72

LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\measuredangle$	Ángulo
$m\measuredangle ABC$	Medida del ángulo ABC
$\overrightarrow{AB}$	Semirrecta AB
$\perp$	Recta Perpendicular
$\parallel$	Recta Paralela
$\overleftrightarrow{A}$	Recta A
$\overline{AB}$	Segmento AB
ΔABC	Triángulo ABC
$\cong$	Congruente
$\sim$	Semejante
$=$	Igual
$<$	Menor que
$>$	Mayor que
$\%$	Porcentaje
$\sum$	Sumatoria

2. INTRODUCCIÓN

La óptica geométrica es un modelo que permite representar y analizar los fenómenos de reflexión, refracción y dispersión de la luz en su aspecto macroscópico, haciendo uso de construcciones geométricas las cuales fundamentan las comparaciones que se establecen entre el objeto, la imagen y el sistema óptico el cual puede ser un espejo, una lente o una combinación de ellos.

Es importante resaltar que para la representación de imágenes y la interpretación de los fenómenos objeto de estudio de la óptica geométrica, se hace uso de la geometría como "ciencia que modela la realidad espacial…como herramienta privilegiada de exploración y representación del espacio", Ministerio de Educación Nacional. MEN (1998).

Sin embargo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos específicamente en la asignatura de física se han evidenciado en los estudiantes de grado once, algunas falencias en lo que se refiere a la comprensión de conceptos asociados a los fenómenos de reflexión y refracción de la luz al interactuar con diferentes medios, así como la interpretación del proceso de formación de las imágenes y su respectiva descripción. Las dificultades anteriores se originan en el desconocimiento de conceptos y procedimientos básicos de la geometría y aunque son temas que hacen parte del plan de estudios de la educación básica, al momento de utilizarse en la construcción geométrica de los fenómenos observados, éstas carecen de sentido en los estudiantes.

Teniendo en cuenta que la geometría, es una *"herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico"* MEN (1998), surge el interés de fortalecer en los estudiantes algunos conceptos y relaciones de la geometría elemental necesarias para la comprensión de las representaciones de los fenómenos asociados a la óptica geométrica. Para ello se propuso la siguiente pregunta la cuál orientó el desarrollo de la propuesta didáctica de este

trabajo: *¿Qué características debe tener una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de grado noveno interpretar, comprender y describir las imágenes obtenidas por reflexión y refracción, según el modelo de óptica geométrica?*

Este trabajo se fundamenta en una revisión y análisis de los elementos de geometría que son la base utilizada por el modelo de la óptica geométrica y que respalda la construcción de representaciones geométricas de la reflexión y refracción de la luz en superficies planas.

Por consiguiente se realizó y aplicó la secuencia didáctica presentada en este trabajo, utilizando como recursos *talleres de geometría* y *prácticas de laboratorio* sobre reflexión y refracción de la luz, en donde se aplicaron los conceptos básicos de geometría elemental.

El trabajo consta de 6 capítulos, distribuidos de la siguiente manera: capítulo 1 y 2 con introducción y objetivos respectivamente, en el capítulo 3 se presenta el marco teórico con los respectivos fundamentos epistemológicos, disciplinares y pedagógicos que sustentan este trabajo, En el capítulo 4 se puntualizan aspectos generales de las metodologías utilizadas en la propuesta tanto en talleres como prácticas experimentales. En el capítulo 5 se hace una descripción de la propuesta y se presenta los resultados obtenidos en cada una de las actividades y una comparación de los resultados de la prueba diagnóstica con la prueba de salida. Finalmente en el capítulo 6 se plantean las conclusiones del trabajo.

Por último es importante considerar que las referencias utilizadas en este trabajo se fundamentaron en las citas y referencias en formato APA, asimismo, es importante considerar que algunas de las imágenes presentadas fueron tomadas por el autor en prácticas de laboratorio, al igual que las construcciones geométricas realizadas utilizando el software dinámico Geogebra.

3. OBJETIVOS

3.1. General

Diseñar e implementar una unidad didáctica para el grado noveno del *GMMSR* que permita a los estudiantes interpretar, comprender y describir las imágenes obtenidas por reflexión y refracción de la luz, según el modelo de la óptica geométrica, profundizando en el análisis de los conceptos y aplicaciones de la geometría elemental.

3.2. Específicos

1. Identificar referentes teóricos y didácticos sobre aportes relacionados a los conceptos de óptica geométrica y la representación de imágenes.
2. Diseñar e implementar cuatro talleres de geometría elemental relacionados con la construcción de imágenes de reflexión y refracción en superficies planas, según el modelo de la óptica geométrica.
3. Diseñar dos talleres experimentales sobre reflexión y refracción de la luz, en donde se apliquen los conceptos básicos de geometría elemental.

4. MARCO TEÓRICO

4.1. Fundamentos desde lo histórico y epistemológico de la óptica[1]

El estudio de la luz es una de las áreas de la física que ha sido objeto de estudio a lo largo de la historia, debido a que el mundo que nos rodea lo percibimos a través de los sentidos, especialmente con el de la vista, lo anterior ha permitido la propuesta de varias teorías que explican la naturaleza de la luz.

Una de ellas fue la realizada por los pitagóricos en la antigua Grecia, quienes planteaban que la visión era producía por la proyección de las imágenes lanzadas desde los objetos hacia los ojos. Por el contrario, los platónicos afirmaban que la visión se producía por la proyección de los rayos enviados desde los ojos al chocar con los objetos.

Estas teorías dieron origen a uno de los conceptos más importantes de la óptica geométrica: el concepto de rayo. Este concepto fue utilizado por Euclides para modelar la trayectoria de la luz, considerando que los rayos viajaban infinitamente en línea recta. Euclides en su tratado sobre Óptica presentada de forma axiomática algunas ideas sobre propagación de la luz, espejos y las leyes de reflexión, teniendo en cuenta la definición de rayo luminoso considerado como aquel que sale del ojo hacia los contornos del objeto visto.

Posteriormente, Herón de Alejandría (20-52 d. C) describió la teoría de los espejos y su utilización práctica, reafirmando los planteamientos de Euclides,

[1] En el siguiente apartado se presentarán aportes y concepciones esenciales realizados a lo largo de la historia sobre la luz y sus fenómenos, se debe tener como referencia que los postulados iniciales fueron propuestos por los físicos y matemáticos de la época (Euclides, Newton, Hegel, entre otros). Sin embargo como apoyo para este marco teórico se tomó como referencia el trabajo de Mancebo Sánchez, E. M. (2013) quien retoma dichos aportes históricos en su trabajo.

considerando que el camino más corto para explicar la propagación de la luz es la línea recta, principio retomado por Fermat en el siglo XVII.

Por su parte, Ptolomeo realizó estudios sobre la trayectoria y propagación de la luz los cuales fueron parte de su libro *Óptica,* su trabajo se centró en la realización de experimentos en superficies pulidas con el fin de demostrar la trayectoria de los rayos de luz en línea recta y obtener una relación entre los ángulos de incidencia y de refracción en varios medios: aire-agua, aire-vidrio y agua-vidrio.

“El estudio sistemático de la refracción de la luz y las leyes que enunció son similares a las de la reflexión: *el rayo visual incidente y el refractado están en el mismo plano, los ángulos de incidencia y refracción son desiguales, la imagen se ve en la intersección del rayo incidente prolongado y la perpendicular trazada desde el objeto al plano de separación de los dos medios” Ruiz J (2003) Pg. 329.*

En 1604 Kepler realizó algunos estudios sobre la visión humana asociando algunos principios involucrados en lentes convergentes y divergentes en microscopios y telescopios. Años después, Snell descubrió la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de refracción cuando la luz pasaba de un medio transparente a otro. En 1657, Fermat, planteó el principio del tiempo mínimo: un rayo de luz sigue el camino que emplee la menor cantidad de tiempo para llegar de un punto a otro.

Posteriormente, Newton hacia el año 1704, planteó una visión corpuscular de la luz, como una corriente de partículas que se propagan a gran velocidad en línea recta (teoría corpuscular), con base en esta teoría Newton demostró las leyes de reflexión y argumentó que la refracción estaba provocada por el cambio de velocidad de la luz al cambiar de medio, incrementando la velocidad de las partículas cuando se aumenta la densidad del medio.

En la misma época surgió también el modelo ondulatorio en el cuál se propone la luz como una onda, la cual requiere de un medio material para su propagación en el espacio, el éter; el propulsor de esta teoría fue Huygens, quien describió como dos haces de luz en su interacción podrían destruirse, fenómeno que la teoría de Newton no logro explicar.

Posteriormente con la teoría electromagnética, Maxwell (1932-79) demostró que la luz podía viajar en el vacío, además enunció tres condiciones que debe cumplir un sistema óptico, las cuales establecen las relaciones entre objeto e imagen.

4.2. Fundamento disciplinar

El siguiente apartado consta de dos partes fundamentales, la primera asociada a aquellos conceptos de geometría elemental que sustentan el modelo y las construcciones geométricas utilizadas para describir la propagación de la luz a partir del concepto de rayo. En el segundo apartado se mencionan algunos conceptos propios de la óptica geométrica y cómo a partir de ellos se modelan los fenómenos de reflexión y refracción de la luz, en la construcción de las imágenes formadas por los sistemas ópticos.

4.2.1. Fundamento disciplinar desde la geometría.

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional “la geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación” MEN (1998)

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se presentan algunos conceptos, definiciones y teoremas matemáticos los cuales son la base de las

representaciones geométricas de los fenómenos de la reflexión y la refracción de la luz en superficies planas.

4.2.1.1. Conceptos básicos[2]

- ***Ángulo**:* es la unión de dos semirrectas que poseen un mismo origen. denominadas lados de un ángulo y el origen común se llama vértice. Para denotarlos se utilizan 3 letras mayúsculas una en cada lado y la otra, que debe ir en el centro de las tres, correspondiente al vértice así:

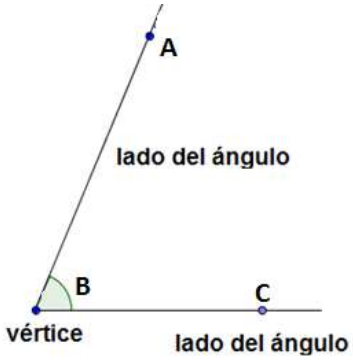


Figura 1. Representación de los elementos de un ángulo

Medida de un ángulo: En el sistema sexagesimal la unidad principal es el grado (°) y se define como la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a 1/360 de la longitud de la circunferencia. La medida del ángulo ABC se escribe:

$m\measuredangle ABC = r$

4.2.1.2. Ángulos congruentes

Dos ángulos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.

Es decir;

$$\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\beta \; si \; y \; solo \; si \; m\measuredangle\alpha = m\measuredangle\beta$$

La congruencia no depende de la posición en la que se encuentren.

[2] Definiciones y conceptos tomados de Cardona (2004) Geometría básica. Universidad Pontificia Bolivariana.

4.2.1.3. **Bisectriz:** es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y divide el ángulo en dos ángulos congruentes.

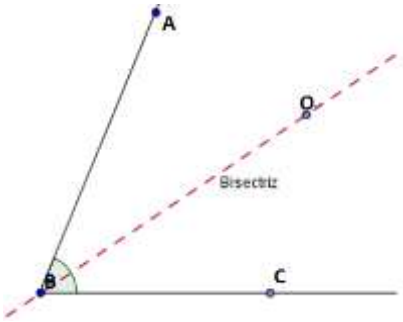


Figura 2. Representación de la bisectriz de un ángulo

$$\overrightarrow{BO}\ es\ la\ bisectriz\ del\ ángulo$$
$$ABC. \measuredangle CBO \cong \measuredangle OBC$$

4.2.1.3.1. Clasificación de los ángulos

Los ángulos se pueden clasificar siguiendo dos criterios: de acuerdo con su medida y de acuerdo a su posición:

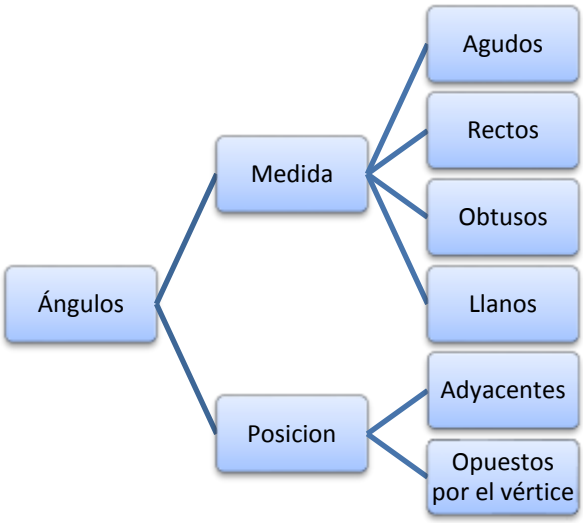


Figura 3. Clasificación de los ángulos.

De acuerdo a su medida:

- Ángulo agudo: el que mide más de 0° y menos de 90°.
- Ángulo recto: el que tiene una medida igual a 90°.
- Ángulo obtuso: el que mide más de 90°y menos de 180°.
- Ángulo llano: el que mide 180°. Se denomina ángulo plano cuyas rectas son semirrectas opuestas.

De acuerdo a su posición:

- *Adyacentes:* dos ángulos son adyacentes si y solo si tienen el mismo vértice y lado común y los otros dos lados están contenidos en los semiplanos opuestos determinados por la recta que tiene el lado común.

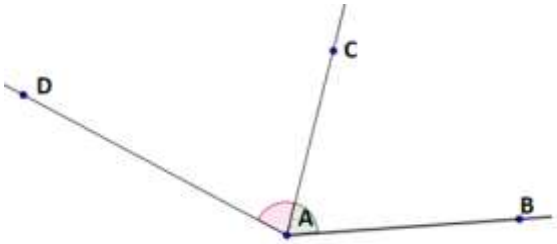


Figura 4. Representación ángulos adyacentes.

- *Opuestos por el vértice*: dos ángulos son opuestos por el vértice si y solo si tienen el mismo vértice y los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

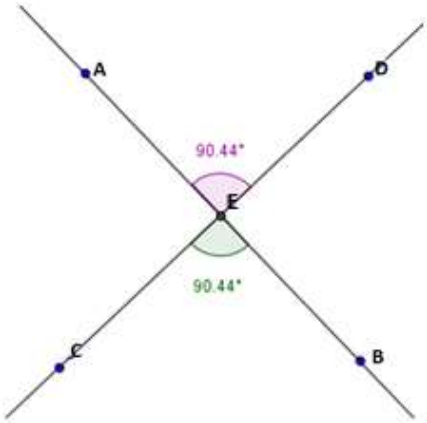


Figura 5. Representación ángulos opuestos por el vértice

- *Ángulos complementarios:* dos ángulos son complementarios si y solo si la suma de sus medidas es igual a un ángulo recto (90°).
- *Ángulos suplementarios*: dos ángulos son suplementarios si y solo si la suma de las medidas es igual a dos ángulos rectos (180°).

Para que dos ángulos sean suplementarios o complementarios no necesariamente tienen que ser adyacentes

4.2.1.4. Rectas paralelas y perpendiculares

- *Rectas paralelas:* Se dice que dos rectas son paralelas, si están en un mismo plano y no se intersecan. Respecto a este tipo de rectas se tiene el siguiente postulado: *"por un punto dado, que no esté en una recta dada, se puede hacer pasar cuánto más una paralela a la recta dada" Godino (2002)*
- *Rectas perpendiculares***:** Dos rectas son perpendiculares, normales u ortogonales si se interceptan formando un ángulo recto, para indicar que $\overleftrightarrow{m}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{n}$ se escribe $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$.

4.2.1.5. Ángulos entre paralelas

Dos rectas paralelas cortadas por una tercera determinan ocho ángulos:

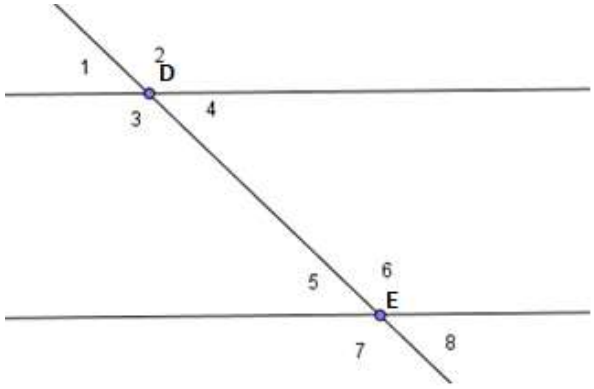


Figura 6. Representación de ángulos formados por dos paralelas y una secante.

Acorde a la representación se pueden identificar los siguientes ángulos:

- Ángulos internos (3, 4, 5 y 6): los ángulos internos a un mismo lado de la transversal a dos rectas paralelas son suplementarios (suman 180º)
- Ángulos externos (1, 2, 7 y 8): los ángulos externos a un mismo lado de la transversal a dos rectas paralelas son suplementarios.
- Ángulos correspondientes: (1 y 5) (2 y 6) (3 y 7) (4 y 8): son aquellos que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.
- Ángulos alternos internos: (3 y 6) (4 y 5): son aquellos ángulos interiores que están a distinto lado de la transversal y a distinto lado de las paralelas.
- Ángulos alternos externos: (1 y 8) (2 y 7): son aquellos ángulos exteriores que están a distinto lado de la transversal y a distinto lado de las paralelas.

4.2.1.6. Triángulo

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan lados, y los extremos de los lados, vértices. Godino (2002) Pp. 465.

- *Teorema fundamental del triángulo*: la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°

4.2.1.6.1. Clasificación de los triángulos

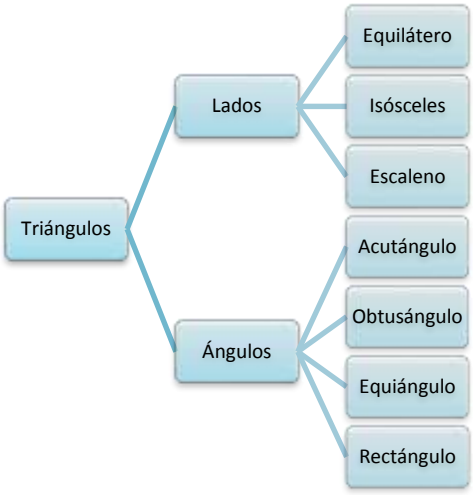


Figura 7. Clasificación de los triángulos.

4.2.1.6.2. Congruencia de triángulos

Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño. Dada las construcciones que se van a realizar se restringirá la congruencia de figuras asociadas a triángulos.

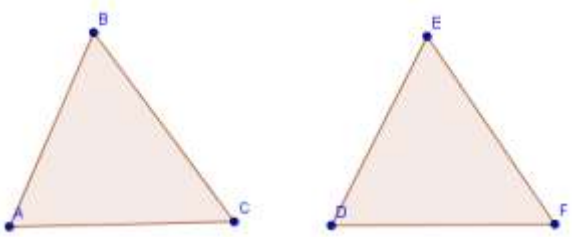


Figura 8. Representación de triángulos congruentes.

Dos triángulos $\Delta ABC \; y \; \Delta DEF$ son congruentes si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF, \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF, \measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$
2. *El lado* $AB \cong DE, \; AC \cong DF, \; BC \cong EF$

4.2.1.6.3. Criterios de congruencia de triángulos

L.A.L	A.L.A	L.L.L	L.L.A
•Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos lados correspondientes y el ángulo que lo determinan.	•Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos ángulos correspondientes y el lado comprendido entre ellos.	•Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.	•Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Figura 9. Criterios de congruencia de triángulos

4.2.1.6.4. Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales. Se tienen los siguientes criterios:

Figura 10. Criterios de semejanza de triángulos

4.2.2. Fundamento disciplinar desde la óptica geométrica.

El estudio de la óptica se define a partir de la interacción de la luz con los objetos materiales, se reconocen tres ramas de la óptica:

- *La óptica geométrica:* analiza y representa la trayectoria de la luz a partir de un modelo geométrico basado en el concepto de rayo.
- *La óptica física*: introduce la naturaleza ondulatoria de la luz como onda electromagnética por lo que se encarga de explicar los fenómenos de interferencia, difracción y polarización de la luz analizados microscópicamente.
- La óptica cuántica: estudia aquellos casos en que la luz interactúa con la materia a nivel atómico.

La óptica geométrica utiliza un modelo matemático aproximado para la representación y propagación de la luz de forma rectilínea a partir de rayos. En esta rama se involucran los fenómenos de reflexión y refracción de la luz en su aspecto macroscópico.

- *Rayo luminoso:* El rayo de luz es una idealización de una emisión luminosa representada como una semirrecta que tiene su origen en la fuente emisora de luz y se propaga en línea recta mientras no sea afectada por la interacción con un objeto. Esta representación se puede simular en el laboratorio colocando una fuente de luz delante de un peine como se evidencia en la figura 11.

Figura 11. Propagación de la luz en línea recta.[3]

4.2.2.1. Leyes fundamentales de la óptica geométrica

1. Ley de la propagación rectilínea de la luz: en un medio homogéneo la luz se propaga rectilíneamente.
2. *Leyes de la reflexión de la luz.*
3. Leyes de la refracción de la luz.

A continuación se ampliarán las leyes que tienen mayor relación con los fenómenos descritos en este trabajo y cuya fundamentación geométrica ya fue descrita.

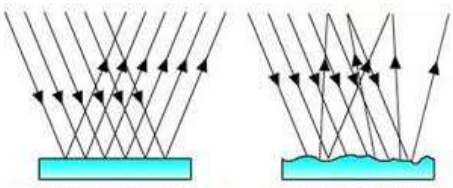
[3] Imagen tomada de práctica de laboratorio realizada por el autor.

4.2.2.2. Reflexión de la luz

Cuando un haz de luz choca contra una superficie y cambia su dirección sin cambiar de medio de propagación, decimos que la luz se ha reflejado. La luz que emerge o es reflejada por un objeto choca contra un espejo plano cambiando su dirección y formando una imagen detrás del espejo, ver figura 12.

Figura 12. Imagen de una vela reflejada por un espejo plano[4]

De acuerdo a la superficie con que interactúan los rayos de luz se pueden clasificar dos tipos de reflexiones: la **reflexión especular** (figura13) se produce cuando la superficie es completamente lisa como un espejo. Mientras que la **reflexión difusa** se produce cuando la superficie tiene irregularidades macroscópicas y/o microscópicas, por lo tanto la luz es desviada en direcciones aleatorias.



Reflexión especular ***Reflexión difusa***

Figura 13. Tipos de reflexiones de acuerdo a la superficie en la que interactúan los rayos de luz[5]

[4] Imagen tomada de práctica de laboratorio realizada por el autor.
[5] http://fresno.pntic.mec.es/msap0005/2eso/2ESO-anterior/images/tema5/re_esc_difusa.jpg

Al describir la geometría de la reflexión de la luz en superficies lisas es necesario definir los siguientes elementos:

- Rayo incidente: es el rayo que incide en la frontera de los medios.
- Rayo reflejado: es el rayo que se devuelve por el mismo medio, una vez llega a la frontera.
- La normal: recta perpendicular a la superficie donde incide el rayo.
- Ángulo de incidencia: ángulo que forma el rayo incidente con la normal.
- Ángulo de reflexión: ángulo que forma el rayo reflejado con la normal.

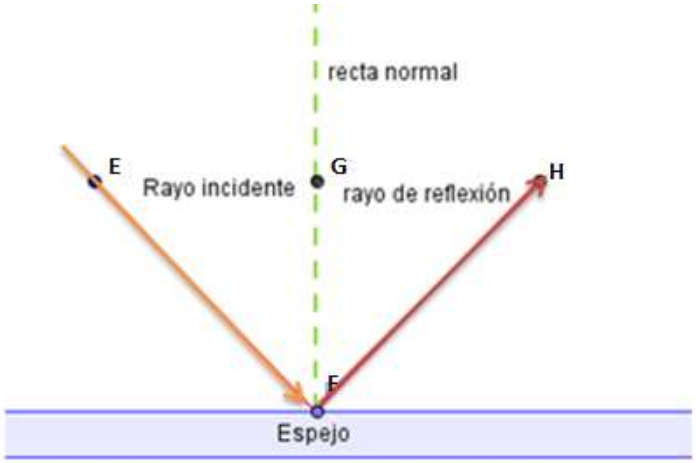


Figura 14. Reflexión de la luz en una superficie pulimentada

4.2.2.2.1. Leyes de la reflexión de la luz

1. El rayo incidente, la recta normal (perpendicular) a la superficie reflectante y el rayo reflejado, pertenecen a un mismo plano (son coplanares), llamado plano de incidencia.

2. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

4.2.2.2.2. Reflexión en espejos planos

Para que se forme una imagen se considera un haz de rayos provenientes de una fuente P (ver figura 15) los cuales se reflejan en el espejo plano, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto P' detrás del plano del espejo, el cual se localiza en la intersección de la prolongación de los rayos reflejados (por esto al punto P´ se le llama *imagen virtual* de P) La *imagen* se denomina *virtual* debido a que allí no existen rayos reales convergiendo en P`.

Cuando los rayos reflejados entran en el ojo, no se puede distinguir si los rayos vienen de P o de una fuente luminosa ubicada en P´.

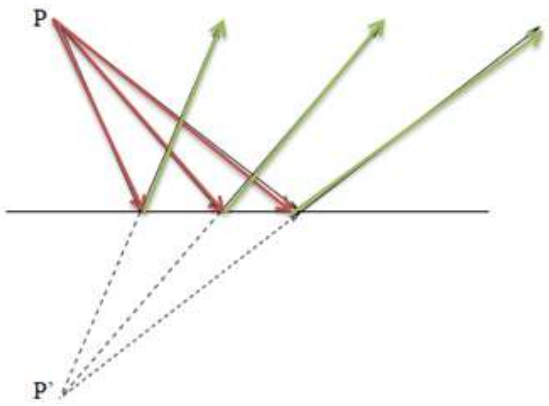


Figura 15. Representación de la reflexión de la luz en un espejo plano

4.2.2.2.3. La imagen en un espejo plano.

Acorde a la figura 15 la imagen virtual proveniente de un espejo plano tiene las siguientes características:

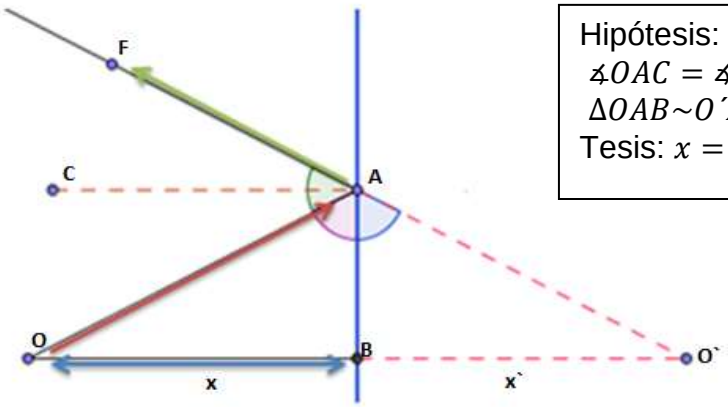
- La imagen virtual se encuentra detrás del espejo.
- La distancia objeto-espejo es la misma distancia entre su imagen y el espejo.
- La imagen tiene el mismo tamaño del objeto. (ver figura 16)

Figura 16. Reflexión de un objeto en un espejo plano mostrando la igualdad entre distancia-objeto distancia-imagen y tamaño objeto-tamaño imagen[6]

4.2.2.2.4. Construcciones geométricas asociadas a las características de las imágenes formadas por reflexión de la luz en superficies lisas.[7]

- **Distancia objeto- espejo es igual a la distancia espejo-imagen.**

En la siguiente construcción se tiene la reflexión de un rayo proveniente de un objeto O sobre un espejo plano AB, teniendo en cuenta que éste se encuentra a una distancia x del espejo. La imagen del objeto O se denota como O´.



Hipótesis:
$\measuredangle OAC = \measuredangle CAF$
$\Delta OAB \sim O´AB$
Tesis: $x = x´$

[6] Imagen tomada de práctica de laboratorio realizada por el autor.
[7]Se recomienda observar lista de símbolos matemáticos del presente documento. Página 9.

Figura 17. Construcción geométrica distancia-objeto= distancia-imagen

1. $\Delta OAB \sim O´AB$
2. $OB \perp AB = y$
3. $\measuredangle OBA \cong \measuredangle O´BA$
4. $\measuredangle OAB \cong \measuredangle O´AB$
5. Luego: $\frac{y}{x} = \frac{y}{x´}$
6. Se concluye $x = x´$

1. Por hipótesis.
2. Por construcción.
3. Por definición de recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OO´}$en el punto B.
4. Ángulos complementarios OAC y ángulo opuesto por el vértice a FAC
5. Por hipótesis, los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales.
6. Se verifica la tesis.

- **¿Cuál es la altura mínima de un espejo para que una persona se vea completamente en él?**

Se considera la siguiente construcción, teniendo en cuenta que se está haciendo una aproximación para determinar la altura mínima del espejo.

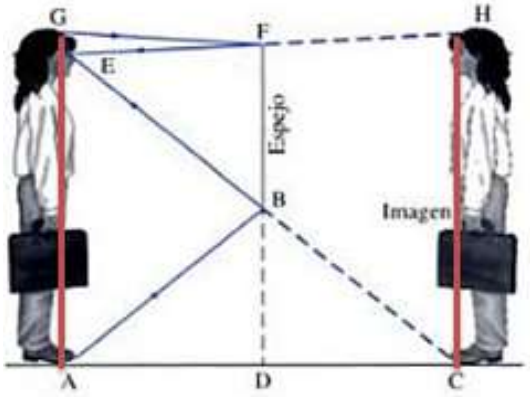


Figura 18. Imagen de una persona sobre un espejo plano.

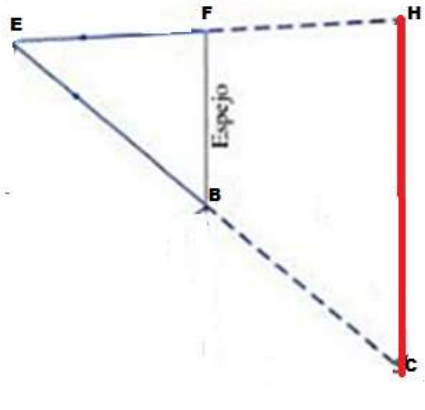


Figura 19. Triángulos semejantes de la construcción geométrica de la figura 19.

Hipótesis:

- $\Delta EFB \sim \Delta EHC$
- F es el punto medio de $\overline{GE}$.
- $\overline{GA}$=$\overline{HC}$ por altura del objeto es igual a altura de la imagen (reflexión de figuras en espejos planos).

Tesis: $\frac{\overline{GA}}{2} = FB$ es decir que la altura mínima del espejo debe ser la mitad de la altura de la persona.

1. $\frac{\overline{EF}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CH}}$ y $\frac{\overline{EF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{CH}}$	1. Por hipótesis. Definición de triángulos semejantes.
2. Consideremos que: $\overline{EF} \sim \overline{AD}$ $\overline{EH} = 2x$ $\overline{BF} = d$ $\overline{CH} = h$	2. Construcción geométrica. d= tamaño del espejo. h= altura de la persona. Teniendo en cuenta que $\overline{EF} \sim x$
3. Reescribiendo (1) $\frac{x}{2x} = \frac{d}{h}$	3. Reescribiendo la expresión.
4. Despejando $\frac{1}{2} = \frac{d}{h}$	4. Despeje.
5. $\frac{h}{2} = d$	5. Se verifica la tesis.

- **Tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano.**

En la siguiente construcción se tiene la reflexión de un objeto AE sobre un espejo plano DC, La imagen del objeto AE se denota como BF.

Realizando el esquema de rayos se quiere evidenciar que *el tamaño del objeto plano reflejado es igual al tamaño de su imagen.*

Para encontrar la imagen de un objeto plano mediante un espejo plano, se procede a encontrar la imagen de los dos puntos extremos del objeto plano, en este caso los puntos representados por A y E y suponer que los demás puntos del objeto reflejarán la luz de la misma forma.

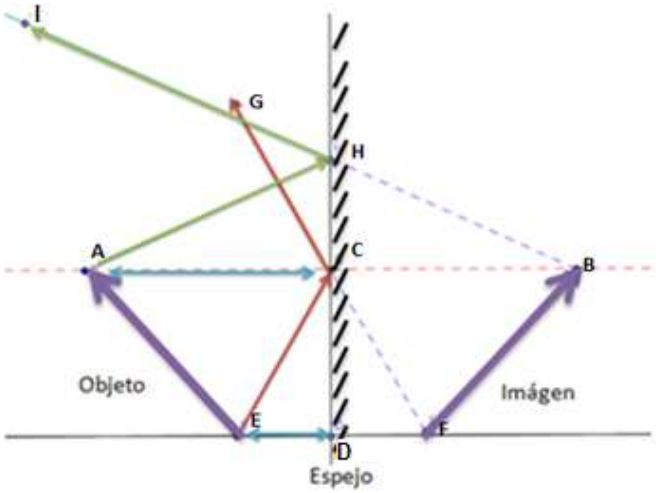


Figura 20. Tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano.

En la figura 21 se trazan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ para formar los triángulos ΔAED y ΔBDF.

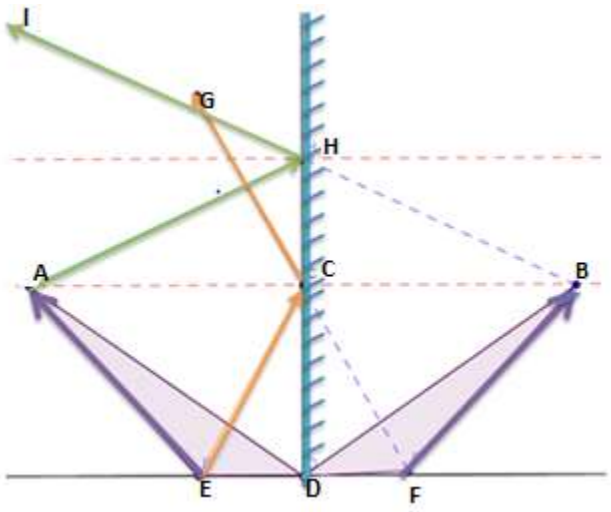


Figura 21. Esquema de rayos que representa el tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano.

Hipótesis: $\overline{ED} = \overline{DF}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$

Tesis: $\overline{AE} = \overline{BF}$

1. $\overline{ED} = \overline{DF}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$	Por hipótesis. Distancia objeto-espejo es igual a distancia espejo-imagen.
2. $\measuredangle EDC = \measuredangle FDC$	El espejo $\overline{CD}$ esta perpendicular a la recta EF.

	Definición de recta perpendicular.
3. El $\Delta DAC \cong \Delta DBC$ $\overline{AC} = \overline{CB}$ $\overline{CD} = \overline{CD}$ $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	Triángulos congruentes. Criterio LAL.
4. $\measuredangle EDA = \measuredangle FDB$	Complementos de ángulos congruentes son congruentes. Por (3)
5. $\measuredangle DEA = \measuredangle DFB$	Por $\Delta DEC \cong \Delta EDC$. Criterio LAL.
6. $\overline{AD} = \overline{BD}$	Partes congruentes de triángulos congruentes son congruentes entre sí. Por (3)
7. El $\Delta DEA \cong \Delta DFB$ $\overline{ED} = \overline{DF}$ $\overline{AD} = \overline{BD}$ $\measuredangle EDC = \measuredangle FDC$	Triángulos congruentes. Criterio LAL.
8. $\Delta AED \cong \Delta BFD$ Luego $\overline{AE} = \overline{BF}$	Criterio LAL. Congruencia de triángulos.

- **Construcción de la imagen de un polígono en un espejo plano.**

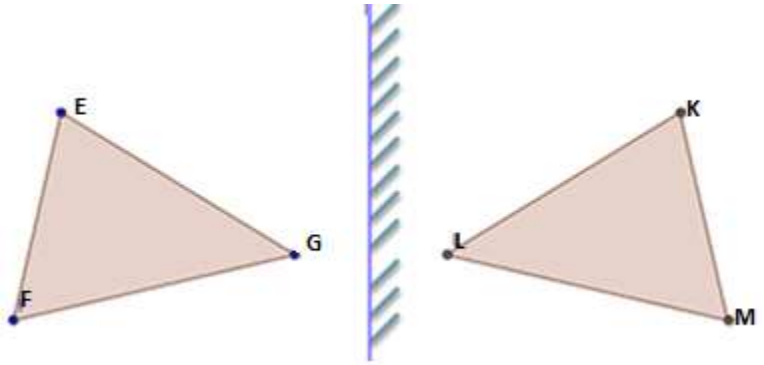


Figura 22. Reflexión de un polígono sobre un espejo plano.

Para la construcción de la imagen de un polígono sobre un espejo plano, se realiza el esquema de rayos y tomando como referencia la anterior demostración se repite el proceso para cada uno de los vértices del polígono,

Por la construcción [3] denominada *tamaño de la imagen de un objeto mediante un espejo plano*, se cumple que $\overline{EF} = \overline{KM}$, $\overline{EG} = \overline{KL}$ y $\overline{GF} = \overline{LM}$. Por lo tanto, los polígonos son iguales es decir “el tamaño del objeto es igual al tamaño de su imagen reflejada por el espejo plano”

4.2.2.2.5. Refracción de la luz

Es el fenómeno que presentan los rayos de luz al momento en que estos atraviesan una superficie límite entre dos medios de propagación diferentes, lo anterior causa una desviación de la luz, originada por la variación de la velocidad de la luz cuando pasa por medios diferentes.

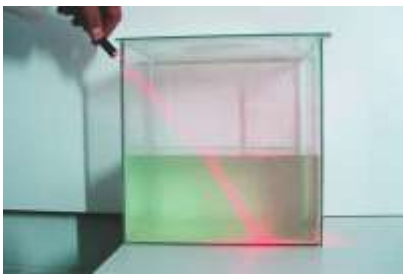


Figura 23. Refracción de un rayo de luz.

4.2.2.2.5.1. Leyes de la refracción de la luz

1. El rayo incidente, el refractado y la normal en el punto de incidencia están contenidos en un mismo plano.
2. El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y seno del ángulo de refracción es igual al cociente entre el índice de refracción del segundo medio con respecto al índice del primer medio (Ley de Snell).

4.2.2.2.6. Construcciones geométricas de los ángulos de refracción en superficies planas.[8]

I. ***Para*** $\boldsymbol{n_1 < n_2}$[9]

1. Se traza la recta que representa la superficie límite y la recta normal, denote como A, el punto donde se cambian los medios con índice n_1 y n_2 respectivamente.

[8] Para las construcciones geométricas, se implementó el software GeoGebra.
[9] Índice de refracción del medio 1 (n_1), índice de refracción del medio 2 n_2.

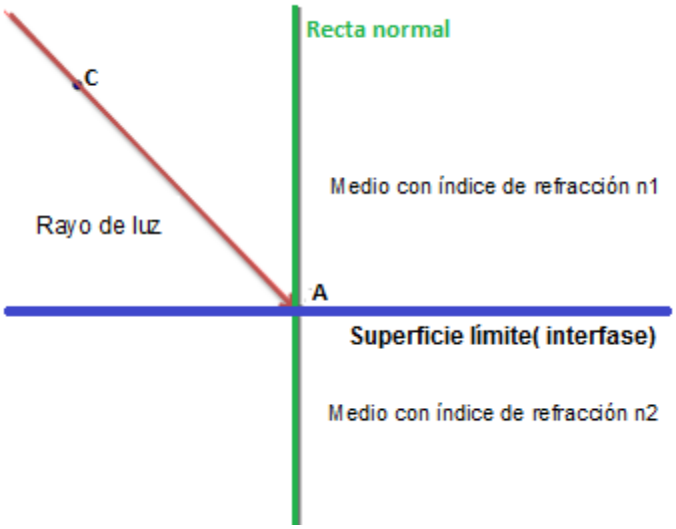


Figura 24. Construcción del rayo refractado.

2. Con centro en A y radio igual a la medida del índice de refracción n_1, se dibuja una circunferencia C1.

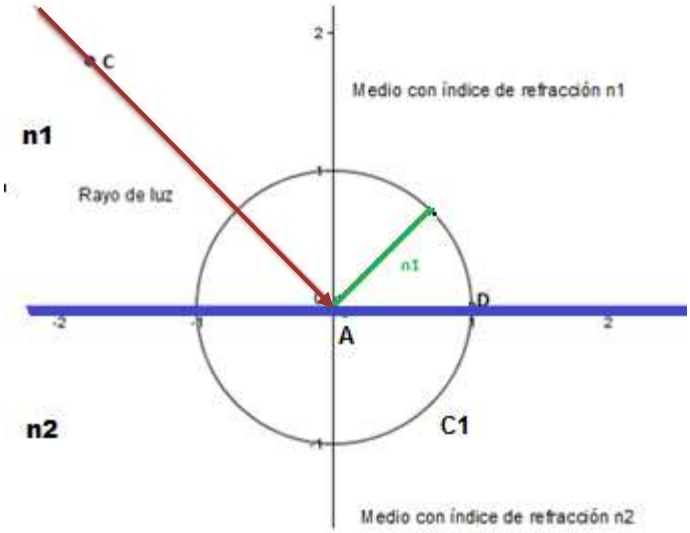


Figura 25. Construcción del rayo refractado.

3. Con centro en A y radio igual a la medida del índice de refracción n_2. Se dibuja otra circunferencia C2.

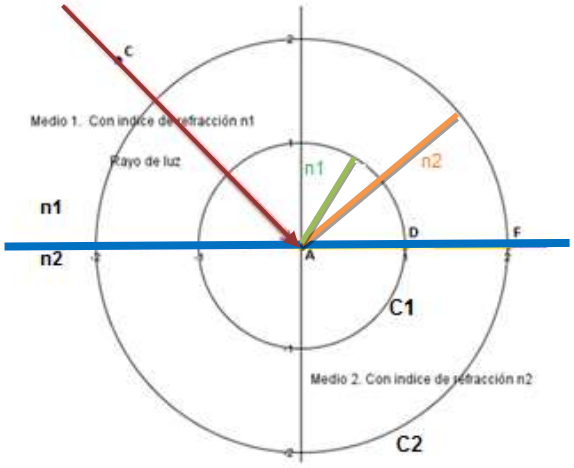


Figura 26. Construcción del rayo refractado.

4. Se realiza la prolongación del rayo $\overrightarrow{CA}$ hacia el segundo medio.

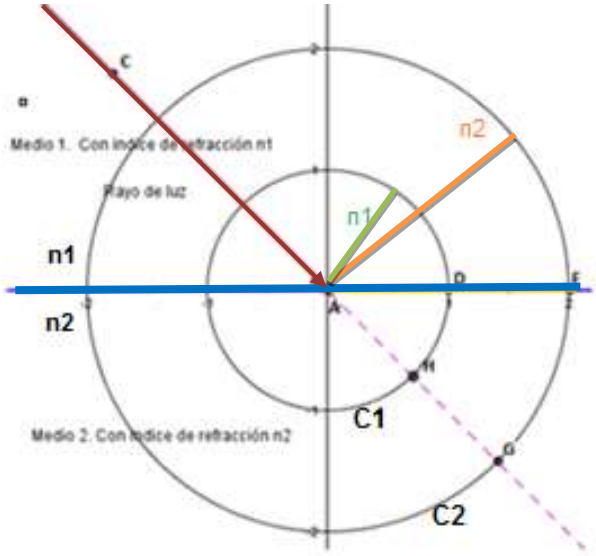


Figura 27. Construcción del rayo refractado.

5. En el punto de intersección entre la prolongación de la recta del rayo incidente y la circunferencia C1 denotado como punto H, se traza una recta paralela a la recta normal.

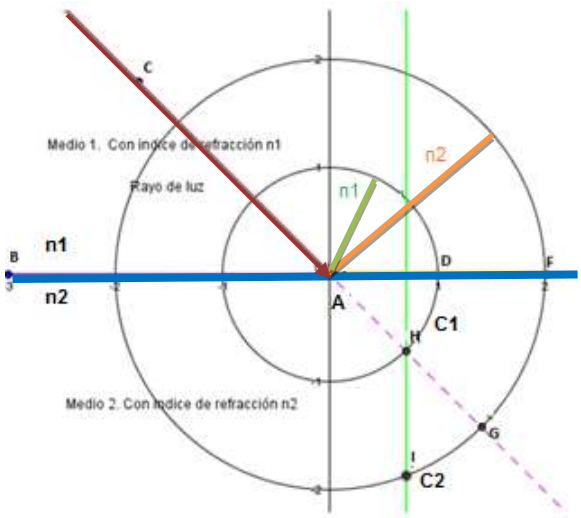


Figura 28. Construcción del rayo refractado.

6. Al punto de intersección entre la paralela y la circunferencia C2, se denota como I.

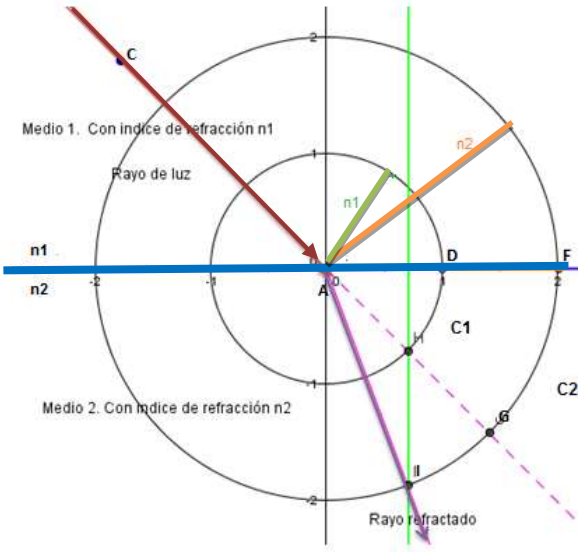


Figura 29. Construcción del rayo refractado.

7. Desde el punto A se traza una semirrecta que une los puntos A con I. La semirrecta $\overrightarrow{AI}$ **representa el rayo refractado.** Por lo que el **ángulo de refracción** es $\measuredangle IAJ$. Para un índice n_1 menor que n_2.

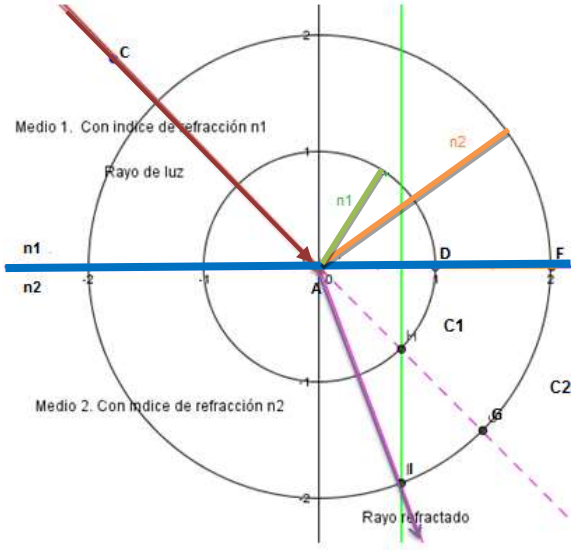


Figura 30 Construcción geométrica del rayo refractado.

De la anterior construcción se puede evidenciar que un rayo de luz que pasa de un medio $n_1<n_2$, se acerca a la normal. (Recta denotada como $\overleftrightarrow{AJ}$ en la construcción).

II. Ángulo de refracción $n_1 > n_2$

1. Se traza la recta que representa la superficie límite y la recta normal, denote como A, el punto donde se cambian los medios con índice n_1 y n_2 respectivamente.

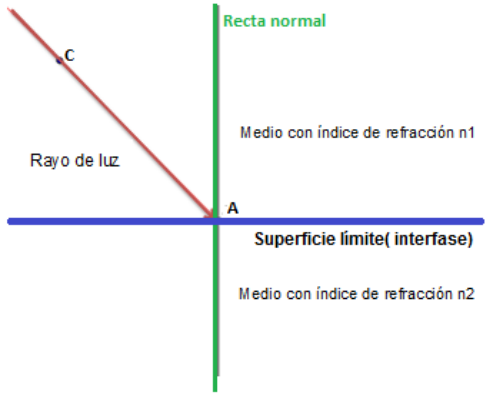


Figura 31. Construcción del rayo refractado.

2. Con centro en A y radio igual a la medida del índice de refracción n_1. Se traza la circunferencia C_1.

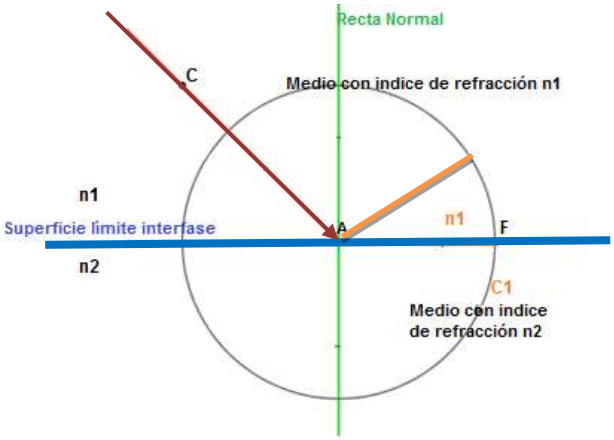


Figura 32. Construcción del rayo refractado.

3. Con centro en A y radio igual a la medida del índice de refracción n_2. Se traza la circunferencia C_2.

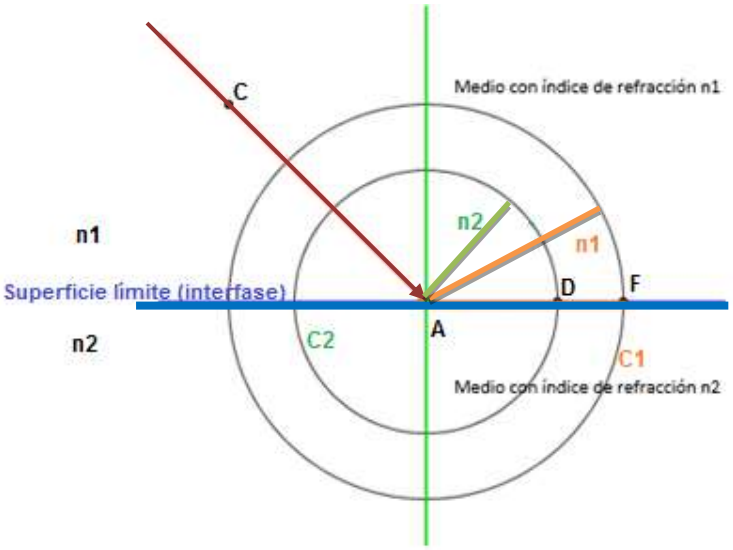


Figura 33. Construcción del rayo refractado.

4. Se realiza la prolongación del rayo $\overrightarrow{CA}$ hacia el segundo medio.

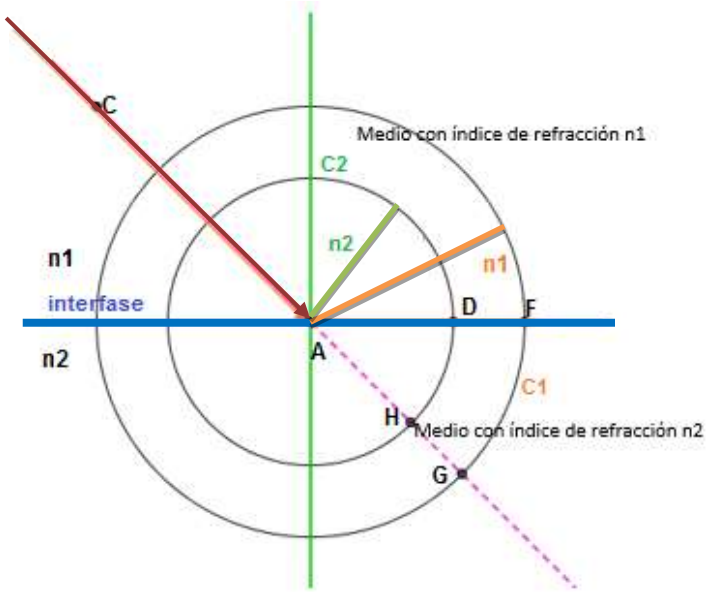


Figura 34. Construcción del rayo refractado.

5. En el punto de intersección entre la prolongación de la recta del rayo incidente y la circunferencia C_1. Punto G, se traza una recta paralela a la recta normal.

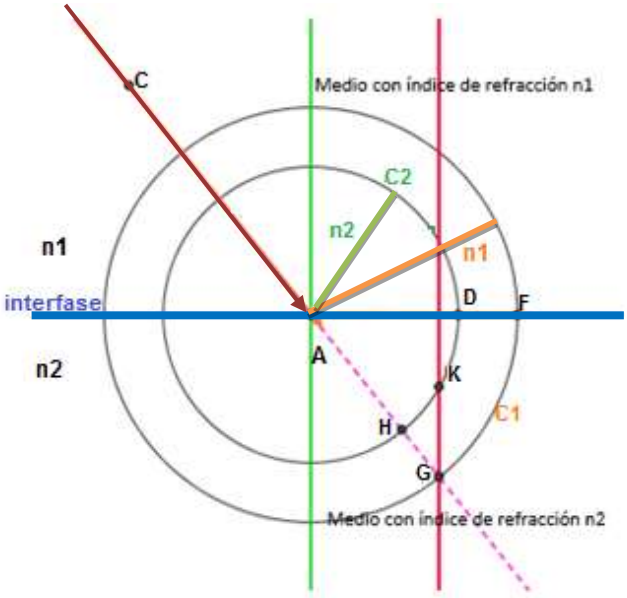


Figura 35. Construcción del rayo refractado.

6. El punto donde corta la paralela la circunferencia C_2, se denota como K. Posteriormente se traza una semirrecta desde el punto A que pasa por K.

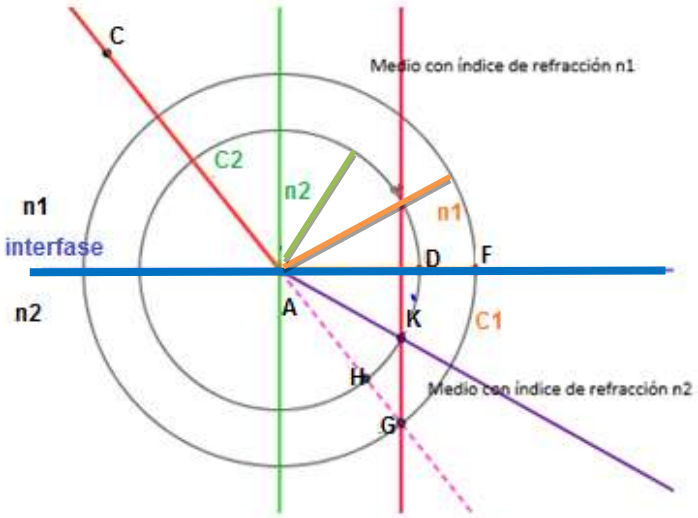


Figura 36. Construcción del rayo refractado.

La semirrecta $\overrightarrow{AK}$ **representa el rayo refractado.** Por lo que el **ángulo de refracción** es $\measuredangle JAK$. Para un índice n_1 mayor que n_2.

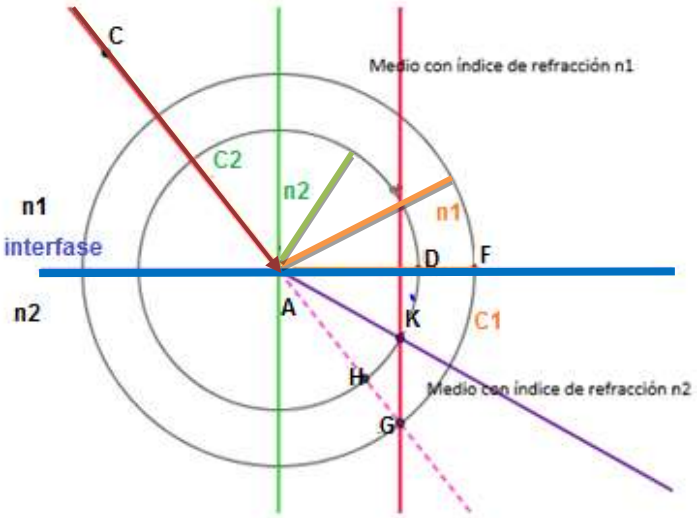


Figura 37. Construcción del rayo refractado.

De la anterior construcción se puede evidenciar que un rayo de luz que pasa de un medio $n_1 > n_2$, se aleja de la normal (Recta perpendicular denotada como $\overline{AJ}$ en la construcción).

I.I.I. Refracción en una lámina de caras paralelas

A continuación se muestra la construcción geométrica de la trayectoria de la luz al refractarse en una lámina de vidrio de caras paralelas utilizando las construcciones anteriores.

1. Se realiza la construcción del primer rayo de refracción al momento de incidir en la superficie de vidrio, en este caso se utiliza la construcción [I] para $n_1<n_2$. En este caso se obtiene el rayo $\overrightarrow{CJ}$.
2. Tomando como referencia el rayo CJ que se construyó, se utiliza la construcción [II] para $n_1>n_2$, en este caso el rayo refractado está representado por $\overrightarrow{JL}$.

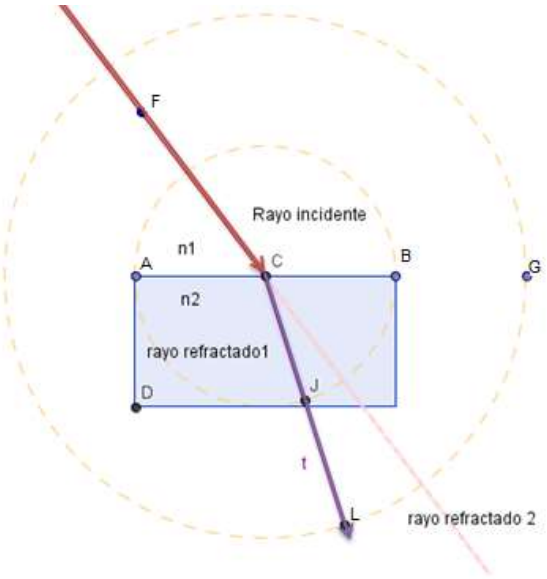


Figura 38. Construcción del rayo refractado en lámina de caras paralelas.

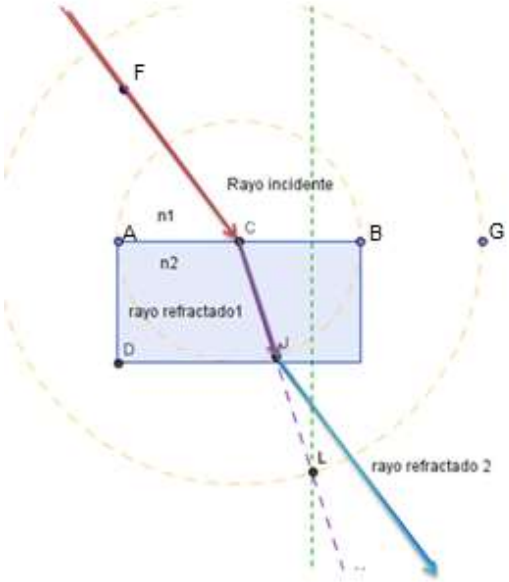


Figura 39. Construcción del rayo refractado en lámina de caras paralelas.

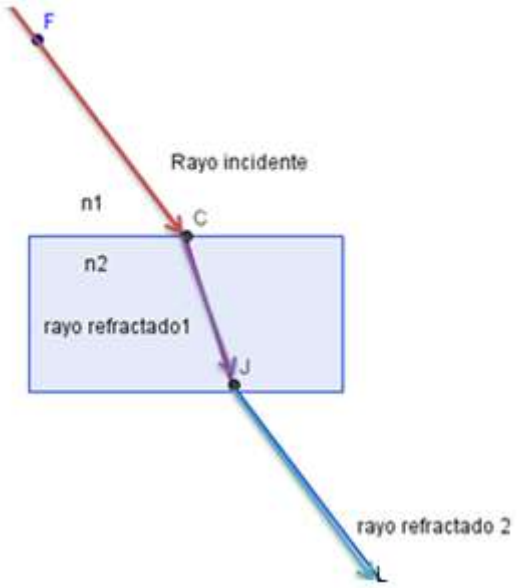


Figura 40. Construcción geométrica de los rayos refractados en una lámina de vidrio de caras paralelas.

Se puede concluir de acuerdo a la construcción que los rayos $\overrightarrow{FC}$ y $\overrightarrow{JL}$ son paralelos.

4.3. Fundamentos pedagógicos

La propuesta didáctica que se plantea como producto final de este trabajo con el objetivo de permitir la enseñanza de los conceptos de reflexión y refracción de la luz a partir del modelo de la óptica geométrica profundizando en conceptos propios de la geometría elemental, se caracteriza por utilizar la Metodología del Aprendizaje Activo (*MAA*) y la Resolución de Problemas (*RP*).

La *MAA* se evidencia en el diseño y desarrollo de las guías experimentales sobre los fenómenos de reflexión y refracción de la luz donde se aplican los conceptos básicos de geometría elemental, mientras que la *RP* se consideró en el diseño y desarrollo de los talleres de geometría asociados a la representación de los conceptos propios los fenómenos de reflexión y refracción de la luz, haciendo uso de los conceptos de paralelismo, perpendicularidad, ángulos, semejanza y congruencia de triángulos.

4.3.1. Metodología del aprendizaje activo *(MAA).*

Esta metodología ha sido implementada en países en vía de desarrollo por la UNESCO con la finalidad en capacitar a los docentes de secundaria con una metodología distinta a la utilizada tradicionalmente en la enseñanza.

Esta metodología ha ido implementada por medio de talleres de aprendizaje activo en óptica y fotónica (Active Learning in Optics and Photonics) *ALOP*, las cuales tienen como fin orientar al estudiante en un proceso de autoaprendizaje, a partir del planteamiento de preguntas que le permiten establecer relaciones entre sus predicciones y el análisis los fenómenos que observa de su entorno.

La *MAA*, promueve la construcción de conocimiento a través de la observación directa del mundo real a partir de dos tipos de actividades: las clases teóricas

demostrativas y prácticas interactivas (laboratorios de aprendizaje), en cada una de ellas se diferencian 8 momentos presentados a continuación[10]:

1. Descripción y planteamiento del problema sin proyectar los resultados.
2. Registro de predicciones individuales.
3. Discusión de predicciones en pequeños grupos.
4. Registro de predicciones grupales
5. Socialización de predicciones de cada uno de los grupos.
6. Realización del experimento por parte del docente mostrando claramente los resultados. (Si la práctica es interactiva el experimento lo realizan los estudiantes)
7. Descripción, discusión y registro de los resultados en el contexto de la demostración.
8. Síntesis de los conceptos involucrados en la práctica extrapolación de los conceptos.

Para el registro de las predicciones realizadas individuales y grupales además de los resultados observados el docente puede diseñar unos formatos, para cada momento *registro de predicciones individuales y grupales*. Además del diseño de un manual de la práctica como guía para el docente o persona encargada de realizar la actividad o experimento.

4.3.2. Resolución de problemas (*RP*)

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

[10] Tomado de MANUAL DE ENTRENAMIENTO ALOP de sokoloff d. (2006), Manual de entrenamiento “active learning in optics and photonics (ALOP) pp (22 al 26).

Guzmán (2007) plantea que la resolución de problemas le permite al alumno manipular los objetos matemáticos y reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje (metacognición). En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel MEN (1998).

Acorde con lo anterior, implementar la resolución de problemas en el aula de clase permite el desarrollo de estrategias y habilidades asociadas a los conceptos matemáticos inmersos en la situación, sus relaciones, formas de representación, interpretaciones y generalizaciones acorde al contexto presentado.

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo MEN (1998) y de esta manera contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas y su relación con otras áreas del conocimiento.

5. PROPUESTA DIDÁCTICA

5.1. Caracterización de la población:

La propuesta se realizó con 30 estudiantes de grado noveno del Gimnasio Mixto Manuel del Socorro Rodríguez (GMMSR), ubicado en la localidad de Suba de la ciudad de Bogotá; institución privada que ofrece el servicio educativo desde preescolar hasta grado once y cuenta con 600 estudiantes aproximadamente, que pertenecen a los estratos 2 y 3. El Proyecto Educativo Institucional (PEI) se fundamenta en la educación en valores y un énfasis empresarial.

Funciona en jornada única, con 8 periodos diarios de clase de 50 minutos, para cada una de las asignaturas. El área de matemáticas tiene una intensidad semanal de 5 horas en primaria y 4 horas en secundaria. Es importante resaltar además que la enseñanza de física y química se incluye desde grado sexto hasta noveno con una intensidad horaria de 1 hora semanal y para los grados 10° y 11° con 4 horas semanales.

Figura 41. Estudiantes grado 9°.

5.2. Descripción de la propuesta

La propuesta didáctica de este trabajo consiste en:

1. Una prueba diagnóstica inicial.
2. Dos talleres de geometría elemental asociados a rectas, ángulos y triángulos. Se caracterizan por representar situaciones y modelos geométricos y una serie de preguntas y problemas las cuales tienen el fin de identificar los conceptos asociados a geometría y las relaciones que pueden establecer entre sus elementos.
3. Dos talleres experimentales sobre reflexión y refracción de la luz, en donde se aplican y relacionan los conceptos básicos de geometría elemental con los fenómenos observados.

   La estructura general de los talleres tienen en cuenta las características de la *MAA.* Teniendo en cuenta los siguientes registros: manual de la práctica, hoja de predicciones individuales, grupales y resultados (ver anexos).
4. Dos talleres de geometría elemental relacionados con la construcción de imágenes de reflexión y refracción de la luz, según el modelo de la óptica geométrica.
5. Una prueba de salida con la cual se realizó un análisis y contraste de los resultados respecto a la actividad diagnóstico y un cálculo de la ganancia normalizada de Hake.

5.3. Desarrollo y resultados de la propuesta[11]

5.3.1. Actividad diagnóstico: Fue aplicada a los 30 estudiantes de grado noveno, con el fin de indagar los conceptos que reconocían los estudiantes respecto a los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y en la parte de geometría los conceptos asociados a rectas, ángulos, y semejanza de triángulos. Ver anexo A**.**

[11] Las imágenes que se presentarán en esta sección fueron tomadas por el autor en el desarrollo de las prácticas y de las guías desarrolladas por los estudiantes.

5.3.1.1. Resultados de la prueba diagnóstico

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la actividad diagnóstico teniendo en cuenta la cantidad de estudiantes que contestaron acertadamente cada una de las preguntas.[12]

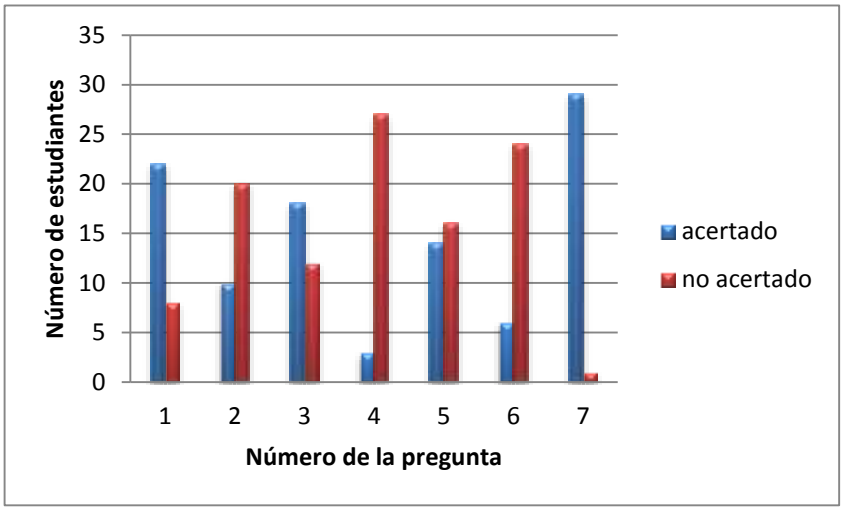


Figura 42.Contraste resultados actividad diagnóstico.

A continuación se presentan algunos ejemplos de respuesta de los estudiantes:

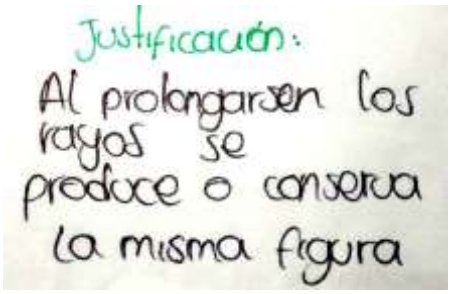


Figura 43.Justificación de la prolongación de los rayos

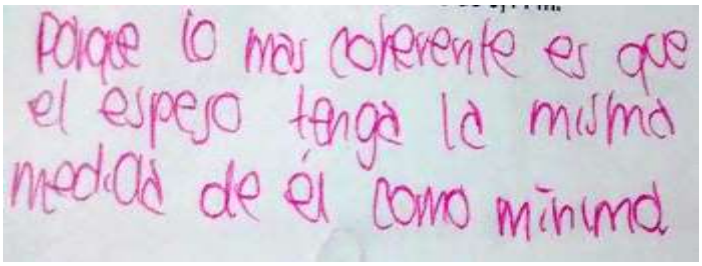


Figura 44. Justificación tamaño mínimo del espejo

[12] Los datos se presentan en el anexo N.

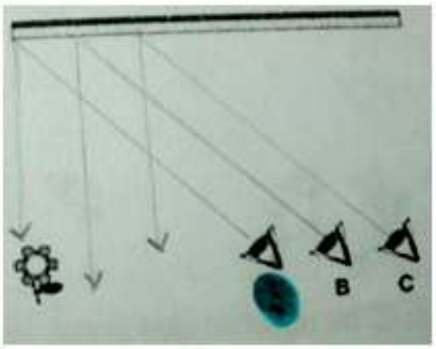


Figura 45.Representación por medio pregunta 6

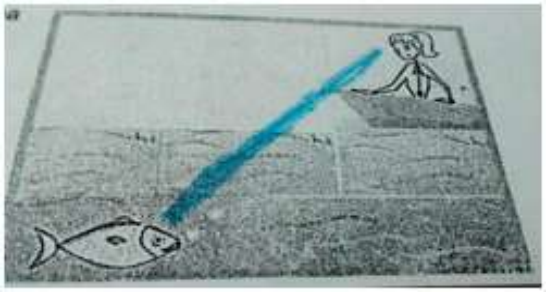


Figura 46. Representación trayectoria de un rayo para observar un pez en el agua.

Teniendo en cuenta cada pregunta y los objetivos que se tienen con cada una de ellas (anexo A) se tuvieron los siguientes resultados:

- Respecto a la trayectoria de los rayos de luz al momento de incidir en una superficie reflejante como un espejo, los estudiantes argumentaron que dichos rayos rebotarían de forma contraria a donde se proyectaron en cualquier dirección, sin embargo no consideraron en su selección los ángulos.
- Con relación a las prolongaciones de los rayos los estudiantes argumentaron que se debían intersecar en un punto, en dirección opuesta al rayo inicial formando dos triángulos (ver figura 43), argumentando que se conserva la misma figura.
- En la pregunta asociada a los ángulos de incidencia y de reflexión de acuerdo a la figura (ver anexo A, pregunta 3), los estudiantes asociaron la representación a la formación de dos triángulos, por lo tanto utilizaron la propiedad *la suma de los ángulos internos de un triángulo mide 180°.*
- Cuando se indagó sobre la medida mínima de un espejo para que una persona se pueda ver completamente, los estudiantes manifestaron que no sabían qué hacer, simplemente seleccionaron al azar sus respuestas teniendo en cuenta que depende de la distancia en que se encuentre una persona del espejo se podía ver completamente o solo una parte de su cuerpo. En este caso los estudiantes no tienen conocimiento de cómo

solucionar la situación de forma matemática se remiten a conjeturas que establecen según lo que ellos piensan de la situación, ver figura 44.

- En la pregunta 5 (anexo A, punto 5), asociada a semejanza de triángulos en una situación de reflexión, los estudiantes utilizaron procesos matemáticos asociados a teorema de Pitágoras y razones trigonométricas como tangente, debido a que estos conceptos hacen parte de los últimos temas que se han abordado en el periodo durante las clases.
- En la situación donde requerían realizar una representación de rayos para seleccionar cuál de los ojos podían observar la flor (anexo A, punto 6) los estudiantes realizaron su selección teniendo en cuenta que el ojo debería estar más lejos para que tenga mayor visibilidad de la flor, sin tener en cuenta en la representación la relación entre los ángulos de incidencia y de reflexión, ver figura 45.
- Para la pregunta 7 cuando se observa un pez en el agua, los estudiantes argumentaron su respuesta acertada teniendo en cuenta su experiencia en situaciones de la vida cotidiana como lo es sumergirse en una piscina, afirmando que al estar en el agua esta hace que las cosas u objetos se vean más cerca y se dé la ilusión de cambio de posición y tamaño, por lo que el pez se podría ver más arriba de donde realmente está.
- La pregunta final donde los estudiantes debían trazar la trayectoria que sigue uno de los rayos que permiten ver el pez sumergido en el agua, los estudiantes hicieron representaciones de rayos en línea recta hacia el pez, sin tener en cuenta el cambio de medio (aire-agua) como se observa en la figura 46.

De forma general, se puede evidenciar que los estudiantes tienen dificultades en relacionar los conceptos de geometría para solucionar situaciones problema donde se requieren estos conceptos, dificultades en torno a reconocer la trayectoria de los rayos de luz incidente y reflejado, determinar el punto donde se cortan sus prolongaciones, identificar la medida de los ángulos incidente y reflejado cuando se conoce uno de ellos, utilizar los conceptos de semejanza de

triángulos para solucionar situaciones de reflexión de objetos, así como reconocer la trayectoria de los rayos de luz cuando existe un cambio de medio; por otro lado, a pesar de que en clase de física de grado séptimo se abordaron los conceptos de fenómenos de reflexión y refracción de la luz y que realizaban representaciones de los mismos, no se evidencia su apropiación dado los argumentos y las representaciones que realizaron en la prueba.

5.3.2. Talleres de geometría 1 y 2:

En los anexos B y C se presentan los talleres de geometría los cuales tenían como objetivo a partir de una representación geométrica, establecer relaciones entre los elementos que se encuentran en la misma, como la relación entre los ángulos dada su posición, relación entre rectas paralelas y perpendiculares, congruencia de segmentos, ángulos y figuras geométricas. Para la elaboración de las representaciones se implementó el software GeoGebra.

La propuesta de las construcciones se basa en modelos de reflexión de objetos en espejos planos y la refracción de la luz al momento de observar un objeto sumergido en el agua, sin embargo el estudiante no tiene conocimiento de que esas representaciones está modelando algún fenómeno de la luz.

5.3.2.1. Resultados talleres de geometría 1 y 2

Figura 47.Solución guías 1 y 2

Con la aplicación de los talleres de geometría se fortalecieron en los estudiantes los conceptos de paralelismo, perpendicularidad, ángulos, triángulos y relaciones de semejanza y congruencia. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

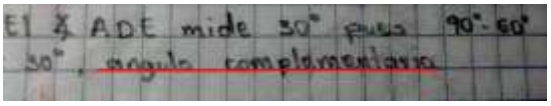


Figura 48.Argumento uso de ángulos complementarios.

"El ángulo AED mide 30° pues 90°-60°=30°, por ángulos complementarios"

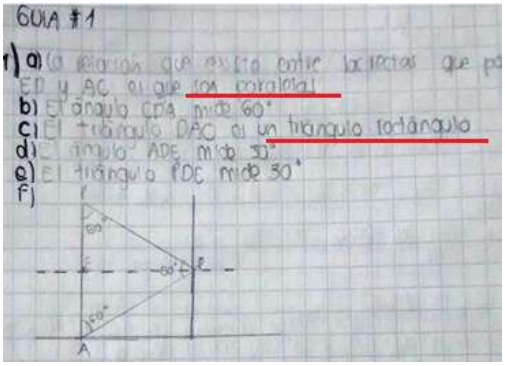


Figura 49.Solución guía de geometría- rectas paralelas.

.

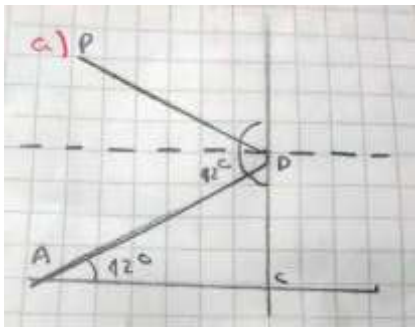


Figura 50. Construcción del ángulo EDP con la bisectriz del ángulo ADP.

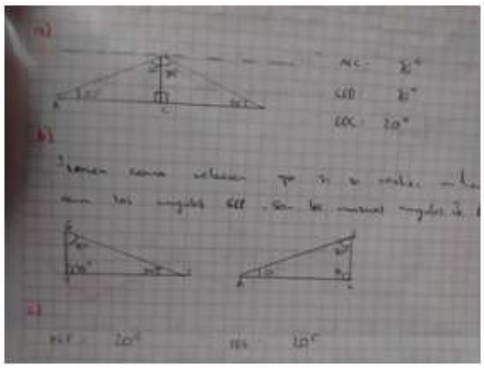


Figura 51.Relaciones establecidas entre los triángulos de la construcción.

Las actividades les permitieron a los estudiantes establecer relaciones entre las medidas de los ángulos para así establecer comparaciones con ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos, y ángulos alternos internos (ver figura 50); teniendo dichas medidas los estudiantes realizaron comparaciones entre los elementos de los triángulos, algunos acudieron a construcciones propias y descomposición de las mismas (ver figura 51) para afirmar si eran semejantes o congruentes.

5.3.3. Taller experimental 1: Reflexión de la luz.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la actividad diagnóstico respecto al concepto de reflexión y las nociones que tienen los estudiantes sobre este fenómeno, se plantea la siguiente práctica experimental (anexos E-F-G) asociada al fenómeno de reflexión, con el fin de caracterizar y relacionar los ángulos de incidencia y de reflexión al momento de incidir un rayo de luz sobre un espejo plano.

Tomando como referencia la observación y la modelación estableciendo relaciones geométricas al momento de la toma y representación de datos. Con lo anterior, se pretendía que el estudiante estableciera relaciones entre los ángulos acorde a los conceptos básicos de geometría trabajados en el taller 1 y 2.

Se debe considerar que la práctica está enmarcada en la *MAA* por lo que se tendrá en cuenta un registro de predicciones, las cuales serán contrastadas al momento de realizar la práctica para establecer las conclusiones respectivas del fenómeno observado.

En el anexo D se presenta el manual de la práctica 1 *reflexión de la luz* con sus respectivos formatos implementados en el desarrollo de la práctica, los cuales son registro de predicciones individuales, grupales y hoja de resultados.

5.3.3.1. Resultados taller experimental 1: reflexión de la luz

Antes de realizar la práctica los estudiantes realizaron las predicciones individuales y grupales de la situación, estas tenían como objetivo indagar la trayectoria de los rayos de luz (sea del apuntador láser o la sombra proyectada por la vela con el marcador) al momento de incidir contra el espejo. Dentro de las predicciones los estudiantes afirmaban -*el rayo de luz chocaba con el espejo y se*

reflejaba-; sin embargo en sus representaciones no consideraron los ángulos, simplemente representaron la trayectoria del rayo (ver figuras 52, 53 y 54).

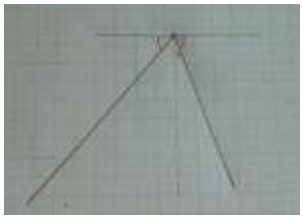


Figura 52. Representación geométrica.

Figura 53. Representación geométrica.

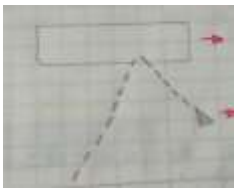


Figura 54. **Representación geométrica.**

La práctica fue trabajada en grupo debido a tiempos requeridos para el desarrollo de la misma y a las diferentes actividades que se debían desarrollar simultáneamente: sostener el espejo, hacer marcas en la hoja milimetrada, trazo de rayos y toma de medidas utilizando el transportador.

A continuación se muestran evidencias del desarrollo de la práctica:

Figura 55- Medida del ángulo de incidencia y el ángulo reflejado

Figura 56- Práctica reflexión de un rayo de luz

Figura 57- Reflexión de una vela

Figura 58. Formación del ángulo de incidencia y de reflexión

Figura 59. Registro final práctica reflexión de la luz

Figura 60. Comparación altura objeto-altura imagen

A partir de la medida de los ángulos, haciendo uso del transportador y el trazo de los rayos sobre la hoja milimetrada, los estudiantes realizaron la representación geométrica de la trayectoria del rayo incidente y el de reflexión, (ver figuras 55-59), el completar la tabla y realizar diferentes mediciones con el fin de contrastar resultados, permitieron realizar aproximaciones y a su vez comparaciones entre dichos ángulos.

En las discusiones presentadas durante el desarrollo de la práctica, los estudiantes realizaban comparaciones con los conceptos trabajados en las guías de geometría, como por ejemplo -*son ángulos complementarios- si se traza una perpendicular, esta es la bisectriz del ángulo- luego estos ángulos serán iguales-.*

La observación, toma de datos, medición de ángulos y representación permitieron contrastar y complementar las predicciones dadas inicialmente, el desarrollo de la práctica permitió que los estudiantes establecieran una igualdad entre los ángulos de incidencia y de reflexión, propósito que se tenía con el desarrollo de la práctica.

Como parte de las conclusiones después de realizar la práctica los estudiantes afirmaron "*Se puede evidenciar que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, sin embargo cuando no se tiene una buena precisión del láser o de la vela, se observan alteraciones en el ángulo de reflexión pero si se tiene una buena precisión van a ser iguales respecto al espejo".*

Finalmente el realizar y contrastar resultados con la situación 2 haciendo uso de la vela permitió además identificar otras características importantes como lo fue determinar *que la distancia marcador-espejo* era igual *a la distancia imagen-espejo*, (ver figura 57) a partir del conteo de cuadriculas de la hoja milimetrada, de igual manera observar que el objeto y las imágenes son iguales en cuanto a tamaño y forma, ver figura 60.

5.3.4. Taller experimental 2: refracción de la luz.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la actividad diagnóstico respecto al concepto de refracción de la luz y las nociones que tienen los estudiantes sobre este fenómeno, se planteó la siguiente práctica experimental con el fin de caracterizar y relacionar los ángulos de incidencia, de refracción y de desviación al momento de incidir un rayo de luz sobre dos medios diferentes, con lo anterior, se pretende que el estudiante establezca relaciones entre los ángulos acorde a los conceptos básicos de geometría trabajados en el taller 1 y 2 en la toma, registro y representación de los datos.

En el anexo E se encuentra el manual de la práctica 2 sobre *refracción de la luz* con sus respectivos formatos de registro de predicciones y resultados.

5.3.4.1. Resultados taller experimental 2.

Antes de realizar la práctica se realizaron las predicciones individuales y grupales las cuales estaban dirigidas a indagar la trayectoria de los rayos de luz cuando pasan de un medio (aire) a otro (agua) con la respectiva representación.

Algunos de las predicciones grupales e individuales fueron:

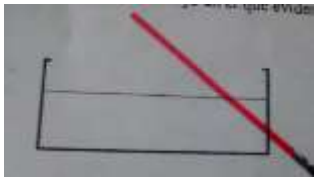


Figura 61.Trayectoria rayo de luz apuntando desde abajo

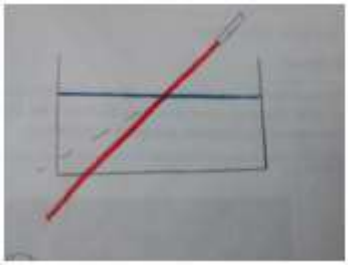


Figura 62.Trayectoria rayo de luz apuntando desde arriba

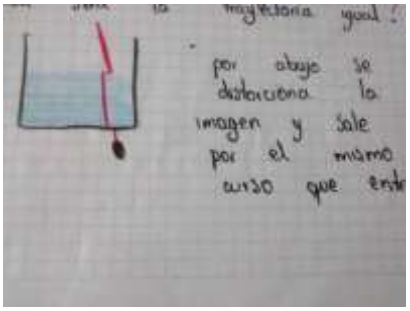


Figura 63. Representación trayectoria de un rayo de luz al pasar aire-agua.

Como se evidencia en las figuras 61 y 62, los estudiantes realizaron la representación de la trayectoria de un rayo de luz, como una línea recta, al

momento de incidir sobre el agua, sin identificar la influencia en la trayectoria del rayo cuando cambia de medio (aire-agua). En la figura 63, se observa una representación donde aparentemente cambia el medio y hace que el rayo de luz se parta, el estudiante afirma *–se distorsiona… sale por el mismo curso en el que entra* - el anterior argumento permite reconocer que el estudiante identifica que el cambio de medio influye en la trayectoria de la luz.

La práctica fue trabajada en grupo debido a tiempos requeridos para el desarrollo de la misma y a las diferentes actividades que se debían desarrollar simultáneamente. A continuación se muestran evidencias y resultados de la actividad:

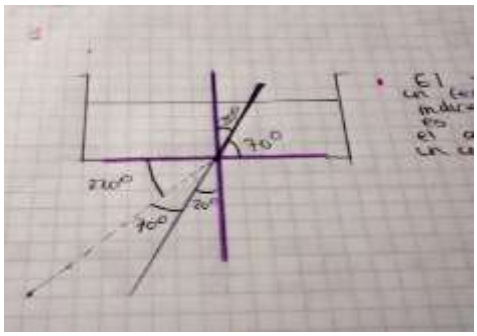


Figura 64- Representaciones de los resultados de la práctica

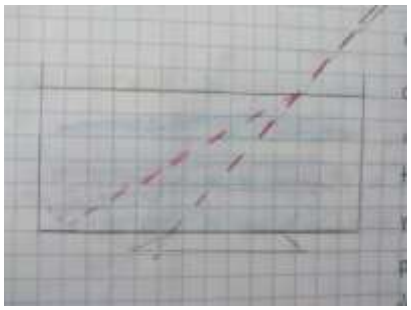


Figura 65- Representación geométrica del ángulo de refracción

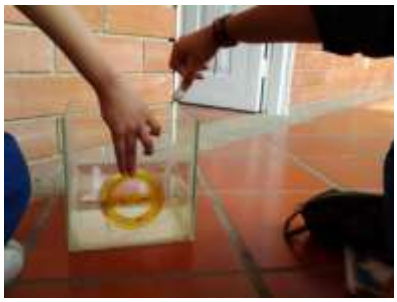


Figura 66- Desarrollo de la práctica refracción

Figura 67- Trazo de rayos incidente y refractado sobre la pecera-

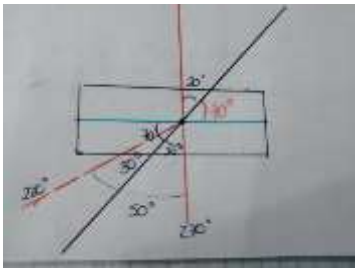


Figura 68- Representación geométrica- ángulo incidente y ángulo

Para la primera parte de la actividad los estudiantes observaron la trayectoria del rayo si se apuntaba desde arriba o desde abajo, sin embargo dado que el laboratorio estaba muy iluminado se utilizó polvo de tiza para observar la trayectoria de los rayos, algunas de las representaciones realizadas por los estudiantes se observan en la figura 64, la representación del rayo refractado, teniendo en cuenta que el estudiante realizó dos tipos de recta, la primera la observada en la pecera y la otra teniendo en cuenta la trayectoria que tenía la luz si no cambiaba de medio.

En esta primera parte muchas de las predicciones realizadas no coincidieron con lo observado, ya que las primeras representaciones realizadas por los estudiantes consistían en un rayo que se proyectaba en línea recta (figura 61) similar a las respuestas presentadas en el diagnóstico (figura 46). Al preguntarse el porqué de lo que sucedía los estudiantes comentaban el *cambio de medio*, lo que hacía que el rayo de luz se "*partiera"* y llegara a un punto diferente al que debía llegar si seguía una trayectoria en línea recta.

Para tomar la medida de los ángulos, se hicieron marcas de la trayectoria de los rayos incidente y refractado sobre el vidrio de la pecera (figura 67), de esta manera facilitaba la toma de datos para el registro de los ángulos mencionados. Por otra parte, dada la representación de la figura 68, se evidencia la necesidad de los estudiantes por representar la trayectoria de los rayos a partir de construcciones geométricas como las presentadas en el taller de geometría 1 y 2. (Anexo C, pregunta 4), en las cuales se evidencia la importancia de utilizar como referencia la recta normal (perpendicular) para establecer relaciones entre los ángulos que se formaban a partir de ángulos complementarios y opuestos por el vértice, de esta manera poder determinar las medidas de los ángulos de incidencia, refracción y desviación.

En síntesis, el desarrollo de la práctica permitió a los estudiantes a partir de la observación y registro de datos, evidenciar el fenómeno de la refracción de la luz y

cómo se puede representar este fenómeno por medio de un modelo geométrico donde se relacionan los rayos incidente y refractado, en este caso los estudiantes argumentaron la influencia del cambio de medio para que el rayo de luz cambiara su trayectoria.

5.3.5. Taller de geometría 3 y 4

Después de los resultados obtenidos de los talleres experimentales se evidenciaron las relaciones que establecieron los estudiantes entre el fenómeno observado y las construcciones geométricas presentadas en las guías de geometría 1 y 2. Como complemento y para formalizar las relaciones observadas se propusieron las guías de geometría 3 y 4 las cuales contienen construcciones (iguales a las guía 1 y 2 de geometría), pero enmarcadas con enunciados asociados a contextos y representaciones geométricas sobre los fenómenos de reflexión o refracción de la luz.

El desarrollo de las guías permitió formalizar lo observado en los talleres experimentales y caracterizar los elementos involucrados objeto, imagen y medio óptico (espejo), con lo realizado en las guías 1 y 2 al relacionar los objetos geométricos de cada situación planteada. A continuación se presentan algunas de las respuestas dadas por los estudiantes:

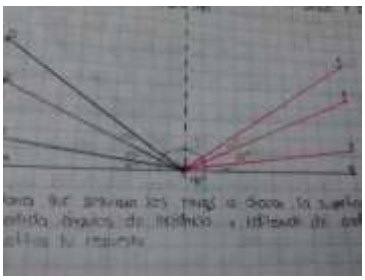


Figura 69.Construcción geométrica ángulo de reflexión

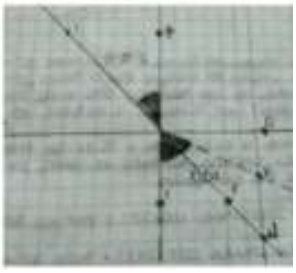


Figura 70 .Determinar ángulos de refracción y desviación

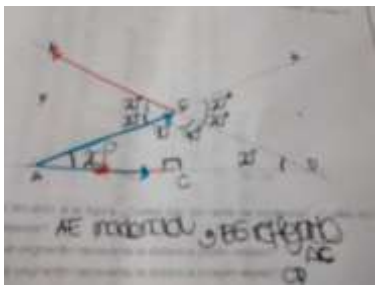


Figura71. Construcción geométrica reflexión-determinando ángulos

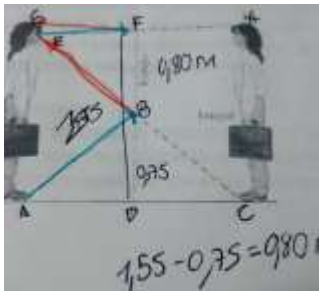


Figura 72. Altura mínima de un espejo para que una persona se vea de cuerpo completo

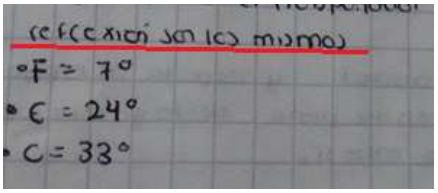


Figura 73. Justificación de una estudiante sobre la construcción de los ángulos de reflexión

5.3.5.1. Resultados talleres de geometría 3 y 4

En los anexos L y M se retomaron algunas de las construcciones geométricas de los talleres 1 y 2 de geometría enmarcadas en contextos de representación de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz; de esta manera se establecieron relaciones entre las actividades realizadas previamente en torno a reconocer y determinar ángulos y relaciones entre los triángulos con las características propias de los fenómenos.

En el caso de *la reflexión:*

- La distancia de la imagen al espejo, es la misma del espejo a la imagen.
- El punto donde se prolongan los rayos reflejados forman la imagen del objeto.
- La imagen tiene la misma forma y tamaño que la del objeto.
- El ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión. (ver figura 69 y 71).

En la determinación de los ángulos de incidencia y de reflexión se tomó como referencia una recta perpendicular al espejo denominada recta normal (ver figura 69) y cualidades de la imagen asociadas a su tamaño y la distancia con el espejo (ver figura 71). En estos casos fue fundamental el complementar las medidas de los ángulos y establecer relaciones de congruencia entre los triángulos formados

para establecer igualdades entre lados y ángulos y así llegar a conclusiones respecto al objeto y su imagen , ver figura 71.

En el caso de *refracción* de la luz, reconocer que el cambio de medio cambia la trayectoria del rayo de luz y que al ser representado geométricamente, se pueden determinar las medidas de los ángulos de incidencia, refracción y desviación (ver figura 70), de la siguiente manera: *ángulo de incidencia – ángulo de refracción = ángulo de desviación.* Lo anterior con ayuda de la representación geométrica como las realizadas en la figura 68 en la actividad experimental.

5.3.6. Prueba de salida - resultados

Para finalizar se realizó la aplicación de la prueba de salida (anexo A) la cual contenía las mismas preguntas realizadas en la actividad diagnóstico asociado a indagar la trayectoria de los rayos de luz en situaciones asociadas a los fenómenos de reflexión y refracción de la luz.

El registro de la cantidad de estudiantes que contestaron acertadamente la prueba de salida se encuentra en el anexo O y que fueron representados en el siguiente gráfico de barras.

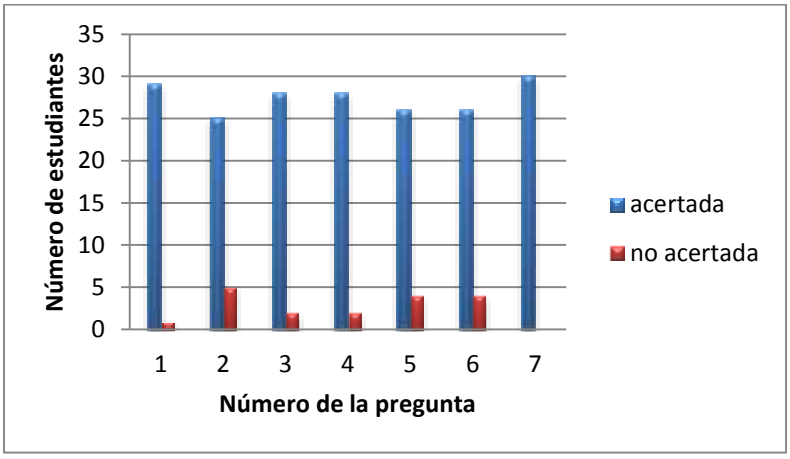


Figura 74. Cantidad de personas que respondieron acertadamente las preguntas de la prueba de salida

Con base a lo anterior se puede observar que la mayor cantidad de la población respondieron de manera correcta las preguntas presentadas en la prueba de salida (post-test).

A continuación se presenta un comparación de las peguntas acertadas en la prueba diagnóstico (pre-test) con las preguntas correctas obtenidas en la prueba de salida (post-test), evidenciando un incremento en la cantidad de estudiantes que contestaron correctamente la prueba.

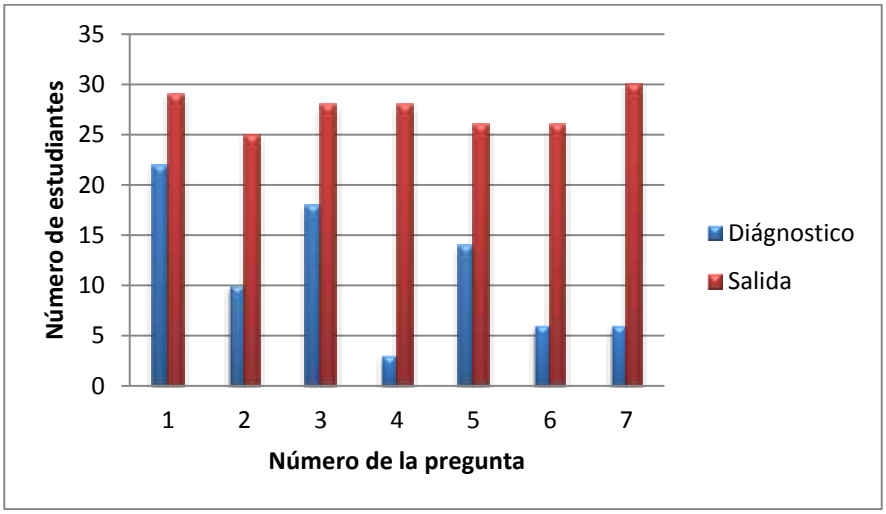


Figura 75. Contraste de resultados prueba diagnóstico-prueba de salida

El aumento en las respuestas correctas en las dos pruebas se logró luego de la aplicación de los talleres de geometría y actividades experimentales, las cuales le permitieron a los estudiantes reconocer las características de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y sus respectivas representaciones, lo que se evidenció en los argumentos que presentaron al justificar las respuestas de la prueba de salida.

Los cuales se presentan a continuación:

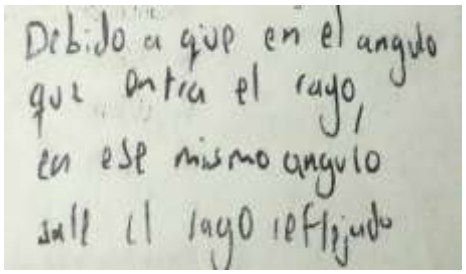


Figura 76.Justificación trayectoria el rayo al incidir en un espejo

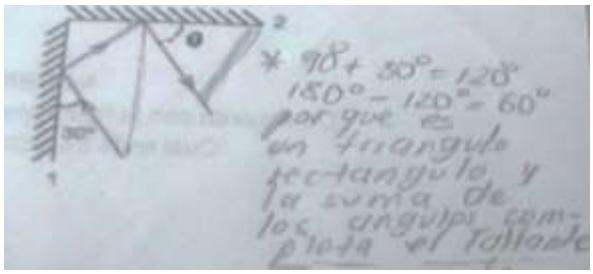


Figura 77.Justificación ángulos complementarios

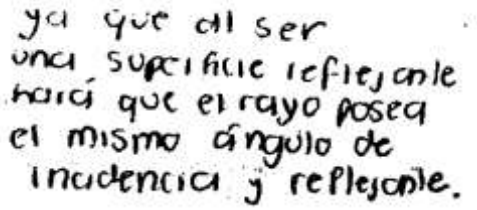


Figura 78.Justificación ángulo de incidencia y ángulo de reflexión.

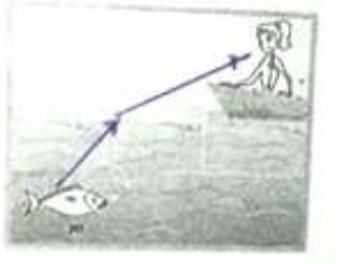


Figura 79. Representación trayectoria del rayo de luz para observar un pez en el agua

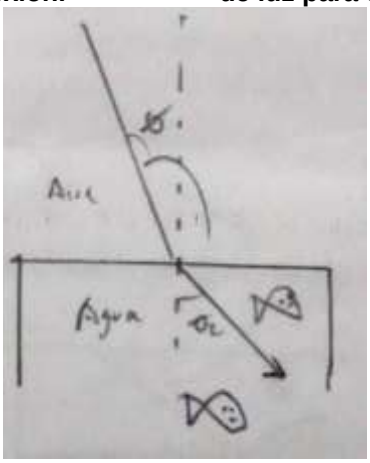


Figura 80. Representación geométrica de la situación del pez en el agua.

- Respecto a la trayectoria de los rayos en situaciones de reflexión de la luz los estudiantes en sus argumentos se refirieron a los ángulos de incidencia y de reflexión debido a que la superficie era reflejante y como se observó en la práctica de reflexión y talleres de geometría, se establecieron relaciones entre el ángulo incidente y el ángulo de reflexión; en palabras de los estudiantes- figura 76- *el ángulo en que entra el rayo con ese mismo ángulo sale el rayo reflejado*- El anterior criterio se consideró en las

representaciones realizadas en la pregunta 6 (anexo Q) para determinar que ojo podía observar la flor.

- Dada las construcciones geométricas y relaciones realizadas en el taller 4 de geometría asociado a la medida mínima de un espejo para que la persona se pueda ver de cuerpo completo, los estudiantes argumentaron la relación que se estableció en dicho taller; *debe ser la mitad de la altura de la persona*- aquí fueron fundamentales las relaciones de semejanza de triángulos trabajadas en el taller 4 (anexo M, pregunta 6).

- Se evidenció un aumento en la cantidad de estudiantes que utilizaron las relaciones entre ángulos de incidencia y de reflexión en la solución de la situación (anexo Q, pregunta 3) y como se observa en la figura 77, el establecer relaciones entre ángulos complementarios y las relaciones entre los ángulos internos de un triángulo que llevaron a determinar el ángulo del rayo emergente.

- En cuanto a la refracción de la luz, los argumentos de los estudiantes para justificar que el pez en el agua se observa más arriba de la posición real, estuvieron relacionados con lo observado en la práctica de refracción y el cómo el cambio de medio hace que los objetos en este caso el pez tenga una posición aparente (figura 80). A su vez, se evidencia un cambio en la percepción que se tenía en la actividad diagnóstico de la trayectoria del rayo de luz que permite que el observador vea el pez en el agua, como se observa en las figuras 79 y 80 haciendo referencia a la existencia de un rayo incidente y un rayo refractado, con sus respectivos ángulos.

En el siguiente gráfico se evidencia el desempeño de los estudiantes por cada una de las preguntas realizadas en el pre-test y post-test.

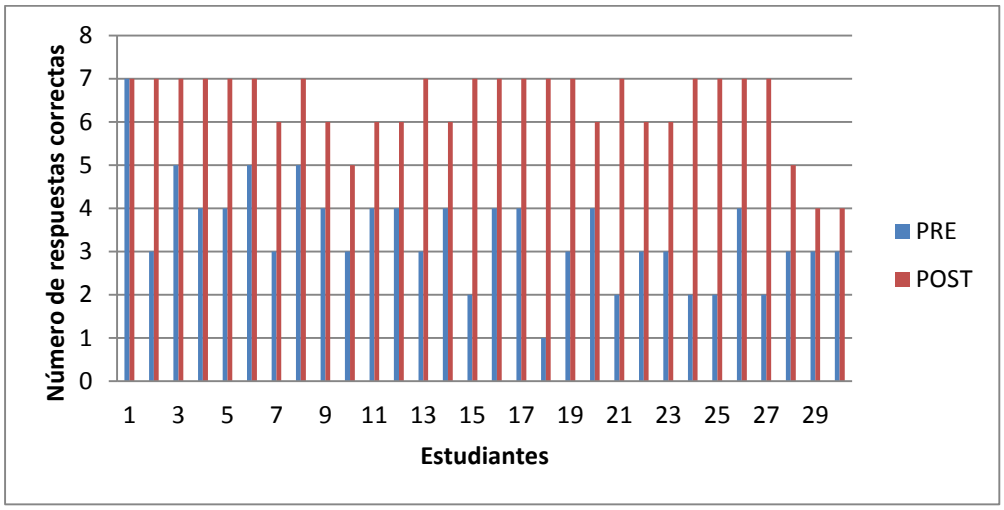


Figura 81. Comparación número de respuestas correctas por estudiante.

Sin embargo dado el sistema de calificación del colegio se debe dar un valor porcentual a las actividades realizadas con los estudiantes en una escala de 0% - 100%. De acuerdo a lo anterior se presenta en la siguiente tabla los porcentajes obtenidos por cada una de los estudiantes en la actividad diagnóstico y la prueba de salida. Los resultados del pre-test y post-test de la Tabla 1 se representan en la figura 82

Estudiante	%PRE	%POST	G.Hake
1	100	100	0
2	40	100	1
3	70	100	1
4	56	100	1
5	56	100	1
6	70	85	0,5
7	40	100	1
8	70	85	0,5
9	56	70	0,32
10	40	85	0,75
11	56	85	0,66
12	56	100	1
13	40	100	1
14	56	85	0,66
15	30	100	1
16	56	100	1

17	56	100	1
18	15	100	1
19	40	100	1
20	56	85	0,66
21	30	100	1
22	40	85	0,75
23	40	85	0,75
24	30	100	1
25	30	100	1
26	56	100	1
27	30	100	1
28	40	70	0,5
29	40	56	0,27
30	40	56	0,27

Tabla1. Registro de % obtenido por cada estudiante.

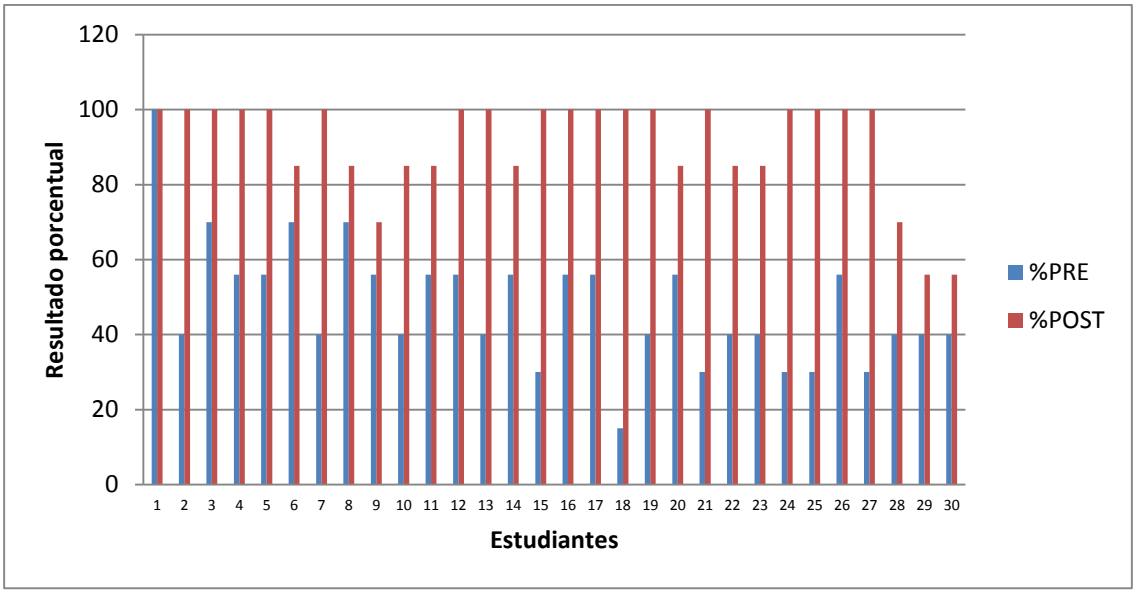


Figura 82.Comparación % por estudiante en el pre y post-test.

Se observa como los estudiantes luego de la aplicación de las actividades de la propuesta mejoraron los resultados obtenidos respecto al pre-test de una forma significativa lo que se evidencia no solo en el porcentaje sino en los argumentos que presentaron al momento de justificar su elección.

5.3.6.1. Ganancia Hake:

Para analizar cuantitativamente los anteriores resultados se puede medir la ganancia conceptual en la aplicación de la propuesta confrontando los resultados entre el pre y el post-test, posteriormente se valoran los datos con la ganancia normalizada propuesta por Hake (1998) la cuál brinda la posibilidad de medir y comparar resultados de la ganancia conceptual a partir de la ganancia normalizada $< g >$ ”

La ganancia normalizada $< g >$ se define como la razón del aumento del pre-test y el post-test respecto al valor máximo posible:

$$< g >= \frac{\%<Sf>-\%<Si>}{100-\%<Si>} \quad [1]$$

Donde $\% < Sf >$ es el porcentaje obtenido en la prueba de salida y $\% < Si >$ es el porcentaje obtenido en la prueba de entrada.

Teniendo en cuenta los datos presentados en la tabla 1, se calculó la ganancia Hake por cada estudiante utilizando la ecuación [1] la cual se muestra en la cuarta columna de la misma tabla.

Para establecer la ganancia del grupo respecto a los resultados obtenidos en la actividad diagnóstico y la prueba de salida se utilizó la ecuación [2] la cual permite calcular el promedio de la ganancia normalizada $< \bar{g} >$ a partir del promedio de la ganancia normalizada de los 30 estudiantes de grado noveno.

$$< \bar{g} >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} gi \quad [2]$$

Donde n es el número de estudiantes con los cuales se aplicó el pre y post-test y gi la ganancia que se representó en la tabla 1.

La ganancia normalizada obtenida en la ecuación [2] permite categorizar los datos obtenidos en tres zonas de ganancia normalizada baja, media y alta como se presenta a continuación:

Zona	Intervalo
Baja	$g < 0{,}3$
Media	$0{,}3 < g < 0{,}7$
Alta	$g > 0{,}7$

Tabla 2. Zonas de ganancia normalizada.

Reemplazando los datos de la columna 4 de la tabla 1 se obtiene el valor de la ganancia normalizada promedio del grupo.

$$< \bar{g} >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} gi = \frac{0 + 17(1) + 2(0{,}5) + 0{,}32 + 3(0{,}75) + 3(0{,}66) + 2(0{,}27) + 0{,}3}{30}$$

$$= \frac{23{,}39}{30} = 0{,}77$$

De acuerdo a la tabla 2 y dado el resultado obtenido en la ecuación [2] de **0,77** la ganancia normalizada del grupo noveno se puede categorizar como alta; lo que verifica los resultados representados en las tablas y el análisis realizado previamente. Con base en lo anterior, se evidencia la efectividad de la propuesta didáctica desarrollada con los estudiantes, debido a que presentaron avances en los resultados de las pruebas y una comprensión en las características de los fenómenos y su representación haciendo uso de modelos geométricos.

6. CONCLUSIONES

1) A partir del análisis de los resultados cuantificados por medio de la ganancia de Hake para cada uno de los estudiantes, se evidenció que cerca del 60% de ellos se ubicaron en una zona de ganancia normalizada alta, mientras que un 30% se ubicaron en una zona de ganancia media y un 10% en una zona de ganancia baja, lo cual permite concluir que la propuesta utilizada realmente fue efectiva a nivel individual.
2) A nivel grupal, para el curso objeto de estudio se obtuvo una ganancia normalizada promedio de $< \bar{g} >= 0{,}77$ que según Hake, lo ubica dentro de una zona de ganancia normalizada alta, lo cual claramente indica que los resultados de la propuesta fueron efectivos con relación al hecho de fundamentar las bases geométricas que hacen parte de las representaciones utilizadas para modelar los fenómenos de reflexión y refracción de la luz como se evidencia en el capítulo 5 (secciones 5.4.3.1 y 5.4.4.1).
3) Con la implementación de la propuesta los estudiantes realizaron de forma correcta las interpretaciones y descripciones de las imágenes obtenidas por reflexión y refracción de la luz, a partir de las relaciones establecidas entre los elementos geométricos de las construcciones realizadas, como las presentadas en el taller 3 y 4 (Sección 5.4.5.1).
4) Los resultados descritos en el capítulo 5, permiten concluir que hacer énfasis en abordar y profundizar en conceptos básicos de geometría, facilitan la comprensión e interpretación de la construcción de las imágenes en óptica geométrica, específicamente en los fenómenos de la luz (reflexión y refracción).
5) El uso de la *MAA* permitió a partir de la observación y modelación, determinar características importantes de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz en superficies lisas, esto se evidenció en el capítulo 5 (secciones 5.4.3.1 y 5.4.4.1) donde los estudiantes a partir la comparación

de sus predicciones con el fenómeno observado, llegaron a conclusiones correctas de los mismos y su representación geométrica.

6) Con los resultados obtenidos en sección 5.5.6 donde se compararon los resultados de la prueba de salida respecto a los obtenidos en la prueba de entrada, se puede concluir que, el fortalecer en los estudiantes las bases geométricas les permitió, establecer relaciones correctas entre el modelo geométrico y el fenómeno físico que se quería describir.
7) Las prácticas experimentales promovieron que los estudiantes acudieran a los conocimientos previos de geometría trabajados en los talleres 1 y 2 evidenciados en las secciones 5.4.3.1 y 5.4.4.1, lo que lleva a concluir que las actividades de geometría fueron determinantes para fortalecer en los estudiantes la relación entre el procedimiento experimental y el razonamiento geométrico.

7. BIBLIOGRAFÍA

- BETTINA B, PESA M (2011). El aprendizaje de fenómenos ópticos. Consejo Nac. Investigaciones científicas y Técnicas – CONICET.
- BRAVO B, PESA M, ROCHA A (2.011) implicancias de la enseñanza sobre el saber de los alumnos. El aprendizaje de fenómenos ópticos. Primera parte. (Implications of the education on the knowledge of students. The optical phenomena of learning. First part.) Investigações em Ensino de Ciências – V16 (3), pp. 489-507, 2011
- DITCHBURN R (1892) Óptica. Editorial Reverté.
- EISBERG R, LERNER L (1.986) Física fundamentos y aplicación, volumen 2, editorial: Mc Graw-Hill de México.
- FONT J (2003). ÓPTICA GEOMÉTRICA. EUETIT, Terrassa, recuperado de http://www.academia.edu/7629817/PTICA_GEO_ETRICA_Josep_Llu%C3%ADs_Font
- GODINO, J (2002) Geometría y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros.
- GONZÁLEZ C (2.013) La enseñanza de la óptica desde una conceptualización integradora de sus teorías, dinamizada y orientada por una concepción del aprendizaje significativo crítico. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Medellín, Colombia.
- GONZÁLEZ. Y (2.013) Enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque constructivista de la óptica geométrica mediante el uso de actividades experimentales: estudio de caso para el grado noveno de la Institución Educativa Orestes Sindicci. Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Bogotá, Colombia.
- HAKE (1998) Interactive-engagement methods in introductory mechanics courses. Physics Education Research.

- MARTIN J (2014) “Aprendizaje activo aplicado a la enseñanza del fenómeno óptico de interferencia de la luz en el marco del proyecto ondas de Colciencias en la isla de San Andrés” Tesis de maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Bogotà, Colombia.
- Mancebo Sánchez, E. M. (2013). Laboratorio de Óptica. Recuperado de:
- MURILLO F (2.011) Investigación acción. Métodos de investigación en Educación Especial. 3ª Educación Especial Curso: 2010-2011. Recuperado de http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá: s.n.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Santafé de Bogotá: s.n., 2003.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. Santafé de Bogotá: s.n., 2003.
- PAUL G. Física conceptual, tercera edición, editorial Pearson.
- RAMÍREZ C (2.012) Una visión de la óptica geométrica 9 grado. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Medellín, Colombia.
- ROJAS G (2.011) La enseñanza de los fenómenos de óptica geométrica a estudiantes de noveno grado desde la perspectiva del aprendizaje activo. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Bogotá, Colombia.
- VERGARA D (2.012) Aprendizaje activo en la enseñanza de la óptica. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Medellín, Colombia.

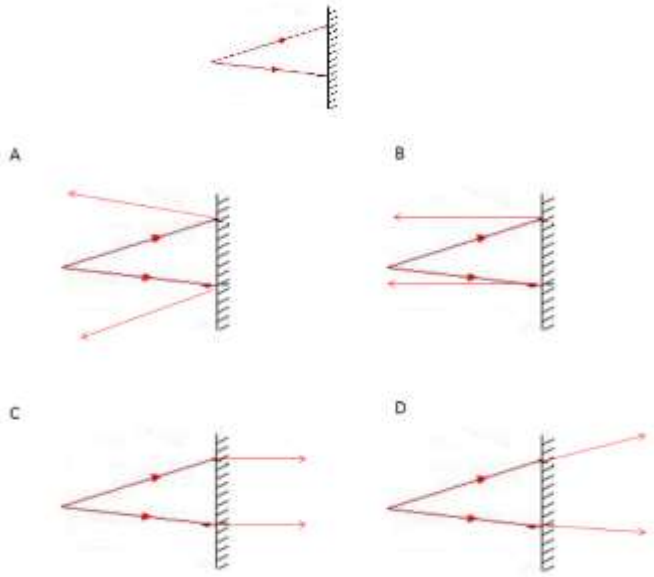
8. ANEXOS

A. Anexo. Actividad diagnóstico

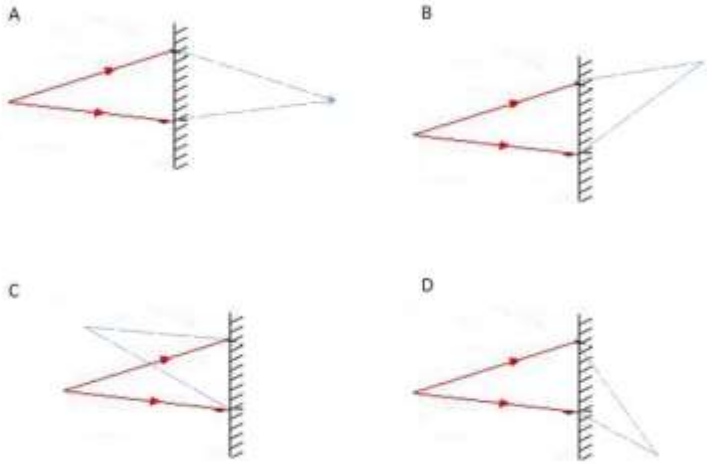
GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

De acuerdo con la figura presentada responda las preguntas 1 y 2

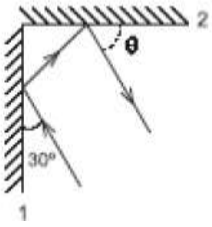
1. .Cuál es la trayectoria que siguen los rayos al incidir con la superficie, si esta es reflejante?



2. Si se prolongan los rayos reflejados en la figura ¿Cuál es el diagrama que representa la intersección de dichas prolongaciones?

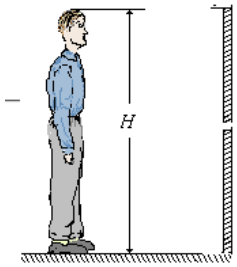


3. Dos espejos planos se colocan sobre una mesa formando un ángulo de 90°, como ilustra la figura.
   Un rayo luminoso incide sobre el espejo 1 formando el ángulo indicado de 30°. El ángulo Θ que forma el rayo emergente con el espejo 2, mide:
   a. 45°
   b. 15°
   c. 60°
   d. 30°

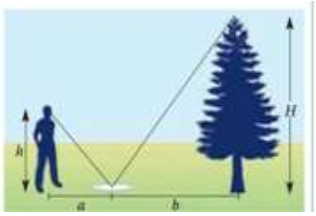


4. Una persona de 1,80 m de estatura desea comprar un espejo de pared en el cual pueda verse de cuerpo entero. ¿Cuál debe ser la altura mínima que ha de tener dicho espejo para que su imagen se vea completa? Debe tener en cuenta que la distancia de los ojos a la parte superior de la cabeza es de 0,14 m.

   a. 1,2 m
   b. 0,3 m
   c. 0,9 m
   d. 1,8 m



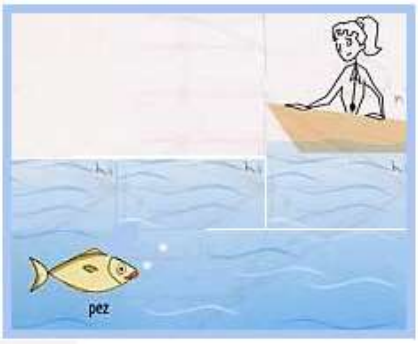
5. En la figura se observa un árbol que tiene 4m de altura y un charco de agua situado a 3m del pie del árbol. ¿A qué distancia del charco debe colocarse Oscar que tiene los ojos a 1,80 m del suelo para que pueda ver la imagen de la copa del árbol reflejada en el charco de agua?



a. 1,35 m
b. 1,8 m
c. 1,02 m
d. 1,5 m

6. De acuerdo a la figura ¿Cuál de los 3 ojos puede observar reflejada en la superficie superior la flor que se encuentra cerca de ellos?. Trace la trayectoria de los rayos que representa la situación.

7. Andrea está en el mar en un bote, observa un pez en una posición x como se muestra en la figura. Se puede decir que Andrea observa el pez:
   a. Más arriba
   b. Más abajo
   c. Donde realmente está.

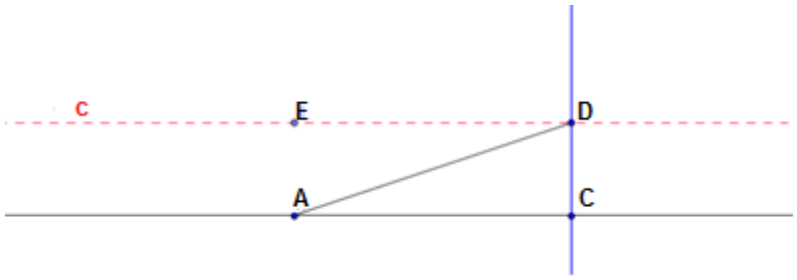


8. Dibuja (en la figura) la trayectoria que sigue uno de los rayos que le permiten a Andrea ver el pez.

B. Anexo. Taller de geometría 1.

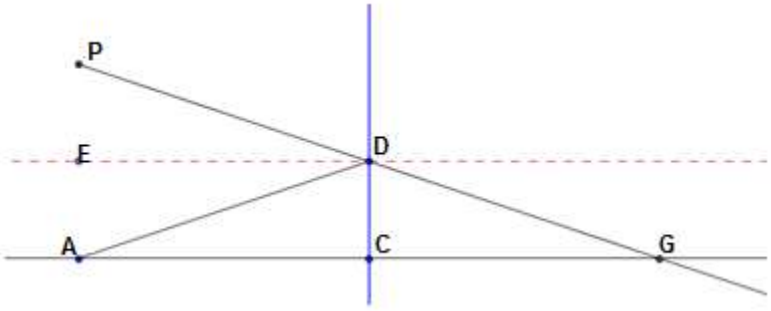
GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

1. Observa la siguiente figura.



a) De acuerdo con la figura. ¿Qué relación puedes establecer entre las rectas que pasan por los puntos ED y AC respectivamente?
b) Si el ∢DAC mide 30°. ¿Cuánto puede medir el ∢CDA?
c) De acuerdo con la anterior información el ΔDAC se clasifica como triángulo_____.
d) ¿Cuánto mide el ∢ADE?
e) Si la recta c, es la bisectriz del ∢PDA. ¿Cuánto mide el ∢ PDE?
f) Traza en la figura el ∢PDA.

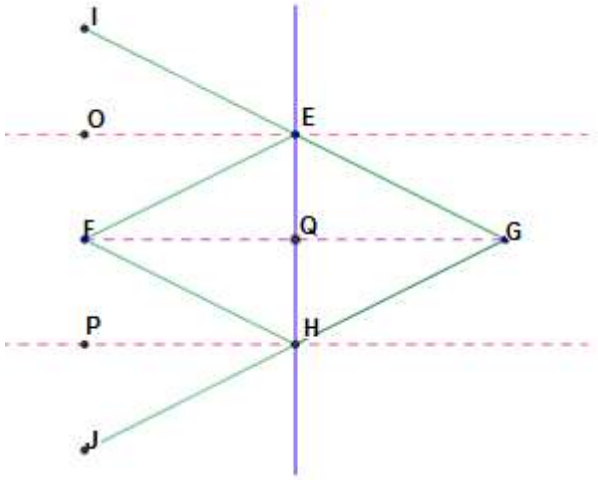
2. Si se prolonga la recta construida que cumple la condición anterior como se observa en la figura, responde



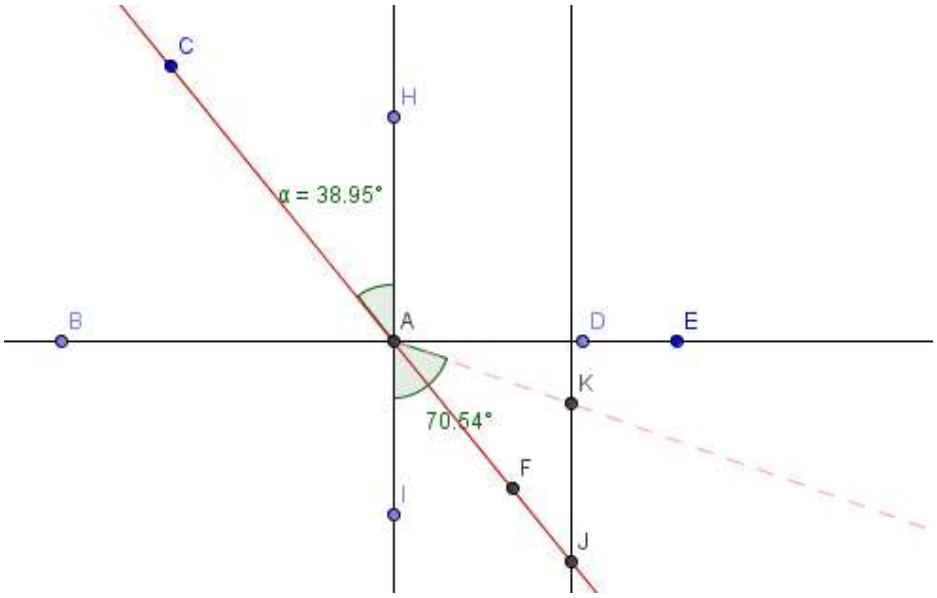
a. ¿Cuál es la medida de los ángulos del ΔDAC?
b. ¿Cuál es la medida de los ángulos del ΔDGC?
c. Teniendo en cuenta la medida de los ángulos de los Δ DAC y ΔDGC. ¿Qué relación puedes establecer entre ellos?
d. ¿Qué puedes concluir respecto a los lados AC y CG de los dos triángulos?

3. Observa la siguiente figura. Si el ∢ IE0=30° y FHP=IEO. Responde:
   a. ¿Cuál es la medida de ∢OEF y ∢PHJ?
   b. ¿Cuál es la medida ∢EGQ y ∢EFQ?
   c. ¿Qué relación tienen los triángulos ΔEFQ, ΔEGQ, ΔGQH, ΔFGH?

d. ¿Qué relación tienen las distancias FQ y QG?
e. ¿Cómo determinarías las distancias FG y GQ?



4. Observa la siguiente figura.

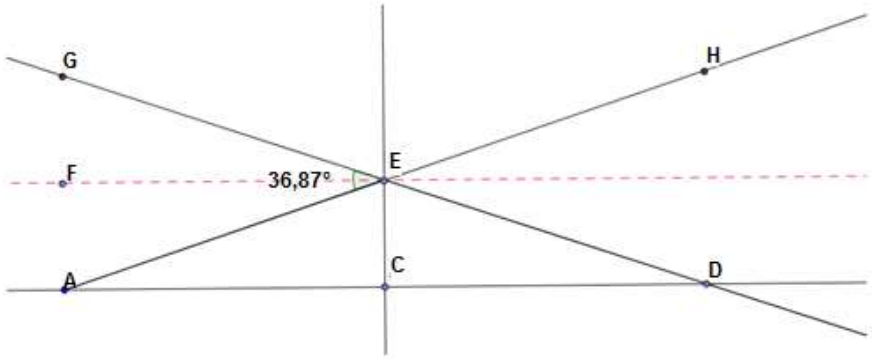


a. ¿Cuál es la medida del ∢IAF?
b. ¿Cuál es la medida del ∢FAK?
c. ¿Qué relación puedes establecer entre los ángulos ∢IAF, ∢FAK y ∢CHA?

C. Anexo. Taller de geometría 2.

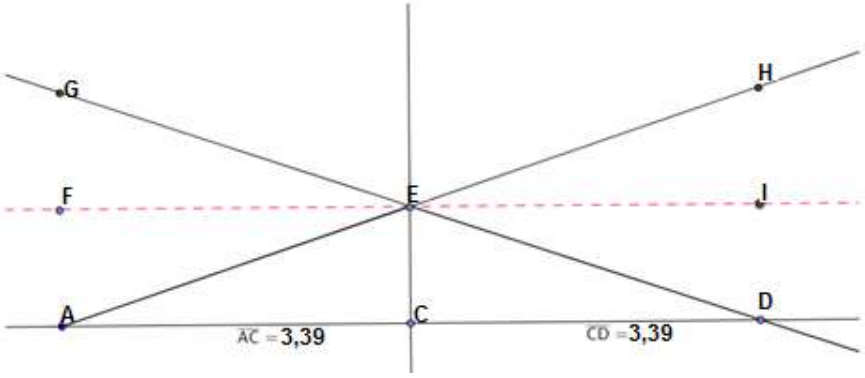
GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

1. Teniendo en cuenta la siguiente figura. Contesta las preguntas. Justifica tus respuestas.



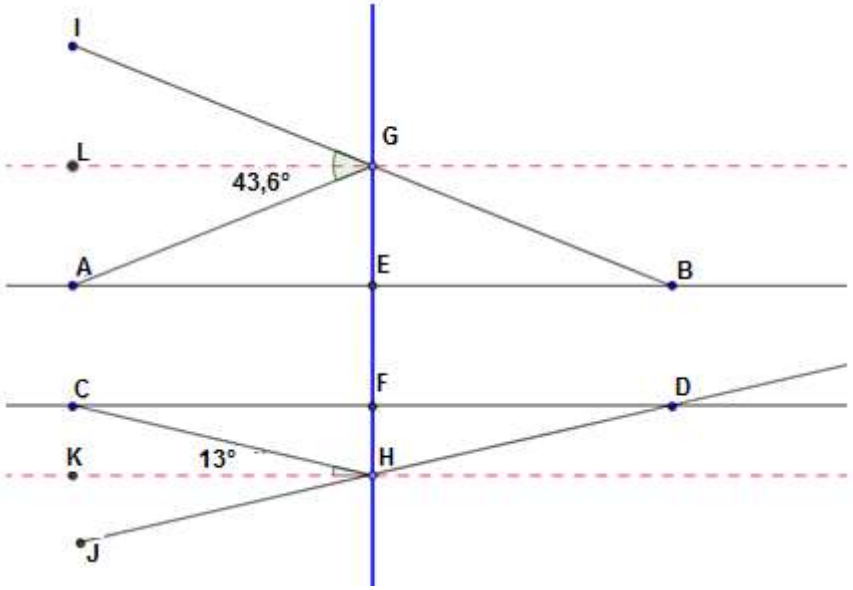
a) ¿Cuál es la medida del ∢ EAC?
b) ¿Cuál es la medida del ∢ EDC?
c) Si el ∢AEG mide 36,87°. ¿Cuánto mide el ∢FEA y el ∢GEF?
d) Los ∢ FEA y∢GEF son_____ porque
e) ¿Cuál es la medida de los ángulos internos del ΔEAC y ΔEDC?
f) De acuerdo con los elementos de los triángulos ΔEAC y ΔEDC los triángulos son_____ porque _____.
g) De acuerdo a los triángulos ΔEAC y ΔEDC. Las distancias AC y CD son_____ Porque_____

2. Teniendo en cuenta la medida $\overline{AC} = \overline{CD}$, en la siguiente figura. Contesta:



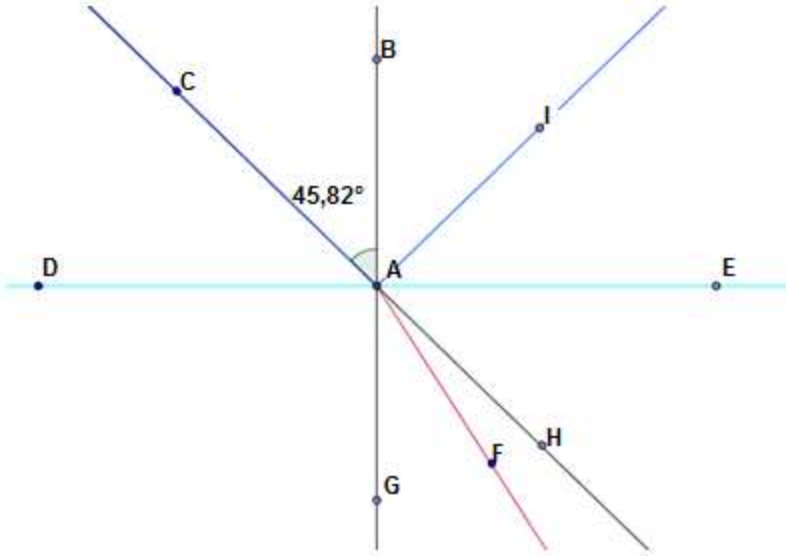
a) Si el ∢ EAC mide **20°** ¿Cuál es la medida de los ángulos ∢AEC, ∢CED y ∢EDC de la figura?
b) ¿Qué relación tiene el ∢GEF con el ∢EAC?_____.
c) De acuerdo con los valores anteriores. ¿Cuál es la medida del ∢AEF? Y ¿La medida del ∢FEG?
d) De acuerdo con los triángulos ΔEAC y ΔEDC. Los triángulos son _____

3. Observa la siguiente figura. Responde



a) ¿Cuál es la medida del ∢ IGL?
b) ¿Cuál es la medida de los ángulos internos de los triángulos ΔGAE y ΔGBE?
c) ¿Las distancias AB y EB son iguales? Justifica tu respuesta:
d) ¿Los triángulos ΔGAE y ΔGBE son congruentes? ¿Por qué?
e) Si el ∢ CHK mide 13°. ¿Cuánto mide el ∢JHK?
f) ¿Cuánto miden los ∢HCF y ∢CDF?
g) De acuerdo a la medida de los ángulos de los triángulos ΔHCF y ΔHDF. Los triángulos son semejantes o congruentes. ¿Por qué?
h) ¿Puedes concluir que CF=FD ¿Por qué?
i) ¿Puedes concluir CF= AE? ¿Por qué?
j) ¿Qué relación tienen las rectas AB y CD?
k) ¿Qué relación puedes establecer entre AC y BD?

4. De acuerdo a la figura responda.



a. ¿Es posible determinar la medida del ∢FAH? Realiza el proceso que implementarías.

D. Anexo. Manual de la práctica. Reflexión de la luz.

MANUAL DE LA PRÁCTICA 1. REFLEXIÓN DE LA LUZ

Práctica interactiva

OBJETIVO

- Estudiar las propiedades de la reflexión de la luz sobre un espejo plano.

MATERIALES: Hoja milimetrada, apuntador láser[13], vela, lápiz, transportador, espejo plano, regla.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un espejo ubicado verticalmente sobre una hoja de papel milimetrado.

El docente describe el montaje con las siguientes situaciones:

1. **SITUACIÓN 1:** se apunta con el láser sobre la superficie del espejo.
2. **SITUACIÓN 2:** Se enciende una vela y frente al espejo se ubica un objeto (marcador) de manera que la sombra proyectada se observe sobre la hoja milimetrada.

PREDICCIONES

- De acuerdo a la situación 1 ¿Qué le sucede al rayo de luz, si lo proyecto al espejo con cualquier ángulo? Realiza una representación que describa la trayectoria de la luz al momento de incidir sobre el espejo.
- Si se varía el ángulo en el que se proyecta el láser sobre el espejo. ¿Qué le ocurre a la trayectoria del rayo reflejado? Utiliza una representación gráfica para argumentar tu respuesta.
- De acuerdo a la situación 2 ¿Cómo será la sombra proyectada por el marcador al momento de incidir sobre el espejo?

3. **PREDICCIONES INDIVIDUALES**

Los estudiantes deben registrar su predicción individual en la Hoja de Predicciones Se debe enfatizar que las predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación)

Tiempo 5 minutos.

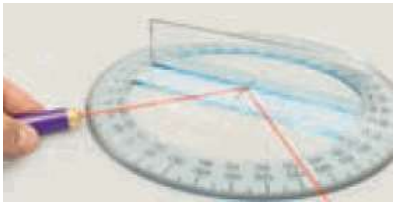
[13] Antes de realizar la práctica se deben mencionar las precauciones con la manipulación del apuntador laser.

4. **PREDICCIONES GRUPALES**

Los estudiantes discuten sus predicciones en un pequeño grupo de discusión con sus 2 o 3 compañeros más cercanos.

5. **REGISTRO DE PREDICCIONES DE GRUPO:** (tiempo 5 minutos).
6. **SOCIALIZACIÓN DE PREDICCIONES:** (5 minutos) Se escribirá en el tablero la socialización de las predicciones realizadas por los grupos. Sin dar algún juicio de valor sobre los aportes de los estudiantes.
7. **REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA: (30 minutos)** Se organizarán los estudiantes por grupos de 2 o 3 personas para que realicen la práctica de acuerdo a la situación presentada.

Los estudiantes tomarán los datos y los registrarán en la siguiente tabla, una para cada situación con el láser y con la vela.



Ángulo incidencia										
Ángulo reflejado										

8. **DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.** Se pide a algunos estudiantes que para toda la clase, describan los resultados obtenidos en cada grupo de trabajo. Los estudiantes registran estos resultados en la *Hoja de Resultados*.
   Teniendo en cuenta lo observado, el profesor solicita a los estudiantes que respondan las siguientes preguntas

   Con relación a la situación 1:

   - ¿Qué le paso al rayo de luz cuando este es proyectado hacia el espejo con cualquier ángulo? Realice una representación que describa la trayectoria del rayo al momento de incidir sobre el espejo.

- Si varias el ángulo en el que proyectas el láser sobre el espejo. ¿Qué le ocurre a la trayectoria del rayo reflejado? Utiliza una representación gráfica para argumentar tu respuesta.

Con relación a la situación 2:

- ¿Cómo fue la sombra proyectada por el marcador al momento de incidir sobre el espejo? Márcala sobre la hoja milimetrada.
- ¿Cómo es la distancia entre el objeto-espejo y la imagen del objeto-espejo?
- Si comparas la altura de la vela y su imagen. ¿Qué relación puedes establecer?

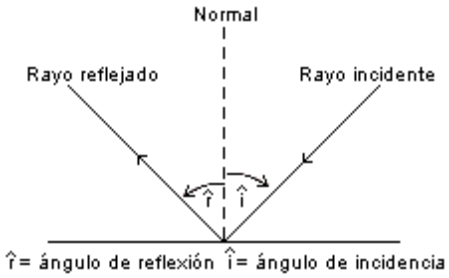
De acuerdo a los resultados obtenidos en las preguntas derivadas de las situaciones 1 y 2:

- Contrasta los resultados obtenidos en las dos situaciones y establece una conclusión que relacione el fenómeno observado en la práctica.
- ¿Qué puedes concluir sobre las mediciones de los ángulos incidentes y reflejado respecto al espejo?
- Si trazas una perpendicular en cada medición (recta normal) y comparas los ángulos que se forman: incidente respecto a la normal y reflejado respecto a la normal. ¿Qué puedes concluir sobre las mediciones de los ángulos incidentes y reflejados?
- ¿Cómo cambia el ángulo de reflexión si aumentas el ángulo de incidencia?
- En la hoja milimetrada donde registraste los datos, representa con colores y geométricamente los siguientes elementos importantes en el montaje.
    - La normal: es la línea perpendicular a la superficie donde incide el rayo.
    - El rayo incidente: es la línea recta “trazada” por el láser al incidir en el espejo (lo trabajaremos en la parte izquierda).
    - El ángulo de incidencia: es el formado por la normal al espejo y el trazo del rayo del láser que llega al espejo (lo trabajaremos en la parte izquierda).
    - El rayo reflejado: es el formado por el rayo láser que sale del espejo (lo trabajaremos en la parte derecha).
    - El ángulo de reflexión: es el formado por la normal al espejo y el trazo del rayo del láser que sale del espejo (lo trabajaremos en la parte derecha).

9. **SÍNTESIS Y EXTRAPOLACIÓN DE RESULTADOS**: Los estudiantes (o el docente) realizan una síntesis de los conceptos involucrados en los resultados anteriormente analizados.

Síntesis de la práctica

En el caso de la práctica se espera que los estudiantes a partir de la observación, registro y toma de datos (utilizando el transportador) determinen la relación existente entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión respecto al espejo, al incidir un rayo de luz sobre una superficie lisa (espejo).



Por otra parte, si se traza una recta perpendicular al espejo que pasa por la intersección del rayo incidente y el rayo reflejado, denominada *recta normal.* Se espera que a partir de las relaciones establecidas entre los ángulos complementarios, el estudiante pueda establecer una igualdad entre los ángulos incidente y reflejado respecto a la recta normal, como se observa en la figura anterior.

Para la extrapolación se espera que el estudiante proponga otras situaciones de su vida cotidiana donde pueda evidenciar la reflexión de objetos en espejos planos.

Por ejemplo *los espejismos:* ilusión óptica asociada al fenómeno de reflexión total de la luz originado cuando esta atraviesa capas de aire de diferente densidad, con lo anterior se conectan los conceptos trabajados con la caracterización y modelación de otro fenómeno.

E. Anexo. Hoja de predicciones individuales. Práctica reflexión de la luz.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFLEXIÓN DE LA LUZ.
HOJA DE PREDICCIONES – INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor de la clase. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un espejo ubicado verticalmente sobre una hoja de papel milimetrado.

SITUACIÓN 1: se apunta con el láser sobre la superficie del espejo.

SITUACIÓN 2: se enciende una vela y frente al espejo se ubica un marcador de manera que la sombra proyectada se observe sobre la hoja milimetrada.

En 5 minutos realice las siguientes predicciones de acuerdo a las dos situaciones anteriores:

- ¿Qué le sucede al rayo de luz, si lo proyecto al espejo con cualquier ángulo?

- Si varias el ángulo en el que proyectas el láser sobre el espejo. ¿Qué le ocurre a la trayectoria del rayo reflejado? Utiliza una representación gráfica para argumentar tu respuesta.

- Realiza una representación que describa la trayectoria de la luz al momento de incidir sobre el espejo.

F. Anexo - hoja de predicciones grupales. Práctica reflexión de la luz.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFLEXIÓN DE LA LUZ.
HOJA DE PREDICCIONES – GRUPALES

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor de la clase. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un espejo ubicado verticalmente sobre una hoja de papel milimetrado.

SITUACIÓN 1: se apunta con el láser sobre la superficie del espejo.

SITUACIÓN 2: Se enciende una vela y frente al espejo se ubica un marcador de manera que la sombra proyectada se observe sobre la hoja milimetrada.

En 5 minutos realice las siguientes predicciones de acuerdo a las 2 situaciones anteriores:

- ¿Qué le sucede al rayo de luz, si lo proyecto al espejo con cualquier ángulo?

- Si varias el ángulo en el que proyectas el láser sobre el espejo. ¿Qué le ocurre a la trayectoria del rayo reflejado? Utiliza una representación gráfica para argumentar tu respuesta.

- De acuerdo a la situación 2 ¿Cómo será la sombra proyectada por el marcador al momento de incidir sobre el espejo?

- Realiza una representación que describa la trayectoria de la luz al momento de incidir sobre el espejo.

G. Anexo Hoja de predicciones. Práctica reflexión de la luz.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFLEXIÓN DE LA LUZ.
HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se realizará el registro de las observaciones tomadas al momento de realizar la práctica.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un espejo ubicado verticalmente sobre una hoja de papel milimetrado.

SITUACIÓN 1: se apunta con el láser sobre la superficie del espejo.

SITUACIÓN 2: Se enciende una vela y frente al espejo se ubica un marcador de manera que la sombra proyectada se observe sobre la hoja milimetrada.

Realice la situación 1. Complete la siguiente tabla de acuerdo a los datos registrados del rayo incidente y el rayo reflejado respecto al espejo.

Ángulo incidencia										
Ángulo reflejado										

Realice la situación 2. Complete la siguiente tabla de acuerdo a los datos registrados del rayo incidente y el rayo reflejado respecto al espejo. Tenga en cuenta la ubicación de la vela para que la sombra proyectada sea visible sobre la hoja milimetrada.

Ángulo incidencia										
Ángulo reflejado										

Con relación a la situación 1:

- Realiza una representación que describa la trayectoria de la luz al momento de incidir sobre el espejo.
- ¿Qué le paso al rayo de luz, al proyectarlo en el espejo con cualquier ángulo?
- Si varias el ángulo en el que proyectas el láser sobre el espejo. ¿Cómo cambia el ángulo de reflexión si aumentas el ángulo de incidencia?
- Utiliza una representación gráfica para argumentar tu respuesta.

Con relación a la situación 2:

- ¿Cómo fue la sombra proyectada por el marcador al momento de incidir sobre el espejo? Márcala sobre la hoja milimetrada.
- ¿Cómo es la distancia entre el objeto-espejo y la imagen del objeto-espejo?
- Si comparas la altura de la vela y su imagen. ¿Qué relación puedes establecer?

De acuerdo a los resultados obtenidos en las preguntas derivadas de las situaciones 1 y 2:

- Contrasta los resultados obtenidos en las dos situaciones y establece una conclusión que relaciones el fenómeno observado en la práctica.
- ¿Qué puedes concluir sobre las mediciones de los ángulos incidentes y reflejados, respecto al espejo?
- Si trazas una perpendicular en cada medición (recta normal) y comparas los ángulos que se forman: incidente respecto a la normal y reflejado respecto a la normal. ¿Qué puedes concluir sobre las mediciones de los ángulos incidentes y reflejados?
- ¿Qué le sucede al ángulo de reflexión si aumentas el ángulo de incidencia?

- En la hoja milimetrada donde registraste los datos, representa con colores y geométricamente los siguientes elementos importantes en el montaje.

    - La normal: es la línea perpendicular a la superficie donde incide el rayo.
    - El rayo incidente: es la línea recta “trazada” por el láser al incidir en el espejo (lo trabajaremos en la parte izquierda).
    - El ángulo de incidencia: es el formado por la normal al espejo y el trazo del rayo del láser que llega al espejo (lo trabajaremos en la parte izquierda).
    - El rayo reflejado: es el formado por el rayo láser que sale del espejo (lo trabajaremos en la parte derecha).
    - El ángulo de reflexión: es el formado por la normal al espejo y el trazo del rayo del láser que sale del espejo (lo trabajaremos en la parte derecha).

H. Anexo Manual de la práctica refracción de la luz.

MANUAL DE LA PRÁCTICA 2. REFRACCIÓN DE LA LUZ

Práctica interactiva

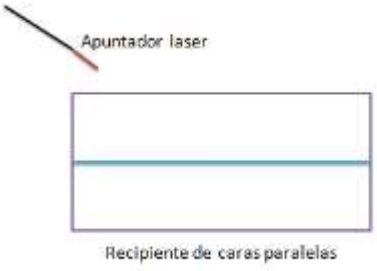
OBJETIVO

- Estudiar las propiedades de la refracción de la luz.

MATERIALES: Recipiente de vidrio de caras paralelas, un apuntador láser, transportador, marcadores, regla.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un acuario como se observa en la figura, posteriormente se agrega agua al recipiente sin que se llene completamente, luego, se hace incidir (inclinado) un rayo de luz con el apuntador láser.

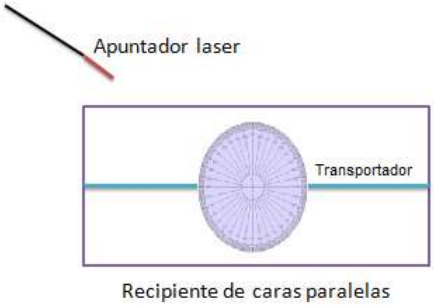


SITUACIÓN 1[14]: Se ilumina el recipiente con el apuntador láser por la parte superior y por la parte inferior.

SITUACIÓN 2:[15] Sobre una de las caras del recipiente se pega en la superficie un transportador y se ilumina el recipiente por la parte superior.

[14] *Situación* tomada de trabajo de grado "Diseño, construcción e implementación de una herramienta didáctica para abordar algunos conceptos fundamentales de óptica geométrica" Herrera E (2012). Universidad Nacional de Colombia, y adecuada acorde a los objetivos de este trabajo.

[15] *Situación* tomada y adecuada del trabajo de grado "Diseño, construcción e implementación de una herramienta didáctica para abordar algunos conceptos fundamentales de óptica geométrica" Herrera E. (2012) Universidad Nacional de Colombia.



PREDICCIONES

- Si se agrega agua al recipiente y se ilumina desde la parte superior. Dibuja la trayectoria que seguirá el rayo de luz al incidir en el agua.
- Si se ilumina el recipiente desde la parte inferior, dibuja la trayectoria que seguirá el rayo de luz al incidir en el agua.
- Si desde la parte superior se incide un rayo de luz que pase por el centro del transportador y el recipiente no tiene agua. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz? Realiza una representación de la predicción.
- Si se incide un rayo de luz que pase sobre el centro del transportador. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz? Realiza una representación de la predicción.
- Si aumentas la medida del ángulo de incidencia del rayo de luz, antes de tocar el agua. ¿Cómo crees que será el ángulo que seguirá el rayo de luz?

PREDICCIONES INDIVIDUALES

Los estudiantes deben registrar su predicción individual en la Hoja de Predicciones Enfatizar: las predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación). Tiempo 5 minutos.

PREDICCIONES GRUPALES

Los estudiantes discuten sus predicciones en un pequeño grupo de discusión con sus 2 o 3 compañeros más cercanos.

REGISTRO DE PREDICCIONES DE GRUPO: (tiempo 5 minutos).

SOCIALIZACIÓN DE PREDICCIONES: (5 minutos) Se escribirá en el tablero la socialización de las predicciones realizadas por los grupos. Sin dar algún juicio de valor sobre los aportes de los estudiantes.

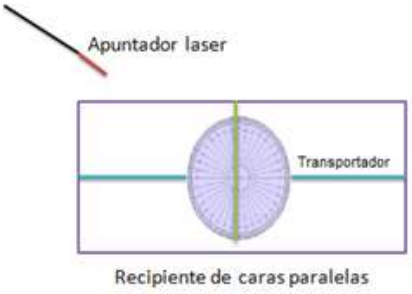
REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA: (50 minutos) Se organizarán los estudiantes por grupos de 2 o 3 personas para que realicen la práctica de acuerdo a la situación presentada.

Desarrollo de la situación 1

Realiza la práctica incidiendo el rayo de luz (inclinado) desde la parte superior y luego desde la parte inferior.

Desarrollo de la situación 2

- Tomando como referencia el transportador marca los ejes de referencia, como se observa en la figura.



- Incide un rayo de luz que pase sobre el centro del transportador y sobre la superficie del vidrio marca la trayectoria del rayo de luz antes y después de incidir sobre el agua.
- Registra en la siguiente tabla la medida del ángulo incidente y refractado.

Ángulo incidencia						
Ángulo refractado						
Ángulo de desviación **(incidencia menos refracción)**						

DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS. Se pide a algunos estudiantes que para toda la clase, describan los resultados obtenidos en cada grupo de trabajo. Los estudiantes registran estos resultados en *la hoja de resultados*.

De acuerdo a los resultados obtenidos de las dos situaciones:

- Describe lo que le paso al rayo de luz al momento de incidir el láser desde la parte superior de la pecera. Compara los resultados con los que planteaste en la predicción.
- Describe lo que le paso al rayo de luz al momento de incidir el láser desde la parte superior de la pecera. Compara los resultados con los que planteaste en la predicción.
- ¿Qué relación puedes encontrar entre el ángulo de incidencia, refracción y desviación? Justifica tu respuesta.

- Realiza una representación geométrica de la situación. Teniendo en cuenta que, el ángulo formado por el láser y el agua antes de entrar al recipiente (ÁNGULO DE INCIDENCIA), el ángulo formado por el láser al incidir sobre el agua (ÁNGULO REFRACTADO) y ángulo formado por la prolongación de la trayectoria del láser y el ángulo refractado recibe el nombre de (ÁNGULO DE DESVIACIÓN)

SÍNTESIS Y EXTRAPOLACIÓN DE RESULTADOS: Los estudiantes (o el docente) realizan una síntesis de los conceptos involucrados en los resultados anteriormente analizados.

Síntesis de la práctica

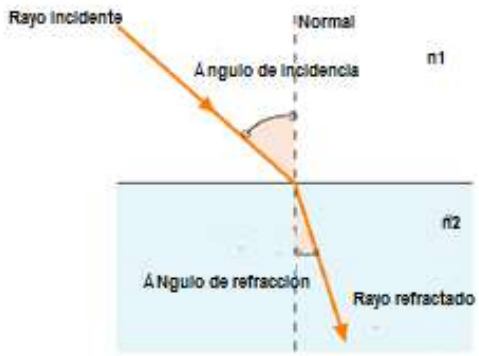
En el caso de la práctica se espera que los estudiantes identifiquen el fenómeno de refracción de luz al momento que cambia de medio, haciendo énfasis del cambio de la trayectoria de la luz al momento en que ésta incide en el agua.

Imagen[16]

Por otra parte, se espera que los estudiantes a partir de la observación, registro y toma de datos (utilizando el transportador) determinen la relación existente entre el ángulo de incidencia, refracción y desviación respecto a la recta normal al incidir un rayo de luz sobre la superficie del agua de un recipiente de vidrio.

Al trazar una recta perpendicular a la superficie o límite del agua dentro de la pecera denominada *recta normal.* Se espera que a partir de las relaciones establecidas entre los ángulos complementarios el estudiante pueda establecer la medida de los ángulos.

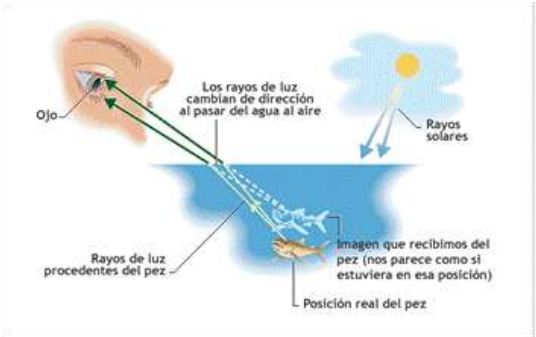
[16] http://4.bp.blogspot.com/-KAi0Fg9uEyk/UY04_9Ut8kI/AAAAAAAAAcY/fYL-bs7w16I/s1600/webon_html_1e5f7648.jpg



Representación de los ángulos de incidencia y de refracción[17]

Para la extrapolación se espera que el estudiante proponga otras situaciones de su vida cotidiana donde pueda evidenciar la refracción de objetos al cambiar de medio

Por ejemplo: Uso de la lupa, refracción en la atmosfera terrestre, uso de gafas y corrección de enfermedades visuales, observación de objetos en el fondo de una piscina.



Posición aparente de un pez en el agua[18]

En los anexos I y J se encuentran los formatos de registros de predicciones individuales, grupales y de resultados.

[17] Imagen tomada de http://deconceptos.com/wp-content/uploads/2010/02/concepto-de-refraccion.png

[18] http://k27.kn3.net/57292989E.png

I. Anexo hoja de predicciones individuales práctica refracción de la luz.

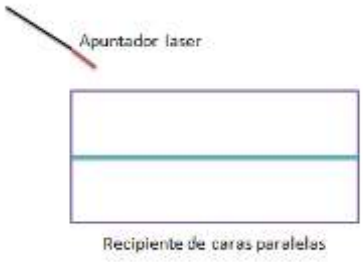
GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFRACCIÓN DE LA LUZ
HOJA DE PREDICCIONES – INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor de la clase. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un acuario como se observa en la figura, posteriormente se agrega agua al recipiente sin que se llene completamente, Luego, se hace incidir un rayo de luz con el apuntador laser.



SITUACIÓN 1: Se ilumina el recipiente con el apuntador laser por la parte superior y por la parte inferior.

SITUACIÓN 2: Sobre una de las caras del recipiente se pega en la superficie un transportador y se ilumina el recipiente por la parte superior.

En 5 minutos realice las siguientes predicciones de acuerdo a las 2 situaciones anteriores, ***realiza una representación de la situación si es necesaria.***

- Si se agrega agua al recipiente y se ilumina desde la parte superior. Dibuja la trayectoria que seguirá el rayo de luz al incidir en el agua.
- Si se ilumina el recipiente desde la parte inferior Dibuja la trayectoria que seguirá el
- Si desde la parte superior se incide un rayo de luz que pase por el centro del transportador y el recipiente no tiene agua. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz? Realiza una representación de la situación.
- Si se incide un rayo de luz que pase sobre el centro del transportador. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz? Realiza una representación de la situación.
- Si se aumenta la medida del grado del ángulo de incidencia del rayo de luz, antes de tocar el agua. ¿Cómo crees que será el ángulo que seguirá el rayo de luz?

ANEXO Manual de la práctica refracción de la luz.

J. Anexo Hoja de predicciones grupales práctica refracción de la luz.

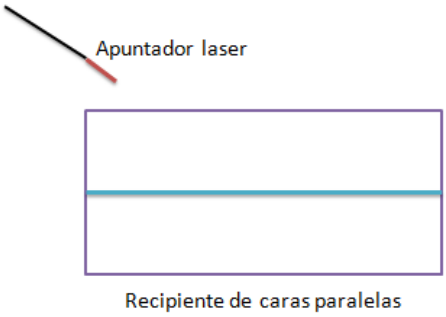
GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFRACCIÓN DE LA LUZ
HOJA DE PREDICCIONES – GRUPALES

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor de la clase. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la evaluación.

PLANTEAMIENTO:

Se tiene un acuario como se observa en la figura, posteriormente se agrega agua al recipiente sin que se llene completamente, Luego, se hace incidir un rayo de luz con el apuntador laser.



SITUACIÓN 1: Se ilumina el recipiente con el apuntador laser por la parte superior y por la parte inferior.

SITUACIÓN 2: Sobre una de las caras del recipiente se pega en la superficie un transportador y se ilumina el recipiente por la parte superior.

En 5 minutos realice las siguientes predicciones de acuerdo a las 2 situaciones anteriores, ***realiza una representación de la situación si es necesaria.***

- Si se agrega agua al recipiente y se ilumina desde la parte superior. Dibuja la trayectoria que seguirá el rayo de luz al incidir en el agua.
- Si se ilumina el recipiente desde la parte inferior Dibuja la trayectoria que seguirá el rayo de luz al incidir en el agua.
- Si desde la parte superior se incide un rayo de luz que pase por el centro del transportador y el recipiente no tiene agua. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz?
- Realiza una representación de la situación si se incide un rayo de luz que pase sobre el centro del transportador. ¿Cómo crees que será la trayectoria que seguirá el rayo de luz? Realiza una representación de la situación.
- Si aumenta el grado del ángulo de incidencia del rayo de luz, antes de tocar el agua. ¿Cómo crees que será el ángulo que seguirá el rayo de luz?

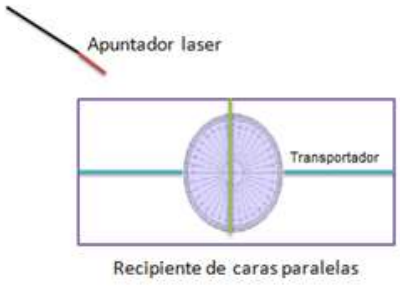
K. Anexo. Hoja de resultados práctica refracción de la luz.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO – REFRACCIÓN DE LA LUZ
HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se realizará el registro de las observaciones tomadas al momento de realizar la práctica.

Desarrollo de la situación 1 :
Realiza la práctica incidiendo el rayo de luz desde la parte superior y luego desde la parte inferior.
Desarrollo de la situación 2



- Tomando como referencia el transportador marca los ejes de referencia, como se observa en la figura.
- Incide un rayo de luz que pase sobre el centro del transportador y sobre la superficie del vidrio marca la trayectoria del rayo de luz antes y después de incidir sobre el agua.
- Registra en la tabla la medida del ángulo incidente, refractado y de desviación.

Ángulo incidencia						
Ángulo refractado						
Ángulo de desviación (Incidencia menos refracción)						

DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS. Se pide a algunos estudiantes que para toda la clase, describan los resultados obtenidos en cada grupo de trabajo. Los estudiantes registran estos resultados en la ***Hoja de resultados.***

De acuerdo a los resultados obtenidos de las dos situaciones:

- Describe lo que le paso al rayo de luz al momento de incidir el láser desde la parte superior de la pecera. Compara los resultados con los que planteaste en la predicción.

- Describe lo que le paso al rayo de luz al momento de incidir el láser desde la parte superior de la pecera. Compara los resultados con los que planteaste en la predicción.

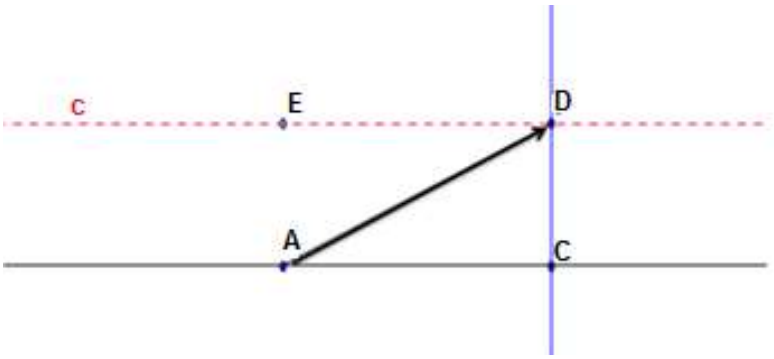
- ¿Qué relación puedes encontrar entre el ángulo de incidencia, refracción y desviación? Justifica tu respuesta.

- Realiza una representación geométrica de la situación. Teniendo en cuenta que, el ángulo formado por el láser y el agua antes de entrar al recipiente (ÁNGULO DE INCIDENCIA), el ángulo formado por el láser al incidir sobre el agua (ÁNGULO REFRACTADO), ángulo formado por la prolongación de la trayectoria del láser y el ángulo refractado recibe el nombre de (ÁNGULO DE DESVIACIÓN)

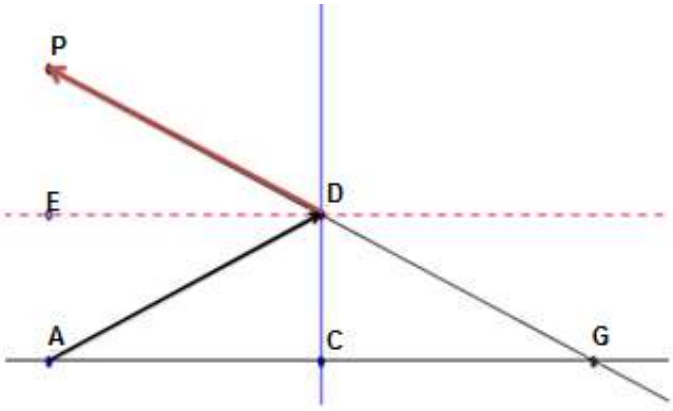
L. Anexo. Taller de geometría 3.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

1. Un rayo de luz incide sobre un espejo plano normal con un ángulo de 30° respecto a la recta c punteada (denominada recta normal), como se observa en la figura.
    a. Traza el rayo reflejado.
    b. ¿Cuánto mide el ángulo de reflexión respecto a la recta normal?
    c. ¿Cuál es la medida del ángulo incidente respeto al espejo?
    d. ¿Cuál es la medida del ángulo de reflexión respecto al espejo?
    e. ¿Qué relación puedes establecer entre los ángulos de incidencia y reflexión?

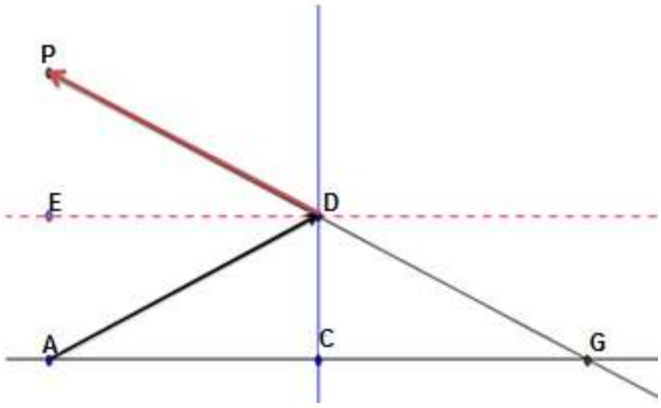


2. Se ubica un espejo plano normal y frente a él un punto A, (como se observa en la figura). Teniendo en cuenta que el ángulo de incidencia del rayo de luz AD respecto a la normal es de 42°.



a. ¿Cuál es la medida del ángulo de reflexión respecto a la recta normal?
b. Si por el punto A incide un rayo de luz AC, representa con verde la prolongación de dicho rayo.
c. Realiza la prolongación del rayo PD y trázalo con color rojo.
d. El punto de intersección entre las prolongaciones de color verde y rojo, denótalo como G.
e. De acuerdo a la figura ¿Qué relación puedes establecer entre DA y la prolongación DG? Justifica tu respuesta.
f. ¿Qué figuras geométricas puedes observar en el esquema de rayos trazado?
g. ¿Cómo son los triángulos ΔDAC y ΔDGC?
h. ¿Cómo es la distancia AC respecto a la distancia CG?
i. Si la distancia del punto A al espejo es de 5cm. De acuerdo al esquema realizado ¿Cuál es la distancia de G al espejo?

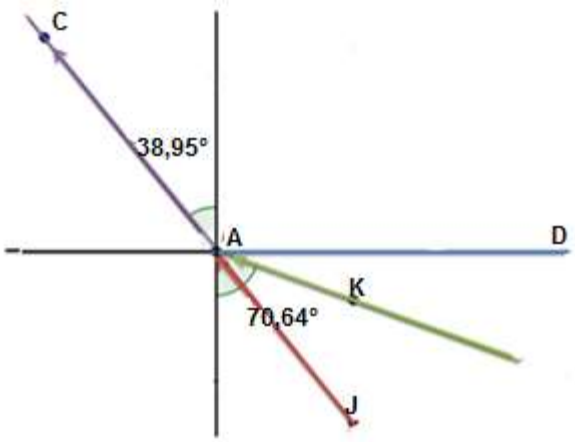
3. A continuación se realiza una representación mediante esquema de rayos, de la reflexión de un rayo que parte del punto A y es reflejado por el espejo CD que se encuentra a 8cm de A.



a. ¿Cuál es la distancia que hay entre la imagen de A y el espejo?
b. Si se sabe que el ∢DGC es de 40°. ¿Cuál es la medida del ∢DAC? Justifica tu respuesta.
c. De acuerdo a la representación y los datos, ¿es posible determinar la medida del ángulo del rayo incidente respecto a la recta normal? Justifica tu respuesta.
d. ¿Es posible determinar la medida del ángulo del rayo incidente respecto al espejo? Justifica tu respuesta.
e. ¿Cuánto mide el ángulo de reflexión respecto a la normal?, y ¿respecto al espejo?

f. Si conoces la distancia entre el objeto y el espejo y entre el espejo y la imagen ¿puedes establecer alguna relación entre los ángulos de incidencia y reflexión?
g. Si conoces los ángulos de incidencia y reflexión ¿puedes establecer una relación entre las distancias objeto-espejo e imagen-espejo?

4. Una persona observa desde el punto C hacia una piscina (representada por el segmento AD) una moneda que se encuentra en el fondo de ella. Teniendo en cuenta la representación de la situación mediante el esquema de rayos, responde las siguientes preguntas:



a. ¿Qué punto representa la ubicación real de la moneda en la piscina? Justifica tu respuesta.
b. ¿En qué punto percibe el observador la ubicación (aparente) de la moneda en la piscina?
c. Teniendo en cuenta la figura anterior, el ángulo de incidencia mide 38,95°, el ángulo de refracción es aquel que se forma entre el rayo $\overrightarrow{AK}$ y la recta normal (perpendicular al borde de la piscina punto A) ¿Cuánto mide el ángulo de refracción?
d. En la figura el ángulo de desviación es aquel que se forma entre los rayos $\overrightarrow{KA}$ y $\overrightarrow{AJ}$. De acuerdo a la información suministrada ¿Cuánto mide el ángulo de desviación? ¿Qué proceso realizaste para determinar su medida?
e. ¿Puedes establecer alguna relación entre la medida de los ángulos de incidencia, refracción y de desviación?
f. ¿Si conoces el ángulo de incidencia y refracción es posible determinar el ángulo de desviación? Justifica tu respuesta.
g. ¿Si conoces el ángulo de refracción y de desviación es posible determinar el ángulo de incidencia? Justifica tu respuesta.
h. ¿Si conoces el ángulo de incidencia y desviación es posible determinar el ángulo de refracción? Justifica tu respuesta.

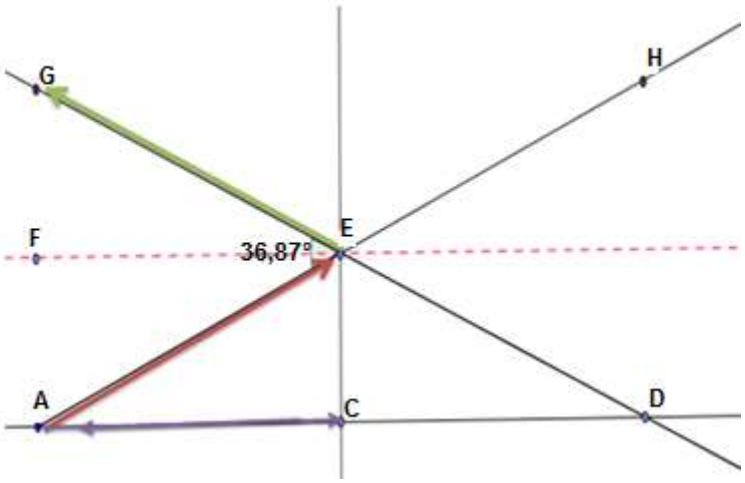
M. Anexo. Taller de geometría 4.

GIMNASIO MIXTO MANUEL DEL SOCORRO RODRIGUEZ.
ÁREA: MATEMÁTICAS. DOCENTE: DIANA CAROLINA RAMÍREZ M.
CURSO: NOVENO. 2014

1. Teniendo en cuenta los rayos de luz que parten desde F, E y D sobre un espejo plano representado por la recta AB:

   a. Traza la trayectoria que seguirán los rayos al chocar la superficie del espejo.
   b. Mide los ángulos de incidencia y reflexión de cada rayo. ¿Qué puedes concluir?

2. Un objeto A se encuentra a cierta distancia de un espejo normal representado por la recta EC. La figura representa la incidencia y reflexión de dos rayos de luz que parten del objeto A.



a. Marca con un color la prolongación de los rayos reflejados hacia atrás del espejo.

b. ¿Cuál es la imagen del punto A? ¿Por qué?

c. Si ∢AEG mide 36,87°.¿Cuánto mide el ∢FEA y el ∢GEF?

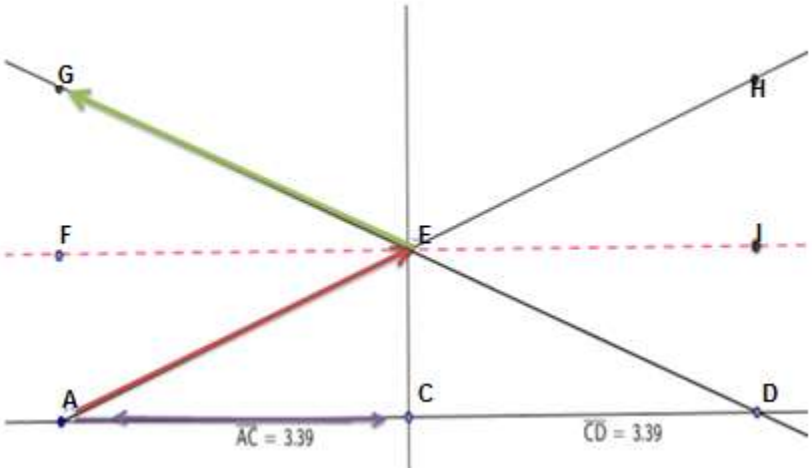
d. De acuerdo con los elementos de los triángulos ΔEAC y ΔEDC los triángulos son_____porque_____.

e. De acuerdo a los ΔEAC y ΔEDC. Las distancias $\overline{AC}$ y CD son_____Porque_____

f. ¿Es posible determinar la medida de AC y CD?, ¿Por qué?

g. ¿Qué relación puedes establecer entre la distancia objeto-espejo y espejo-imagen?_____.

3. Un objeto A se encuentra a 3,39 cm de un espejo normal representado por la recta EC. La siguiente representa la incidencia y reflexión de dos rayos de luz que parten del objeto A hacia el espejo.



a. De acuerdo a la figura ¿Cuáles son los rayos de incidencia? ¿Cuáles los rayos reflejados?

b. ¿Qué segmento representa la distancia objeto -espejo?

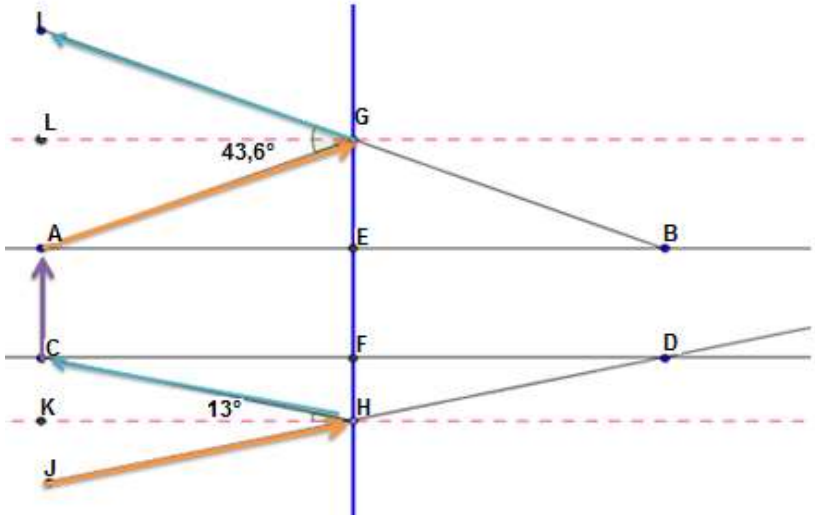
c. ¿Qué segmento representa la distancia imagen-espejo?

d. Si el ∢EAC mide 20° ¿Cuál es la medida de los ángulos ∢AEC, ∢CED y ∢ EDC de la figura?

e. De acuerdo con los triángulos ΔEAC y ΔEDC. Los triángulos son _____porque_____

f. Teniendo en cuenta la figura ¿es posible establecer alguna relación entre AC, CD y los ángulos formados por los rayos AE y EG con el espejo? Justifica tu respuesta.

4. Se ubica frente a un espejo GH el objeto AC. Utilizando el esquema de rayos se proyectan dos rayos incidentes y sus respectivos rayos reflejados. Como se observa en la figura.



a. ¿Crees que si el ángulo AGL=LGI la distancia AE=EB? Justifica tu respuesta.

b. ¿Crees que si el ángulo JHK=KHC la distancia CF=FD? Justifica tu respuesta.

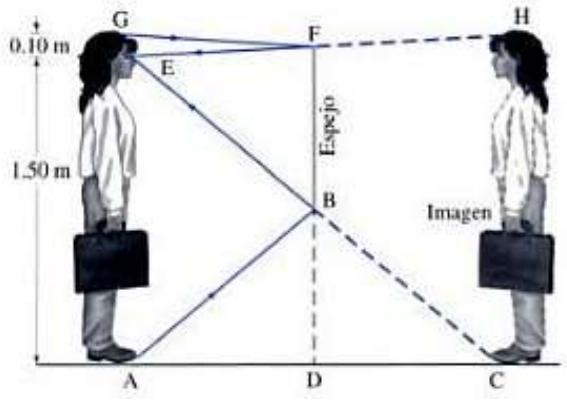
c. Utilizando argumentos geométricos, determina que la distancia objeto-espejo, es igual a la distancia imagen – espejo.

d. ¿Crees que el objeto es del mismo tamaño que su imagen? ¿Qué argumento geométrico utilizarías para justificar tu respuesta?

e. Describe la imagen del objeto respecto a su posición y tamaño.

5. Utilizando el esquema de rayos realiza la reflexión de un triángulo y describe las características de la imagen.

6. Una persona que mide 1,60m de altura se ubica frente a un espejo. Teniendo en cuenta que los ojos de la persona están a 0,10m de la cabeza. Como se observa en la figura. Responde.



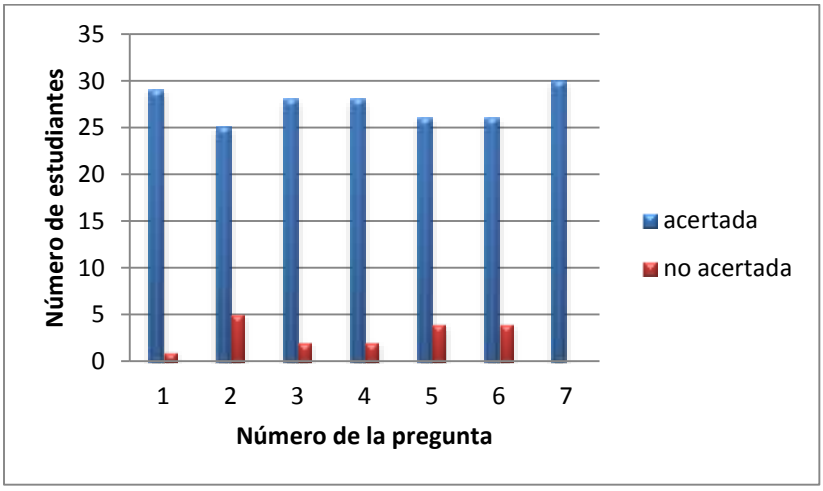
a. ¿Qué relación se puede establecer entre AD y DC?
b. Marca en la figura los rayos de incidencia y los rayos reflejado.
c. ¿Crees que el espejo necesita extenderse más allá del punto B?
d. Si la persona quiere verse la parte superior de la cabeza. ¿Qué punto debe alcanzar el extremo del espejo?
e. Si GE mide 10 cm. ¿A qué altura se encuentra el punto F?
f. ¿Cuánto mide BD? Teniendo en cuenta la altura de la persona.
g. ¿Cuánto mide la distancia DF?
h. ¿Qué altura debe tener el espejo para que la persona pueda verse de cuerpo completo?
i. ¿Qué relación puedes establecer entre la altura de la persona y el tamaño del espejo para que ésta persona puede verse de cuerpo completo?

N. Anexo. Registro de respuestas correctas de la actividad diagnóstico.

Diagnóstico	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
acertado	22	10	18	3	14	6	29
no acertado	8	20	12	27	16	24	1

O. Anexo. Registro respuestas correctas actividad prueba de salida (post-test)

Salida	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
acertada	29	25	28	28	26	26	30
no acertada	1	5	2	2	4	4	0



P. Anexo Registro de preguntas correctas del diagnóstico (PRE) y prueba de salida (POST)

Estudiante	PRE	POST
1	7	7
2	3	7
3	5	7
4	4	7
5	4	7
6	5	7
7	3	6
8	5	7
9	4	6

10	3	5
11	4	6
12	4	6
13	3	7
14	4	6
15	2	7
16	4	7
17	4	7
18	1	7
19	3	7
20	4	6
21	2	7
22	3	6
23	3	6
24	2	7
25	2	7
26	4	7
27	2	7
28	3	5
29	3	4
30	3	4