

**XXV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA
SAN JOSÉ, COSTA RICA, 9 AL 12 DE SETIEMBRE DE 2012**

**PREDICCIÓN NO LINEAL DE CAUDALES MEDIOS MENSUALES
USANDO FUNCIONES DE INFLUENCIA RADIAL Y TÉCNICAS
ESPECTRALES**

Julián D. Rojo H, Luis F. Carvajal S,

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Colombia.

jdrojoh@unal.edu.co, lfcarvaj@unal.edu.co.

RESUMEN:

La estrecha relación no lineal entre los caudales y los procesos climáticos de escala global justifican la modelación no lineal para la predicción de caudales. El presente trabajo muestra una aproximación a la dinámica no lineal de los caudales usando un modelo no paramétrico de regresión basado en las funciones de influencia radial y técnicas de descomposición espectral. El modelo propuesto es aplicado para la predicción de los caudales medios mensuales para horizontes de pronóstico de 1,3 y 6 meses. El pronóstico de tipo multivariado incluye variables macro-climáticas. El esquema propuesto de regresión analiza de manera conjunta la estructura de correlación entre las variables macro climáticas y los caudales de los ríos, las funciones de influencia radial y las técnicas de reconstrucción espectral. El esquema de pronóstico propuesto es aplicado en la predicción de los caudales medios mensuales del río Guatapé en Colombia, los resultados indican que el modelo híbrido propuesto presenta un excelente ajuste.

ABSTRACT:

The close nonlinear relationship between hydrology and global climatic processes justifies the study of nonlinear river flow models. This work shows the nonlinear river flow dynamics using non parametric models. In this case these models are based on radial basis functions and spectral methods. The prediction model is applied in the Guatapé River in Colombia to 1, 3, 6 months window lengths. The prediction includes both univariate and multivariate cases. The multivariate case takes into account macro-climatic variables. The proposed model is studied through the Radial basis function, the correlation structure between macro-climatic variables and streamflow time series and the reconstruction of series. The results show an improvement in streamflow flow prediction and it is much better in the streamflow multivariate prediction when macro-climatic variables are used like predictor variables.

PALABRAS CLAVES:

Predicción de caudales, regresión no paramétrica, funciones de influencia radial, Análisis espectral.

INTRODUCCIÓN

De todos los elementos del ciclo hidrológico los caudales de los ríos pueden ser los que mayores consecuencias tienen sobre la vida de los seres humanos. La seguridad alimentaria depende de hectáreas de tierras irrigadas con el agua proveniente de ríos y los embalses que regulan su flujo, en muchas zonas del planeta los diferentes cursos de agua representan la fuente primaria para el consumo doméstico y la generación de hidroelectricidad, gran parte de la industria y el comercio

requiere del agua de los ríos para su abastecimiento, innumerables poblaciones desarrollan su vida cotidiana y hacen de los ríos su vía de comunicación, motivos suficientes para convertir los pronósticos de caudales en el objetivo principal de muchos tipos de estudios relacionados con el planeamiento y manejo de los recursos hídricos.

En los últimos años, la frecuente aplicación del análisis estadístico a todo tipo de problemas ha originado la búsqueda de soluciones no habituales que se adapten a los requerimientos y circunstancias actuales de predicción no lineal, el campo no paramétrico es uno de los más populares. Esta herramienta ofrece una alternativa más sofisticada en comparación con los modelos paramétricos tradicionales en la exploración de datos univariados o multivariados sin presuponer ninguna distribución específica en la probabilidad de los datos. La estimación no paramétrica de la distribución de probabilidades ha llegado a ser un importante objeto de investigación estadística, los primeros ensayos sobre el tema comenzaron en la década de los treinta, y, la preocupación por desarrollar dicha técnica surge en los años ochenta, siendo numerosas las publicaciones de trabajos realizados sobre los aspectos teóricos de este tipo de estimación.

A este tipo de estimaciones no paramétricas corresponden las funciones Kernel (Priestley & Chao, 1972), los polinomios localmente ponderados (mínimos cuadrados locales, polinomios móviles) (Cleveland 1979,1988) y las funciones de influencia radial (Powell, 1987). Dichas metodologías son conocidas como técnicas de interpolación y alisado porque perfeccionan el ajuste asignando diferentes pesos a los datos que coexisten en una vecindad. La idea consiste en ponderar con mayor valor aquellas observaciones más cercanas al momento de elaborar un pronóstico y con menor valor aquellas que quedan más lejos. En el caso de la predicción de caudales medios mensuales en Colombia se han aplicado técnicas de alisado como las funciones Kernel y Holt – Winters (Poveda, 2006). En el presente trabajo se estudian y aplican los polinomios localmente ponderados a la predicción de caudales medios mensuales.

FUNCIONES DE INFLUENCIA RADIAL

Las funciones de base Radial (RBF) son un tipo especial de funciones cuya principal característica es que reduce (o aumenta) su respuesta monótonamente con su distancia a un punto central (Queipo et al. 2005). El centro, la distancia escalar y la forma precisa de la función de base radial son parámetros del modelo. Un modelo RBF puede ser expresado como:

$$\hat{y}(x) = \mu + \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad [1]$$

Donde μ es una constante o un polinomio ponderado, λ son los coeficientes calculados mediante la resolución de ecuaciones lineales, $\phi(\)$ es la función de base y $\|x - x_i\|$ corresponde a la distancia radial ($dist = \|x - x_i\|$). Existen diferentes tipos de $\phi(\)$, entre ellos la función biarmónica, la multicuadrática, multicuadrática inversa, poliarmónica, Gaussiana, etc. Una completa revisión de los tipos de RBF son presentados en Powell (1987) y Gutmann (2001) y algunas de sus ecuaciones son:

B.F Biarmonica (lineal): $\phi(dist) = dist$ [2]

B.F Multicuadrática: $\phi(dist) = \sqrt{dist^2 + c^2}$ [3]

B.F Multicuadrática inversa: $\phi(dist) = \frac{1}{\sqrt{dist^2 + c^2}}$ [4]

B.F Poliarmónica: $\phi(dist) = (dist^2 + c^2) \ln(\sqrt{dist^2 + c^2})$ [5]

B.F Gaussiana: $\phi(dist) = \exp\left(\frac{-dist^2}{2\delta^2}\right)$ [6]

Donde c es una constante de forma, que puede tomar el valor de 1 (Acar & Rais-Rohani 2009), y δ es la ventana (o radio) de ponderación. μ es un valor constante definido como el promedio de y_i , es decir:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad [7]$$

En algunos casos, con el fin de evitar singularidad en la matriz para el cálculo de los parámetros λ , la RBF puede ser aumentada mediante la inclusión de una función polinómicas de la forma:

$$\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j t_j(x) \quad [8]$$

Donde $t_j(x)$ son los términos del polinomio y β_j sus correspondientes coeficientes. Como la ecuación [1] es indeterminada (hay más parámetros a encontrar que numero de ecuaciones), entonces se imponen la condición de ortogonalidad a los coeficientes λ de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^N c_i t_j(x_i) = 0 \quad [9]$$

Combinando las ecuaciones [11] y [19] se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} A & t \\ t^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad [10]$$

Donde $A_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|)$ con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$, $t_{i,j} = t_j(x_i)$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ y $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$. La solución del sistema [20] permite obtener los parámetros λ de ponderación de las RBF y los coeficientes β del polinomio.

TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Análisis espectral singular (AES)

El AES se basa en la aplicación de análisis de componentes principales (ACP) en el espacio de los vectores conformados por versiones rezagadas de una serie de tiempo. En este contexto, la connotación del Análisis Espectral no se refiere al tradicional análisis en el dominio de la frecuencia, sino que se refiere a la expansión de la evolución de un campo espacio-temporal en diferentes modos ortogonales empíricos (obtenidos a partir de los datos). En el análisis clásico de ACP se obtienen las direcciones principales $E^k, 1 \leq k \leq M$ (Funciones ortogonales empíricas) de una secuencia de vectores M-dimensionales ($X_i, 1 \leq i \leq N$); el AES es la expansión de un campo discreto ($X_i, 1 \leq i \leq N$) usando las componentes principales y las Funciones Ortogonales Empíricas considerando una longitud de ventana M , tal que:

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{cp} a_i^k E_j^k \quad 1 \leq j \leq M \quad [11]$$

Los coeficientes de proyección, a_i^k , son los llamados Componentes Principales (CP) y los vectores, E_j^k , son las funciones ortogonales empíricas (FOE). Para la implementación del análisis espectral simple la expansión es de la forma:

$$X_{i+j} = \sum_{k=1} a_i^k E_j^k \quad 1 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq M - 1 \quad [12]$$

Las FOE son los autovectores de la matriz Toeplitz, T_x , que contiene los coeficientes de covarianza cruzada de los diferentes vectores para rezagos de 0 a $M-1$. Las anteriores ecuaciones resultan de la aplicación de la expansión biortogonal de Karhunen-Loeve muy usada en el procesamiento de

señales digitales (Ghil, 2002). La ortogonalidad en tiempo (covarianza cruzada igual a cero para dos CP en el rezago cero) y espacio (ortogonalidad de las FOE), implica que λ_k (autovalor k de la matriz de la matriz de Toeplitz) representa la varianza de la k -ésima CP.

Transformada en onditas (OND)

Una ondita es una función que satisface ciertas condiciones matemáticas pudiendo representar series de tiempo y otro tipo de funciones; todas las onditas están basadas en una función llamada Onda Madre u onda de análisis $\psi(t)$ la cual posee unas propiedades especiales y satisface la condición $\hat{\psi}(0) = 0$. Bajo dicha condición la transformada en onditas para una señal unidimensional $X(t)$ es definida como:

$$W(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{\tau - t}{s} \right) dt, \quad \tau \in \mathfrak{R} \wedge s \in \mathfrak{R} - 0 \quad [13]$$

Donde $W(\tau, s)$ es el coeficiente de onda; las series de la señal descompuesta, $\psi^*(t)$ es la conjugada compleja de $\psi(t)$; τ es un parámetro de posición y s es el parámetro de escala. La ecuación inversa de [1], o reconstrucción de $x(t)$ puede ser representada como:

$$X(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) d\tau ds \quad [14]$$

Siendo C_ψ una constante de admisibilidad la cual depende de la ondita usada y satisface la condición de admisibilidad:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|}{|w|} dw \leq \infty \quad [15]$$

Donde $\hat{\psi}(w)$ representa la transformada de Fourier de $\psi(t)$; En la práctica es necesario discretizar la ondita y sus transformaciones para poderlas aplicar a las series de tiempo, mediante discretización la ecuación [13] se representa como:

$$x(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{jk} \psi_{jk} \quad [16]$$

Con φ_{jk} como coeficiente de ondita $\varphi_{jk} = W(\tau, s) = W(k, 2^j)$ y

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right) \quad [17]$$

El algoritmo empleado para la multiresolución, y reconstrucción de onditas fue presentado por en Mallat (1989) y puede ser consultado en el trabajo de Torrence & Compo (1998).

Descomposición en modos empíricos (IMF)

El primer paso para realizar el análisis de una señal con la transformada Hilbert-Huang es la descomposición empírica (EMD: Empirical mode decomposition, Wang, 2007). La EMD descompone una señal en un número finito de series de tiempo que corresponden a sus oscilaciones características conocidas como funciones intrínsecas (IMF: Intrinsic Mode Function). Con el propósito de definir una base casi ortogonal de descomposición, estas IMF deben satisfacer dos condiciones: (i) para todo el conjunto de datos el número de máximos y el número de cruces por cero deben ser igual o por lo menos ser diferentes por uno; y (ii) en cualquier punto el valor medio del contorno definido por la interpolación de los máximos locales y el contorno definido por la interpolación de los mínimos locales debe ser cero. Cada una de estas IMF es capaz de contener una señal modulada en amplitud y frecuencia, permitiendo el análisis de señales no estacionarias. El

procedimiento para el cálculo de las funciones IMF puede ser descrito con los siguientes pasos (Xie, Z. Wang, 2006):

- (a) Identificar los extremos de la señal $x(t)$, y formar los contornos superior e inferior definidos por los puntos máximos locales y mínimos locales respectivamente, mediante una interpolación polinomial de orden 4 (cubic spline).
- (b) Calcular el valor medio $m_1(t)$ mediante el promedio aritmético de los contornos superior e inferior, y realizar la resta entre la señal original y la media para obtener el primer componente $h_1(t)$:

$$h_1(t) = x_1(t) - m_1(t) \quad [18]$$

- (c) Si el primer componente no es una IMF, sea $h_1(t)$ la nueva señal a analizar. Repetir los pasos (a) y (b) hasta que el primer componente sea una IMF.
- (d) El primer componente que además es una IMF es llamado $c_1(t)$. Sea $r_1(t) = x(t) - c_1(t)$. Continuar con los pasos (a) – (c) hasta que $r_n(t)$ sea más pequeño que un valor predeterminado o se convierta en una señal monótona decreciente de donde no pueda ser extraída ninguna función IMF.

Siguiendo el algoritmo anterior, la señal original puede ser expresada mediante la suma de componentes IMF y el residuo final (ecuación 19).

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) \quad [19]$$

Donde n es el número de IMFs, $r_n(t)$ es el residuo final que puede ser una constante o la moda de la serie, y las funciones $c_1(t)$ son ortogonales entre sí, y todas tienen valor medio cero. (Huang et al, 1998).

Incorporación de los métodos espectrales en la predicción de caudales medios mensuales

La dinámica no lineal del sistema imprime un comportamiento caótico sobre la serie y por tanto ésta puede dividirse en dos partes: la señal propiamente dicha y el ruido, clasificación derivada de los periodos que posee cada oscilador y su aporte a la varianza total de la serie (Vautard, et al, 1992), en tanto la dinámica global de la serie puede ser parcialmente reconstruida utilizando aquellas componentes de baja frecuencia que mayor aporte hacen a la variabilidad de la serie de tiempo. La reconstrucción equivale a la aplicación de un filtro que elimina el ruido de la serie; las series filtradas reflejan la dinámica general de la variable y al mismo tiempo son mas predecibles (Carvajal 1994, Rojo & Carvajal 2010). Esquemas híbridos de predicción (métodos de regresión combinados con métodos espectrales) han demostrado ser muy eficientes a diferentes ventanas de pronóstico.

CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO

La serie de datos estandarizada se filtra usando uno de los métodos espectrales y luego se ajusta la función de influencia radial para el pronóstico de los caudales estandarizados en función de las variables explicativas (caudales rezagados, variables macro-climáticas, lluvia, etc.) mediante una interpolación radial; sobre los pronósticos de la serie trasformada se aplican las trasformaciones inversas con el objetivo de obtener los pronósticos preliminares que serán evaluados mediante la validación de los resultados. Si los indicadores estadísticos de validación satisfacen las expectativas del modelador se aceptan dichas predicciones, de lo contrario deben cambiarse los parámetros del modelo seleccionado o las variables explicativas. La precisión de los pronósticos para el período de validación puede estimarse mediante diferentes indicadores de error expuestos en la literatura de

series de tiempo, (Velásquez, 2008), cuyo cálculo se basa en la siguiente notación: y_t denota la observación histórica en el tiempo t y \hat{y}_t corresponde al valor esperado de la predicción para el periodo t donde $t = 1, 2, \dots, T$. Se define entonces el error (o residuo) de la predicción como $e_t = y_t - \hat{y}_t$, y el error porcentual como $p_t = 100 \times e_t / y_t$. Con base en la anterior notación se definen las siguientes medidas del error:

Sumatoria de errores al cuadrado:
$$SSE = \sum_{t=1}^T e_t^2$$

Error cuadrático medio o varianza del predictor:
$$MSE = \frac{SSE}{T}$$

La raíz del error cuadrático medio:
$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

Si \bar{y} corresponde al valor medio de la serie de datos, entonces, el error cuadrático medio expresado como porcentaje del valor medio de los datos será:

$$\% RMSE = \frac{RMSE}{\bar{y}} \times 100$$

Y el promedio del error porcentual absoluto esta dado por:

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |p_i|$$

Otro método utilizado para estimar la bondad de ajuste de un modelo consiste en estimar el coeficiente de correlación de Pearson entre los valores históricos y predichos en el periodo de validación.

CASO DE APLICACIÓN

Las metodologías y procedimientos aquí presentados serán aplicados en la predicción de los caudales medios mensuales del río Guatapé al noroccidente de Colombia (Figura 1), con registros desde 1959 hasta 2008, como variables predictoras (explicativas) se utilizarán indicadores de variables macro-climáticas generados por la NOAA (http://www.esrl.noaa.gov/psd/site_index.html). Además de las temperaturas superficiales del mar (TSM) obtenidas del Reanálisis NCEP/NCAR a nivel mensual (<http://www.esrl.noaa.gov/psd/data/reanalysis/reanalysis.shtml>).

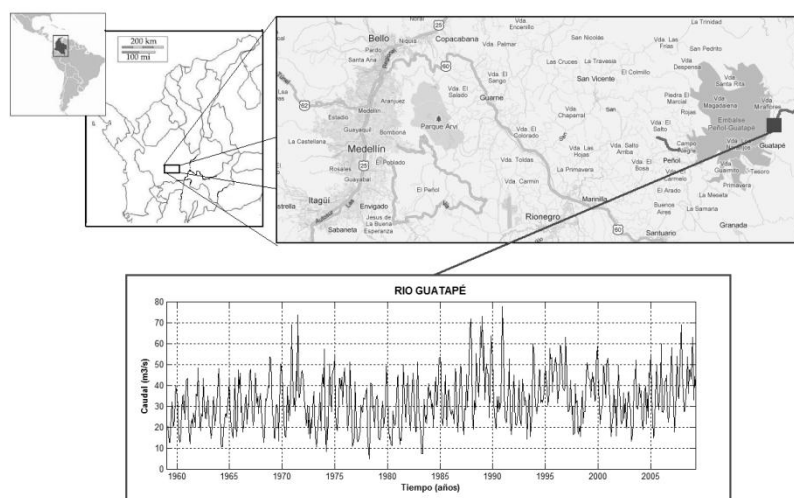


Figura 1.- Ubicación de la estación de aforo y serie histórica del río Guatapé

En la Figura 2 se muestra el mapa de correlación (estadísticamente significativa) entre la serie de caudales medios mensuales estandarizados del río Guatapé y las temperaturas superficiales en todos los océanos del planeta, los resultados indican una fuerte dependencia de los caudales medios

mensuales con las TSM del océano pacífico tropical, por lo cual las variables explicativas serán aquellas relacionadas con el sistema El Niño-Oscilación del Sur en el Pacífico (ENSO), en particular las temperaturas superficiales del mar en las regiones Niño 3-4 y Niño 1-2 con los respectivas rezagos (TSM-caudales) que arrojan los máximos valores de correlación.

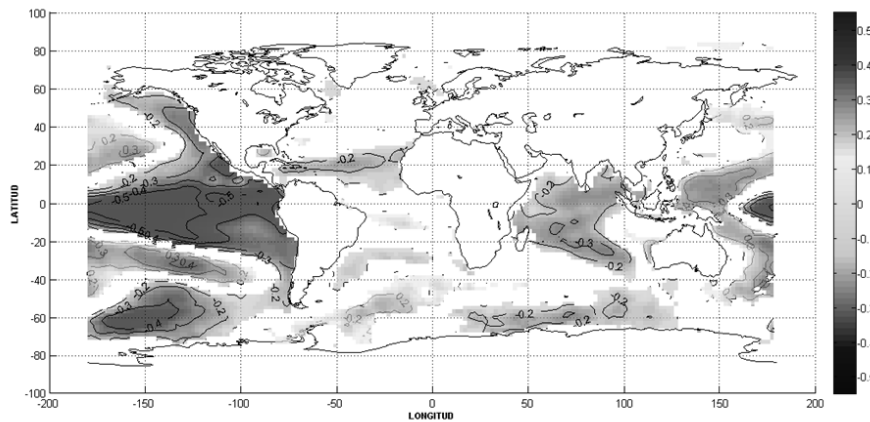


Figura 2.- (a) Análisis de correlación entre la primera componente principal de los ríos y las anomalías de temperatura sobre los océanos;

Luego de definir las variables explicativas, se procede a descomponer la serie estandarizada de caudales en sus principales armónicos utilizando uno de los métodos espectrales expuestos en el presente trabajo. La serie de caudales estandarizada podrá ser parcialmente reconstruida utilizando solo aquellas componentes de baja frecuencia con mayor aporte a la variabilidad total de la serie de tiempo, omitiendo el ruido (componentes de alta frecuencia), por lo tanto, las series filtradas reflejan la dinámica general de los caudales y a la vez son más predecibles. En la Figura 3 se presenta la descomposición espectral (los armónicos) de la serie de caudales estandarizados del río Guatapé y su posterior reconstrucción usando los modos empíricos (IMF) de la transformada de Hilbert-Huang. Dicha descomposición puede elaborarse de manera similar con cualquiera de los métodos espectrales expuestos. En la Figura 4 se presentan las bondades de filtrar la señal en la predicción. Los esquemas híbridos son más eficientes, pues presentan menores errores en comparación con aquellos modelos que solo usan una función de regresión para elaborar las predicciones.

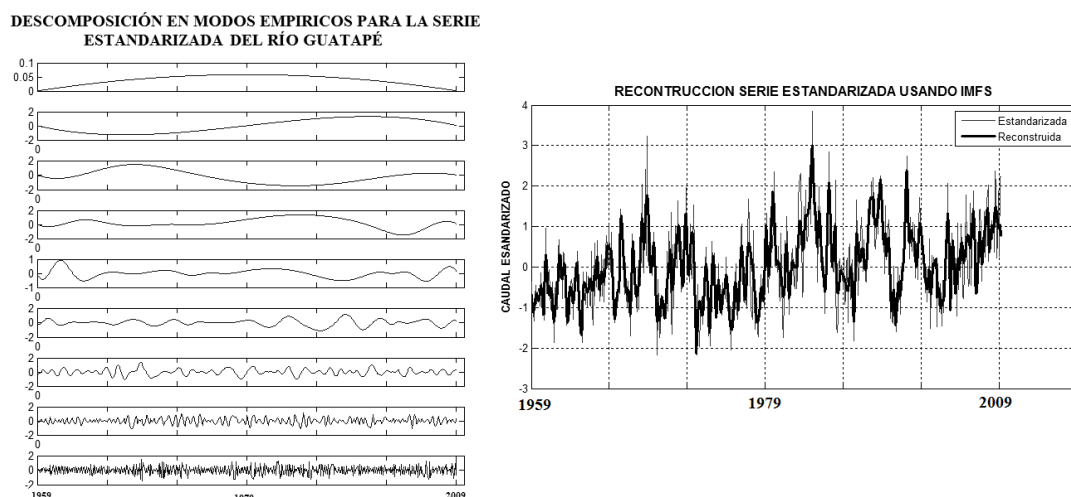


Figura 3.- Aplicación de la descomposición en modos intrínsecos para la serie de caudales del río Guatapé (a) Descomposición; (b) Reconstrucción.

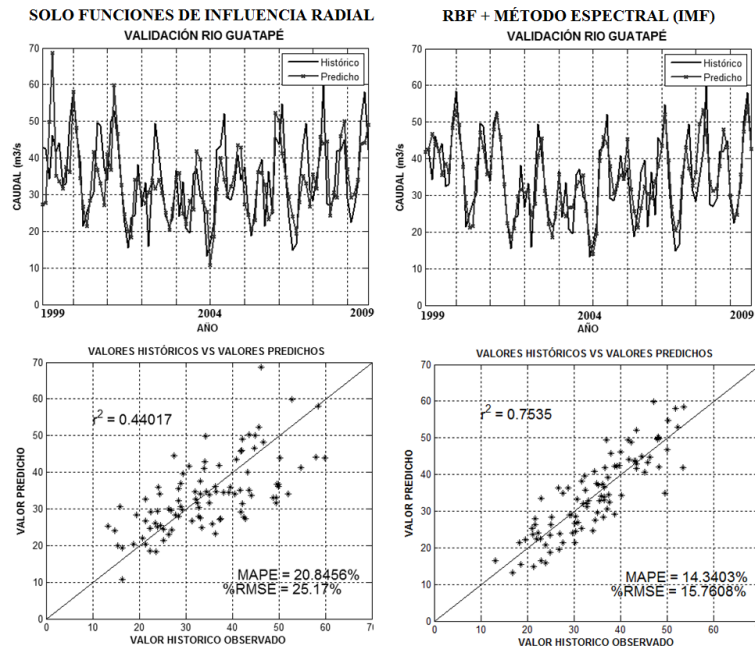


Figura 4.- Efecto del filtro espectral en la predicción de caudales medios mensuales

Un ejercicio de pronóstico en hidrología puede ser entendido como un problema de interpolación, muy común en geoestadística, el cual depende de la distancia o norma a los puntos en una determinada vecindad. En el campo matemático del análisis numérico, se denomina interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos. Las funciones de influencia radial son un método de interpolación basado en un tipo especial de funciones cuya principal característica es que reducen (o aumentan) su respuesta monótonamente con su distancia a un punto central. La interpolación del campo generado por las TSM en la región Niño 1-2 ($X = \text{SST N 1-2}$), la región Niño 3-4 ($Y = \text{SST N 3-4}$) y los caudales filtrados ($Z = \text{Caudales filtrados}$) usando la función de influencia radial multi-cuadrática se presenta en la Figura 5. En efecto las funciones de influencia radial permiten estimar valores futuros de los caudales medios mensuales, que por definición no se encuentran en la muestra. La idea general consiste en usar retardos (o rezagos) de las variables macro-climáticas para obtener los valores futuros del caudal en lo que tradicionalmente se conoce como predicción ciega.

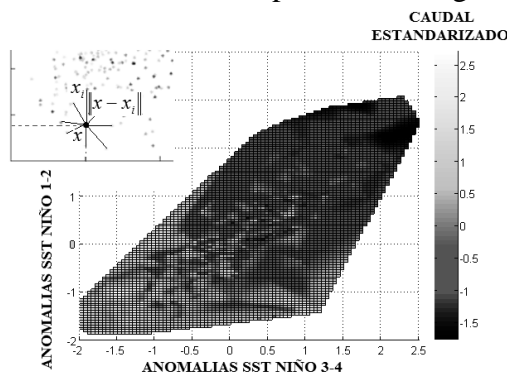
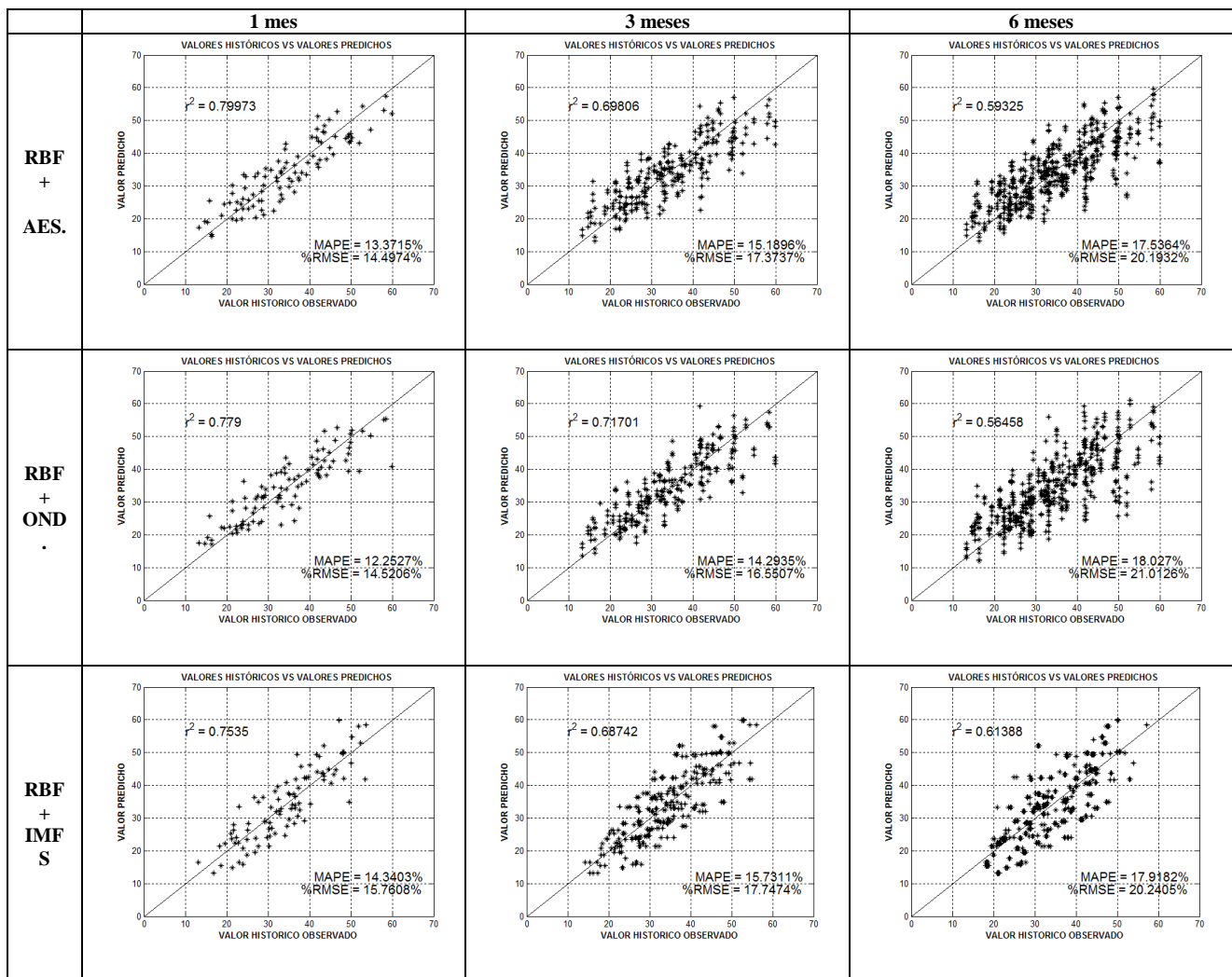


Figura 5.- Aplicación de RBF Multicuadrática para el pronóstico de los caudales del río Guatapé.

Finalmente en la Figura 6, se presentan y comparan los resultados de la aplicación de las RBF con los diferentes modelos de descomposición espectral, para evaluar cual de todos los modelos espectrales se acopla mejor a las RBF. Los resultados indican que el modelo híbrido de RBF con la transformada en ondas permite obtener los menores errores de validación para horizontes de pronóstico de 1 y 3 meses y para 6 meses mediante RBF+AES. Errores inferiores al 18% para todos los casos permiten concluir que el esquema de pronóstico propuesto es bastante eficiente.

Figura 6.- Comparación de los diferentes modelos de pronóstico generados a partir de la combinación de las RBF con diferentes técnicas espectrales para el río Guatapé



CONCLUSIONES

Se han propuesto como nueva técnica para la predicción de caudales medios mensuales las Funciones de Influencia Radial combinadas. Las metodologías aquí expuestas tienen la ventaja de ser no-paramétricas, por lo que el cálculo de los parámetros de calibración no depende de la distribución probabilística de los datos, lo que convierte a las técnicas aquí explicadas en excelentes referencias para la modelación de procesos no lineales y no estacionarios como los caudales.

Al igual que los demás métodos de regresión existentes en la literatura, una RBF puede ser combinada con un método espectral para generar modelos de pronóstico más robustos, es por ello, que la aplicación de la descomposición espectral incrementa de forma sustancial la capacidad de la predicción de las RBF. El caso del río Guatapé, muestra que un modelo híbrido de predicción con RBF multicuadrática y la transformada en onditas es el mejor modelo para ventanas de predicción de 1 y 3 meses y un modelo de RBF+AES es el mejor para una ventana de 6 meses.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Interamericano para la investigación del Cambio Global (IAI), por su cooperación para el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

- Cleveland, W. S.** (1979). "Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots". *Journal of American Statistical Association*, 74 (368), 829-836.
- Cleveland, W. S. and Devlin, S. J.** (1988). "Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting". *Journal of American Statistical Association*., 83 (403), 596-610.
- Ghil M., Allen M., Dettinger M., Ide M., Kondrashov D., Mann M., Robertson A., Saunders A., Tian Y. y Varadi F. y Yiou P.** (2002). "Advanced Spectral Methods for Climatic Time Series". Review of Geophysics. *American Geophysical Union*, Vol. 40, N° 1. pp. 1-41.
- H. Xie, Z. Wang.** (2006). "Mean frequency derived via Hilbert-Huang transform with application to fatigue EMG signal analysis". *Comp. methods and programs in Biomed.* 82, pp. 114-120.
- Mallat, S.** (1989) "Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L_2 ," *Trans. Amer. Math. Soc.*, June.
- N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. L. C. Wu, H. H. Shin, Q. N. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, H. H. Liu.** (1998). "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis". *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A: Math. Phys. Eng. Sci.* 454, pp. 903-995,
- Priestley, M. B. y Chao, M. T.** (1972): "Non-parametric function fitting". *J. Royal Stat. Soc*, B, 34, 385-392.
- Poveda G.** (2006). "Aplicación de los métodos MARS, Holt-Winters y ARIMA generalizado en el pronóstico de caudales medios mensuales en ríos de Antioquia". *Rv Colombia Meteorologia Colombiana*, ISSN: 0124-6984 ed: Gente Nueva v.10 fasc.1 p.36 - 46,
- Powell M.J.D.** (1987). "Radial basis functions for multivariable interpolation: a review, Algorithms for Approximation", Mason J.C., Cox M.G. (eds.), London, Oxford University Press.
- Queipo NV, Haftka RT, Shyy W, Goel T, Vaidyanathan R, Tucker PK** (2005). "Surrogate-based analysis and optimization". *Prog Aerosp Sci* 41:1-28
- Torrence, C., and G. Compo** (1998). "A practical guide to wavelet analysis". *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 79, 61-- 78.
- Vautard, R.** (1992). "Singular-spectrum analysis: A toolkit for shot, noisy chaotic signals". *Physica*, D 58 (1992): 95-126. North-Holland.