



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Análisis de Recuperación de las Tasas de Decaimiento en  
Imágenes Cerebrales potenciadas en  $T_2$  de Resonancia  
Magnética**

Rodney Jaramillo Justinico

**Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín**

**Facultad de Ciencias  
Posgrado en Matemáticas**

Junio 2014



**Análisis de Recuperación de las Tasas de Decaimiento en  
Imágenes Cerebrales potenciadas en  $T_2$  de Resonancia  
Magnética**

Por:  
Rodney Jaramillo Justinico

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de  
Doctor en Ciencias Matemáticas

Directora:  
Marianela Lentini Gil

**Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín**

**Facultad de Ciencias  
Posgrado en Matemáticas**

Junio 2014

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por la Vicerrectoría de Investigación a través del proyecto *Fortalecimiento del grupo de Computación Científica* , código Hermes 16084.

# Agradecimientos

Agradezco a mis colegas y amigos, profesores de las Escuelas de Matemáticas y Estadística, que brindaron palabras de estímulo para la realización de este proyecto, de manera especial a Carlos Mejía, Marco Paluszny, Hugo Arbeláez y Juan Carlos Salazar. Expreso también un profundo agradecimiento a Beatriz Correa, sin cuya insistencia no hubiera reiniciado mis estudios doctorales. Tengo un sentimiento de gratitud muy especial hacia mi asesora, la profesora Marianela Lentini, por su dedicación y especialmente por sus enseñanzas, ejemplo, confianza y amistad. Finalmente agradezco el afecto incondicional de las personas que aguardaban con entusiasmo, y a veces con la impaciencia del que ama, la finalización de esta tesis: mi madre Gladys, mi padre Ludoberto, mi esposa Olga Rocío y nuestros hijos Samuel y Juana.



# Resumen

Los métodos tipo Prony se usan en muchas aplicaciones para realizar el ajuste exponencial que corresponde a un conjunto de datos. En este trabajo se estudia una variante del método Prony que ha sido usada por Martín-Landrove et al. en un proceso de segmentación de imágenes cerebrales potenciadas en  $T_2$  de resonancia magnética. Se demuestra la equivalencia entre este método y el método conocido en la literatura como Prony modificado y se estudia la estabilidad de las soluciones computadas con respecto a la presencia de ruido en los datos. En particular se demuestra que el error relativo, en el cálculo de los parámetros lineales y no lineales del ajuste exponencial, es lineal con respecto al ruido en los datos. El análisis se basa en resultados clásicos que provienen del álgebra lineal, la teoría de la computación matricial y la teoría de estabilidad de raíces de polinomios.

Aunque son varias las fuentes de ruido en la generación de imágenes de resonancia magnética, en este trabajo se considera que éstas están afectadas solamente por ruido tipo Rice y se implementa un nuevo proceso de filtrado bilateral en el dominio de las ondículas para reducir el ruido en las imágenes. El filtro propuesto es una modificación del elaborado por Kazubek y para mostrar su desempeño en la reducción del ruido, se usan imágenes sintéticas y se compara con el filtro original usando criterios cuantitativos y cualitativos. El efecto de la implementación de la variante del método Prony, con la adición del filtro, se ilustra con dos tipos de datos: usando una sucesión real de imágenes cerebrales de resonancia magnética y usando imágenes sintéticas solicitadas al portal Simulated Brain Web.

## Palabras Clave

Métodos Prony, imágenes potenciadas en  $T_2$  de resonancia magnética, ruido Rice, filtro en el dominio de las ondículas, filtro bilateral.

# Abstract

Prony type methods are used in many applications to determine the exponential setting corresponding to a data set. In this thesis we study a variant of Prony method that has been used by Martin-Landrove et al. in a process of brain tissue segmentation given a sequence of  $T_2$  weighted MRI brain images. The equivalence between this method and the modified Prony method is proved and we analyze the stability of the computed solutions with respect to noise in the data set. In particular we show that the relative error, in the calculation of the linear and nonlinear parameters, is linear with respect to noise in the data. Our analysis is based on classical results from linear algebra, matrix computation theory and the theory of stability of polynomials roots.

Here the MR images are considered to be affected only by Rician noise, and a new wavelet domain bilateral filtering process is implemented to reduce the noise in the images. This filter is a modification of Kazubek's and it is used on synthetic images to show the capability of the new procedure to suppress noise. To compare its performance with respect to the original filter, quantitative and qualitative criteria are used. The impact on the variant of Prony method, by adding the filter, is illustrated with two data sets, using a real sequence of brain MRI images and using synthetic images requested to Simulated Brain Web.

## Keywords

Prony's method,  $T_2$  weighted MRI, Rician noise, wavelet domain filter, bilateral filter.

# Tabla de Contenido

Resumen	i
Abstract	ii
Tabla de Contenido	iii
Introducción	1
<b>1 Variante del método Prony</b>	<b>3</b>
1.1 Métodos tipo Prony . . . . .	3
1.2 Variante del método Prony . . . . .	5
<b>2 Análisis de estabilidad</b>	<b>11</b>
2.1 Simulaciones numéricas . . . . .	17
<b>3 Filtros en el dominio de las ondículas para la disminución de ruido en imágenes de resonancia magnética</b>	<b>23</b>
3.1 Implementación de filtros en el dominio de las ondículas para imágenes de resonancia magnética . . . . .	23
3.2 Remoción del sesgo para datos que siguen una distribución Rice . . . . .	24
3.3 Implementación de un nuevo filtro en el dominio de las ondículas para imágenes de resonancia magnética . . . . .	30
3.3.1 Fórmula para los coeficientes de escala . . . . .	30
3.3.2 Filtro tipo Wiener para los coeficientes de onda . . . . .	30
3.3.3 Filtro Bilateral . . . . .	31
3.3.4 Algoritmo para la disminución del ruido en imágenes de resonancia magnética . . . . .	31
3.4 Validación del filtro mediante imágenes sintéticas . . . . .	33
3.5 Desempeño del filtro sobre una imagen real de resonancia magnética . . . . .	37
<b>4 Resultados numéricos</b>	<b>39</b>
4.1 Aplicación del método sobre imágenes potenciadas en $T_2$ reales de resonancia magnética. . . . .	39
4.2 Resultados numéricos sobre imágenes sintéticas. . . . .	45
4.3 Conclusiones y discusión de los resultados . . . . .	53



# Introducción

En este trabajo consideramos inicialmente el problema de ajuste exponencial que consiste en determinar los parámetros lineales  $b$ ,  $C_j$  y los parámetros no lineales  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , de tal forma que la función

$$\mu(t) = b + \sum_{j=1}^k C_j e^{-\lambda_j t}.$$

aproxime los datos  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $n \geq 2k + 1$ . Si el dato  $y_i$  corresponde al valor dado por la ecuación anterior para  $t = i\Delta t$ ,  $\Delta t > 0$ , entonces obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$y_i = b + \sum_{j=1}^k C_j e^{-i\lambda_j \Delta t} \quad i = 1, \dots, n., \quad (1)$$

Esta clase de ajuste exponencial aparece en el caso de imágenes cerebrales potenciadas en  $T_2$  de resonancia magnética. La expresión  $T_2$  hace referencia al tiempo de relajación transversa en el proceso de resonancia y mide el tiempo de decaimiento de la magnetización transversa en un campo magnético externo uniforme.

Los parámetros no lineales,  $\lambda_j$ , corresponden a las tasas de decaimiento asociadas a los tejidos presentes en la imagen. Los coeficientes  $b$ ,  $C_1, \dots, C_k$  hacen referencia al ruido de fondo y a las proporciones de los tejidos que aparecen en las imágenes dadas. En [18] y [19] Martín-Landrove et al. proponen una variante del método Prony para determinar los parámetros lineales y no lineales del modelo en un proceso de segmentación de tejidos cerebrales. El proceso de segmentación es posible ya que todo tejido correspondiente a un píxel puede ser caracterizado por una tasa de decaimiento, por consiguiente determinar las tasas de decaimiento en cada píxel de una región de interés permite diferenciar los tejidos que la conforman. Es de resaltar que este método es más rápido, en una relación de uno a mil, con respecto a otros métodos utilizados para tal clasificación de tejidos que están basados en métodos numéricos para calcular la inversa de la transformada de Laplace, [19].

Los métodos tipo Prony han sido ampliamente usados para estimar las componentes de una señal: frecuencia, amplitud, fase y amortiguamiento; una descripción detallada de tales métodos puede consultarse en [24], [25], [26] y [29]. Por otra parte, un método más robusto para resolver el ajuste exponencial dado por (1) es el método de la Proyección de Variables de Golub y Pereyra, [7], [8] y [23]; este método ha sido usado exitosamente en muchas aplicaciones en campos como la ingeniería eléctrica, la manipulación de imágenes médicas, la resonancia magnética, las ciencias químicas, las ciencias ambientales, etc. Una lista de referencias bibliográficas que ilustra la importancia de este método puede consultarse en [23], (144 items).

En [27] Paluszny et al. compararon la variante del método Prony con el método de la Proyección de Variables. El método tipo Prony mostró ser confiable para bajos niveles de ruido en los datos y  $k = 1, 2, 3$ . El método de la Proyección de Variables mostró ser más robusto en presencia de mayores niveles de ruido, pero requirió del orden de 100 veces más tiempo de cómputo en aquellos casos en que ambos métodos aportaron la misma solución. En esta tesis se analiza el método propuesto por Martín-Landrove et al., [18] y [19], con el objetivo de responder algunas preguntas que surgieron en los artículos iniciales y de señalar aquellas partes del algoritmo inicial que son susceptibles de modificar, buscando un mejor desempeño.

En el primer capítulo se demuestra que la variante del método Prony es equivalente al método Prony modificado y se estudian las características de los sistemas lineales, y el condicionamiento de las raíces polinomiales, que deben ser calculadas para obtener los parámetros del modelo.

En el capítulo dos se analiza la sensibilidad en la variación de los parámetros no lineales y lineales, con respecto al nivel de ruido en los datos  $y_i$ .

El ajuste exponencial de datos en (1) es un problema mal condicionado, esto quiere decir que modificaciones relativamente pequeñas en los datos  $y_i$  pueden corresponder a variaciones de gran tamaño en los parámetros del modelo, por esta razón se requiere un proceso de filtrado para limpiar los datos, antes de aplicar cualquiera de los métodos mencionados. Con este objetivo se propone en el capítulo tres un filtro para imágenes de resonancia magnética en el dominio de las ondículas; el procedimiento consiste en una modificación del filtro elaborado por Kazubek [15], mediante la aplicación del filtro bilateral, [30], obteniendo un algoritmo para remoción de ruido que requiere un tiempo de cómputo bajo.

En los capítulos cuatro y cinco, con el propósito de visualizar el desempeño de los métodos considerados, se presentan ejemplos numéricos con dos tipos de datos: imágenes reales de resonancia magnética e imágenes sintéticas solicitadas al portal de Simulated Brain Web, [35]. Los productos académicos obtenidos durante el desarrollo de esta tesis son dos artículos publicados, cuyos contenidos corresponden a los capítulos 1, 2 y 3 de este documento:

*Stability Analysis of a Variant of the Prony Method,*

Rodney Jaramillo and Marianela Lentini,

Mathematical Problems in Engineering, ISSN 1563-5147, Volume 2012 (2012), Article ID 390645.

*Improving the Performance of the Prony Method Using a Wavelet Domain Filter for MRI Denoising,*

Rodney Jaramillo, Marianela Lentini, and Marco Paluszny,

Computational and Mathematical Methods in Medicine, ISSN 1748-6718, Volume 2014 (2014), Article ID 810680.

# Capítulo 1

## Variante del método Prony

### 1.1 Métodos tipo Prony

Los métodos tipo Prony constituyen una familia de métodos que permiten resolver, entre otros problemas, el ajuste exponencial dado por el sistema de ecuaciones

$$y_i = b + \sum_{j=1}^k C_j e^{-i\lambda_j \Delta t} \quad i = 1, \dots, n.,$$

Si en la formulación dada por (1) se definen  $b = C_0$  y  $\lambda_0 = 0$ , entonces los datos  $y_i$  deben satisfacer el modelo  $\mu(t_i) = \mu(i\Delta t) \approx y_i$ , donde  $\mu$  es la función dada por

$$\mu(t) = \sum_{j=0}^k C_j e^{-\lambda_j t}.$$

Estos métodos, también conocidos como métodos polinomiales, se caracterizan porque  $\mu(t)$  satisface una ecuación en diferencias de la forma

$$(\delta_{k+2}E^{k+1} + \dots + \delta_2E + \delta_1)\mu(t) = 0, \quad (2)$$

donde el operador  $E$  está dado por

$$(E\mu)(t) = \mu(t + \Delta t)$$

y los valores  $\beta_j = e^{-\lambda_j \Delta t}$  son las raíces del polinomio

$$P(z) = \delta_{k+2}z^{k+1} + \dots + \delta_2z + \delta_1 = 0, \quad (3)$$

que es el polinomio característico asociado a la ecuación en diferencias (2). Al evaluar (2) para  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n - k - 1$ , obtenemos el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta_{k+2}\mu(t_{k+2}) + \dots + \delta_1\mu(t_1) &= 0 \\ \vdots & \\ \delta_{k+2}\mu(t_n) + \dots + \delta_1\mu(t_{n-k-1}) &= 0 \end{aligned}$$



donde  $X_\delta^+$  es la inversa generalizada de Moore Penrose de  $X_\delta$ . Osborne et al., [25] y [26], consideraron  $X_\delta$  de rango completo, luego  $X_\delta^+ = (X_\delta^T X_\delta)^{-1} X_\delta^T$ .

Nosotros consideramos un problema de optimización diferente, para comparar con el método utilizado por Martin-Landrove:

$$\min_{\delta} y^T X_\delta X_\delta^T y \quad \text{sujeto a} \quad \delta_{k+2} = 1. \quad (9)$$

Los anteriores métodos y otros, como el clásico método Prony, el método de Pisarenko y el método Predictor Lineal, son descritos en [24], [25], [26] y [29].

Una vez que se determinan los parámetros no lineales, los lineales son calculados mediante la solución en mínimos cuadrados del sistema lineal obtenido al reemplazar los parámetros no lineales en (1).

## 1.2 Variante del método Prony

Esta variante del método Prony consiste en transformar el sistema de ecuaciones exponenciales (1) por un sistema de ecuaciones polinomiales, el cual a su vez se reducirá a un sistema que tiene como incógnitas ciertas funciones simétricas de los parámetros  $\beta_j$ .

Con el objetivo de simplificar la notación, y sin pérdida de generalidad, consideremos en (1) el caso  $k = 3$  y  $n \geq 7$ . De este modo el sistema de ecuaciones (1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} y_1 &= b + C_1\beta_1 + C_2\beta_2 + C_3\beta_3 \\ y_2 &= b + C_1\beta_1^2 + C_2\beta_2^2 + C_3\beta_3^2 \\ &\vdots \\ y_n &= b + C_1\beta_1^n + C_2\beta_2^n + C_3\beta_3^n, \end{aligned} \quad (10)$$

con  $\beta_j = e^{-\lambda_j \Delta t}$ . De la ecuación (10) y definiendo  $q_i = y_i - y_{i+1}$  se obtiene

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1(1 - \beta_1)\beta_1 + C_2(1 - \beta_2)\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= C_1(1 - \beta_1)\beta_1^{n-1} + C_2(1 - \beta_2)\beta_2^{n-1} + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^{n-1}. \end{aligned}$$

La dimensión de este sistema puede ser reducida mediante la transformación  $q_{j+1} - q_j\beta_1$ , para eliminar los términos en los cuales aparece el parámetro lineal  $C_1$ , obteniendo

$$\begin{aligned} q_2 - q_1\beta_1 &= C_2(1 - \beta_2)\beta_2(\beta_2 - \beta_1) + C_3(1 - \beta_3)\beta_3(\beta_3 - \beta_1) \\ &\vdots \\ q_{n-1} - q_{n-2}\beta_1 &= C_2(1 - \beta_2)\beta_2^{n-2}(\beta_2 - \beta_1) + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^{n-2}(\beta_3 - \beta_1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_2 &= q_1\beta_1 + C_2(1 - \beta_2)\beta_2(\beta_2 - \beta_1) + C_3(1 - \beta_3)\beta_3(\beta_3 - \beta_1) \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_{n-2}\beta_1 + C_2(1 - \beta_2)\beta_2^{n-2}(\beta_2 - \beta_1) + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^{n-2}(\beta_3 - \beta_1). \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la transformación  $q_{j+1} - q_j\beta_2$  y el nuevo conjunto de ecuaciones puede ser escrito como

$$\begin{aligned} q_3 - q_2\beta_2 &= q_2\beta_1 - q_1\beta_1\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) \\ &\vdots \\ q_{n-1} - q_{n-2}\beta_2 &= q_{n-2}\beta_1 - q_{n-3}\beta_1\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^{n-3}(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a

$$\begin{aligned} q_3 &= q_2(\beta_1 + \beta_2) - q_1\beta_1\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) \\ q_4 &= q_3(\beta_1 + \beta_2) - q_2\beta_1\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_{n-2}(\beta_1 + \beta_2) - q_{n-3}\beta_1\beta_2 + C_3(1 - \beta_3)\beta_3^{n-3}(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2). \end{aligned}$$

Finalmente usamos la transformación  $q_{j+1} - q_j\beta_3$ . En esta etapa de las simplificaciones hemos obtenido el siguiente sistema

$$\begin{aligned} q_4 &= q_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - q_2(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3) + q_1\beta_1\beta_2\beta_3 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_{n-2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - q_{n-3}(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3) + q_{n-4}\beta_1\beta_2\beta_3. \end{aligned}$$

Usando notación matricial podemos escribir

$$Mw = Q,$$

donde  $[w_1, w_2, w_3] = [\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, -\beta_1\beta_2 - \beta_1\beta_3 - \beta_2\beta_3, \beta_1\beta_2\beta_3]$ ,

$$M = \begin{bmatrix} q_3 & q_2 & q_1 \\ q_4 & q_3 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n-2} & q_{n-3} & q_{n-4} \end{bmatrix} \quad y \quad Q = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Si los valores de los datos  $y_i$  son exactos entonces los valores  $w_1, w_2$  y  $w_3$  pueden obtenerse a partir del sistema de ecuaciones y los  $\beta_j$  son exactamente las raíces del polinomio

$$\alpha(z) = z^3 - w_1z^2 - w_2z - w_3. \quad (11)$$

Una vez que se han calculado las raíces de  $\alpha(z)$  los parámetros no lineales se determinan usando (8) y los parámetros lineales como se estableció en la sección anterior.

Para el caso general,  $k$  arbitrario, sean  $M^{(k)}$  la matriz de orden  $(n - k - 1) \times k$  dada por

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} q_k & \cdot & \cdot & q_1 \\ q_{k+1} & \cdot & \cdot & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ q_{n-2} & \cdot & \cdot & q_{n-1-k} \end{bmatrix}, \quad Q^{(k)} = \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ q_{k+2} \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \quad y \quad w^{(k)} = \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ \vdots \\ w_k^{(k)} \end{bmatrix}.$$

En este caso los coeficientes del polinomio  $\alpha(z)$  son las funciones simétricas en  $\beta_1, \dots, \beta_k$  definidas mediante

$$\begin{aligned} w_1^{(k)} &= \beta_1 + \dots + \beta_k \\ w_2^{(k)} &= - \sum_{l \neq r} \beta_l \beta_r \\ w_3^{(k)} &= \sum_{l \neq r, l \neq s, s \neq r} \beta_l \beta_r \beta_s \\ &\vdots \\ w_{k-1}^{(k)} &= (-1)^k \sum_{j=1}^k \left( \prod_{l \neq j} \beta_l \right) \\ w_k^{(k)} &= (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^k \beta_j, \end{aligned}$$

estos coeficientes se calculan como la solución del sistema de ecuaciones

$$M^{(k)} w^{(k)} = Q^{(k)}. \quad (12)$$

Finalmente, los  $\beta_j$  son las raíces del polinomio

$$\alpha^{(k)}(z) = z^k - \sum_{j=1}^k w_j^{(k)} z^{k-j}. \quad (13)$$

Los dos teoremas que enunciaremos a continuación establecen la relación que existe entre la solución obtenida mediante el procedimiento que acabamos de describir y el método Prony modificado descrito en la sección 1.1.

**Teorema 1** Sea  $R$  la Matriz de orden  $k \times k$  definida como sigue:  $R = 1$  si  $k = 1$ , y para  $k > 1$

$$R(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ -1, & \text{if } j = i + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Adicionalmente, sean  $P(z)$  y  $\alpha^{(k)}(z)$  los polinomios definidos en (3) y (13) respectivamente. si  $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{k+1}, 1]$  es la solución del problema de optimización (9), entonces el vector  $w^{(k)} = R^{-1}[\delta_k, \dots, \delta_1]^T$  satisface

$$M^{(k)} w^{(k)} - Q^{(k)} = X_\delta^T y.$$

Más aún,

$$P(z) = (z - 1)\alpha^{(k)}(z).$$

**Prueba.** La solución  $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{k+1}, \delta_{k+2}]$  de (9) satisface  $\delta_{k+2} = 1$ . En el caso que estamos considerando  $\beta_0 = 1$  es una raíz de  $P(z)$  de lo cual sigue que

$$- \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j = 1.$$

Entonces

$$M^{(k)}w^{(k)} - Q^{(k)} = M^{(k)}R^{-1}Rw^{(k)} - Q^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= M^{(k)}R^{-1} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{k+1} - y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_n \end{bmatrix} \\
&= M^{(k)}R^{-1} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -[\sum_{j=1}^{k+1} \delta_j]y_{k+1} - y_{k+2} \\ \vdots \\ -[\sum_{j=1}^{k+1} \delta_j]y_{n-1} - y_n \end{bmatrix} \\
&= M^{(k)}R^{-1} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{k+1} & \cdot & \cdot & y_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & \cdot & \cdot & y_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} + \dots \\
&\quad \delta_{k+2} \begin{bmatrix} y_{k+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \delta_{k+1} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \delta_{k+2} \begin{bmatrix} y_{k+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \delta_{k+1} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \dots \\
&\quad M^{(k)}R^{-1} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{k+1} & \cdot & \cdot & y_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & \cdot & \cdot & y_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} \\
&= \delta_{k+2} \begin{bmatrix} y_{k+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \delta_{k+1} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \dots \\
&\quad \begin{bmatrix} y_k & y_{k-1} & \cdot & \cdot & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-2} & y_{n-1} & \cdot & \cdot & y_{n-k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_k \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_{k+2} \\ y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & y_{k+3} \\ y_3 & y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & y_{k+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-k-1} & y_{n-k} & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{k+1} \\ \delta_{k+2} \end{bmatrix} \\
&= W_y \delta.
\end{aligned}$$

De la ecuación (6) sigue que

$$M^{(k)} w^{(k)} - Q^{(k)} = X_\delta^T y.$$

Ahora bien, para el polinomio  $P(z)$  tenemos

$$\begin{aligned}
P(z) &= \delta_{k+2} z^{k+1} + \dots + \delta_2 z + \delta_1 \\
&= (z-1) \left( z^k - \left( \sum_{j=1}^k \delta_j \right) z^{k-1} - \left( \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \right) z^{k-2} - \dots - (\delta_1 + \delta_2) z - \delta_1 \right) \\
&= (z-1) \left( z^k - w_1^{(k)} z^{k-1} - w_2^{(k)} z^{k-2} \dots - w_{k-1}^{(k)} z - w_k^{(k)} \right) \\
&= (z-1) \left( z^k - \sum_{j=1}^k w_j^{(k)} z^{k-j} \right) \\
&= (z-1) \alpha^{(k)}(z).
\end{aligned}$$

■

**Teorema 2** *Supongamos que existe una única solución del problema de optimización (9). El vector  $\delta \in \mathbb{R}^{k+2}$  es la solución del problema (9) si y sólo si  $R^{-1}[\delta_k, \dots, \delta_1]^T$  es la solución en mínimos cuadrados de la ecuación lineal (12).*

**Prueba.** Sean  $\delta \in \mathbb{R}^{k+2}$  la solución del problema (9),  $\zeta = R^{-1}[\delta_k, \dots, \delta_1]^T$  y sea  $\psi$  la solución en mínimos cuadrados del sistema lineal (12). Del teorema 1 sigue que

$$\begin{aligned}
\|X_\delta^T y\| &= \|M^{(k)} \zeta - Q^{(k)}\| \\
&\geq \min_z \|M^{(k)} z - Q^{(k)}\| \\
&= \|M^{(k)} \psi - Q^{(k)}\|.
\end{aligned} \tag{14}$$

Consideremos  $\xi \in \mathbb{R}^k$  dado por

$$[\xi_k, \dots, \xi_1]^T = R\psi \tag{15}$$

y  $\gamma \in \mathbb{R}^{k+2}$  definido como

$$\gamma = [\xi_1, \dots, \xi_k, -1 - \sum_{j=1}^k \xi_j, 1]^T. \tag{16}$$

Por el teorema (1) tenemos

$$\|M^{(k)} \psi - Q^{(k)}\| = \|X_\gamma^T y\|.$$

Luego  $\|X_\delta^T y\| \geq \|X_\gamma^T y\|$ . Por hipótesis  $\delta$  es la única solución del problema de optimización, entonces  $\delta = \gamma$ , lo cual implica que  $[\delta_k, \dots, \delta_1] = [\xi_k, \dots, \xi_1]$ . Tenemos entonces  $R\zeta = R\psi$  de donde  $\zeta = \psi$ .

De forma similar podemos demostrar que  $\gamma$  en (16) es la solución del problema de optimización (9) siempre que  $\psi$  sea la solución en mínimos cuadrados del sistema lineal (12). ■

## Capítulo 2

# Análisis de estabilidad

Como se muestra en el capítulo anterior, los parámetros lineales y no lineales que se obtienen mediante la variante del método Prony utilizada por Martín-Landrove et al., [18] y [19], dependen de la calidad de las soluciones obtenidas al resolver dos sistemas de ecuaciones lineales: inicialmente el sistema lineal (12), luego el cálculo de las raíces del polinomio (13) y posteriormente se considera la solución, en mínimos cuadrados, del sistema lineal de ecuaciones que se obtiene al reemplazar en la ecuación (1) los parámetros no lineales, teniendo presente en ambos sistemas, la existencia de ruido en los datos  $y_i$ . Los dos teoremas que siguen a continuación son resultados importantes a la hora de hacer un análisis de la sensibilidad de las soluciones de estos sistemas, con respecto al nivel de ruido en los datos. Los detalles de estos resultados pueden consultarse en la referencia [9].

**Teorema 3** *Suponga que*

$$\begin{aligned} Au &= \gamma & A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{0} \neq \gamma \in \mathbb{R}^n \\ (A + \Delta A)v &= \gamma + \Delta\gamma & \Delta A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \Delta\gamma \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

con  $A$  invertible,  $\|\Delta A\| \leq \epsilon \|A\|$  y  $\|\Delta\gamma\| \leq \epsilon \|\gamma\|$ , y sea  $\kappa(A)$  el número de condición de  $A$ . Si  $\epsilon\kappa(A) < 1$  entonces  $A + \Delta A$  es no singular y

$$\frac{\|v - u\|}{\|u\|} \leq \frac{2\epsilon\kappa(A)}{1 - \epsilon\kappa(A)}.$$

**Teorema 4** *Suponga que  $u$  es la solución en mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones  $Az = \gamma$  y que  $\hat{u}$  es la solución en mínimos cuadrados de  $(A + \Delta A)z = \gamma + \Delta\gamma$ , donde  $A$  y  $\Delta A$  están en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m \geq n$  y los vectores  $\gamma$  y  $\Delta\gamma$  pertenecen a  $\mathbb{R}^m$ , con  $\gamma \neq 0$ . Sean  $\sigma_n(A)$  y  $\sigma_1(A)$  el menor y el mayor valor singular de  $A$ , respectivamente, y sea  $\gamma^*$  la proyección vectorial de  $\gamma$  sobre el espacio generado por las columnas de  $A$ . Si*

$$\epsilon = \max \left\{ \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}, \frac{\|\Delta\gamma\|_2}{\|\gamma\|_2} \right\} < \frac{\sigma_n(A)}{\sigma_1(A)} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{\|\gamma - \gamma^*\|}{\|\gamma\|} \neq 1,$$

entonces

$$\frac{\|\hat{u} - u\|_2}{\|u\|_2} \leq \epsilon \left\{ \frac{2\kappa_2(A)}{\cos(\theta)} + \tan(\theta)[\kappa_2(A)]^2 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

En el sistema de ecuaciones (12), las matrices  $M^{(k)}$  y  $Q^{(k)}$  dependen de las componentes del vector de mediciones  $y$ . Por lo tanto, en presencia de datos ruidosos, el sistema que realmente se considera es

$$(M^{(k)} + \mathbf{E}_1)w^{(k)} = Q^{(k)} + \mathbf{E}_2,$$

donde la matriz  $\mathbf{E}_1$  y el vector  $\mathbf{E}_2$  dependen del nivel de ruido en los datos. Esto hace necesario determinar el número de condición de la matriz  $M^{(k)}$  con el objetivo de cuantificar la aproximación de los coeficientes dados por  $w^{(k)}$ . Consideremos el modelo (1) para  $n = 2k+1$ . En esta situación  $M^{(k)}$  es una matriz cuadrada no singular de dimensión  $k \times k$ . En el siguiente lema establecemos una factorización de la matriz  $M^{(k)}$  que será utilizada en el análisis de estabilidad del sistema (12). Nuestro análisis es similar al descrito en [5].

**Lema 1** Consideremos el caso  $n = 2k + 1$ . Sean  $G$  y  $H$  las matrices de orden  $k \times k$  definidas por

$$g_{i,j} = \beta_j^{i-1} \quad h_{i,j} = \beta_i^{k-j},$$

y sea  $D$  la matriz diagonal de orden  $k \times k$  definida por:  $d_{i,i} = C_i(1 - \beta_i)\beta_i$ . Entonces

$$M^{(k)} = GDH. \tag{17}$$

**Prueba.** Por definición  $q_i = y_i - y_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ . Entonces

$$q_i = \sum_{j=1}^k C_j \beta_j^i (1 - \beta_j),$$

así

$$\begin{aligned} M^{(k)} &= \begin{bmatrix} q_k & \cdot & \cdot & q_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2k-1} & \cdot & \cdot & q_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k C_j \beta_j^k (1 - \beta_j) & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^k C_j \beta_j (1 - \beta_j) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{j=1}^k C_j \beta_j^{2k-1} (1 - \beta_j) & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^k C_j \beta_j^k (1 - \beta_j) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \beta_1 & \cdot & \cdot & \beta_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^{k-1} & \cdot & \cdot & \beta_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{k-1} & \cdot & \beta_1 & 1 \\ \beta_2^{k-1} & \cdot & \beta_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_k^{k-1} & \cdot & \beta_k & 1 \end{bmatrix} \\ &= GDH. \end{aligned}$$

■

**Lema 2** Consideremos  $n = 2k + 1$ . Sean  $\eta_{M^{(k)}}$ ,  $\eta_G$  y  $\eta_D$  los números de condición en la norma del máximo de las matrices  $M^{(k)}$ ,  $G$  and  $D$  respectivamente. Entonces

$$\eta_{M^{(k)}} \leq k^2 \eta_G^2 \eta_D. \quad (18)$$

**Prueba.** Sea  $\eta_H$  el número de condición en la norma del máximo de la matriz  $H$ . Usando el lema 1 se sigue que

$$\eta_{M^{(k)}} \leq \eta_G \eta_D \eta_H.$$

Para obtener la desigualdad (18) es suficiente observar que

$$\begin{aligned} \eta_H &= \|H\|_\infty \|H^{-1}\|_\infty = \|H^T\|_1 \|(H^{-1})^T\|_1 \\ &= \|H^T\|_1 \|(H^T)^{-1}\|_1 = \|G\|_1 \|G^{-1}\|_1 \\ &\leq k^2 \|G\|_\infty \|G^{-1}\|_\infty = k^2 \eta_G, \end{aligned}$$

■  
El siguiente teorema establece un estimativo para la variación  $\Delta w^{(k)}$  en las componentes del vector  $w^{(k)}$  en (12), en la medida que el mismo depende del nivel de ruido en el vector de datos  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ .

**Teorema 5** Sean  $n = 2k + 1$ ,  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ ,  $\Delta y = [\Delta y_1, \dots, \Delta y_n]^T$  y

$$\Lambda_1 = \min\{\|M^{(k)}\|_\infty, \|q^{(k)}\|_\infty\}.$$

Sea  $\delta > 0$  tal que

$$2k^3 \eta_G^2 \eta_D \delta < \Lambda_1. \quad (19)$$

Si  $\|\Delta y\|_\infty < \delta$  entonces la variación,  $\Delta w^{(k)}$ , en la solución del sistema perturbado

$$(M^{(k)} + \Delta M^{(k)})(w^{(k)} + \Delta w^{(k)}) = q^{(k)} + \Delta q^{(k)},$$

satisface

$$\frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty} \leq 4k^3 \eta_G^2 \eta_D \frac{\delta}{\Lambda_1} + O(\delta^2) \quad (20)$$

**Prueba.**

Sean  $\epsilon = \frac{2\delta k}{\Lambda_1}$ . Si  $\|\Delta y\|_\infty < \delta$  entonces  $\|\Delta M^{(k)}\|_\infty \leq 2k\delta$  y  $\|\Delta q^{(k)}\|_\infty \leq 2k\delta$ . De lo anterior se sigue que

$$\|\Delta q^{(k)}\|_\infty \leq 2k\delta \frac{\|q^{(k)}\|_\infty}{\Lambda_1} = \epsilon \|q^{(k)}\|_\infty. \quad (21)$$

De forma similar obtenemos

$$\|\Delta M^{(k)}\|_\infty \leq \epsilon \|M^{(k)}\|_\infty. \quad (22)$$

Al usar la desigualdad (19) vemos que

$$\epsilon \eta_{M^{(k)}} \leq \epsilon k^2 \eta_G^2 \eta_D < 1. \quad (23)$$

De (21), (22) y (23), y usando el Teorema (3), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty} &\leq 2 \frac{\epsilon \eta_{M^{(k)}}}{1 - \epsilon \eta_{M^{(k)}}} \\ &\leq 2\epsilon \eta_{M^{(k)}} + O(\epsilon^2 \eta_{M^{(k)}}^2) \\ &\leq 4k^3 \eta_G^2 \eta_D \frac{\delta}{\Lambda_1} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

■

Una vez calculado el vector  $\tilde{w}^{(k)} = w^{(k)} + \Delta w^{(k)}$  debe considerarse el impacto correspondiente en el cálculo de las raíces del polinomio

$$\tilde{\alpha}^{(k)}(z) = z^k - \sum_{j=1}^k \tilde{w}_j^{(k)} z^{k-j}.$$

Sea  $\beta_j$  una de las raíces del polinomio  $\alpha^{(k)}(z)$  y supongamos que  $\tilde{\beta}_j = \beta_j + \Delta\beta_j$  es la raíz del polinomio  $\tilde{\alpha}^{(k)}(z)$  más cercana a  $\beta_j$ . De la teoría de estabilidad para raíces simples de polinomios, ver [34], se obtiene la siguiente desigualdad.

**Lema 3** *Sea  $0 < \theta \ll 1$  tal que*

$$\frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty} < \theta.$$

*Entonces existe  $\Lambda_2 > 0$  tal que*

$$|\Delta\beta_j| \leq \Lambda_2 \frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty}. \quad (24)$$

De (20) vemos que existe una constante  $\Lambda_3$  tal que

$$\frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty} \leq \left( \frac{4k^3 \eta_G^2 \eta_D}{\Lambda_1} + \Lambda_3 \delta \right) \delta. \quad (25)$$

Así, si  $\delta$  en el Teorema 5 es suficientemente pequeño tal que

$$\delta \left( \frac{4k^3 \eta_G^2 \eta_D}{\Lambda_1} + \Lambda_3 \delta \right) = \theta < 1, \quad (26)$$

entonces se cumplen las condiciones del lema 3 y por lo tanto

$$\|\Delta\beta\|_\infty \leq \Lambda_2 \frac{\|\Delta w^{(k)}\|_\infty}{\|w^{(k)}\|_\infty}. \quad (27)$$

Con los valores  $\tilde{\beta}_j$  computados,  $1 \leq j \leq k$ , debemos analizar la solución en mínimos cuadrados del sistema perturbado

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{\beta}_1 & \cdot & \cdot & \tilde{\beta}_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \tilde{\beta}_1^{2k+1} & \cdot & \cdot & \tilde{\beta}_k^{2k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{C}_1 \\ \cdot \\ \tilde{C}_k \end{bmatrix} = y + \Delta y,$$

el cual escribiremos como  $\tilde{B}\tilde{C} = \tilde{y}$ . El siguiente teorema da un estimativo de  $\|\Delta C\|_2$ , siendo  $\tilde{C} = C + \Delta C$  la solución del sistema perturbado. Es pertinente señalar que este es el primer resultado cuya demostración requiere que los parámetros no lineales del modelo (1) sean positivos.

**Teorema 6** Sean  $n$ ,  $y$ ,  $\Delta y$  y  $\delta$  como en el teorema (5), con  $\|\Delta y\|_\infty < \delta$ . Sean  $B$  la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \cdot & \cdot & \beta_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \beta_1^{2k+1} & \cdot & \cdot & \beta_k^{2k+1} \end{bmatrix},$$

$\hat{\eta}_\beta$  el número de condición de  $B$  en la norma euclidiana y consideremos

$$\Lambda_4 = \min\{\|B\|_2, \|y\|_2\}.$$

Supongamos que  $\lambda_j > 0$  y que  $\delta$  satisface las desigualdades (19) y (26), y sea

$$\rho_\delta = \delta\sqrt{2k+1} \max\left\{k(2k+1)\left(\frac{4k^3\eta_G^2\eta_D}{\Lambda_1} + \Lambda_3\delta\right)\Lambda_2, 1\right\} < \min\left\{1, \frac{\Lambda_4}{\hat{\eta}_\beta}\right\}. \quad (28)$$

Entonces

$$\frac{\|\Delta C\|_2}{\|C\|_2} \leq \frac{\rho_\delta}{\Lambda_4} \left(\frac{\hat{\eta}_\beta}{\cos\theta} + \hat{\eta}_\beta^2 \tan\theta\right) + O(\delta^2), \quad (29)$$

donde

$$\text{sen}\theta = \frac{\|y - y^*\|_2}{\|y\|_2},$$

y el vector  $y^*$  es la proyección ortogonal de  $y$  sobre el subespacio generado por las columnas de  $B$ .

**Prueba.** Sean  $\epsilon = \frac{\rho_\delta}{\Lambda_4}$  y

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 + \Delta\beta_1 & \cdot & \cdot & \beta_k + \Delta\beta_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (\beta_1 + \Delta\beta_1)^{2k+1} & \cdot & \cdot & (\beta_k + \Delta\beta_k)^{2k+1} \end{bmatrix} - B.$$

Usando el teorema del valor medio vemos que

$$|(\beta_l + \Delta\beta_l)^j - \beta_l^j| \leq j(\beta_l^*)^{j-1}\Delta\beta_j,$$

donde  $\beta_l^*$  está entre  $\beta_j$  y  $\beta_j + \Delta\beta_j$ , y  $0 < \beta_j < 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|\Delta B\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq 2k+1} \left( \sum_{l=1}^k |(\beta_l + \Delta\beta_l)^j - \beta_l^j| \right) \\ &\leq k(2k+1)\|\Delta\beta\|_\infty. \end{aligned}$$

De las desigualdades (25), (26) y (28) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\Delta B\|_2 &\leq \sqrt{2k+1}\|\Delta B\|_\infty \\
&\leq k(2k+1)^{\frac{3}{2}}\|\Delta\beta\|_\infty \\
&\leq k(2k+1)^{\frac{3}{2}}\Lambda_2\delta\left(\frac{4k^3\eta_G^2\eta_D}{\Lambda_1} + \Lambda_3\delta\right) \\
&\leq \frac{\rho_\delta}{\Lambda_4}\|B\|_2.
\end{aligned} \tag{30}$$

De otra parte

$$\begin{aligned}
\|\Delta y\|_2 &\leq \sqrt{2k+1}\|\Delta y\|_\infty \\
&\leq \sqrt{2k+1}\delta \leq \frac{\rho_\delta}{\Lambda_4}\|y\|_2.
\end{aligned} \tag{31}$$

Por definición

$$\frac{\rho_\delta}{\Lambda_4} < \frac{1}{\hat{\eta}_\beta} \tag{32}$$

y la desigualdad (29) se sigue de (30), (31) y (32), como consecuencia del teorema (4). ■  
Si el valor de  $\rho_\delta$  en (29) es dado por

$$\rho_\delta = k(2k+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4k^3\eta_G^2\eta_D}{\Lambda_1} + \Lambda_3\delta\right)\Lambda_2\delta$$

y  $\text{sen}\theta = 0$  entonces

$$\frac{\|\Delta C\|_2}{\|C\|_2} \leq \frac{4k^4(2k+1)^{\frac{3}{2}}\Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_4}\eta_G^2\eta_D\hat{\eta}_\beta\delta + O(\delta^2). \tag{33}$$

Este estimativo es similar al obtenido en la referencia [5], en la cual se estudia la estabilidad de un sistema de Prony confluyente.

Para resumir, las desigualdades (20) y (27) muestran la dependencia lineal de los parámetros no lineales y la desigualdad (33) la dependencia lineal de los parámetros lineales, con respecto al error en los datos.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\beta_1 < \beta_2 \dots < \beta_k$ . De la referencia [6] vemos que

$$\eta_G = \max\{k, g\} \cdot \max_{1 \leq j \leq k} g_j.$$

donde

$$g = \sum_{j=1}^k \beta_j^{k-1} \quad \text{y} \quad g_j = \prod_{l \neq j} \frac{1 + \beta_l}{|\beta_j - \beta_l|}.$$

$D$  es una matriz diagonal, luego

$$\eta_D = \frac{\max_j |C_j \beta_j (1 - \beta_j)|}{\min_j |C_j \beta_j (1 - \beta_j)|}.$$

Actualmente no se conoce una cota superior razonable para el número de condición  $\hat{\eta}_B$ .

Concluimos que el algoritmo es estable si se satisfacen cada una de las siguientes condiciones:

- Existe  $s > 0$  tal que  $\beta_j \geq s$  para  $1 \leq j \leq k$ , (condición que se requiere en la hipótesis del teorema 6),
- las cantidades  $\beta_j$  están suficientemente separadas y
- el número de parámetros no lineales permanece pequeño.

La proximidad entre dos parámetros no lineales  $\beta_j$  produce valores grandes del número de condición de  $G$ ,  $\eta_G$ , y por consiguiente un algoritmo inestable. Este comportamiento es consistente con lo observado por Varah, [31], quien observó la inestabilidad de cualquier algoritmo para ajuste exponencial, teniendo parámetros  $\beta_j$  muy cercanos.

## 2.1 Simulaciones numéricas

En esta sección realizamos algunos ejemplos numéricos para observar el comportamiento real de nuestra implementación de la variante del método Prony descrito anteriormente. Se presentan resultados para modelos con dos y tres funciones exponenciales. Puesto que estamos interesados en imágenes cerebrales potenciadas en  $T_2$  de resonancia magnética, escogemos parámetros lineales  $C_j$  positivos y tales que  $\sum_{j=1}^k C_j = 255$ , y parámetros no lineales en el intervalo  $[0.65, 26]$ ; este intervalo contiene las tasas de decaimiento asociadas a tejidos cerebrales como se puede ver en la referencia [20].

Dado un modelo particular  $y(t)$ , los valores  $y_i$  son generados inicialmente evaluando  $y(t_i)$  con  $\Delta t = 0.04$ ,  $t_i = i\Delta t$  y posteriormente alterándolos con la adición de ruido. Hemos considerado dos clases de ruido: Gaussiano y Rice.

En las imágenes de resonancia magnética los datos son intrínsecamente valores complejos, cuyas componentes real e imaginaria son perturbadas con un ruido que se distribuye como una Gaussiana de media cero y con la misma varianza para cada componente, ver [10]. Las imágenes son formadas tomando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables aleatorias Gaussianas, (real e imaginaria), píxel por píxel. Para la magnitud, en una imagen compleja de resonancia magnética, la función Rician de densidad de probabilidad de la medida de intensidad en un píxel  $x$  está dada por

$$p(x|y) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{yx}{\sigma^2}\right),$$

donde  $I_0$  es la función modificada de Bessel de orden cero y de primera clase,  $y$  es la amplitud de la señal libre de ruido y  $\sigma$  denota la desviación estándar del ruido Gaussiano en las componentes real e imaginaria.

Las figuras son gráficas tipo log-log, el eje horizontal corresponde a la variación del nivel de ruido y el vertical al error relativo obtenido en el cómputo de los parámetros lineales y no lineales.

$$db = \left| \frac{\Delta b}{b} \right|, \quad dC_j = \left| \frac{\Delta C_j}{C_j} \right| \quad \text{and} \quad d\lambda_j = \left| \frac{\Delta \lambda_j}{\lambda_j} \right|.$$

Para cada ejemplo mostramos primero los resultados para una corrida correspondiente a un valor particular de  $\sigma$ , luego mostramos en una segunda gráfica el valor promedio de los errores

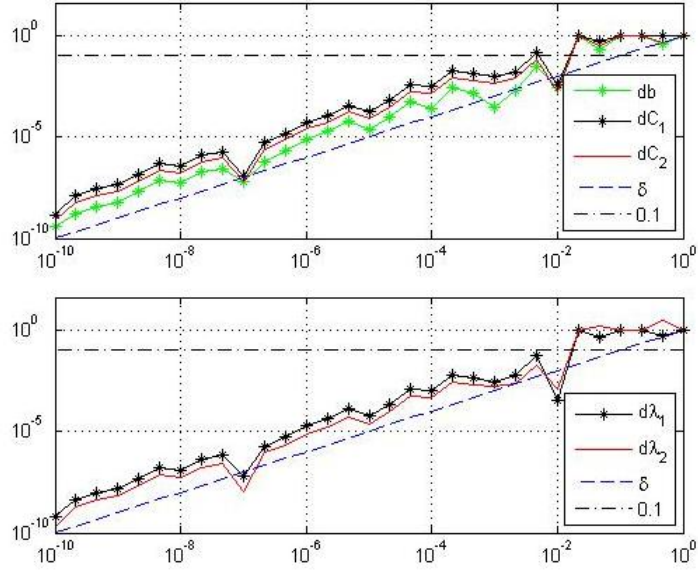


Figure 2.1: Errores relativos para el primer modelo, correspondientes a un ruido Gaussiano

relativos para cien corridas del algoritmo. El ruido Gaussiano tiene media cero y desviación estándar  $\sigma$ , variando  $\sigma$  entre  $10^{-10}$  y 1. Para el ruido Rice usamos  $(y_i, \sigma)$  con  $\sigma$  variando entre  $10^{-10}$  y 1 como los parámetros de cada simulación.

Las figuras (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) corresponden al modelo

$$y(t) = 10 + 80e^{-11t} + 165e^{-20t}.$$

En las figuras (2.1) y (2.2) se presentan los resultados usando ruido Gaussiano y en las figuras (2.3) y (2.4), se muestran los resultados para el mismo modelo y usando ruido Rice. Puede observarse la dependencia lineal de los errores con respecto al nivel de ruido. También observamos que los errores en el cómputo de los parámetros no lineales son levemente menores que los obtenidos en el cómputo de los parámetros lineales. Como el comportamiento es similar para ambos casos de ruido, en los demás experimentos se considera solamente ruido Rice. A continuación se propone el siguiente modelo

$$y(t) = 5 + 100e^{-11t} + 150e^{-12t}.$$

Las figuras (2.5) y (2.6) muestran un deterioro, como lo sugiere la teoría, debido a que los parámetros lineales están más cerca entre sí, con respecto a los del modelo anterior. En este caso los errores en los parámetros lineales son mayores, en más de un orden de magnitud, que los errores en los parámetros no lineales. Como tercer ejemplo se considera el modelo

$$y(t) = 5 + 70e^{-2t} + 85e^{-10t} + 95e^{-18t}.$$

Los resultados se ilustran en las figuras (2.7) y (2.8). De nuevo se muestra un deterioro, con respecto al primer modelo, el cual es causado por la adición de un término exponencial al modelo. En la tabla que sigue a continuación mostramos los números de condición de las diferentes matrices relevantes, para cada uno de los tres ejemplos.

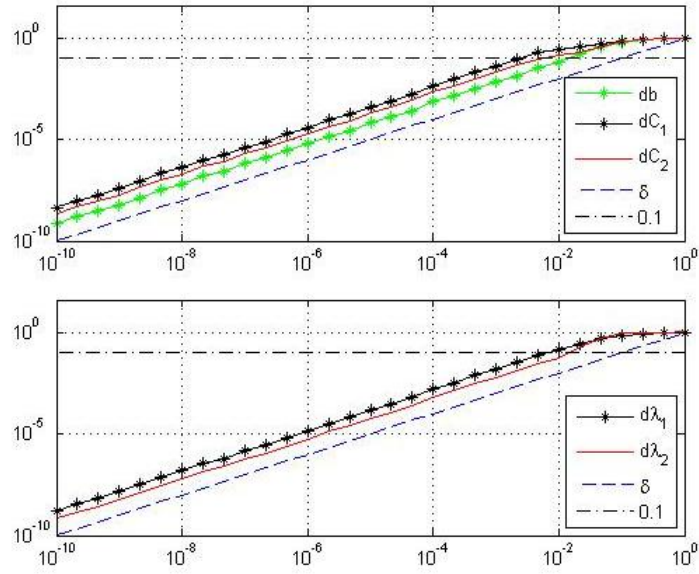


Figure 2.2: Promedio de los errores relativos, después de 100 corridas, para el primer modelo y correspondientes a un ruido Gaussiano

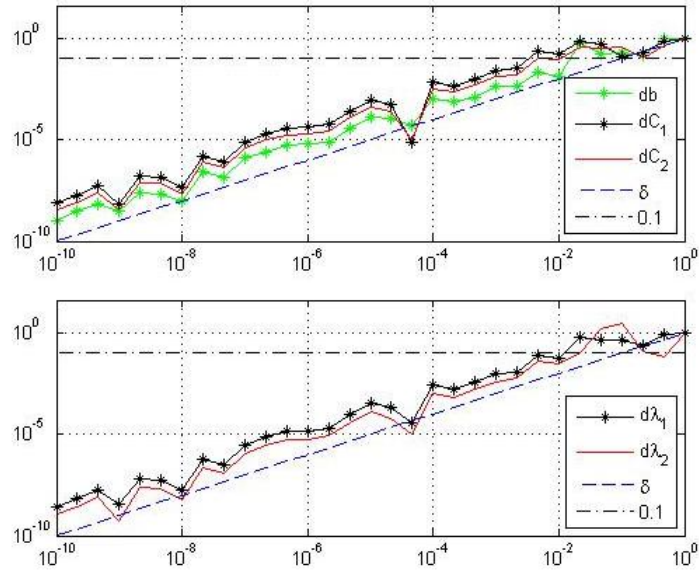


Figure 2.3: Errores relativos para el primer modelo, correspondientes a un ruido Rician

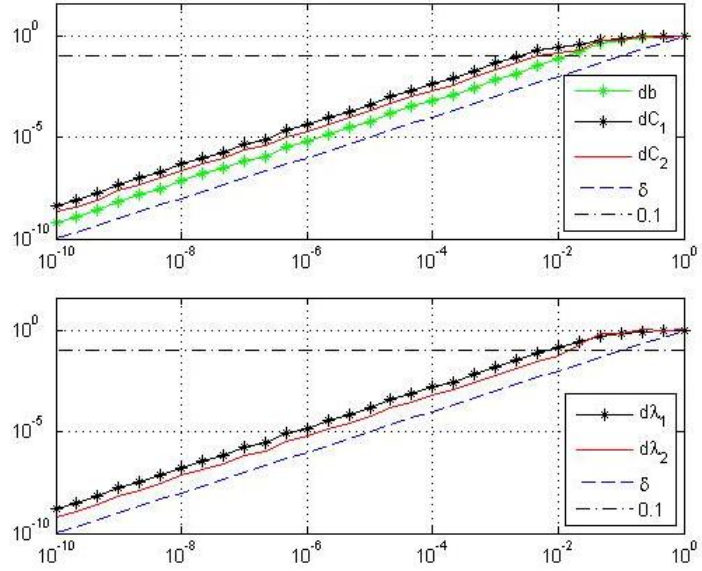


Figure 2.4: Promedio de los errores relativos, después de 100 corridas, para el primer modelo y correspondientes a un ruido Rician

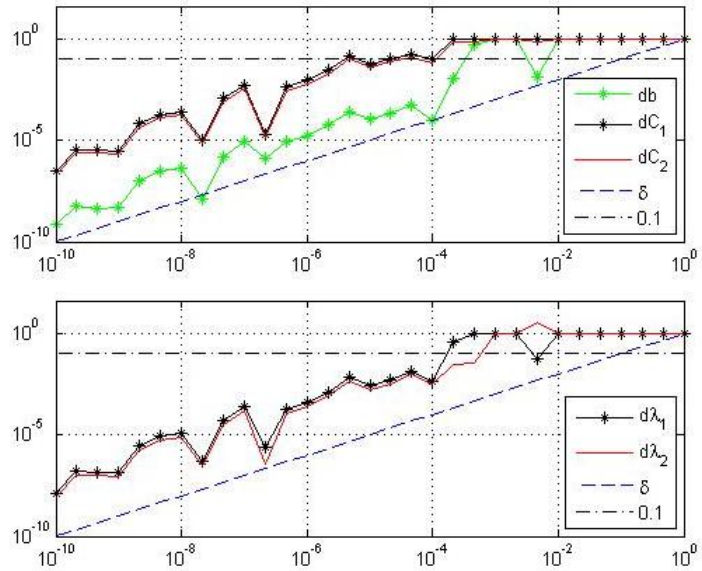


Figure 2.5: Errores relativos para el segundo modelo, correspondientes a un ruido Rician

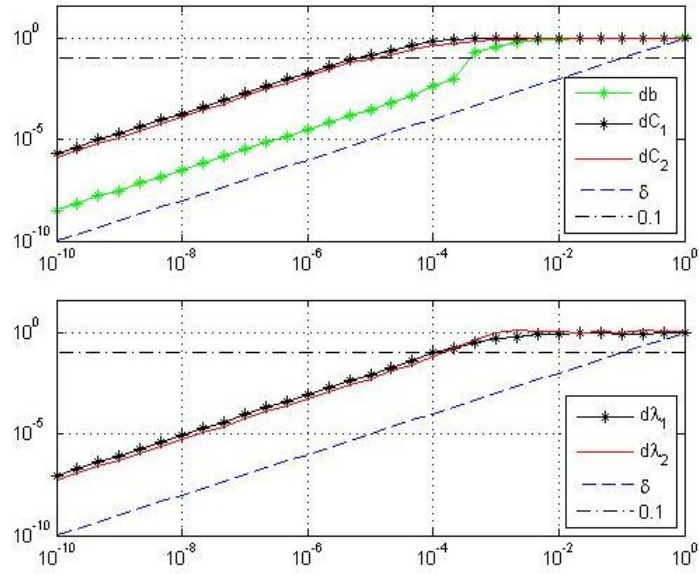


Figure 2.6: Promedio de los errores relativos, después de 100 corridas, para el segundo modelo y correspondientes a un ruido Rician

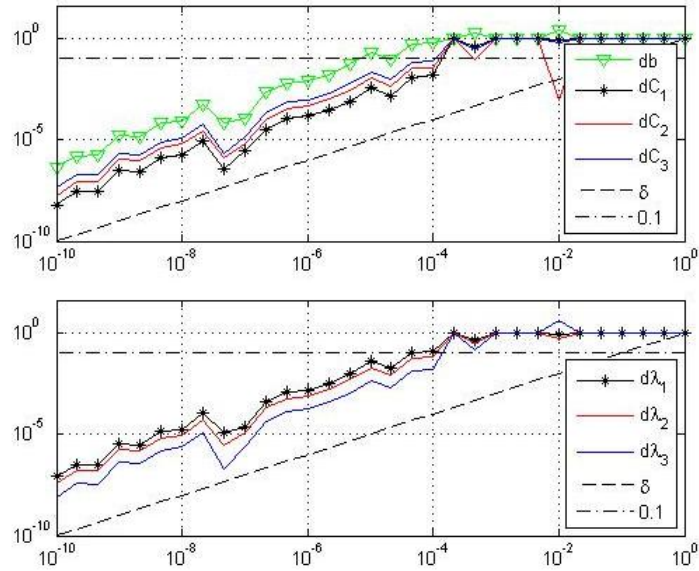


Figure 2.7: Errores relativos para el tercer modelo, correspondientes a un ruido Rician

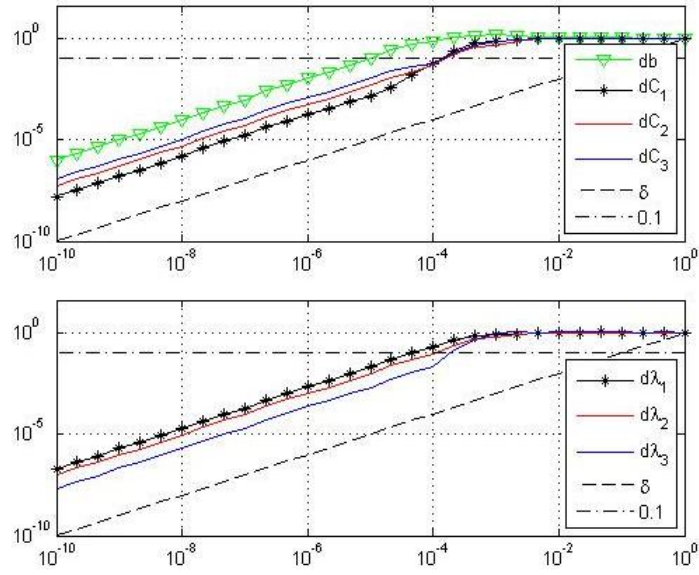


Figure 2.8: Promedio de los errores relativos, después de 100 corridas, para el tercer modelo y correspondientes a un ruido Rician

Números de condición

	$\eta_G$	$\eta_D$	$\hat{\eta}_B$
modelo 1	16.88724660783	2.22604845378	53.04339947209
modelo 2	130.20508573840	1.54342570227	397.12140292138
modelo 3	184.8409648621	4.7771637988	269.0372904019

## Capítulo 3

# Filtros en el dominio de las ondículas para la disminución de ruido en imágenes de resonancia magnética

El ajuste exponencial dado por el modelo (1) es un problema mal condicionado, esto quiere decir que errores relativamente pequeños en los datos pueden ocasionar grandes variaciones en los correspondientes parámetros lineales y no lineales. Por esta razón se requiere un filtro que permita disminuir el ruido en las imágenes, antes de aplicar cualquiera de los métodos existentes para ajuste exponencial de datos. De forma particular, en el capítulo anterior, hemos tratado con las fuentes de inestabilidad al utilizar la variante del método Prony.

En la literatura existen diferentes filtros propuestos para imágenes de resonancia magnética; nosotros hacemos una modificación del filtro elaborado por Kazubek [15], y obtenemos un filtro en el dominio de las ondículas para la disminución de ruido, procurando mantener el tiempo de cómputo bajo.

### 3.1 Implementación de filtros en el dominio de las ondículas para imágenes de resonancia magnética

Consideremos una imagen en tonos de gris  $f$ , y sea  $f(x, y)$  la intensidad de gris correspondiente al píxel dado por las coordenadas  $(x, y)$ . La transformada de ondículas discreta de  $f$  puede verse como una descomposición de  $f$  en dos funciones (imágenes)

$$f(x, y) \approx \mathbf{F}_s(x, y) + \mathbf{F}_w(x, y), \quad (34)$$

donde  $\mathbf{F}_s$  es una representación de  $f$  en términos de traslaciones y reescalamientos de una función  $\phi(x, y)$ , que se designa función de escala, y  $\mathbf{F}_w$  es una representación de  $f$  en términos de traslaciones y reescalamientos de una función  $\psi(x, y)$ , que se designa función de onda; los coeficientes que determinan las componentes  $\mathbf{F}_s$  y  $\mathbf{F}_w$  son llamados coeficientes de escala y coeficientes de onda, respectivamente. Una vez que se han escogido  $\phi(x, y)$  y  $\psi(x, y)$ ,  $\mathbf{F}_s$  y  $\mathbf{F}_w$  están determinadas unívocamente por los coeficientes, por esta razón se afirma que la

transformada discreta de ondículas de  $f$  está conformada por los dos conjuntos de coeficientes. Los coeficientes de escala generan una aproximación en baja resolución de la imagen mientras que los coeficientes de onda permiten obtener una reconstrucción de los detalles.

La información disponible acerca de la transformada discreta de ondículas, tanto en el aspecto teórico como computacional, es amplia; nosotros presentamos una descripción que tiene como objetivo señalar aquellos puntos relevantes en el diseño de filtros para imágenes en el dominio de las ondículas. Al considerar una imagen ruidosa y su transformada discreta de ondículas, se puede suponer que el ruido inherente a la imagen está determinado por el ruido asociado a los coeficientes de escala y de onda. Un proceso de filtrado para imágenes en el dominio de las ondículas comprende dos pasos: uno para reducción de ruido en los coeficientes de escala y otro que realiza la misma tarea sobre los coeficientes de onda. La imagen filtrada es el resultado de aplicar la transformada inversa de ondículas sobre los coeficientes modificados. Las diferencias entre filtros de esta naturaleza está en los algoritmos aplicados sobre cada uno de los dos conjuntos de coeficientes, podemos citar por ejemplo [2], [3], [4], [13], [15], [17], [21], [22] y [28].

Aunque el ruido en las imágenes de resonancia magnética proviene de varias fuentes, nosotros consideramos que la alteración en la magnitud de una imagen sigue una distribución Rice, [10], [22]. Kazubek considera que la aproximación dada por los coeficientes de escala contiene una mayor cantidad de la energía utilizada en la generación de la imagen y por esta razón propone un proceso de filtrado sobre los coeficientes de escala, asumiendo que en ellos está presente la naturaleza Rice del ruido en la imagen inicial. Para los coeficientes de onda seguimos la hipótesis de varios autores que de acuerdo con experimentos numéricos consideran que el ruido en los coeficientes de onda sigue, de forma aproximada, una distribución Gaussiana; por esta razón puede realizarse una disminución satisfactoria del ruido en los coeficientes de onda mediante la aplicación de un filtro tipo Wiener, ver por ejemplo [4], [17] y [22].

Una de las características representativas de un ruido Rice es que la media aritmética de una variable aleatoria que sigue esta clase de distribución, es un estimador sesgado del valor sin ruido. En la sección que sigue a continuación se presentan una descripción breve del ruido Rice y una fórmula para la reducción del sesgo entre el valor sin ruido y la media aritmética, esta fórmula se usará posteriormente sobre los coeficientes de escala, para reducir el sesgo.

## 3.2 Remoción del sesgo para datos que siguen una distribución Rice

En una imagen de resonancia magnética la intensidad de gris que corresponde a un determinado píxel es la magnitud de una función a valores complejos cuyas componentes real e imaginaria se distribuyen como variables aleatorias gaussianas con la misma desviación estándar. Los diferentes filtros para disminución de ruido en imágenes de resonancia magnética pueden ser divididos en tres clases: algunos métodos actúan sobre las componentes real e imaginaria, la mayoría de métodos propuestos actúan sobre el cuadrado de la magnitud, y finalmente están los métodos que actúan sobre la magnitud de la imagen compleja. Nosotros estamos interesados en esta última clase de filtros, debido a que nuestros datos son en magnitud.

En [15] Kazubek implementa un filtro en el dominio de las ondículas que actúa sobre la magnitud de la imagen compleja y tiene como puntos relevantes, entre otros, el uso del sistema de Haar de funciones ortogonales en la transformada discreta de ondículas y una fórmula

que actúa sobre los coeficientes de escala, y que permite obtener una disminución del sesgo discutido en la sección anterior.

En esta sección presentamos un análisis detallado de la fórmula para la remoción del sesgo propuesta por Kazubek, y proponemos una modificación de su algoritmo mediante la aplicación del Filtro Bilateral [30].

Sean  $A_1$  y  $A_2$  los valores medios de dos variables aleatorias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente, que son las componentes real e imaginaria de una imagen compleja. Si  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se distribuyen como gaussianas con desviación estándar  $\sigma$ , entonces la función de densidad de probabilidad de la magnitud de la imagen es la distribución Rice dada por

$$p_\mu(\mu|A) = \frac{\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{\mu^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{A\mu}{\sigma^2}\right),$$

donde  $I_0$  es la función modificada de Bessel de primera clase y orden cero,  $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$  y  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  es el valor de la magnitud libre de ruido. Sea  $m$  el valor esperado de  $\mu$ , entonces

$$\frac{m}{\sigma} = v(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) I_0\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} I_1\left(\frac{x^2}{4}\right) \right] e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad (35)$$

donde  $x = \frac{A}{\sigma}$  e  $I_1$  es la función modificada de Bessel de primera clase y de primer orden, [22]. Sea  $z = \frac{m}{\sigma}$ . La idea detrás del método de remoción del sesgo que se detalla a continuación, radica en que las cantidades  $m$  y  $\sigma$  en (35) se pueden estimar a partir de los datos, en este caso una imagen de resonancia magnética. Luego, si disponemos de una fórmula para la inversa de la función  $v(x)$  entonces se puede obtener de forma aproximada el valor de la magnitud libre de ruido:  $A \approx \sigma v^{-1}(z)$ .

A continuación obtenemos una aproximación numérica de la inversa de la función  $v(x)$ ,  $v^{-1}(z)$ , con  $x \in [0, 50]$ . Como  $0 < x \leq 50$  implica  $-\infty < 20 \log_{10} x < 20 \log_{10} 50 \approx 33.98$  entonces esta función inversa corresponde a una señal cuya medición de ruido se extiende desde  $-\infty$  a 34 dB (decibelios). Nowak [22] sugiere que una señal cuya medición de ruido es mayor que 10 dB, corresponde a una imagen ruidosa cuya distribución Rice puede ser aproximada por una Gaussiana; por esta razón Kazubek propone un filtro para imágenes de resonancia magnética que tiene en cuenta la inversa de la función  $v(x)$  cuando la medición de la señal es menor o igual que 34 dB y que realiza un tratamiento para ruido Gaussiano en caso contrario.

Las funciones de Bessel  $I_0$  e  $I_1$  satisfacen  $I_0' = I_1$  luego

$$v'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[ \frac{3x}{2} I_1\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x}{2} I_0\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^3}{4} I_1'\left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^3}{4} I_0'\left(\frac{x^2}{4}\right) \right].$$

Las expansiones en series de potencias de las funciones  $I_0, I_1$  e  $I_1'$  son

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k (k!)^2}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4^k k! (k+1)!}$$

$$I_1'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{4^k k! (k+1)!}.$$

Luego

$$\begin{aligned} v'(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[ \frac{3x}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{4^{3k+1} k! (k+1)!} + \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4^{3k} (k!)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{x^3}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{4k}}{4^{3k} k! (k+1)!} - \frac{x^3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4^{3k} (k!)^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[ \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{4^{3k+1} k! (k+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4^{3k} (k!)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{4k+3}}{4^{3k} k! (k+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{4^{3k} (k!)^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4^{3k} (k!)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{3}{16(k+1)} + \frac{2k+1}{8(k+1)} - \frac{1}{4} \right) \frac{x^{4k+3}}{4^{3k} (k!)^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{2(64^k)(k!)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{16(k+1)(64^k)(k!)^2} \right]. \end{aligned}$$

De lo cual se concluye que  $v'(0) = 0$  y  $v'(x) > 0$  para  $x > 0$ .

La función  $e^{-\frac{x^2}{4}} I_0(-\frac{x^2}{4})$  es acotada y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4}} I_0(-\frac{x^2}{4})}{x} = 0. \quad (36)$$

De otra parte si  $x \geq 3.75$  entonces

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_0(x) &= 0.39894228 + 0.01328592\left(\frac{3.75}{x}\right) + 0.00225319\left(\frac{3.75}{x}\right)^2 - \dots \\ &\quad + 0.00392377\left(\frac{3.75}{x}\right)^8 + \epsilon_1 \quad y \\ x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_1(x) &= 0.39894228 - 0.03988024\left(\frac{3.75}{x}\right) - 0.00362018\left(\frac{3.75}{x}\right)^2 \dots \\ &\quad - 0.00420059\left(\frac{3.75}{x}\right)^8 + \epsilon_2, \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_1 \leq 1.9(10)^{-7}$  y  $\epsilon_2 \leq 2.2(10)^{-7}$ . Esta representación polinomial se puede consultar en el texto de Abramowitz-Stegun, [1], página 378.

Luego si  $x \geq \sqrt{15}$  entonces  $\frac{x^2}{4} \geq 3.75$  y por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}I_0\left(\frac{x^2}{4}\right) &= \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}I_0\left(\frac{x^2}{4}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2}\left(0.39894228 + 0.01328592\left(\frac{15}{x^2}\right) + 0.00225319\left(\frac{15}{x^2}\right)^2 - \dots \right. \\ &\quad \left. + 0.00392377\left(\frac{15}{x^2}\right)^8 + \epsilon_1\right). \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}I_0\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x} = \frac{0.39894228 + \epsilon_1}{2}. \quad (37)$$

De forma similar se prueba que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}I_1\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x} = \frac{0.39894228 + \epsilon_2}{2}. \quad (38)$$

El cociente  $\frac{v(x)}{x}$  puede escribirse como

$$\frac{v(x)}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}I_0\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x} + 2 \frac{\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}I_0\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x} + 2 \frac{\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}I_1\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x} \right] \quad (39)$$

De las igualdades (36), (37), (38) y (39) se sigue que

$$L := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(0.79788456 + \epsilon_1 + \epsilon_2) \approx 0.999999 + |E_r|,$$

donde

$$|E_r| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1.9 + 2.2)(10)^{-7} \approx 5.1386(10)^{-7}.$$

Lo anterior muestra que  $v(x)$  se comporta de manera similar a la función

$$H(x) = \sqrt{L^2x^2 + v(0)^2}.$$

Tenemos  $H(0) = v(0)$ ,  $H'(0) = v'(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H(x)}{x} = L$  y  $H'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ , y un cálculo directo muestra que

$$H^{-1}(z) = \sqrt{\frac{z^2}{L^2} - \frac{v(0)^2}{L^2}}.$$

La función  $H^{-1}(z)$  es un caso particular de la función más general:  $\sqrt{az^2 + b}$  con  $a > 0$  y  $b < 0$ .

La idea de obtener una aproximación numérica a  $v^{-1}(z)$  consiste en considerar una función  $\Phi(z)$  tal que

$$F(z) = \sqrt{az^2 + b + \Phi(z)} \tag{40}$$

y su derivada satisfagan las mismas características asintóticas de  $v^{-1}(z)$  y  $[v^{-1}]'(z)$ , respectivamente.

Sean  $c < 0$  y  $d < 0$ ; si se define  $\Phi(z) = ce^{dz}$  entonces

$$F'(z) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{z} = \sqrt{a} < \infty.$$

$H_1(z) = az^2$  es una función monótona creciente en el intervalo  $[0, \infty)$  con  $H_1(0) = 0$ . La función  $H_2(z) = -b - ce^{dz}$  toma valores positivos y es monótona decreciente en el mismo intervalo. Entonces existe una única raíz positiva,  $z_0$ , de

$$az^2 = -(b + ce^{dz})$$

y además para  $z \geq z_0$  se tiene

$$\begin{aligned} az^2 + b + ce^{dz} &\geq az_0^2 + b + ce^{dz} \\ &\geq az_0^2 + b + ce^{dz_0} = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que  $[z_0, \infty)$  es el dominio de

$$F(z) = \sqrt{az^2 + b + ce^{dz}} \tag{41}$$

con

$$F(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow z_0^+} F'(z) = \infty.$$

Para determinar los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  se realiza un ajuste en mínimos cuadrados a la curva  $F(z)$  discretizada por  $x_j = j(0.1)$  y  $z_j = v(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, 500$ . Este problema se puede resolver numéricamente usando la función *lsqcurvefit* de MATLAB. Se pueden seleccionar los valores iniciales  $[a_0, b_0, c_0, d_0]$  considerando  $a_0 = \frac{1}{L^2} \approx 1$ ,  $b_0$  relativamente cercano a  $-\frac{v(0)^2}{L^2} \approx \frac{-\pi}{2} \approx -1.57$  y las cantidades negativas  $c_0$  y  $d_0$ , tales que  $0.5 < -d_0e^{c_0} < 1$ . Al escoger los valores iniciales  $[a_0, b_0, c_0, d_0] = [1, -1, -2, -1]$  se obtiene la siguiente solución óptima:  $a = 1.0000108$ ,  $b = -1.0122372$ ,  $c = -2.7102422$  and  $d = -1.2598921$ .

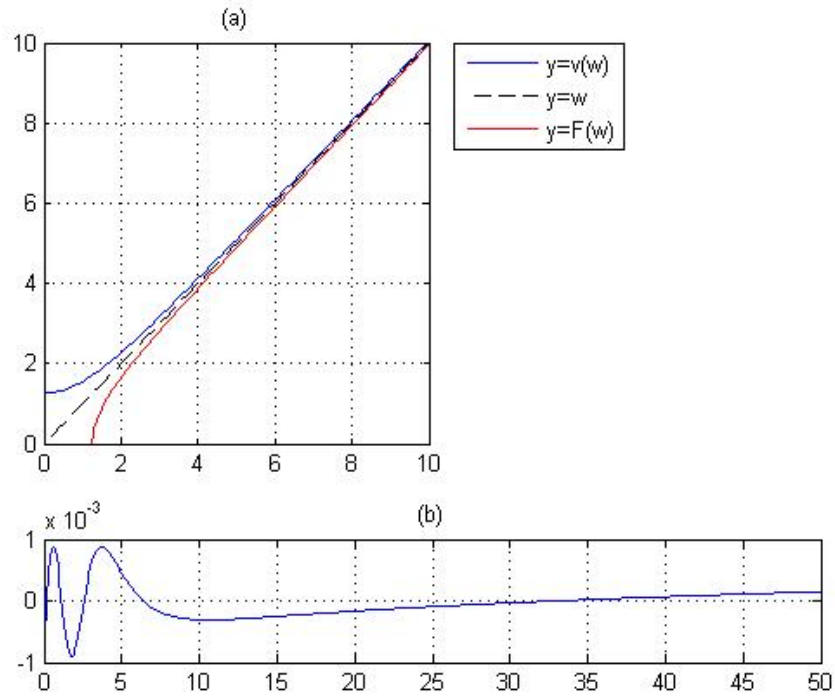


Figure 3.1: La figura superior muestra la función  $F$  como una aproximación numérica de  $v^{-1}$ . En la parte inferior se muestra una gráfica de la función  $x_j - F(z_j)$ .

La perturbación producida por el ruido en imágenes de resonancia magnética es cuantificada usualmente por la cantidad "signal to noise ratio", (SNR) por sus siglas en inglés. Dadas dos imágenes en niveles de gris, una imagen de referencia  $r(x, y)$  y una imagen ruidosa  $t(x, y)$ , de dimensiones  $n_x n_y$ , la cantidad  $SNR(r, t)$  está dada por

$$SNR(r, t) = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_1^{n_x} \sum_1^{n_y} [r(x, y)]^2}{\sum_1^{n_x} \sum_1^{n_y} [r(x, y) - t(x, y)]^2} \right).$$

Nowak [22], sugiere que una medida SNR mayor que 10 dB corresponde a imágenes ruidosas cuya distribución Rice puede ser aproximada por una gaussiana. Como la fórmula (41) es válida cuando la cantidad SNR es menor o igual que 34 dB, entonces se propone un procedimiento para remoción de ruido Rice que usa la función inversa discutida en esta sección cuando la cantidad SNR es menor o igual que 34 dB y que en el caso contrario utiliza un filtro simple para ruido gaussiano, en el dominio de las ondículas.

### 3.3 Implementación de un nuevo filtro en el dominio de las ondículas para imágenes de resonancia magnética

#### 3.3.1 Fórmula para los coeficientes de escala

La componente  $\mathbf{F}_s(x, y)$  en la ecuación (34) es una combinación lineal de funciones que pertenecen a una familia específica de funciones ortogonales. Cada coeficiente de escala depende de tres parámetros:  $L$ , que es el nivel de descomposición considerado en la transformada discreta de ondículas, y la pareja  $(k_1, k_2)$  que caracteriza el soporte de la función ortogonal a la cual corresponde el coeficiente de escala. Sea  $f(x, y)$  como en (34); al aplicar la transformada discreta de ondículas usando el sistema Haar de funciones ortogonales se obtiene la siguiente fórmula para los coeficientes de escala  $c_{L,k_1,k_2}$ , cuyos detalles pueden consultarse en [32].

$$c_{L,k_1,k_2} = \frac{1}{2^L} \sum_{i=0}^{2^L-1} \sum_{j=0}^{2^L-1} f(k_1 2^L + i, k_2 2^L + j). \quad (42)$$

#### 3.3.2 Filtro tipo Wiener para los coeficientes de onda

Los coeficientes de onda, como los de escala, dependen de tres parámetros  $l, k_1$  y  $k_2$ , siendo  $1 \leq l \leq L$ . En este caso, por simplicidad, podemos escribir  $d = d_{l,k_1,k_2}$ . Al considerar que el ruido presente en los coeficientes de onda se distribuye como una gaussiana, es posible atenuar la contribución de tales coeficientes mediante la ecuación

$$\hat{d} = \alpha_d d \quad 0 \leq \alpha_d \leq 1. \quad (43)$$

De acuerdo con Nowak, se puede asumir que el valor medio del coeficiente de onda es un estimador no sesgado del valor del coeficiente no ruidoso. Sea  $\delta = E[d]$  el valor medio del coeficiente de onda. El parámetro  $\alpha_d$  en (43) es escogido minimizando  $E[(\delta - \alpha_d d)^2]$ . En efecto, si  $\sigma_d^2$  es la varianza del coeficiente de onda, entonces

$$E[(\delta - \alpha_d d)^2] = \delta^2 - 2\alpha_d \delta^2 + \alpha_d^2 E[d^2] = \delta^2 - 2\alpha_d \delta^2 + \alpha_d^2 (\sigma_d^2 + \delta^2),$$

de donde  $\alpha_d$  está definido por

$$\alpha_d = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \sigma_d^2}.$$

Sea  $\sigma_*^2$  un estimativo de  $\sigma_d^2$ , luego

$$\alpha_d \approx \alpha_* = \frac{E[d^2] - \sigma_*^2}{E[d^2]}.$$

Usualmente el parámetro  $\sigma_*^2$  es aproximado por  $\sigma_*^2 \approx \tau \sigma^2$ , donde  $\tau \geq 1$  es un nuevo parámetro escogido para cada imagen y  $\sigma$  es la desviación estándar definida en la sección 3.2; el valor  $\tau = 2$  resulta ser conveniente, como se muestra en [22], [17] y [4].

Finalmente el filtro en (43), está definido por

$$\alpha_d = \left( \frac{E[d^2] - 2\sigma^2}{E[d^2]} \right)_+ = \begin{cases} \frac{E[d^2] - 2\sigma^2}{E[d^2]} & \text{si } E[d^2] > 2\sigma^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (44)$$

### 3.3.3 Filtro Bilateral

El filtro bilateral es un filtro no lineal para imágenes, propuesto por Tomasi y Manduchi [30], que recupera exitosamente los contornos originales de una imagen a partir de una imagen ruidosa. Consideremos una imagen en tonos de gris,  $I$ , y sean  $\mathbf{x}$  la posición (coordenadas) de un píxel e  $I(\mathbf{x})$  su correspondiente intensidad. El filtro bilateral toma una suma con pesos sobre los píxeles en una vecindad alrededor de  $\mathbf{x}$ ,  $N_{\mathbf{x}}$ . Estos pesos dependen de dos cantidades: la distancia espacial y la intensidad en cada píxel de la vecindad. La acción del filtro bilateral sobre la imagen está dada por:

$$\tilde{I}(\mathbf{x}) = \frac{1}{C} \sum_{\mathbf{y} \in N_{\mathbf{x}}} W_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) W_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I(\mathbf{y}),$$

donde

$$W_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp \frac{-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2\rho_d^2}$$

$$W_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp \frac{-|I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{y})|^2}{2\rho_r^2}, \text{ y}$$

$$C = \sum_{\mathbf{y} \in N_{\mathbf{x}}} W_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) W_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

El desempeño del filtro bilateral depende de la escogencia de los parámetros  $\rho_d$ ,  $\rho_r$ , y del tamaño de la vecindad  $N_{\mathbf{x}}$ . Para parámetros escogidos convenientemente y píxeles en la imagen alejados de un borde, el filtro bilateral se comporta como un filtro estándar.

Si un píxel  $\mathbf{x}$  está localizado justamente sobre el borde que separa dos regiones de la imagen, el término  $W_R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es cercano a 1 si  $I(\mathbf{x})$  es aproximadamente igual a  $I(\mathbf{y})$ , y es cercano a cero si las intensidades  $I(\mathbf{x})$  e  $I(\mathbf{y})$  presentan grandes diferencias, así el filtro tiende a preservar la intensidad en el píxel, debido al efecto de las componentes  $W_R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

En este trabajo aplicamos el filtro bilateral sobre el arreglo bidimensional conformado por los coeficientes de escala  $I(\mathbf{k}) = I(k_1, k_2) = c_{L, k_1, k_2}$ . Para la selección de los parámetros seguimos Anand et al., [3], escogemos como la vecindad de  $\mathbf{x}$  la matriz de tamaño  $15 \times 15$  con centro en  $\mathbf{x}$ ,  $\rho_d = 5$  y  $\rho_r = 1.5\sigma$ , siendo  $\sigma$  la desviación estándar definida en la sección 3.

### 3.3.4 Algoritmo para la disminución del ruido en imágenes de resonancia magnética

Sea  $I = I(\mathbf{u})$  una imagen de resonancia magnética alterada por cierto nivel de ruido Rice. El proceso que implementamos para la reducción del ruido consiste en adicionar la acción del filtro bilateral al filtro previamente elaborado por Kazubek; el procedimiento puede explicarse mediante el siguiente algoritmo.

1. Se calcula de forma aproximada la varianza,  $\sigma^2$ , que corresponde a la desviación estándar definida en la sección 3.2. Esta aproximación se realiza escogiendo una vecindad rectangular  $N_\eta$  de dimensiones  $q_1 \times q_2$  contenida en el fondo ruidoso de la imagen, es decir en una región de aire, vacía, ubicada fuera del paciente, [22]:

$$\sigma^2 \approx \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2q_1 q_2} \sum_{\mathbf{u} \in N_\eta} [I(\mathbf{u})]^2.$$

2. Se aplica sobre la imagen la transformada discreta de ondículas de nivel  $L = 3$  usando el sistema de Haar de funciones ortogonales.
3. Se realiza un proceso de reducción de ruido sobre los coeficientes de escala:  
De la ecuación (42) vemos que

$$\frac{1}{2^L} c_{L,k_1,k_2}$$

es una aproximación del valor esperado  $m$  en (35); luego

$$z_N = \frac{1}{\tilde{\sigma} 2^L} c_{L,k_1,k_2}$$

es una aproximación de la variable  $z$  definida en la sección 3.2. De las ecuaciones (35) y (41), se sigue que

$$\frac{x}{\tilde{\sigma}} \approx F(z_N).$$

Finalmente se calculan los nuevos coeficientes de escala  $\bar{c}_{L,k_1,k_2}$  mediante la fórmula

$$\bar{c}_{L,k_1,k_2} = \tilde{\sigma} 2^L F(z_N)$$

4. Se aplica el filtro bilateral sobre el arreglo bidimensional  $J(k_1, k_2)$ , dado por los nuevos coeficientes de escala:  $J(k_1, k_2) = \bar{c}_{L,k_1,k_2}$ .
5. Se obtiene una imagen provisional,  $I_N$ , calculando la inversa de la transformada discreta de ondículas sobre los nuevos coeficientes de escala y los coeficientes no modificados de onda.
6. Se aplica sobre  $I_N$  la transformada discreta de ondículas de nivel  $L = 4$ , usando el sistema de Daubechies de funciones con cuatro momentos evanescentes, (Daubechies System with four vanishing moments).
7. Se realiza un proceso de reducción de ruido sobre los coeficientes de onda obtenidos en el paso anterior, usando las ecuaciones (43) y (44).
8. Finalmente se obtiene una imagen filtrada, calculando la inversa de la transformada discreta de ondículas sobre los nuevos coeficientes de onda, obtenidos en la etapa 7 de este algoritmo, y los coeficientes de escala obtenidos en la etapa 6.

El sistema de Haar es apropiado para la corrección del sesgo, si embargo de acuerdo con Kazubek, no es óptimo para efectos de reducción del ruido, siendo más conveniente para ello el sistema de funciones de Daubechies con cuatro momentos evanescentes. Con respecto al nivel de la transformada discreta de ondículas se ha observado que los coeficientes de escala en una descomposición de nivel mayor que  $L = 4$  tienen un efecto de suavización sobre las imágenes, que se manifiesta en la observación de bordes borrosos.



Figure 3.2: Imagen sintética, generada con MATLAB.

### 3.4 Validación del filtro mediante imágenes sintéticas

En esta sección se hace una comparación entre el desempeño del filtro originalmente elaborado por Kazubek y la versión modificada. Esta comparación se realiza usando una imagen sintética disponible en MATLAB, y se generan imágenes ruidosas adicionando ruido Rice a la imagen sintética. El ruido fué generado mediante la ecuación

$$J_e(m, n) = \sqrt{(J(m, n) + e_1)^2 + e_2^2}, \quad (45)$$

donde  $J(m, n)$  es el valor sin ruido y  $e_1$  y  $e_2$  son números aleatorios que corresponden a una distribución gaussiana con media cero y desviación estándar  $\sigma$ . Es importante señalar que los niveles de gris en la imagen están entre 0 y 88. Se usan cinco niveles de  $\sigma$ ,  $\sigma = [1, 2, 5, 8, 12]$ . Se consideraron los cinco índices que aparecen con más frecuencia en la literatura, para comparar el desempeño de los filtros: *signal to noise ratio (SNR)*, *peak signal to noise ratio (PSNR)*, *root mean square error (RMSE)*, *mean absolute error (MAE)* y *the structural similarity index (SSIM)*. Dadas dos imágenes de dimensiones  $n_x n_y$ , una imagen de referencia  $r(x, y)$  y una segunda imagen  $t(x, y)$  que puede verse como una perturbación de la primera; las cantidades PSNR, RMSE y MAE están dadas por

$$PSNR(r, t) = 10 \log_{10} \left( \frac{n_x n_y \max[r(x, y)]^2}{\sum_1^{n_x} \sum_1^{n_y} [r(x, y) - t(x, y)]^2} \right)$$

$$RMSE(r, t) = \sqrt{\frac{1}{n_x n_y} \sum_1^{n_x} \sum_1^{n_y} [r(x, y) - t(x, y)]^2}$$

$$MAE(r, t) = \frac{1}{n_x n_y} \sum_1^{n_x} \sum_1^{n_y} |r(x, y) - t(x, y)|.$$

La cantidad *structural similarity index* en una región  $\Omega$  se calcula mediante la siguiente expresión

$$SSIM_{\Omega}(r, t) = \frac{(2\mu_t\mu_r + c_1)(2\theta_{r,t} + c_2)}{(\mu_r^2 + \mu_t^2 + c_1)(\theta_r^2 + \theta_t^2 + c_2)},$$

donde  $\mu_r$  y  $\mu_t$  son los promedios sobre  $\Omega$  de  $r$  y  $t$  respectivamente,  $\theta_r$  y  $\theta_t$  son las correspondientes varianzas,  $\theta_{r,t}$  es la covarianza de  $r$  y  $t$ , y las constantes  $c_1$  y  $c_2$  están dadas por  $\sqrt{c_1} = 0.01(255) = 2.55$  y  $\sqrt{c_2} = 0.03(255) = 7.65$ , ver [33]. Si la imagen se divide en  $s$  regiones,  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ , el índice SSIM para las dos imágenes  $r(x, y)$  y  $t(x, y)$  se define como

$$SSIM(r, t) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s SSIM_{\Omega_j}(r, t).$$

El valor de esta magnitud es un número entre -1 y 1, llegando a 1 solamente en el caso de dos imágenes idénticas. Las cantidades SNR, PSNR, RMSE y MAE se usan con frecuencia en imágenes de resonancia magnética y en otras aplicaciones en imágenes digitales, para cuantificar la diferencia entre dos imágenes; sin embargo, en el área de imágenes digitales un resultado cuantitativo puede no ser consistente con la percepción visual. La cantidad SSIM se ha convertido en una forma conveniente de comparar dos imágenes cuando magnitudes como PSNR y RMSE muestran resultados que no concuerdan con la percepción del ojo humano. Los resultados se muestran en cinco tablas, una por cada cantidad en consideración. La primera fila de cada tabla hace referencia a la imagen ruidosa, variando los diferentes valores para  $\sigma$ . La segunda fila corresponde a la imagen filtrada usando el algoritmo de Kazubek y la tercera corresponde a la imagen filtrada usando el filtro modificado. Para cada nivel de  $\sigma$  la modificación propuesta al algoritmo de Kazubek tiene un mejor desempeño con respecto al algoritmo original, usando todos los criterios para medir el error. La respuesta de cada filtro es casi indistinguible en los casos  $\sigma = 1, 2$  y se obtiene una mejor imagen cuando el nivel de ruido aumenta a  $\sigma = 5, 8$  y  $12$ .

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	29.77391	23.7840	16.0170	12.0372	8.9663
algoritmo de Kazubek	33.7311	27.9346	20.4575	17.0542	14.1045
modificación al algoritmo de Kazubek	34.0501	28.3961	21.4209	18.0140	15.3410

Table 3.1: SNR(r,t) entre la imagen original y la imagen filtrada.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	37.2277	31.5732	24.4287	21.4391	18.5411
algoritmo de Kazubek	41.1923	35.7037	28.6968	25.4961	22.6839
modificación al algoritmo de Kazubek	41.5063	36.1647	29.7469	26.9269	24.5610

Table 3.2: PSNR(r,t) entre la imagen original y la imagen filtrada.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	1.2495	2.4935	6.1831	10.0105	14.9444
algoritmo de Kazubek	0.7914	1.5401	3.6277	5.3316	7.4354
modificación al algoritmo de Kazubek	0.7631	1.4618	3.2590	4.8087	6.5236

Table 3.3: RMSE(r,t) entre la imagen original y la imagen filtrada.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	1.0522	2.1056	5.2262	8.4441	12.6008
algoritmo de Kazubek	0.5491	1.0710	2.4354	3.5928	5.1168
modificación al algoritmo de Kazubek	0.5247	1.0195	2.2510	3.3490	4.6331

Table 3.4: MAE(r,t) entre la imagen original y la imagen filtrada.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	0.9094	0.7705	0.5543	0.4482	0.3640
algoritmo de Kazubek	0.9864	0.9567	0.8482	0.7489	0.6532
modificación al algoritmo de Kazubek	0.9878	0.9614	0.8636	0.7669	0.6775

Table 3.5: SSIM(r,t) entre la imagen original y la imagen filtrada.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	3.26 %	6.52%	16.25 %	26.16 %	39.17 %
algoritmo de Kazubek	2.11 %	3.99 %	9.38 %	14.41 %	19.47 %
modificación al algoritmo de Kazubek	2.05 %	3.79 %	8.57 %	13.05 %	17.31 %

Table 3.6: Error porcentual en el cálculo del RMSE entre las imágenes y la imagen sintética original

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 8$	$\sigma = 12$
errores originales	4.42 %	8.82%	22.07 %	35.37 %	52.94 %
algoritmo de Kazubek	2.37 %	4.44 %	10.55 %	16.26 %	21.11 %
modificación al algoritmo de Kazubek	2.30 %	4.23 %	10.00 %	15.26 %	19.48%

Table 3.7: Error porcentual en el cálculo del MAE entre las imágenes y la imagen sintética original



Figure 3.3: Arriba la imagen afectada por el ruido correspondiente a  $\sigma = 2$ . Abajo la imagen filtrada hallada mediante la modificación del filtro de Kazubek.

### 3.5 Desempeño del filtro sobre una imagen real de resonancia magnética

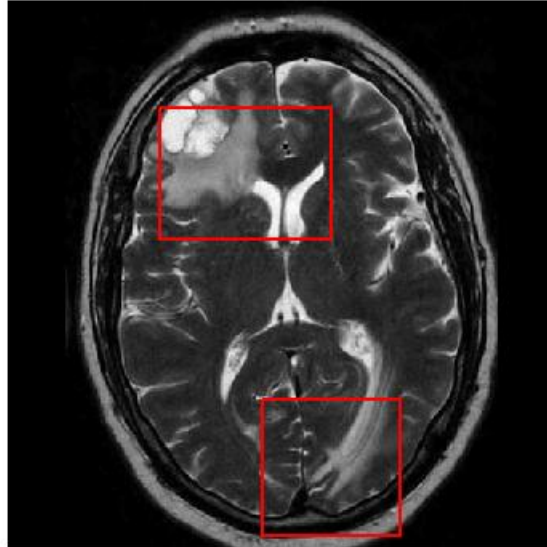


Figure 3.4: Imágen cerebral de resonancia magnética y dos regiones de interés seleccionadas.

La imagen cerebral que se muestra a continuación es una imagen real de resonancia magnética sobre la cual se aplicará el filtro que hemos explicado en esta sección, con el objetivo de apreciar su desempeño sobre imágenes que no provienen de simulaciones.<sup>1</sup> Al cuantificar las diferencias entre la imagen original y la imagen filtrada se obtienen los siguientes valores para la región demarcada en la parte superior

$$RMSE = 4.287 \quad MAE = 3.399 \quad SSIM = 0.938,$$

y para la región demarcada en la parte inferior

$$RMSE = 4.261 \quad MAE = 3.396 \quad SSIM = 0.947$$

---

<sup>1</sup>Agradezco al profesor Thomas M. Deserno de Uniklinik RWTH, Aachen, Alemania, por haber facilitado esta y otras imágenes clínicas.

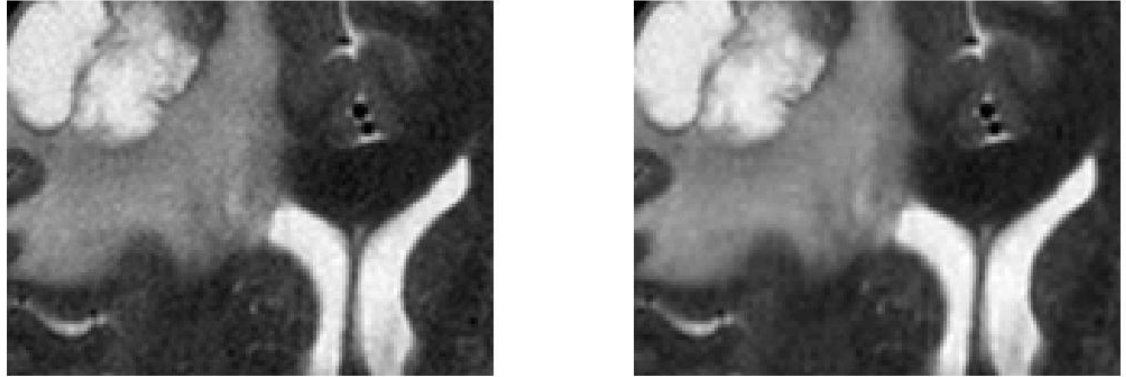


Figure 3.5: A la izquierda se muestra la región de interés en la imagen original. A la derecha se muestra la región en la imagen filtrada.

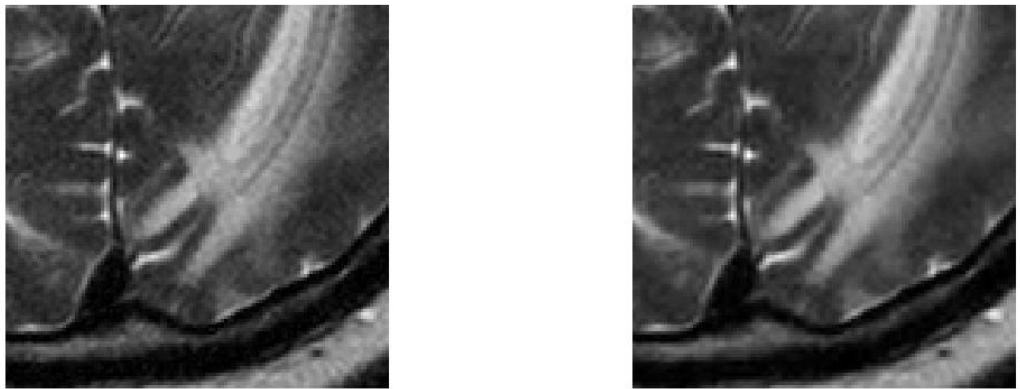


Figure 3.6: A la izquierda se muestra la región de interés en la imagen original. A la derecha se muestra la región en la imagen filtrada.

## Capítulo 4

# Resultados numéricos

En este capítulo se presentan resultados numéricos, referentes a la determinación de los parámetros lineales y no lineales del modelo (1), usando dos tipos de datos. Inicialmente se consideran imágenes reales y posteriormente imágenes sintéticas generadas mediante Brain-Web, [35]. En cada ejemplo se utiliza la variante del método Prony después de aplicar el filtro sobre cada una de las imágenes que conforman la sucesión de imágenes de resonancia magnética potenciadas en  $T_2$ .

### 4.1 Aplicación del método sobre imágenes potenciadas en $T_2$ reales de resonancia magnética.

Las imágenes que se proponen a continuación fueron utilizadas en un trabajo previo y servirán para comparar el desempeño de los algoritmos propuestos en este trabajo con respecto a los resultados reportados en [19]. Los imágenes potenciadas en  $T_2$  están conformados por una sucesión de ocho ecos, tomados con un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0.044$  segundos.

Para cada píxel en una región se aplica la variante del método Prony, para determinar los parámetros no lineales y lineales definidos en el modelo (1) con  $n = 8$  y  $\Delta T = 0.044$ . Este proceso se realiza para  $k = 1, 2, 3$  y se escogen para el píxel los parámetros que corresponden al menor residual. Para cada región de interés se construye un diagrama de frecuencias dividiendo el intervalo  $[0, 30]$  en 100 subintervalos de igual longitud,  $\varsigma_j = [\varsigma_j, \varsigma_{j+1}]$ ,  $1 \leq j \leq 100$ ; a este intervalo pertenecen todos los parámetros no lineales del modelo (1), como puede consultarse en [20]. Para todos los píxeles de una región de interés seleccionada y un determinado subintervalo  $\varsigma_j$ , se suman todos los parámetros lineales cuyos correspondientes parámetros no lineales están en  $\varsigma_j$ . Este procedimiento se realiza para  $1 \leq j \leq 100$ , para obtener un diagrama de frecuencias y cada diagrama se normaliza para obtener una función de densidad de probabilidad.

En la figura (4.1) se muestran el primer, tercer y quinto eco del conjunto de imágenes de resonancia magnética. La gráfica a la derecha de la figura (4.2) muestra los decaimientos en el nivel de intensidad que corresponden a los puntos indicados en la gráfica de la izquierda y que se han modelado mediante la ecuación (1). La premisa esencial es que decaimientos diferentes caracterizan tejidos de diferente naturaleza.

Las figura (4.3) y (4.4) muestran dos regiones seleccionadas, encerradas en cuadrados con borde rojo, que presentan una apariencia diferente y las correspondientes gráficas de las

funciones de densidad de probabilidad. Inicialmente se muestra el resultado aplicando la variante del método Prony sin filtro y posteriormente la obtenida al aplicar el filtro propuesto en este documento, sobre cada una de los ocho ecos, antes de aplicar la variante del método Prony. Se muestra como el algoritmo con el proceso de filtrado muestra mejor una diferencia en los tejidos que conforman cada una de las regiones seleccionadas.

De acuerdo con [19] y [20] puede verse una parte del cerebro afectada por un tejido tumoral, y otra parte que no muestra un deterioro visible. Llamamos ROI1 y ROI2 a la región de la lesión y la región de control, respectivamente. La figura 4.5 muestra el sexto eco de la secuencia considerada y las regiones ROI1 y ROI2. En la parte superior de la figura 4.6 aparece la solución obtenida en [19], la cual fué calculada mediante la variante del método Prony. La gráfica en el medio muestra el resultado usando nuestra implementación del método, en color rojo la función de densidad de probabilidad correspondiente a la región de control y el azul la correspondiente a la región de lesión. Las diferencias entre los dos pares de soluciones se deben a que nuestra implementación de la variante del método Prony reportado en [18] y [19] es más cuidadosa, comparada con la original, en la solución del sistema de ecuaciones (12); en particular se usa la descomposición en valores singulares de la matriz  $M^{(k)}$ , descartando aquellos valores singulares que son demasiado pequeños con respecto al primer valor singular. En la parte inferior de la figure 4.6 se muestran las curvas obtenidas al aplicar el filtro propuesto en este documento, sobre cada una de los ocho ecos, antes de aplicar el método Prony. El proceso de filtrado produce curvas con menos dispersión para la región ROI2 y con bordes un poco más suaves para la región ROI1.

método	ROI1	ROI2
Prony sin filtro	9.39 segundos	9.29 segundos
Prony con filtro	11.40 segundos	11.29 segundos

Table 4.1: Tiempo de cómputo en segundos requerido para el proceso de clasificación de tejidos.

En la tabla 4.1 se muestra el tiempo de cómputo requerido en el proceso de clasificación de tejidos, usando nuestra implementación de la variante del método Prony.

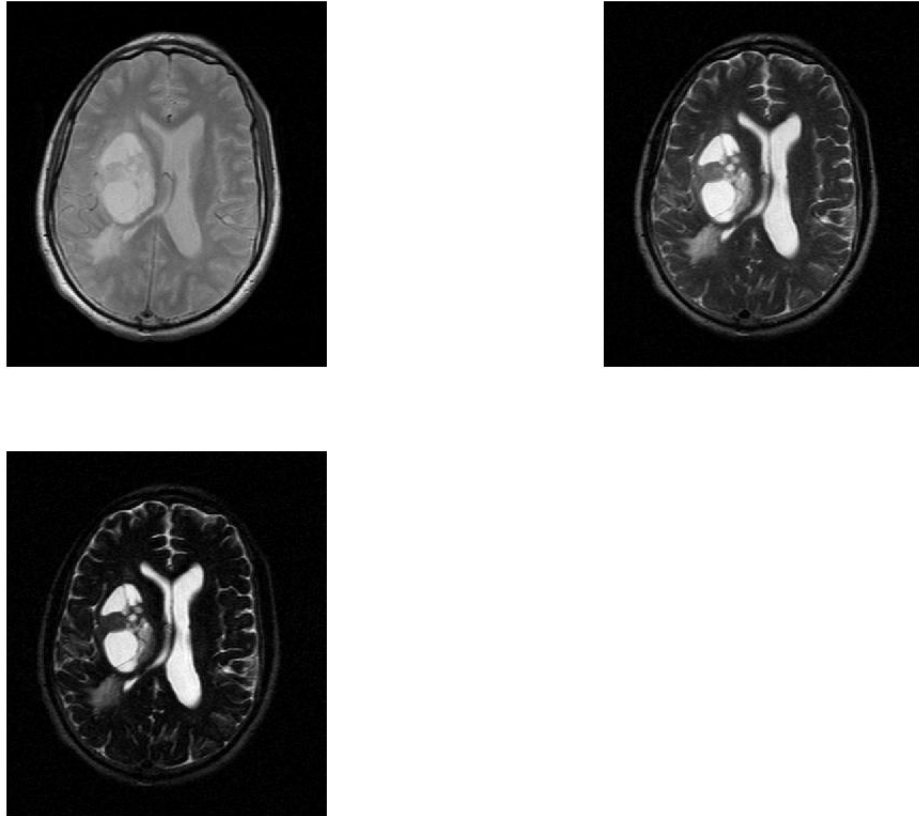


Figure 4.1: Arriba, a izquierda y derecha, el primer y tercer eco, respectivamente. Abajo el quinto eco.

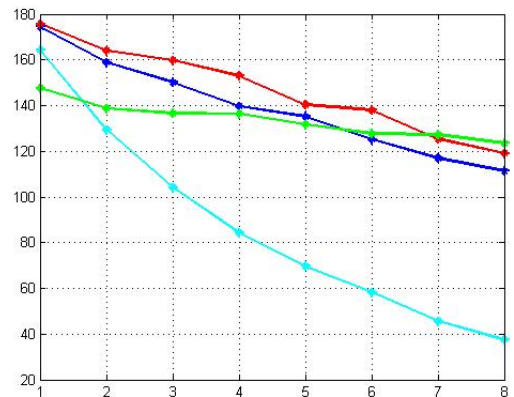
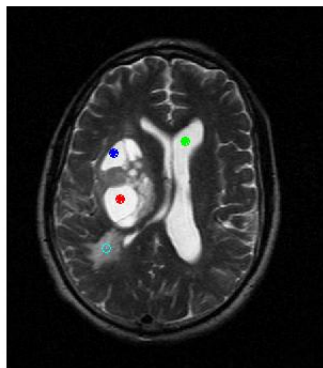


Figure 4.2: La gráfica a la derecha muestra los decaimientos en el nivel de intensidad, que corresponden a los puntos indicados en la gráfica de la izquierda.

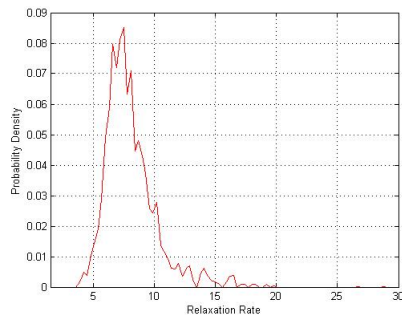
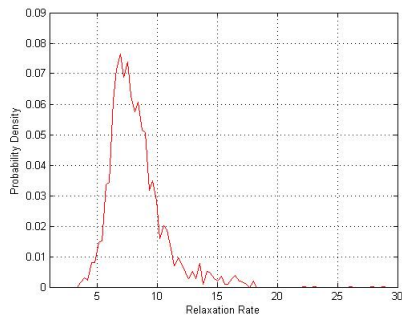
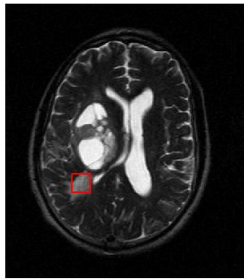


Figure 4.3: La región de interés se muestra en la parte superior. En la parte inferior izquierda está la gráfica obtenida al aplicar la variante del método Prony. En la parte inferior derecha se muestra la solución obtenida al aplicar el filtro, sobre los ecos, antes de usar la variante del método Prony.

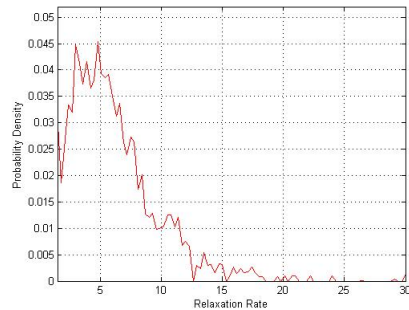
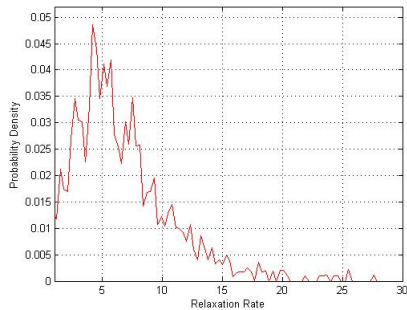
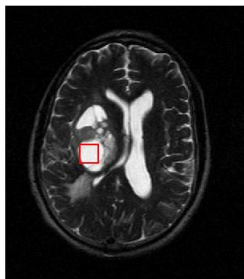


Figure 4.4: La región de interés se muestra en la parte superior. En la parte inferior izquierda está la gráfica obtenida al aplicar la variante del método Prony. En la parte inferior derecha se muestra la solución obtenida al aplicar el filtro, sobre los ecos, antes de usar la variante del método Prony.

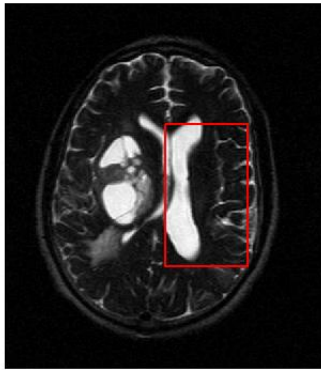
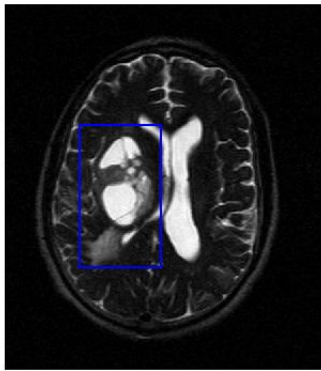


Figure 4.5: Imagen del sexto eco. Arriba la región ROI1 y abajo la región ROI2.

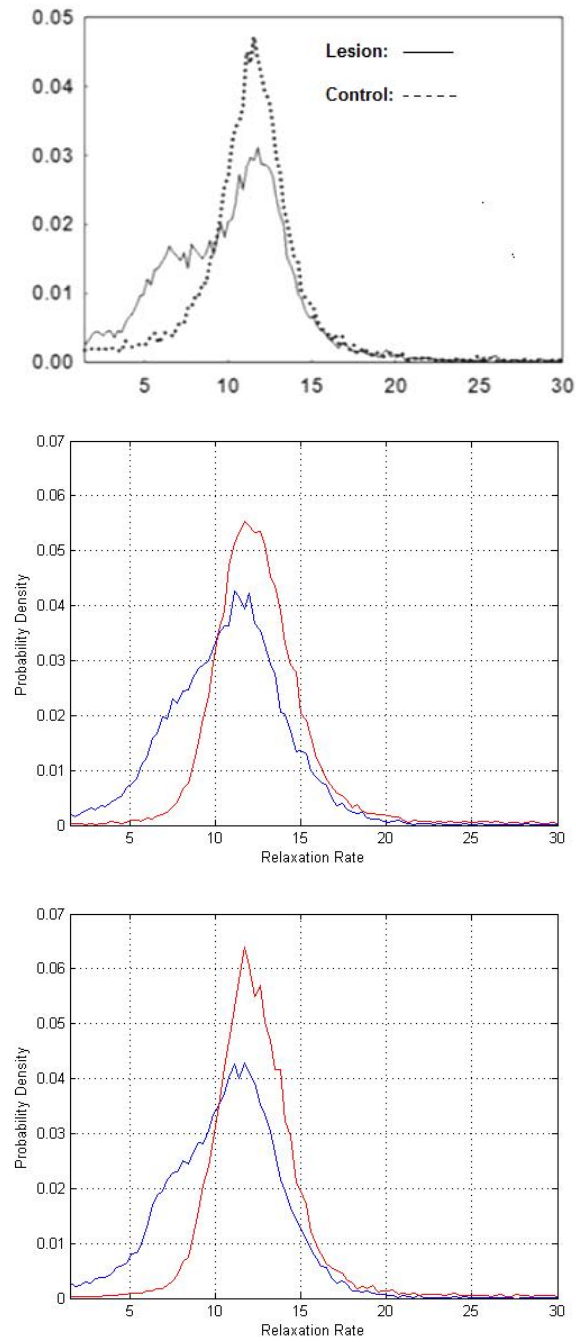


Figure 4.6: Funciones de densidad de probabilidad correspondientes a ROI1 y ROI2. Arriba: resultado reportado en [19]. En el medio: Solución obtenida mediante el método Prony sin proceso de filtrado. Abajo: Solución obtenida al aplicar el filtro sobre las imágenes antes de usar el método Prony.

## 4.2 Resultados numéricos sobre imágenes sintéticas.

Para visualizar el efecto que tiene el ruido inherente a la imagen, sobre la variación en los parámetros lineales y no lineales del modelo (1), consideramos en esta sección imágenes sintéticas que se han obtenido mediante el simulador BrainWeb, desarrollado por *McConnell Brain Imaging Centre (BIC), of the Montreal Neurological Institute, McGill University*, ver [35]. Se solicitaron cuatro sucesiones de imágenes cerebrales con esclerosis múltiple, con un parámetro  $\Delta t = 40$  milisegundos, que corresponden a diferentes niveles de ruido y que son nombradas mri1, mri2, mri3 y mri4.

Una fuente importante de ruido no considerada en este documento es la llamada intensidad no uniforme, que es atribuida a factores como variaciones en la sensibilidad de la bobina de recepción, falta de homogeneidad en la frecuencia de radio o susceptibilidad magnética de los artefactos utilizados en la adquisición de la imagen.

A continuación se muestran las cantidades que caracterizan cada sucesión. La única diferencia en las sucesiones está en los parámetros percent-noise (error gaussiano en los valores  $T_2$  usados en el proceso de simulación) y percent-inu (error proveniente de la intensidad no uniforme).

### Características de las imágenes solicitadas a Simulated Brain Web

Parámetros de la sucesión mri1

```
echo times 20-60-100-140-180-220-260-300
flip angle 30
image type M
inu-field A
no of echoes 1
percent inu 20
percent-noise 3
phantom : msles3
random-seed 0
reference-tissue 0
scan-technique SFLASH
slice-thickness 2
ti
tr : 2500
```

## Parámetros de la sucesión mri2

echo times 20-60-100-140-180-220-260-300  
flip angle 30  
image type M  
inu-field A  
no of echoes 1  
percent inu 0  
percent-noise 3  
phantom : msles3  
random-seed 0  
reference-tissue 0  
scan-technique SFLASH  
slice-thickness 2  
ti  
tr : 2500

## Parámetros de la sucesión mri3

echo times 20-60-100-140-180-220-260-300  
flip angle 30  
image type M  
inu-field A  
no of echoes 1  
percent inu 0  
percent-noise 1  
phantom : msles3  
random-seed 0  
reference-tissue 0  
scan-technique SFLASH  
slice-thickness 2  
ti  
tr : 2500

#### Parámetros de la sucesión mri4

echo times 20-60-100-140-180-220-260-300  
flip angle 30  
image type M  
inu-field A  
no of echoes 1  
percent inu 0  
percent-noise 0  
phantom : msles3  
random-seed 0  
reference-tissue 0  
scan-technique SFLASH  
slice-thickness 2  
ti  
tr : 2500

mri1	mri2	mri3	mri4
percent-noise: 3	percent-noise: 3	percent-noise: 1	percent-noise: 0
percent-inu: 20	percent-inu: 0	percent-inu: 0	percent-inu: 0

Table 4.2: Diferencias en los niveles de ruido de las imágenes sintéticas generadas por Brain-Web

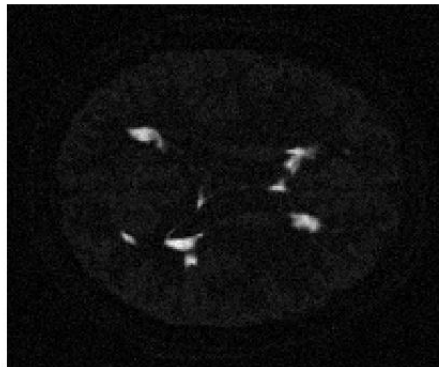
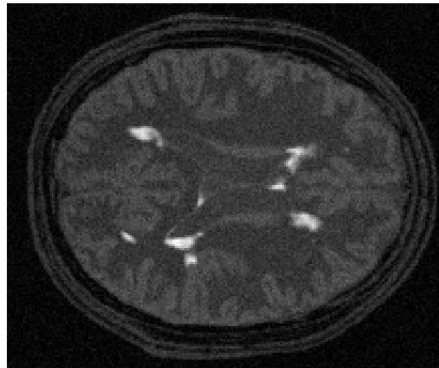
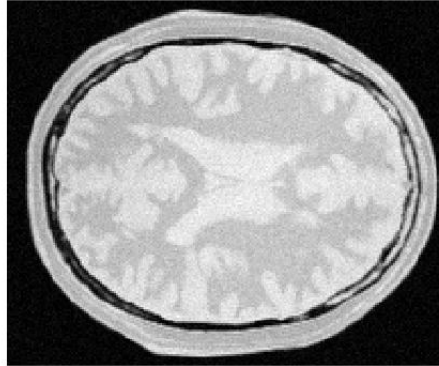


Figure 4.7: Imágenes de los ecos primero, cuarto y quinto, de la sucesión mri1

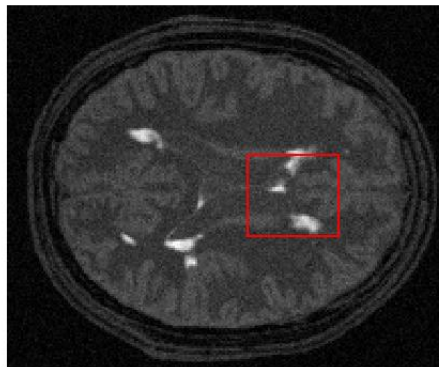
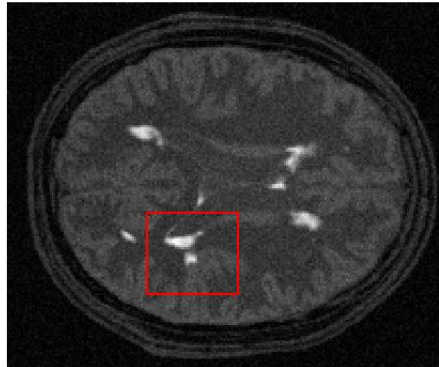
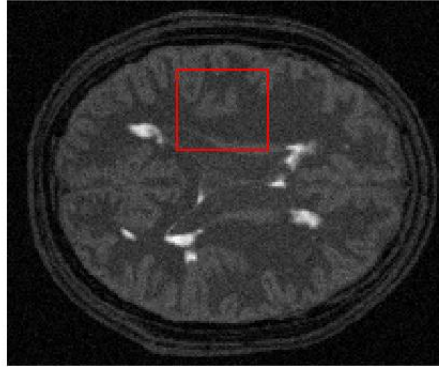


Figure 4.8: Imágenes solicitadas a BrainWeb. Arriba la región ROIw1, en el centro ROIw2 y abajo ROIw3

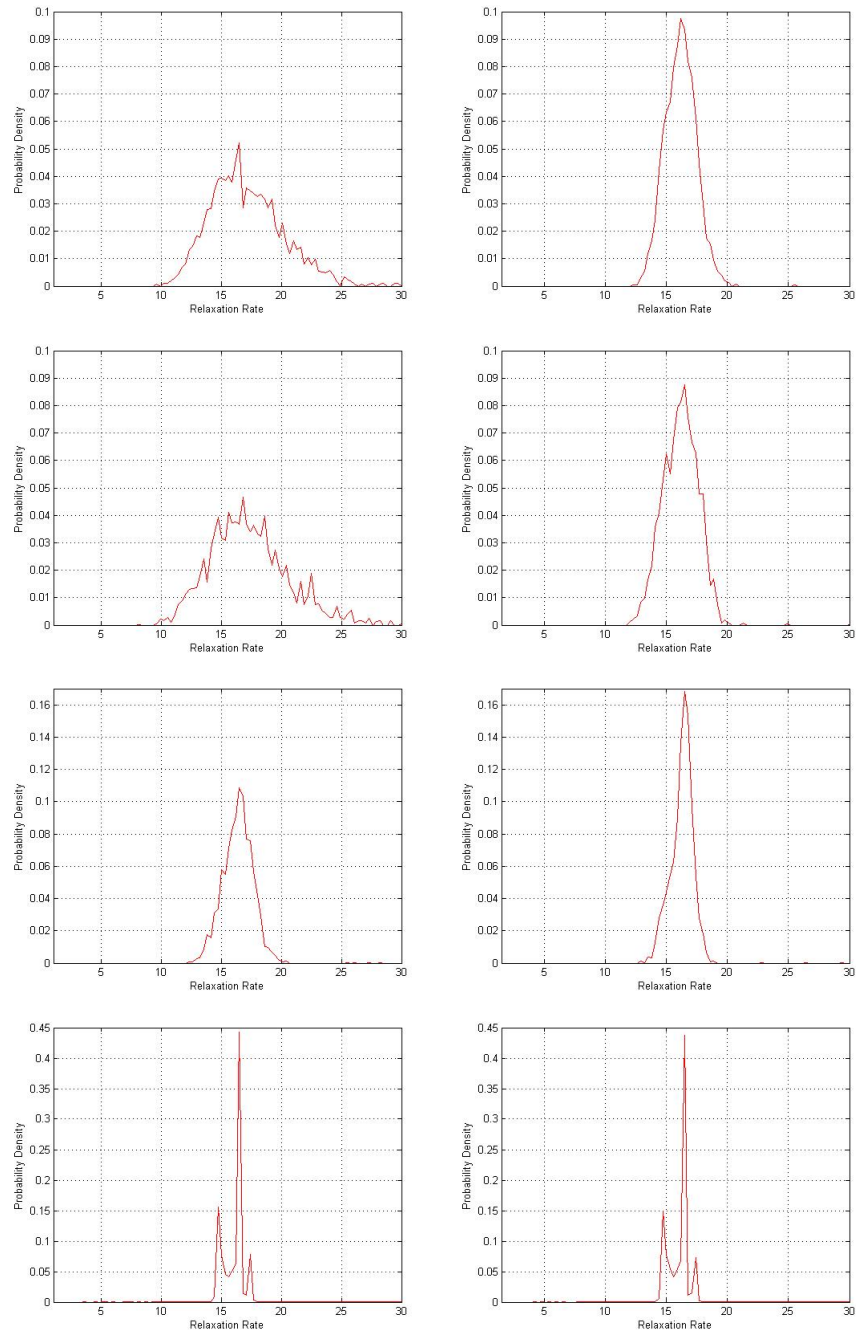


Figure 4.9: Gráficas correspondientes a la region ROIw1, datos mri1, mri2, mri3 y mri4, respectivamente, de arriba hacia abajo. En la izquierda, para cada tipo de dato, las funciones de densidad de probabilidad obtenidas al aplicar la variante del método Prony sin utilizar el filtro, en la derecha las gráficas obtenidas al aplicar el filtro sobre cada una de las imágenes antes de usar la variante del método Prony.

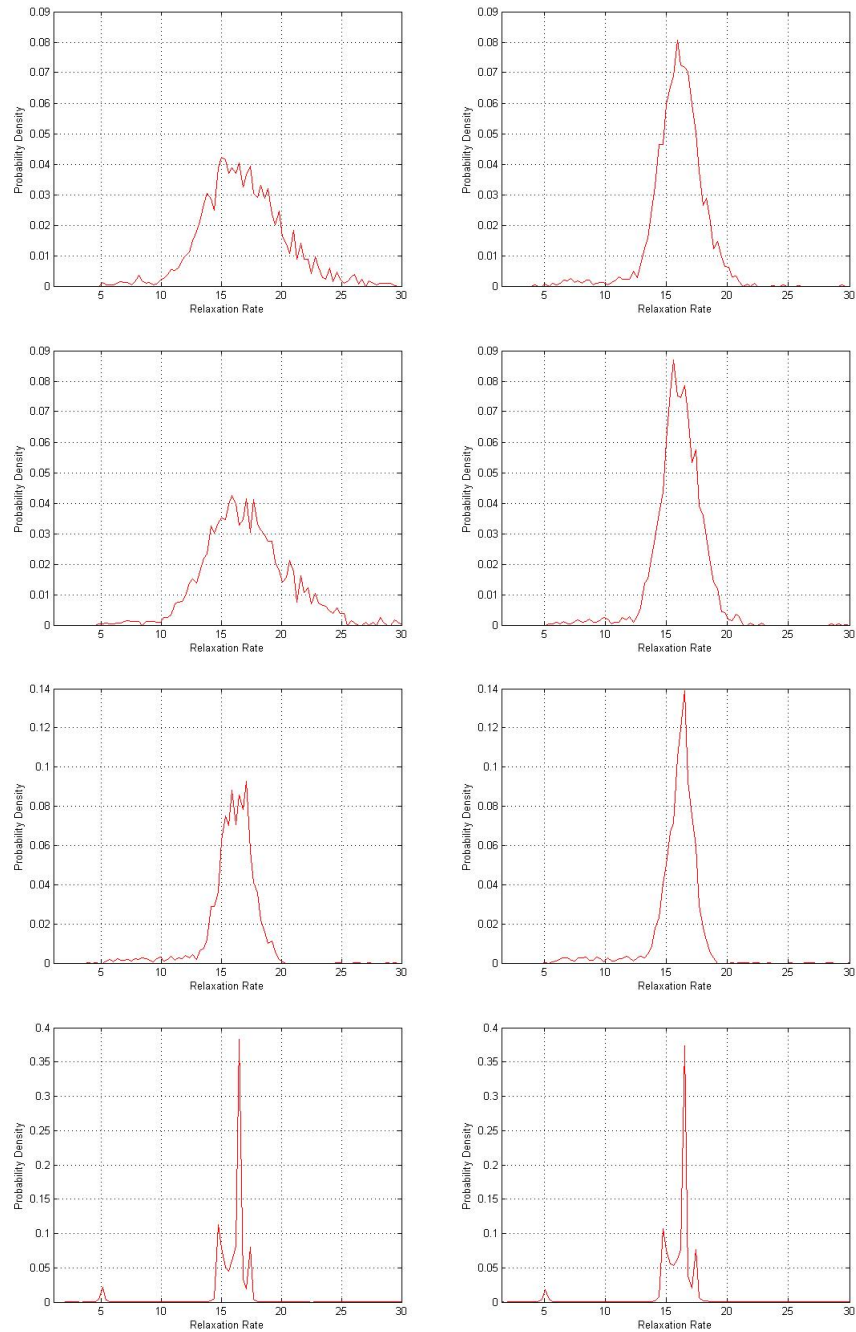


Figure 4.10: Gráficas correspondientes a la region ROIw2, datos mri1, mri2, mri3 y mri4, respectivamente, de arriba hacia abajo. En la izquierda, para cada tipo de dato, las funciones de densidad de probabilidad obtenidas al aplicar la variante del método Prony sin utilizar el filtro, en la derecha las gráficas obtenidas al aplicar el filtro sobre cada una de las imágenes antes de usar la variante del método Prony.

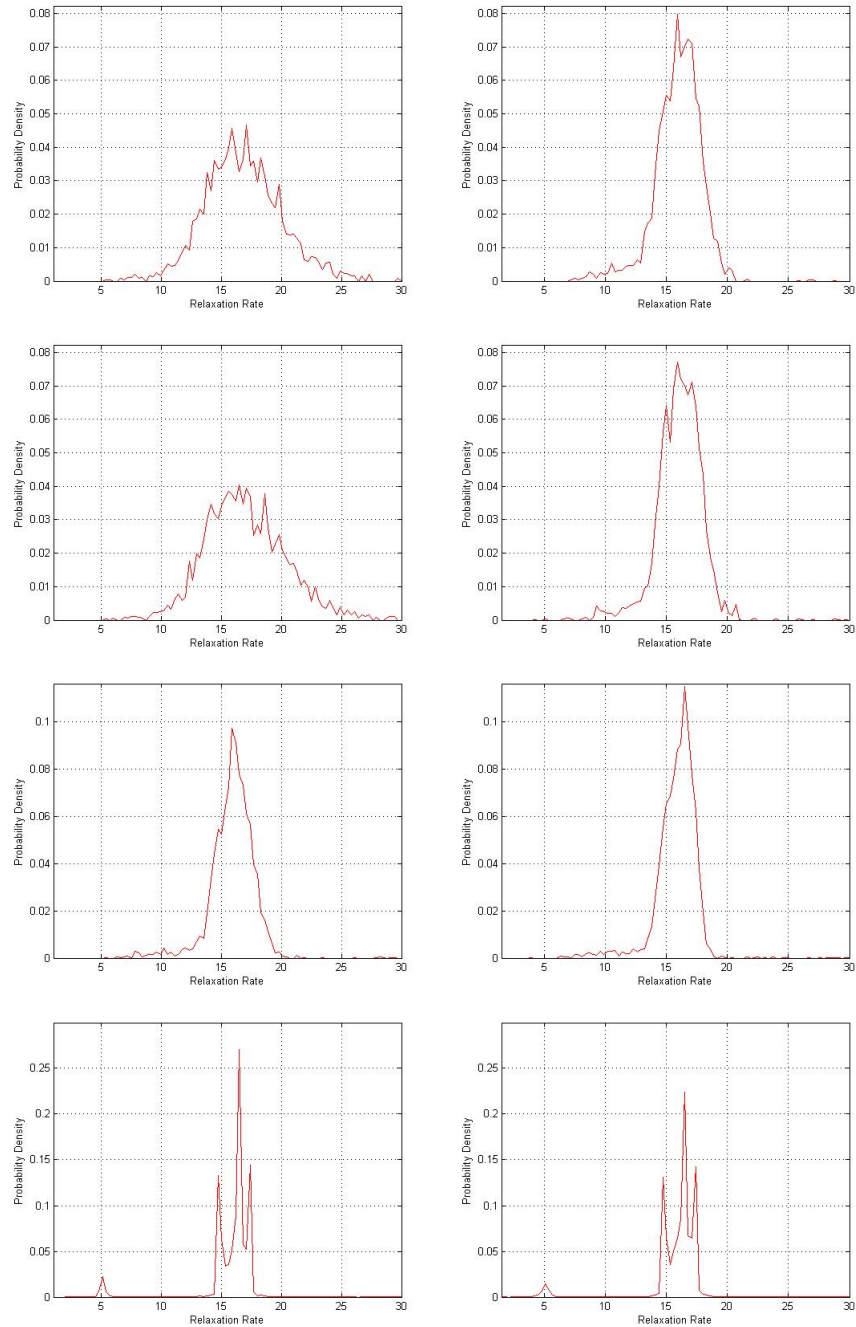


Figure 4.11: Gráficas correspondientes a la region ROIw3, datos mri1, mri2, mri3 y mri4, respectivamente, de arriba hacia abajo. En la izquierda, para cada tipo de dato, las funciones de densidad de probabilidad obtenidas al aplicar la variante del método Prony sin utilizar el filtro, en la derecha las gráficas obtenidas al aplicar el filtro sobre cada una de las imágenes antes de usar la variante del método Prony.

### 4.3 Conclusiones y discusión de los resultados

En la primera parte de este trabajo se hizo un análisis exhaustivo del algoritmo propuesto por Martín-Landrove et al., [18] y [19], para segmentar imágenes cerebrales de resonancia magnética; dicho análisis permitió conocer las características numéricas del mencionado algoritmo en particular su relación con lo que en la literatura se conoce como método Prony Modificado y su estabilidad respecto al ruido en las imágenes. En la segunda parte se diseñó e implementó una modificación del filtro propuesto por Kazubek, [15], resultando más efectivo en la eliminación del ruido en imágenes de resonancia magnética. El programa que se implementó, usando los resultados del trabajo teórico anterior, produce mejores resultados numéricos comparado con los publicados previamente. A futuro nos proponemos implementar un algoritmo híbrido que use nuestra implementación del método tipo Prony propuesto por Martín-Landrove y el método VARPRO de Golub-Pereyra, [7] y [23], en los casos que el nivel de ruido no permita usar el programa implementado en esta tesis. Por último, los resultados de la presente tesis aparecieron publicados recientemente en los artículos [11] y [12].

# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, Tenth Printing, (1972).
- [2] Anand, C. S. and Sahambi, J. S., *MRI Denoising using bilateral filter in redundant wavelet domain*, in IEEE region 10th conference, Washington (DC.) (2008), 1-6, doi: 10.1109/TENCON.2008.4766742
- [3] Anand, C. S. and Sahambi, J. S., *Wavelet domain nonlinear filtering for MRI denoising*, Magnetic Resonance Imaging **28** (2010), 842-861.
- [4] Bartusek, K., Prinosil, J. and Smekal, Z., *Optimization of wavelet-based denoising in MRI*, Radioengineering **20** (1) (2011), 85-93.
- [5] Batenkov, D., Yomdin, Y., *On the accuracy of solving confluent Prony systems*, SIAM J. Appl. Math. **73** (2013), 134-154.
- [6] Gautschi, W., *Optimally conditioned Vandermonde matrices*, Numer. Math. **24** (1975), 1-12.
- [7] Golub, G., Pereyra, V., *The differentiation of pseudo-inverses and the nonlinear least squares problem whose variables separate*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 413-432.
- [8] Golub, G., Pereyra, V., *Separable nonlinear least squares: the variable projection method and its application*, Inverse Problems **19** (2003), R1-R26.
- [9] Golub, G., Van Loan, C.F., *Matrix computations*, Third edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore. (1996).
- [10] Gudbjartsson, H., Patz, S., *The Rician distribution of noise MRI data*, Magn. Reson. Med. **34** (1995), 910-914.
- [11] Jaramillo, R. and Lentini, M. *Stability analysis of a variant of the Prony method*, Mathematical Problems in Engineering, **2012**, Article ID 390645, <http://dx.doi.org/10.1155/2012/390645>.
- [12] Jaramillo, R., Lentini, M. and Paluszny, M. *Improving the performance of the Prony method using a wavelet domain filter for MRI denoising*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, **2014**, Article ID 810680, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/810680>.

- [13] Jiang, L. and Yang, W., *Adaptive magnetic resonance image denoising using mixture model and wavelet shrinkage*, in Proceedings of the 7th Digital Imaging Computing: Techniques and Applications, Sydney, Australia (2003), 831-838.
- [14] Kanh, M.H., Mackisack, M. S., Osborne, M. R., Smyth, G. K., *On the consistency of Prony's method and related algorithms*, Journal of Computational and Graphical Statistics **1** (1992), 329-349.
- [15] Kazubek, M., *Bias and noise removal from magnetic MR images*, in Proceedings of the International Conference on Computer and Vision graphics, ICCVG, Warsaw, Poland (2004), 929-934.
- [16] Komiyama, M., Yagura, H., Baba, M., Yasui, T., Hakuba, A., Nishimura, S. and Inocue, Y., *MR imaging: possibility of tissue characterization of brain tumors using  $T_1$  and  $T_2$  values*, American Journal of Neuroradiology AJNR **8** (1987), 65-70.
- [17] Leung, E. T. H. and Tsotsos, J. K., *Adaptive enhancement of cardiac magnetic resonance (CMR) images*, in Proceedings of the Tenth International Conference in Computer Vision (ICCV'05), Beijing China (2005), 1739-1746.
- [18] Martin-Landrove, M., Figueroa, G., Paluszny, M., Torres, W., *a quasi-analytical method for relaxation rate distribution determination of  $T_2$ -weighted MRI in brain*, Proceedings of the 29th Annual International Conference of the IEEE EMBS, Lyon, France (2007), 1318-1321.
- [19] Martin-Landrove, M., Figueroa, G., Paluszny, M., Torres, W., *Boosting the inverse interpolation problem by a sum of decaying exponentials using an algebraic approach*, Electronic Transactions on Numerical Analysis **34** (2009), 163-169.
- [20] Martin-Landrove, M., Mayobre, F., Bautista, I., Villalta, R., *Brain tumor evaluation and segmentation by in vivo proton spectroscopy and relaxometry*, MAGMA, Magnetic Resonance Materials in Physics, Biology and Medicine **18** (2005), 316-331.
- [21] Mustafa, Z. A. and Kadah, Y. M., *Multi resolution bilateral filter for MR image denoising*, in Proceeding of Biomedical Engineering (MECBME), 2011 1st Middle East Conference, Sharjah, United Arab Emirates (2011), 180-184.
- [22] Nowak, R., *Wavelet-based Rician noise removal for magnetic resonance imaging*, IEEE Transactions on Image Processing **8** (10) (1999), 1408-1419.
- [23] O'Leary, D. P., Rust, B. W., *Variable projection for nonlinear least squares problems*, Computational Optimization and Applications **54** (2013), 579-593.
- [24] Osborne, M. R., *Some special nonlinear least square problems*, SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 571-592.
- [25] Osborne, M. R., Smyth, G. K., *A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations*, SIAM J. Sci. Comput. **12** (1991), 362-382.
- [26] Osborne, M. R., Smyth, G. K., *A modified Prony algorithm for exponential function fitting*, SIAM J. Sci. Comput. **16** (1995), 119-138.

- [27] Paluszny, M., Lentini, M., Martin-Landrove, M., Torres, W., Martin, R., *Recovery of relaxation rates in MRI  $T_2$ -weighted brain images via exponential fitting*, in Exponential Data Fitting and its Applications, Pereyra, V. and Scherer, G., Eds., Bentham Science Publishers, chapter 3, (2010), 52-70.
- [28] Pan, Q., Zhang, L., Dai, G. and Zhang, H., *Two denoising methods by wavelet transform*, IEEE Transactions on Signal Processing **47** (12) (1999), 3401-3406.
- [29] Pereyra, V. and Scherer, G., *Exponential data fitting*, in Exponential Data Fitting and its Applications, Pereyra, V. and Scherer, G., Eds., Bentham Science Publishers, chapter 1, (2010), 1-26.
- [30] Tomasi, C. and Manduchi, R., *Bilateral filtering for gray and color images*, in Proceedings of the 6th International Conference in Computer Vision, New Delhi, India (1998), 839-846.
- [31] Varah, J.M., *On fitting exponentials by nonlinear least squares*, SIAM J. Sci. Comput. **6** (1985), 30-44.
- [32] Walnut, D. F., *An introduction to wavelet analysis*, Birkhäuser, Boston, (2004).
- [33] Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R. and Simoncelli, E. P., *Image quality assessment: from error visibility to structural similarity*, IEEE Transactions on Image Processing **13** (4) (2004), 600-612.
- [34] Wilkinson, J. H., *Rounding errors in algebraic processes*, Dover Publications (1994).
- [35] <http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>  
Fecha de consulta: 20 de febrero de 2014