



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Metodología para la estimación de incertidumbre de medición en la calibración en un laboratorio de metrología

Dario Alfonso Cuello Mejía

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de ingeniería eléctrica y electrónica  
Bogotá, Colombia  
Año 2015



# Metodología para la estimación de incertidumbre de medición en la calibración en un laboratorio de metrología

**Dario Alfonso Cuello Mejía**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería - Automatización Industrial**

Director(a):

Ph.D. Carlos Andres Perilla Rozo

Línea de Investigación:

Metrología

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de ingeniería eléctrica y electrónica

Bogotá, Colombia

Año 2015



## Dedicatoria

A mi familia y a mi novia por su incondicional apoyo y cariño.



## Resumen

En éste trabajo se proponen dos metodologías para la estimación de la incertidumbre de medición en un laboratorio de metrología eléctrica. Dichas metodologías se basan en dos áreas del conocimiento matemático para la obtención de un intervalo sobre el cual se espera obtener la medición. La primera se basa en la teoría de números y conjuntos difusos, generando una función de pertenencia sobre los datos del mensurando para obtener el intervalo; la segunda se basa en la obtención de un desviación estándar del mensurando a partir de los momentos estadísticos de las variables que lo influyen. Ambas metodologías se contrastan con la Guía para la Estimación de Incertidumbre. La implementación se realiza utilizando la herramienta computacional MATLAB, aplicándola a un caso de estudio: un divisor de alta tensión.

**Palabras clave:** Incertidumbre, metrología, Conjunto difuso, Momento, Desviación estándar, metodología, Divisor de tensión.

## Abstract

This work presents two methods for estimate metrological uncertainty in an electrical lab. These methodologies are based in two areas of mathematical knowledge for obtaining an interval where we expect to find the measurement result. The first one is based on fuzzy sets theory, generating a membership function over the measurand data for obtaining the interval; the second one search the measurand standard deviation from statistical moments of the variables that influence it. Both methods are compared with the GUM. The implementation is done using MATLAB, applying them to a study case: a high voltage divider.

**Keywords:** Uncertainty, metrology, fuzzy set, moment, standard deviation, methodology, high voltage divider

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Guía para la estimación de incertidumbre GUM</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Objetivo de la Guía . . . . .	6
2.3. Definiciones . . . . .	6
2.4. Conceptos Básicos . . . . .	7
2.4.1. Medición . . . . .	7
2.4.2. Errores, efectos y correcciones . . . . .	8
2.4.3. Incertidumbre . . . . .	9
2.4.4. Consideraciones prácticas . . . . .	11
<b>3. Estimación de incertidumbre mediante teoría de conjuntos difusos</b>	<b>14</b>
3.1. Definición de conjunto difuso . . . . .	14
3.2. Propiedades de los conjuntos difusos . . . . .	15
3.3. Representación conjuntos difusos . . . . .	16
3.3.1. Representación analítica . . . . .	18
3.3.2. Representación punto a punto . . . . .	18
3.3.3. Representación mediante conjunto de niveles . . . . .	19
3.4. Estimación de incertidumbre . . . . .	19
3.4.1. Obtención de parámetros . . . . .	21
3.4.2. Algoritmo de estimación . . . . .	22
<b>4. Estimación de incertidumbre mediante estimación de dos puntos</b>	<b>24</b>
4.1. Estimación de momentos . . . . .	24
4.2. Casos definidos para la estimación de momentos . . . . .	25
4.2.1. Caso 1 . . . . .	26
4.2.2. Caso 2 . . . . .	27
4.2.3. Caso 3 . . . . .	28
4.3. Estimación de incertidumbre . . . . .	29
4.3.1. Obtención de parámetros . . . . .	30

---

4.3.2. Algoritmo de estimación . . . . .	31
<b>5. Implementación de las metodologías y resultados</b>	<b>32</b>
5.1. Divisores de tensión . . . . .	35
5.2. Simulación de Monte Carlo . . . . .	37
5.3. Simulaciones y resultados . . . . .	38
5.3.1. Distribuciones normales para cada variable . . . . .	39
5.3.2. Distribuciones uniformes para cada variable . . . . .	40
5.3.3. Distribuciones normales y uniformes para cada variable . . . . .	43
5.3.4. Prueba de las metodologías con pocos datos . . . . .	46
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>49</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	49
6.2. Recomendaciones . . . . .	50
<b>A. Anexo: Código en MATLAB del método basado en conjuntos difusos</b>	<b>52</b>
<b>B. Anexo: Código en MATLAB del método basado en momentos</b>	<b>54</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# 1. Introducción

La medición es parte integral del trabajo y de la vida diaria, siendo una herramienta indispensable para el conocimiento y el control. En la industria, por ejemplo, es vital el control sistemático de las mediciones, ya que se ve reflejado en el producto final; también, un resultado obtenido en los laboratorios de ensayos se emplea como base para la toma de decisiones de un proyecto. De ahí la importancia de que la medición cumpla con la especificación dada, ya que si no es así, se descarta y se busca otra opinión.

La metrología es la ciencia que tiene por objeto el estudio de las medidas, los sistemas de unidades adoptados y los instrumentos usados para efectuarlas e interpretarlas [2]. Para determinar el valor de una magnitud, se realiza un proceso de medición; es decir, lleva a cabo un conjunto de operaciones con el objetivo de determinar (aproximar) el valor de una magnitud. El valor de la medición depende de su correcta realización y una interpretación adecuada. Los equipos empleados pueden tener imperfecciones de fabricación, estar expuestos a perturbaciones externas durante la medición o pueden, simplemente, ser mal utilizados. El conocimiento de todos estos elementos ayuda a obtener un valor confiable en la medición. Los efectos de todas estas variaciones y errores que pueden o no llegar a presentarse, se conoce como *incertidumbre*. Así, se tiene que la incertidumbre es el elemento fundamental para apreciar de forma adecuada la información del resultado de una medición.

La incertidumbre de una medición, se define como el intervalo dentro del cual se tiene una probabilidad de que se encuentre el valor verdadero [3]. En otras palabras, la duda que se tenga sobre el resultado de la medición debido a los errores cometidos y que no se corrijan. La Guía para la expresión de la incertidumbre en las mediciones (GUM) define incertidumbre como: "*parámetro asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando*" [3]. El resultado de la medición tiene asociado un intervalo de valores en el cual se podría suponer que se encuentra el valor verdadero. Sin esta estimación, la verificación del cumplimiento con estándares podría arrojar resultados incorrectos.

En todas las ramas de las ciencias exactas y la ingeniería es de suma importancia conocer la incertidumbre, ya que ésta puede afectar el comportamiento de un dispositivo o simplemente modificar los datos. Existe una reglamentación con respecto a cómo se debe tratar la incertidumbre en cada uno de los casos. Por ejemplo, para estimación de incertidumbre de sistemas

---

RF y microondas existe la normatividad ISO/IEC 17025. Sin embargo, en algunos casos con condiciones especiales se requiere calcular la incertidumbre más ágilmente, y es por esto que en la literatura se encuentran diversas formas de hacerlo para diferentes casos. Una de ellas se basa en un analizador de redes (VNA) para la estimación rápida de incertidumbre para redes de uno y dos puertos [13].

En general, existe una guía base para la estimación de incertidumbre, dada por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM por sus siglas en francés). Sin embargo, esta guía solamente da unas pautas para la estimación de dicho parámetro, lo que hace que se presenten diferentes interpretaciones de la misma. Por ejemplo, la estimación de la incertidumbre en la medición puede ser basada en una t-norma difusa [6] o basada en un instrumento virtual [12]; Esto implica que la guía "genérica" puede no ser la idónea para la aplicación en cuestión. Por ejemplo, en [4] se muestra una recopilación de diferentes métodos de estimar la incertidumbre, dependiendo del tipo y de la aplicación. Dichas estructuras para la estimación se aplican en diferentes áreas del conocimiento, demostrando que, dependiendo de la aplicación, pueden haber variantes a la guía que arrojen mejores resultados.

La estimación de incertidumbre es también un aspecto fundamental en los laboratorios, sobre todo, cuando se trata de uno que se dedica a la calibración. En este caso, se deben tener en cuenta prácticamente todos los factores que puedan afectar una medición y expresarlos de tal manera que el resultado de la medición no diste demasiado del "valor real". Siendo éste el caso, la rigurosidad a la hora de estimar y expresar la incertidumbre aumenta considerablemente. Así, cada país tiene una legislación en ese sentido y define unos parámetros para la estimación de dicho parámetro: en España es el Centro Español de Metrología (CEM), el cual define procedimientos para medición y estimación de incertidumbre para prácticamente cada caso [9]; en México es el Centro Nacional de Metrología (CENAM), que se encarga de estructurar la referencia para la medición en laboratorios, concretamente laboratorios de ensayos y calibración eléctricos [11]; Y en Colombia, existe el Instituto Nacional de Metrología, quien ayuda en la formulación de políticas en materia de metrología, a la vez que sirve como ejecutor de la metrología en el país [10].

En el caso de los laboratorios de ensayos eléctricos, particularmente en la calibración de equipos, se tiene como base la GUM. No obstante, hay casos en los que dicha guía se queda corta a la hora de tener en cuenta ciertos factores que pueden afectar la calibración o la simple medición de alguna unidad. En estos casos particulares, es necesario evaluar las necesidades de la medición y definir el grado de precisión requerido para así definir una metodología que permita lograrlo. éste es el caso de los divisores de alta tensión.

Los divisores de alta tensión se pueden ver afectados por diferentes variables del entorno que pueden modificar el resultado final de forma drástica. Un ejemplo claro de esto son las ca-

pacitancias parásitas, las cuales pueden cambiar dramáticamente los valores de relación del divisor. Pero, como se indica anteriormente, depende del grado de precisión que se requiera, ya que al tener en cuenta todos los factores que pueden influir en la medición, aumenta la complejidad a la hora de diseñar el modelo y la metodología de estimación de incertidumbre. Así, hay que tener un balance entre el modelamiento y las fuentes de incertidumbre.

Éste trabajo presenta una metodología de estimación de incertidumbre para divisores de alta tensión, la cual se compara con la guía estipulada en los documentos de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. Esto con el fin de encontrar una metodología adecuada de acuerdo a la aplicación.

## 2. Guía para la estimación de incertidumbre GUM

En éste capítulo se presentan los lineamientos de la *Guía para la estimación de incertidumbre* definida por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. Es importante tener en cuenta la información que presentan estos documentos, ya que son la base para el desarrollo y verificación de la metodología que se va a desarrollar. A continuación se muestran los conceptos básicos y procedimientos estipulados en la GUM[3].

### 2.1. Introducción

Es necesario un indicador cualitativo que permita validar la confiabilidad de la medición. Así, se requiere un procedimiento que permita caracterizar la calidad del resultado de la medición, esto es, evaluación y expresión de la incertidumbre. Los conceptos de error y análisis de error son ampliamente utilizados en metrología. Sin embargo, a pesar de que se conozcan y/o modelen todos los componentes de error ( conocidos y “no conocidos“ ) aún existe la duda sobre la veracidad del resultado, es decir, que tan bien el resultado de la medición representa el valor de la cantidad que se está midiendo. éste método de evaluación y expresión de la incertidumbre debe ser uniforme para permitir la comparación entre cualquier medición. Así, se tiene que el método ideal para la evaluación y expresión de la incertidumbre del resultado de una medición debe ser:

- *Universal*: debe poderse aplicar a todo tipo de mediciones a todo tipo de datos de entrada usados en la medición.

Y, el valor utilizado para expresar la incertidumbre debe ser:

- *Internamente consistente*: debe ser directamente derivable de los componentes que contribuyen a este e independiente de como dichos componentes se agrupen o dividan.
- *Transferible*: el valor encontrado para un valor se debe poder utilizar como componente para evaluar la incertidumbre de otra medición en donde se use el primer resultado.

En muchas de las aplicaciones, es necesario definir un intervalo de medición en el que se defina la probabilidad de cobertura (nivel de confianza) que corresponda a la aplicación. El método ideal debe ser capaz de definir dicho intervalo. La incertidumbre del resultado de una medición generalmente consiste en diferentes componentes que pueden ser agrupados en dos categorías de acuerdo a la metodología en la que se obtiene su valor numérico:

- A) Aquellos evaluados por métodos estadísticos
- B) Aquellos evaluados por otros métodos

Los componentes de la categoría A son caracterizados por las varianzas estimadas  $s_i^2$  (o la desviación estándar  $S_i$ ) y el número de grados de libertad  $v_i$ . Cuando sea requerido, se deben presentar las covarianzas. Los componentes de la categoría B son caracterizados por valores (cantidades)  $u_j^2$  que deben ser considerados como aproximaciones de las correspondientes varianzas, asumiendo su existencia. Los valores  $u_j^2$  deben ser tratados como varianzas y las cantidades  $u_j$  como variaciones estándar. Cuando sea apropiado, las covarianzas deben ser tratadas de forma similar.

## 2.2. Objetivo de la Guía

Esta guía establece las reglas generales para la evaluación y expresión de la incertidumbre en la medición, las cuales se pueden aplicar en diferentes campos, en varios niveles. El primer objetivo de la guía es la expresión de incertidumbre en la medición de una cantidad física bien definida (el “mensurando”) que puede ser caracterizado por un valor único. Si dicho fenómeno solamente se puede representar mediante una distribución de valores o depende de uno o más parámetros, los mensurandos requeridos para su descripción son el conjunto de valores describiendo dicha distribución o dependencia.

ésta guía también es aplicable para la estimación de incertidumbre asociada con el diseño y análisis teórico de experimentos, métodos de medición y sistemas y componentes complejos. La guía ofrece reglas generales para la evaluación y expresión de incertidumbre en la medición, más no instrucciones detalladas y específicas. Esto significa que si se desea obtener un nivel de especificidad y complejidad más elevado, es necesario desarrollarlo para cada aplicación teniendo como base las reglas generales.

## 2.3. Definiciones

El término incertidumbre significa duda. Así, en un sentido más amplio, *incertidumbre en la medición* significa duda sobre la validez del resultado de una medición. En esta guía, el

término “incertidumbre” se refiere tanto al concepto general de incertidumbre, como a cualquier (o todas) las medidas cuantitativas para ese concepto.

**Incetidumbre (de medición):** Parámetro asociado con el resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que pueden ser atribuidos al mensurando.

También, para lograr comprender completamente lo que es la incertidumbre y su influencia en la medición, se definen términos específicos que se relacionan directamente con la misma.

- *Incetidumbre estándar:* incetidumbre del resultado de una medición expresado como desviación estándar.
- *Evaluación tipo A (de incetidumbre):* método de evaluación de incetidumbre por análisis estadístico de serie de observaciones.
- *Evaluación tipo B (de incetidumbre):* método de evaluación de incetidumbre por otras vías diferentes al análisis estadístico de serie de observaciones.
- *Incetidumbre estándar combinada:* incetidumbre estándar resultante de una medición en donde el resultado se obtiene de los valores de otros valores, iguales a la raíz cuadrada positiva de la suma de los términos, siendo los términos las varianzas o covarianzas de las otras cantidades (cada una con su peso) dependiendo de cómo varía el resultado de la medición al cambiar dichos valores.
- *Incetidumbre ampliada:* cantidad (valor) que define un intervalo sobre el resultado de medición en donde se encuentre una gran fracción de la distribución de valores que puedan ser atribuidos al mensurando. La fracción se puede ver como una probabilidad de cobertura o nivel de confianza del intervalo. Para asociar dicho nivel de confianza se requiere asumir ciertas cosas dependiendo de la aplicación. Cada una de estas asunciones debe estar debidamente justificada. A veces es llamada incetidumbre general (de conjunto).
- *Factor de cobertura ( $k$ ):* factor numérico utilizado como multiplicador de la incetidumbre estándar combinada para obtener una incetidumbre ampliada

## 2.4. Conceptos Básicos

### 2.4.1. Medición

El objetivo de la medición es determinar el valor del mensurando, es decir, el valor de la cantidad específica que va a ser medida. Esto significa que la medición comienza con una

especificación apropiada del mensurando, el método de medición y el procedimiento de medición. En general, el resultado de una medición es sólo una aproximación o estimado del valor del mensurando y solamente se encuentra completo cuando está acompañado de una declaración de incertidumbre de dicho estimado. En la práctica, la definición del mensurando depende de la exactitud de medición. El mensurando debe ser definido con el suficiente detalle teniendo en cuenta la exactitud para que para todos los propósitos prácticos asociados con el mensurando su valor sea único. En este sentido es que se usa el término “valor del mensurando” en la guía.

En muchos casos, el resultado de la medición es determinado en base a series de observaciones obtenidas en condiciones de repetibilidad. Variaciones en repetidas observaciones pueden generar magnitudes de influencia que pueden afectar el resultado de la medición y dicha afectación puede no ser constante. El modelo matemático de la medición que convierte el conjunto de observaciones en los resultados de dicha medición es de vital importancia ya que generalmente incluye magnitudes de influencia que no son propiamente conocidas. Esto contribuye a la incertidumbre en el resultado de la medición, al igual que las variaciones en las observaciones y cualquier incertidumbre asociada propiamente al modelo matemático.

La guía trata al mensurando como un escalar (una cantidad). Se puede extender a un conjunto de mensurandos (co)relacionados que se hallan simultáneamente en la misma medición. En este caso, se reemplaza el mensurando escalar y su varianza como un mensurando vector y una matriz de covarianza.

### **2.4.2. Errores, efectos y correcciones**

En general, las mediciones tienen imperfecciones que pueden generar error en el resultado de la medición. Tradicionalmente, el error tiene dos componentes, uno llamado aleatorio y otro llamado sistemático. El error es un concepto ideal y los errores no pueden ser conocidos completamente (exactamente).

El error aleatorio se origina de variaciones estocásticas o impredecibles, espaciales y/o temporales de las variables de influencia. Los efectos de dichas variaciones, llamados efectos aleatorios, dan lugar a variaciones en las observaciones del mensurando. A pesar de que no es posible compensar el error aleatorio del resultado de una medición, usualmente se puede reducir aumentando el número de observaciones; el valor esperado es cero.

La desviación estándar experimental de la media aritmética de una serie de observaciones NO es el error aleatorio de la media, aunque en algunas publicaciones se defina de esta forma. Es, en su lugar, una medida de la incertidumbre de la media debida a efectos aleatorios. El valor exacto del error en la media debido a estos efectos no puede conocerse.

*Es importante tener en cuenta que para la guía, los términos error e incertidumbre NO son sinónimos y representan conceptos completamente diferentes.*

El error sistemático, al igual que el error aleatorio, no se puede eliminar pero se puede reducir. Si el error sistemático es producido por el efecto (conocido) de una magnitud de influencia en el resultado de la medición, llamado de ahora en adelante efecto sistemático, se puede cuantificar y, si es necesario, se puede aplicar una corrección (factor de corrección) para compensar el efecto. Se asume, aún después de la corrección, el valor esperado del error dado por el efecto sistemático es cero.

La incertidumbre aplicada a una corrección del resultado de una medición para compensar el efecto sistemático NO es el error sistemático, comúnmente llamado BIAS, en el resultado de medición. Es, más bien, una medida de la incertidumbre del resultado, debido al conocimiento incompleto del valor de corrección requerido. El error debido a la mala compensación de un efecto sistemático no se puede conocer. Igualmente, los términos error e incertidumbre NO son sinónimos y representan conceptos completamente diferentes.

A menudo, los instrumentos de medición y los sistemas están ajustados o calibrados utilizando estándares de medición y materiales de referencia para eliminar los efectos sistemáticos; sin embargo, las incertidumbres asociadas a estos estándares y a los materiales se deben tener en cuenta.

### **2.4.3. Incertidumbre**

La incertidumbre del resultado de una medición refleja la falta de conocimiento exacto del valor del mensurando. El resultado de la medición luego de la corrección para efectos sistemáticos conocidos sigue siendo un estimado del valor del mensurando, ya que aún hay incertidumbre debida a los efectos aleatorios y a la corrección imprecisa de los resultados para los efectos sistemáticos.

El resultado de una medición (después de la corrección) puede ser muy cercano al valor del mensurando, es decir, un error pequeño desconocido, aun cuando la incertidumbre sea grande. Es por esto que no se debe confundir la incertidumbre de una medición con el error desconocido restante.

En la práctica, hay muchas posibles fuentes de incertidumbre en la medición, entre ellas:

- a) Definición incompleta del mensurando;
- b) Realización imperfecta de la definición del mensurando;

- c) Muestreo no representativo: la muestra medida no representa el mensurando definido;
- d) Conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones del ambiente en la medición o condiciones del ambiente impropias para la medición;
- e) Resolución finita de los instrumentos o umbral de discriminación;
- f) Valores inexactos de los estándares de medición y/o materiales de referencia;
- g) Valores inexactos de las constantes y otros parámetros obtenidos por fuentes externas y usados en el algoritmo de reducción de datos;
- h) Aproximaciones y asunciones incorporadas en el procedimiento y/o método de medición;
- i) Variaciones en las observaciones del mensurando en condiciones aparentemente idénticas

Estas fuentes no son necesariamente independientes, y algunas de las fuentes (entre la  $a$  y la  $h$ ) pueden contribuir a la fuente  $j$ . Desde luego, un efecto sistemático desconocido no se puede tener en cuenta en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición pero igualmente contribuye al error.

En algunos casos, los componentes de la incertidumbre se clasifican como “aleatorios“ y “sistemáticos“ y se asocian con los errores generados por los efectos aleatorios y los efectos sistemáticos respectivamente. Este tipo de clasificación es ambigua y puede ser confuso. Es por esto que se hace mejor clasificar los métodos para evaluar los componentes de la incertidumbre (método A y método B) en vez de los componentes en sí. Esto para evadir dicha ambigüedad.

El objetivo de la clasificación en tipo A y tipo B es indicar dos diferentes formas para evaluar los componentes de la incertidumbre y se hace por una conveniencia únicamente. Es decir que esto no indica que hallan diferencias entre la naturaleza de los componentes resultantes por uno u otro método. Ambos tipos de evaluación son basados en distribuciones de probabilidad y los componentes de la incertidumbre resultantes en cada tipo son cuantificados con varianzas y/o desviaciones estándar.

La varianza estimada  $u^2$  que caracteriza un componente de incertidumbre obtenido por el método tipo A se calcula de una serie de observaciones (repetición) y es la varianza estadística  $s^2$ . La desviación estándar estimada  $u$ , es decir, la raíz cuadrada positiva de  $u^2$ , es  $u = s$  y por conveniencia, se le llama *incertidumbre estándar tipo A*. Para un componente de incertidumbre obtenido por el método tipo B, la varianza estimada  $u^2$  se evalúa utilizando el conocimiento disponible, y la desviación estándar estimada  $u$  se conoce como *incertidumbre*

*estándar tipo B.*

La incertidumbre estándar tipo A se obtiene de una función de densidad de probabilidad derivada de una distribución de frecuencia observada; mientras que la incertidumbre estándar tipo B se obtiene asumiendo una función de densidad de probabilidad basada en el grado de confianza de que el evento va a ocurrir (comúnmente llamada probabilidad subjetiva). Ambas aproximaciones emplean interpretaciones de probabilidad. La evaluación tipo B se basa comúnmente en un conjunto (fuente) de información confiable.

Cuando la incertidumbre estándar del resultado de una medición se obtiene de los valores de otras cantidades (cifras), se le conoce como incertidumbre estándar combinada y se denota con  $u_c$ . Es la desviación estándar estimada asociada con el resultado y es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada obtenida de todas las varianzas y covarianzas de los componentes, utilizando lo que en la guía se conoce como la *ley de la propagación de la incertidumbre*.

En ciertas aplicaciones y casos, la incertidumbre extendida  $U$  se obtiene multiplicando la incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura  $k$ . El propósito de  $U$  es proporcionar un intervalo sobre el resultado de una medición para abarcar un gran fracción de la distribución de valores que pueden ser atribuidos al mensurando. La elección del factor  $k$ , el cual se encuentra entre 2 y 3, está basada en la probabilidad de cobertura o nivel de confianza requerida en el intervalo.

El factor de cobertura debe estar siempre definido, de tal forma que la incertidumbre estándar de una cantidad medida pueda ser recuperada para su uso en el cálculo de la incertidumbre estándar combinada de otros resultados de medición que puedan depender de dicha cantidad.

#### **2.4.4. Consideraciones prácticas**

Si todas las cantidades de las cuales depende el resultado de una medición son variadas, la incertidumbre de dicha medición puede ser evaluada por métodos estadísticos. Sin embargo, como esto es poco posible en la práctica debido las pocas fuentes y al poco tiempo, la incertidumbre en la medición usualmente se evalúa usando el modelo matemático de la medición y la ley de propagación de incertidumbre. En la guía se asume implícitamente que la medición puede ser modelada matemáticamente al grado necesario para alcanzar el nivel de exactitud requerido en la medición.

Debido a que el modelo matemático puede estar incompleto, todos los valores relevantes deberían llevarse a su mayor medida práctica para que la evaluación de la incertidumbre se pueda basar en gran medida en datos observados. Cuando sea factible, se puede (y debe)

hacer uso de modelos empíricos de medición basados en datos cuantitativos a largo plazo, junto con estándares de revisión y tablas de control que indiquen si la medición está bajo control estadístico. El modelo matemático siempre debe ser revisado cuando los datos observados, incluidos los resultados de determinaciones independientes del mismo mensurando, demuestren que el modelo está incompleto. Un experimento bien diseñado puede facilitar mucho la evaluación de la incertidumbre, siendo parte importante del proceso de medición.

Para definir si un sistema de medición funciona correctamente, la variabilidad experimental observada de los valores de salida, medidas por la desviación estándar observada, se compara con la desviación estándar predicha que se obtiene combinando los componentes de incertidumbre que caracterizan la medición. En esos casos, se deben considerar solamente aquellos componentes (obtenidos mediante evaluaciones tipo A y tipo B) que puedan contribuir a la variabilidad experimental observada de dichos valores de salida.

En algunos casos, no es necesario incluir la incertidumbre de una corrección de un efecto sistemático en la evaluación de la incertidumbre de una medición. Aunque la incertidumbre haya sido evaluada, esta se puede ignorar si su contribución a la incertidumbre estándar combinada de la medición es insignificante. Si el valor de la corrección en sí es insignificante con respecto a la incertidumbre estándar combinada, ésta también puede ser ignorada.

En la práctica (especialmente en el dominio de la metrología legal) algunas veces sucede que el equipo se prueba con una comparación entre la medición estándar y las incertidumbres asociadas con el estándar y el procedimiento de comparación es insignificante con respecto al nivel de precisión requerido en la prueba. Un ejemplo es el uso de un conjunto de estándares de masa bien calibrados para probar la precisión de una escala comercial. En estos casos, debido a que los componentes de incertidumbre son lo suficientemente pequeños para ignorarlos, la medición se puede ver como determinar el error del equipo que se está probando.

Algunas veces el estimado del valor del mensurando dado por el resultado de una medición se expresa en términos del valor considerado en la medición, en vez del Sistema Internacional (SI). En dichos casos, la magnitud de la incertidumbre atribuible a la medición resulta ser significativamente más pequeña en comparación con el mismo resultado expresado en las unidades del SI.

Errores en el registro o análisis de los datos pueden introducir errores desconocidos significativos en el resultado de una medición. Usualmente errores grandes se pueden identificar con una revisión apropiada de la información, mientras que los errores pequeños pueden estar enmascarados, simplemente aparecer como, variaciones aleatorias. Las medidas de incertidumbre no están destinadas a tener en cuenta tales errores.

La evaluación de la incertidumbre no es una tarea rutinaria o puramente matemática, ésta depende de un conocimiento detallado de la naturaleza del mesurando y del proceso de medición. La calidad y utilidad de la incertidumbre citada del resultado de una medición depende concretamente del entendimiento, análisis crítico e integridad de quienes contribuyen a la asignación de dicho valor.

# 3. Estimación de incertidumbre mediante teoría de conjuntos difusos

En éste capítulo se presenta la teoría de conjuntos difusos: definiciones y principios básicos. Así mismo, se presenta el procedimiento planteado para la estimación de incertidumbre en base a dicha teoría, dando a conocer las ventajas y desventajas del mismo.

## 3.1. Definición de conjunto difuso

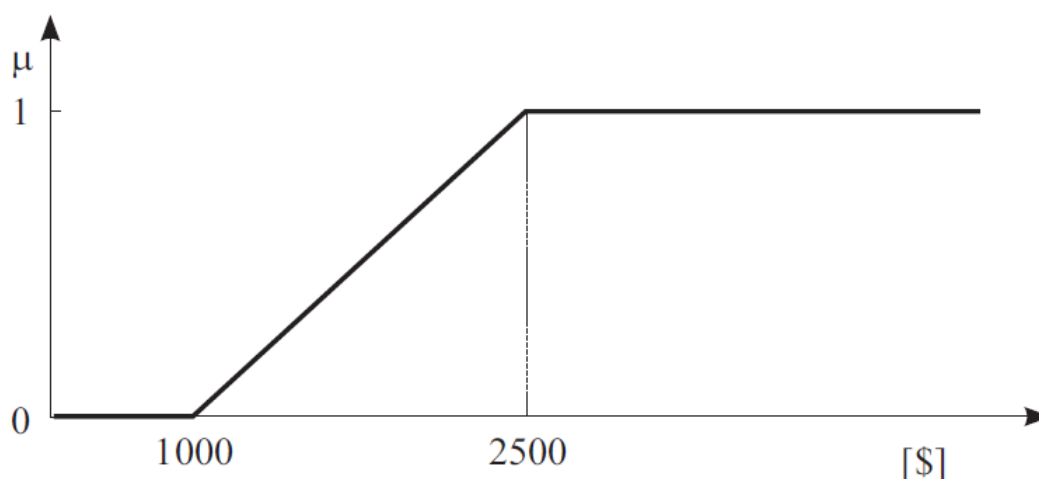
En la teoría de conjuntos clásica, los elementos pertenecen o no a un conjunto dado. Así, ésta pertenencia  $U_a(x)$  de  $x$  a un conjunto  $A$ , el cual es subconjunto del universo  $X$  se define de la siguiente forma:

$$\mu_A = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (3-1)$$

Esto significa que un elemento  $x$  pertenece al conjunto  $A$  ( $U_a(x) = 1$ ) o no pertenece a dicho conjunto ( $U_a(x) = 0$ ). Esta clasificación es útil cuando se desea mostrar una definición precisa, en donde se puede dar un juicio de tipo binario (falso o verdadero). Sin embargo, existen otro tipo de ramas en las cuales se desea mantener parte de la información que se está clasificando y su interpretación no se puede catalogar simplemente como “si” o “no”, ya que no se pueden definir los límites de pertenencia tan fácilmente.

Un ejemplo es el conjunto de hombres altos en una comunidad. Hay elementos que claramente pertenecen al conjunto definido, al igual que otros que no pertenecen. Sin embargo, algunos de los elementos que son casos límite. Es decir, que no queda del todo claro si pertenecen o no al conjunto definido. Es aquí donde se plantea el concepto de conjunto difuso. Un conjunto difuso es un conjunto cuya pertenencia se encuentra graduada dentro del intervalo real  $U_a(x) \in [0, 1]$ . Esto significa que los elementos pueden pertenecer a al conjunto en cierto grado. Así, los conjuntos difusos se pueden utilizar para la representación matemática de conceptos que llegan a ser un poco vagos: baja temperatura, persona alta, computador costo, etc.

Un conjunto difuso  $A$  en el universo  $X$  es un conjunto definido por la función de pertenencia  $U_a(x)$ , la cual es un mapeo del dominio sobre el intervalo  $[0, 1]$



**Figura 3-1.:** Conjunto difuso representando el valor de un PC de acuerdo el presupuesto de un estudiante

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1] \quad (3-2)$$

Si el valor de la función de pertenencia (llamado grado de pertenencia), es igual a 1,  $x$  pertenece completamente al conjunto difuso. Si, por el contrario, es igual a 0,  $x$  no pertenece al conjunto. Y, finalmente, si el grado de pertenencia se encuentra entre 0 y 1, se dice que  $x$  pertenece *parcialmente* al conjunto:

$$\mu_A \begin{cases} = 1, & x \in A \\ \in [0, 1] & x \in_p A \\ = 0, & x \notin A \end{cases} \quad (3-3)$$

Donde  $\in_p$  significa *pertenece parcialmente a*[7]. Un ejemplo de un conjunto difuso y su representación es el precio de un PC para un estudiante. Un precio menor a \$1000 se considera económico; mientras que un precio mayor a \$2500 se considera costoso. Sin embargo, los valores entre estos dos precios no necesariamente se clasifican como económico o costoso. En la figura 3-1 se muestra el comportamiento de la función de pertenencia del caso planteado.

## 3.2. Propiedades de los conjuntos difusos

Como se dijo anteriormente, la base de los conjuntos difusos es el grado de pertenencia. La altura (heigh) de un conjunto difuso es el mayor grado de pertenencia dentro de todos los elementos del dominio:

$$hgt(A) = \text{Sup}_{x \in X} \mu_A(x) \quad (3-4)$$

Los conjuntos difusos cuya altura sea igual a 1 se denominan conjuntos difusos *normales*; de igual forma, los conjuntos difusos que no cumplen con esta condición se les llaman conjuntos difusos *subnormales*. El operador  $norm(A)$  define la normalización de un conjunto difuso  $A$ , la cual se define de la siguiente manera:

$$A' = norm(A) \Leftrightarrow \mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{hgt(x)} \quad (3-5)$$

Así mismo, existen otras características propias de los conjuntos difusos como lo son el soporte, el núcleo y el  $\alpha$ -corte[1]. El soporte se define como el subconjunto de  $X$  de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia es diferente de 0:

$$supp(A) = \{x | \mu_A(x) > 0\} \quad (3-6)$$

El núcleo denota el subconjunto de  $X$  cuyos elementos son todos aquellos que tienen un grado de pertenencia igual a 1. En algunos casos el núcleo se denota como kernel:

$$core(A) = Ker(A) = \{x | \mu_A(x) = 1\} \quad (3-7)$$

Finalmente, el  $\alpha$ -corte [1] de un conjunto difuso se refiere al subconjunto de  $X$  de los elementos que tengan un grado de pertenencia mayor o igual a  $\alpha$ :

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1] \quad (3-8)$$

En la figura **3-2** se muestra gráficamente el concepto de cada uno de los operadores descritos anteriormente.

La función de pertenencia puede ser unimodal (solamente un máximo global) o multimodal (varios máximos). Los conjuntos difusos unimodales son llamados conjuntos difusos convexos y dicha propiedad se puede expresar en términos de  $\alpha$ -cortes: Un conjunto difuso definido en  $\mathfrak{R}^N$  es convexo si cada uno de los  $\alpha$  cortes es un conjunto convexo, como se muestra en la figura **3-3**.

### 3.3. Representación conjuntos difusos

Existen diferentes formas de definir un conjunto difuso: a través de una descripción analítica de la función de pertenencia, una lista de pares ordenados o mediante  $\alpha$ -cortes.

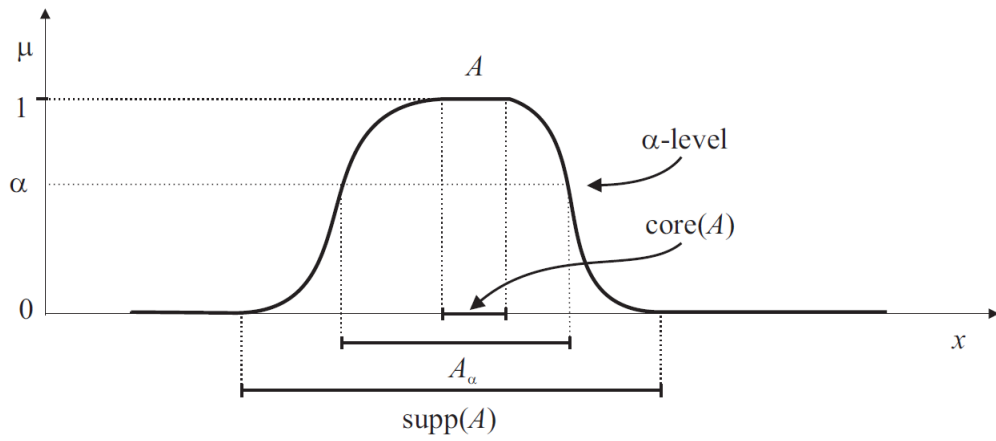


Figura 3-2.: Operadores de conjuntos difusos.

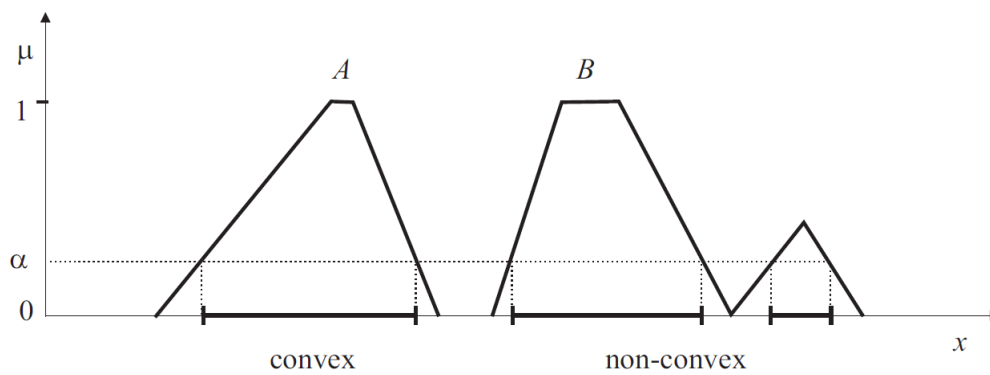
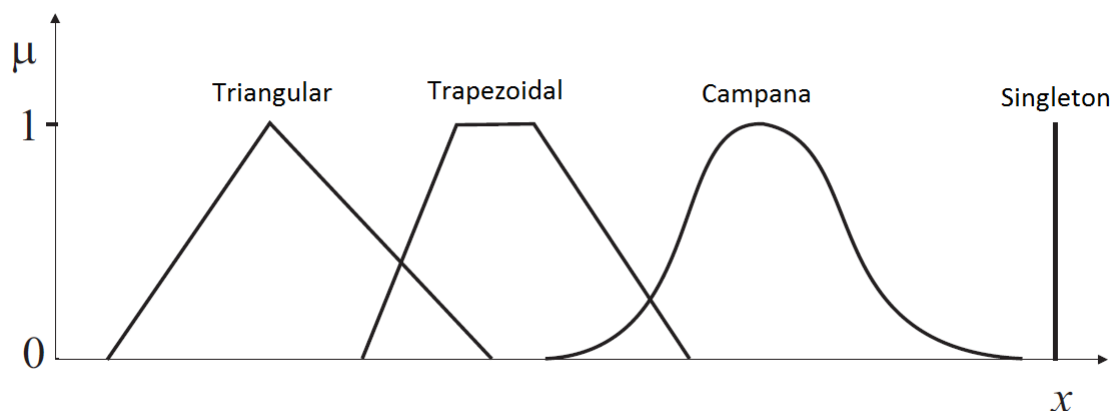


Figura 3-3.: Propiedades de un conjunto difuso.



**Figura 3-4.**: Funciones de pertenencia de un conjunto difuso.

### 3.3.1. Representación analítica

Los conjuntos difusos se pueden definir mediante la diferencia entre el elemento considerado  $x$  y un prototipo  $v$  del conjunto difuso:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + d(x, v)} \quad (3-9)$$

Donde,  $d(x, v)$  denota la medida de la diferencia, comúnmente definida como una medida de distancia (concepto Euclidiano de distancia). Los elementos cuya distancia tiende a 0 con el prototipo, tienen grados de pertenencia cercanos a uno; y, a medida que la distancia crece, la función de pertenencia disminuye. En la figura 3-4 se muestran las diferentes formas que pueden tomar las funciones de pertenencia.

### 3.3.2. Representación punto a punto

En un conjunto discreto, se puede definir un conjunto difuso  $A$  mediante una lista de pares ordenados: grado de pertenencia / elemento del conjunto.

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \dots, \mu_A(x_n)/x_n\} = \{\mu_A(x)/x | x \in X\} \quad (3-10)$$

En general, solamente se listan los elementos que pertenecen al dominio y tienen un grado de pertenencia diferente de cero.

### 3.3.3. Representación mediante conjunto de niveles

Un conjunto difuso se puede representar mediante una lista de niveles  $\alpha$  y sus correspondientes cortes:

$$A = \{\alpha_1/A_{\alpha_1}, \alpha_2/A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n/A_{\alpha_n}\} = \{\alpha/A_\alpha | \alpha \in (0, 1)\} \quad (3-11)$$

El rango de  $\alpha$  debe ser discretizado. éste tipo de representaciones son útiles a la hora de realizar operaciones entre conjuntos difusos en el mismo universo, ya que aplican las operaciones de conjuntos clásicos para cada nivel.

## 3.4. Estimación de incertidumbre

En la medición, se conoce un valor verdadero, el cual es siempre único. Así, se puede definir un conjunto  $A = X_0$ , es decir, el conjunto A que contiene el único valor  $X_0$ . De esta forma se puede definir una función característica una cantidad de valores medidos  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ :

$$G_A = \begin{cases} 1, & x_i \in A \\ 0, & x_i \notin A \end{cases} \quad (3-12)$$

Sin embargo, apoyándose en la teoría de conjuntos difusos, se puede considerar una transición entre el conjunto de datos dentro de un intervalo definido  $B$  y el conjunto  $A$ . A esta relación se le llama función de subordinación [16] y se define de la siguiente manera:

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & x_i \leq X_0 \\ \mu_2(x), & x_i \geq X_0 \end{cases} \quad (3-13)$$

Donde  $\mu_1(x) \in [0, 1]$  y  $\mu_2(x) \in [0, 1]$ . Básicamente, la función  $u(x)$  describe como los valores medidos concuerdan con el conjunto A. En la figura **3-5** se puede observar que  $u_1(x)$  asciende mientras que  $u_2(x)$  decrece. También se encuentra definido un valor de  $\lambda \in [0, 1]$ . Así pues, se generan dos rangos cercanos a  $X_0$  que definen un intervalo de  $x$  subordinada en el conjunto A:

$$U_{F_\lambda} = S_1 + S_2 \quad (3-14)$$

Donde  $U_{A_\lambda} = \lambda$ . El valor de  $\mu(x)$  hace referencia al grado de subordinación de  $x$  en el conjunto A.

Así, para un valor medido  $x_i$  y dado un valor de  $\lambda$ , se obtiene el rango  $U_{F_\lambda}$ . Esto muestra que el rango de dispersión de la variable medida  $x_i$  es  $U_{F_\lambda}$  referido al valor real  $X_0$ , como se

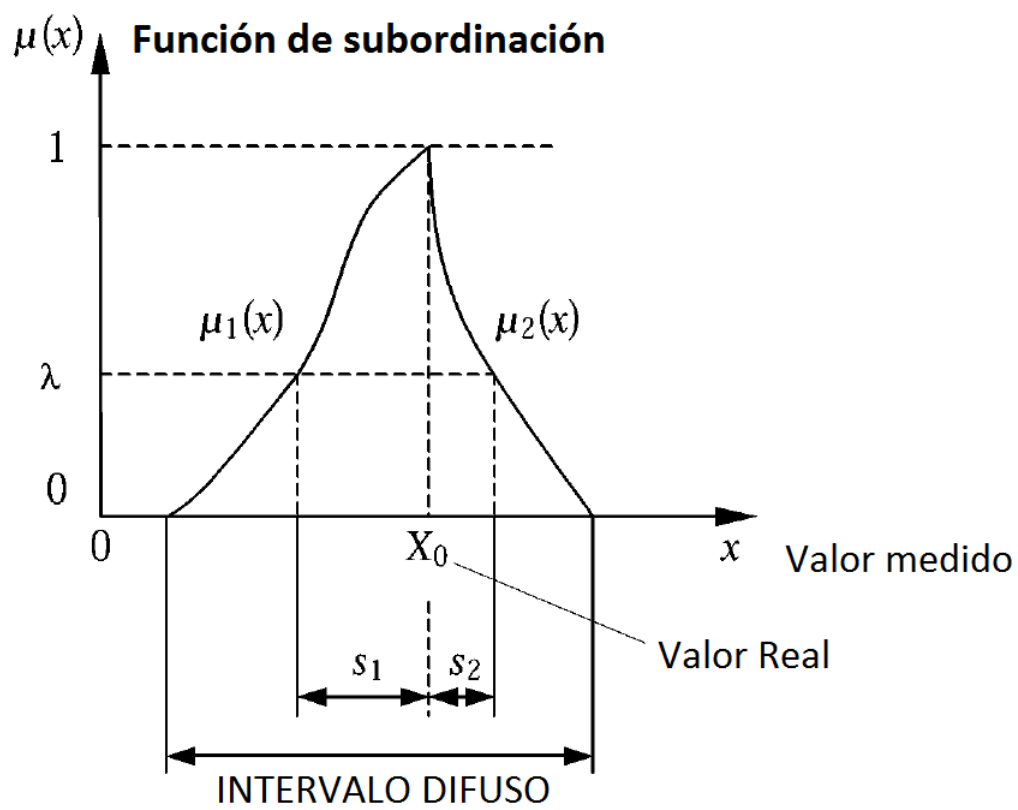


Figura 3-5.: Función de subordinación

muestra en la figura 3-5). Conceptualmente hablando, lambda es el nivel óptimo, es decir, el valor para el cual pueden ser validos los valores que toman las mediciones  $x_i$ ;  $B$  es el intervalo difuso que se genera a partir de la función de subordinación  $y$ ;  $U_{F_\lambda}$  el intervalo generado a partir del nivel óptimo utilizado  $\lambda$ . La función característica es la siguiente:

$$G_{A_\lambda}(x) = \begin{cases} 1(\text{true}), & \mu_A(x) \leq \lambda \\ 0(\text{false}), & \mu_A(x) < \lambda \end{cases} \quad (3-15)$$

La ecuación 3-15 determina que los valores de  $x$  en el intervalo  $U_{F_\lambda}$  son válidos y utilizables, representados por el estado 1 (verdadero), mientras que los valores fuera de dicho intervalo no son válidos, representados por el estado 0 (falso). Así, teniendo en cuenta las bases de la teoría de la medición, la incertidumbre se puede definir como el intervalo obtenido  $U_{F_\lambda}$ .

Hablando de  $\lambda$  en términos de la teoría de conjuntos difusos, se puede definir como un número difuso cuyo valor alcanza su máximo en 0, 5 y, que define los límites de validez del conjunto de números que se está evaluando. Para la mayoría de aplicaciones, se define un  $\lambda = 0, 5$ . Sin embargo, cuando se cuenta con pocos datos ( $n \leq 200$ ), se usa un valor de  $\lambda = 0, 4$ .

El valor de  $X_0$  se puede obtener a partir de un análisis estadístico de los datos. En la figura 3-5 se define un valor de  $x_v$ , que es el valor de  $x$  cuando  $\mu(x) = 1$  y se usa para estimar  $X_0$ :

$$X_o \approx x|_{\mu(x)=1} = x_v \quad (3-16)$$

### 3.4.1. Obtención de parámetros

La función de subordinación se puede definir como una función de densidad de probabilidad (PDF). Si  $p = p(x)$  es conocida, se define dicha función de la siguiente manera:

$$\mu(x) = \frac{p(x) - p_{min}}{p_{max} - p_{min}}; p_{min} \neq p_{max} \quad (3-17)$$

donde  $p_{min}$  y  $p_{max}$  son los valores máximos y mínimos de la función de probabilidad  $p(x)$ . La ecuación 3-17 mapea la función de probabilidad en el intervalo  $[0, 1]$  obteniendo la función subordinada  $u(x)$ . Teniendo en cuenta que los datos se van a tratar como número difusos, se deben definir en el intervalo  $[0, 1]$ . Esto se logra con las siguientes transformaciones lineales:

$$\eta_v = \frac{x_v - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (3-18)$$

$$\eta(x) = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (3-19)$$

$$\tau(x) = |\eta(x) - \eta_v| = \frac{|x - x_v|}{x_{max} - x_{min}} \quad (3-20)$$

De esta manera se mapean los datos  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$  y se obtiene el valor medido como un numero difuso  $\tau(x)$ .

Para determinar  $U_{F_\lambda}$ , que se define como la incertidumbre de la medición, se deben encontrar los intervalos  $s_1$  y  $s_2$ :

$$U_{F_\lambda} = S_1 + S_2 = |x - x_v|_{\mu_1(x)=\lambda} + |x - x_v|_{\mu_2(x)=\lambda} \quad (3-21)$$

$$U_{F_\lambda} = (\tau|_{\mu_1(x)=\lambda} + \tau|_{\mu_2(x)=\lambda}) (x_{max} - x_{min}) \quad (3-22)$$

$$U_{F_\lambda} = (\xi_1 + \xi_2)(x_{max} - x_{min}) \quad (3-23)$$

Así, basándose en lo anterior, se pueden representar cada uno de los intervalos como se muestra en la figura **3-5**. Las funciones de mapeo  $u_1(\tau)$  y  $u_2(\tau)$  se pueden obtener mediante los valores de  $u_{1j}(\tau_j)$  y  $u_{2j}(\tau_j)$  para cada  $j = 1, 2, \dots$

Ahora bien, para obtener los valores tanto de  $x_v$  y  $v$  como de la función de probabilidad, se utiliza el método para la estimación utilizado normalmente para obtener un área bajo la curva. Cuando el número de datos es grande (generalmente  $n \leq 30$ ), los valores obtenidos se pueden dividir en  $q$  grupos. En cada grupo, la media es  $d_j$  y la frecuencia es  $m_j$ . La media del grupo que tiene la mayor frecuencia es el valor de  $x_v$  y el número del grupo es el valor de  $v$ . Si hay varias frecuencias para las cuales se tienen varios valores de  $x_v$  y  $v$ , los valores finales de dichas variables son la media para cada resultado. Así:

$$p_{1j}(x_j) = m_j; j = 1, 2, \dots, v \quad (3-24)$$

$$p_{2j}(x_j) = m_j; j = v, v + 1, \dots, q + 1 \quad (3-25)$$

### 3.4.2. Algoritmo de estimación

Una vez definidos todos los parámetros y operaciones para obtener la incertidumbre, se presenta el algoritmo para la estimación de la misma[16]:

- a) Obtener los datos que se van a analizar  $x_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- b) Reorganizar los datos para generar un nuevo conjunto  $x_{i^*}$
- c) Obtener los valores de  $x_v$  y  $v$ .

- 
- d) Obtener los valores de probabilidades para cada función  $p_{1j}(x_j^*) = m_j$  ( $j = 1, 2, \dots, v$ ) y  $p_{2j}(x_j^*) = m_j$  ( $j = v, v + 1, \dots, n$ ).
  - e) Obtener los valores de la función subordinada  $u(x)$  utilizando los valores de probabilidad obtenidos.
  - f) Obtener los valores de  $n(x)$  y  $\tau$  para evaluar los valores de la función subordinada para  $\tau$ .
  - g) Obtener  $U_{F_\lambda}$  (incertidumbre) utilizando los valores de  $u(\tau)$  teniendo en cuenta el valor de  $\lambda$  definido ( $\lambda = 0,5$ ).

## 4. Estimación de incertidumbre mediante estimación de dos puntos

En éste capítulo se presenta la estimación de los momentos estadísticos de una función mediante el proceso de estimación de dos puntos, donde, de alguna manera se propagan los momentos de las variables que definen la función. Éste procedimiento es útil a la hora de obtener información estadística de funciones sin las restricciones que presentan otros métodos como la expansión por series de Taylor. Aquí, se utiliza ésta metodología para estimar la incertidumbre de una función con varias variables de diferente comportamiento.

### 4.1. Estimación de momentos

En algunos casos se desea obtener algún tipo de información estadística de una función de variables aleatorias en términos de la información estadística conocida de las variables que conforman dicha función. En éste caso, información estadística hace referencia a los primeros momentos (valor esperado) de una variable aleatoria. Los procedimientos que se utilizan normalmente para la estimación de los momentos de una función se basan generalmente en la expansión por series de Taylor. Sin embargo, dicho procedimiento tiene restricciones fuertes sobre la función para poder ser aplicado y requiere la obtención de la derivada de la misma. Así, éste método basado en los momentos de las variables de la función permiten obviar algunas de las restricciones que se generan en otro tipo de estimaciones.

Se tienen una o varias variables aleatorias  $X$ , con una función de densidad de probabilidad (PDF)  $f_X(x)$  y otra variable  $Y$  definida como una función de  $X$ ,  $Y = g(X)$ . La cuestión radica en cómo se puede aproximar los momentos de menor orden de la función de densidad de probabilidad de  $Y$ ,  $f_Y(y)$  usando solamente los momentos de menor orden de  $f_X(x)$  y la función  $g(X)$ .

Como se dijo anteriormente, el primer paso que se realiza es la aproximación de  $g(X)$  por series de Taylor, descomponiéndola en términos de menor orden y obteniendo una aproximación de los momentos. Esto requiere calcular o aproximar las derivadas de la función, lo que podría significar un tratamiento algebraico o numérico demasiado engorroso.

El planteamiento de la metodología se basa en reemplazar la variable aleatoria continua  $X$  por una variable aleatoria discreta cuya función de masa de probabilidad (PMF)  $p_X(x)$  tenga los mismos momentos de orden  $m$  que  $f_X(x)$ . Así, se realiza la transformación de  $p_X(x)$  a través de la función  $Y = g(X)$  para obtener una nueva función discreta con función de masa de probabilidad  $p_Y(y)$ . Finalmente se utiliza ésta última función para calcular los momentos, que se pueden considerar una aproximación de los momentos de la función continua  $Y$ . [14]

El primer momento de  $f_X(x)$  sobre el origen es la media,  $u_X$ :

$$\mu_X = \int x f_X(x) dx \quad (4-1)$$

Los momentos centrales de orden más alto (orden  $m$ ) de  $f_X(x)$  son:

$$\mu_{X_m} = \int (x - \mu_X)^m f_X(x) dx \quad (4-2)$$

Se utiliza la notación  $u_X^m$  para el  $m$ -ésimo momento central para distinguirlo de la  $m$ -ésima potencia de  $u_X$ . El segundo momento central,  $u_X^2$ , es la varianza y su raíz cuadrada es la desviación estándar  $\sigma_X$ . La función de masa de probabilidad discreta tiene valores diferentes de cero para un número finito de puntos. Los momentos correspondientes de la función  $p_X(x)$  son:

$$\mu_{X_m} = \sum (x - \mu_X)^m p_X(x) \quad (4-3)$$

Así, igualando los momentos de  $f_X(x)$  y  $p_X(x)$  se tiene que:

$$\mu_{X_m} = \int (x - \mu_X)^m f_X(x) dx = \sum (x - \mu_X)^m p_X(x) \quad (4-4)$$

Una función de densidad de probabilidad puede ser representada con el nivel deseado de exactitud utilizando los momentos de orden necesarios. En principio, hay infinitas funciones de masa de probabilidad que satisfacen los momentos de bajo orden de la ecuación 4-4. Para limitarla a una representación única, el método plantea utilizar solamente PMF con dos, tres u otro número de masas discretas, esto dependiendo del orden de los momentos que se obtienen de la ecuación 4-4.

## 4.2. Casos definidos para la estimación de momentos

Éste método, desarrollado por Emilio Rosenblueth en 1975 [14], define tres casos:

- a) Cuando  $Y$  es una función de una variable  $X$ , donde la media, varianza y el coeficiente de asimetría son conocidos.
- b) Cuando  $Y$  es una función de una variable  $X$  cuya distribución es simétrica y se puede considerar Gaussiana.
- c) Cuando  $Y$  es una función de  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , cuyas distribuciones son simétricas y pueden estar correlacionadas.

En el caso del procedimiento presentado en éste documento, los cálculos se hacen en dos puntos, utilizando la siguiente notación:

$$E[Y^m] \cong P_+ y_+^m + P_- y_-^m \quad (4-5)$$

En ésta ecuación,  $Y$  es una función de  $X$ ,  $Y = g(X)$ ;  $E[Y^m]$  es el valor esperado elevado a la  $m$ -ésima potencia;  $y_+$  es el valor de  $Y$  evaluado en el punto  $x_+$ , que es mayor a la media  $u_x$ ;  $y_-$  es el valor de  $Y$  evaluado en el punto  $x_-$ , que es menor a la media  $u_x$ ; y  $P_+$ ,  $P_-$  son los pesos. Así, el problema radica en encontrar los valores apropiados para  $x_+$ ,  $x_-$ ,  $P_+$  y  $P_-$  [5].

### 4.2.1. Caso 1

En el primer caso,  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias reales, y se define  $Y = Y(X)$ , Dada cierta información de la variable  $X$  (valor esperado, desviación estándar y coeficiente de asimetría), se deben cumplir cuatro condiciones sobre los momentos de  $X$  para que la ecuación 4-5 sea válida:

$$P_+ + P_- = 1 \quad (4-6)$$

$$P_+ X_+ + P_- X_- = \mu_X \quad (4-7)$$

$$P_+(X_+ - \mu_X)^2 + P_-(X_- - \mu_X)^2 = \sigma^2 \quad (4-8)$$

$$P_+(X_+ - \mu_X)^3 + P_-(X_- - \mu_X)^3 = v_x \sigma^3 \quad (4-9)$$

Donde  $v_x$  es el coeficiente de asimetría de  $X$  ( $v_x = u_{x3}/\sigma_X^3$ ). La soluciones a estas ecuaciones son:

$$x_+ = \mu_X + \left( \frac{v_x}{2} + \sqrt{1 + \left( \frac{v_x}{2} \right)^2} \right) \sigma_x \quad (4-10)$$

$$x_- = \mu_X + \left( \frac{v_x}{2} - \sqrt{1 + \left( \frac{v_x}{2} \right)^2} \right) \sigma_x \quad (4-11)$$

$$P_+ = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v_x}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (v_x/2)^2}} \right); P_- = 1 - P_+ \quad (4-12)$$

### 4.2.2. Caso 2

En el caso en que  $X$  sea simétrica y aproximadamente Gaussiana, se plantea que  $x$  se puede estimar con más de dos puntos. Por ejemplo, una estimación de tres puntos podría realizarse definiendo un punto central en  $x = u_x$  y dos puntos  $x_+$  y  $x_-$  simétricamente distribuidos sobre la media. El peso de los puntos centrales se define como  $P$ , mientras que lo demás se mantiene igual. Así:

$$2P_+P = 1 \quad (4-13)$$

$$2P_+(x_+ - \mu_x)^2 = \sigma^2 \quad (4-14)$$

$$2P_+(x_+ - \mu_x)^4 = 3\sigma_X^4 \quad (4-15)$$

La ecuación 4-15 se genera a partir de que el valor esperado del cuarto momento central de una distribución normal es  $3\sigma_X^4$ . La soluciones de éstas ecuaciones son:

$$P = \frac{2}{3}; P_+ = P_- = \frac{1}{6} \quad (4-16)$$

$$X_{\pm} = \mu_X \pm \sqrt{3}\sigma_X \quad (4-17)$$

Y, de forma análoga al caso uno:

$$E[Y^m] \cong P_+y_+^m + Py_{\mu}^m + P_-y_-^m \quad (4-18)$$

Donde  $y_u$  es el valor de  $Y$  evaluado en  $u_X$ . Rosenblueth encontró que se pueden encontrar aproximaciones de un orden más alto usando más puntos. Hay que recordar que, para que se pueda realizar una aproximación con más de dos puntos,  $X$  debe ser simétrica y aproximarse a una distribución Gaussiana.

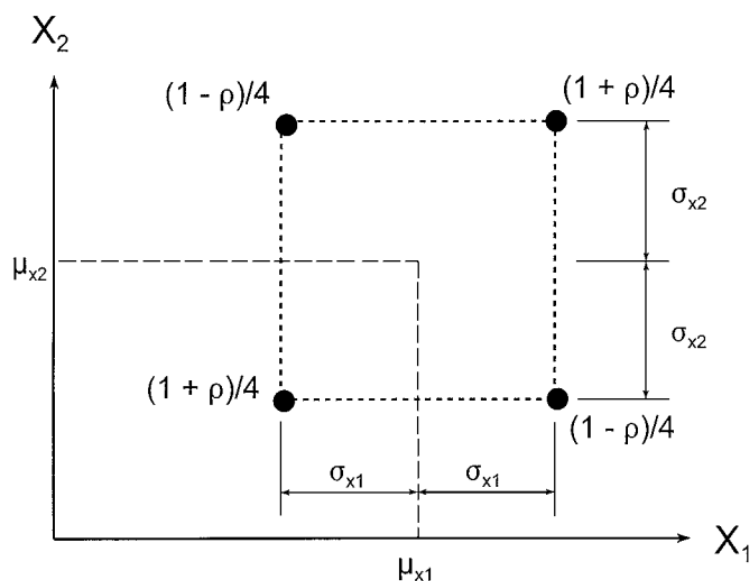


Figura 4-1.: Diagrama de los puntos y los pesos obtenidos mediante el método de momentos.

### 4.2.3. Caso 3

El tercer caso es el que mayor número de aplicaciones tiene y es cuando  $Y$  es una función de  $n$  variables que tienen un coeficiente de asimetría igual a cero pero que pueden estar correlacionadas. éste caso es una generalización del caso uno cuando se el coeficiente de asimetría no se tiene en cuenta. El procedimiento selecciona  $2^n$  datos para garantizar que el valor de cada variable se encuentre dentro de una desviación estándar por encima y por debajo de la media. Si las variables no se encuentran correlacionadas, la función  $Y$  se evalúa en cada punto y el peso para cada punto sería, por ejemplo, en el caso de una función con dos variables,  $P = 0,25$  (esto es porque serían 4 los puntos que se escogerían para dos variables  $X_1$  y  $X_2$ ).

Ahora bien, si existe una correlación que se denota como  $p$ , los puntos se encontrarían igualmente una desviación estándar por encima o por debajo de la media para cada variable, pero los pesos cambiarían. Para el caso de dos variables  $X_1$  y  $X_2$ , para los puntos  $(u_{X_1} + \sigma_{X_1}, u_{X_2} + \sigma_{X_2})$  y  $(u_{X_1} - \sigma_{X_1}, u_{X_2} - \sigma_{X_2})$ , los pesos toman el valor  $(1 + p)/4$ , y los pesos para los otros dos puntos  $(u_{X_1} + \sigma_{X_1}, u_{X_2} - \sigma_{X_2})$  y  $(u_{X_1} - \sigma_{X_1}, u_{X_2} + \sigma_{X_2})$ , se convierten en  $(1 - p)/4$ . La ubicación de los puntos junto a sus pesos se muestran en la figura 4-1.

Generalizando, si existen  $n$  variables, se escogen  $2^n$  puntos para incluir todas las posibles combinaciones, cumpliendo con que cada variable se encuentra una desviación estándar por encima o por debajo de la media. Si  $s_i$  es positivo cuando el valor de la  $i$ -ésima variable está una desviación estándar por encima de la media y negativa cuando su valor se encuentra

una desviación estándar por debajo de la media, los pesos son:

$$P(S_1, S_2, \dots, S_n) = \frac{1}{2^n} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n S_i S_j P_{ij} \right] \quad (4-19)$$

Y, de nuevo:

$$E[Y^m] = \sum P_i (y_i)^m \quad (4-20)$$

Donde  $y_i$  es el valor de  $Y$  evaluado en  $x_i$ , e  $i$  es una combinación apropiada de signos “positivo” y “negativo” que indican la ubicación de  $x_i$ .

Cuando las variables no están correlacionadas, los pesos para cada variable toman el valor de  $P = 1/2^n$ . Sin embargo, Rosenblueth propone que, al darse la condición de no correlación, se puede realizar la siguiente aproximación:

$$\frac{\bar{Y}}{y} = \frac{\bar{Y}_1}{y} \frac{\bar{Y}_2}{y} \dots \frac{\bar{Y}_n}{y} \quad (4-21)$$

$$(1 + V_Y^2) = (1 + V_{Y_1}^2)(1 + V_{Y_2}^2) \dots (1 + V_{Y_n}^2) \quad (4-22)$$

En las ecuaciones 4-21 y 4-22,  $\bar{Y}$  es el valor esperado de  $Y$ ;  $y$  es el valor de  $y$  evaluada con los valores de la media de las variables ( $y = y(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$ );  $\bar{Y}_i$  es la media de  $Y$  evaluada con todas las variables excepto para la  $i$ -ésima variable, que toma el valor de su media;  $V_Y$  es el coeficiente de variación de  $Y$  ( $COV = \sigma_Y/u_Y$ ); y  $V_{Y_i}$ , el coeficiente de variación de  $Y$  calculado como si la  $i$ -ésima variable fuera la única variable aleatoria de la función y las demás con sus valores medios.

### 4.3. Estimación de incertidumbre

Resumiendo, el método de estimación de dos puntos se utiliza para el cálculo de momentos de una cantidad aleatoria que es una función de una o más variables aleatorias. Sea  $x_i$  una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad  $f_{x_i}$ . Teniendo que  $A = h(x)$  es una función de  $x_i$ , el método presentado usa los valores de dos probabilidades para reemplazar  $f_{x_i}$ , utilizando los primeros tres momentos de dicha función [15], como se muestra en la figura 4-2.

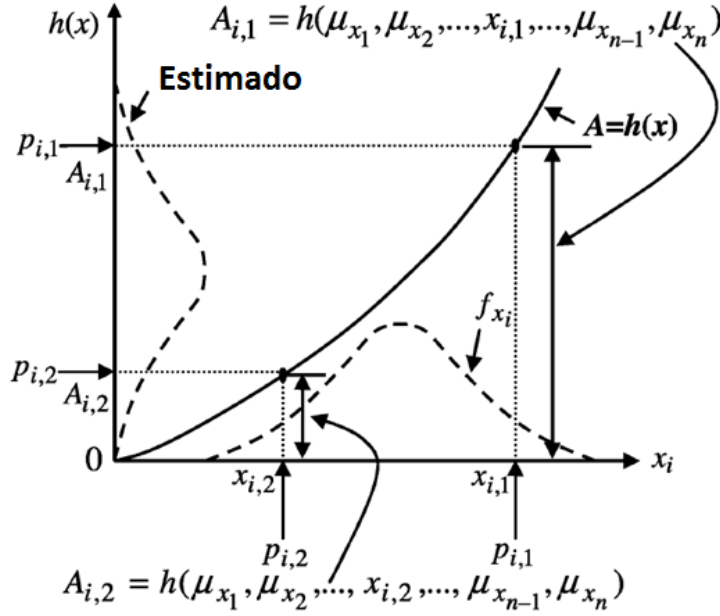


Figura 4-2.: Representación gráfica del método de los momentos.

### 4.3.1. Obtención de parámetros

Con los valores de los dos puntos  $x_{i,1}$  y  $x_{i,2}$  se obtienen dos estimados de  $A$ ,  $A_{i,1}$  y  $A_{i,2}$  a través de la relación entre  $x_i$  y  $h(x)$ . Así, se obtienen los dos pesos  $p_{i,1}$  y  $p_{i,2}$  escalando éstos estimados y se obtiene la desviación estándar de  $A$  utilizando el primer y segundo momento.

La desviación estándar de  $A$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\sigma_U = \sqrt{\text{Var}(A)} = \sqrt{E(A^2) - [E(A)]^2} \quad (4-23)$$

Donde

$$E(A^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 p_{ij} [h(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, x_{i,k}, \dots, \mu_{x_{n-1}}, \mu_{x_n})]^j \quad (4-24)$$

es el  $j$ -ésimo momento de  $A$ .  $x_{i,k}$  es la ubicación de la concentración, definida como:

$$x_{i,k} = \mu_{x_i} + \xi_{i,k} \sigma_{x_i} \quad (4-25)$$

$\mu_{x_i}$  y  $\sigma_{x_i}$  son la media y la desviación estándar, obtenidas de  $f_{x_i}$ , y el valor de  $\xi$  es:

$$\xi_{i,k} = \frac{\lambda_{i,3}}{2} + (-1)^{3-k} \sqrt{n + (\lambda_{i,3}/2)^2} \quad (4-26)$$

$$\lambda_{i,3} = \frac{E[(x_i - \mu_{x_i})^3]}{(\sigma_{x_i})^3} \quad (4-27)$$

Donde  $k = 1, 2$  y  $\lambda_{i,3}$ , que se define como el coeficiente de asimetría, que depende del tercer momento de  $x_i$ . Cada  $p_{i,k}$  denota los pesos de los puntos ubicados en  $(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, x_{i,k}, \dots, u_{x_{n-1}}, u_{x_n})$ . Estos pesos deben cumplir las condiciones que se presentan en las ecuaciones 4-6, 4-7 y 4-8. Así, los pesos se obtienen de la siguiente forma:

$$p_{i,k} = \frac{1}{n} (-1)^k \frac{\xi_{i,3-k}}{\varsigma_i} \quad (4-28)$$

Donde  $\varsigma = 2\sqrt{(n + (\lambda_{i,3}/2)^2)}$  y  $\lambda_{i,3}$  es el coeficiente de asimetría evaluado con la ecuación 4-27. El tercer momento se obtiene de la siguiente forma:

$$E[(x_i - \mu_{x_i})^3] = \sum_{l=0}^m (x_{i,l} - \mu_{x_i})^3 P(x_{i,l}) \quad (4-29)$$

Donde  $m$  es el número de observaciones de  $x_i$  y  $P(x_{i,l})$  es la probabilidad de cada observación  $x_{i,l}$ .

### 4.3.2. Algoritmo de estimación

Una vez definidos todos los parámetros y datos requeridos para obtener la incertidumbre, se presenta a continuación el algoritmo para la estimación de la misma:

- a) Seleccionar el parámetro incierto  $x_i$ .
- b) Obtener el valor de  $\lambda_{i,3}$  usando la ecuación 4-27.
- c) Obtener los valores de los dos puntos de cada  $x_i$ :
  - Obtener  $x_{i,k}$  usando la ecuación 4-25.
  - Obtener  $p_{i,k}$  usando la ecuación 4-28.
  - Obtener  $A_{i,k}$  en los valores de  $(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, x_{i,k}, \dots, u_{x_{n-1}}, u_{x_n})$ .
- d) Actualizar los valores del primer y segundo momento de  $A$ :
 
$$E(A) = E(A) + p_{i,k}A(i, k) ; E(A^2) = E(A^2) + p_{i,k}[A(i, k)]^2$$
- e) Repetir el procedimiento para cada uno de las variables aleatorias que hacen parte de la función, actualizando siempre los valores del primer y segundo momento.
- f) Obtener el valor de la desviación estándar usando la ecuación 4-23.

## 5. Implementación de las metodologías y resultados

Para realizar la estimación de incertidumbre, primer paso es la definición del mensurando. Esto es, identificarlo y expresarlo de forma matemática. Esto es, la determinación de las variables que influyen en la determinación del mensurando; y la selección de las magnitudes de entrada que queremos tener en cuenta a partir del grado de precisión que se requiera.

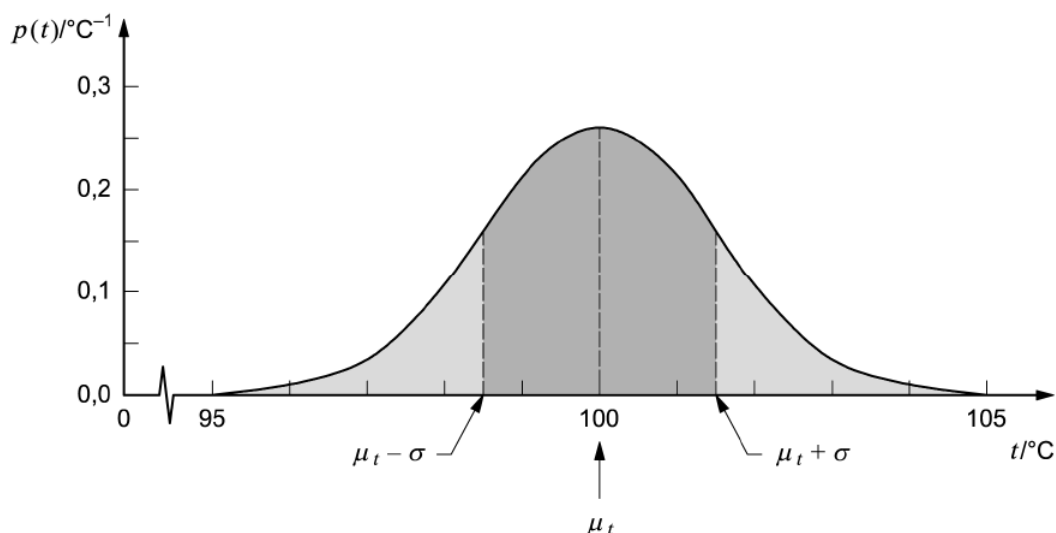
Luego de tener definido el modelo con las magnitudes de entrada, se deben identificar los factores que afectan significativamente la determinación del mensurando pero que no forman parte de su representación. Es decir, aquellas que no se pueden representar en el modelo matemático pero que afectan el mensurando, llamadas fuentes de incertidumbre. Algunas de las fuentes de incertidumbre típicas son:

- a) Repetibilidad de las mediciones: número de veces que se repite el experimento.
- b) Calibración del patrón de referencia: certeza de los valores que reproduce el patrón utilizado.
- c) Resolución del instrumento de medición: capacidad del instrumento para la adquisición de más información del mensurando.

Cada una de las fuentes de incertidumbre se representa estadísticamente como una función de probabilidad, siendo el mejor estimado de la dispersión de los datos. Existen diferentes tipos de distribuciones; algunas de las más comunes se muestran a continuación.

### **Distribución normal:**

Éste tipo de distribución se caracteriza por el hecho de que la mayor parte de los datos se encuentran en una zona concentrada, y los restantes se van dispersando más y más a medida que nos acercamos a los extremos. En otras palabras, existe mayor probabilidad de que el valor buscado se localice en la zona donde se repite más veces ese valor. Así, basándose en la definición anterior, se encuentra que tiene forma de campana, como se muestra en la figura 5-1, al igual que es asintótica en la base.



**Figura 5-1.:** Ejemplo distribución Normal

Éste tipo de comportamientos es típico (aunque no es la regla) cuando se repiten experimentos sistemáticamente y en múltiples ocasiones, para obtener el valor más probable.

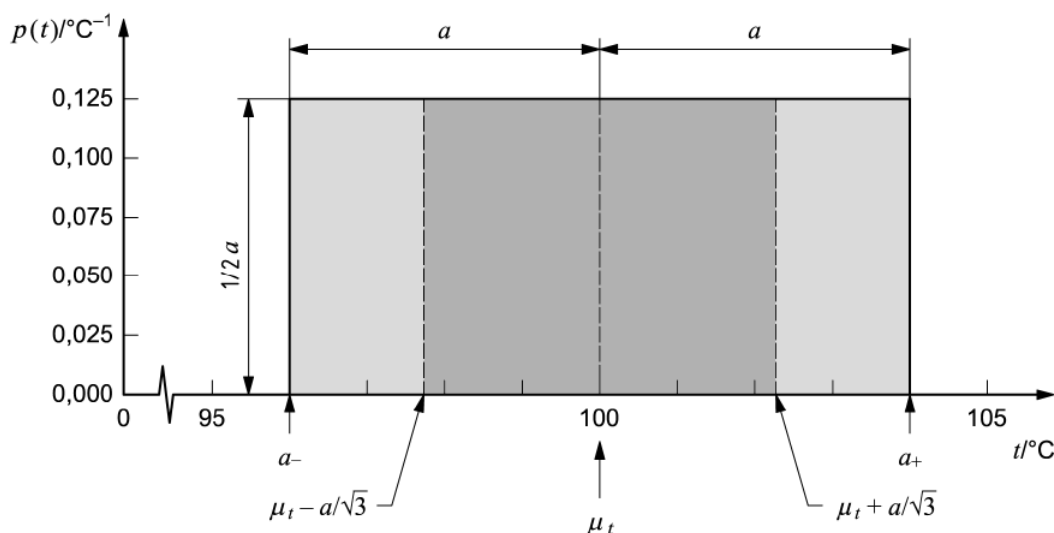
#### **Distribución rectangular:**

éste tipo de distribución define límites claros, sobre los cuales se estipula un intervalo sobre el cual todos los datos tienen la misma probabilidad de salir. éste tipo de distribución se utiliza para describir el comportamiento de un instrumento de medida teniendo en cuenta su resolución.

Es decir, los límites de la distribución son la resolución del instrumento y la variable que se va a medir una cierta probabilidad constante sobre el intervalo que definen dichos límites. En la figura 5-2 se muestra la gráfica de la función de distribución de probabilidad rectangular.

La GUM define unos lineamientos para la obtención de la incertidumbre de medida a partir de un procedimiento dado, teniendo en cuenta ciertas características de los datos que se van a manejar. A continuación se presentan los pasos para la estimación de incertidumbre de forma resumida:

- a) Modelar el mensurando (magnitud que nos interesa medir).
- b) Identificar los factores que afectan significativamente la determinación del mensurando y que no se representan en el modelo matemático (magnitudes de influencia).
- c) Cuantificar el mensurando. Es decir, definir el mensurando junto con la representación de las incertidumbres.



**Figura 5-2.:** Ejemplo distribución rectangular

- d) Combinar la información obtenida para representarla de tal forma que se presente un intervalo en el que sea más probable encontrar el valor del mensurando.
- e) Informar los resultados obtenidos.

El alcance de éste trabajo se centra en los puntos *c*) y *d*), ya que los procedimientos planteados son justamente para encontrar esos valores de incertidumbre.

Como se dijo anteriormente, son varios los factores que afectan al mensurando y dependiendo de la forma en que lo hacen, se cuantifican de una u otra manera. Los métodos planteados en éste trabajo requieren una cantidad  $n$  de datos para realizar una simulación de Monte Carlo sobre las variables y el modelo que en éste caso se utilizará para verificar los resultados obtenidos. En éste caso, las estrategias planteadas para estimar incertidumbre se aplicarán a los modelos de dos divisores de alta tensión: el primero será un divisor netamente resistivo, donde la salida es la relación entre las resistencias de los brazos de alta tensión y baja tensión; el segundo será un divisor mixto (resistivo/capacitivo) cuya relación depende de los valores de capacitancia y resistencia del divisor y la capacitancia parásita que se pueda presentar. Así, el mensurando será la relación del divisor, siendo éste el que define el comportamiento del divisor. A continuación se presenta brevemente algunas características de los divisores de alta tensión.

## 5.1. Divisores de tensión

Los divisores de tensión para mediciones d.c., a.c. o impulsos se componen de resistores, capacitores o combinaciones de estos elementos, dependiendo del alcance del mismo. En general, los inductores no se utilizan en los divisores de tensión para realizar pruebas; sin embargo, existen los divisores de tensión inductivos y se usan sobre todo para la medición de tensiones de potencia a alta frecuencia. En general, los elementos anteriormente mencionados, en divisores de alta tensión, se encuentran instalados en recipientes cilíndricos aislados de los terminales del divisor y de tierra. Las dimensiones de un divisor, concretamente la altura, depende finalmente de la tensión máxima que deberá soportar. Así, para tensiones del orden de los Megavoltios, la altura de los divisores se hace grande[8]:

2,5 a 3 m/MV para voltajes d.c.;  
 2 a 2,5 m/MV para impulsos tipo rayo;  
 5m/MV o más para voltajes a.c.;

Uno de los problemas más complicados en la simulación de divisores de tensión es la representación de las capacitancias parásitas, donde la ubicación de los elementos que hacen parte tanto del divisor como del espacio de pruebas afectan dicho valor. También, hay que tener en cuenta que los divisores se componen un una gran cantidad de elementos, cada uno de los cuales puede tener valores distintos entre ellos (por ejemplo, una serie de 30 resistores), haciendo impráctica la representación de un circuito equivalente con parámetros distribuidos. Así, en [8] se propone una representación mediante una red de parámetros igualmente distribuidos.

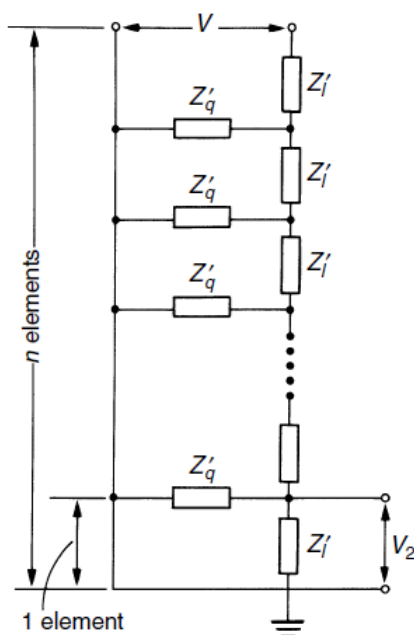
La representación de ésta red, para un divisor de tensión se muestra en la figura 5-3. Así, el sistema se representa mediante una  $n$  cantidad de elementos o secciones, donde las  $n$  impedancias  $Z_l'$  en serie generan una reducción de la tensión. Un igual número de impedancias  $Z_q'$  a tierra se distribuyen sobre el divisor. De ésta forma, la tensión de entrada  $V$  se ve reducida a una tensión de salida  $V_2$ . Las impedancias que hacen parte del divisor se presentan a continuación:

$$Z_l = \sum Z_l' = nZ_l'; \quad Z_q = \left( \sum \frac{1}{Z_q'} \right)^{(-1)} = \frac{Z_q'}{n} \quad (5-1)$$

El valor de  $n$  es, por definición, la relación del divisor de tensión  $V/V_2$ . A continuación se presentan las variantes que puede haber con respecto a los valores de las impedancias que componen un divisor de tensión.

### Divisor de tensión resistivo

La representación más general de los divisores es asumir que hay componentes inductivos  $L'$



**Figura 5-3.:** Componentes de un divisor de tensión

en los resistores  $R'$  al igual que capacitancias  $C_p'$  en paralelo con dichos resistores. Así, un divisor resistivo es aquel en el que las impedancias toman los valores indicados en la ecuación 5-2, deprecando el componente inductivo.

$$Z_l' = R_l'; Z_q' = C_p' \quad (5-2)$$

Éste tipo de divisores se utilizan principalmente para la medición de voltajes d.c.

### **Divisor de tensión mixto (resistivo / capacitivo)**

El principio de éste tipo de divisores reside en el hecho de querer cambiar el valor de la capacitancia parásita. De ésta forma, lo que se hace es ingresar al circuito capacitores en paralelo al resistor que forma el divisor. Así, se conforman los llamados divisores mixtos, es decir, cuyos componentes son capacitancias y resistores. Generalmente este tipo de arreglos se utilizan para atenuadores aplicados en los instrumentos de medición. Sin embargo, éste ajuste no es recomendado para compensar divisores resistivos utilizados para la medición de impulsos o señales de alta frecuencia, ya que inserción de un elemento que almacena energía, junto con la inductancia que cada capacitor que se añade al circuito generan una serie de frecuencias de resonancia que afectan directamente la medición.

### **Divisor de tensión capacitivo**

Como su nombre lo indica, éste tipo de divisores constan de capacitores en las ramas del mis-

mo. Esto capacitores pueden ser una serie de condensadores en un arreglo en serie o paralelo; o un capacitor construido específicamente para la aplicación (por ejemplo, un condensador de gas comprimido). éste tipo de divisores no son adecuados para la medición de impulsos con algún tipo de recorte o un fenómeno transitorio demasiado marcado. Sin embargo, para la medición de voltajes de impulsos tipo rayo pueden ser bastante útiles, siempre y cuando el transitorio del frente del impulso haya desaparecido.

## 5.2. Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una técnica que consiste en la generación de datos aleatorios con cierta función de distribución de probabilidad. Así, se evalúa la función para los datos generados y se obtienen sus valores para finalmente evaluar la incertidumbre del modelo. Cada una de las variables de entrada pueden tener diferentes distribuciones, pudiendo generar una asimetría en la función. Resumiendo, el proceso de simulación por Monte Carlo para la estimación de incertidumbre consiste en la generación de una población de variables aleatorias de entrada, generando una población del mensurando para el cálculo de la incertidumbre.

En éste caso, las variables que influyen en el mensurando son, como se dijo anteriormente, los resistores y capacitores de cada uno de los divisores. Sin embargo, cada uno de ellos también se puede considerar mensurandos, dependientes de otros valores como lo son la temperatura en el caso de los resistores y las dimensiones del divisor en el caso de las capacitancias. Así, la simulación de Monte Carlo se realiza a partir de las últimas variables mencionadas utilizando un modelo para cada variable del divisor. Los modelos del resistor y los capacitores se muestran a continuación:

```

%% MODELO DEL DIVISOR RESISTIVO
clear Raux Rbv;
Raux = Rt(1:n,1:m-1);          % Datos obtenidos de forma aleatoria
Rbv = Rt(1:n,m);              % Resistor del brazo de baja tension

for i=1:n
    Rav(i) = sum(Rt(i,:),2);    % Resistor del brazo de alta tension
end

for k=1:n
    r(k) = Rav(k) / Rbv(k);    % Relaci\{o\}n del divisor de tension
end

%% MODELO DEL DIVISOR CAPACITIVO RESISTIVO
clear r;
for i=1:n                      % Obtencion de datos del divisor
    Rda(i) = sum(Rt(i,:),2);
    Cd(i) = sum(C_inv(i,:),2);
    Cd(i) = 1 / Cd(i);
    Cp(i) = Cpar(i);
end

Rda = Rda'; Cd = Cd'; Cp = Cp';

```

```

for j=1:n                                % Capacitores del divisor mixto
    C_av(j) = Cd(j) + Cp(j);
    C_bv(j) = C(j);
end

for k=1:n
    r(k) = (C_bv(k)*(1+Rda(k)*C_av(k))) / (C_av(k));
    % Relacion del divisor de tension
end

```

Como se puede observar, el modelo del resistor muestra una dependencia de la temperatura y la capacitancia parásita muestra una dependencia respecto a las dimensiones de divisor. En el caso de la capacitancia utilizada en el divisor mixto, se introdujo una variación similar a la encontrada en las hojas de datos de las mismas. El número de datos recomendado para una simulación de Monte Carlo es de por lo menos  $n = 10000$ . En éste caso, para cada una de las variables que afectan los resistores y capacitores, se generan  $n = 10000$  datos con una cierta distribución de probabilidad.

### 5.3. Simulaciones y resultados

En el presente trabajo se plantean dos métodos para la estimación de la incertidumbre. El primero, basado en la teoría de conjuntos difusos, busca obtener directamente el intervalo sobre el cual es más probable encontrar el valor del mensurando; el otro, tiene un enfoque diferente, ya que se define un método para la estimación de la desviación estándar de los datos, un indicador de la incertidumbre que se utiliza para la obtención de la incertidumbre expandida (intervalo anteriormente comentado).

Teniendo esto en cuenta, se realizan las simulaciones para diferentes tipos de distribuciones para los datos generados mediante la simulación de Monte Carlo. Esto con el fin de observar el comportamiento del modelo a diferentes tipos de distribuciones de las variables de influencia. A continuación se enumeran las simulaciones realizadas.

- a) Distribuciones normales para cada variable: se define una distribución normal para cada una de las variables aleatorias generadas.
- b) Distribuciones uniformes para cada variable: se define una distribución uniforme para cada una de las variables aleatorias generadas.
- c) Distribuciones normales y uniformes para cada variable: se definen distribuciones tanto normales como uniformes de las variables aleatorias generadas.

El dato que se va a comparar entre las tres metodologías será la incertidumbre expandida. Es decir, un valor de intervalo sobre el cual se espera tener un porcentaje dado del conjunto de valores. Cabe anotar que dichas simulaciones se realizaron para cada uno de los divisores de alta tensión (resistivo y mixto).

En muchas ocasiones, las pruebas no se pueden realizar más de un número determinado de veces; ya sea por la naturaleza del procedimiento o porque simplemente las circunstancias no lo permiten. Así, se tomarán aleatoriamente de los datos simulados 10 datos y se obtendrán los intervalos que define la incertidumbre expandida utilizando cada una de las metodologías propuestas.

### 5.3.1. Distribuciones normales para cada variable

La primera simulación consiste en la generación de una población de datos con una distribución gaussiana. Primeramente se realiza para el divisor resistivo, en donde se deben generar los valores de los resistores de alta y baja tensión para encontrar la relación del divisor (mensurando):

$$r = \frac{R_e}{R_s} \quad (5-3)$$

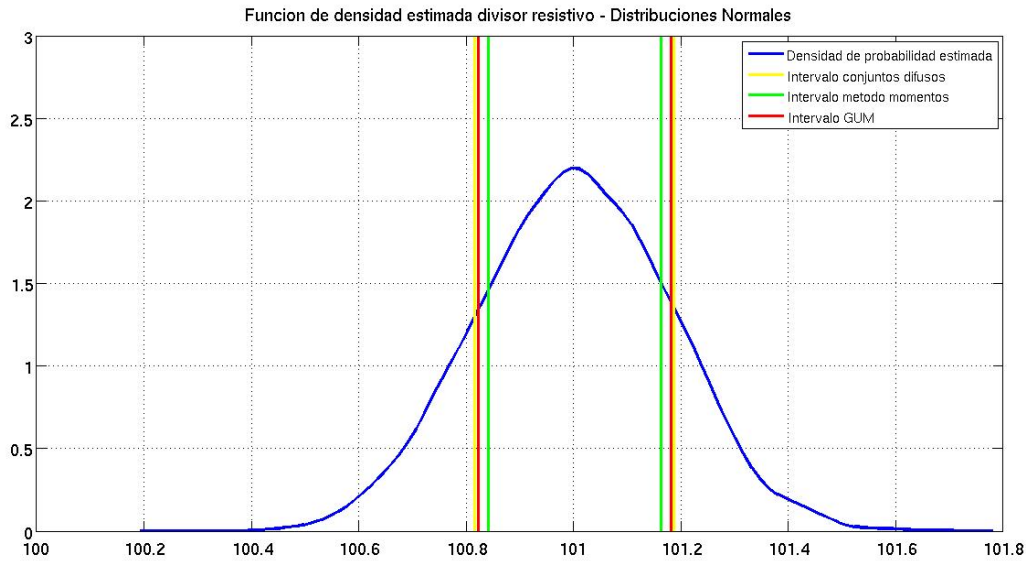
Donde  $R_e = R_{at} + R_{bt}$  y  $R_s = R_{bt}$ . Así se obtiene una población de datos para la relación del divisor sobre la cual se va encontrar la incertidumbre. En la figura 5-4 se muestra la distribución de la relación del divisor encontrada con la simulación de Monte Carlo y la incertidumbre encontrada usando la GUM y los dos métodos propuestos.

Como se observa en la figura 5-4, la distribución obtenida es muy semejante a una distribución normal. Como se dijo anteriormente, la metodología basada en conjuntos difusos define directamente un intervalo sobre el cual es más probable encontrar el valor del mensurando; pero, tanto el método basado en los momentos estadísticos como el planteado en la GUM requiere encontrar la desviación estándar y definir un factor de cobertura. Para este caso, se define un factor de cobertura conforma lo dice la GUM, ya que el procedimiento planteado solamente se enfoca en la obtención de la desviación estándar. Para el caso de los valores con distribución normal, se compara el intervalo que ofrece la desviación estándar; esto es, un intervalo que abarca el 68,27% de los datos analizados.

Se tiene entonces que tanto el método de la GUM como el basado en los momentos estadísticos de las variables arrojan valores muy similares, siendo levemente más amplio el primero. El otro método ofrece un intervalo similar pero más reducido, lo que indica que obteniendo la incertidumbre de ésta forma el nivel de confianza es un poco más reducido, sin haber una diferencia demasiado amplia.

Ahora, la siguiente simulación se realiza para el divisor mixto, en donde el modelo de la relación de tensión cambia significativamente:

$$r = \frac{C_{bt}(1 + R_{at}C_{at})}{C_{at}} \quad (5-4)$$



**Figura 5-4.:** Distribución relación divisor resistivo con distribuciones normales.

Donde  $C_{bt}$  es el capacitor de baja tensión,  $R_{at}$  es la resistencia del brazo de alta tensión y,  $C_{at}$  es el capacitor de alta tensión. En la figura 5-5 se muestran los resultados obtenidos para este caso. El procedimiento para la obtención de la incertidumbre expandida es el mismo para esta simulación. Como se observa, la distribución es muy similar a una distribución normal. Sin embargo, hay una diferencia en la cresta de la función, donde se logra distinguir un pequeño valle alrededor de la media. A pesar de que se puede definir como una distribución normal, es claro que a pesar de que todas las magnitudes que influyen en las variables de la función tienen dicha distribución, la distribución de salida no necesariamente tiene ese comportamiento. De nuevo, los resultados obtenidos mediante el método de momentos y la GUM son muy similares, brindando un nivel de confianza similar; mientras que el resultado mediante el método basado en lógica difusa ofrece un nivel de confianza un poco más reducido.

### 5.3.2. Distribuciones uniformes para cada variable

La siguiente simulación consiste en cambiar las distribuciones de las magnitudes de influencia en las variables de las relaciones de tensión a una distribución uniforme. Así, se aplica la misma ecuación para la relación de tensión del divisor resistivo y se obtienen los resultados que se muestran en la figura 5-6.

Como se observa, la distribución de la relación de tensión es muy similar a una distribución uniforme. Como en el caso de las distribuciones normales, se desea obtener un rango sobre el cual se puede tener un nivel de confianza dado. Si una variable viene descrita por

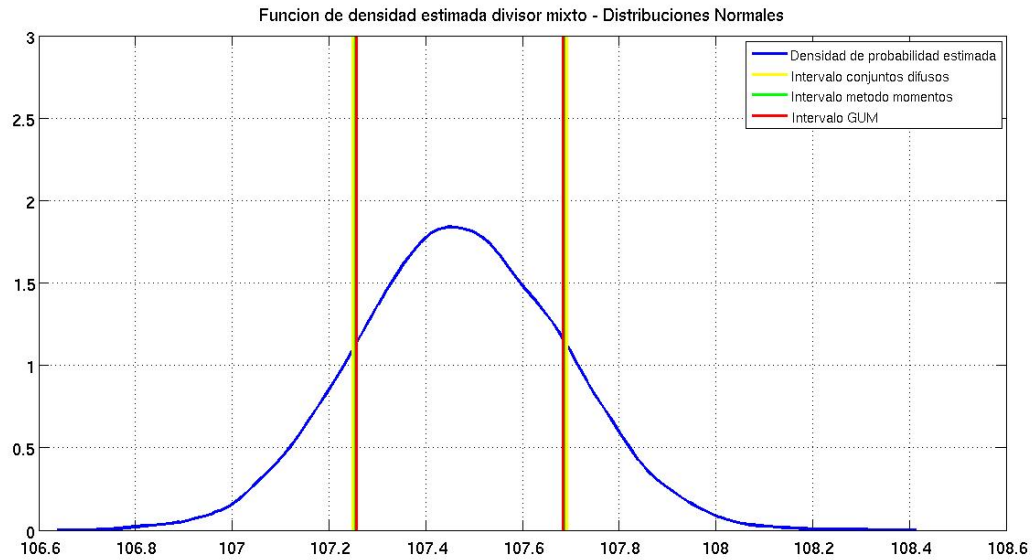


Figura 5-5.: Distribución relación divisor mixto con distribuciones normales.

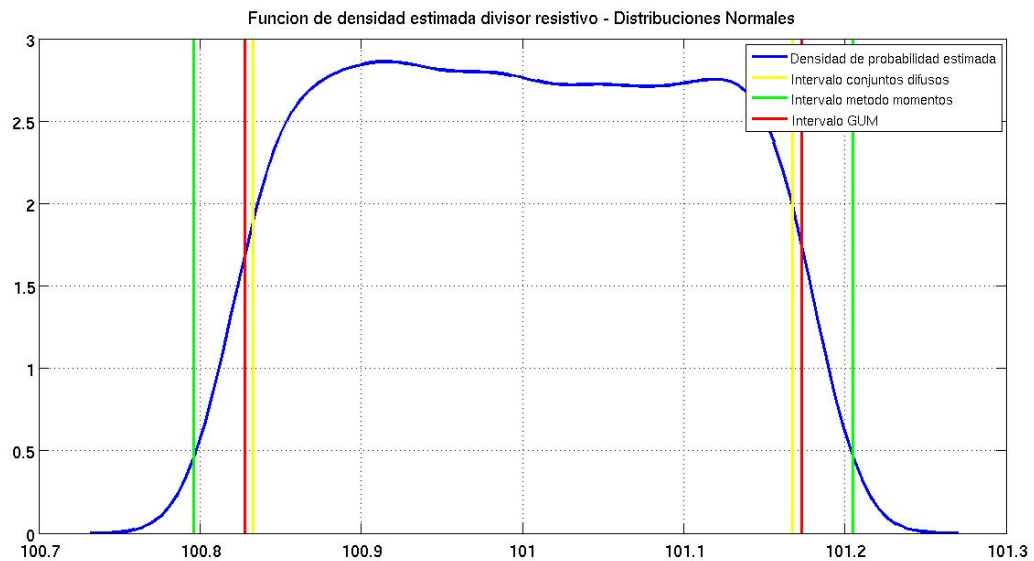
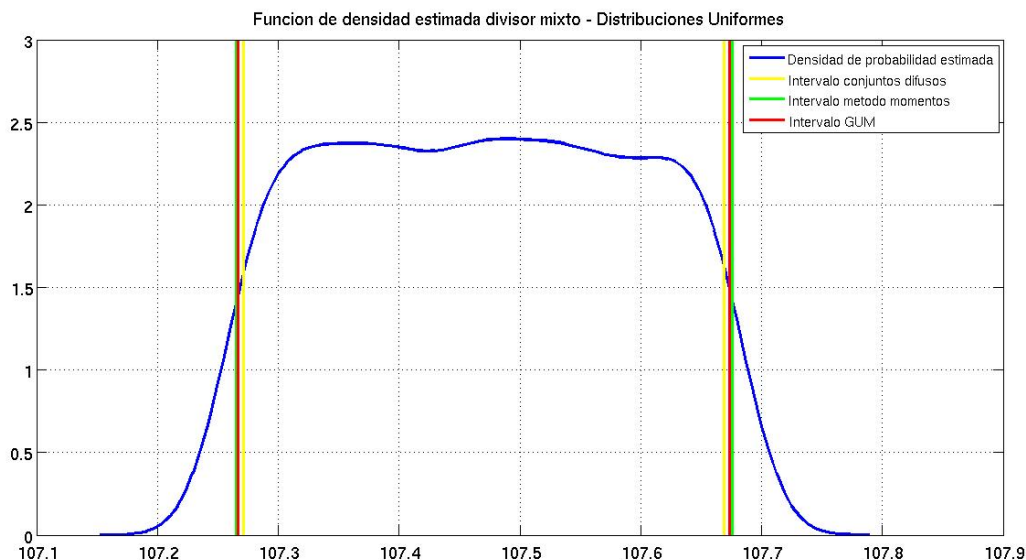


Figura 5-6.: Distribución relación divisor resistivo con distribuciones uniformes.



**Figura 5-7.:** Distribución relación divisor mixto con distribuciones uniformes.

una distribución rectangular, se puede dar un intervalo de confianza en base a su esperanza matemática y a su desviación estándar, utilizando un factor de cobertura similar al de la distribución normal; así, para factor de cobertura de  $k_p = 1,65$  se tiene un nivel de confianza de  $p = 95\%$ . Como se muestra en la figura 5-6, en este caso los valores más cercanos entre si son lo que arroja la metodología basada en lógica difusa y la GUM, mientras que el resultado mediante momentos da un resultado un poco más amplio. Ésto se debe a que la incertidumbre obtenida a partir del método de los dos puntos se basa en el modelo del mensurando y las otras dos metodologías se basan directamente en los datos que se tienen.

Ahora, se realiza el mismo procedimiento para el divisor mixto, usando distribuciones uniformes. En la figura 5-7 se muestran los resultados, donde se observa que la distribución también se asemeja a una uniforme y que, en este caso, los tres intervalos obtenidos son muy similares, brindando niveles de confianza casi que iguales. Como se puede ver, hay una diferencia en los resultados del divisor resistivo con respecto al divisor capacitivo, en donde el valor del intervalo para el primero obtenido mediante el método de momentos no se acerca a lo que resulta de los otros dos; mientras que en el caso del divisor mixto, esto si sucede. Esto se debe a los modelos utilizados para cada divisor, ya que en cada uno de ellos hay variables que afectan en mayor medida a la forma de la distribución de los datos de salida.

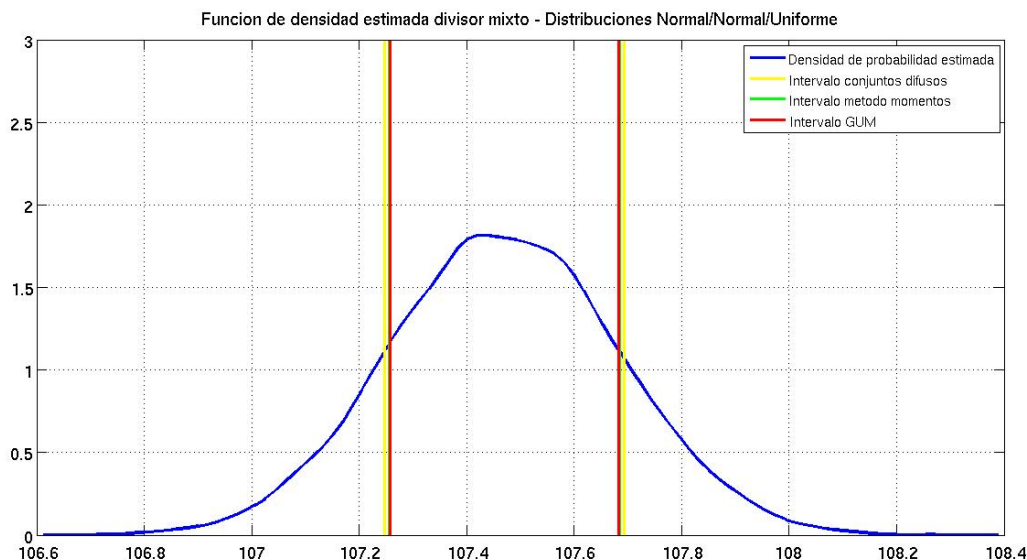


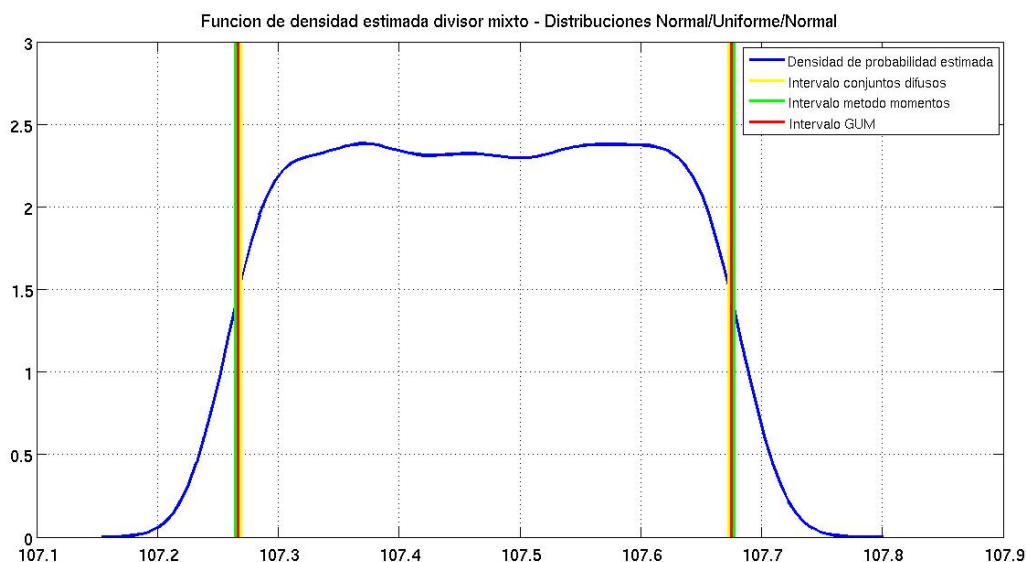
Figura 5-8.: Distribución relación divisor mixto con distribuciones distintas.

### 5.3.3. Distribuciones normales y uniformes para cada variable

La siguiente simulación consiste en dar distribuciones distintas a cada uno de las magnitudes de influencia de las variables que hacen parte del mensurando. ésta simulación se realizará únicamente para el divisor mixto, ya que para el divisor resistivo, el tipo de resistor utilizado es el mismo para cada brazo, por lo que no pueden tener distribuciones diferentes. El primer caso que se estudiará será el que se presenta cuando tanto el resistor como el capacitor tienen una distribución normal y la capacitancia parásita tiene una distribución uniforme. Los resultados se muestran en la figura 5-8.

Como se puede observar, la distribución de la población del mensurando se asemeja bastante a una distribución gaussiana. Aquí se puede observar que el resultado del intervalo obtenido mediante lógica difusa levemente más amplio que los otros dos, lo que se representa por un factor de cobertura mayor.

La siguiente simulación consiste en cambiar las distribuciones de las variables una vez más. ésta vez, los resistores y la capacitancia parásita tendrán una distribución normal, mientras que el capacitor del divisor tendrá una distribución uniforme. Los resultados se muestran en la figura 5-9. En éste caso se observa una función de distribución mucho más amorfa, con un comportamiento en los extremos similar a una distribución normal, pero con una cresta pronunciada que asemeja a una distribución uniforme. También, dicha cresta tiene variaciones leves. Así, los resultados obtenidos para la incertidumbre expandida son prácticamente los mismos con los tres métodos, mostrando la validez de los dos propuestos. Cabe anotar



**Figura 5-9.:** Distribución relación divisor mixto con distribuciones distintas.

que el general de la distribución de ésta simulación se asemeja más a una distribución uniforme, demostrando que la variable que más influencia tiene es la capacitancia propia del divisor.

Finalmente, se realiza el último cambio en las distribuciones de las magnitudes de influencia de las variables. Así, los resistores se definen con una distribución uniforme, mientras que las capacitancias se definen con una distribución normal. Los resultados se ilustran en la figura 5-10. De nuevo, y como lo indicaba primera simulación de ésta sección, la variable que más influencia el mensurando es la capacitancia del divisor. Así, la distribución resultante es normal, obteniendo resultados similares: un factor de cobertura más amplio para el método de conjuntos difusos en comparación con el método de momentos y la GUM.

En la tabla 5-1 se muestran los valores de incertidumbre expandida obtenidos con cada uno de las metodologías mencionadas anteriormente. Se observa que en terminos generales, hay un gran similitud entre lo que se obtiene mediante lógica difusa y lo que plantea la guía para la estimación de incertidumbre, con muy pequeñas diferencias. Con respecto a los resultados obtenidos mediante el método de momentos, se observa que hay una diferencia más marcada en los valores del divisor resistivo; mientras que para el divisor mixto, los resultados son más cercanos a lo que ofrecen las otras dos metodologías. Ésto se debe a que, al depender del modelo del mensurando que se tenga, la incertidumbre obtenida puede obviar ciertos factores que afectan los resultados. Esto indica que para lograr buenos resultados con ésta metodología, se debe tener un modelo apropiado, dependiendo de las necesidades y las circunstancias.

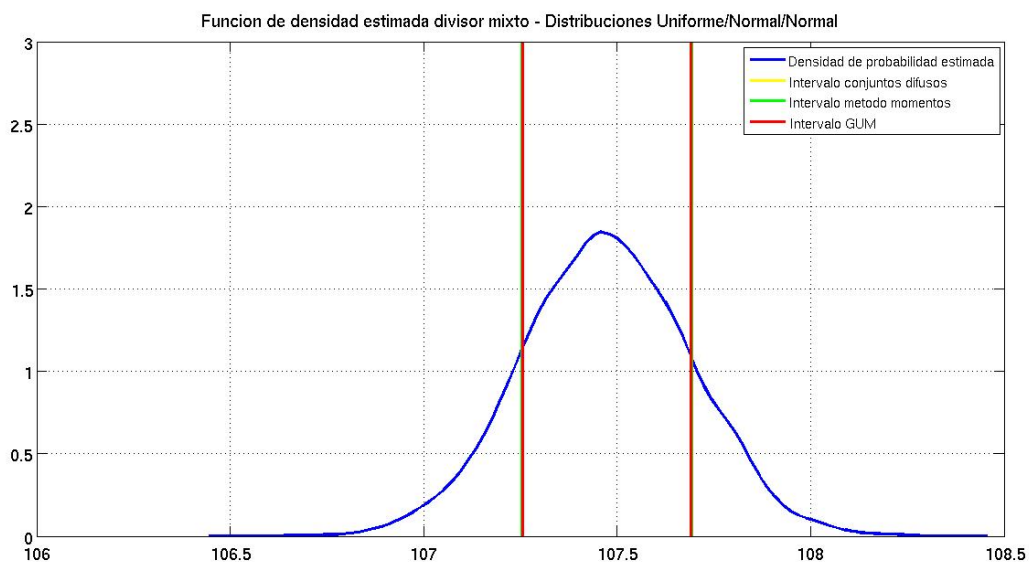


Figura 5-10.: Distribución relación divisor mixto con distribuciones distintas.

	Lógica difusa	Dos puntos	GUM
<i>Resistivo Normal</i>	0,3717	0,3217	0,3589
<i>Resistivo uniforme</i>	0,3348	0,4089	0,3454
<i>Mixto Normal</i>	0,4438	0,4302	0,4267
<i>Mixto Uniforme</i>	0,3979	0,4105	0,4063
<i>R uniforme/C normal/Cp normal</i>	0,4455	0,4287	0,4253
<i>R normal/C uniforme/Cp normal</i>	0,4041	0,4129	0,4086
<i>R normal/C normal/Cp uniforme</i>	0,4367	0,4396	0,4352

Tabla 5-1.: Tabla de incertidumbre expandida obtenida mediante los tres procedimientos.

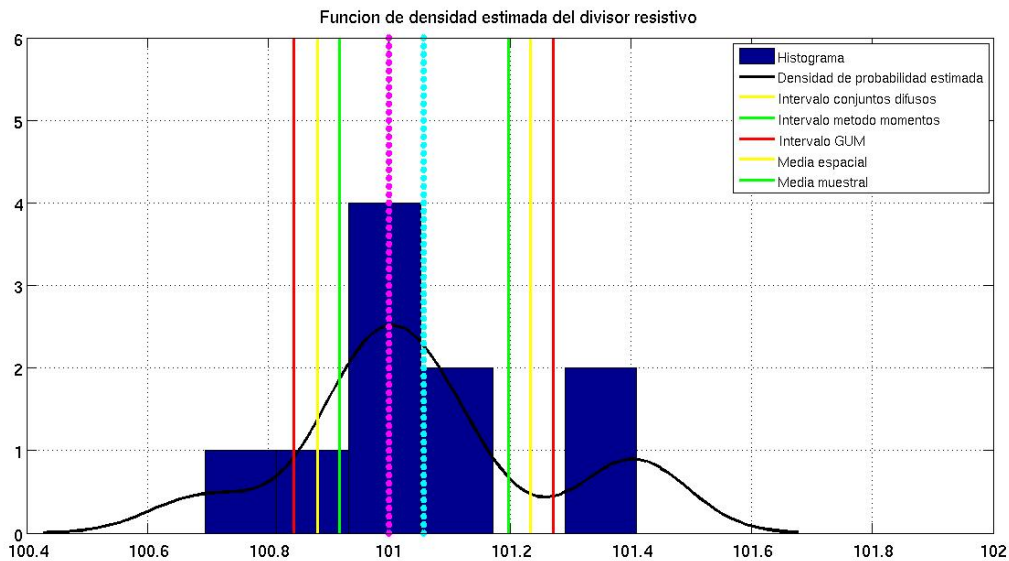


Figura 5-11.: Distribución relación divisor resistivo con diez datos.

### 5.3.4. Prueba de las metodologías con pocos datos

En las anteriores simulaciones se contaron con una gran cantidad de datos para generar una distribución bien definida y aplicar las metodologías planteadas. Sin embargo, en la mayoría de casos, obtener tal cantidad de datos es imposible. Para el caso en particular de un divisor de alta tensión, las pruebas se realizan entre cinco y diez veces, teniendo a disposición menos datos de los que se utilizaron para validar los procedimientos. Para asemejar más el proceso a un caso de la vida real, se tomaron  $n = 10$  datos de forma aleatoria de la población y se aplicaron las metodologías planteadas. Ésto, tanto para el divisor resistivo, como para el mixto. Para todos los casos se comparan los intervalos generados (incertidumbre expandida) y se compara el intervalo generado por la desviación estándar donde el procedimiento proporciona ese dato.

En la figura 5-11 se observa la distribución de los datos obtenidos, un histograma de frecuencias de los mismos, las medias espacial (línea cian) y muestral (línea morada), y los intervalos obtenidos a partir de los tres procedimientos. El intervalo más amplio es el obtenido a partir de los procedimientos planteados en la GUM. Esto es porque la guía busca abarcar la mayor cantidad de datos posibles dentro de su intervalo, aún cuando éstos sean muy dispersos. Las otras dos metodologías ofrecen dos intervalos muy similares, mostrando que su incertidumbre, siendo más recuada, define el mismo porcentaje de datos dentro del mismo, aproximadamente un 63% de ellos.

Así mismo, se realiza la simulación para el divisor mixto. En la figura 5-12 se muestran los

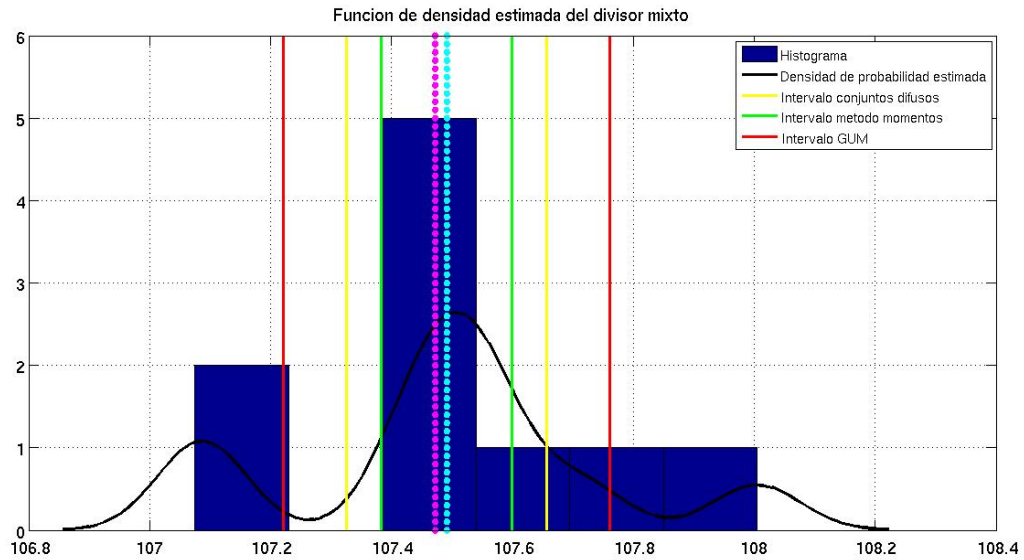


Figura 5-12.: Distribución relación divisor mixto con diez datos.

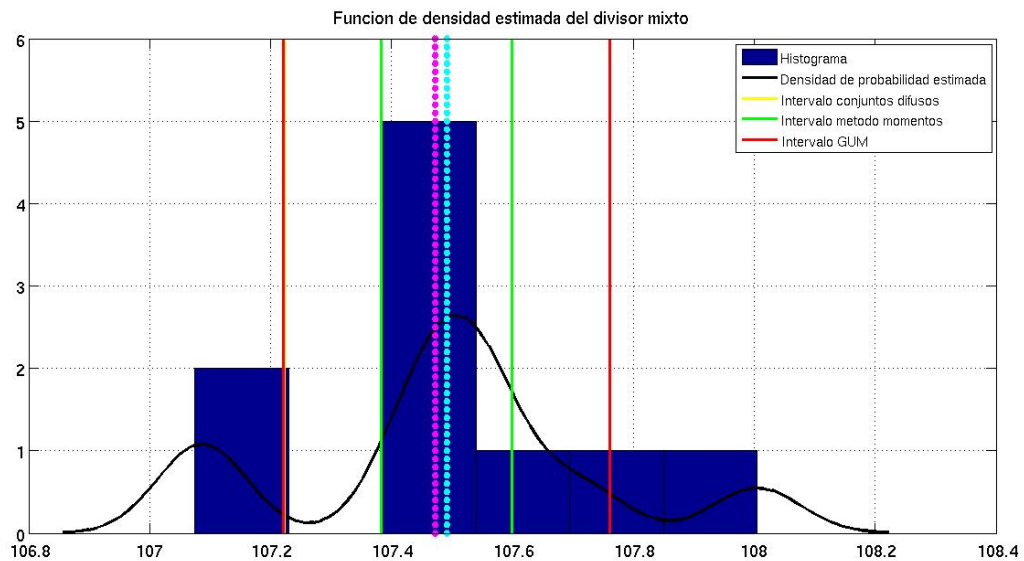


Figura 5-13.: Distribución relación divisor mixto con diez datos ( $\lambda = 0, 3$ ).

resultados obtenidos. En este caso se tiene un resultado muy similar al del divisor resistivo: el intervalo más amplio es el de la GUM, seguido de los intervalos obtenidos mediante los dos métodos propuestos. Sin embargo, por la forma de la distribución es muy difícil definir un intervalo que abarque todos los datos sin aumentar considerablemente la incertidumbre de la medición. Tanto la GUM como el método de los momentos no permitiría obtener un intervalo distinto; sin embargo, el método basado en lógica difusa depende de un factor  $\lambda$  que determina un intervalo que valida o no los datos medidos. Así, en la figura **5-13** se muestra el intervalo obtenido con un valor de  $\lambda = 0,3$ , lo amplía el rango de valores válidos a tal punto de igualar la incertidumbre que ofrece el procedimiento de la GUM.

# 6. Conclusiones y recomendaciones

## 6.1. Conclusiones

El objetivo del trabajo de investigación era el de proponer una metodología alternativa a la planteada en la Guía para la Estimación de Incertidumbre (GUM) en el contexto de un laboratorio de metrología eléctrica. Si bien es cierto que la GUM ofrece una metodología que se ajusta de forma adecuada a las diferentes situaciones de medición que se presentan en un laboratorio de metrología eléctrica, hay situaciones en las que la obtención de datos se hace engorrosa o simplemente imposible. Esto depende en gran medida del tipo de medición que se realiza. Es por esto que se hace importante plantear una alternativa que se adapte mejor a circunstancias de éste tipo.

En éste trabajo se realizó una investigación sobre qué otro tipo de procedimientos se realizaban para la estimación de incertidumbre en otras áreas del conocimiento y en diferentes circunstancias. A partir de dicha investigación se encontraron dos métodos que, a partir de una cierta cantidad de datos, permitían obtener un valor de incertidumbre. Cada uno de éstos métodos difieren en gran medida, y aunque arrojen valores similares en algunas circunstancias, cada uno de ellos ofrece ciertas ventajas únicas.

El primer método, basado en la teoría de conjuntos difusos, recoge la información del mensurando y genera un conjunto a partir del cual se define un intervalo sobre el cuál se espera encontrar el valor del mensurando. Una de las principales ventajas de ésta metodología es la ausencia de suposiciones sobre la distribución de los datos, lo cual puede llegar a ser un problema cuando ésta no puede ser fácilmente clasificada como lo indica la GUM. Otra de las ventajas que ofrece éste método es la evaluación directa de lo que, en la GUM, se conoce como *incertidumbre expandida*. Esto es porque se evita la obtención de las derivadas del modelo con respecto al modelo del mensurando, cosa que limita bastante el procedimiento de la GUM. Sin embargo, a pesar de esa ventaja, se observa que los resultados pueden estar un poco más alejados a lo que la guía estipula en los casos más triviales.

También, al realizar las simulaciones con pocos datos, donde las distribuciones son “amorfas”, la sensibilidad de la metodología se puede cambiar dependiendo de las necesidades. Ésto le da una versatilidad que no tienen las otras dos y que permite adaptar el procedimiento a cualquier caso de estudio para obtener una mejor representación de la incertidumbre.

El segundo método, basado en la obtención de los momentos estadísticos del mensurando a partir de las variables que lo componen, supone un enfoque diferente, teniendo en cuenta que a pesar de que los pasos sean los mismos, la estimación de la incertidumbre depende en gran medida de las variables escogidas y del modelo planteado (como es de esperarse). Así mismo, en este caso el resultado es diferente. En el primer método se obtiene directamente un intervalo sobre el cual se espera encontrar el valor del mensurando; mientras que con éste método se obtiene un valor para la desviación estándar de los datos para así continuar con los pasos planteados en la guía para la obtención de dicho intervalo.

La principal ventaja que ofrece éste método es la obtención de la función de densidad de probabilidad del mensurando a partir de las distribuciones de sus variables, evitando la representación mediante series de Taylor; esto facilita en gran medida los cálculos y lo hace aplicable a mensurandos cuya representación mediante series puede resultar compleja. Otra de las ventajas es la directa comparación que se puede hacer con los resultados que arroja la GUM y que su implementación arroja valores “intermedios”, es decir, datos con los que se obtiene la incertidumbre. Esto significa su aplicación no requiere un cambio drástico en la metodología que ya se está utilizando y sus resultados son más fáciles de contrastar.

Según lo obtenido en los resultados se puede ver que ambos métodos pueden ser utilizados dependiendo de la situación y el procedimiento que se requiera. Se recomienda entonces el uso de la metodología basada en conjuntos difusos cuando se disponga de pocos datos y de una distribución “amorfa”, ya que debido al factor  $\lambda$  se tiene una flexibilidad de la que no se dispone en los otros dos métodos; mientras que para los casos en los que sea viable la implementación de la GUM, se puede aplicar la metodología basada en momentos, para contrastar y validar los resultados.

## 6.2. Recomendaciones

Si bien los dos métodos son completamente utilizables, hay cosas en las cuales cada uno de ellos puede presentar mejoras. En el caso del primer método, una de las variables importantes del mismo es el valor de  $\lambda$ , el cual ha sido fijado en 0,5 por convención del desarrollo del método. Sin embargo, éste valor puede cambiar dependiendo tanto de la aplicación como de la forma de la distribución de los datos que se están evaluando, ya que de éste valor depende sustancialmente el intervalo obtenido. Como trabajo futuro para la optimización de éste método se plantea realizar el estudio del comportamiento de los resultados para encontrar un valor óptimo de  $\lambda$  dependiendo de la aplicación, que en éste caso se acota a un laboratorio de metrología eléctrica.

Con respecto al segundo método, el trabajo futuro estaría dedicado a la obtención de una

incertidumbre expandida directamente con el método. Así, buscar la manera de propagar el resultado obtenido y representar la interacción de las variables en el mensurando de forma que el resultante de la aplicación del método sea el intervalo deseado.

# A. Anexo: Código en MATLAB del método basado en conjuntos difusos

Para la implementación de la primer metodología se definió una función llamada Fuzunc, la cual tiene como parámetros el vector de los datos generados *data* y el tamaño de dicho vector *n*. A continuación se presenta el código implementado:

```
function FuzUnc = Fuzunc(data,n)
    lambda = 0.6;
    data_max = max(data); data_min = min(data);

    x_data = sort(data,'ascend'); % Organizar los valores para obtener un nuevo xi
    j = 1;
    [aux,xv_aux] = hist(x_data,n); % Obtener numero de elementos y media de cada grupo
    maxv = max(aux);
    for i = 1:n
        v_aux(i) = aux(i) - maxv;
        if v_aux(i) == 0
            c(j) = i;
            j = j + 1;
        end
    end
    % Obtener la media y el numero del grupo con mayor frecuencia
    xv = mean(xv_aux(c));
    v = mean(c);

    data_pdf = ksdensity(x_data,x_data); % Determinar el PDF

    data_pdf_min = min(data_pdf);
    data_pdf_max = max(data_pdf);
    Sub_func = (data_pdf - data_pdf_min) / (data_pdf_max - data_pdf_min);
    % Obtener la funcion subordinada u(x)

    eta_v = (xv - data_min) / (data_max - data_min);
    eta = (x_data - data_min) / (data_max - data_min); % Normalizacion de los datos de entrada

    tao = abs(eta - eta_v); % Obtener el numero difuso
    % ----- Obtener tao_1 -----
    plot(tao(1:v),Sub_func(1:v),'r'); grid on; hold on;
    reffline(0,lambda);

    XData = get(get(gca,'children'),'XData');
    Xdc = cell2mat(XData(2));
    YData = get(get(gca,'children'),'YData');
    Ydc = cell2mat(YData(2));

    tao_1 = interp1(Ydc,Xdc,lambda);

    % ----- Obtener tao_2 -----
    plot(tao(v:n),Sub_func(v:n),'r'); grid on; hold on;
```

```
refline(0,lambda);

XData = get(get(gca,'children'),'XData');
Xdc = cell2mat(XData(2));
YData = get(get(gca,'children'),'YData');
Ydc = cell2mat(YData(2));

tao_2 = interp1(Ydc,Xdc,lambda);

FuzUnc = (tao_1 + tao_2)*(data_max - data_min);

end
```

## B. Anexo: Código en MATLAB del método basado en momentos

Para la implementación de la segunda metodología era necesario plasmar directamente el modelo que se iba a evaluar, por lo que la definición de una función es complicada. Así, se diseñó un código para cada divisor; es decir, uno para el divisor resistivo y otro para el divisor mixto. A continuación se muestran los códigos generados.

### Divisor Resistivo:

```
%% Estimacion de incertidumbre por metodo de
% estimacion de dos puntos - Divisor Resistivo
E_A = 0; E_A2 = 0; % Inicializacion de los valores
var_num = 2; % Numero de variables (2)
clear data;

Rbv = Rt(1:n,m);
for i=1:n
    Rav(i) = sum(Rt(i,:),2);
end

Rav = Rav';

data = horzcat(Rav,Rbv);
Rbv_m = mean(Rbv);
Rav_m = mean(Rav);

for j = 1:var_num
    clear x;
    x = data(1:n,j); % Obtencion de los valores
    u_x = mean(x); % Obtencion de la media
    s_x = std(x); % Obtencion de la desviacion estandar
    [prob_x,x_aux] = hist(x,n); % Obtencion de la probabilidad de cada dato

    for i = 1:n
        ep(i) = (x_aux(i) - u_x)^3 * prob_x(i);
    end
    E_x3 = sum(ep);
    lambd = E_x3 / s_x^3; % Obtencion de lambda_i,3
    c(j) = lambd;
    c_i = 2*sqrt(var_num+(lambd/2)^2);

for k=1:2
    x_k = u_x + epsi(k,lambd,var_num) * s_x; % Redefinicion de la variable analizada
```

```

p_k = (1/var_num) * (-1)^k * epsi(3-k,lambda,var_num) / (c_i); % Obtencion de la probabilidad

if j == 1
    Rav_t = x_k;
    A_k = Rav_t / Rbv_m;
    b(k,j) = A_k;
elseif j == 2
    Rbv_t = x_k;
    A_k = Rav_m / Rbv_t;
end

E_A = E_A + p_k*A_k;
E_A2 = E_A2 + p_k*(A_k^2);

end

end

std_u = sqrt(E_A2 - E_A^2)

```

## Divisor mixto:

```

%% Estimacion de incertidumbre por metodo de
% estimacion de dos puntos - Divisor mixto
E_A = 0; E_A2 = 0; % Inicializacion de los valores
var_num = 3; % Numero de variables (3)
clear data;

C_av = C_av'; C_bv = C_bv';
data = horzcat(Rda,C_av,C_bv);
Rda_m = mean(Rda);
C_av_m = mean(C_av);
C_bv_m = mean(C_bv);

for j = 1:var_num
    clear x;
    x = data(1:n,j); % Obtencion de los valores
    u_x = mean(x); % Obtencion de la media
    s_x = std(x); % Obtencion de la desviacion estandar
    [prob_x,x_aux] = hist(x,n); % Obtencion de la probabilidad de cada dato

    for i = 1:n
        ep(i) = (x_aux(i) - u_x)^3 * prob_x(i);
    end
    E_x3 = sum(ep);
    lambda = E_x3 / s_x^3; % Obtencion de lambda_i,3
    c(j) = lambda;
    c_i = 2*sqrt(var_num+(lambda/2)^2);

    for k=1:2
        x_k = u_x + epsi(k,lambda,var_num) * s_x; % Redefinicion de la variable analizada

        p_k = (1/var_num) * (-1)^k * epsi(3-k,lambda,var_num) / (c_i); % Obtencion de la probabilidad

        if j == 1
            Rda_t = x_k;
            A_k = (C_bv_m*(1+Rda_t*C_av_m)) / C_av_m;
        elseif j == 2

```

```
    C_av_t = x_k;
    A_k = (C_bv_m*(1+Rda_m*C_av_t)) / C_av_t;
elseif j == 3
    C_bv_t = x_k;
    A_k = (C_bv_t*(1+Rda_m*C_av_m)) / C_av_m;           % Modelo del mensurando
end

E_A = E_A + p_k*A_k;
E_A2 = E_A2 + p_k*(A_k^2);

end

end

std_u = sqrt(E_A2 - E_A^2);
```

# Bibliografía

- [1] BABUSKA, R: FUZZY AND NEURAL CONTROL DISC Course Lecture Notes / Deft University of Technology. 2001. – Informe de Investigación. – 181 p.
- [2] BEWOOR, K. ; KULKARNY, V.: *Metrology and Measurement*. New Delhi : McGraw-Hill Education, 2009
- [3] BIPM: JCGM 100 - Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement / bureau international des poids et mesures. 2008. – Informe de Investigación. – 134 p.
- [4] CHEN, Yiping Li; J. ; FENG, Ling: Dealing with Uncertainty: A Survey of Theories and Practices. En: *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions on* 25 (2012), p. 2463–2482
- [5] CHRISTIAN, J. ; BAECHER, G.: POINT- ESTIMATE METHOD AS NUMERICAL QUADRATURE. En: *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering* 125 (1999), p. 779–786
- [6] DE CAPUA, E.: A t-norm based fuzzy approach to the estimation of measurement uncertainty. En: *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2004. IMTC 04. Proceedings of the 21st IEEE* 1 (2004), p. 229–233
- [7] DUBOIS, D. ; PRADE, H.: *Fuzzy sets and Systems: Theory and applications*. United States oof America : Georgia Institute of Thecnology - ACADEMIC PRESS INC., 1980
- [8] KUFFEL, W.S. ; KUFFEL, J.: *High Voltage Engineering - Fundamentals*. 225 Wildwood Avenue, Woburn, MA 01801-2041 : Butterworth and Heinemann, 2000
- [9] DE METROLOGÍA, Centro E. *Pagina web - <http://www.cem.es/>*. 2011
- [10] INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGÍA, Colombia. *Pagina web - <http://www.inm.gov.co/>*. 2015
- [11] CENTRO NACIONAL DE METROLOGÍA, México. *Pagina web - <http://www.cenam.mx/>*. 2015

- 
- [12] NUCCIO, S. ; SPATARO, C.: Uncertainty Management in the measurements performed by means of virtual instruments. En: *Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement, 2008. AMUEM 2008. IEEE International Workshop on* 1 (2008), p. 40–45
- [13] PARK, J. ; PARK, S.: Uncertainty estimation of measurement using a vector network analyzer. En: *TENCON '02. Proceedings. 2002 IEEE Region 10 Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering* 2 (2002), p. 1093–1096
- [14] ROSENBLUETH, E.: Point estimates for probability moments. En: *Proc Natl Acad Sci U S A* 72 (1975), p. 3812–3814
- [15] SU, Chun-Lien ; LU, Chan-Nan: Two-Point Estimate Method for Quantifying Transfer Capability Uncertainty. En: *Power Systems, IEEE Transactions on* 20 (2005), p. 573–579
- [16] XIA, X. ; ZHONGYU, W.: Estimation of non-statistical uncertainty usinf fuzzy-set theory. En: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 22 (2003), p. 271–277