

iii) El Uso de Ecuaciones Diferenciales.

EL METODO DE BUCKINGHAM.

Sean  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ,  $n$  variables dimensionales de las cuales depende un proceso físico. Sean  $r_2, \dots, r_n$  las relaciones adimensionales de longitud requeridas para describir geoméricamente los límites sólidos del sistema. Las relaciones funcionales entre las tres variables pueden expresarse como :

$$f(Q_1, \dots, Q_n; r_2, \dots, r_n) = 0$$

Considerando que nos limitamos a sistemas geoméricamente similares, la relación se reduce a :

$$f(Q_2, \dots, Q_n) \quad (A)$$

El número de productos adimensionales independientes será  $i = n - k$ , siendo  $k$  el número de dimensiones fundamentales que intervienen.

Cada ecuación dimensional homogénea tal como ( A ) puede reducirse a:

$$f(\pi_1, \dots, \pi_i) = 0$$

Los grupos adimensionales se expresan así :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Q_1^{a_1} Q_2^{b_1} \dots Q_k^{k_1} Q_{k+1} \\ \pi_2 &= Q_1^{a_2} Q_2^{b_2} \dots Q_k^{k_2} Q_{k+2} \\ &\dots \\ \pi_i &= Q_1^{a_i} Q_2^{b_i} \dots Q_k^{k_i} Q_{k+i} \end{aligned}$$

Aquí las cantidades dimensionales que se repiten,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  deben, entre ellas, contener las  $k$  dimensiones fundamentales y ser preferiblemente representativas de variables geométricas, cinemáticas y dinámicas en su conjunto.

Los exponentes  $a_1, b_1, \dots, k_1; a_i, b_i, \dots, k_i$ , deben tener valores tales que los productos de  $\pi_i$  sean adimensionales.

## EJEMPLO A.5.1.

Determine los grupos adimensionales en los que pueden agruparse las variables dimensionales en el caso de la pérdida de cabeza en un tubo horizontal para flujo turbulento incompresible.

Solución.

Para cualquier fluido, la pérdida de cabeza se representa por la disminución en el gradiente de presión y es una medida de la resistencia al flujo através de la tubería.

La resistencia es una función del diámetro de la tubería, de la viscosidad y la densidad del fluido, la longitud de la tubería, la velocidad del fluido, y la rugosidad  $\epsilon$  del tubo.

Este problema puede escribirse matemáticamente como :

$$f(\Delta p, d, \mu, \rho, L, v, \epsilon) = 0$$

donde  $\epsilon$  es la rugosidad relativa o relación del tamaño de las irregularidades superficiales  $\epsilon$  al diámetro  $d$  del conducto.

Las cantidades físicas con sus dimensiones en el sistema Fuerza, Longitud y Tiempo son :

Caída de presión  $\Delta p$  :  $FL^{-2}$

Diámetro  $d$  :  $L$

Viscosidad absoluta  $\mu$  :  $FtL^{-2}$

Densidad  $\rho$  :  $Ft^2L^{-4}$

Longitud  $L$  :  $L$

Velocidad  $v$  :  $Lt^{-1}$

Rugosidad relativa  $\epsilon$  :  $L_1/L_2$

Hay siete cantidades físicas y tres unidades fundamentales o sea  $7 - 3 = 4$  términos adimensionales. Seleccionando el diámetro, la velocidad y la densidad (geométrica, cinemática y dinámica) como las variables repetitivas con exponentes desconocidos, los términos  $\pi$  son:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ L & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 & -4c_1 \\ F & t & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ F & L \end{bmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 & -b_2 \\ L & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 2c_2 & -4c_2 \\ F & t & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ F & t & L \end{bmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{bmatrix} a^3 \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^3 & -b^3 \\ L & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^3 & 2c^3 & -4c^3 \\ F & t & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}$$

$$\pi_4 = \epsilon = L_1/L_2$$

Se evalúan los exponentes término a término :

$$\pi_1 : \quad \theta = c_1 + 1 ; \theta = a_1 + b_1 - 4c_1 - 2 ; \theta = -b_1 + 2c_1 ;$$

$$\text{entonces : } a_1 = 0 ; b_1 = -2 ; c_1 = -1$$

$$\pi_1 = d^0 v^{-2} l^{-1} \Delta p = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad \text{Número de Euler.}$$

En adelante omitimos los subíndices de los exponentes por sencillez :

$$\pi_2 : \quad \theta = c + 1 ; \theta = a + b - 4c - 2 ; \theta = -b + 2c + 1$$

$$\text{entonces: } a = -1 ; b = -1 ; c = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d} ; \text{ ó } \frac{\rho v d}{\mu} \quad \text{Número de Reynolds.}$$

$$\pi_3 : \quad \theta = c ; \theta = a + b - 4c + 1 ; \theta = -b + 2c$$

$$\text{entonces : } a = -1 ; b = 0 ; c = 0$$

$$\pi_3 = d^{-1} v^0 l^0 = L/d$$

$$\pi_4 = L_1/L_2 = l/d$$

Podemos escribir ahora la nueva relación :

$$f_1 \left[ \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{\rho v d}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{l}{d} \right] = 0$$

También podemos despejar  $\Delta p$ . Si  $U = \rho g$

$$\frac{\Delta p}{U} = \frac{v^2}{2g} (2) f_2 \left[ Re, \frac{L}{d}, \frac{l}{d} \right]$$

Por métodos experimentales se deduce que la caída de presión es función de  $L/d$  a la primera potencia :

$$\frac{\Delta p}{U} = \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} (2) f_s \left[ Re, \frac{L}{d} \right]$$

que puede expresarse como :

$$\frac{\Delta p}{U} = (\text{factor de fricción})(L/d)(v^2/2g)$$

El factor de fricción es una función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

Debemos anotar que :

i) Si el flujo fuera compresible, otra cantidad física debería incluirse : el módulo de compresibilidad  $E$  y un quinto término adimensional,  $E/v^2$  equivalente al número de Mach  $v/(E/\rho)^{1/2}$ , aparecería.

ii) Si la gravedad interviniera en el problema general de flujo, la fuerza gravitacional sería otra cantidad física y tendríamos un sexto término adimensional  $v^2/gL$ , denominado el número de Froude.

iii) Si fuera necesario considerar la tensión superficial  $\sigma$ , el séptimo término adimensional toma la forma  $v^2L/\sigma$ , llamado el número de Weber.

#### EL METODO DE RAYLEIGH.

Este método de análisis dimensional expresa como  $Q_1$  varía con  $Q_2^a Q_3^b \dots Q_n^1$ . Los grupos adimensionales se obtienen evaluando los exponentes en forma tal que la relación sea dimensionalmente homogénea.

#### EJEMPLO A.5.2.

La fuerza  $F$  ejercida sobre un cuerpo sumergido en un fluido en movimiento es una función de la velocidad del fluido  $v$ , la densidad  $\rho$  del fluido, la viscosidad  $\mu$  y una longitud característica del cuerpo  $L$ . Determine los grupos adimensionales en los cuales las variables dimensionales pueden organizarse.

Solución.

Las cantidades dimensionales a considerar son  $F, \rho, v, L$  y  $\mu$  si usamos un sistema absoluto de unidades donde  $g_c = 1$ .

Por el método de Rayleigh

$$F = \alpha \rho^a v^b L^c \mu^d$$

Para que esta relación sea dimensionalmente homogénea  $\rho^a v^b L^c \mu^d$  debe tener las mismas unidades dimensionales de F, o sea la expresión

$$\left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \left[ \frac{L}{t} \right]^b \left[ L \right]^c \left[ \frac{M}{Lt} \right]^d$$

debe tener las dimensiones

$$\left[ \frac{ML}{t^2} \right]$$

Así :

$$M : 1 = a + d$$

$$L : 1 = -3a + b + c - d$$

$$t : -2 = -b - d$$

Tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones, por lo que debemos resolver tres incógnitas en función de una cuarta. Las tres a ser determinadas deben contener, entre ellas, todas las dimensiones fundamentales. Parece ser conveniente resolver a, b, y c en términos de d (que además está en las tres ecuaciones):

$$a = 1 - d$$

$$b = 2 - d$$

$$c = 1 + d - b + 3a$$

por tanto :

$$F = \alpha \rho^{1-d} v^{2-d} L^{1+d-b+3a} \mu^d$$

$$\frac{p}{\rho v^2} = \frac{F}{\rho v^2 L^2} = \alpha \left[ \frac{\mu}{\rho v L} \right]^d$$

Este resultado implica una relación funcional entre  $F/(\rho v^2 L^2)$  que es el número de Euler y  $\mu/(\rho v L)$  que es el inverso del número de Reynolds. Los valores de exponentes y coeficientes deberán (por lo general) determinarse experimentalmente. Este resultado puede interpretarse también como que si en dos sistemas geoméricamente similares, los números de Reynolds son iguales, también lo serán los números de Euler.

## USO DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

La ecuación ( 3.22 ) o ecuación de Navier Stokes, describe el movimiento de un fluido incompresible de viscosidad constante. Limitándonos a la cantidad de movimiento en la dirección x:

$$\rho \left[ \frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_x}{\delta z} \right] = - \frac{\delta p}{\delta x} + \mu \left[ \frac{\delta^2 v_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v_x}{\delta z^2} \right] + \rho g_x \quad ( B )$$

La ecuación ( B ) es dimensionalmente homogénea y la división por uno de los términos nos dará grupos adimensionales. Sólo los términos que se apliquen al problema particular se incluyen en el análisis dimensional (Klinkenberg y Mooy en Chemical Engineering Progress., 44: 17 (1948)).

Las variables de la ecuación ( B ) son velocidad, longitud, presión estática, densidad, viscosidad y fuerzas de campo (o volumen) como la gravitatoria. Al hacer un análisis dimensional, las dimensiones de cada término de la ecuación diferencial se expresan en términos de las variables anteriores. El análisis se restringe a sistemas geoméricamente similares.

## COMENTARIOS SOBRE EL ANALISIS DIMENSIONAL

Anotamos que el análisis dimensional no da indicación sobre el mecanismo fundamental del proceso. Además el análisis dimensional de cualquier proceso es inválido si cualquier variable significativa se deja sin incluir.

El uso de los métodos de Buckingham y Rayleigh nos proveen los grupos adimensionales, pero su significado físico no es evidente. El uso de ecuaciones diferenciales nos permite interpretar físicamente los grupos adimensionales así obtenidos, pero tampoco nos da información sobre el mecanismo fundamental del proceso, aunque disminuye las posibilidades de olvidar alguna de las variables. Aunque la ecuación diferencial sea demasiado complicada de resolver, es útil para obtener los grupos adimensionales para el sistema, lo que es muy útil para correlacionar los resultados experimentales y en la programación del estudio básico de cualquier proceso.

## EJEMPLO A.5.3.

Como ejemplo del uso de ecuaciones diferenciales para obtener grupos adimensionales, el flujo en estado estacionario de un fluido no viscoso en ausencia de efectos gravitacionales será considerado. Una ecuación diferencial que describe este flujo es :

$$\left[ v_x \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_x}{\delta z} \right] = - \frac{\delta p}{\delta x}$$

Las dimensiones de los términos son :

Izquierda :  $\sqrt{v^2}/L$  ; Derecha :  $p/L$

Dividiendo el término de la derecha por el de la izquierda obtenemos el número de Euler .

$$\frac{p/L}{\sqrt{v^2}/L} = \frac{p}{\sqrt{v^2}}$$

Se puede interpretar este resultado como que en la misma posición relativa, en sistemas geoméricamente similares. habrá números de Euler idénticos.

## CAPITULO 6. TRANSPORTE TURBULENTO.

En los capítulos anteriores hemos tratado exclusivamente el régimen laminar para ilustrar conceptos y procedimientos básicos. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de los procesos de importancia industrial ocurren en condiciones de flujo turbulento. Desafortunadamente el flujo turbulento por su complejidad, no ha sido completamente comprendido y por ello no existen teorías que permitan la predicción del flujo turbulento con la misma precisión que se hace para el laminar.

A continuación analizamos la interacción entre teoría y práctica para predecir las velocidades de transporte y los coeficientes de transferencia para impulso, calor y masa en flujo turbulento en tuberías.

Consideremos un fluido avanzando a lo largo de un tubo largo bajo el efecto de una diferencia de presión. En este caso, si el flujo es laminar ( $Re < 2100$ ), un trazador ( tinta ) inyectado en un punto en el fluido se moverá con la velocidad del fluido a lo largo de una trayectoria rectilínea. Si el número de Reynolds es mayor, el trazador se moverá con los remolinos ( corrientes perpendiculares a la dirección principal del movimiento ) y zigzagueará a medida que avanza por el tubo

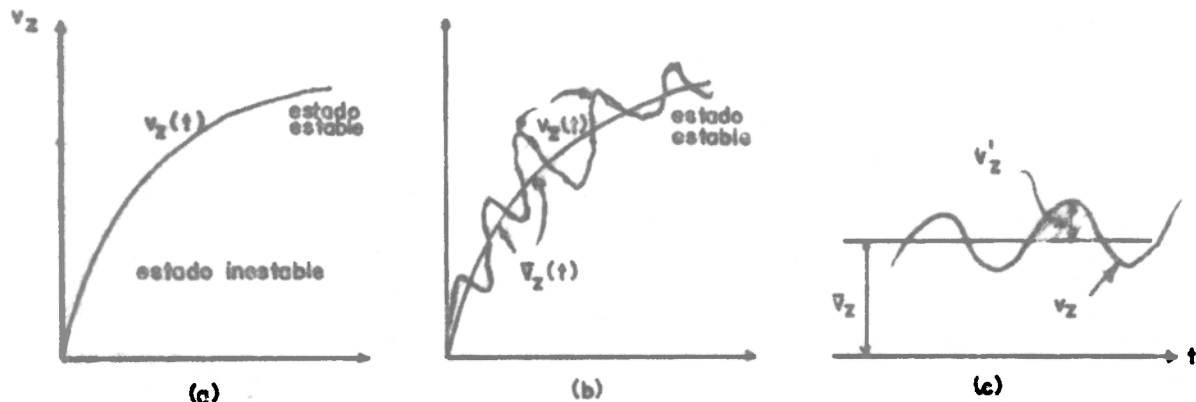


FIGURA 6.1.

Consideremos un flujo inestable comenzando en  $t = 0$  con velocidad cero. En flujo laminar ( figura 6.1 a ) la velocidad en un punto arbitrario aumenta constantemente y se aproxima a su valor estable, pero en flujo turbulento ( figura 6.1 b ) la velocidad varía alrededor del valor promedio con el tiempo  $\bar{v}_{zm}$ , tanto durante el periodo estable como en el inestable. En el periodo inestable este valor promedio se define como :

$$v_{zm} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} v_z dt}{\Delta t} \quad (6.1)$$

donde en la practica  $\Delta t$  debe tomarse lo suficientemente grande para promediar las pequeñas fluctuaciones de velocidad, pero suficientemente pequeño como para detectar cualquier variación a larga escala originada en la condición de estado transitorio. Ahora podemos definir la velocidad instantánea  $v_z$  como la suma de una velocidad fluctuante  $v'_z$  y una velocidad promediada en el tiempo  $v_{zm}$ . ( figura 6.1 c )

$$v_z = v_{zm} + v'_z \quad (6.2)$$

En estado estable  $\Delta t$  se toma tan grande como sea necesario para que  $v_{zm}$  sea independiente del tiempo. En este caso generalizamos la ecuación ( 6.1 ) para aplicarla a cualquier cantidad fluctuante:

$$v_{zm} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v dt \quad (6.3)$$

substituyendo ( 6.2 ) en ( 6.3 ) obtenemos el promedio del promedio

$$\bar{v}_{zm} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{t+\Delta t} v_{zmdt}}{\Delta t} = v_{zm}$$

$(v'_z)_m = 0$  , pero  $(v'^2_z)_m$  no lo es.

Para flujo completamente desarrollado, los otros componentes de la velocidad  $v_{rm} = v_{em} = 0$ , pero las velocidades fluctuantes  $v'_r$  y  $v'_e$  no lo son ni lo son los promedios de sus cuadrados,  $(v_r'^2)_m$  y  $(v_e'^2)_m$ . La suma:

$$v_{rm}'^2 + v_{im}'^2 + v_{zm}'^2 = 2K_o^t_m$$

Donde  $K_o^t_m$  es la energía cinética turbulenta por unidad de masa. La cantidad

$$\left[ \frac{1}{3} \frac{v_{zm}'^2}{K_o^t_m} \right]^{1/2}$$

$v_{zm}$

donde  $\overline{v_{zm}}$  es el promedio de  $v_{zm}$  sobre el área de la sección transversal, se denomina la intensidad de la turbulencia.

#### FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA Y CONCENTRACION.

Si hacemos mediciones para determinar la temperatura y/o la concentración instantáneas en flujo turbulento, hallaremos que estas cantidades también fluctúan alrededor de un valor promedio, y similarmente escribimos:

$$T = T_m + T'$$

$$CA = CA_m + C'A$$

En flujo turbulento el balance de cantidad de movimiento se hace en términos de valores promediados en el tiempo. Para fluidos incompresibles  $\rho_m = \rho$ . Por ejemplo el flujo total de cantidad de movimiento en la dirección  $r$  en la posición  $r$  es:

$$\overline{(v_{rm} + v'_r)(v_{zm} + v'_z)} = \overline{v_{rm} v_{zm}} + \overline{v'_r v_{zm}} + \overline{v_{rm} v'_z} + \overline{v'_r v'_z}$$

pero

$\overline{v_{rm} v_{zm}} = \overline{v_{rm} v_{zm}}$  es el flujo debido a las velocidades promediadas en el tiempo y es cero puesto que  $v_{rm} = 0$ . También...

$$\overline{v'_r v_{zm}} = \overline{v'_r v_{zm}} = 0 \text{ pues } v'_{rm} = 0$$

Por razones semejantes se hace cero el tercer término.

El término  $\overline{v'_r v'_z}$  pueden medirse experimentalmente; es diferente de cero a excepción de la pared donde  $v'_z = v'_r = 0$ , y en el centro. Se ha encontrado que varía radialmente con la posición, alcanzando un máximo cerca a la pared (figura 6.5). Tiene unidades de flujo de cantidad de movimiento y físicamente representa el transporte de cantidad de movimiento  $z$  en la dirección  $r$  debido a la correlación de  $v'_r$  con  $v'_z$ . Por lo tanto se denomina el flujo de cantidad de movimiento turbulento y se define como:

$$\tau_{rz}^t = \overline{v'_r v'_z} \quad (6.4)$$

También puede interpretarse como un esfuerzo, y conjuntamente con:

$$\tau_{re}^t ; \tau_{ze}^t ; \tau_{rr}^t ; \tau_{\theta\theta}^t ; \tau_{zz}^t$$

se denominan "Esfuerzos (tensiones) de Reynolds".

Un procedimiento similar para el flujo global en la dirección  $z$  nos da:

$$\overline{v_z v_z} = \overline{v_{zm} v_{zm}} + \overline{v'_{zm}^2}$$

El primer término es el flujo global debido a las velocidades promediadas en el tiempo y el segundo es el flujo turbulento de cantidad de movimiento z en la dirección z:

$$\tau_{zz}^t = \int v'_{zm}^2$$

Para flujo desarrollado en tuberías ninguno de los dos términos es cero, pero como no cambian entre  $z = 0$  y  $z = L$ , se cancelan.

Notando que:

$$\tau_{rzm}^t = \tau_{rzm}^l + \tau_{rz}^t \quad (6.5)$$

El balance de cantidad de movimiento se reduce a:

$$\Delta(\tau_{rzm}^t S) = (\bar{\Phi}) \Delta S L$$

con

$$\bar{\Phi}_M = \left[ \frac{(p_0 - p_L) + \rho g L}{L} \right]$$

o :

$$\frac{d(r \tau_{rzm}^t)}{r dr} = \bar{\Phi}_M ; \quad \tau_{rz}^t = \frac{1}{2}(\bar{\Phi}_M r) \quad (6.6)$$

Que es idéntica a la expresión ( 4.48 ) a excepción de que usamos la densidad de flujo ( o esfuerzo ) total  $\tau_{rzm}^t$  en lugar del laminar  $\tau_{rz}$ . Este resultado nos indica que en adelante no necesitamos continuar efectuando el proceso de promediar. Bastará con reemplazar  $\tau_{rz}$  por  $\tau_{rzm}^t$  y usar los valores promediados en el tiempo para las otras cantidades en lugar de valores instantáneos. Esta regla se aplica también para transporte turbulento de calor y masa.

Para obtener el perfil de velocidad turbulenta en un tubo,  $v_{zm}(r)$  debemos relacionar  $\tau_{rz}^t$  con  $v_{zm}$ .

La aproximación mas corriente es escribir una ecuación que relacione  $\tau_{rz}^t$  con el gradiente  $dv_z/dr$  a través de una viscosidad turbulenta  $\mu^t$  en forma análoga a la ley de Newton para flujo laminar

$$\tau_{rz}^t = - \mu^t \frac{dv_{zm}}{dr} \quad (6.7)$$

esta expresión es llamada " Hipótesis de Boussinesq ".

Un problema que presenta esta aproximación, consiste en que, a diferencia de la viscosidad molecular  $\mu$ , la viscosidad turbulenta  $\mu^t$ , depende de las condiciones locales de flujo y no es una propiedad del fluido. Varía con la distancia desde la pared, el número de Reynolds

y con otras condiciones de flujo, así como con la viscosidad molecular del fluido.

Por esta razón algunos autores han preferido otras aproximaciones. Sin embargo, para flujo en tuberías el modelo anterior da buenos resultados y su uso es simple y ampliamente utilizado.

Para transporte solamente en la dirección  $y$ , esta teoría se resume para las tres formas de transporte:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{yz} &= -(\mu + \mu^t)(\delta \bar{v}_z / \delta y) \\ \bar{J}_{Ay} &= -(D_{AB} + D_{AB}^t)(\delta \bar{c} / \delta y) \quad (6.7 a) \\ \bar{q}_y &= -(k + k^t)(\delta \bar{T} / \delta y)\end{aligned}$$

#### LONGITUD DE MEZCLA DE PRANDTL.

Continuemos considerando flujo turbulento desarrollado estable en un tubo a una distancia  $y = R - r$  de la pared. Como la velocidad promediada en el tiempo  $\bar{v}_{zm}$  aumenta con la distancia desde la pared, el gradiente  $(dv_{zm}/dy) = -(dv_{zm}/dr)$  será positivo y  $\tau_{yz} = -\tau_{rz}$  será negativo, indicando transporte de cantidad de movimiento  $z$  hacia la pared. Consideremos una turbulencia originalmente ubicada a una distancia  $y + l$  de la pared, donde  $l$  es la longitud de mezcla (figura 6.2). Prandtl asumió que dicha turbulencia puede moverse una distancia  $l$  en la dirección  $y$  negativa, o sea hacia la pared, con una velocidad lateral  $\bar{v}'_y$ , y cede su cantidad de movimiento, es decir, avanza con el fluido en ese punto.

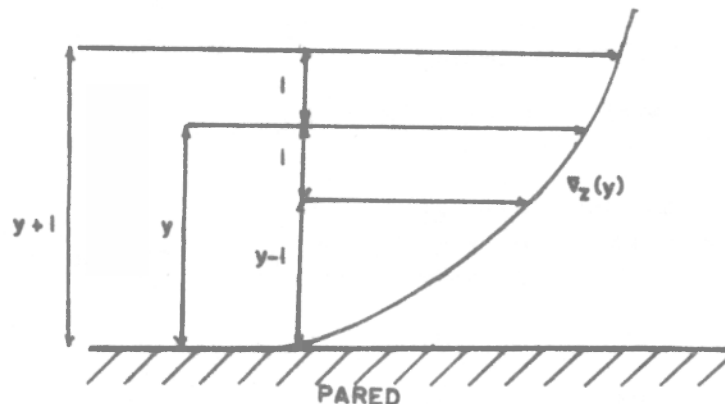


FIGURA 6.2.

Como la velocidad media en  $y + l$  es mayor que en  $y$ , esto aumentará la cantidad de movimiento  $z$  en  $y$ , y habrá un subsiguiente transporte de cantidad de movimiento  $z$  por unidad de volumen que es proporcional a:

$$\int \Delta v_{zm} \Big|_{y+1} = \int \left[ v_{zm} \Big|_{y+1} - v_{zm} \Big|_y \right]$$

En forma simultánea, una turbulencia originalmente en  $y - l$  se translada una distancia  $l$  en la dirección positiva con velocidad  $\bar{v}'_y$ . Como la velocidad media en  $y - l$  es menor que en  $y$ , esto disminuirá la cantidad de movimiento  $z$  en  $y$ , y ocurrirá un transporte de cantidad de movimiento  $z$  por unidad de volumen que es proporcional a:

$$- \int \Delta v_{zm} \Big|_{y-1} = - \int \left[ v_{zm} \Big|_y - v_{zm} \Big|_{y-1} \right]$$

El cambio neto promedio de cantidad de movimiento por unidad de volumen será:

$$\frac{1}{2} \int \left[ v_{zm} \Big|_{y+1} - v_{zm} \Big|_{y-1} \right]$$

La velocidad neta promedio de transporte turbulento de cantidad de movimiento  $z$  en la dirección  $y$  será entonces el producto de este cambio de cantidad de movimiento por unidad de volumen y el flujo volumétrico lateral promedio  $|\bar{v}'_y| S_y$ , ó:

$$\tau_{yz}^t \frac{S}{y} = - \left[ |\bar{v}'_y| S_y \right] \left[ \frac{1}{2} \left[ \int v_{zm} \Big|_{y+1} - \int v_{zm} \Big|_{y-1} \right] \right] \quad (6.8)$$

Donde se introduce el signo menos para hacer  $\tau_{yz}^t$  negativo cuando  $\Delta v_{zm}$  es positivo y  $|\bar{v}'_y|$  es usado para designar una magnitud promedio.

Si el gradiente de velocidad se supone lineal sobre la distancia  $l$ ,

$$v_{zm} \Big|_{y+1} - v_{zm} \Big|_{y-1} = 2l \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right)$$

substituyendo en (6.8) y dividiendo por  $S_y$  nos da para el flujo turbulento:

$$\tau_{yz}^t = - |\bar{v}'_y| \left[ l \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right) \right] \quad (6.9)$$

La longitud de mezcla  $l$  equivale aproximadamente a  $\pm$  la trayectoria libre media de las moléculas en transporte molecular. Sin embargo, como  $\pm$  es muy pequeña ( $\approx 10^{-7}$  m), la suposición de un gradiente constante sobre una distancia  $\pm$  en flujo laminar es mucho mejor que la suposición de gradiente constante sobre una distancia  $l$  en flujo turbulento puesto que  $l$  puede aproximarse a las dimensiones del conjunto.

En forma similar, la velocidad lateral de las turbulencias corresponde en transporte molecular a la velocidad media de las moléculas. Tenemos entonces :

$$\tau_{yz}^t = |\bar{v}'| \int l \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right) = -\mu \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right)$$

$$\frac{\mu^t}{\int} = l |\bar{v}'| \quad (6.10)$$

Prandtl supone a continuación que la velocidad media fluctuante lateral es igual a la velocidad media fluctuante en la dirección de flujo:

$$|\bar{v}'| = \frac{(\overline{v'^2})^{1/2}}{r} = \frac{(\overline{v'^2})^{1/2}}{z}$$

Y que la velocidad de fluctuación en la dirección de flujo es aproximadamente igual al cambio en la velocidad media sobre la distancia  $l$ :

$$\frac{(\overline{v'^2})^{1/2}}{z} = l \left[ \frac{dv_{zm}}{dr} \right] = |\bar{v}'| \quad (6.11)$$

Esta suposición puede explicarse así: consideremos un elemento de fluido en  $y + l$  que se mueve una distancia  $l$  hacia la pared con velocidad lateral fluctuante  $v'_y = -v_r$ . Como la velocidad media  $v_{zm}$  decrece al aproximarnos a la pared el elemento de fluido llega a una corriente con  $v_{zm}$  menor creando una fluctuación positiva gracias al incremento en  $v_{zm}$

$$\frac{v'_z}{z} = v_{zm} \Big|_{y+l} - v_{zm} \Big|_y = l \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right)$$

Similarmente un fluido en  $y - l$  que se desplace en una distancia  $l$  alejándose de la pared con velocidad lateral  $v'_y$  causará una fluctuación negativa en el flujo  $z$ :

$$\frac{v'_z}{z} = v_{zm} \Big|_{y-l} - v_{zm} \Big|_y = -l \left( \frac{dv_{zm}}{dy} \right)$$

Reemplazando (6.11) en (6.10) obtenemos:

$$\mu^t = \int l^2 \left[ \frac{dv_{zm}}{dr} \right] \quad (6.12)$$

La longitud de mezcla tampoco puede predecirse a partir de la teoría. Sin embargo, sabemos que no es mayor que el diámetro del conducto. Además las turbulencias son mayores en la región central y menores cerca a la pared. Prandtl supone que  $l$  es proporcional a la distancia desde la pared :

$$l = ky \quad (6.13)$$

La constante  $k$  es llamada la constante de Von Karmán y su valor experimental es alrededor de 0.4. Reemplazando  $v'$  y  $l$  en (6.9) se obtiene :

$$\mu^t = \left\{ \int 2y^2 \left[ \frac{dv_{zm}}{dr} \right] \right. \quad (6.14)$$

y:

$$\tau_{rz}^t = - \left\{ \int 2y^2 \left[ \frac{dv_{zm}}{dr} \right] \left( \frac{dv_{zm}}{dr} \right) \right.$$

Recordando que

$$\bar{\tau}_{rz} = \tau_{rz}^l + \tau_{rz}^t = \Phi_M(r/2) \quad (6.6)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \mu \frac{dv_z}{dy} + \left\{ (2y)^2 \left[ \frac{dv_z}{dy} \right]^2 \right\} = \frac{\Phi_M(R-y)}{2} \quad (6.15)$$

Esta ecuación cuadrática puede resolverse para  $(dv_{zm}/dy)$ , la cual, en principio, puede integrarse para obtener  $v_{zm}(r)$ .

Retomando la ecuación (6.15) observamos que en la pared:

$$\left| \tau_{rz} \right|_s = \left| -\tau_{yz} \right|_{y=0} = \left| \tau_{rz} \right|_{r=R} = \Phi_M(R/2)$$

Usando esta expresión para eliminar  $\Phi_M$ , nos da

$$\tau_{rz} = \tau_s (1 - y/R)$$

ó

$$\mu(dv_{zm}/dy) + \tau_{rz}^t = \tau_s (1 - y/R) \quad (6.16)$$

Aunque  $\tau_{rz}^t = \int v_z v_r$  varía con la posición radial, nunca es mayor que el flujo total el que a su vez nunca será mayor que el flujo en la pared  $\tau_s$ . Por esto  $\tau_s$  aparece como un flujo característico

Para adimensionalizar la ecuación (6.16) definimos las siguientes cantidades:

$y^+ = y v^*/\Gamma$  ;  $r^+ = rv^*/\Gamma$  : Números de Reynolds posicionales

Aquí:  $y = (R - r)$ ;  $v^*$  representa escala de velocidad característica que deberá determinarse.  $\Gamma/v^*$  resulta siendo una longitud característica. Hemos usado el signo ( + ) para indicar cantidades dimensionales tal como es costumbre en mecánica de fluidos

$v^+ = v_{zm}/v^*$  es una velocidad adimensional

Dividiendo (6.16) por  $\tau_s$ , adimensionalizando  $v_{zm}$  e  $y$  tenemos

$$\frac{\mu v^{*2}}{\tau_s(\mu/\rho)} \frac{dv^+}{dy^+} + (\tau_{rz}/\tau_s) = 1 - y^+/R^+ \quad (6.17)$$

Si identificamos  $\tau_s \equiv \rho v^{*2}$  podemos definir una velocidad de fricción característica por:

$$v^* = (\tau_s/\rho) \quad (6.18)$$

La ecuación ( 6.17 ) se transforma en :

$$(dv^+/dy^+) + (\tau_{rz}^t / \rho v_{x^2}^2) = (1 - y^+/R^+) \quad ( 6.19 )$$

La que puede integrarse si se conoce  $\tau_{rz}$  como función de la posición.

MODELO DE LAS TRES REGIONES PARA TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN UN TUBO.

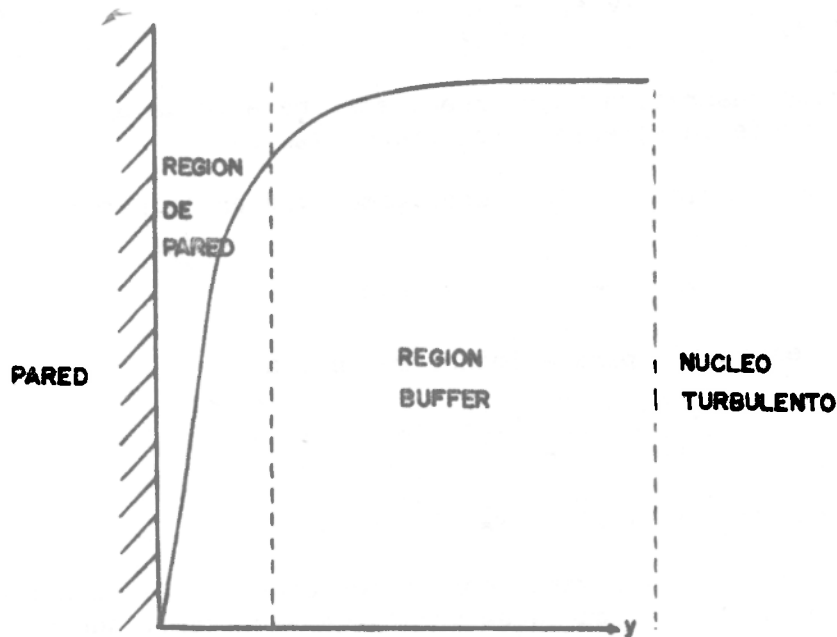


FIGURA 6.3. Regiones usadas en el análisis del transporte turbulento

Se acostumbra dividir el campo de flujo en tres regiones distintas, cada una con propiedades específicas. Las definimos así: (figura 6.3).

1. Región de Pared o Subcapa Viscosa.

Esta es la porción del campo de flujo inmediatamente adyacente a la pared del tubo. Aunque todavía pueden existir fluctuaciones turbulentas, el esfuerzo cortante turbulento es pequeño :  $\tau_{rz}^t$  ó  $\mu^t$  son aproximadamente cero y pueden despreciarse.

2. Núcleo Turbulento.

Esta es la región en la parte central del tubo. Ocupa la mayor parte de la sección transversal del tubo. Aquí el movimiento turbulento es intenso y  $\mu^t$  es muy grande, de forma que  $\mu/\mu^t$  tiende a cero, y el flujo de cantidad de movimiento laminar puede despreciarse.

3. Región Buffer o de Transición.

Esta es la región que se encuentra entre la subcapa viscosa y el núcleo turbulento, donde  $\mu$  y  $\mu^t$  son comparables en magnitud, o sea que tanto el flujo de cantidad de movimiento viscoso como el turbulento son importantes.

SUBCAPA VISCOSA.

Aquí  $r$  tiende a  $R$  ó  $y$  tiende a cero y  $\mu^t$  o  $\tau_{rz}^t$  tienden a cero. La ecuación ( 6.19 ) se reduce a:

$$(dv^+/dy^+) = 1 \quad \text{ó} \quad v^+ = y^+ \quad ( 6.20 )$$

Esto implica que en la subcapa viscosa el mismo perfil de velocidades existe para todos los fluidos newtonianos, para tubos de todos los diámetros y para todas las velocidades de flujo ( siendo el flujo principal turbulento ). Se ha encontrado experimentalmente que la ecuación ( 6.20 ) tiene validez hasta  $y^+ = 5.0$

NUCLEO TURBULENTO.

Aquí el efecto viscoso es despreciable con respecto al efecto turbulento. ( 6.16 ) se transforma en :

$$\tau_{rz}^t = \tau_s (1 - y/R)$$

Necesitamos conocer  $\mu^t$ . Para conocerlo utilizamos la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl. Aplicándola Prandtl supuso  $(1-y/R) \approx 1$ , o sea, desprecia la variación de  $\tau_{rz}$  con la posición a pesar de saber que varía linealmente con la distancia desde la pared. Esta suposición se justifica sin embargo pues la expresión resultante concuerda con los resultados experimentales cerca del centro. La ecuación ( 6.14 ) nos da:

$$\tau_s = \rho l^2 y^2 \left| \frac{dv_{zm}}{dy} \right| \left| \frac{dv_{zm}}{dy} \right|$$

Se toma el signo que da el significado físico apropiado. Extrayendo raíz cuadrada y reorganizando:

$$\frac{dv_{zm}}{dy} = \frac{(\tau_s/\rho)^{1/2}}{l y} = \frac{v^*}{l y} \quad ( 6.21 )$$

$$dv_{zm}/v^* = (1/l)(dy/y)$$

ó :

$$dv^+ = (1/l)(dy^+/y^+)$$

Tomando  $v_1$  como la velocidad en la posición  $y_1$ , donde comienza el núcleo turbulento,

$$v^+ - v_1^+ = (1/4) \ln(y^+/y_1^+) \quad (6.21 a)$$

denominada perfil logarítmico de velocidad.

Esta ecuación describe el perfil de velocidad en el núcleo en forma adecuada, aunque no da un gradiente de velocidad cero en el eje de simetría como debería ser. Evaluando  $v_1$  y  $y_1$  en forma experimental, se obtiene la ecuación de Nikuradse:

$$v^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.5 \quad ; \quad y^+ > 30 \quad (6.22)$$

#### REGION BUFFER O DE TRANSICION.

Esta región cae entre los puntos donde el perfil de velocidad de la subcapa viscosa  $v^+ = y^+$  deja de aplicarse y el perfil logarítmico comienza a aplicarse o sea para  $5 < y^+ < 30$ .

Como tanto  $\mu$  como  $\mu^t$  se involucran es difícil desarrollar una ecuación que describa esta región y empalme con las ecuaciones para la región laminar y el núcleo turbulento. Una de las muchas aproximaciones es la siguiente: Así como en la región laminar,  $(1 - y/R)$  se asume la unidad, (6.16) puede reescribirse como:

$$v^{*2} = \tau_s = (\mu + \mu^t)(dv_{zm}/dy) \quad (6.23)$$

Adimensionalizando

$$\begin{aligned} (v^*/\mu)(dv_{zm}/\tau_s) &= [dy/(\mu + \mu^t)](v^*/\Gamma) \\ dv^+ &= dy^+/(1 + \mu^t/\mu) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Para integrar esta ecuación necesitamos conocer como varía  $\mu^t/\mu$  con  $y^+$  en esta región

Se han propuesto diferentes ecuaciones semiempíricas para esta relación. Usando la ecuación recomendada por Lin, Mouton y Putnam:

$$\mu^t/\mu = y^+/5 - 0.959 \quad (6.25)$$

Para la región  $5 < y^+ < 30$ . Esta ecuación puede integrarse fácilmente cuando se reemplaza en (6.24) para dar:

$$v^+ = -3.27 + 5.0 \ln(y^+ + 0.205) \quad 5 < y^+ < 30 \quad (6.26)$$

Se usa con más frecuencia la ecuación empírica obtenida por Nikuradse:

$$v^+ = -3.05 + 5 \ln y^+ \quad 0 < y < 26 \quad (6.27)$$

PERFIL UNIVERSAL DE VELOCIDADES PARA FLUJO TURBULENTO EN TUBOS LISOS

El propósito de usar variables adimensionales como  $v^+$  y  $y^+$  es intentar correlacionar los efectos del diámetro del tubo, la velocidad promedio  $v_m$ , y las propiedades del fluido (tales como  $\rho$  y  $\mu$ ) para que ecuaciones de la forma  $v^+=f(y^+)$  sean válidas para cualquier fluido newtoniano y cualquier  $Re = \rho v_m D / \mu$  en régimen turbulento. Un gráfico de  $v^+$  como función de  $y^+$  (figura 6.4) que sea válido para todo  $Re$  se dice un perfil universal de velocidades aunque se usen ecuaciones diferentes para cada una de las tres regiones. Sin embargo Churchill y Choi desarrollaron una ecuación que interpola entre las tres ecuaciones aproximándose a ellas asintóticamente:

$$(v^+)^{-2} = (y^+)^{-2} + (0.16/\ln^2 9y^+)$$

ó :

$$v^+ = \left[ \frac{(y^+)^2 \ln^2 9y^+}{0.16(y^+)^2 + \ln^2 9y^+} \right] \quad (6.28)$$

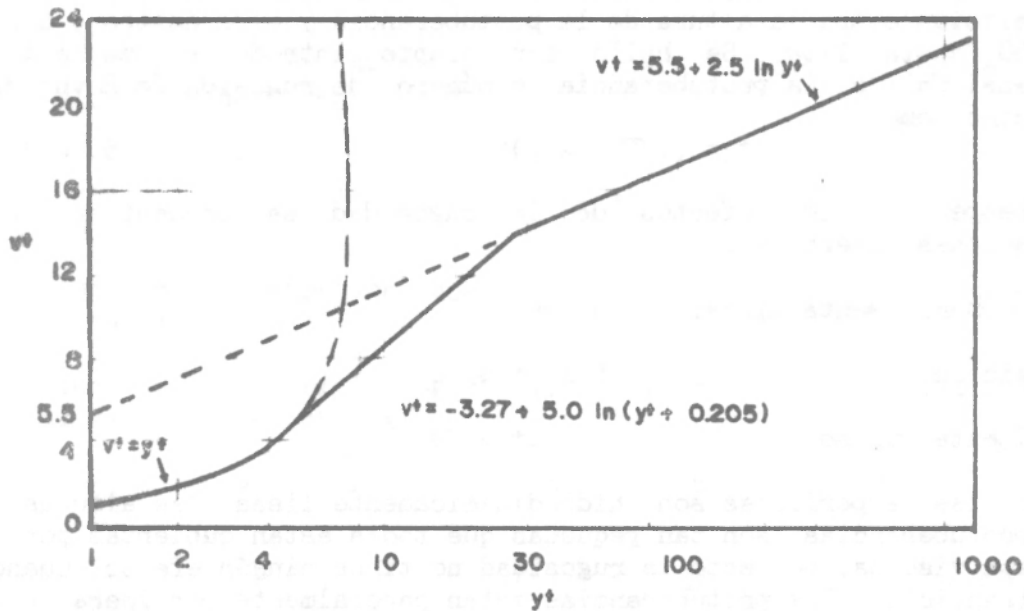


FIGURA 6.4. Perfiles de velocidad. Datos tomados para valores de  $Re$  entre 6000 y 49000 se ajustan con muy buena correlación a esta gráfica.

SUPERFICIES RUGOSAS.

Al integrar la ecuación (6.21) entre un límite inferior arbitrario y tomando el límite superior en el centro del conducto, donde  $y^+ = R^+$  y  $v^+ = v^+_{max}$ , obtenemos:

$$v_{max} - v^+ = (1/\lambda_1) \ln(R^+/y^+) = (-1/\lambda_1) \ln(y/R) = (-1/\lambda_1) \ln(1-r/R) \quad (6.29)$$

Esta es la forma de las llamadas ecuaciones de velocidad diferencia, las cuales se ajustan a los datos experimentales con buena aproximación (excepto cerca a la pared), la constante  $1/\lambda_1$  se toma como 2.5. El parámetro  $v^+_{max}$  depende de la rugosidad de la superficie.

Para flujo sobre superficies rugosas, se presume que ésta tiene protuberancias de altura  $\epsilon$  variable. Se considera que una superficie es hidrodinámicamente lisa si las alturas  $\epsilon$  de las protuberancias son mucho menores que el espesor de la subcapa viscosa. En general las superficies que se encuentran en las aplicaciones de ingeniería no son perfectamente lisas y en la mayoría de los casos las protuberancias penetran en la subcapa viscosa que es muy delgada. Es difícil analizar el efecto de la rugosidad sobre la distribución de velocidad debido a la gran cantidad de formas geométricas de la rugosidad y a la variedad de formas en que las protuberancias están distribuidas sobre la superficie. Nikuradse hizo numerosos experimentos de flujo turbulento dentro de tubos de rugosidad artificial (con arenas de granulometría definida adherida a la superficie) en un amplio rango de rugosidad relativa  $\epsilon/D$  (es decir, la relación entre la altura de la protuberancia y el diámetro) desde  $1/1000$  hasta  $1/30$ . Se halló conveniente introducir una altura adimensional de la protuberancia o número de rugosidad de Reynolds, definido como:

$$\epsilon^+ = (\epsilon/\Gamma)(\tau_w/\mu)^{1/2} \quad (6.30)$$

Con respecto a los efectos de la rugosidad se encuentran tres situaciones diferentes:

Hidrodinámicamente lisos:  $0 < \epsilon^+ < 5$

Transición:  $5 < \epsilon^+ < 70$

Totalmente rugoso:  $\epsilon^+ > 70$

Cuando las superficies son hidrodinámicamente lisas las alturas de las protuberancias son tan pequeñas que todas están cubiertas por la subcapa viscosa, por esto la rugosidad no tiene ningún efecto. Cuando hay transición las protuberancias están parcialmente por fuera de la subcapa viscosa y causan resistencia adicional al flujo. En el caso totalmente rugoso la altura de las protuberancias es tan grande que todas penetran la subcapa viscosa, en consecuencia ya no hay subcapa viscosa y las protuberancias influyen en el mezclado turbulento. La ley de distribución logarítmica de la velocidad (6.21 a) se aplica al régimen totalmente rugoso reemplazando  $y^+$  por  $y/\epsilon$ :

$$v^+ = \frac{1}{\lambda} \ln(y/\epsilon) + C$$

A partir de los experimentos de Nikuradse se halló:

$$v^+ = 2.5 \ln(y/\epsilon) + 8.5 \quad (6.31)$$

Para  $y = R$

$$v_{\max}^+ = 2.5 \ln(R/\epsilon) + 8.5$$

CORRELACIONES PARA EL FACTOR DE FRICCION.

Nuestro objetivo es correlacionar los coeficientes de transferencia con otras variables. Para transporte de cantidad de movimiento definimos:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_m^2} = 2(v^*/v_m)^2 = 2/(v_m^+)^2 \quad (6.32)$$

$$v_m^+ = \frac{\int_0^{R^+} v^+ r^+ dr^+}{\int_0^{R^+} r^+ dr^+} = \frac{\int_{R^+}^0 v^+(R^+ - y^+) (-dy^+)}{\frac{1}{2}(R^+)^2} \quad (6.33)$$

Debemos integrar esta expresión para hallar  $v_m^+$  como función de  $R^+$  y con (6.32) relacionamos  $f$  y  $R^+$ .

$$R^+ = \frac{f v^* R}{\mu} = \frac{2R f v_m}{\mu} \frac{1}{2} \frac{v^*}{v_m} = (Re/2v_m) = \frac{Re}{2} (f/2)^{1/2} \quad (6.34)$$

Dependiendo de la expresión que se adopte para  $v^+$  se obtendrán resultados diferentes.

Suponiendo que el perfil logarítmico de velocidades sea aplicable a todo el radio de la tubería:

$$v^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \quad (6.22)$$

$$v_m^+ = \frac{2}{(R^+)^2} \int_0^{R^+} [2.5 \ln y^+ + 5.5](R^+ - y^+) dy^+ \quad (6.35)$$

$$v_m^+ = 1.75 + 2.5 \ln R^+ \quad (6.36)$$

De (6.32) :

$$1/ff = (v_m^+)/f2 = 1/f2 (1.75 + 2.5 \ln R^+) \quad (6.37)$$

De (6.34) :

$$1/ff = 4.07 \log[Re/f] - 0.60 \quad (6.38)$$

que se conoce como la ley universal de Prandtl para tubos lisos.

El error involucrado al suponer ( 6.22 ) válida para todo el diámetro del conducto puede evaluarse así:

Reescribimos ( 6.33 ):

$$v_m^+ = \frac{2}{(R^+)^2} I_t(R^+)$$

$$I_t = \int_0^{R^+} v^+(R^+ - y^+) dy^+ = I_1 + I_b + I_n \quad ( 6.39 )$$

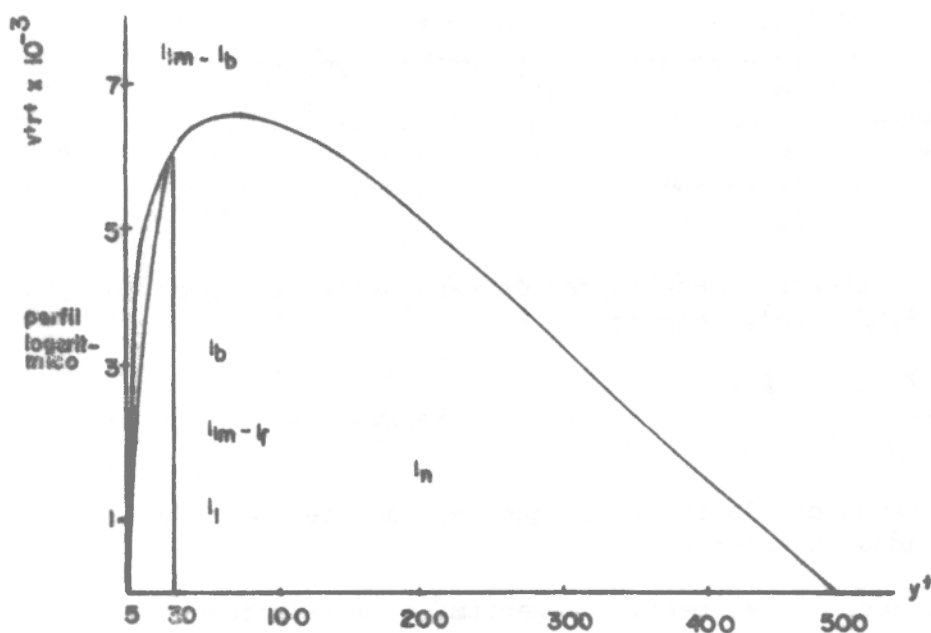


FIGURA 6.5. Flujo volumétrico relativo según contribuciones de las diferentes regiones para flujo turbulento en un tubo.

Donde  $I_1$ ,  $I_b$  e  $I_n$  son respectivamente, las integrales sobre la regiones laminar, buffer y el núcleo, dadas por el área bajo la curva de la figura 6.5.

$I_1$  : subcapa laminar;  $I_b$  : región buffer;  $I_n$  : region del núcleo,  $I_{LM}$ : área bajo el perfil logarítmico de velocidad. Para  $R^+ = 500$ , las integrales  $I_1$ ,  $I_b$  e  $I_n$  se muestran en la figura 6.5 como áreas bajo la curva  $v^+(R^+ - y^+)$  contra  $y^+$ . El área total  $I_t = I_1 + I_b + I_n$  se puede comparar con el área aproximada  $I_{LM}$ , el área bajo la curva del perfil de velocidad logarítmico extrapolada hasta  $y^+ = 0$ .

El error porcentual involucrado al usar  $I_{LM}$  en lugar de  $I_t$  es  $(I_{LM} - I_t)(100)/I_t$ , donde

$$I_{LM} - I_t = \int_0^{30} v_{n^+}(R^+ - y^+) dy^+ - I_1 - I_b$$

Reemplazando ( 6.20 ), ( 6.27 ) y ( 6.22 ) para la distribución de velocidad en las regiones laminares  $v^+_{1}$ , buffer,  $v^+_b$  y el núcleo  $v^+_n$  se obtienen las integrales deseadas. En el caso de  $R^+ = 500$  se halla un error de sólo 1.4 %. O sea que para obtener  $v^+_m$  a partir de  $v^+$  no es necesario conocer con mucha precisión el perfil en las vecindades de la pared; sin embargo, si no se conoce  $v^+_1$ , la velocidad en el límite del núcleo turbulento, o la constante 5.5 en ( 6.22 ), sería necesario hallarlos por integración de la ecuación ( 6.24 ).

### PAREDES RUGOSAS.

El análisis anterior es sólo aplicable para tuberías lisas. Para tuberías rugosas la relación  $\epsilon/D$  debe estimarse y tenerse en cuenta. Curvas empíricas como el diagrama de Moody de  $f$  contra  $Re$ , presentado con profusión en los textos de mecánica de fluidos, se utilizan tradicionalmente en la práctica.

Combinando ecuaciones para tuberías rugosas en regímenes de flujo laminar y turbulento Churchill desarrolló una sola ecuación para el factor de fricción en flujo laminar, de transición o turbulento, y para tuberías lisas o rugosas:

$$\frac{f}{2} = \left[ (8/Re)^{12} + 1/(A + B)^{3/2} \right]^{1/12} \quad ( 6.40 )$$

$$A = \left[ 2.457 \ln \left[ \frac{1}{(7/Re)^{0.9} + 0.27(\epsilon/D)} \right] \right]^{16}$$

$$B = \left[ \frac{37530}{Re} \right]^{16}$$

Las ecuaciones son más convenientes que las tablas o las correlaciones gráficas en diseño y operación ayudadas por computador. Prueba y error es necesaria si en lugar de la velocidad de flujo se especifica la caída de presión.

La ecuación ( 6.40 ) no sólo reproduce el gráfico del factor de fricción sino que evita interpolaciones y da valores únicos en la región de transición. Estos valores están, naturalmente, sujetos a alguna incertidumbre, debido a la inestabilidad física inherente en esta región.

## MODELO PELICULAR.

El modelo que históricamente más se ha usado es el pelicular en el que se supone que la resistencia al transporte ocurre completamente en una delgada película adyacente a la superficie ( fig 6.6 ). Como el flujo en la película es esencialmente laminar, la temperatura, concentración y/o velocidad cambian rápidamente hasta que se alcanza la región turbulenta. Allí la temperatura, concentración y velocidad son aproximadamente iguales a los valores promedios. Generalmente la curvatura de la superficie se desprecia por lo que el modelo puede aplicarse a tuberías, paredes planas, superficie de empaques, etc. El espesor efectivo de la película,  $z_F$ , no es el espesor de la subcapa laminar sino el de una película ficticia que se requeriría si la resistencia total y sólo por transporte molecular recayera en ella. Para ilustrar esta idea consideremos el caso de transferencia de calor: si la densidad de flujo en  $z = 0$  es  $q_s$  y despreciamos el transporte turbulento, asumiendo  $q$  constante e integrando la ley de Fourier obtenemos:

$$q_s = \frac{k}{z_{FH}} (T_{med} - T_s) \quad ( 6.41 )$$

por definición teníamos :

$$q_s = h (T_{med} - T_s) \quad Nu \equiv hD/k$$

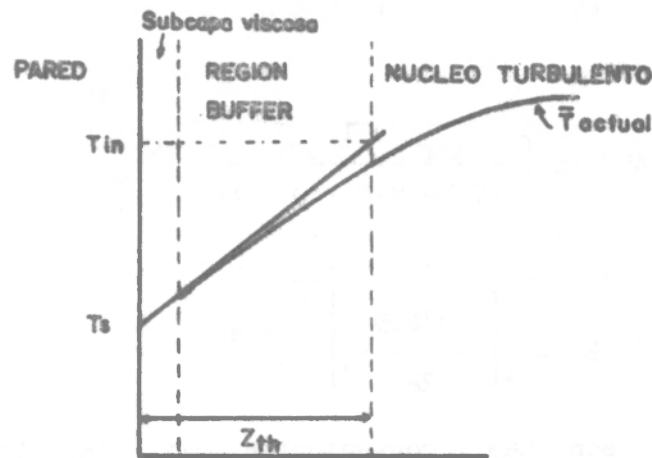


FIGURA 6.6. Teoría pelicular y el modelo de las tres regiones.

de donde:

$$h = k/z_{FH} \quad y \quad Nu \equiv D/z_{FH} \quad ( 6.42 )$$

Para transferencia de masa si  $z_{FD}$  es el espesor de la película correspondiente:

$$k_c = D_{AB}/z_{FD} \quad y \quad Sh = k_c D/D_{AB} = D/z_{FD} \quad ( 6.43 )$$

Para transporte de cantidad de movimiento, asumiendo perfil de velocidad lineal dentro de la película:

$$f = \tau_w / (\frac{1}{2} \rho v_m^2) \quad , \quad \frac{1}{2} f \rho v_m^2 = \tau_w \approx \mu (v_{med} / z_{FC})$$

$$\frac{f}{2} = \frac{\mu}{z_{FC} \rho v_m} = \frac{\mu}{\rho v_m D} \frac{D}{z_{FC}} = \frac{D}{Re z_{FC}} \quad (6.44)$$

o sea que  $Re \cdot f / 2$  es un espesor adimensional inverso de cantidad de movimiento, tal como  $Nu$  es para calor o  $Sh$  es para transferencia de masa.

Para obtener  $Nu$  ( o  $Sh$  ) debemos relacionar  $z_{FH}$  ( o  $z_{FD}$  ) a  $z_{FC}$ . Para hacerlo suponemos que el espesor de la película para cantidad de movimiento es la distancia a la cual la difusividad turbulenta de cantidad de movimiento  $\Gamma_t$  es  $\beta$  veces la difusividad molecular de cantidad de movimiento, y que  $z_{FH}$  ( o  $z_{FD}$  ) es la distancia a la cual  $\alpha^t$  ( o  $D_{AB}^t$  ) es el mismo factor  $\beta$  de  $\alpha$  ( o  $D_{AB}$  )

$$\Gamma_t = \beta \Gamma \quad ; \quad \alpha^t = \beta \alpha \quad . \quad D_{AB}^t = \beta D_{AB} \quad (6.45)$$

$\beta$  está entre cien y mil.

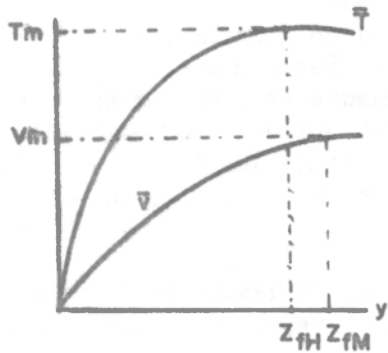


FIGURA 6.7.a

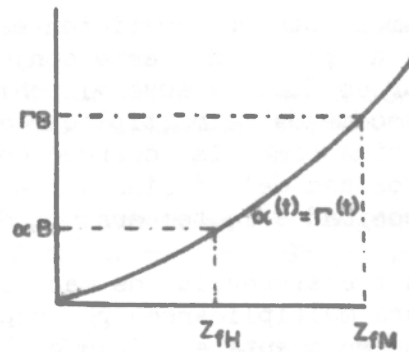


FIGURA 6.7.b

Haciendo uso de la observación empírica de que las difusividades turbulentas son aproximadamente iguales y varían con la potencia tres de la distancia a la pared:

$$\Gamma_t = \alpha^t = D_{AB}^t = C y^3$$

donde  $C$  es una constante. Entonces:

$$\beta \Gamma = C (z_{FM})^3 \quad ; \quad \beta \alpha = C (z_{FH})^3 \quad ; \quad \beta D_{AB} = C (z_{FD})^3$$

de donde

$$(z_{FM} / z_{FH}) = [\Gamma / \alpha]^{1/3} = Pr^{1/3}$$

$$(z_{FM} / z_{FD}) = (\Gamma / D_{AB})^{1/3} = Sc^{1/3}$$

$$\text{Nu} = (f/2)\text{Re Pr}^{1/3} \quad (6.45)$$

$$\text{Sh} = (f/2)\text{Re Sc}^{1/3} \quad (6.46)$$

El número de Prandtl,  $\text{Pr}$ , varía desde valores menores que 0.01 para metales líquidos, 0.7 para aire, 6 para agua hasta 83300 para glicerina. El número de Schmidt,  $\text{Sc}$ , para gases está en valores cercanos a la unidad, pero en líquidos tiene valores tan altos como 2000.

Se acostumbra definir una cantidad adimensional, el número de Stanton como:

$$\text{St} = \text{Nu}/\text{Re Pr} \quad ; \quad \text{St}_D = \text{Sh}/\text{Re Sc} \quad (6.47)$$

También los llamados factores  $J$  :

$$J_H = \text{Nu}/\text{Re Pr}^{1/3} = \text{St Pr}^{2/3} \quad (6.48)$$

$$J_D = \text{Sh}/\text{Re Sc}^{1/3} = \text{St}_D \text{Sc}^{2/3} \quad (6.49)$$

De las ecuaciones ( 6.45 ) y ( 6.46 ) se observa que :

$$J_H = J_D = f/2 = J_M = \text{función de Re} \quad (6.50)$$

Podemos obtener coeficientes de transferencia de impulso, calor y/o masa a partir de este conjunto de ecuaciones. Para transferencia de calor en fluidos cuya viscosidad varía ampliamente con la temperatura es recomendable multiplicar el factor  $J_H$  ( 6.48 ) por  $(\mu_m/\mu_s)^{-0.14}$  conocida como la corrección de Sieder y Tate. Aquí  $\mu_m$  es la viscosidad del fluido a la temperatura de la mezcla  $T_m$  y  $\mu_s$  es su viscosidad a la temperatura de la pared.

Para transferencia de masa el lado izquierdo de la ecuación ( 6.46 ) deberá multiplicarse por  $p/\rho_{EML}$ , o  $c/C_{EML}$ , o  $1/Y_{BML}$ , o  $1/X_{BML}$ , para tener en cuenta el flujo global.

La ecuación ( 6.50 ) es llamada la analogía de Chilton Colburn, y ha sido probada experimentalmente para gran cantidad de fluidos ( para varios  $\text{Sc}$  y  $\text{Pr}$  ) hallándose bastante precisa. Se usa industrialmente y tiene la ventaja de que sólo es necesario representar  $J$  como función de  $\text{Re}$  en papel doble logarítmico para obtener correlaciones para transporte de impulso calor o masa.

#### EJEMPLO 6.1.

La ley de la potencia  $1/n$  de Blasius dice que para flujo turbulento en el interior de tubos lisos la velocidad varía con la potencia  $1/n$  de la distancia desde la pared donde  $n \approx f^{-1/2}$ .

Para  $\text{Re}$  aproximadamente igual a  $10^5$ ,  $n \approx 7$ . En forma adimensional, el perfil de velocidad para  $n = 7$  es  $v^+ = 8.56(y^+)^{1/7}$

Usando ( 6.33 ) y ( 6.34 ) :

$$v_m^+ = (8.56)(0.817)(R^+)^{1/7}$$

Reemplazando en ( 6.32 ) y reorganizando se halla la "Ley de fricción de Blasius", válida para  $4000 < Re < 10^5$  :

$$f = 0.0079(Re)^{-0.25} \quad ( 6.51 )$$

Esta expresión se ve frecuentemente escrita como:

$$f = 0.046(Re)^{-0.2} \quad 10^4 < Re < 10^6 \quad ( 6.52 )$$

a partir de ella y la ecuación ( 6.45 )

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3} \quad ( 6.53 )$$

que coincide bastante bien con la ecuación muy usada de Dittus-Boelter.

$$Nu = 0.023 (Re)^{0.8} Pr^b \quad ( 6.54 )$$

$$b = \begin{cases} 0.4 & \text{Calentamiento} \\ 0.3 & \text{Enfriamiento.} \end{cases}$$

Los diferentes valores en del exponente b surgen de la variación de la viscosidad con la temperatura, afectando la subcapa viscosa y el perfil de velocidad.

También coincide bastante bien al ser reemplazada en la ecuación (6.46) con los resultados experimentales obtenidos por Sherwood y Linton para líquidos :

$$Sh = 0.023(Re)^{0.83} Sc^{1/3} \quad ( 6.55 a )$$

y para gases :

$$Sh = 0.023(Re)^{0.83} Sc^{0.44} \quad ( 6.55 b )$$

Hemos demostrado como puede utilizarse la teoría elemental sobre transporte turbulento para obtener resultados que estan de acuerdo con las correlaciones empíricas para los coeficientes de transferencia existentes en la literatura.

#### MÉTODOS APROXIMADOS.

Debido a la complicación que representa el cálculo de varias integrales, se han propuesto aproximaciones para hallar  $T_m^+$  y  $v_m^+$ . Una asume que en  $y^+ = y_1^+$ ,

$$T^+ \Big|_{y_1^+} = T_1^+ = T_m^+ ; \quad v_m^+ = v_1^+$$

Luego se relacionan los números de Nu con el factor de fricción. Las ecuaciones resultantes son llamadas analogías. Sin embargo, la palabra analogía como se usa en relación a la analogía de Chilton-Colburn, Von Karmán, Reynolds o Prandtl, no tiene el mismo significado que el usado en el capítulo cuatro por ejemplo. Allí se habla de analogía matemática en el sentido que la ecuación diferencial, las leyes de flujo y las condiciones límite diferían tan sólo en su notación. Sin embargo, para transporte turbulento de cantidad de movimiento y calor en una tubería, las ecuaciones diferenciales no son las mismas pues, ( i ) La ecuación de impulso contiene un término de generación interna que no contiene la de calor y ( ii ) la ecuación de calor en rigor debería incluir un término para flujo global en la dirección axial ( pues T varía con z ) mientras que la de cantidad de movimiento no, pues en flujo desarrollado  $v_z$  no varía con z. Este problema se obvia en el modelo de las tres regiones suponiendo que los flujos son constantes e iguales a los valores en la pared, eliminando así la necesidad de ecuaciones de balance.

Escribimos entonces las leyes de flujo para transporte de impulso y calor encontrando que son de la misma forma, así como lo son las condiciones límite.

Es en este sentido entonces que existe una analogía.

#### MODELO DE TRES REGIONES PARA TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA.

Subcapa Viscosa.

De la ecuación ( 6.7.a )

$$q_s = (k + k^t) \left[ \frac{dT}{dy} \right] \quad ( 6.7.a )$$

despreciando  $k^t$ , considerando  $q_s$  constante,

$$\int_{T_s}^{\bar{T}} d\bar{T} = \bar{T} - T_s = \int_0^y (q_s/k) dy = (q_s y)/k \quad ( 6.56 )$$

a y lo adimensionalizamos como :

$$y^+ \equiv yv^*/\Gamma \quad ( 6.16 a )$$

Para obtener una temperatura adimensional postulamos que  $T_s$ , la temperatura de la pared puede tomarse como una temperatura de referencia y  $\int Cp(T - T_s)$  se puede interpretar como una entalpía y tiene unidades de energía ( o de calor ). Al dividir por  $q_s$  se cancelan las unidades de calor y situaciones con diferentes flujos de calor tienden a quedar en las mismas bases físicas. Las unidades de tiempo y longitud que se introducen se pueden cancelar usando  $(\tau_w/\rho)^{1/2}$ . De esta manera tenemos una temperatura adimensional:

$$T^+ = [(\int C_p v^* (\bar{T} - \bar{T}_s))] / q_s \quad (6.57)$$

Así, al multiplicar (6.56) por  $\int C_p v^* / q_s$  obtenemos:

$$T^+ = \frac{C_p \mu}{k} \frac{q v^*}{\Gamma} = Pr y^+ \quad (6.58)$$

Para transferencia de masa, un razonamiento similar lleva a la definición :

$$c_A^+ = \frac{v^* (\bar{c}_A - c_{AS})}{J_{AS}} = Sc y^+ \quad (6.59)$$

Anteriormente obtuvimos  $v^+ = y^+$  ( ecuación 6.20 ) para el perfil de velocidades

Región Buffer :

Para transporte de calor:

$$q_s = (k + k^t) \left[ \frac{d\bar{T}}{dy} \right] \quad (6.7.a)$$

$$\bar{T} - T_s = \int_{T_s}^{\bar{T}} dT = q_s \int_0^y dy / (k + k^t) \quad (6.21)$$

Haciéndola adimensional como ya vimos:

$$T^+ = \int_0^y [(\int C_p \Gamma) / (k + k^t)] (v^* dy / \Gamma) = \int_0^{y^+} dy^+ / (\alpha / \Gamma + \alpha^t / \Gamma) \quad (6.60)$$

$$\alpha^t \equiv \frac{k^t}{\int C_p} \quad ; \quad Pr^t = \frac{\Gamma^t}{\alpha^t} = \frac{\mu^t}{\mu} \frac{C_p}{k^t}$$

Reescribimos (6.60)

$$T^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\alpha / \Gamma + (\alpha^t / \Gamma^t) \Gamma^t / \Gamma} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1/Pr + (1/Pr^t) \mu^t / \mu} \quad (6.61)$$

Para transporte de masa las ecuaciones correspondientes son :

$$c^+ = \int_0^{y^+} (\Gamma dy^+) / (D_{AB} + D_{AB}^t) = \int_0^{y^+} dy^+ / [1/Sc + (1/Sc^t) (\mu^t / \mu)] \quad (6.62)$$

Como los mecanismos de transporte turbulento de impulso, calor y masa son esencialmente iguales es costumbre asumir:

$$\text{Pr}^t = \text{Sc}^t = 1.0 \quad \text{o} \quad \alpha^t = D_{AB}^t = \Gamma^t$$

Núcleo Turbulento:

Aquí se desprecia  $k$  con respecto a  $k^t$ . Es conveniente relacionar los perfiles adimensionales de temperatura y de velocidad. A partir de las leyes de flujo:

$$\tau_s = \Gamma^t [d(\overline{v_{zsm}})/dy]$$

$$q_s = \alpha^t [d(\overline{C_p T})/dy]$$

Resolviendo para  $dy$  e igualando:

$$dy = \frac{\Gamma^t}{\tau_s} d(\overline{v_{zsm}}) = \frac{\alpha^t}{q_s} d(\overline{C_p T})$$

Multiplicando por  $v^*/\Gamma^t$

$$\frac{v^*}{\tau_s} d(\overline{v_{zsm}}) = \frac{v^*}{q_s} (\alpha^t/b^t) d(\overline{C_p T})$$

$$dv^+ = dT^+ / \text{Pr}^t \quad (6.63)$$

$$v^+ - v_1^+ = (1/\text{Pr}^t) (T^+ - T_1^+) \quad (6.64)$$

Si  $\text{Pr}^t = 1.0$

$$v^+ - v_1^+ = T^+ - T_1^+ = (1/k) \ln(y^+/y_1^+) \quad (6.65)$$

Similarmente para transporte de masa se obtiene:

$$v^+ - v_1^+ = (1/\text{Sc}^t) (c_A^+ - c_{A1}^+) = (1/k) \ln(y^+/y_1^+) \quad (6.66)$$

#### ANALOGIA DE VON KARMAN.

En las dos expresiones anteriores tanto  $T_1^+$  como  $c_{A1}^+$  deben obtenerse de una expresión para  $T^+(y^+)$  o  $c_A(y^+)$  para la zona buffer.

Von Karmán hace el siguiente análisis: Como ya lo vimos, en la zona turbulenta despreciando la contribución molecular, la ecuación (6.24):

$$dv^+ = dy^+ / (1 + \Gamma^t/\Gamma) \quad (6.24)$$

se puede reducir a:

$$v^+ - v_1^+ = \int_{y_1^+}^{y^+} dy / (\Gamma^t / \Gamma) = \int_{y_1^+}^{y^+} R_{Mn} dy^+ = T^+ - T_1^+ \quad (6.67)$$

$R_{Mn}$  es la resistencia equivalente en el núcleo.

Para hallar  $v_1$  integramos ( 6.24 ) entre  $y^+ = 0$  y  $y^+ = y_1$ :

$$v_1^+ = \int_0^{y_1^+} dy^+ / (1 + \Gamma^t / \Gamma) = \int_0^{y_1^+} R_{Ms} dy^+ \quad (6.68)$$

donde  $R_{Ms}$  es la resistencia en la región de la pared que incluye la subcapa laminar y la región buffer.

Ahora, la ecuación ( 6.61 )

$$T_1^+ = \int_0^{y_1^+} dy^+ / (1/Pr + \alpha^t / \Gamma^t) = \int_0^{y_1^+} R_{Hs} dy^+ \quad (6.69)$$

Reemplazando  $T_1^+$  y  $v_1^+$  en ( 6.67 )

$$T^+ = v^+ + \int_0^{y_1^+} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ \quad (6.70)$$

Conociendo el perfil de velocidades y las difusividades turbulentas podríamos determinar  $T^+$  y entonces  $T_m^+$ .

Von Karmán asume que en :

$$y = y_1^+, \quad T = T_1^+ = T_m^+, \quad v = v_1^+ = v_m^+; \quad c_A = c_{A1} = c_{Am}$$

Esta suposición evita las integrales sobre el área transversal. Con esta suposición reescribimos ( 6.67 ) como :

$$T_m^+ = v_m^+ + \int_0^{y_1^+} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ \quad (6.71)$$

El número de Stanton para transferencia de calor

$$St = Nu/Re Pr = h / [Cp v_m]$$

$$1/St = (Cp v_m / h) (h / q_s) (T_m - T_s) (v_m / v^*) = T_m^+ v_m^+$$

para  $T_b^+ = T_1^+$ ; de ( 6.69 ) :

$$1/St = v_m^+ \int_0^{y_1^+} R_{Hs} dy^+ = v_m^+ \int_0^{y_1^+} [R_{Ms} + (R_{Hs} - R_{Ms})] dy^+$$

$$1/St = v_m^+ \left[ v_1^+ + \int_0^{y_1^+} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy \right]$$

como  $v_1^+ \approx v_m^+$

$$1/St = (v_m^+)^2 + v_m^+ \int_0^{y_1^+} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ \quad (6.72)$$

De (6.32) :  $v_m \equiv (2/f)^{1/2}$  , y si  $\mu^* = \mu^t/\mu = \Gamma^t/\Gamma$  (6.73)

Además :

$$R_{Hs} - R_{Ms} = \frac{1}{1/Pr + \mu^*} - \frac{1}{1 + \mu^*} = \frac{(Pr - 1)}{(1 + \mu^*Pr)(1 + \mu^*)} \quad (6.74)$$

Reescribimos ( 6.24 ) como:

$$(\Gamma^t/\Gamma) = [(dy^+/dv^+) - 1] = \mu^*$$

Tomando la distribución universal de velocidades para describir  $v^+(y^+)$ :

$$v^+ = y^+ \quad 0 < y^+ \leq 5$$

$$v^+ = -3.05 + 5 \ln y^+ \quad 0 < y^+ < 30 = y_1^+$$

$$\int_0^{y_1^+} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ = \int_0^5 (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ + \int_5^{30} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ \quad (6.74 a)$$

Para  $y \leq 5$  :  $dy^+/dv^+ = 1$  ;  $\mu^* = 0$  de ( 6.74 a ):

$$\int_0^5 (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ = \int_0^5 (Pr - 1) dy^+ = 5(Pr - 1) \quad (6.75)$$

Para  $5 \leq y^+ \leq 30$  ,  $dy^+/dv^+ = y^+/5$  ;  $\mu^* = (y^+/5 - 1)$  ; reemplazando en ( 6.74 ) :

$$\int_5^{30} (R_{Hs} - R_{Ms}) dy^+ = \int_5^{30} \frac{25 (Pr - 1) dy^+}{y^+ [Pr y^+ - 5(Pr - 1)]} = 5 \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \quad (6.76)$$

La ecuación ( 6.72 ) queda entonces como :

$$\frac{1}{St} = \frac{2}{f} + (2/f) \left[ 5(Pr - 1) + 5 \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \right] \quad (6.77)$$

En el corchete de la ecuación ( 6.77 ) , que es el valor de la integral ( 6.74.a ) observamos que es una función del número de Prandtl y del perfil de velocidad. Si no se hubiera tenido en cuenta

la resistencia presentada por la región buffer, el último término del paréntesis no existiría y la expresión ( 6.77 ) se reduce a la analogía de Prandtl-Taylor. En la analogía de Reynolds que obvia la zona laminar y la buffer, esta función de Prandtl ( todo el paréntesis ) desaparece y la total resistencia se reduce a  $2/f$ , la del núcleo turbulento.

Obsérvese también que en la analogía de Chilton Colburn la función de Pr es menos compleja. Sin embargo, sus resultados son buenos

$$\frac{1}{St} = \frac{2}{f} Pr^{2/3}$$

Para transferencia de masa los resultados son iguales, cambiando St por  $St_D$  y Pr por  $Sc$ .

## APENDICE A.6.1.

### PROMEDIO CON EL TIEMPO.

Supongamos, para una propiedad A fluctuante

$$A = \bar{A} + A' \quad (A)$$

El promedio con el tiempo es :

$$\bar{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} A dt \quad (B)$$

Substituyendo ( A ) en ( B ) se verifica que :

$$\bar{A}' = 0 \quad (C)$$

y:

$$\bar{A} = \bar{A} \quad (D)$$

Si representamos las fluctuaciones de otra cantidad B como B', a partir de ( B ) y ( C ) podemos demostrar que

$$\overline{A'B'} = \bar{A} \bar{B}' = 0$$

Sin embargo, en general

$$Q_{AB} \equiv \overline{A'B'} \text{ será diferente de } 0$$

El producto promedio  $\overline{A'B'}$  se llama la correlación entre A y B. Si dividimos por el promedio de los promedios geométricos de A' y B',

$$R_{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{(\overline{A'^2})^{1/2} (\overline{B'^2})^{1/2}}$$

Este se denomina el coeficiente de correlación. Suponiendo  $A' = kB'$ , donde k es constante (ver figura A.6.1), esta relación indica que una fluctuación en A siempre causa una fluctuación proporcional en B. En éste caso :

$$R_{AB} = \frac{\overline{kB'^2}}{(k^2 \overline{B'^2})^{1/2} (\overline{B'^2})^{1/2}} = \pm 1$$

Se dice que A y B están perfectamente correlacionados; si k es positivo, la correlación es positiva; y si k es negativo, la correlación es negativa. En el último caso, un incremento de A' causa un decrecimiento proporcional en B' (figura A.6.1).

Supongamos ahora que tomamos los cuatro puntos de datos ilustrados en la figura A - 6.1 2 a. Como en el caso anterior, los promedios de A' y de B' son cero. Sin embargo, el promedio geométrico de A' es :

$$\overline{(A'^2)}^{1/2} = \left[ \frac{1}{4} \left[ (-2)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (2)^2 \right] \right]^{1/2} = 2$$

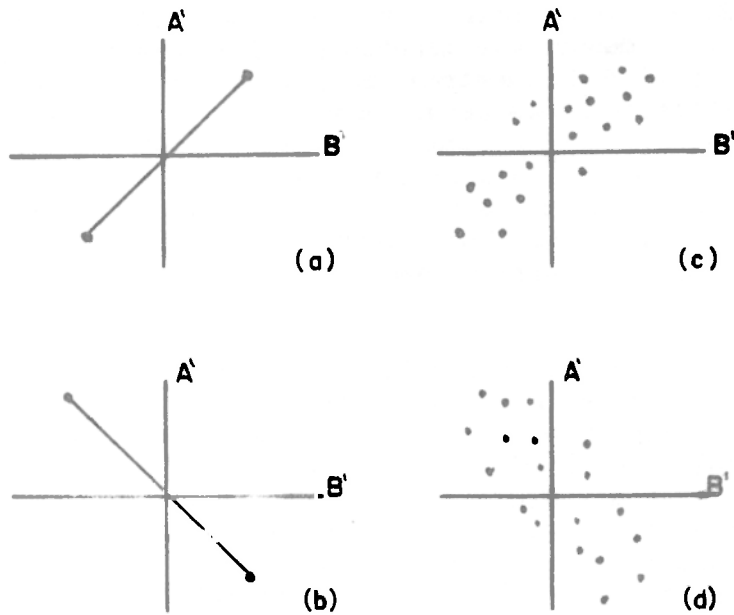


FIGURA A.6.1 (a) Correlación positiva perfecta, (b) correlación negativa perfecta, (c) correlación positiva imperfecta, (d) correlación negativa imperfecta.

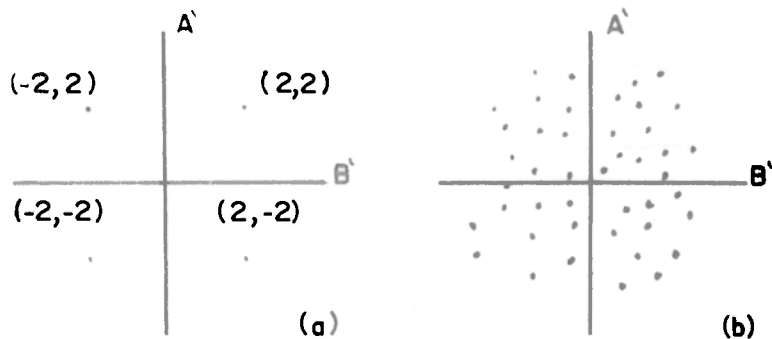


FIGURA A.6.2 (a) Correlacion cero, (b) correlación aproximadamente cero.

El mismo resultado se obtiene para B'.

La correlación será :

$$Q_{AB} = \left[ \frac{1}{4} \left[ 2(2) + (-2)(2) + (-2)(-2) + (-2)(2) \right] \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Y el coeficiente de correlación  $R_{AB} = 0$ . En general si  $R_{AB} = 0$ , las variables A y B no están correlacionadas.

En la práctica los datos pueden no estar perfectamente correlacionados o descorrelacionados y  $-1 \leq R_{AB} \leq 1$ . Las figuras A.6.1 c y d y A.6.2 muestran correlaciones típicas positivas, negativas y aproximadamente cero.

## CAPITULO 7. FLUJO EN CAPA LIMITE.

En el concepto de capa límite se divide el flujo sobre un cuerpo en dos regiones: (i) Una capa muy delgada adyacente al cuerpo, llamada capa límite, en donde varían rápidamente los gradientes de velocidad ( y temperatura o concentración si es el caso ) y (ii) La región por fuera de la capa límite llamada también región de flujo potencial o de flujo externo, en donde los gradientes de velocidad ( y temperatura o concentración ) son muy pequeños. El espesor de las capas límites (de velocidad, térmica y/o de concentración) aumentan con la distancia desde el borde de entrada a la placa. Para fines prácticos se define el borde ( lindero o límite ) de la capa límite como el lugar geométrico de los puntos en donde la componente de la velocidad del flujo  $v(x,y)$  en la capa límite alcanza el 99 % de la velocidad  $v_{\infty}$  de flujo externo. La capa límite térmica y de concentración tienen definiciones similares como veremos más adelante.

Debe distinguirse entre capa límite laminar y turbulenta (figura 7.2). Comenzando desde la arista de entrada del fluido a la placa ( o borde de ataque ), la capa límite laminar se desarrolla continuamente hasta una distancia crítica  $x_c$ , en donde empiezan a formarse pequeñas perturbaciones que crecen dentro de la capa límite y ocurre entonces la transición de flujo laminar a turbulento. Esta distancia crítica en donde el flujo ya no puede conservar su caracter de laminar se determina en función del número de Reynolds crítico para la placa:

$$Re_c = \frac{v_{\infty} x_c}{\mu}$$

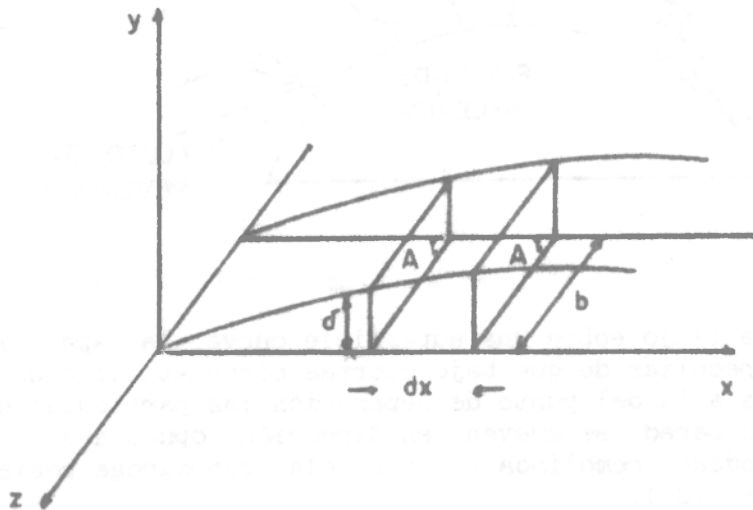


FIGURA 7.1.

En general, en flujo sobre una placa, la transición de flujo laminar a turbulento sucede para  $Re_x = 5 \times 10^5$ . Si la superficie es rugosa puede aparecer a  $Re = 10^5$  y si el flujo es tranquilo y la superficie es lisa puede existir capa límite laminar hasta número de Reynolds de  $5 \times 10^6$ . Debe tenerse en cuenta que para el flujo externo la longitud característica en  $Re_x$  es la distancia desde el borde de ataque y la velocidad característica es la velocidad de la corriente libre ( que se comporta como fluido ideal o sin fricción ).

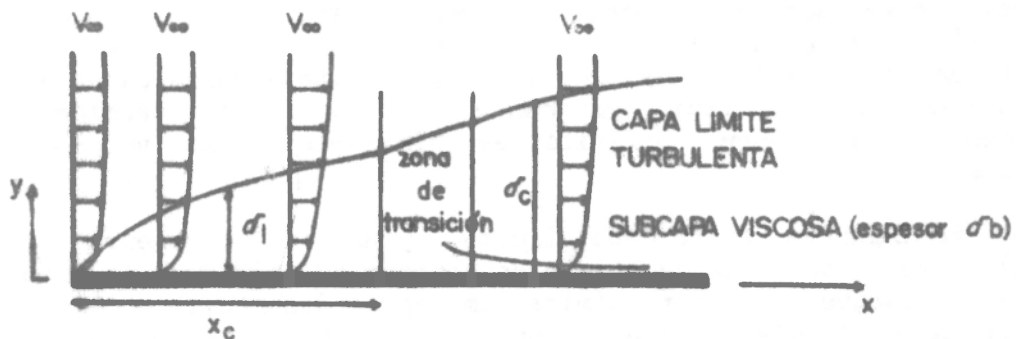


FIGURA 7.2.

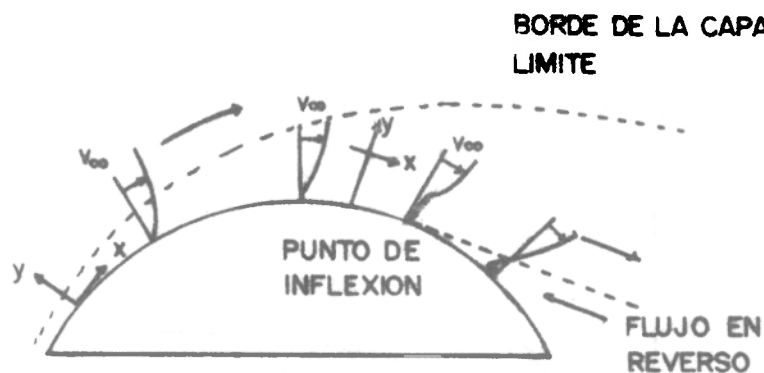


FIGURA 7.3.

En el caso de flujo sobre una superficie curva, la capa límite tiene la propiedad peculiar de que bajo ciertas circunstancias se separa de la pared. Más allá del punto de separación las partículas del fluido próximas a la pared se mueven en dirección opuesta a la corriente externa formándose remolinos y la estela que agrega resistencia al flujo ( figura 7.3 ).

ECUACION INTEGRAL DE VON KARMAN.

Von Karmán analizó el flujo en la capa límite, y usando la segunda ley de Newton derivó una relación integral para la distribución de velocidad en la capa límite. El consideró una región bidimensional de fluido que incluía la capa límite, con longitud diferencial  $dx$ . En esta región la cantidad total de aumento de cantidad de movimiento es igual tanto en magnitud como en dirección a las fuerzas que actúan en los límites de la región.

Ilustramos el método aplicándolo al flujo sobre una placa plana. Nuestro elemento de control es un volumen de longitud  $dx$ , de ancho  $b$  en la dirección  $z$  y de altura  $H$ , donde  $H$  es mayor que  $k$ , el espesor de la capa límite hidrodinámica ( o de velocidades ).

Dado que los perfiles de velocidad son idénticos en cualquier plano perpendicular al eje  $z$ , sólo es necesario hacer un análisis bidimensional. Refiriéndonos a la figura 7.4,  $w$  es caudal másico entrando o saliendo al elemento de volumen por cualquier concepto.

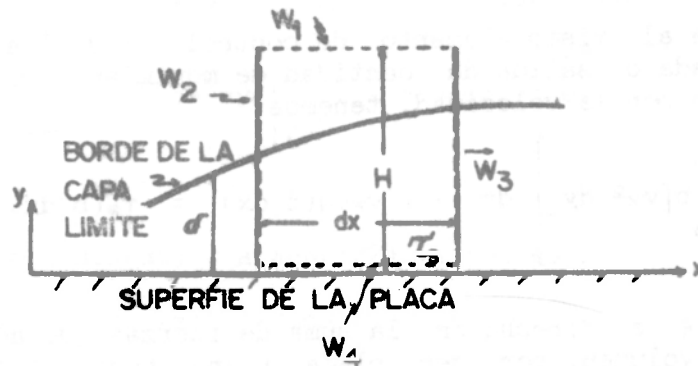


FIGURA 7.4.

Balance de Materia: Un balance nos da:

$$w_3 - (w_1 + w_2 + w_4) + \frac{dm}{dt} = 0 \quad (7.1)$$

Considerando estado estable  $dm/dt$  es cero.

$$w_1 = \int_0^H v(b \, dx) \quad v_H = v_y \Big|_{y=H}$$

$$w_4 = \int_0^H v(b \, dx) \quad v_0 = v_y \Big|_{y=0}$$

$$w_2 = \int_0^H b \rho v_x \, dy$$

pues  $v_x$  varía con  $y$  para  $y < \delta$

$$w_3 = w_2 + \frac{d}{dx} (w_2) dx$$

pues  $w_1$  y  $w_4$  no varían con  $x$ .

Reemplazando en ( 7.1 ) para  $v_w = \theta$  y  $\int$  constante:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^H b v_x dy \right] dx = \int v_H (b dx)$$

$$v_H = \frac{d}{dx} \int_0^H v_x dy \quad ( 7.2 )$$

Balance de cantidad de movimiento:

Refiriéndonos al mismo elemento de control (fig. 7.4 ), y sabiendo que la entrada o salida de cantidad de movimiento convectivo es el caudal másico por la velocidad, tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^H b v_x^2 dy \right] dx - \int v_\infty v_H (b dx) = \tau_w (b dx)$$

El término de la derecha es la suma de fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen; por ser placa plana horizontal no tenemos fuerzas de presión ni gravitacionales actuando.

Simplificado, usando ( 7.2 ) y reordenando tenemos:

$$\int \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H (v_x v_\infty - v_x^2) dy \right] = - \tau_w$$

$\delta$ , reconociendo que para  $\delta < y < H$  la integral se hace cero pues allí  $(v_\infty - v_x) = 0$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x (v_\infty - v_x) dy = - \frac{\tau_w}{\rho} \quad ( 7.3 )$$

Esta es la ecuación integral de Von Karmán para la capa límite hidrodinámica en flujo estable sobre una placa plana horizontal.