METRICAS RIEMANNIANAS Y PSEUDO-RIEMANNIANAS

Galina Likosova de Mejía

Trabajo presentado como requisito para la promoción a la categoría de Profesor Asociado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SECCIONAL MEDELLIN
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
1993

CONTENIDO

Una métrica definida en un dominio Ω de una variedad diferenciable permite medir distancias entre puntos de Ω, longitudes de vectores y curvas, ángulos entre vectores y entre curvas. Hay diferentes maneras de definir una métrica en un dominio. Por ejemplo, una métrica en un dominio de una superficie de Riemann se introduce vía el teorema de Riemann que afirma que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a uno y sólo uno de los siguientes dominios:

i) disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$,

ii) plano complejo $\mathbb{C}$,

iii) plano complejo extendido $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$(ver [L],[Kr]).

En particular, si Ω es un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}^*$, en Ω se puede introducir coordenadas locales y métricas de $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}^*$.

El presente trabajo está dedicado al estudio de las métricas riemannianas y pseudo-riemannianas en $\mathbb{R}^n$ y en el plano complejo $\mathbb{C}$. El caso más importante es el de la métrica pseudo-riemanniana (métrica de Lobachevsky) en diferentes dominios de $\mathbb{R}^n$ y en particular, la métrica hiperbólica en dominios hiperbólicos del plano complejo.

El capítulo 0 es un compendio de las definiciones y los resultados más importantes de cálculo en el espacio euclidiano, que más adelante se estudiarán en un contexto más general. Para la escritura de este capítulo fueron utilizadas principalmente las referencias [DNF],[K],[MF].

En el primer capítulo se introduce la métrica riemanniana sobre la esfera de Riemann vía la proyección estereográfica,[DNF],[MF].

El capítulo II está dedicado al estudio de la métrica de Lobachevsky en diferentes dominios de $\mathbb{R}^3$: pseudoesfera (modelo de Lobachevsky), modelo de Poincarè, modelo de Klein, superficie de Beltrami. Las métricas estudiadas en los capítulos I y II están presentadas en las tablas comparativas 1 y 2. Además se introducen el concepto de la curvatura de una métrica y las constantes de Bloch y de Landau para una familia de funciones. La elaboración de este capítulo fue hecha con base en las referencias [DNF],[H],[M1],[MF],[Sh].

En el capítulo III se estudian las propiedades de la métrica hiperbólica en un dominio hiperbólico, que conducen a estimaciones de la métrica hiperbólica en términos de la distancia euclidiana. Finalmente, como una aplicación de las propiedades de la métrica hiperbólica, se establecen estimaciones para el cociente $\dfrac{f''}{f'}$, donde f es una función analítica univalente en un dominio hiperbólico. Las estimaciones de este cociente tienen importancia en la teoría geométrica de funciones. Las referencias utilizadas en este capítulo son [A],[BP],[F],[L],[M1],[M2],[M3],[M4], [M5],[M6],[Kr],[O].

CAPITULO 0

CONCEPTOS BASICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

§1. Cálculo en el espacio euclidiano

1. Espacio euclidiano. Denotemos por $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial de todas las n-tuplas reales $x = (x^1, ..., x^n)$. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la distancia entre dos puntos P y Q dada por

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2}, \tag{1.1}$$

donde $(x^1, ..., x^n), (y^1, ..., y^n)$ son las coordenadas cartesianas de los puntos P y Q respectivamente, se denomina *euclidiano* y las coordenadas cartesianas con esta propiedad se llaman *coordenadas euclidianas.* Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ abierto y conexo se llama *dominio.* Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación diferenciable en Ω , entonces las m funciones de coordenadas $f^j(x^1, ..., x^n) = y^j, j = 1, ..., m$, tienen derivadas parciales $\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}$ respecto a cada coordenada $x^i, i = 1, .., n$. La matriz de Jacobi de la transformación f es la matriz J definida por $J = \left(\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)$. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con coordenadas cartesianas $(x^1, ..., x^n)$, decimos que una aplicación continuamente diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define un cambio *regular* de coordenadas $y^j = f^j(x^1, ..., x^n), j = 1, ..., n$, si el jacobiano de la transformación f es diferente de cero en cada punto $P \in \Omega$: $|J|_P \neq 0$. El sistema de coordenadas $(y^1, ..., y^n)$ obtenida así se llama *regular* y los puntos $P \in \Omega$, donde $|J|_P \neq 0$ se llaman *regulares.*

Ejemplo 0.1.1. El sistema de coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$: $x^1 = r\cos\varphi, x^2 = r\mathrm{sen}\varphi$, es regular en $\Omega = \{(r,\varphi)/r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

Si $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$ y $\eta = (\eta^1, ..., \eta^n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ su *producto escalar euclidiano*, que denotaremos por $< \xi, \eta >$, se define como

$$< \xi, \eta > := \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i. \tag{1.2}$$

La longitud de un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ está dada por $|\xi| = \sqrt{< \xi, \xi >}$, el ángulo entre dos vectores $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ se define mediante la relación

$$\cos\varphi = \frac{< \xi, \eta >}{|\xi||\eta|}.$$

2. Espacio tangente. Sea $P \in \mathbb{R}^n$. El *espacio tangente de* $\mathbb{R}^n$ *en* P denotado por $T_P\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial n-dimensional $T_P\mathbb{R}^n = \{(P,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. La estructura vectorial de $T_P\mathbb{R}^n$ se define mediante la aplicación

$$\begin{aligned} T_P\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (P,x) &\mapsto x, \end{aligned}$$

con $(P,x)+(P,y) = (P,x+y), \quad \alpha(P,x) = (P,\alpha x), \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Curvas en un espacio euclidiano. Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una *curva suave* (o de clase C^1 o continuamente diferenciable) es una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (f^1(t), ..., f^n(t)), \end{aligned}$$

donde las funciones f^i son funciones de t de clase C^1 $,i = 1,...,n$, y $\gamma'(t) \neq 0$ para cada $t \in [a,b]$.

El *vector tangente* a la curva suave γ (vector velocidad) en el tiempo t es el vector $\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, ..., \frac{df^n}{dt}\right)$.

La *longitud* de la curva suave γ entre los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se define por

$$l := \int_a^b \sqrt{< \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) >}\, dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt, \tag{1.3}$$

donde $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente a la curva γ en el tiempo t.

El ángulo entre dos curvas suaves γ_1, γ_2 en el punto t de su intersección es el ángulo φ $(0 \leq \varphi < \pi)$, tal que $\cos\varphi = \dfrac{< \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 >}{|\dot{\gamma}_1|\,|\dot{\gamma}_2|}$, donde $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ son los vectores tangentes a las curvas en t. Sea $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a,b]$, una curva suave. Ahora si $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, φ de clase C^1 y $\varphi'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [\alpha,\beta]$, decimos que se tiene un cambio *regular* del parámetro.

La longitud de una curva γ es invariante con respecto a cambios regulares del parámetro. Si γ es una curva suave, entonces se puede escoger un parámetro t (en unidades de longitud) de tal manera, que el módulo del vector tangente sea igual a uno: $|\dot{\gamma}(t)| = 1$. Tal parámetro se llama *natural*; en este caso $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt = b - a$.

4. Cambio de coordenadas. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ un sistema coordenado euclidiano $x = (x^1, ..., x^n)$ y otro arbitrario $z = (z^1, ..., z^n)$, tales que $x^i = x^i(z^1, ..., z^n)$, $i = 1, ..., n$. Sea $z^i = z^i(t), i = 1, ..., n, t \in [a,b]$ una curva suave definida en coordenadas z. Luego en coordenadas x la curva tiene la forma $x^i = x^i(z(t)) = h^i(t), i = 1, ..., n$.

El vector tangente a la curva dada en coordenadas z es:

$$v_z(t) = \left(\frac{dz^1}{dt}, ..., \frac{dz^n}{dt}\right)$$

y en coordenadas x es

$$v_x(t) = \left(\frac{dh^1}{dt}, \dots, \frac{dh^n}{dt}\right).$$

Luego

$$v_x^i = \frac{dh^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt}.$$

El cuadrado de longitud del vector v_x está dado por

$$\begin{aligned}
|v_x|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt}\right)^2 \\
&= \sum_i\left(\sum_{j,k}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}\right) \\
&= \sum_{j,k}\left(\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\right)\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Sea

$$g_{jk} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k} \qquad (1.5)$$

(se omite el signo de $\sum_i$; se suma respecto al índice repetido). Observamos que $g_{jk} = g_{kj}$. Luego

$$|v_x|^2 = g_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}. \qquad (1.6)$$

Las componentes del vector tangente a una curva suave se transforman según la regla

$$v_x^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}v_z^j.$$

Sean $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^n)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^n)$ dos vectores en el punto P en coordenadas $x = (x^1, .., x^n)$ de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que estos mismos vectores en coordenadas $z = (z^1, \dots, z^n)$ tienen la forma $\eta_1 = (\eta_1^1, \dots, \eta_1^n)$, $\eta_2 = (\eta_2^1, \dots, \eta_2^n)$ y el cambio de coordenadas es regular. Luego el producto escalar de ξ_1 y ξ_2 está dado por

$$< \xi_1, \xi_2 >= g_{jk}\eta_1^j\eta_2^k, \qquad (1.7)$$

donde las funciones g_{jk} son las mismas que aparecieron en la fórmula (1.6). Las funciones g_{jk} se pueden representar en forma matricial así: $G = (g_{jk}) = A^T A$, donde $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ es la matriz de Jacobi de cambio de coordenadas.

5. *Forma cuadrática.* Sea V un espacio vectorial. Una *forma simétrica bilineal* o *forma cuadrática* es una aplicación $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\beta(x, y) = \beta(y, x),$$
$$\beta(ax + by, z) = a\,\beta(x, z) + b\,\beta(y, z),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$. β es *definida positiva* si $x \neq 0$ implica $\beta(x, x) > 0$.

Ejemplo 0.1.2. El producto escalar estándar $<,>$, en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una forma cuadrática definida positiva. La representación matricial de β respecto a una base $e_i, 1 \leq i \leq n$ de V es la matriz $(g_{ij}) := (\beta(e_i, e_j))$.

§2. Métrica riemanniana en un dominio del espacio euclidiano.

1. Métrica riemanniana. Como hemos visto, a cada punto P del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le corresponde una función matricial suave $G(P)$ que se transforma al cambiar las coordenadas como una forma cuadrática (en cada punto). Estas funciones matriciales nos permiten calcular las longitudes de curvas en coordenadas curvilineas. Destaquemos entre todas las propiedades de estas funciones matriciales la propiedad de transformarse como una forma cuadrática (en cada punto). Consideremos ahora conjuntos de funciones matriciales que satisfacen estas propiedades.

Definición 0.2.1. Decimos que en un dominio Ω del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ está definida una *métrica riemanniana* si en cada sistema regular de coordenadas z están definidas funciones suaves $g_{ij}(z)$ tales que:

i) $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, ..., n$.

ii) La matriz $G(z) = (g_{ij}(z))$ es no singular y definida positiva, es decir $g_{ij}(z)\xi^i\xi^j > 0$ para todo vector $\xi \neq 0$.

iii) Si se tiene un nuevo sistema de coordenadas $y = (y^1, ..., y^n)$ en Ω y $z^i = z^i(y^1, ..., y^n)$, $i = 1, ..., n$, las funciones $g'_{ij}(y)$ correspondientes al nuevo sistema son tales que:

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}. \tag{2.1}$$

En otras palabras una *métrica riemanniana* en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una forma cuadrática positiva definida sobre los vectores tangentes en cada punto de Ω, que depende suavemente del punto.

Nota. Para definir una métrica riemanniana en un dominio de $\mathbb{R}^n$ es suficiente presentar las funciones matriciales g_{ij}, ó la matriz $G = (g_{ij})$.

La siguiente definición establece una relación entre la métrica riemanniana en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ y el producto escalar de vectores en Ω.

Definición 0.2.2. Supongamos que en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ está definida una métrica riemanniana $G = (g_{ij})$ respecto al sistema de coordenadas z. Sean $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$ y $\eta = (\eta^1, ..., \eta^n)$ dos vectores en el punto $P = (z_0^1, ... z_0^n) \in \Omega$. Entonces su *producto escalar (producto interno)* se define por

$$< \xi, \eta >:= g_{ij}(z_0^1, ..., z_0^n)\xi^i\eta^j. \tag{2.2}$$

Observamos que si las funciones g_{ij} son tales, que $g_{ij} = 0$, $i \neq j$, $g_{ij} = 1, i = j$, entonces el producto escalar (2.2) se convierte en el producto escalar euclidiano (1.2).

Debido a la estrecha relación entre la métrica riemanniana g_{ij} y el producto escalar entre dos vectores (2.2) muchas veces definen la métrica riemanniana mediante el producto escalar. Si en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ está definida una métrica riemanniana $G(z) = (g_{ij}(z))$ y en coordenadas z está definida una curva suave $z^i = z^i(t), \quad i = 1, ..., n, \quad t \in [a, b]$, entonces la *longitud de la curva* se define por:

$$l := \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t))\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}\, dt. \tag{2.3}$$

(comparar con la fórmula (1.3)). Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 que se intersectan en $t = t_0$, entonces el ángulo entre las curvas es el número $\varphi (0 \leq \varphi < \pi)$, tal que $\cos\varphi = \dfrac{<\xi, \eta>}{|\xi|\,|\eta|}$, donde ξ, η son los vectores tangentes a las curvas γ_1, γ_2 en $t = t_0$, respectivamente.

Ejemplo 0.2.1.

a) *Coordenadas cartesianas* $(x^1, ..., x^n)$ *en* $\mathbb{R}^n$. La matriz $G(x)$ en coordenadas x tiene la forma $G(x) = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Consideremos la transformación identidad en $\mathbb{R}^n$. Luego la matriz de Jacobi de esta transformación es I_n. Por lo tanto la longitud de una curva suave $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + ... + \left(\frac{dx^n}{dt}\right)^2}\, dt.$$

b) *Coordenadas polares* (r, φ) *en* $\mathbb{R}^2$. La matriz $G(x)$ en coordenadas cartesianas (x^1, x^2) tiene la forma $G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, es decir $g_{ij} = \delta_{ij}$. El cambio de coordenadas está dado por

$$x^1 = r\cos\varphi$$
$$x^2 = r\,\mathrm{sen}\varphi, \qquad r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Luego la matriz de Jacobi de esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $G(r, \varphi) = A^T I A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$. Calculemos la longitud l de una curva suave $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$ en el sistema polar. Escribamos $|\dot\gamma(t)|^2$ en forma matricial utilizando (2.2), (2.3) :

$$<\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)> = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} & \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} G(r, \varphi) \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} & \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Luego de (1.3) y (2.3)

$$l = \int_a^b \sqrt{< \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) >}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

c) *Coordenadas esféricas* (r, θ, φ) *en* $\mathbb{R}^3$. Sean (x^1, x^2, x^3) coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$. El cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas viene dado por:

$$\begin{aligned} x^1 &= r\,\cos\theta \\ x^2 &= r\,\cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta \\ x^3 &= r\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta, \qquad r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

La matriz de Jacobi es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta & r\,\cos\varphi\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta & r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta & r\,\cos\varphi\mathrm{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

y la longitud de una curva $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$ está dada por:

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

d) *Coordenadas cilíndricas* (r, φ, z) *en* $\mathbb{R}^3$.

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^1 &= z \\ x^2 &= r\cos\varphi \\ x^3 &= r\,\mathrm{sen}\varphi, \qquad r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty. \end{aligned}$$

La matriz de Jacobi es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\varphi & 0 \\ \mathrm{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$G(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la longitud de una curva $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$ está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

A veces en lugar de la longitud de la curva es más cómodo escribir la forma explícita del diferencial de arco dl o su cuadrado. En particular en los ejemplos anteriores estos diferenciales son:

i) $dl^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ (coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^n$),
ii) $dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$ (coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$),
iii) $dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\text{sen}^2\theta(d\varphi)^2$ (coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$), (*)
iv) $dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ (coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$).

2. Métrica euclidiana. Una métrica riemanniana g_{ij} definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama *euclidiana* si en Ω existe un sistema de coordenadas $y = (y^1, ..., y^n)$, tal que $G(y) = (g_{ij}(y)) = I$ (matriz identidad).

Una métrica euclidiana escrita en un sistema de coordenadas arbitrario z pierde su fácil "aspecto euclidiano", y se define mediante una matriz $G(z)$ en la cual a veces es muy difícil "reconocer" una métrica euclidiana si no contamos con invariantes, que permitan distinguir métricas no equivalentes (es decir que no se transforman una en la otra mediante un cambio regular de coordenadas).

Con frecuencia, en lugar de la matriz $G = (g_{ij})$ de la métrica riemanniana escribiremos el diferencial de la longitud de una curva suave (dl) o su cuadrado $(dl)^2$:

$$dl^2 = g_{ij}dz^i dz^j. \tag{2.4}$$

Las fórmulas (*) son ejemplos elementales de métricas euclidianas.

3. Métricas pseudo-riemannianas. Supongamos que las funciones $g_{ij} = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, ..., n$ son tales, que la matriz $G = (g_{ij})$ es no singular, pero la forma $g_{ij}\xi^i\xi^j$ es indefinida. Entonces decimos que las funciones g_{ij} definen una *métrica pseudo-riemanniana.* Como ejemplo consideremos las métricas denominadas pseudo-euclidianas.

Definición 0.2.3. La métrica $g_{ij} = g_{ji}(z)$ se llama *pseudo-euclidiana* si existe un sistema de coordenadas $x = (x^1, ..., x^n), x^i = x^i(z), \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0$, tal que

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j} + ... + \frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - ... - \frac{\partial x^n}{\partial z^i}\frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

En estas coordenadas $g'_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $g'_{ii} = 1$, si $i \leq p, g'_{ii} = -1$, si $i \geq p+1$, lo que quiere decir que la matriz G viene dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Tales coordenadas x se llaman *pseudo-euclidianas.*

En el espacio $\mathbb{R}^n$ se puede introducir una métrica pseudo-euclidiana definiendo el "producto escalar" entre dos vectores $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n), \eta = (\eta^1, ..., \eta^n)$ así:

$$< \xi, \eta >_p := \xi^1\eta^1 + ... + \xi^p\eta^p - \xi^{p+1}\eta^{p+1} - ... - \xi^n\eta^n,$$

para algún p, $1 \leq p \leq n$. De esta manera las coordenadas cartesianas x de $\mathbb{R}^n$ se vuelven pseudo-euclidianas y $\mathbb{R}^n$ con esta métrica se llama *espacio pseudo-euclidiano* y se denota $\mathbb{R}^n_p$. Un caso muy importante es el caso del espacio de Minkowsky $\mathbb{R}^4_1$, que es el espacio de la teoría especial de la relatividad. La métrica pseudo-euclidiana de $\mathbb{R}^4_1$, en coordenadas (x, y, z, w) es:

$$dl^2 = (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 - (dw)^2,$$

y la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^4_1$ puede ser real, imaginaria o cero.

Ejemplo 0.2.2. Sean (x, y, z) coordenadas pseudo-euclidianas en $\mathbb{R}^3_1$. Definamos las coordenadas *pseudo-esféricas* (ρ, χ, φ) en $\mathbb{R}^3_1$ así:

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\mathrm{ch}\chi \\ y &= \rho\,\mathrm{sh}\chi\cos\varphi \\ z &= \rho\,\mathrm{sh}\chi\mathrm{sen}\varphi, \ -\infty < \rho < \infty,\ 0 < \chi < \infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

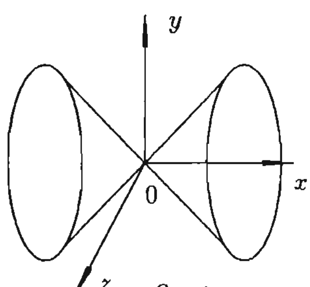


fig.1

Entonces $x^2 - y^2 - z^2 = \rho^2 > 0$ y por lo tanto las coordenadas están definidas en la región donde se cumple la última desigualdad, que es la parte interior del cono $x^2 = y^2 + z^2$ (fig 1). En esta región

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2\mathrm{sh}^2\chi d\varphi^2. \quad (2.5)$$

La métrica (2.5) se llama *métrica pseudo-esférica.*

§3. Movimientos de la métrica

1. Isometrías. Las transformaciones del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que preservan la métrica se llaman *isometrías (o movimientos de la métrica).* En otras palabras, una transformación $x^i = x^i(z^1, ..., z^n), i = 1, ..., n$ se llama *movimiento de la métrica dada* g_{ij} si:

$$g'_{ij}(z^1, ..., z^n) = g_{ij}(x^1(z), ..., x^n(z)).$$

De esta manera un movimiento de la métrica preserva la forma del producto esca lar en la fórmula (2.1). Todos los movimientos de la métrica dada en un $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ forman un grupo respecto a la composición.

Ejemplo 0.3.1.

a) *Las translaciones de* $\mathbb{R}^n$ son isometrías que preservan la métrica euclidiana:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto x + x_0,$$

para un x_o fijo.

b) Las transformaciones *ortogonales* de R^n también son isometrías de la métrica euclidiana:

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto Qx,$$

donde Q es una matriz de $n \times n$ ortogonal, es decir $Q^TQ = I$.

2. Métrica conforme.

Definición 0.3.1. Una métrica riemanniana g_{ij} definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con coordenadas z se llama *conforme* si

$$g_{ij}(z) = \lambda(z)q_{ij}(z),$$

donde $q_{ij}(z)$ es la métrica euclidiana en coordenadas z y $\lambda(z)$ es una función suave en Ω.

En otras palabras, la métrica g_{ij} es conforme si existen coordenadas x en Ω, tales que $g_{ij}(x) = \lambda(x)\Big(\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2\Big)$.

Ejemplo 0.3.2. *Las dilataciones* de $\mathbb{R}^n$ definidas por

$$D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \lambda x, \ \lambda \neq 0,$$

son transformaciones conformes, puesto que $g'_{ij}(x) = \lambda^2 g_{ij}(x)$. Si $\lambda \neq 1$ las dilataciones no son isometrías de $\mathbb{R}^n$.

§4. Fórmulas de Frenèt.

1. Curvatura de una curva plana. Sea $r(t) = (x(t), y(t))$ una curva suave definida en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y). Luego $r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$, donde e_1, e_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sean $v = \dfrac{dr}{dt}$, $w = \dfrac{d^2r}{dt^2}$. Si el parámetro t es natural, entonces v es ortogonal a w, (pues $< v, v >= 1$ implica $< v', v >= 0$).

Definición 0.4.1. La *curvatura* k *de una curva* $r(t)$ *en el tiempo* t , donde el parámetro t es natural, es el módulo del vector aceleración w. Es decir $k := |w|$. El radio de curvatura es $R := \frac{1}{k}$. Dada una curva $r(t)$, donde el parámetro es natural, se tienen las fórmulas de Frenét:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= w = kn \\ \frac{dn}{dt} &= -kv, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $n = \frac{w}{|w|}$ es la normal principal.

Si el parámetro no es natural, entonces la curvatura de una curva $r(t) = (x(t), y(t))$ está dada por

$$k := \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Curvas espaciales. Consideremos una curva suave $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sean $v = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $w = \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$. La curvatura de la curva $r(t)$ es $k := \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^{\frac{3}{2}}}$, donde $[,]$ denota el producto vectorial.

§5. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Veamos cómo se introduce una métrica sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

1. Superficie y espacio tangente. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$. Una transformación continuamente diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $df_\omega : T_\omega\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{f(\omega)}\mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva para cada punto $\omega \in \Omega$, se llama *superficie* (de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$); aquí$T_\omega\mathbb{R}^2$ denota el espacio tangente en ω. El subespacio vectorial $df_\omega(T_\omega\mathbb{R}^2) \subset T_{f(\omega)}\mathbb{R}^3$ de dimensión dos se llama *espacio tangente a la superficie f en el punto ω* y se denota $T_\omega f$. Los elementos de $T_\omega f$ se llaman *vectores tangentes.*

2. Métrica inducida. Sean S, T dos espacios vectoriales, $L : S \longrightarrow T$ una aplicación lineal. Supongamos que β es una forma cuadrática en T. Luego en S se define una forma cuadrática α mediante

$$\alpha(x, y) := \beta(Lx, Ly), \; x, y \in S.$$

La forma cuadrática α se llama *forma inducida* por β mediante la aplicación L. Si L es inyectiva y β es definida positiva, entonces α es definida positiva.

El producto escalar de $\mathbb{R}^3$ (forma cuadrática) induce una forma cuadrática sobre cualquier superficie de $\mathbb{R}^3$. Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie. Sea $\omega \in \Omega$. El producto escalar en $\mathbb{R}^3 \cong T_{f(\omega)}\mathbb{R}^3$ induce una forma cuadrática sobre $T_\omega f \subset T_{f(\omega)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ vía restricción. Esta forma cuadrática se llama la *primera forma cuadrática* de la superficie *(o métrica riemanniana sobre la superficie)* y se denota por g. La representación matricial de la primera forma cuadrática respecto a la base f_{u^1}, f_{u^2}, donde (u_1, u_2) son las coordenadas en Ω y f_{u^i} denota la derivada de f respecto a u^i, es $(g_{ij}) := (g(f_{u^i}, f_{u^j}))$. En la notación de Gauss

$$E := g_{11} = g(f_{u^1}, f_{u^1}), \quad F := g_{12} = g(f_{u^1}, f_{u^2}), \quad G := g_{22} = g(f_{u^2}, f_{u^2}),$$

y la métrica riemanniana se escribe como

$$g_{ij}du^i du^j = E(du^1)^2 + 2F(du^1 du^2) + G(du^2)^2.$$

La primera forma cuadrática de la superficie es invariante respecto a las isometrías del espacio y respecto al cambio regular de coordenadas.

Ejemplo 0.5.1. Un toro T en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ se define como la superficie generada por la revolución de una circunferencia alrededor de una recta que está en su mismo plano. Supongamos que la circunferencia está dada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= b\cos\varphi + a \\ z &= b\,\mathrm{sen}\varphi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,\ \psi = 0, \end{aligned}$$

donde φ y ψ son los parámetros angulares que se indican en la (fig.2).

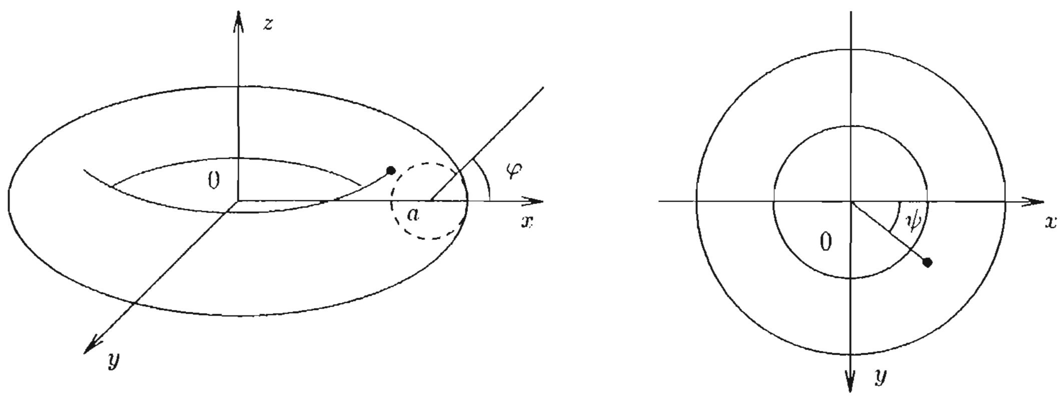


fig.2

Supongamos que el eje de rotación es el eje z. Los parámetros angulares varían en los intervalos $0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \psi < 2\pi$. La ecuación paramétrica del toro T es: $r(\varphi, \psi) = (x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z(\varphi, \psi))$, donde

$$\begin{aligned} x(\varphi, \psi) &= (a + b\cos\varphi)\cos\psi \\ y(\varphi, \psi) &= (a + b\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\psi \\ z(\varphi, \psi) &= b\,\mathrm{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Derivando se obtiene

$$\begin{aligned} dx &= -b\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cos\psi\,d\varphi - (a + b\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi \\ dy &= -b\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\varphi + (a + b\cos\varphi)\cos\psi\,d\psi \\ dz &= b\cos\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

Luego reemplazando en $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ obtenemos

$$dl^2 = b^2(d\varphi)^2 + (a + b\cos\varphi)^2(d\psi)^2,$$

que es la métrica inducida sobre el toro T.

3. Segunda forma cuadrática. Consideremos una superficie dada en forma paramétrica por $r = r(u,v)$. Entonces $[r_u, r_v] = \|[r_u, r_v]\| \cdot m$, donde m es el vector unitario normal a la superficie y $[,]$ denota el producto vectorial. Sea $r = r(u(t), v(t))$ una curva sobre la superficie. Tenemos $\dot{r} = r_u\dot{u} + r_v\dot{v}$, $\ddot{r} = (r_{uu}\dot{u}^2 + 2r_{uv}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2) + (r_u\ddot{u} + r_v\ddot{v})$. Como $r_u \perp m$ y $r_v \perp m$ obtenemos

$$< \ddot{r}, m > = < r_{uu}, m > \dot{u}^2 + 2 < r_{uv}, m > \dot{u}\dot{v} + < r_{vv}, m > \dot{v}^2.$$

Definición 0.5.1. La expresión

$$< \ddot{\mathrm{r}}, m > dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2, \tag{5.1}$$

donde

$$\begin{aligned} b_{11} &= L = < r_{uu}, m > \\ b_{12} &= M = < r_{uv}, m > \\ b_{22} &= N = < r_{vv}, m >,\ x^1 = u, x^2 = v, \end{aligned}$$

se llama la *segunda forma cuadrática* de la superficie.

La curvatura k de una curva suave sobre la superficie está estrechamente relacionada con la primera y segunda formas cuadráticas de la superficie:

$$k\cos\theta = \frac{b_{ij}dx^i dx^j}{g_{ij}dx^i dx^j}, x^1 = u, x^2 = v, \tag{5.2}$$

donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie y la normal principal a la curva ([DNF], [K]). Si la curva se obtiene al interceptar la superficie con el plano normal, o sea el plano ortogonal al plano tangente, entonces $\cos\theta = 1$ y

$$k = \frac{b_{ij}dx^i dx^j}{g_{ij}dx^i dx^j}. \tag{5.3}$$

4. Invariantes de la pareja de formas cuadráticas. En cada punto de la superficie están definidas dos formas cuadráticas sobre los vectores tangentes : $g_{ij}dx^i dx^j$ y $b_{ij}dx^i dx^j$. Supongamos que las matrices de las formas cuadráticas son $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, G es definida positiva y no singular. Las raíces de la ecuación $\det(Q - \lambda G) = 0$ se llaman los *valores propios* de la pareja de formas cuadráticas. Los valores y los vectores propios de la pareja de formas cuadráticas son invariantes respecto a cambios regulares de coordenadas en una vecindad del punto. Los valores propios de la pareja de formas cuadráticas se llaman *curvaturas principales* de la superficie en el punto. El producto de los valores propios se llama *curvatura gaussiana* $K(P) = K$ de la superficie en el punto P , la suma de los valores propios se llama *curvatura media* $H(P) = H$ de la superficie en el punto P:

$$K := \lambda_1 \cdot \lambda_2, \ H := \lambda_1 + \lambda_2,$$

además

$$K = \frac{\det Q}{\det G} = \frac{LN - M^2}{g^2}. \tag{5.4}$$

Si $K > 0$ la superficie localmente está a un solo lado del plano tangente en el punto P. Si $K < 0$ la superficie está a ambos lados del plano tangente en el punto P.

5. Curvatura de una superficie de revolución. Sea $y = r(x)$ una curva en el plano xy. Consideremos la superficie de revolución S que resulta al girar la generatriz $r(x)$ alrededor del eje x. Introduzcamos coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$. Entonces la curvatura gaussiana K en el punto P de S es

$$|K| = \frac{|r''|}{r\left(1 + (r')^2\right)^2}. \tag{5.5}$$

CAPITULO I

METRICA DE LA ESFERA

1. Proyección estereográfica. Anteriormente vimos diferentes tipos de métricas riemannianas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$: $dl^2 = dx^2 + dy^2$ (en coordenadas cartesianas), $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$(en coordenadas polares). Introduzcamos en el plano $\mathbb{R}^2$ otra métrica riemanniana con la ayuda de la proyección estereográfica. Para ello consideremos la esfera S^2 en $\mathbb{R}^2$ de radio R con el centro en el origen de coordenadas. La esfera se define mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1.1}$$

en coordenadas cartesianas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$. En coordenadas esféricas (r, θ, φ) la ecuación de la esfera es $r = R$, $R > 0$; θ, φ son arbitrarios. Consideremos el plano $\mathbb{R}^2(x, y)$ que pasa por el origen. Sean N y S los puntos de la esfera con coordenadas $(0, 0, R)$ y $(0, 0, -R)$ respectivamente.

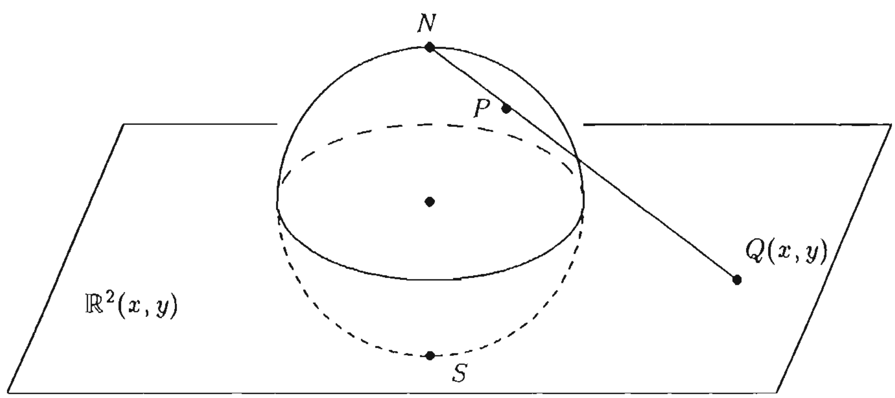


fig.3

N es el polo norte de la esfera y S es el polo sur. Si P es un punto cualquiera sobre la esfera, distinto a N, tracemos una recta que pasa por N y P obteniendo un punto Q sobre el plano $\mathbb{R}^2(x, y)$ (fig.3). La correspondencia

$$\begin{aligned} \varphi_0 : S^2\backslash\{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\mapsto Q \end{aligned}$$

define una transformación que se llama la *proyección estereográfica* de S^2 sobre $\mathbb{R}^2$. Como se ve de la construcción φ_0 está definida para todos los puntos de la esfera excepto para el polo norte. Podemos suponer que al polo norte le corresponden los puntos infinitamente lejanos de $\mathbb{R}^2$. Escribamos la transformación φ_0 analíticamente. Para ello introduzcamos unas coordenadas en el plano y otras sobre la esfera. Consideremos las coordenadas esféricas (r, θ, φ) en $\mathbb{R}^3$ que inducen unas coordenadas sobre S^2 y sobre $\mathbb{R}^2(x, y)$. En efecto, sobre la esfera S^2, donde $r = const$, obtenemos las coordenadas (θ, φ) y sobre el plano $\mathbb{R}^2$, donde $\theta = const$, obtenemos las coordenadas polares (r, φ). Como la transformación φ_o preserva la coordenada φ es suficiente encontrar la relación entre r y φ. Consideremos la sección plana que se obtiene al intersectar la esfera con el plano que pasa por los puntos N, O, P, donde O es el origen y T es el punto medio entre N y P (fig.4).

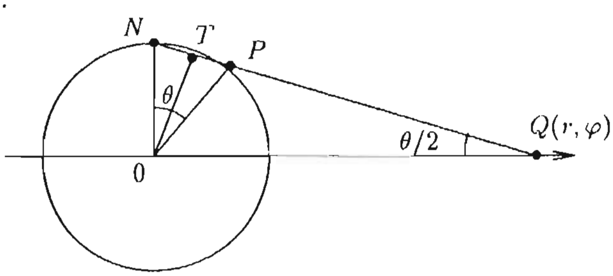


fig.4

Como el ángulo ONT es igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ obtenemos del triángulo rectángulo NOQ que $r = OQ = R\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right)$ ó $r = R\cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Luego las fórmulas del cambio de coordenadas $(\theta, \varphi) \longrightarrow (r, \varphi)$ son $\varphi = \varphi$, $r = R\cot\dfrac{\theta}{2}$.

La matriz de Jacobi de esta transformación es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-R}{2\operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el jacobiano es $J = \dfrac{-R}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$. Por lo tanto el cambio es regular en todos los puntos, excepto en el polo norte donde $\theta = 0$.

De esta manera en S^2 podemos introducir las coordenadas en términos de las coordenadas polares del plano euclidiano. Veamos que forma toma la métrica riemanniana de la esfera en estas coordenadas nuevas. Tenemos

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2), \tag{1.2}$$

$$dr = \frac{-R}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta, \quad \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{R^2 + r^2}$$

Reemplazando obtenemos

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2). \tag{1.3}$$

Observamos que la forma de la métrica (1.3) sobre la esfera difiere de la métrica euclidiana en el plano (ver Cap. 0, §2.1 (*)), escrita en coordenadas polares, sólo por un múltiplo variable $\dfrac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}$, lo que quiere decir que la métrica (1.3) es conforme.

De manera que en el plano euclidiano (relacionado con coordenadas polares) pueden ser introducidas dos métricas riemannianas:

$$\begin{cases} dr^2 + r^2 d\varphi^2 & \text{(euclidiana)}, \\ \left(\dfrac{2R^2}{R^2+r^2}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2) & \text{(métrica de la esfera)}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ambas métricas pueden ser consideradas en el mismo dominio de $\mathbb{R}^2(x,y)$. La métrica (1.3) escrita en coordenadas cartesianas es

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2). \tag{1.5}$$

2. Métricas no equivalentes. Ahora nos preguntamos si las métricas (1.4) son equivalentes, es decir si existe una transformación regular de coordenadas que permita obtener una métrica de la otra. Vamos a presentar por lo menos una justificación intuitiva de que las métricas no son equivalentes, calculando la longitud de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ en el plano $\mathbb{R}^2(x,y)$ en estas dos métricas. Busquemos la longitud de la circunferencia como función del radio. La longitud euclidiana de la circunferencia es bien conocida $l_e = 2\pi a$, donde el radio está calculado en la métrica euclidiana. Escribamos el radio a euclidiano en la métrica de la esfera. A la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ le corresponde una circunferencia de radio ρ con el centro en el polo norte sobre la esfera S^2 (fig 5).

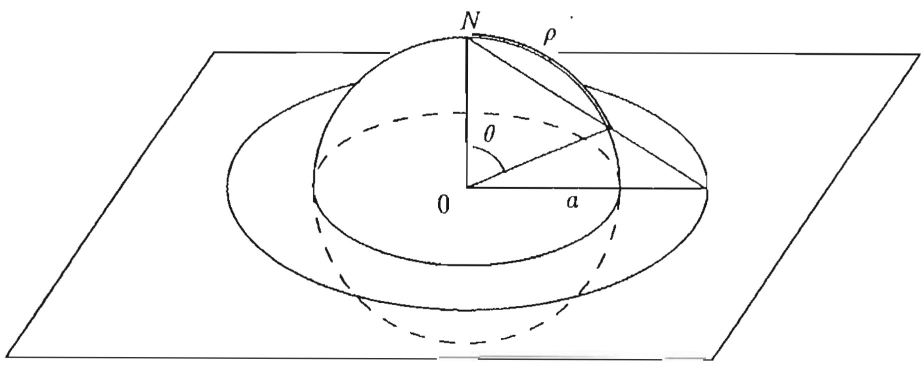


fig.5

En coordenadas (r,φ) sobre la esfera tenemos

$$\rho = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)}\, dt, \; t \in [t_1, t_2].$$

Como $\varphi = const$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = o$, $r(t_1) = 0$, $r(t_2) = a$, entonces

$$\rho = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2R^2}{R^2 + r^2} \frac{dr}{dt}\, dt = 2\int_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2}\, dr = 2R \arctan \frac{a}{R}.$$

Luego

$$\rho = 2R \arctan \frac{a}{R}. \tag{1.6}$$

Obtenemos que $\rho = R\,\theta$ (fig.5) es el radio de la circunferencia con el centro en el polo norte, luego la ecuación de esta circunferencia es $\theta = \dfrac{\rho}{R} = const$. La longitud de la circunferencia de radio ρ sobre la esfera en la métrica de la esfera en coordenadas (r, φ) es

$$l_\rho = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)}\, dt.$$

Como $\varphi(t_1) = 0$, $\varphi(t_2) = 2\pi$, $r = a$, tenemos

$$\begin{aligned} l_\rho &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2R^2}{R^2 + r^2} a \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 a}{R^2 + r^2}\, d\varphi \\ &= 2\pi R \frac{2Ra}{R^2 + a^2} = 2\pi R \operatorname{sen} \frac{\rho}{R}, \end{aligned}$$

o sea

$$l_\rho = 2\pi R \operatorname{sen} \frac{\rho}{R}. \tag{1.7}$$

Geométricamente la magnitud ρ es la longitud del meridiano que une el polo norte con el punto variable P. También se puede obtener la fórmula (1.7) mediante la aplicación de la definición de la longitud de una curva (cap.0, (1.3)) y de la métrica de la esfera (1.2) en coordenadas (θ, φ) . En efecto:

$$\begin{aligned} l_\rho &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{< \dot\gamma, \dot\gamma >}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} R \operatorname{sen}\theta \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} R \operatorname{sen}\theta\, d\varphi = 2\pi R \operatorname{sen}\theta,\ \theta = \frac{\rho}{R}. \end{aligned}$$

Observamos que en la fórmula (1.2) $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, y el dominio (θ, φ) es un disco de radio π en el plano euclidiano. (fig.6)

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{\pi R}{2}$ y en este caso la longitud de la circunferencia es maximal (ecuador). Si $\theta = \pi$, $\rho = \pi R$ y en este caso la longitud de la circunferencia es cero (polo sur). (fig. 6)

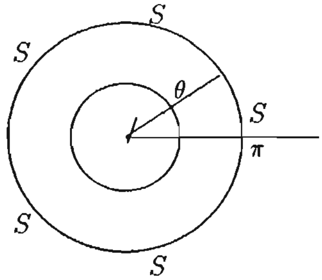


fig.6

De la fórmula (1.7) se sigue que sobre la esfera el cociente de la longitud de la circunferencia y su radio siempre es menor que 2π ;

$$\frac{l_\rho}{\rho} = \frac{2\pi \operatorname{sen}\frac{\rho}{R}}{\frac{\rho}{R}} < 2\pi, \qquad \rho > 0.$$

Si ρ es pequeño $\operatorname{sen}\frac{\rho}{R} \sim \frac{\rho}{R}$ y $l_\rho = 2\pi R \operatorname{sen}\frac{\rho}{R} \sim 2\pi\rho$.

Comparando estas dos fórmulas:

i) "la longitud euclidiana de la circunferencia de radio ρ es igual a $2\pi\rho$ " y
ii) "la longitud esférica de la circunferencia de radio ρ es igual a $2\pi R \operatorname{sen}\frac{\rho}{R}$, "

observamos que estas dos funciones son muy distintas: en particular, la primera es lineal y la segunda es periódica.

El hecho de que la superficie convexa de la esfera no puede ser transformada, con la preservación de las longitudes de curvas sobre ella, en un dominio en el plano euclidiano, puede ser imaginado si recordamos el esfuerzo que se necesita para aplastar un segmento esférico sobre un plano en comparación con el esfuerzo que aplicamos para desdoblar, por ejemplo, un cilindro circular colocándolo sobre el plano.

3. Curvatura de la esfera. La curvatura de cualquier sección normal de la esfera (que son los círculos mayores) es constante e igual a $\frac{1}{R}$. Como los valores propios de la pareja de formas cuadráticas de la superficie coinciden con las curvaturas de las secciones normales principales, tenemos que los dos valores propios son iguales a $\frac{1}{R}$. Luego la curvatura gaussiana de la esfera es igual a $\frac{1}{R^2} > 0$, es decir, para cada punto $P \in S^2$ la superficie S^2 está a un sólo lado del plano tangente en P. La curvatura media de la esfera es igual a $\frac{1}{R}$.

4. Grupo de movimientos de la métrica de la esfera. Cualquier rotación del espacio $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen transforma la esfera de radio R en ella misma. Esta rotación definida por una matriz ortogonal preserva la métrica riemanniana (1.2) sobre la esfera. De esta manera los movimientos de la esfera S^2 se definen mediante el grupo matricial $O(3)$ de matrices ortogonales de 3×3. Se puede probar [MF] que cualquier transformación que preserva la métrica en S^2 es una transformación lineal ortogonal en $\mathbb{R}^3$, o sea el grupo de movimientos de la métrica de la esfera (o sus isometrías) coincide con el grupo $O(3)$.

5. Métrica de la esfera en forma compleja. Introduzcamos en el plano $\mathbb{R}^2(x,y)$ nuevas coordenadas complejas $z = x + iy$, $\quad \overline{z} = x - iy$. Entonces la métrica (1.5) se puede escribir

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + |z|^2)^2}\, dz d\overline{z}$$

ó

$$dl^2 = \left(\frac{2R^2}{R^2 + |z|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

Entonces el elemento de longitud de una curva sobre la esfera de radio 1 es

$$dl = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}. \tag{1.8}$$

La métrica (1.8) define una métrica en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Nota. En algunos artículos se utiliza la métrica

$$dl = \frac{|dz|}{1 + |z|^2}$$

como la métrica de la esfera.

6. Métrica del plano extendido $\mathbb{C}^*$. Compactificando $\mathbb{C}$ obtenemos el plano extendido $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Luego se tiene la correspondencia uno a uno entre la esfera S^2 y $\mathbb{C}^*$ (al polo norte N le corresponde el "punto" ∞ de $\mathbb{C}^*$). La métrica en $\mathbb{C}^*$ es la misma métrica de la esfera (1.3), (1.5) o (1.8). La distancia entre un punto $z \in \mathbb{C}$ y ∞ corresponde a la longitud del arco ρ sobre la esfera que va desde el polo norte hasta el punto P que es la imagen del punto z bajo la proyección estereográfica y

$$\rho = 2 \arctan \frac{|z|}{R} \Bigg|_{|z|=a}^{|z|=\infty} = \pi - 2 \arctan \frac{a}{R}.$$

O sea la distancia esférica entre dos puntos en $\mathbb{C}^*$ es menor o igual a π .

CAPITULO II

METRICA DE LOBACHEVSKY

§1. Pseudoesfera (modelo de Lobachevsky)

1. Métrica de la pseudoesfera: Consideremos el espacio pseudo- euclidiano $\mathbb{R}^3_1$ con coordenadas pseudo-euclidianas (x, y, z) (ver cap.0, §2.3) y con la métrica pseudo-euclidiana

$$dl^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.1}$$

Por analogía con $\mathbb{R}^3$ podemos considerar en $\mathbb{R}^3_1$ una "esfera", es decir el conjunto de puntos equidistantes del origen, que vamos a llamar *pseudoesfera.* En este caso el radio de la pseudoesfera puede ser real, nulo o imaginario. La ecuación de la pseudoesfera en $\mathbb{R}^3_1$ es

$$x^2 - y^2 - z^2 = \rho^2. \tag{1.2}$$

Si $\rho = 0$ la ecuación (1.2) define un cono de segundo orden en $\mathbb{R}^3$ con el eje x como el eje del cono. Este cono divide el espacio en dos regiones: el interior, donde $\rho^2 = +R^2 > 0$ y el exterior, donde $\rho^2 = -R^2 < 0, R > 0$.

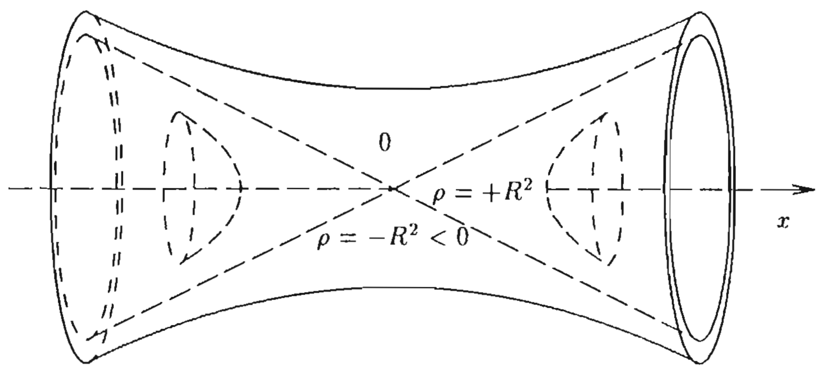


fig.7

Las pseudoesferas de radio real son los hiperboloides de dos mantos $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$. Las pseudoesferas de radio imaginario son los hiperboloides de un manto $x^2 - y^2 - z^2 = -R^2$ (fig.7).

En el caso de $\mathbb{R}^3$ la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas es $R = const.$ En coordenadas pseudoesféricas (cap 0, §2, ej.3) la ecuación de la pseudoesfera es $\rho = const.$ Ahora consideremos el problema de calcular la métrica sobre la pseudoesfera de radio real inducida por la métrica pseudoeuclidiana (1.1) de $\mathbb{R}^3_1$. La métrica (1.1) en coordenadas pseudoesféricas toma la forma

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \mathrm{sh}^2\chi\, d\varphi^2. \tag{1.3}$$

Consideremos sólo la parte derecha de la pseudoesfera (fig. 7) donde $\rho = +R$, $d\rho = 0$, por lo tanto la métrica (1.3) sobre la pseudoesfera es

$$-dl^2 = \rho^2 + \rho^2 sh^2\chi\, d\varphi^2. \tag{1.4}$$

De esta manera la métrica (1.4) inducida por la métrica indefinida (1.1) de $\mathbb{R}^3_1$ sobre la pseudoesfera es definida negativa, o sea los vectores tangentes a la pseudoesfera tienen el cuadrado de longitud negativo.

Definición 2.1.1. La métrica (1.4) se llama *métrica de Lobachevsky.*

2. Proyección estereográfica de la pseudoesfera. Definamos la geometría sobre la pseudoesfera $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$, $x > 0$ de la siguiente manera: los "puntos" son los mismos puntos del hiperboloide y las "rectas" son las curvas sobre el hiperboloide que se obtienen al cortarlo con los planos $ax + by + cz = 0$, que pasan por el origen (fig.8).

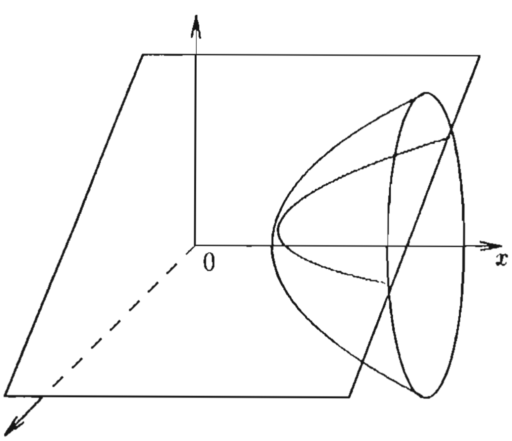


fig.8

Resulta que la geometría sobre la pseudoesfera obtenida así puede ser estudiada con los métodos de geometría analítica (sin recurrir al concepto de la métrica pseudo-riemanniana), trazando una analogía con la geometría sobre la esfera usual. Para ello es cómodo hacer una transformación análoga a la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano. El centro de la pseudoesfera S^2_1 es el origen O, el polo norte N es el punto con coordenadas $(-R, O, O)$, el polo sur S es (R, O, O) (fig.9).

Sea P el punto variable sobre la pseudoesfera $x > 0$. Tracemos una recta que pasa por N y P. Esta recta intersecta el plano YOZ en el punto $f(P)$ que llamaremos la *imagen de P bajo la proyección estereográfica* $f : S^2_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2(y, z)$. La imagen del manto derecho del hiperboloide cubre el interior del disco de radio

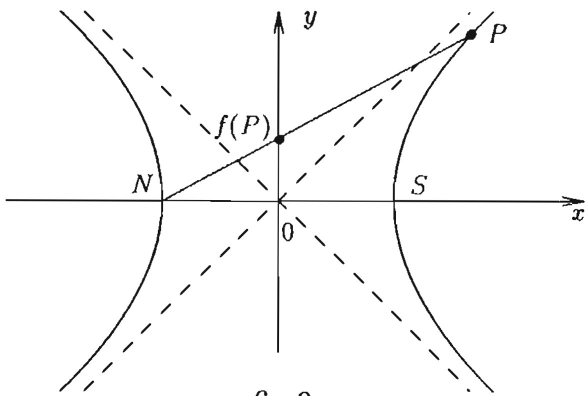


fig.9

$R : y^2 + z^2 = R^2$. (El manto izquierdo se proyecta en el exterior del mismo disco). Está claro que la proyección de todo el hiperboloide sobre el plano YOZ cubre todo el plano excepto la circunferencia $y^2 + z^2 = R^2$. El polo norte se proyecta en el infinito (como en el caso de la esfera). Encontremos la relación entre las coordenadas de $P = (x, y, z)$ y $f(P) = (u_1, u_2)$, donde u_1, u_2 son las coordenadas cartesianas en el plano YOZ.

Proposición 2.1.1. *Sean* $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u_1, u_2)$, *donde* f *es la proyección estereográfica de la parte derecha del hiperboloide* $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$, $x > 0$. *Entonces*

$$x = R\frac{|u|^2 + R^2}{R^2 - |u|^2}, \quad y = \frac{2R^2 u_1}{R^2 - |u|^2}, \quad z = \frac{2R^2 u_2}{R^2 - |u|^2},$$

donde $u = (u_1, u_2)$, $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Demostración. Consideremos un corte del hiperboloide con un plano que pasa por el eje x. Las coordenadas de los puntos marcados en la (fig.10) son:

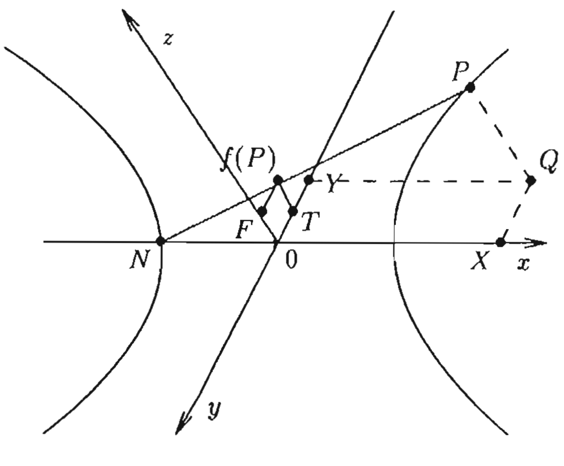


fig.10

$$\begin{array}{ll} P = (x, y, z) & Q = (x, y, 0) \\ f(P) = (u_1, u_2) & Y = (0, y, 0) \\ N = (-R, 0, 0) & T = (u_1, 0) \\ X = (x, 0, 0) & F = (0, u_2) \end{array}$$

Como $\triangle NOT \sim \triangle NXQ$ se tiene

$$\frac{QX}{TO} = \frac{NX}{NO} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{u_1} = \frac{R + x}{R}.$$

Análogamente

$$\frac{z}{u_2} = \frac{R + x}{R}.$$

Luego

$$y = u_1 \frac{R + x}{R}, \qquad z = u_2 \frac{R + x}{R}.$$

Como $R^2 = x^2 - y^2 - z^2$ entonces $R^2 = x^2 - (u_1^2 + u_2^2)\left(\dfrac{R+x}{R}\right)^2$ y teniendo en cuenta que $x - R > 0$ obtenemos

$$x - R = \frac{x+R}{R^2}|u|^2, \text{ es decir } x = R\frac{|u|^2 + R^2}{R^2 - |u|^2}.$$

Ahora $x = \dfrac{Ry}{u_1} - R$, $z = \dfrac{u_2}{u_1}y$, luego

$$R^2 = \left(\frac{Ry}{u_1} - R\right)^2 - y^2 - \left(\frac{u_2}{u_1}y\right)^2$$

y

$$y = \frac{2R^2u_1}{R^2 - |u|^2}; \text{ de manera análoga } z = \frac{2R^2u_2}{R^2 - |u|^2}. \quad \square$$

Proposición 2.1.2. *La proyección estereográfica $f : (x, y, z) \mapsto (u_1, u_2)$ define un cambio regular de coordenadas, $u_1^2 + u_2^2 < R^2$.*

Demostración. Sean (x, y, z) las coordenadas del punto P que satisfacen $R^2 = x^2 - y^2 - z^2$. Luego $x = +\sqrt{R^2 + y^2 + z^2}$ es la ecuación del manto derecho del hiperboloide. Consideremos $f : (y, z) \mapsto (u_1, u_2)$ y su matriz de Jacobi $J(f)$. De la proposición 2.1.1 obtenemos

$$|J(f^{-1})| = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \frac{4R^3}{(R^2 - |u|^2)^2}x > 0,$$

para todos los puntos $u = (u_1, u_2)$ del disco, puesto que $R > 0$, $x > 0$; luego $|J(f)| = |J(f^{-1})|^{-1} > 0$. $\square$

Ahora nos preguntamos en que se transforman las rectas de la geometría definida sobre el hiperboloide mediante la proyección estereográfica.

Proposición 2.1.3. *Las curvas de intersección de S_1^2 con los planos $ax + by + cz = 0$ se transforman bajo la proyección estereográfica f en arcos de circunferencias ortogonales a la circunferencia $y^2 + z^2 = R^2$.*

Demostración. En la ecuación $az + by + cz = 0$ reemplazamos x, y, z en términos de u_1, u_2 suponiendo que, por ejemplo $a \neq 0$:

$$aR\frac{|u|^2 + R^2}{R^2 - |u|^2} + \frac{2bR^2u_1}{R^2 - |u|^2} + \frac{2cR^2u_2}{R^2 - |u|^2} = 0.$$

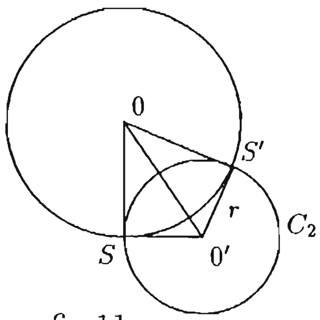


fig.11

Luego, agrupando los términos, obtenemos

$$(u_1+\frac{a}{b}R)^2+(u_2+\frac{c}{a}R)^2 = \frac{R^2}{a^2}(b^2+c^2-a^2),$$

expresión que define una circunferencia C_2 con centro $O' = (-\frac{b}{a}R, -\frac{c}{a}R)$ y radio $r = \frac{R}{a}\sqrt{b^2+c^2-a^2}$ (fig.11). Es evidente que las dos circunferencias son ortogonales: $(OS)^2+(O'S)^2 = (OO')^2$. $\square$

Conclusión: La geometría inducida sobre la pseudoesfera de radio R en $\mathbb{R}^3_1$, coincide (después de hacer un cambio apropiado de coordenadas) con la geometría que resulta en el disco de radio R sobre el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ si tomamos como "puntos" de esta geometría los puntos interiores del disco y como "rectas" los arcos de circunferencias ortogonales a la frontera del disco. En esta geometría llamada de *Lobachevsky* ó *hiperbólica* no se cumple el quinto postulado de Euclides: dada una recta l y un punto P fuera de ella, por el punto P pasan infinitas rectas "paralelas" a la recta l, es decir, que no se intersectan con la recta l (fig. 12).

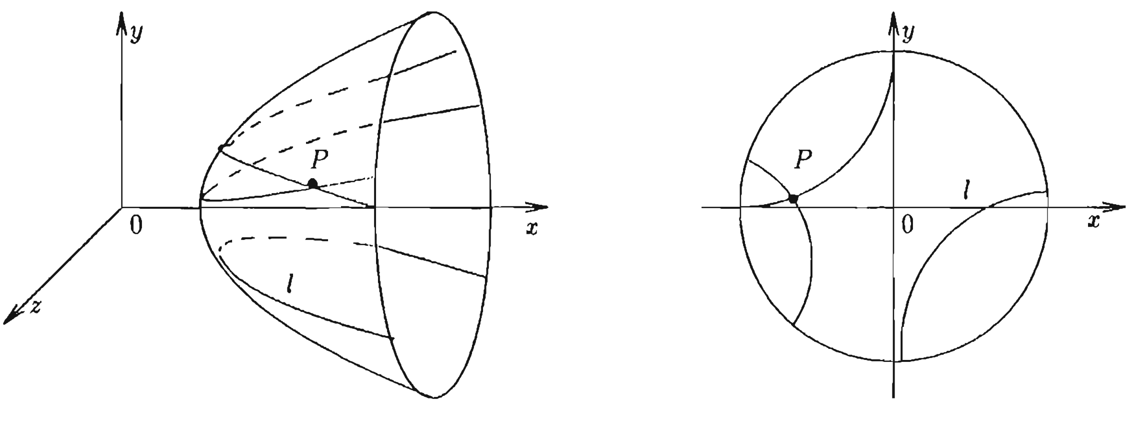


fig.12

El modelo de la geometría de Lobachevsky en el círculo unitario se llama *modelo de Poincaré* de geometría de Lobachevsky.

3. Métrica de Lobachevsky en el modelo de Poincaré. Calculemos la métrica sobre la pseudoesfera en coordenadas (u_1, u_2) en el círculo $D(0, R) = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 < R^2\}$. Utilizando las fórmulas de la proyección estereográfica y reemplazando las expresiones de x, y y z en términos de u_1, u_2 en la fórmula $-dl^2 = -(dx^2 - dy^2 - dz^2)$ obtenemos

$$-dl^2 = \frac{4R^4((du_1)^2 + (du_2)^2)}{(R^2 - |u|^2)^2}, \quad u_1^2 + u_2^2 = |u|^2.$$

Si la pseudoesfera tiene radio $R = 1$, entonces

$$-dl^2 = \frac{4((du_1)^2 + (du_2)^2)}{(1 - |u|^2)^2}. \tag{1.5}$$

Definición 2.1.2. La métrica (1.5) tomada con el signo menos se llama *métrica de Lobachevsky en el modelo de Poincaré* en coordenadas cartesianas u_1, u_2 (o simplemente *métrica de Poincaré*). En coordenadas polares (r, φ) esta misma métrica tiene la forma

$$dl^2 = \frac{4}{(1 - r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2). \tag{1.6}$$

Observamos que la métrica de Poincaré es riemanniana y conforme, puesto que difiere de la métrica euclidiana por el múltiplo $\lambda(r) = \dfrac{4}{(1 - r^2)^2}$ que es una función continua para $r < 1$. Ahora haciendo el cambio de coordenadas , $r = \operatorname{cth}\frac{\chi}{2}$, $\varphi = \varphi$, o sea pasando de coordenadas polares (r, φ) a coordenadas pseudoesféricas (χ, φ) obtenemos que la métrica (1.6) se convierte en $dl^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\varphi^2$ que es la misma métrica (1.4) tomada con el signo menos y $\rho = 1$.

4. Interpretación geométrica del parámetro χ. Consideremos el plano XOZ donde la métrica inducida es $dl^2 = dx^2 - dz^2$.

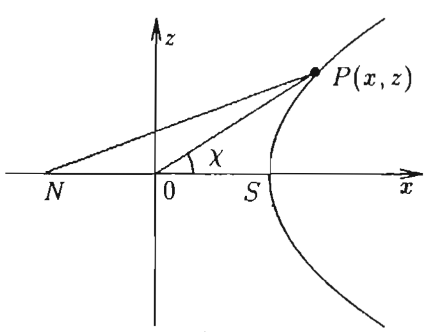


fig.13

La intersección del plano XOZ con la pseudoesfera es una hipérbola cuya representacíon paramétrica en coordenadas pseudoesféricas es $x = \operatorname{ch}\chi$, $z = \operatorname{sh}\chi$, $R = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. Escojamos como parámetro χ el valor euclidiano del ángulo POS (fig. 13) .Encontremos la longitud del arco de la hipérbola desde $\chi = 0$ hasta $\chi = \chi_0$:

$$l = \int_0^{\chi_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2}\, d\chi = \int_0^{\chi_0} \sqrt{\operatorname{sh}^2\chi - \operatorname{ch}^2\chi}\, d\chi = \int_0^{\chi_0} \sqrt{-1}\, d\chi = i\chi_0.$$

O sea las longitudes pseudoeuclidianas de las curvas sobre la pseudoesfera son imaginarias puras. Así que el parámetro χ multiplicado por i coincide con la longitud del "meridiano" de la pseudoesfera que une el polo sur S con el punto P y este parámetro angular es análogo al parámetro θ sobre la esfera S^2 (fig. 14).

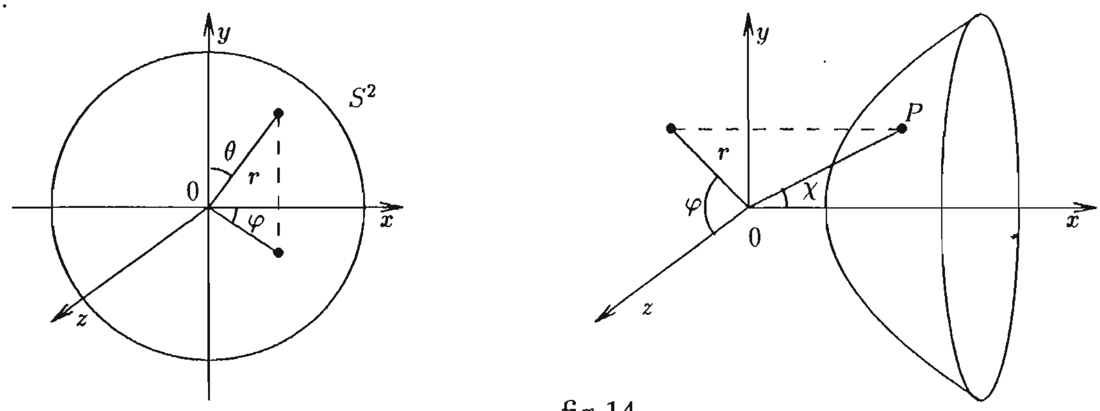


fig.14

Si $R \neq 1$ entonces la longitud del meridiano SP es $iR\chi_0$.

5. Métricas no equivalentes. La métrica (1.6) definida en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en el plano euclidiano es una nueva métrica que no es equivalente a las métricas euclidiana y esférica en el plano. Para demostrar esta afirmación utilizaremos el método aplicado anteriormente: encontremos la longitud de una circunferencia en el plano de Lobachevsky (pseudoesfera) y la expresamos como función del radio calculado también en la métrica de Lobachevsky. Consideremos la circunferencia de radio euclidiano a, $a < 1$ con centro en el origen; su imagen bajo la inversa de la proyección estereográfica es una circunferencia de radio χ (fig. 15).

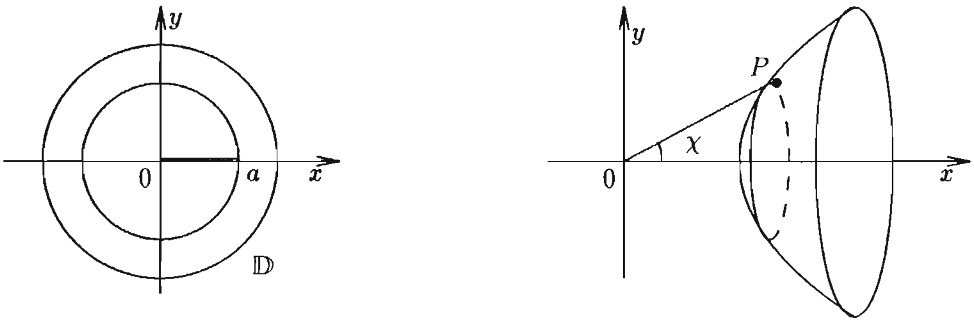


fig.15

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{4}{(1-r^2)^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]}\, dt.$$

Como $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $r(t_1) = 0$, $r(t_2) = a$, entonces

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{1-r^2}\frac{dr}{dt}\, dt = \lg\frac{1+a}{1-a},\ a < 1.$$

Luego $a = \operatorname{th}\dfrac{\chi}{2}$. Ahora la longitud de la circunferencia de radio χ es

$$l = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{\frac{4}{(1-r^2)^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]}\, dt.$$

Como $r = a$, entonces

$$l = \int_{b_1}^{b_2} \frac{2}{1-a^2} a \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{2a}{1-a^2}\, d\varphi = \frac{4\pi a}{1-a^2}.$$

Reemplazando $a = \operatorname{th}\frac{\chi}{2}$ obtenemos

$$l = 2\pi \operatorname{sh}\chi. \tag{1.7}$$

Si χ es muy pequeño entonces $l \sim 2\pi\chi$ que coincide con la fórmula para la longitud de la circunferencia en la métrica euclidiana. Como en el caso de la esfera S^2 hemos expresado la longitud de la circunferencia en la métrica de Lobachevsky en términos invariantes (respecto a cambios regulares de coordenadas), es decir en términos del radio calculado en la misma métrica. Entonces la fórmula (1.7) es invariante respecto a cambios regulares de coordenadas y por lo tanto la métrica de Lobachevsky no es equivalente a ninguna de las métricas anteriores.

6. Forma compleja de la métrica de Lobachevsky. Introduzcamos en el plano euclidiano nuevas coordenadas (complejas) asi : $(x, y) \longrightarrow (z, \overline{z})$, $z = x+iy$, $\overline{z} = x - iy$. La matriz de Jacobi de esta transformación es $J = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ y $|J| = -2i \neq 0$, luego el cambio es regular en todo el plano. La métrica euclidiana en estas coordenadas es $dl^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy)$ ó

$$dl^2 = dz d\overline{z}. \tag{1.8}$$

La métrica de Poincaré es

$$dl^2 = \frac{4dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4dzd\overline{z}}{(1-|\overline{z}|^2)^2} = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{1.9}$$

Definición 2.1.3. La métrica

$$ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1 \tag{1.10}$$

se llama *métrica hiperbólica* en el círculo unitario $\mathbb{D}$.

Nota . A veces se utiliza la fórmula

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1. \tag{1.10a}$$

7. Tabla de las métricas riemannianas. A continuación presentaremos una tabla comparativa de métricas riemannianas dl^2 para la esfera de Riemann S^2 y el plano de Lobachevsky S_1^2 (pseudoesfera) en distintos sistemas de coordenadas.

TABLA 1

coordenadas	Esfera S^2	Pseudoesfera S_1^2	coordenadas
cartesianas (x,y) en $\mathbb{R}^2$	$\dfrac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$	$\dfrac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$	cartesianas (x,y) en $\mathbb{D}$
polares (r,φ) en $\mathbb{R}^2$	$\dfrac{4(dr^2+r^2d\varphi^2)}{(1+r^2)^2}$, $0\leq r<\infty$, $0\leq\varphi<2\pi$	$\dfrac{4(dr^2+r^2d\varphi^2)}{(1-r^2)^2}$, $0\leq r<1$, $0\leq\varphi<2\pi$	polares (r,φ) en $\mathbb{D}$
esféricas (θ,φ), en $S^2, R=1$	$d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2$, $0\leq\theta<2\pi$ $0\leq\varphi<2\pi$	$d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2$, $0\leq\chi<\infty$ $0\leq\varphi<2\pi$	pseudoesféricas (χ,φ) en $S_1^2, R=1$
complejas $(z,\bar{z})$ en $\mathbb{R}^2(\mathbb{C})$	$\dfrac{4\lvert dz\rvert^2}{(1+\lvert z\rvert^2)^2}$	$\dfrac{4\lvert dz\rvert^2}{(1-\lvert z\rvert^2)^2}$, $\lvert z\rvert<1$	complejas $(z,\bar{z})$ en $\mathbb{D}$

§2 Modelo de Poincaré

1. "Doble relación". Poincaré propuso un modelo de la geometría de Lobachevsky basado en las propiedades de las transformaciones de Möbius. Consideremos en $\mathbb{C}$ el círculo unitario $\mathbb{D}$. Los puntos de $\mathbb{D}$ son los Λ-puntos de la geometría y las Λ-rectas de la geometría son los arcos de circunferencias ortogonales a la frontera $\partial\mathbb{D}$ y pertenecientes a $\mathbb{D}$. Los Λ-movimientos del espacio son las transformaciones de Möbius $T:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ de la forma $T(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, (que son los automorfismos de $\mathbb{D}$). Introduzcamos una métrica en $\mathbb{D}$. Observamos que la "doble relación" entre cuatro puntos cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $\alpha, \beta \in \partial\mathbb{D}$, definida por

$$(z_1, z_2; \alpha, \beta) := \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta} \div \frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} \tag{2.1}$$

es invariante bajo las transformaciones de Möbius T en $\mathbb{D}$, es decir

$$(Tz_1, Tz_2; T\alpha, T\beta) = (z_1, z_2; \alpha, \beta).$$

En la fórmula (2.1) α, β son los puntos extremos del arco que contiene a z_1, z_2 y es ortogonal a $\partial\mathbb{D}$ (fig. 16a).

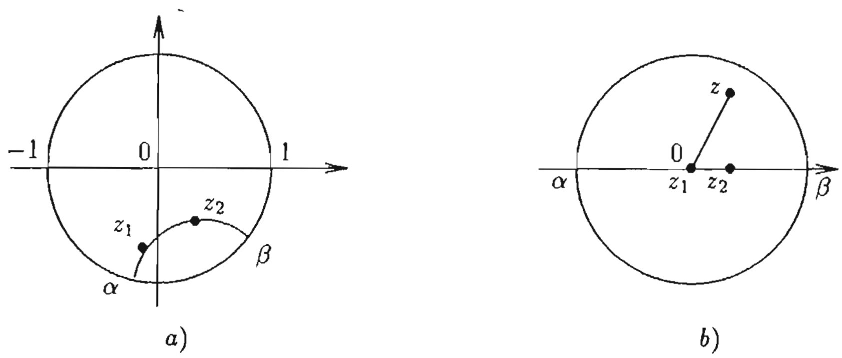


fig.16

Es evidente que z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$ definen una única circunferencia ortogonal a $\partial\mathbb{D}$. Si α, z_1, z_2, β están sobre la misma Λ-recta entonces $(z_1, z_2; \alpha, \beta)$ es real y mayor que 1. Para ver esto es suficiente aplicar a la Λ-recta una transformación de Möbius que la convierte en una Λ-recta que pasa por el origen y el punto $(1,0)$ (fig. 16a). Puesto que z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$ definen los puntos α y β de manera única denotemos

$$(z_1, z_2; \alpha, \beta) := \{z_1, z_2\}.$$

Un cálculo directo muestra que si los Λ-puntos z_1, z_2, z_3 están sobre la misma Λ-recta en el orden $\alpha, z_1, z_2, z_3, \beta$, entonces

$$\{z_1, z_2\} \cdot \{z_2, z_3\} = \{z_1, z_3\};$$

por lo tanto

$$\lg\{z_1, z_2\} + \lg\{z_2, z_3\} = \lg\{z_1, z_3\}$$

y la cantidad $\lg\{z_1, z_2\}$ (que es positiva e invariante respecto a los Λ- movimientos) puede ser tomada como la distancia de Lobachevsky entre dos Λ-puntos z_1, z_2 :

$$\rho(z_1, z_2) := \lg\{z_1, z_2\}. \tag{2.2}$$

2. Métrica en el círculo unitario. Calculemos ρ en $\mathbb{D}$.

a) Sean $z_1 = 0, z_2 = r > 0$, entonces $\alpha = -1, \beta = 1$ (fig.16b). Luego por (2.1)

$$\{z_1, z_2\} = (0, r; -1, 1) = \frac{1 + r}{1 - r}$$

y

$$\rho(0,r) = \lg \frac{1+r}{1-r}.$$

b) Sean $z_1 = 0, z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$. Como una rotación respecto al origen es un Λ-movimiento, entonces para todo $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$

$$\rho(0,z) = \lg\{0,z\} = \lg \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

c) Sean z_1, z_2 arbitrarios. Entonces mediante el Λ- movimiento $z \mapsto \dfrac{z-z_1}{1-\overline{z}_1 z}$ obtenemos el caso b). Por lo tanto

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1,z_2) = \lg \frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}. \tag{2.3}$$

Es fácil ver que $\rho_{\mathbb{D}}$ es una métrica (en el sentido de espacios métricos).

Ahora si uno de los puntos z_1, z_2 está fijo y el otro tiende a la frontera $\partial\mathbb{D}$ entonces $\rho(z_1,z_2) \longrightarrow \infty$, por lo tanto los puntos de la frontera son los puntos infinitamente lejanos del plano de Lobachevsky en el modelo de Poincaré.

Sean $z_1 = z, z_2 = z + dz$. Si en la fórmula (2.3) separamos la parte lineal respecto a $|dz|$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho(z, z+dz) &= \lg\left\{1 + \frac{|dz|}{|1-|z|^2-\overline{z}dz|}\right\} - \lg\left\{1 - \frac{|dz|}{|1-|z|^2-\overline{z}dz|}\right\} \\
&= \left\{\frac{|dz|}{|1-|z|^2-\overline{z}dz|} - \frac{|dz|^2}{2|1-|z|^2-\overline{z}dz|^2} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \frac{|dz|}{|1-|z|^2-\overline{z}dz|} + \frac{|dz|^2}{2|1-|z|^2-\overline{z}dz|^2} - \ldots\right\} \\
&= \frac{2|dz|}{|1-|z|^2-\overline{z}dz|} + o(|dz|), \quad |z| < 1, |dz| \ll 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}, \tag{2.4}$$

que coincide con la métrica hiperbólica $(1.10a)$. La métrica hiperbólica es invariante respecto a las transformaciones de Möbius $T : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$. En efecto, sean $T(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} = w$, $\quad a, b \in \mathbb{D}$, $\quad T(a) = b$. Luego $dw = \dfrac{e^{i\theta}(1-|a|^2)dz}{(1-\overline{a}z)^2}$ y

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{(1-|a|^2)|dz|}{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

§3. Modelo de Klein

1. Métrica en el plano superior. Consideremos una transformación de Möbius del plano superior $H^+ = \{w : Im\, w > 0\}$ en el círculo unitario $\mathbb{D}$:

$$T : H^+ \longrightarrow \mathbb{D}$$
$$w \mapsto z = T(w) = \frac{1+iw}{1-iw}.$$

Tenemos $T(0) = 1, T(i) = 0, T(1) = i$ (fig.17).

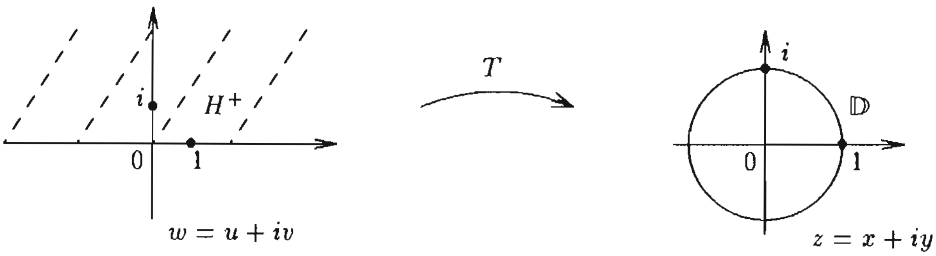


fig.17

De esta manera en $\mathbb{D}$ se introducen nuevas coordenadas (u, v). Es evidente que el cambio de coordenadas es regular. Escribamos la métrica $(1.10a)$ en coordenadas $(u, v) = w$:

$$dl^2 = \frac{4dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4dwd\overline{w}|1-iw|^4}{|1-iw|^4 i^2(\overline{w}-w)^2} = \frac{du^2+dv^2}{v^2},$$

o sea

$$dl^2 = \frac{du^2+dv^2}{v^2}, \quad v > 0. \tag{3.1}$$

La métrica (3.1) se llama *métrica de Lobachevsky en el modelo de Klein.* El eje u representa los puntos infinitamente lejanos de la geometría de Lobachevsky; en efecto, calculemos la longitud del segmento del eje v desde 1 hasta 0 :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{1}{v^2}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]}\, dt.$$

Como $u = 0, v(t_1) = 0, v(t_2) = 1$, tenemos

$$l = \int_0^1 \frac{dv}{v} = \lg v|_0^1 = -\lg 0 \longrightarrow \infty.$$

La métrica (3.1) se puede escribir en la forma compleja:

$$dl = \frac{|dz|}{Im\, z}. \tag{3.2}$$

Las transformaciones de Möbius transforman círculos y rectas en círculos y rectas, por lo tanto las Λ-rectas de $\mathbb{D}$ se transforman en semicircunferencias o semirrectas ortogonales al eje u (fig. 18):

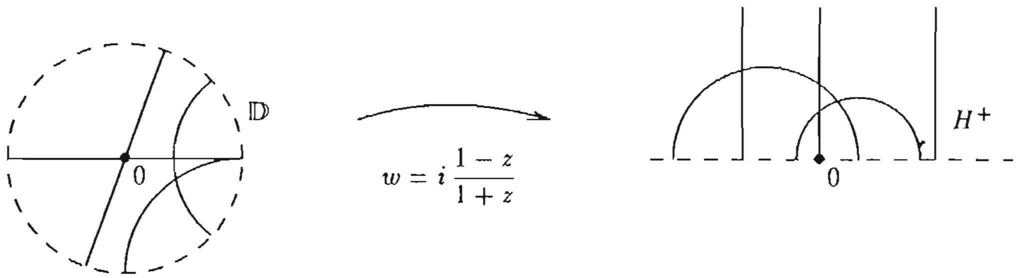


fig.18

2. Distancia entre dos puntos en el plano superior. Sean P_1 y P_2 dos puntos sobre una circunferencia de radio r_0 con el centro en el origen (fig. 19).

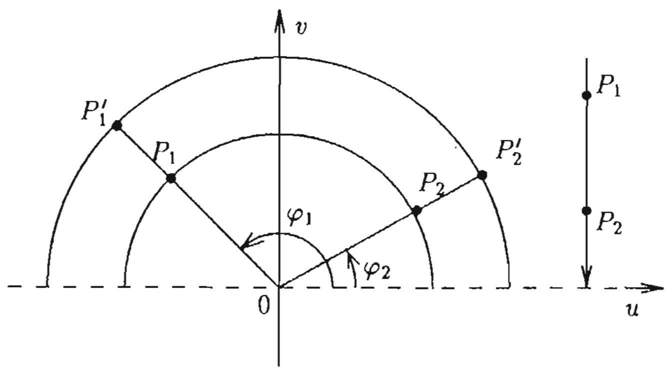


fig.19

Luego

$$l(P_1,P_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2}{r^2\mathrm{sen}^2\varphi}}\, dt,$$

aquí $r = r_0$, $\varphi(t_1) = \varphi_1$, $\varphi(t_2) = \varphi_2$ y

$$l(P_1,P_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \mathrm{sen}\varphi} = \lg\tan\frac{\varphi}{2}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \lg\left(\frac{\tan\dfrac{\varphi_2}{2}}{\tan\dfrac{\varphi_1}{2}}\right).$$

Si P_1 y P_2 están sobre una recta ortogonal al eje real entonces

$$l(P_1,P_2) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dr}{r\,\mathrm{sen}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}}\lg r\big|_{y_1}^{y_2} = \lg\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Observamos que la métrica (3.1) en H^+ es invariante respecto a las translaciones paralelas al eje real. Utilizando métodos de cálculo variacional, se puede probar que la curva suave más corta que une dos puntos en el plano superior H^+ con la métrica $dl^2 = \dfrac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\varphi}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$ es el arco de la circunferencia ortogonal al eje real u que une los puntos dados. O sea las "rectas" en H^+ realizan la distancia mínima entre dos puntos, es decir, son geodésicas.

§4. Superficie de Beltrami

1. Construcción. Nosotros ya hemos visto la realización de la geometría de Lobachevsky en las superficies planas (el círculo unitario $\mathbb{D}$, semiplano superior H^+) y en las superficies de $\mathbb{R}^3$ (hiperboloides de 1 y 2 mantos). Veamos otro ejemplo de superficie en $\mathbb{R}^3$ sobre la cual la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ induce la métrica de Lobachevsky (hiperbólica). Consideremos en el plano (x, y) una curva suave γ con las siguientes propiedades:

1) γ está en el primer cuadrante.
2) La longitud del segmento de la recta tangente a γ desde el punto de la tangencia hasta su intersección con el eje x es constante e igual a a (fig. 20a): $|AC| = a = |A_0O|$.

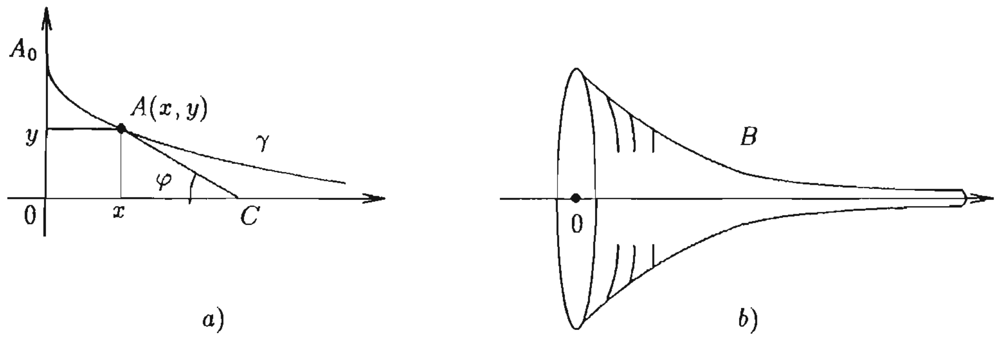


fig.20

Encontremos la ecuación diferencial para γ. Del triángulo ACX tenemos $\tan\varphi = y'_x$, $\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$, (mientras la coordenada x crece de 0 a ∞, φ crece de $\dfrac{\pi}{2}$ a π). Luego y'_x es negativa, $y = y(x)$ es la gráfica de γ. Se tiene $\tan\varphi = \dfrac{-\mathrm{sen}\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi}} = y'_x$ y $\mathrm{sen}\varphi = \dfrac{y}{a}$. De aquí

$$x'_y = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad |y| \leq a,$$

pues la función $x = x(y)$ es decreciente. Ahora

$$x(y) = -\int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy = \frac{1}{a} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

ó

$$x(y) = \frac{a}{2} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2}. \tag{4.1}$$

Hemos obtenido la fórmula explícita de la gráfica $x = x(y)$. Consideremos la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva $x(y)$ alrededor del eje x (fig. 20b). La superficie obtenida B se llama *superficie de Beltrami.*

2. Métrica sobre la superficie de Beltrami. Sean (x, r, φ) coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$: $x = x, y = r\cos\varphi, z = r\mathrm{sen}\varphi$. Luego la métrica inducida sobre la superficie de revolución, con la generatriz definida por la función $x = x(r)$, es $dl^2 = dx^2(r) + dr^2 + r^2 d\varphi^2$, $0 < r < a$. Como $x'_r = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$, tenemos $dl^2 = \frac{a^2 - y^2}{r^2} dr^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2$ ó

$$dl^2 = \frac{a^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{4.2}$$

Sea $a = 1$.

Proposición 2.4.1. *La métrica riemanniana inducida sobre la superficie de Beltrami por la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ es la métrica de Lobachevsky.*

Demostración. Consideremos el siguiente cambio regular de variable : $(r, \varphi) \mapsto (u, v), u = \varphi, v = \frac{1}{r}$. Luego $du = d\varphi$, $dv = -\frac{1}{r^2} dr$ y reemplazando en (4.2) obtenemos

$$dl^2 = \frac{1}{v^2} du^2 + \frac{1}{v^2} dv^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

que es la métrica (3.1). $\square$

3. Tabla de las métricas de Lobachevsky. A continuación presentamos la tabla de las métricas de Lobachevsky dl^2 en el círculo unitario $\mathbb{D}$, en el semiplano superior H^+, en el plano de Lobachevsky S_1^2 y en la superficie de Beltrami B.

TABLA 2

coordenadas	$\mathbb{D}$	H^+	S_1^2	B
cartesianas (u,v)	$\frac{du^2+dv^2}{(1-u^2-v^2)^2}$, $u^2+v^2<1$	$\frac{du^2+dv^2}{v^2}$, $v>0$	$\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$, $u^2+v^2<1$	$\frac{du^2+dv^2}{v^2}$, $0<u^2+v^2\leq 1$
polares (r,φ)	$\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$, $r<1$	$\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{r^2\mathrm{sen}^2\varphi}$,	$\frac{4(dr^2+r^2d\varphi)}{(1-r^2)^2}$, $r<1$	
pseudoesféricas (χ,φ)			$d\chi^2+\mathrm{sh}^2\chi d\varphi^2$, $0\leq\chi<\infty$ $0\leq\varphi<2\pi$	
cilíndricas (x,r,φ)				$\frac{1}{r^2}dr^2+r^2d\varphi^2$, $0<r\leq 1$
complejas $(z,\bar{z})$	$\frac{\lvert dz\rvert^2}{(1-\lvert z\rvert^2)^2}$, $\lvert z\rvert<1$	$\frac{\lvert dz\rvert^2}{(Im\, z)^2}$, $Im\, z>0$	$\frac{4\lvert dz\rvert^2}{(1-\lvert z\rvert^2)^2}$, $\lvert z\rvert<1$	$\frac{4\lvert dz\rvert^2}{-(z-\bar{z})^2}$, $0<\lvert z\rvert\leq 1$

§5 Grupo de movimientos de la métrica de Lobachevsky

Veamos cuales son las isometrías de la métrica de Lobachevsky en diferentes modelos. Estas isometrías se encuentran entre las transformaciones de Möbius

$$z=\frac{aw+b}{cw+d},\ ad-bc=1. \tag{5.1}$$

1. Modelo de Klein. Las aplicaciones (5.1) que transforman H^+ en H^+ deben satisfacer la propiedad de que si $Im\, z=0$ entonces $Im\, w=0$. Esto implica que a,

b, c, d son reales. Ahora reemplacemos (5.1) en la métrica (3.1) :

$$dl^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{-(z-\bar{z})^2} = \frac{4dwd\bar{w}}{-[w(a\bar{d}-\bar{b}c)-\bar{w}(\bar{a}d-b\bar{c})]^2}.$$

Para que (5.1) sea un movimiento de la métrica (3.1) debe cumplirse $a\bar{d}-\bar{b}c=1$ y $\bar{a}d-b\bar{c}=1$. Esto se tiene puesto que a, b, c, d son reales. Consideremos los siguientes grupos: el grupo matricial $SL(2,\mathbb{R})=\{A\in M_{2\times 2}:\det A=1\}$, donde $M_{2\times 2}$ denota el conjunto de matrices reales 2×2 , y el grupo de transformaciones $L=\left\{\dfrac{az+b}{cz+d}: ad-bc=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{C}\right\}$. Sea

$$\varphi: SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow L$$
$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \mapsto \varphi(A)=\frac{az+b}{cz+d}$$

Luego φ es un homomorfismo de grupos respecto a la composición, el $\ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$. Por lo tanto $SL(2,\mathbb{R})/(I,-I)$ es isomorfo a L [DNF], [MF].

2. Modelo de Poincaré. Para que la transformación (5.1) sea un movimiento de la métrica (1.10a) se debe cumplir

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} \\ &= \frac{4dwd\bar{w}}{[|d|^2-|b|^2+(c\bar{d}-a\bar{b})w+(\bar{a}b-\bar{c}d)\bar{w}+(|c|^2-|a|^2)|w|^2]^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |d|^2-|b|^2 &= 1 \\ c\bar{d}-a\bar{b} &= 0 \\ |c|^2-|a|^2 &= -1,\ ad-bc=1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Consideremos el espacio pseudohermitiano $\mathbb{C}^2_1$, donde el cuadrado de longitud de un vector $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\xi_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2$ se define como

$$<\xi,\xi>_1=|\xi_1|^2-|\xi_2|^2.$$

El grupo de transformaciones lineales complejas que preserva la métrica (1.9) es el grupo de matrices unitarias $U(1,1)$. Denotemos por $SU(1,1)$ el subgrupo $U(1,1)$ de matrices con determinante 1. De las condiciones (5.2) se sigue que $d=\bar{a}$, $c=\bar{b}$. Luego $\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in SU(1,1)$. Sea

$$L_1=\left\{\frac{az+b}{cz+d}\ :\ ad-bc=1,\ d=\bar{a},\ c=\bar{b},\ z\in\mathbb{C}\right\}.$$

Consideremos la siguiente transformación

$$\psi : SU(1,1) \longrightarrow L_1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \psi(A) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La aplicación $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ transforma $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$. Por lo tanto ψ es un homomorfismo de grupos (respecto a la composición). El núcleo $\ker\psi = (I, -I)$, donde I es la matriz identidad, luego L_1 es isomorfo a $SU(1,1)/(I,-I)$.

3. Modelo de Lobachevsky. El grupo de movimientos de la métrica indefinida $dl^2 = dx^2 - dy^2$ en $\mathbb{R}_1^2$ consiste de las matrices A de la forma

$$A = \pm \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\psi & \pm sh\psi \\ \mathrm{sh}\psi & \pm\mathrm{ch}\psi \end{pmatrix},$$

donde el parámetro ψ cambia en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Este grupo de movimientos del plano $\mathbb{R}_1^2$ (llamado *grupo de rotaciones hiperbólicas*) tiene cuatro componentes conexas que se describen mediante las combinaciones permitidas de los signos en la matriz A así:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in G_1, \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in G_2, \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in G_3, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in G_4.$$

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \in G_1$, puesto que cuando $\psi \longrightarrow -\psi$, $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ se transforma en $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$: $\mathrm{sh}(-\psi) = -\mathrm{sh}\psi$, $\mathrm{ch}(-\psi) = \mathrm{ch}\psi$. Estas componentes son disjuntas, o sea $G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$. De las anteriores componentes G_i sólamente G_1 es un subgrupo el cual es isomorfo a $SO(1,1) = \{A \in M_{2\times 2} : AA^T = I, \det A = 1\}$. En el caso de $\mathbb{R}_1^3$ se tiene un resultado análogo: el grupo de movimientos propios (con determinante igual a 1) de la métrica pseudo-euclidiana en $\mathbb{R}_1^3$ es isomorfo a $SO(1,2)$, donde $SO(1,2) = \{A \in M_{3\times 3} : AA^T = I, \det A = 1\} \subset O(1,2) = \{A \in M_{3\times 3} : AA^T = I\}$ en $\mathbb{R}_1^3$ con la métrica (1.1) [DNF], p.64-67,[MF], p.205-209. Los resultados anteriores podemos reunirlos en el siguiente teorema cuya demostración se puede ver en [DNF],p.115-117.

Teorema 2.5.1. *El grupo de movimientos (propios) de la métrica de Lobachevsky es isomorfo al*

i) *grupo $SU(1,1)/\pm I$ en el modelo de Poincaré;*
ii) *grupo $SL(2,\mathbb{R})/\pm I$ en el modelo de Klein;*
iii) *grupo $SO(1,2)$ (componente conexa) en el caso de la pseudoesfera.*

Nota. Para obtener el grupo de movimientos completo en el modelo de Poincarè, por ejemplo, hay que agregarle al grupo de movimientos propios las transformaciones de la forma $z \mapsto \bar{z}$. En el modelo de Klein se agregan las transformaciones de la forma $z \mapsto -\bar{z}$, que transforman H^+ en H^+ y definen un movimiento de la métrica (3.1).

§6 Curvatura de la métrica

1. Coordenadas isotérmicas. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie, p, q las coordenadas en Ω. La métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ induce sobre la superficie la métrica

$$dl^2 = Edp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2.$$

Si E, F, G son funciones reales analíticas respecto a las coordenadas p, q entonces existen unas nuevas coordenadas locales (u, v) tales que la métrica dl^2 en estas coordenadas tiene la forma conforme:

$$dl^2 = g(u,v)(du^2 + dv^2). \tag{6.1}$$

Estas coordenadas (u, v) se llaman *isotérmicas conformes* $[DNF]$.

2. Curvatura de una superficie con una métrica conforme g. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ una superficie definida en coordenadas conformes u, v con la métrica (6.1).

Teorema 2.6.1. *La curvatura gaussiana de una superficie en $\mathbb{R}^3$ con la métrica (6.1) está dada por*

$$K = -\frac{1}{2g} \triangle \lg g, \tag{6.2}$$

donde $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ *es el operador de Laplace.*

Demostración. Supongamos que la superficie está dada en forma paramétrica por $r = r(u, v)$. Luego la condición (6.1) significa que

$$< r_u, r_u > = < r_v, r_v > = g, \; < r_u, r_v > = 0,$$

(ver Cap 0, (2.2),(2.4)). Derivando las igualdades anteriores respecto a u y v obtenemos

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = < r_{uu}, r_u > = < r_{uv}, r_v > \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = < r_{vv}, r_v > = < r_{uv}, r_u > \\ < r_{uu}, r_v > + < r_u, r_{uv} > = 0 = < r_{uv}, r_v > + < r_u, r_{vv} > . \end{gathered}$$

Sean e_1, e_2, n vectores unitarios definidos como $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} r_u$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} r_v$, $n = [e_1, e_2]$, donde $[,]$ denota el producto vectorial. La base ortonormal $\{e_1, e_2, n\}$ en cada punto de la superficie tiene la propiedad de que n es ortogonal a la superficie y $\{e_1, e_2\}$ forman una base ortonormal en el plano tangente a la superficie en cada punto. Por definición los coeficientes de la segunda forma cuadrática son

$$b_{11} = L = < r_{uu}, n >, \qquad b_{12} = M = < r_{uv}, n >, \qquad b_{22} = < r_{vv}, n > = N.$$

De estas fórmulas se sigue que las coordenadas de los vectores r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} en la base $\{e_1, e_2, n\}$ son

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, L) \\ r_{uv} &= (\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, M) \\ r_{vv} &= (-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, N). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Luego

$$< r_{uu}, r_{vv} > - < r_{uv}, r_{uv} >= LN - M^2 - \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]. \tag{6.4}$$

De las fórmulas (6.3) y (6.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &=< r_{uuv}, r_v > + < r_{uv}, r_{vu} > \\ &= \frac{\partial}{\partial v} < r_{uu}, r_v > - < r_{uu}, r_{vv} > + < r_{uv}, r_{uv} > \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - (LN - M^2) + \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Por la fórmula (5.4) del capítulo 0 la curvatura gaussiana $K = \dfrac{LN - M^2}{g^2}$. Por lo tanto de (6.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{LN - M^2}{g^2} &= \frac{1}{2g^3}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right] - \frac{1}{2g^2}\triangle g \\ &= -\frac{1}{2g}\left\{\frac{1}{g}\triangle g - \frac{1}{g^2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2g}\triangle \lg g &= -\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\left(\lg g\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2g}\left\{\frac{1}{g}\triangle g - \frac{1}{g^2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Como (6.6) es igual a (6.7) se tiene la fórmula (6.2). □

Si la métrica (6.1) está escrita en forma $dl^2 = g(z, \bar{z})dz d\bar{z}$, entonces la curvatura gaussiana de la superficie es

$$K = -\frac{2}{g}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\lg g). \tag{6.8}$$

Definición 2.6.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y g una métrica en Ω, entonces la *curvatura de la métrica g en el punto $z \in \Omega$* se define como

$$K = -\frac{1}{2g(z)} \triangle \lg g(z). \tag{6.9}$$

3. Curvaturas de las métricas hiperbólica, euclidiana y esférica. Usando la fórmula (6.8) calculemos las curvaturas de las superficies con las métricas

$$dl^2 = \frac{4R^2}{(1-|z|^2)^2} dz d\overline{z}, \tag{6.10}$$

$$dl^2 = \frac{4R^2}{(1+|z|^2)^2} dz d\overline{z}, \tag{6.11}$$

$$dl^2 = dz d\overline{z}. \tag{6.12}$$

a) Sea $g(z, \overline{z}) = \dfrac{4R^2}{(1-|z|^2)^2}$. Luego

$$K = -\frac{2}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\lg \frac{4R^2}{(1-|z|^2)^2}\right)\right) = -\frac{4}{g}\frac{1}{(1-z\overline{z})^2} = -\frac{1}{R^2} < 0.$$

O sea una superficie con la métrica (6.10) tiene curvatura constante negativa, en particular si $R = 1$, entonces $K = -1$. Asi que la curvatura de la métrica hiperbólica (1.10a) es igual a -1; la curvatura de la métrica hiperbólica (1.10) es igual a -4.

b) Sea $g(z, \overline{z}) = \dfrac{4R^2}{(1+|z|^2)^2}$. Luego $K = \dfrac{1}{R^2} > 0$. Es decir la curvatura de la esfera de Riemann es constante positiva.

c) Sea $g(z, \overline{z}) = 1$. Luego $K = 0$, o sea el plano euclidiano tiene curvatura cero.

Ejemplo 2.6.1. . Calculemos la curvatura de la superficie de Beltrami utilizando la fórmula (5.5),cap.0 para la curvatura de una superficie de revolución. La generatriz de la superficie de Beltrami es la inversa de $x(y)$ dada por la fórmula (4.1). La curvatura de Gauss es

$$|K| = \frac{|y''|}{y(1+(y')^2)^2}, \tag{6.4}$$

donde $y(x)$ es la generatriz de la superficie de Beltrami (fig.20b). Como $x'_y = -\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, luego $x'' = \dfrac{a^2}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}$. Ahora y y x son funciones inversas, por lo tanto $y'' = -\dfrac{x''}{(x')^3}$ y reemplazando en la fórmula (6.4) obtenemos

$$K = \frac{-x''}{(x')^3 y\left(1+\left(\frac{1}{x'}\right)^2\right)^2} = \frac{-x''}{(x')^3 y\left(\frac{1+(x')^2}{(x')^2}\right)^2} = -\frac{1}{a^2} < 0.$$

El signo " − " se debe al hecho de que la gráfica $y = y(x)$ es cóncava hacia arriba y localmente la superficie de Beltrami es del tipo de "silla de montar", es decir en cada punto p la superficie está por ambos lados del plano tangente T_PB, por lo tanto $K < 0$.

§7 Constantes de Bloch y de Landau

Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función no constante.

Definición 2.7.1. . El *número de Bloch* $b(f)$ se define como

$$b(f) = \sup\left\{ r > 0 : \text{ existe } \Omega_1 \subset \Omega, \text{ tal que } f : \Omega_1 \longrightarrow B(a,r), f|_{\Omega_1} \text{ es biyectiva } \right\}.$$

.

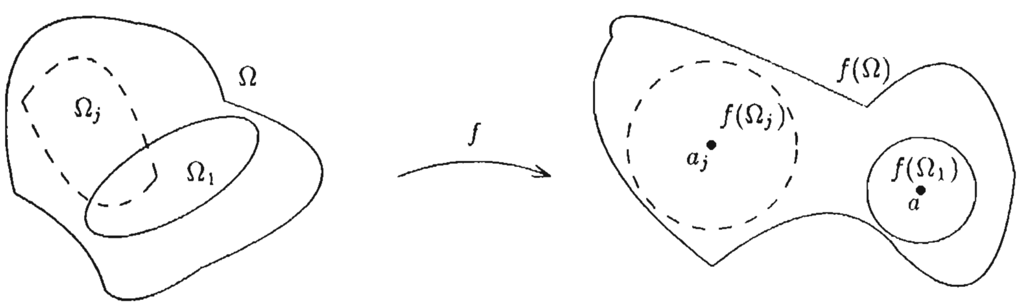


fig.21

En otras palabras $b(f)$ es el radio del disco $B(a,r)$ más grande que se puede inscribir en $f(\Omega)$ con la propiedad de que existe un $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que $f : \Omega_1 \longrightarrow B(a,r)$ es univalente y sobre.

Definición 2.7.2. El *número de Landau* $l(f)$ se define como

$$l(f) = \sup\{r > 0 : f(\Omega) \supset B(a,r)\}.$$

Sea

$$S' = \{f \in H(\mathbb{D}) : f'(0) = 1\},$$

donde $H(\mathbb{D})$ denota el conjunto de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Luego las *constantes de Bloch* β *y de Landau* L para la familia S' se definen así:

Definición 2.7.3.

$$\beta = \inf_{f \in S'} b(f),$$

$$L = \inf_{f \in S'} l(f). \tag{7.1}$$

β es el radio de la bola más grande B_β contenida en cualquier $f(\mathbb{D})$, $f \in S'$ con la propiedad de que para cada $f \in S'$ existe un $\Omega_f \subset \Omega$, tal que $f : \Omega_f \longrightarrow B_\beta$ es biyectiva. L es el radio de la bola más grande contenida en cualquier $f(\mathbb{D})$, $f \in S.'$ Es evidente que $b(f) \leq l(f), f \in S'$ luego $\beta \leq L$. El teorema de Bloch afirma que para la familia S' la constante de Bloch $\beta > 0$, inclusive se prueba que $\beta > 0.21$, $[He]$. E. Landau (1929) probó que $\beta > 0.396$; Grunsky y Ahlfors (1937) probaron que $\beta < 0.472$. L.A. Ahlfors en [A] probó que para la familia S' se tiene $\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ y $L \geq \frac{1}{2}$. Los resultados más precisos hasta el momento son [M6]:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \beta \leq \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} < 0.4718...$$

$$\frac{1}{2} < L \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})} < 0.5433...$$

Se puede introducir las constantes de Bloch y de Landau para otras familias de funciones. Consideremos las siguientes familias de funciones en el círculo unitario $\mathbb{D}$:

$$N = \{f \in H(\mathbb{D}) \,:\, f(0) = 0, f'(0) = 1\},$$

clase de funciones normalizadas.

$$S = \{f \in N \,:\, f \text{ es univalente}\},$$

clase de funciones univalentes.

$$S^* = \{f \in S \,:\, f(\mathbb{D}) \text{ es estelar respecto al origen}\},$$

clase de funciones estelares.

$$C = \{f \in S \,:\, f(\mathbb{D}) \text{ es convexo }\},$$

clase de funciones convexas.

Las relaciones entre estos conjuntos son las siguientes:

$$C \subset S^* \subset S \subset N \subset S'.$$

Se tiene [M6] que

$$L_C \leq \frac{\pi}{4},$$

$$L_S = \frac{1}{4}.$$

Veamos, por ejemplo, que $L_C \leq \frac{\pi}{4}$. Consideremos la función

$$h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto h(z) = \frac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z}, \; |z| < 1.$$

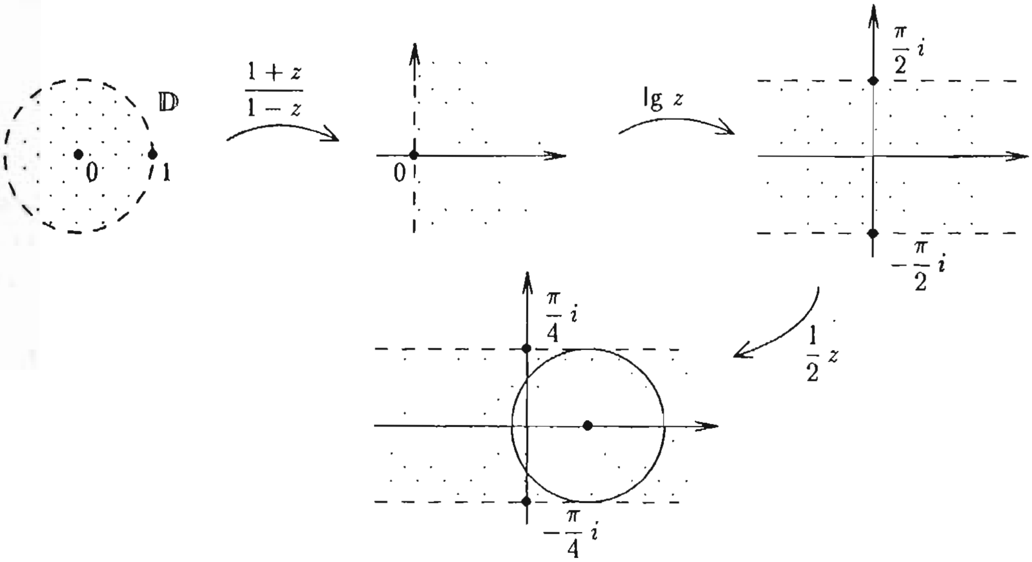


fig.22

Luego $h : \mathbb{D} \longrightarrow \{u+iv \,:\, |u| < \infty, |v| < \frac{\pi}{4}\}$, (fig.22) . Por lo tanto $h(\mathbb{D})$ contiene una bola de radio $\frac{\pi}{4}$ y $l(h) = \frac{\pi}{4}$. Como $h \in C$, entonces $L_C \leq \frac{\pi}{4}$.

CAPITULO III

METRICA HIPERBOLICA

En los capítulos anteriores hemos presentado el concepto de la métrica riemanniana desde el punto de vista clásico utilizando el lenguaje de la geometría diferencial en $\mathbb{R}^n$. Este lenguaje se vuelve mucho más simple y fácil de manejar en la descripción de la métrica riemanniana, las geodésicas y la curvatura en el plano complejo $\mathbb{C}$, puesto que todos estos conceptos se pueden expresar como funciones de una variable compleja.

§1. Longitud de vectores y curvas en la métrica hiperbólica.

1. Longitud de vectores en la métrica hiperbólica. Consideremos la métrica hiperbólica en el disco unitario $\mathbb{D}$ ((1.10), cap.II):

$$ds = \frac{1}{1-|z|^2}\,|dz|. \tag{1.1}$$

Aquí $|dz|$ denota la longitud euclidiana del vector dz; ds es la longitud del mismo vector en la métrica hiperbólica. Calculemos las longitudes de vectores tangentes en diferentes puntos de $\mathbb{D}$: Sea dz un vector en el punto $z = 0$. Luego su longitud hiperbólica es

$$ds = \frac{1}{1-|z|^2}\,|dz| = |dz|.$$

Si $z = 0 - \frac{1}{2}\,i$, entonces

$$ds = \frac{1}{1-|0-\frac{1}{2}\,i|^2}|dz| = \frac{4}{3}|dz|.$$

Si $z = 0 + 0.9i$, entonces

$$ds = \frac{1}{1-|0.9i|^2}\,|dz| = \frac{1}{0.19}\,|dz| = 5.2631578|dz|.$$

Concluimos que la longitud de vectores tangentes varía de punto a punto. Para obtener la longitud hiperbólica de un vector de longitud euclidiana $|dz|$ hay que multiplicar esta longitud $|dz|$ por el valor de una función $\lambda(z)$ en el punto de la aplicación del vector; en el caso nuestro $\lambda(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$. De esta manera los vectores no solo tienen magnitud y dirección sino también posición. Veamos como aparecen en la práctica los vectores con posición.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos la métrica hiperbólica en el círculo unitario $\mathbb{D}$ y dos curvas en $\mathbb{D}$: $\eta(t) = t$, $\mu(t) = \frac{1}{2} - it$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Luego la longitud hiperbólica del vector tangente a la curva η en un punto $\eta(t)$ denotado por $\|\dot{\eta}(t)\|^h_{\eta(t)}$ es

$$\|\dot{\eta}(t)\|^h_{\eta(t)} = \frac{1}{1-|\eta(t)|^2}\,|\dot{\eta}(t)|,$$

donde $|\dot{\eta}(t)|$ es la longitud euclidiana del vector tangente. Como $\dot{\eta}(t) = 1$, entonces $\|\dot{\eta}(t)\|^h_{\eta(t)} = \dfrac{1}{1-t^2}$. Para la curva μ tenemos

$$\|\dot{\mu}(t)\|^h_{\mu(t)} = \frac{1}{\frac{3}{4}-t^2}.$$

Lo anterior se puede generalizar de la siguiente manera:

Definición 3.1.1. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Una *métrica en* Ω es el diferencial

$$\lambda_\Omega(z)\,|dz|, \tag{1.2}$$

donde $\lambda_\Omega(z)$ (o simplemente $\lambda(z)$) es una función continua , $\lambda(z) \geq 0$ en Ω, tal que $\lambda(z)$ es de clase C^2 en $\{z \in \Omega : \lambda(z) > 0\}$. $\lambda(z)$ se llama *densidad de la métrica* $\lambda(z)|dz|$. Si $z \in \Omega$ y ξ es un vector en $\mathbb{C}$, entonces la longitud de ξ en z se define como

$$\|\xi\|^\lambda_z := \lambda(z)|\xi|,$$

donde $|\xi|$ denota la longitud euclidiana del vector ξ.

Observaciones.

1. Usualmente vamos a considerar las métricas estrictamente positivas, o sea $\lambda(z) > 0$.
2. La métrica $\lambda(z)|dz|$ es una métrica conforme (ver definición 0.3.1, cap 0).
3. Si Ω es un dominio en $\mathbb{C}$ y $\lambda(z) \equiv 1$ para todo $z \in \Omega$, entonces para $z \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}$ $\|\xi\|^\lambda_z = |\xi|$, que es la longitud euclidiana usual.
4. Para definir una métrica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es suficiente definir su función densidad λ_Ω.

Definición 3.1.2. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $\lambda_\Omega(z)|dz|$ una métrica en Ω y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ una curva regular. Entonces la longitud de la curva γ en la métrica dada es

$$l_\lambda(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^\lambda_{\gamma(t)}\,dt = \int_\gamma \lambda_\Omega(z)|dz|. \tag{1.3}$$

Ejemplo 3.1.2. Veamos que los puntos de la frontera del círculo unitario son los puntos infinitamente lejanos en la métrica hiperbólica. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y $\gamma(t) = t$, $0 \leq t \leq 1 - \epsilon$ una curva en $\mathbb{D}$. Luego

$$l_\lambda(\gamma) = \int_0^{1-\epsilon} \|\dot{\gamma}(t)\|^{\lambda}_{\gamma(t)}\, dt = \int_0^{1-\epsilon} \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt$$
$$= \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \lg\left[\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\right] \underset{\epsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Si la métrica definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es completa, entonces siempre existe una curva de longitud minimal, llamada *geodésica* que une dos puntos cualesquiera del dominio. En general, dado un dominio $\Omega \subset C$ la distancia entre dos puntos P y Q de Ω en la métrica $\lambda(z)|dz|$ dada se define como

$$d_\lambda(P, Q) = \inf\{\, l_\lambda(\gamma) \;:\; \gamma \in C_\Omega(P, Q)\}, \tag{1.4}$$

donde $C_\Omega(P, Q)$ es la colección de todas las curvas γ continuamente diferenciables a trozos, $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$, tales que $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$. Claramente $d_\lambda(P, Q)$ satisface los tres axiomas de una métrica en el sentido del análisis clásico.

2. Métrica en un dominio hiperbólico.

Definición 3.1.3. Un dominio Ω en $\mathbb{C}$ se llama *dominio hiperbólico* si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene por lo menos dos puntos.

Por el teorema de Riemann cada dominio hiperbólico simplemente conexo del plano complejo $\mathbb{C}$ es conformemente equivalente al círculo unitario. Este resultado sugiere la siguiente pregunta: conociendo la métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$, como se puede introducir una métrica en cualquier dominio hiperbólico simplemente conexo del plano complejo $\mathbb{C}$?

La definición que presentaremos a continuación responde esa pregunta en una forma más general.

Definición 3.1.4. Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una función continuamente diferenciable que puede tener solo ceros aislados. Supongamos que en Ω_2 está definida una métrica λ_{Ω_2}. Definamos la métrica λ_{Ω_1} en Ω_1 como el *pullback* $f^*(\lambda_{\Omega_2}(z))$ de la métrica λ_{Ω_2} bajo la transformación f de la siguiente manera:

$$\lambda_{\Omega_1}(z) := f^*\lambda_{\Omega_2}(z) = \lambda_{\Omega_2}(f(z)) \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|. \tag{1.5}$$

Nota. Si en la definición anterior $\Omega_2 = \mathbb{D}$ y Ω_1 es un dominio hiperbólico, entonces λ_{Ω_1} se llama *métrica hiperbólica en* Ω_1.

Ejemplo 3.1.3.

a) La densidad de la métrica hiperbólica de $\mathbb{D}$ es

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

b) Sean $\Omega_2 = \mathbb{D}$, Ω_1 un dominio hiperbólico simplemente conexo, $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{D}$ una aplicación conforme. Luego

$$\lambda_{\Omega_1}(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(f(z)) \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}. \tag{1.6}$$

c) Sean $\Omega_1 = H^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\}$ y

$$\begin{aligned} f : H^+ &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto f(z) &= \frac{1+iz}{1-iz}. \end{aligned}$$

Tenemos

$$|f'(z)| = \left| \frac{2i}{(1-iz)^2} \right| = \frac{2}{|1-iz|^2}.$$

Calculando $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}$ obtenemos que la densidad de la métrica hiperbólica de H^+ es

$$\lambda_{H^+}(z) = \frac{1}{2Im\, z}.$$

3. Isometrías. Ahora podemos definir las isometrías (ver §3, cap.0) en una forma más general de la siguiente manera:

Definición 3.1.5. Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios de $\mathbb{C}$ con métricas λ_1, λ_2 respectivamente y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una función biyectiva de clase C^1. Si

$$f^*\lambda_2(z) = \lambda_1(z) \qquad \text{para todo } z \in \Omega_1,$$

entonces f se llama *isometría* entre las parejas (Ω_1, λ_1) y (Ω_2, λ_2).

Las isometrías preservan las longitudes de curvas y la distancia entre puntos ([Kr], p. 48-53).

§2 Propiedades de la densidad de la métrica hiperbólica

En esta sección presentaremos algunas propiedades de la métrica hiperbólica; para la demostración necesitaremos el lema de Schwarz, el cual afirma que *si f es una función holomorfa definida en $\mathbb{D}$ con $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$ $\quad |f(z)| \leq |z|$; si la igualdad se tiene en un punto $z \in \mathbb{D}$, $\quad z \neq 0$, entonces la igualdad se tiene en todo $\mathbb{D}$ y $f(z) \equiv \exp(i\alpha)\, z$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.*

Proposición 3.2.1. *Sean Ω_1, Ω dominios hiperbólicos simplemente conexos de $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega$, $z \in \Omega_1$. Entonces*

$$\lambda_\Omega(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z).$$

Demostración. Sean $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$, $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{D}$ funciones conformes, tales que $f(z) = f_1(z) = 0$. Luego $\lambda_\Omega(z) = |f'(z)|$, $\lambda_{\Omega_1}(z) = |f_1'(z)|$. Sea $h = f \circ f_1^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, ($f_1$ es localmente univalente), $h(0) = 0$. Por el lema de Schwarz $|h'(0)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, luego

$$\begin{aligned} |h'(0)| &= |f'(f_1^{-1}(0))(f_1^{-1})'(0)| \\ &= |f'(z)|\,|(f_1^{-1})'(0)| = \frac{|f'(z)|}{|f_1'(z)|} \leq 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto $|f'(z)| \leq |f_1'(z)|$. □

Ahora encontremos cotas superior e inferior para $\lambda_\Omega(z)$ en términos de la distancia euclidiana $d(z, \partial\Omega)$, donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω. Para ello necesitamos el teorema de 1/4 de Koebe, el cual afirma que *si Ω es un dominio simplemente conexo que no contiene ∞, y $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ es una aplicación conforme, tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(z) \neq \infty$, para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces*

$$d(0, \partial f(\mathbb{D})) \geq \frac{1}{4}.$$

Proposición 3.2.2. *Sea Ω un dominio hiperbólico simplemente conexo, que no contiene a ∞. Entonces*

$$\frac{1}{4d(z, \partial\Omega)} \leq \lambda_\Omega(z) \leq \frac{1}{d(z, \partial\Omega)}.$$

Demostración. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ una función analítica, $z \in \Omega$, tal que $f(z) = 0$.

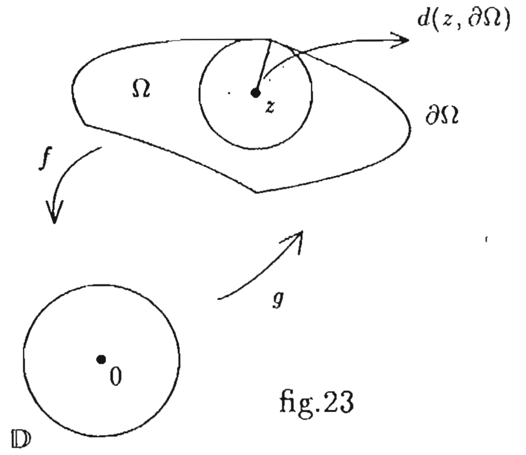


fig.23

Sea

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow B(z, d(z, \partial\Omega)) \subset \Omega$$
$$\zeta \mapsto z + d(z, \partial\Omega)\,\zeta.$$

Consideremos

$$h := f \circ g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D},$$

entonces $h(0) = 0$, (fig.23), h es analítica en $\mathbb{D}$ y por el lema de Schwarz $|h'(0)| \leq 1$, de donde

$$|h'(0)| = |f'(g(0))|\,|g'(0)| \leq 1$$
$$|f'(z)| \cdot d(z, \partial\Omega) \leq 1 \qquad \text{y}$$
$$\lambda_\Omega(z) = |f'(z)| \leq \frac{1}{d(z, \partial\Omega)}.$$

Observamos que en la demostración de la desigualdad derecha no hemos utilizado el hecho de que Ω es simplemente conexo, es decir la desigualdad $\lambda_\Omega(z) \leq \dfrac{1}{d(z, \partial\Omega)}$ se cumple en cualquier dominio hiperbólico.

Para probar la desigualdad izquierda sea $g : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ una función conforme, $g(0) = z$. Definamos

$$h : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\Omega}$$
$$w \mapsto h(w) = \frac{g(w) - z}{g'(0)},$$

entonces $h(0) = 0$, $h'(0) = 1, h$ es conforme en $\mathbb{D}$.

Por el teorema de $1/4$ de Koebe $d(0, \partial h(\mathbb{D})) \geq \dfrac{1}{4}$. Sea $B_z(d(z, \partial\Omega)) \subset \Omega$ la bola de radio $d(z, \partial\Omega)$ con centro en z. La función h es una traslación de Ω seguida por una dilatación con coeficiente $\dfrac{1}{g'(0)}$. Luego la bola $B_z(d(z, \partial\Omega)) \subset \Omega$ se transforma en la bola $B_0 \subset \widehat{\Omega}$ de radio $\dfrac{d(z, \partial\Omega)}{|g'(0)|}$ con centro en 0. Por lo tanto

$$d(0, \partial h(\mathbb{D})) = \frac{d(z, \partial\Omega)}{|g'(0)|} \geq \frac{1}{4}.$$

Como

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{|(g^{-1})'(z)|}{1 - |g^{-1}(z)|^2} = \frac{1}{|g'(0)|},$$

(ejemplo 3.1.3 b)), obtenemos

$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{1}{4\, d(z, \partial\Omega)}. \quad \square$$

A continuación veamos algunos ejemplos de densidad de la métrica hiperbólica para diferentes dominios.

Ejemplos 3.2.1.

a) Sea $\Omega = \mathbb{D}_r = \{w : |w| < r\}$. Luego $\lambda_{\mathbb{D}_r} = \dfrac{r}{r^2 - |w|^2}$. En efecto, sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D}_r \\ z &\mapsto rz = w. \end{aligned}$$

De la fórmula (1.5) obtenemos

$$\lambda_{\mathbb{D}_r}(rz)\,|f'(z)| = \frac{1}{1 - |z|^2},$$

donde $rz = w, z = \dfrac{w}{r}$ y por lo tanto

$$\lambda_{\mathbb{D}_r}(w) = \frac{1}{\left(1 - \left|\dfrac{w}{r}\right|^2\right) r} = \frac{r}{r^2 - |w|^2}.$$

b) Sea $\Omega = \{w : |w - a| < r\}$. Definamos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \\ z &\mapsto rz + a = w. \end{aligned}$$

Cálculos análogos a los del ejemplo anterior dan

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{r}{r^2 - |w - a|^2}.$$

c) Sean $\Omega = \{w = u + iv : |u| < \dfrac{\pi}{2}, v > 0\}$ y

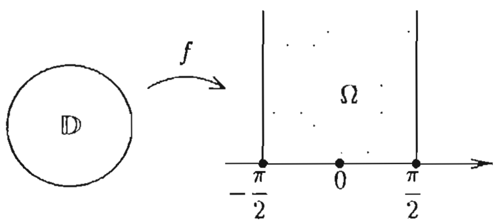


fig.24

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \\ z &\mapsto \operatorname{arcsen}\left(i\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\right]\right) = w, \end{aligned}$$

(fig.24). Luego

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{2|1 - i \operatorname{sen} w|\,|\cos w|}{Im(\operatorname{sen} w)}.$$

§3 Curvatura de la métrica hiperbólica

1. Lema de Schwarz-Ahlfors. En el capítulo II hemos definido la curvatura de una métrica g ((6.9), cap.II) dada en forma conforme por $dl^2 = g(z,\bar{z})|dz|^2$. Si la métrica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ está dada en la forma $dl = \lambda(z)|dz|$ (definición 3.1.1, (1.2)), entonces la curvatura de la métrica $\lambda(z)|dz|$ en el punto $z \in \Omega$ es

$$K = K_\Omega(z,\lambda) = -\frac{\triangle \lg \lambda(z)}{\lambda^2(z)}. \tag{3.1}$$

Como $\lambda(z)$ es de clase C^2 en Ω la curvatura está bién definida.

Una de las propiedades importantes de K es su invarianza bajo las transformaciones conformes.

Proposición 3.3.1. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una transformación conforme (en particular, $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in \Omega_1$). Si $\lambda(z)|dz|$ es una métrica en Ω_2, entonces*

$$K_{\Omega_1}(z, f^*\lambda) = K_{\Omega_2}(f(z), \lambda),$$

para todo $z \in \Omega_1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} K_{\Omega_1}(z, f^*\lambda) &= -\frac{\triangle \lg \left[\, (\lambda(f(z))\, |f'(z)|\,\right]}{[\lambda(f(z))]^2 |f'(z)|^2} \\ &= -\frac{\triangle[\lg(\lambda(f(z))] + \triangle[\lg |f'(z)|]}{[\lambda(f(z))]^2\, |f'(z)|^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tenemos $\triangle \lg |w| = \frac{1}{2} \triangle \lg w\bar{w} = 2\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}}(\lg w\bar{w}) = 0$. Luego $\triangle \lg |f'(z)| = 0$. Ahora $\triangle \lg(\lambda \circ f) = (\triangle \lg \lambda)(f)|f'(z)|^2$, puesto que f es holomorfa y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Por lo tanto en (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} K_{\Omega_1}(z, f^*\lambda) &= -\frac{(\triangle \lg \lambda)(f)\; |f'(z)|^2}{(\lambda \circ f)^2 |f'(z)|^2} \\ &= -\frac{(\triangle \lg \lambda)(f)}{(\lambda \circ f)^2} = K_{\Omega_2}(f(z), \lambda). \quad \square \end{aligned}$$

Nota. El resultado de la proposición anterior se tiene para cualquier $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ holomorfa (no necesariamente biyectiva) en los puntos de Ω_1 , tales que $f'(z) \neq 0$ y $\lambda(f(z)) \neq 0$.

Resulta que el lema de Schwarz (ver §2) es una desigualdad en términos de la curvatura. Y fue Ahlfors quién primero se dio cuenta de eso. La siguiente proposición es la versión de Ahlfors del lema de Schwarz:

Proposición 3.3.2. *Sea $\lambda_{\mathbb{D}}$ la métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$. Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y σ una métrica en Ω. Supongamos que para todo $z \in \Omega$ la curvatura $K(z,\sigma) \leq -4$. Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ es una función holomorfa, entonces*

$$f^*\sigma(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Sea $0 < r < 1$. Consideremos $D_r = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < r\}$ y la métrica λ_{D_r} (ejemplo 3.2.1, a)). Luego $K(z, \lambda_{D_r}) = -4$, $z \in D_r$ y λ_{D_r} es invariante bajo transformaciones conformes del círculo D_r. Definamos

$$v = \frac{f^*\sigma}{\lambda_{D_r}}.$$

Observamos que v es nonegativa y continua en D_r ; $f^*\sigma = \sigma(f(z))\,|f'(z)|$ es acotada superiormente en $\overline{D}_r \subset\subset \mathbb{D}$, cuando $\lambda_{D_r} \longrightarrow \infty$. Luego $v \longrightarrow 0$, cuando $|z| \longrightarrow r$. Por lo tanto v alcanza su máximo valor M en algún punto $a \in D_r$. Veamos que $M \leq 1$, entonces $v \leq 1$ en D_r. Tomando el límite cuando $r \longrightarrow 1^-$ en v se obtiene el resultado.

Ahora, si $f^*\sigma(a) = 0$, entonces $v \equiv 0$. Podemos suponer que $f^*\sigma > 0$. Luego la curvatura $K(a, f^*\sigma)$ está definida en a, (ver la nota después de la proposición 3.3.1). Por hipótesis $K(a, f^*\sigma) = K(z,\sigma) = K(f(a),\sigma) \leq -4$, $z = f(a)$. Como lg v tiene máximo en a, $(\lg v)_{xx}(a) \leq 0$, $(\lg v)_{yy}(a) \leq 0$ (criterio de máximum de una función de dos variables) y

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta \lg v(a) &= \Delta \lg f^*\sigma(a) - \Delta \lg \lambda_{D_r}(a) \\ &= -K(a, f^*\sigma)[f^*\sigma(a)]^2 + K(a, \lambda_{D_r})[\lambda_{D_r}(a)]^2 \\ &\geq 4[f^*\sigma(a)]^2 - 4[\lambda_{D_r}(a)]^2. \end{aligned}$$

Luego $\dfrac{f^*\sigma(a)}{\lambda_{D_r}(a)} \leq 1$, es decir $M \leq 1$. □

El lema de Schwarz se sigue del lema de Schwarz-Ahlfors: Sea $\Omega = \mathbb{D}$, $\sigma = \lambda_{\mathbb{D}}$. Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa, tal que $f(0) = 0$. Luego σ satisface las hipótesis de la proposición anterior y

$$f^*\sigma(0) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(0).$$

Por lo tanto $f^*\sigma(0) = \sigma(f(0))\,|f'(0)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(0)$. Pero $\sigma(f(0)) = \lambda_{\mathbb{D}}(f(0)) = \dfrac{1}{1 - |f(0)|^2} = 1$. Luego $|f'(0)| \leq 1$.

El siguiente corolario es evidente:

Corolario 3.3.1. *Sean $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorfa y $\lambda_{\mathbb{D}}$ la métrica hiperbólica. Entonces para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene*

$$f^*\lambda_{\mathbb{D}}(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

2. Principio de la métrica hiperbólica. El lema anterior está relacionado con el principio de la métrica hiperbólica, que permite estimar la métrica en cualquier dominio hiperbólico. Para la formulación del principio de la métrica hiperbólica necesitamos algunos resultados de la teoría de recubrimientos. La información más detallada se encuentra en [F], [L],[M6].

Definición 3.3.1. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación continua. Sea $x \in X$. El conjunto $p^{-1}(x)$ se llama *fibrado de p sobre x*. Si $y \in p^{-1}(x)$, decimos que *y yace sobre x*. Si $p : Y \longrightarrow X$ y $q : Z \longrightarrow X$ son aplicaciones continuas, entonces decimos que la aplicación $f : Y \longrightarrow Z$ *preserva el fibrado* si $p = q \circ f$. (Esto significa que $y \in Y$, que yace sobre x se proyecta en el punto z que también yace sobre x). Un subconjunto A de un espacio topológico se llama *discreto*, si cada punto $a \in A$ tiene una vecindad V, tal que $V \cap A = \{a\}$. La aplicación $p : Y \longrightarrow X$ se llama *discreta* si el fibrado $p^{-1}(x)$ de cada punto $x \in X$ es un conjunto discreto.

Definición 3.3.2. Sean X y Y espacios topológicos. Una aplicación $p : Y \longrightarrow X$ se llama *proyección de recubrimiento (ó recubrimiento de X)* si cada $x \in X$ tiene una vecindad U, tal que la preimagen $p^{-1}(U)$ puede ser representado como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los V_j, $j \in J$ son conjuntos abiertos disjuntos en Y y todas las aplicaciones $p : V_j \longrightarrow U$ son homeomorfismos. En particular, p es un homeomorfismo local. Y se llama *espacio de recubrimiento de X*.

Ejemplo 3.3.1.

La aplicación $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es un recubrimiento de $\mathbb{C}^*$.

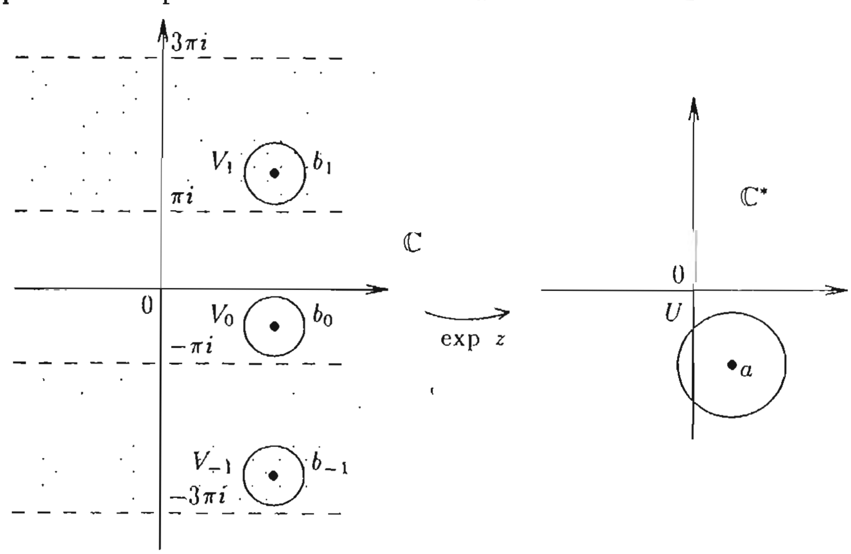


fig.25

La aplicación exp mapea cualquier franja horizontal de ancho 2π en $\mathbb{C}^*$ y $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es un homeomorfismo local. Sean $a \in \mathbb{C}^*$ y $b \in \mathbb{C}$, tales que $\exp(b) = a$. Luego existen vecindades U de a y V_0 de b, tales que $\exp : V_0 \longrightarrow U$ es un homeomorfismo, (por ejemplo, si el diametro de $V_0 < 2\pi$). Entonces todas las vecindades V_j son disjuntas.

Entre todos los espacios de recubrimiento de una variedad existe el más "grande" llamado el espacio de recubrimiento universal.

Definición 3.3.3. Sean X y Y espacios topológicos conexos y $p : Y \longrightarrow X$ una proyección de recubrimiento. Entonces $p : Y \longrightarrow X$ se llama *recubrimiento universal de* X si p satisface la siguiente propiedad universal : para cada proyección de recubrimiento $q : Z \longrightarrow X$, donde Z es un espacio topológico conexo, y cada $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe exactamente una aplicacción continua $f : Y \longrightarrow Z$, que preserva el fibrado, tal que $f(y_0) = z_0$. Y se llama el *espacio de recubrimiento universal.*

Un espacio topológico conexo X tiene, salvo isomorfismos, a lo sumo un espacio de recubrimiento universal.

Supongamos que X, Y son variedades conexas, Y es simplemente conexo y $p : Y \longrightarrow X$ es una proyección de recubrimiento. Entonces p es el recubrimiento universal de X. Para una variedad conexa siempre existe un recubrimiento universal. Cualquier dominio hiperbólico tiene el disco unitario como su espacio de recubrimiento universal.

Principio de la métrica hiperbólica. *Supongamos que f es analítica en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$, donde Ω es un dominio hiperbólico en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\lambda_\Omega(f(z))\,|f'(z)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{D} \tag{3.1}$$

con la igualdad si y solo si f es una proyección de recubrimiento de $\mathbb{D}$ sobre Ω .

Ejemplo 3.3.2.

a) Consideremos $\Omega = \mathbb{D}'_r = \{w : 0 < |w| < r\}$ y una proyección de recubrimiento

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$
$$z \mapsto r \exp\left[\frac{z+1}{z-1}\right] = w.$$

Como Ω es un dominio hiperbólico obtenemos

$$\lambda_{\mathbb{D}'_r}(w)\left| r \exp\left[\frac{z+1}{z-1}\right] \cdot \frac{-2}{(z-1)^2}\right| = \frac{1}{1-|z|^2},$$

de donde

$$\lambda_{\mathbb{D}'_r}(w) = \frac{\left| \dfrac{1+\lg \dfrac{w}{r}}{1-\lg \dfrac{w}{r}} + 1 \right|^2}{\left(1 - \left|\dfrac{1+\lg \dfrac{w}{r}}{1-\lg \dfrac{w}{r}}\right|^2\right) |2\,w|}$$

$$= \frac{2}{|w|\,[4\lg r - 2\lg |w|^2]} = \frac{2}{4\,|w|\left[\lg \dfrac{r}{|w|}\right]},$$

o sea

$$\lambda_{\mathbb{D}'_r}(w) = \frac{1}{2|w|\left(\lg \dfrac{r}{|w|}\right)}.$$

b) Análogamente, si $\Omega = E_r = \{w : r < |w| < \infty\}$ y

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \\ z &\longmapsto r\exp\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = w, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\lambda_{E_r}(w) = \frac{1}{2|w|\lg\left(\dfrac{|w|}{r}\right)}.$$

c) Sean $\Omega = \{w : re^{-m} < |w| < re^{m}\}$ un anillo y

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \\ z &\longmapsto r\exp\left[\frac{4m}{\pi}\,\mathrm{arctg} z\right] = w, \end{aligned}$$

f es una proyección de recubrimiento con $f^{-1}(0) = 0$. Luego

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{\pi}{4m}\,\frac{\left|1 + \left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4m}\lg \dfrac{w}{r}\right)\right)^2\right|}{|w|\left(1 - \left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4m}\lg \dfrac{w}{r}\right)\right|^2\right)}.$$

En particular, si $w = r$, entonces

$$\lambda_\Omega(r) = \frac{\pi}{4\,m\,r}.$$

§4 Estimaciones para la métrica hiperbólica en dominios hiperbólicos

1. Cota inferior para la métrica hiperbólica de $D'_r = \{z : 0 < |z-a| < R\}$. Sea Ω un dominio hiperbólico en $\mathbb{C}$. En general no existe una fórmula explícita para la densidad $\lambda_\Omega(z)$ de la métrica hiperbólica en Ω , y sólo es posible estimarla. En el artículo $[M2]$ D.Minda encuentra estimaciones para la densidad $\lambda_{D'_r}(z)$ en términos de la distancia euclidiana $\delta_\Omega(z) = \inf\{|z-w| : w \notin \Omega\}$. Del ejemplo 3.3.2,parte a) tenemos que

$$\lambda_{D'_r}(z) = \frac{1}{2|z-a|\left(\lg \dfrac{R}{|z-a|}\right)},$$

entonces para z tales que $0 < |z-a| \leq \dfrac{R}{2}$ $\quad \delta_{D'_r}(z) = |z-a|$ y por lo tanto

$$\lambda_{D'_r}(z) = \frac{1}{2\delta_{D'_r}(z)\lg(R/\delta_{D'_r}(z))},$$

donde z está en una vecindad de a.

Esto muestra que cuando $z \longrightarrow a, \quad \lambda_{D'_r}(z)\,\delta_{D'_r}(z) \longrightarrow 0$ y por lo tanto no existe una cota inferior positiva para $\lambda_\Omega(z)\,\delta_\Omega(z)$.

Lo anterior sugiere que en el caso general de un dominio hiperbólico se puede buscar una cota inferior de la forma

$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{1}{2\delta_\Omega(z)\lg(b/\delta_\Omega(z))}, \tag{4.1}$$

donde b es una constante positiva. Tal acotamiento está en forma implícita en el método de Ahlfors para determinar una cota inferior para la constante de Landau.

Ahora sean

$$A = A(\Omega) = \sup_{z\in\Omega} \delta_\Omega(z)$$
$$\Lambda = \Lambda(\Omega) = \inf_{z\in\Omega} \lambda_\Omega(z).$$

Consideremos sólo las constantes $b \geq A$, lo que asegura que la cota inferior en (4.1) es positiva en Ω. Como la parte derecha de (4.1) es una función decreciente de b en el intervalo (A, ∞) , sea

$$b(\Omega) = \inf\{b : b > A, \text{ tal que, (4.1) se cumple para todo } z \in \Omega\}.$$

Si no existe una cota inferior de la forma (4.1), definamos $b(\Omega) = \infty$.

Para la demostración del teorema 3.4.1 necesitaremos el concepto de la métrica ultrahiperbólica, además del lema de Ahlfors, que es una generalización del lema de Schwarz.

Definición 3.4.1. Sea Ω un dominio hiperbólico. Una métrica $\rho(z)|dz|$ en Ω semicontinua por encima en Ω se llama *ultrahiperbólica* si para cada punto $p \in \Omega$, donde $\rho(z)|dz|$ no se anula, existe una métrica $\rho_p(z)|dz|$ definida y de clase C^2 en una vecindad U de p, tal que la curvatura $K(q; \rho_p(z)|dz|) \leq -4$ para $q \in U$ y $\rho_p(z)|dz| \leq \rho(z)|dz|$ en U con igualdad en p. La métrica $\rho_p(z)|dz|$ se llama *métrica-soporte*.[A],[M1],[M2].

El lema de Ahlfors dice que si $\rho(z)|dz|$ es una métrica ultrahiperbólica en un dominio hiperbólico Ω , entonces $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$, donde λ_Ω es la métrica hiperbólica en Ω con la curvatura gaussiana igual a -4 [M6].

Teorema 3.4.1. *Sea Ω un dominio hiperbólico en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$e^{1/2} A(\Omega) \leq b(\Omega) \leq e\, A(\Omega).$$

Demostración. Probemos primero la desigualdad izquierda. Podemos suponer que $b(\Omega) < \infty$. Luego (4.1) se cumple para $b = b(\Omega)$. Como $\lambda_\Omega(z) \leq \dfrac{1}{\delta_\Omega(z)}$ (proposición 3.2.2) para cualquier dominio hiperbólico en $\mathbb{C}$, luego de (4.1) se obtiene

$$\frac{1}{2\lg\Big(b(\Omega)/\delta_\Omega(z)\Big)} \leq 1 \qquad \text{ó}$$

$e^{1/2}\, \delta_\Omega(z) \leq b(\Omega)$, lo que implica que $e^{1/2} A(\Omega) \leq b(\Omega)$.

La demostración de la desigualdad derecha para $b(\Omega)$ la hacemos bajo la suposición de que $A = A(\Omega) < \infty$. Primero consideremos el caso cuando $\delta_\Omega(z) < A$, para todo $z \in \Omega$. Definamos

$$\rho(z)|dz| = \frac{|dz|}{2\,\delta_\Omega(z)\, \lg\Big(eA/\delta_\Omega(z)\Big)}.$$

Veamos que $\rho(z)|dz|$ es una métrica ultrahiperbóbica en Ω. La desigualdad $\rho(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ se sigue del lema de Ahlfors (proposición 3.3.2). Como $\delta_\Omega(z)$ es continua, entonces $\rho(z)|dz|$ es una métrica continua positiva en Ω. Para probar que $\rho(z)|dz|$ es una métrica ultrahiperbólica es suficiente presentar la métrica-soporte en cada punto $z_0 \in \Omega$. Esta métrica-soporte $\lambda_0(z)|dz|$ se define de la manera siguente: Sea $z_0 \in \Omega$. Escojamos $a \in \partial\Omega$, tal que $|z_0 - a| = \delta_\Omega(z_0)$. Luego $\delta_\Omega(z) \leq |z - a| < A$ para todo $z \in U_{z_0}$, con la igualdad en z_0. Definamos $\lambda_0(z)|dz|$ como la métrica hiperbólica de $\{z : 0 < |z - a| < eA\}$ o sea

$$\lambda_0(z)|dz| = \frac{|dz|}{2|z-a|\lg\Big(eA/|z-a|\Big)}. \tag{4.2}$$

Consideremos la función
$$h(t) = \frac{1}{2t\,\lg(eA/t)}.$$
Como h es decreciente en $(0, A]$ y creciente en $[A, eA)$, la desigualdad $\delta_\Omega(z) \leq |z - a| < A$ para $z \in U_{z_0}$ implica $\lambda_0(z) \leq \rho(z)$, $z \in U_{z_0}$ con igualdad en z_0. Puesto que la curvatura de la métrica hiperbólica (4.2) es -4, $\lambda_0(z)|dz|$ es una métrica-soporte para $\rho(z)|dz|$ en z_0. Luego por el lema de Ahlfors
$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{1}{2\delta_\Omega(z)\lg\left(eA/\delta_\Omega(z)\right)},$$
(es decir se tiene la fórmula (4.1) con $b = eA$). Luego en el caso de $\delta_\Omega(z) < A$ se cumple que $b(\Omega) \leq eA$, para todo $z \in \Omega$.

En el caso general,supongamos que $\delta_\Omega(z) = A$; reemplacemos A por $A_n = A + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, de donde $b(\Omega) \leq eA_n$; tomando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ obtenemos que $b(\Omega) \leq eA$. □

2. Estimaciones para $\Lambda(\Omega)$. Apliquemos el teorema 3.4.1 para obtener unas estimaciones para $\Lambda(\Omega)$ en términos de $A(\Omega)$ [M2].

Teorema 3.4.2. *Sea Ω un dominio hiperbólico de $\mathbb{C}$. Entonces*
$$\frac{1}{2A(\Omega)} \leq \Lambda(\Omega) \leq \frac{1}{A(\Omega)}.$$

Nota. Observamos que este teorema es una generalización de la proposición 3.2.2.

Demostración. La cota superior es inmediata puesto que $\lambda_\Omega(z) \leq \dfrac{1}{\delta_\Omega(z)}$, para cualquier dominio hiperbólico de $\mathbb{C}$ con igualdad en z si y solo si Ω es un disco con centro en z [M2]. Luego $\Lambda(\Omega) \leq \dfrac{1}{A(\Omega)}$. Tambien la igualdad se tiene si Ω es un disco cualquiera.

Para establecer la cota inferior supongamos que $A = A(\Omega) < \infty$ (si $A = \infty$ no hay nada que probar.) Por el teorema 3.4.1
$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{1}{2\,\delta_\Omega(z)\,\lg\left(eA/\delta_\Omega(z)\right)}.$$
Como la función $h(t) = \dfrac{1}{2t\,\lg\left(eA/t\right)}$ alcanza su valor mínimo igual a $\dfrac{1}{2A}$ en el punto $t = A$ en el intervalo $(0, eA)$, tenemos $\lambda_\Omega(z) > \dfrac{1}{2A}$. Luego $\Lambda(\Omega) \geq \dfrac{1}{2A}$. □

La constante mejor posible c tal que $\Lambda(\Omega) \geq \dfrac{c}{A(\Omega)}$ para cualquier dominio hiperbólico $\Omega \subset \mathbb{C}$, está relacionada con la constante de Landau $L = \inf\{A(f(\mathbb{D})) : f$ es analítica en $\mathbb{D}, f'(0) = 1\}$. Sea $w \in \Omega$, $\dfrac{c}{A(\Omega)} \leq \Lambda(\Omega) \leq \lambda_\Omega(w)$. Sean $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega, f \in H(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) = \Omega, f(0) = w, f'(0) = 1$ y $A(\Omega) < \infty$, donde $H(\mathbb{D})$ denota el conjunto de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Por el principio de la métrica hiperbólica

$$\lambda_\Omega(f(z))\,|f'(z)| \leq \lambda_\mathbb{D}(z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Luego $\dfrac{c}{A(\Omega)} \leq \lambda_\Omega(w) = \lambda_\Omega(f(0)) \leq 1$. En consecuencia $c \leq A(\Omega)$ lo que implica $c \leq L$. Del teorema 3.4.2 se obtiene que $L \geq \frac{1}{2}$ y que

$$\frac{1}{2} \leq A(\Omega)\Lambda(\Omega) \leq 1.$$

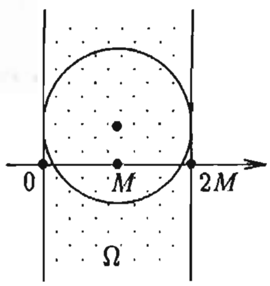
La cota superior 1 es precisa, la cota inferior $\frac{1}{2}$ no lo es. Para los dominios hiperbólicos convexos el resultado es

$$\frac{\pi}{4} \leq A(\Omega)\Lambda(\Omega) \leq 1,$$

[M2] y las cotas son precisas, lo que podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.1.

a) Sea $\Omega = \{w : 0 < Re\, w < 2M, M > 0\}$, Ω es un dominio hiperbólico convexo. Entonces $A(\Omega) = M$. Sea



$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$$
$$z \mapsto f(z) = -i\,\frac{2M}{\pi}\,\lg\left[-i\frac{z-1}{z+1}\right] = w.$$

Luego $z = \dfrac{i - e^{\frac{\pi w}{2M}i}}{i + e^{\frac{\pi w}{2M}i}}$ y como $\lambda_\Omega(w) = \dfrac{1}{(1-|z|^2)\,|f'(z)|}$ obtenemos de

fig.25

$$|f'(z)| = \frac{M\,(e^{-\frac{\pi b}{M}} + 1 + 2e^{-\frac{\pi b}{2M}}\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2M})}{\pi\, e^{-\frac{\pi b}{2M}}},$$

$$1 - |z|^2 = \frac{4\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2M}\, e^{-\frac{\pi b}{2M}}}{e^{-\frac{\pi b}{M}} + 1 + 2(\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2M})e^{-\frac{\pi b}{2M}}},$$

y $\qquad w = a + bi,$

que

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{\pi}{4\,M\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi(Re\,w)}{2M}\right)} \geq \frac{\pi}{4M} = \frac{\pi}{4\,A(\Omega)}.$$

b) Sea $\Omega = \mathbb{D}$ un dominio hiperbólico convexo. Luego $A(\mathbb{D}) = 1$, $\Lambda(\mathbb{D}) = 1$.

§5. Algunas propiedades de $f"/f'$ y la métrica hiperbólica.

Como una aplicación de los resultados del §4 presentaremos unas estimaciones para el cociente $\frac{f"}{f'}$, donde f es una función analítica univalente, en términos de la densidad de la métrica hiperbólica.

Sea $S = \{f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ es univalente}\}$. Es bien sabido que si $f \in S$, entonces [H]

$$\left| z\frac{f"(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \qquad |z| < 1. \tag{5.1}$$

Luego

$$\left|\frac{f"(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{6}{1-|z|^2} = 6\,\lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

En particular, reemplazando $z = 0$ en (5.1) obtenemos

$$\left|\frac{f"(0)}{f'(0)}\right| \leq 4. \tag{5.2}$$

En [O] se generaliza este resultado para un dominio hiperbólico simplemente conexo Ω:

Proposición 3.5.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio hiperbólico simplemente conexo y f una función analítica univalente en Ω. Entonces*

$$\left|\frac{f"(z)}{f'(z)}\right| \leq 8\,\lambda_\Omega(z), \qquad \textit{para todo } z \in \Omega,$$

la desigualdad es precisa.

Demostración. Sea $z \in \Omega$. Consideremos una transformación conforme $g : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$, tal que $g(0) = z$. Denotemos por el momento $T_f = \frac{f"}{f'}$. Luego $f \circ g$ es univalente en $\mathbb{D}$ y

$$T_{f\circ g} = (T_f \circ g)\,g' + T_g. \tag{5.3}$$

Por lo tanto de (5.2), (5.3) obtenemos

$$|g'(0)|\,|T_f(z)| \leq |T_{f\circ g}(0)| + |T_g(0))| \leq 4 + 4 = 8$$

y de (1.6)

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{8}{|g'(0)|} = 8\,\lambda_\Omega(z).$$

Ahora para ver la igualdad sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ y

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

f es analítica y univalente en Ω, $\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = -\dfrac{2}{z}$.

Sea

$$\begin{aligned} g : \mathbb{D} &\longrightarrow \Omega \\ z &\mapsto \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = w, \end{aligned}$$

g es conforme, (fig.27).

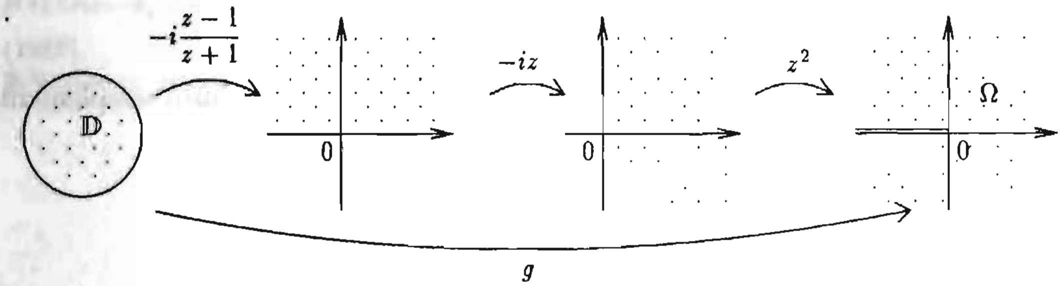


fig.27

Luego $z = \dfrac{1 - w^{1/2}}{1 + w^{1/2}}$, $\qquad |g'(z)| = |w^{1/2}|\,|1 + w^{1/2}|^2$ y

$$\begin{aligned} \lambda_\Omega(w) = \frac{1}{(1 - |z|^2)\,|g'(z)|} &= \frac{1}{2(w^{1/2} + \overline{w}^{1/2})\,|w^{1/2}|} \\ &= \frac{1}{4\,Re\,(w^{1/2})\,|w^{1/2}|}. \end{aligned}$$

Si $w = x \in \mathbb{R}^+$, entonces $\lambda_\Omega(x) = \dfrac{1}{4x}$ y por lo tanto

$$\lambda_\Omega^{-1}(x) \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right| = 4\,x\,\frac{2}{x} = 8, \quad \text{para todo } x > 0. \quad \square$$

Nota. La afirmación hecha en la proposición 3.5.1 para dominios hiperbólicos simplemente conexos no se cumple para dominios multiplemente conexos: Sean $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ y $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Entonces $\lambda_{\mathbb{D}^*}(z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|z|\,\lg\left(\dfrac{1}{|z|}\right)}$ y

$$\begin{aligned}
\Pi(z) &:= \lambda_{\mathbb{D}^*}(z)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = \frac{1}{|z|^2 \lg |z|}\\
\Pi(z) &\longrightarrow -\infty,\ |z| \longrightarrow 0\\
\Pi(z) &\longrightarrow +\infty,\ |z| \longrightarrow 1,
\end{aligned}$$

(aquí la curvatura de $\lambda_{\mathbb{D}^*}$ es -1). Pero para dominios multiplemente conexos se tiene el siguiente resultado: *Para una función analítica y univalente f en un dominio hiperbólico arbitrario $B \subset \mathbb{C}$ existe una constante positiva a tal que*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq a\,\lambda_B(z), \quad \textit{para todo } z \in B$$

si y solo si existe una constante $c > 0$, tal que

$$\lambda_B(z) \geq \frac{c}{d(z,\partial B)},\ z \in B. [O]$$

Observamos que la última desigualdad se tiene para dominios simplemente conexos con $c = \frac{1}{4}$.

BIBLIOGRAFÍA

A]. L.V.Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1938).

P]. A.F.Beardon,Ch.Pommerenke, *The Poincarè metric of plane domains*, London Math. Soc **18** (1978).

F]. B.A.Dubrovin,C.P.Novikov,A.T.Fomenko, *Geometría moderna*, (en ruso), editorial "Nauka", 1979.

F]. O.Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Springer-Verlag, 1991.

H]. D.J.Hallenbeck, T.H.MacGregor, *Linear problems and convexity techniques in geometric function theory*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

Ie]. M.Heins, *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, Holt, Rinehart,Winston, NY, 1962.

K]. W.Klingenberg, *A course in differential geometry*, Springer-Verlag, 1986.

Kr]. S.G.Krantz, *Complex analysis:the geometric viepoint*, The Math. Ass. of America, 1990.

L]. O.Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1986.

I1]. D.Minda, *Bloch constants*, Journal D'analyse math. **41** (1982).

I2]. D.Minda, *Estimates for the hiperbolic metric*, Kodai Math. Jour **8** (1985).

I3]. D.Minda, *Inequalities for the hiperbolic metric and applications to geometric function theory*, (preprint).

I4]. D.Minda, *Lower bounds for the hiperbolic metric in convex regions*, Rocky mountain jour of math (1983).

I5]. D.Minda, *The hiperbolic metric and Bloch constants for spherically convex regions*, Complex Variable **5** (1986).

I6]. D.Minda, *The strong form of Ahlfors' lemma*, Rocky Mountain Journal of Math. **17(3)** (1987).

F]. A.S.Mischenko,A.T.Fomenko, *Geometría diferencial y topología*, (en ruso), Editorial MGU, Moscú, 1980.

O]. B.G.Osgood, *Some properties of* $\frac{f''}{f'}$ *and the Poincarè metric*, Indiana U Math. jour. **31** (1982).

[S]. B.V.Shabat, *Introducción al análisis complejo*, (en ruso), Nauka, Moscú, 1976.