MODELOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS BÁSICAS.

INFORME FINAL DE PRÁCTICA DOCENTE

Por

Jhon Jairo Saldarriaga Ortiz

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora
Rosa Antonia Franco Arbeláez

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Medellín 2012

RESUMEN

En este informe de práctica se estudian las fortalezas, las debilidades y el avance en el aprendizaje de Matemáticas Básicas de un grupo de 34 estudiantes usando métodos de enseñanza basados en la pedagogía constructivista y procesos de colaboración. Inicialmente se realizó una prueba, que consistió en la recolección de datos de carácter académico cuya finalidad era determinar el conocimiento real en el área de todos y de cada uno de los estudiantes que iniciaron el curso, con el fin de diseñar estrategias didácticas y acomodar la práctica docente a la realidad del grupo y de sus singularidades individuales.
Durante el semestre se detectaron fortalezas y debilidades de cada uno de los estudiantes que iniciaron el curso, además se conoció si de verdad la Ingeniería era lo que les gustaba para la vida, los resultados son muy satisfactorios y se muestran en el informe.
Los resultados obtenidos son el producto de una experiencia basada en las teorías de resolución de problemas planteadas por Pólya, en el diseño de preguntas como punto de partida para aprender matemáticas y en los procesos de colaboración para mejorar los esquemas de aprendizaje. Por lo anterior se propone una metodología que explica cómo planear las clases del curso Matemáticas Básicas, haciendo énfasis en los temas de funciones (clases 16 a la 24) del programa del curso.

Palabras clave: Educación, procesos de colaboración, experiencias significativas, funciones, participación, aprendizaje significativo.

ABSTRACT

In this report of practice examines the strengths, weaknesses and progress in learning basic math of a group of 33 students using teaching methods based on constructivist pedagogy and collaborative processes. Initially there was a test, which consisted in gathering academic data which was aimed to reveal the actual knowledge in the area of each and every one of the students who started the course in order to design teaching strategies and accommodate teaching practices to the reality of the group and its individual peculiarities. During the semester, the strengths and weaknesses of all participating student were determined. We also aimed at determining whether an engineering career was really what they liked for life. The results are very satisfactory and are shown in the report.
The results are the product of an experience based on theories of problem solving posed by Pólya in asking questions as a starting point to learn mathematics and collaborative processes to improve learning schemes. Using the above we propose a methodology that explains how to plan the Basic Math classes, emphasizing the themes of functions (classes 16 to 24) of the course syllabus.

Keywords: Education, collaborative processes, meaningful experiences, mathematical functions, participation, meaningful learning.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

La presente monografía se desarrolla con base en la experiencia en el aula obtenida después de la práctica docente a partir de la enseñanza-aprendizaje constructivista (procesos de colaboración y planteamiento de preguntas como punto de partida para aprender matemáticas). Debido a que el programa del curso es vasto, sólo nos centraremos en las clases 16 a 24, todo lo relacionado con las funciones, porque fue en este punto donde se obtuvo mejores resultados en el proceso enseñanza-aprendizaje.

A medida que se avance en este trabajo se detallará cuáles objetivos propuestos inicialmente se cumplieron y la manera como se lograron, y cuáles no. Cabe indicar que no se trata de una metodología que solucione todos los problemas asociados al proceso enseñanza-aprendizaje, pues los resultados no fueron los óptimos por diversos aspectos que los estudiantes de primer semestre traen de las instituciones de secundaria.

¿Qué tipo de educación matemática debe considerarse en la formación de los estudiantes?, ¿Cuál es el papel de las matemáticas en la educación general de las personas?, ¿Existe una metodología mejor que otra para del aprendizaje de las matemáticas?. Éstas son algunas de las preguntas relevantes de todos los profesores de esta área antes de comenzar un curso. La respuesta no es única y no se puede decir que una u otra forma de enseñar es mejor o peor que otra. Los profesores tienen sus propias formas de enseñar, éstas pueden ser: epistemológicas, pedagógicas y didácticas. Muchos colegas creen que para enseñar matemáticas es suficiente tener el dominio de la asignatura y desde este punto de vista lo hacen, sin tener en cuenta otros campos que también deben ser objeto de su dominio, como la pedagogía, la didáctica y la epistemología.

Una de las principales preocupaciones para las directivas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, ha sido el estudio de las causas o factores que inciden en el bajo rendimiento en Matemáticas durante los primeros semestres. Conscientes del bajo nivel de formación matemática que traen los estudiantes del bachillerato, revelado en los exámenes de admisión, se decidió implementar un curso de Matemáticas Básicas que se ofrece para aquellos estudiantes nuevos que no demuestren tener los requisitos en el área.

La asignatura Matemáticas Básicas, de la Escuela de Matemáticas abarca el estudio de conceptos básicos, distribuidos en seis temas que son: geometría elemental, conjuntos y sistemas numéricos, conceptos básicos de álgebra, ecuaciones y desigualdades, funciones reales y trigonometría.

En este sentido, el presente trabajo presenta una propuesta para la enseñanza-aprendizaje de las funciones reales partiendo de las dificultades y fortalezas que muestran los estudiantes matriculados en el segundo semestre del año 2011, con una intensidad de 4 horas semanales, además dos horas semanales de asesoría a los estudiantes que asistían voluntariamente.
Durante el transcurso del semestre se hicieron evidentes varios factores de desmotivación que se tendrán en cuenta en las conclusiones.

Los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de las matemáticas deben encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen diversos significados que cada profesor imprime a sus clases lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con las matemáticas.

Problema: ¿Cómo desarrollar una metodología apropiada que mejore el aprendizaje y los resultados en la temática de funciones en el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín?

Descripción: Los estudiantes de Matemáticas Básicas, a pesar de que alguna vez durante su formación en la educación básica fueron evaluados en los temas programados en el curso, presentan muchas deficiencias y carencias para que el aprendizaje sea verdaderamente significativo desde la pedagogía constructivista, incidiendo en el rendimiento académico de ellos. La propuesta aquí presentada pretende plantear cambios en los siguientes aspectos:

- De acuerdo a lo que plantea la Escuela de Matemáticas para el curso de Matemáticas Básicas, se propone una exposición por parte del profesor de definiciones y teoremas acompañados de ejemplos de aplicación. Para mejorar el conocimiento de los temas, la escuela ofrece talleres semanales que les permite afianzarse en los conceptos aprendidos.

  La pedagogía constructivista pretende dar más importancia a la actividad exploratoria y participativa de los estudiantes fomentando la discusión y el trabajo colaborativo. Asignándole al profesor el rol de presentador de situaciones problema y mediador del proceso con secuencias de actividades diferenciadas según su propósito. Entregándole una actividad más participativa al estudiante y coherentemente con ello, un papel ya no meramente expositivo por parte del profesor.

  Así pues en la línea de una postura constructivista podemos resaltar aportes como el de Pólya (1945) y el de Mason, Burton y Stacey (1987) que proponen los procesos de colaboración y planteamiento de preguntas como punto de partida para aprender matemáticas.

OBJETIVOS

Objetivo general: Dictar el curso de Matemáticas Básicas desde el punto de vista constructivista y de aprendizaje significativo en la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aumentar el gusto por las matemáticas a un grupo de estudiantes de primer semestre de Ingeniería.
- Conocer falencias y actitudes de los estudiantes a través de la pedagogía constructivista.
- Despertar la motivación de los miembros del grupo para favorecer el interés por las matemáticas.
- Orientar el curso de Matemáticas Básicas mediante una enseñanza dirigida hacia el logro de la comprensión.

1. MARCO TEÓRICO

El aprendizaje es un proceso mediante el cual nuevos conocimientos son asimilados dentro de la estructura conceptual del que aprende. El modelo de aprendizaje constructivista indica que el aprendizaje con comprensión real ocurre cuando el que aprende, construye y transforma activamente sus propios significados, y no cuando adquiere y acumula pasivamente conocimientos que se le transmiten. De esta forma, el aprendizaje envuelve una construcción personal que se refleja en los actos futuros del que aprendió, la concepción pedagógica constructivista postula la necesidad de entregar al estudiante herramientas que le permitan crear sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo cual implica que sus ideas se modifiquen y siga aprendiendo. Durante muchos años hemos aceptado una concepción educativa que no distingue entre entrenamiento y enseñanza. Hemos supuesto que el conocimiento es algo que se entrega al estudiante por medio de una práctica preestablecida, utilizando medios como la memorización, la repetición y la realización de tareas rutinarias. La teoría mecanicista es la que se genera mediante un proceso de emisión de información por parte del profesor a los estudiantes, esta forma de enseñar es la que se ha implementado para la enseñanza de matemáticas.

Las clases de ciencias en general, cuando se hacen de una forma repetitiva, se vuelven clases perezosas. Desconocen que los estudiantes llegan al aula de clase con unos conocimientos empíricos ya constituidos. “Es necesario que los profesores adquieran unas concepciones acordes con las posiciones epistemológicas de mayor aceptación, es decir: para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es indispensable plantearse la modificación de las ideas epistemológicas del profesorado”[3].

“Un método pedagógico basado en la transmisión-repetición, donde el profesor transmite unos conocimientos a veces errados y el estudiante debe estar en la capacidad de repetirlos cuando éste se los pregunte, ha dejado una historia de fracaso en la enseñanza de las matemáticas, no es posible conseguir propiciar un aprendizaje significativo con un método mecanicista, sólo cuando el método es constructivista y personal, el proceso enseñanza-aprendizaje se hace más efectivo y es de verdad significativo, pero ¿ Qué es el constructivismo”[2]?.

En la actualidad, Constructivismo es una palabra utilizada frecuentemente por los educadores. Se utiliza crecientemente como teoría para la investigación y para la enseñanza. El constructivismo es una teoría del conocimiento utilizada para explicar cómo sabemos lo que sabemos. El constructivismo explica cómo el individuo crea significados a partir de sus propias experiencias. Los constructivistas enfatizan la interacción entre la mente y el mundo real. Los humanos crean significados, no los adquieren, afirma que el conocimiento reside en el individuo, que el conocimiento no puede ser transferido intacto de la cabeza de un maestro a las cabezas de los estudiantes. Los estudiantes tratan de entender lo que les es enseñado y lo ajustan de acuerdo a sus experiencias o conocimientos previos desde una perspectiva constructivista. La ciencia no es la búsqueda de la verdad, sino un proceso que nos ayuda a entender nuestro mundo. Es decir, la ciencia no es un conjunto de conocimientos acabados y verdades absolutas; por esto, los estudiantes al recibir dichos conocimientos deben analizarlos y reflexionarlos, deben investigar en diversas fuentes y formar sus propios conceptos y no conformarse con los conocimientos que reciben del maestro como si éste poseyera la verdad absoluta. Los estudiantes tienen que comprender que ellos son capaces de crear o innovar conocimientos científicos y por lo tanto de crear su propia idea acerca de cualquier tema.

Algunos pedagogos aportantes a la teoría constructivista son[5]: Lev Vigotsky Jean Piaget y David Ausubel.

Los aportes de Vigotsky son fundamentales en el área de educación, especialmente su concepto de zona de desarrollo próximo que se refiere a "hallar la distancia entre el nivel real de desarrollo del niño, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz".

Jean Piaget (1896-1980), psicólogo suizo, fundador de la escuela de epistemología genética, es una de las figuras más prestigiosas y relevantes de la psicología del siglo XX, es uno de los autores cuyos aportes han tenido más trascendencia dentro de la Psicopedagogía. Una de las contribuciones más valiosas de la obra de Piaget es el carácter eminentemente activo y constructivo que asignó al sujeto en desarrollo, al sujeto que está aprendiendo. Según la imagen previa que imperaba antes de sus estudios, las diferentes habilidades surgían y se desplegaban con el paso del tiempo, casi de forma automática o pre-programada, quedando el sujeto relegado al papel de espectador pasivo de su propio aprendizaje o desarrollo. Por el contrario, uno de los pilares básicos de la teoría piagetiana consiste en considerar y presentar a las personas que están aprendiendo como activos constructores de sus habilidades y destrezas, que surgen como resultado de su interacción con el entorno y su necesidad elemental de comprender el mundo que les rodea y adaptarse a él.

David Ausubel considera que el aprendizaje por descubrimiento es eficaz si cumple unas características, éstas son:

- Los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno.
- Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos.

- Todo lo anterior es producto de una implicación afectiva del alumno, es decir, el alumno quiere aprender aquello que se le presenta porque lo considera valioso.

Así, el aprendizaje escolar puede darse por recepción o por descubrimiento, como estrategia de enseñanza, y puede lograr un aprendizaje significativo o memorístico y repetitivo. De acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante; esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando[6].

Otros autores que aportaron a la teoría del constructivismo son[1]: Alsup (2005), Suk (2005), David Pugalee (2001) y Romberg (1992).

Alsup comparó la instrucción tradicional y la constructivista en matemáticas. Con su estudio demuestra que la segunda ofrece ventajas. Examinó la eficacia de la instrucción constructivista sobre la ansiedad hacia las matemáticas, las creencias sobre la eficiencia y las percepciones sobre autonomía.

Suk (2005) investigó la eficacia de la instrucción constructivista en matemáticas sobre el desempeño académico, auto-concepto (creencias que cada persona tiene de si misma), estrategias de aprendizaje, y preferencia de la metodología constructivista. Su estudio concluye que la enseñanza constructivista es más eficaz en términos de logro académico y no es eficaz en términos de mejora del auto-concepto y que los estudiantes tienen preferencia por un ambiente constructivista.

Pugalee (2001) investigó sobre la relación entre las matemáticas y la meta cognición. Validó que la escritura de los estudiantes sobre sus procesos matemáticos al solucionar problemas, muestra evidencias de comportamientos meta cognitivos. Los escritos de los estudiantes demostraron el uso de varios comportamientos meta cognitivos. Los resultados promueven incluir la escritura de los procesos como parte integral del plan de estudios de las matemáticas[1].

Romberg[7] (1992) ilustra la idea de hacer matemáticas en las facultades de artes. En varias Universidades Europeas, las Escuelas de Matemáticas pertenecen a estas facultades.

Pólya (1945) Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

- Entender el problema.
- Configurar un plan.
- Ejecutar dicho plan.
- Mirar hacia atrás y verificar el resultado con la vida real.

Pólya, también propuso una serie de consejos, para los profesores de Matemáticas, a los que llamó. “Los Diez Mandamientos para los Profesores de Matemáticas”; éstos se resumen en lo siguiente:

- “Interésese por su materia.
- Conozca su materia.
- Lea las caras de sus estudiantes; vea sus expectativas y dificultades; póngase en el lugar de ellos.
- Enseñar no es transmitir ideas a otro, es permitir que el otro las descubra.
- Dé a sus estudiantes no sólo información, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.
- Permítales aprender a conjeturar.
- Compruebe lo que enseña, así les permitirá aprender a comprobar lo aprendido.
- Advierta que los ejercicios o problemas de un tema serán útiles en la solución de problemas o ejercicios futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente situación concreta.
- No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.
- Sugiérales; no haga que se lo traguen a la fuerza”.

2. METODOLOGÍA

Los bajos resultados en los aprendizajes han provocado un gran cuestionamiento a las tradicionales formas de enseñar matemáticas; es necesario buscar nuevas formas, recursos y estrategias para mejorar esta situación. El factor más importante para asegurar aprendizajes efectivos en el área de Matemáticas es la preparación de la clase por parte del profesor (Araya, 2000). La clase debe prepararse de modo que los estudiantes vayan construyendo su propio conocimiento; el docente se limita a orientar o guiar la clase. Es preciso que se motive y se le proporcione al estudiante el material y recursos necesarios para llegar al propósito esperado, dejándoles la iniciativa a ellos. En este sentido, el docente debe atender de manera particular los requerimientos de los estudiantes. Para cumplir con este objetivo en el curso de Matemáticas Básicas, se realizaron las siguientes actividades:

- Cambio de la clase tradicional por clases que permitan la colaboración entre los estudiantes.
- Se identificó a los estudiantes más aventajados y a los menos aventajados. Así se pudo atender de manera más eficaz a aquellos estudiantes que requerían de más apoyo.
- Motivación y comunicación personal con cada uno de los estudiantes, cuando alguno de ellos no asistía a la clase, se enviaban mensajes con compañeros y a su correo electrónico preguntando la razón de su falta. Así el alumno es el protagonista, se siente más motivado y responsable de su aprendizaje.
- Cambio de una evaluación basada en exámenes memorísticos por pruebas escritas que le permitan al estudiante ser protagonista activo de su propio proceso de aprendizaje. Después de un examen se dialogaba con el estudiante para indagar por qué su rendimiento bajo, identificando posibles causas. La invitación a los de mejor calificación, era, a lograr cada vez mejores resultados hasta llegar a la excelencia y a compartir sus métodos de estudio con los menos aventajados.
- Cambio de una estructura competitiva a una estructura cooperativa, los alumnos comparten sus ideas y descubrimientos, de esta manera acompañan significados y se apropian de cosas que han aprendido de otros, esta actividad en el constructivismo se llama “aprendizaje entre pares”.
- Hacer énfasis en la comprensión, pues los estudiantes no comprenden lo que leen, observan o escuchan; la comprensión les servirá para la resolución de ejercicios y de problemas matemáticos. Para lograr este objetivo es necesario relacionar las ideas nuevas con las ya existentes en la mente del estudiante.

- También se examinaron algunas estrategias básicas de trabajo que se utilizan en el quehacer matemático. A pesar de que el campo de las matemáticas es amplio y existe una gran variedad de métodos y estrategias que se utilizan en la resolución de problemas, es importante identificar e ilustrar estos aspectos en el curso “dictado”.

Una estrategia para resolver problemas matemáticos conlleva un sello personal del que analiza el problema, más que un valor intrínseco asociado a cada persona. A los estudiantes del curso se les incentivó a considerar las condiciones del problema y analizar los objetivos de éste; también a identificar los hechos relevantes del problema o ejercicio y entender qué tan restringidas están las condiciones. Después de obtener la solución es necesario que el estudiante entienda lo que hizo y pueda explicar por qué sus acciones fueron correctas o apropiadas. Para poder cumplir con esta meta, se seleccionaron problemas y ejercicios por clase que orienten el aprendizaje de los estudiantes. Es evidente que este tipo de aprendizaje instaurado en el curso de Matemáticas Básicas, exige prestar atención a los aspectos motivacionales y actitudinales por parte de los alumnos, así como mayor compromiso y dedicación por parte de ellos, lo que no se encontró en varios estudiantes del curso.

El método pedagógico establecido en la práctica docente fue el que permite entre los estudiantes procesos de colaboración, se entregó a los estudiantes el protagonismo que se merecen, se facilitó la participación de todos ellos, dándoles herramientas que les permitieran la interacción de forma dinámica; desde el principio del curso se hizo un sondeo inicial acerca de los siguientes puntos:

1. ¿Qué conocimientos previos tienen los estudiantes que comienzan el curso?

2. La capacidad de abstracción y de establecer relaciones lógicas de manera exacta con datos reales.

3. La capacidad de comprensión lectora de un texto, para su posterior aplicación.

4. El aprendizaje de las Matemáticas como un proceso en construcción más que como un saber cerrado y finalizado.

5. ¿Es realmente la Ingeniería la carrera que le apasiona?, si es así, describa por lo menos tres razones.

2.1 Grupo

El grupo asignado fue el número 15 con 34 estudiantes pertenecientes a las siguientes carreras: Ingeniería Mecánica (25 estudiantes), Ingeniería Industrial (6 estudiantes) e Ingeniería Agronómica (3 estudiantes). A los 34 estudiantes se les indagó por los siguientes datos: Edad, graduación de Bachiller, experiencia en otras universidades, motivación por estudiar su carrera. Los resultados son los siguientes:

EDAD	
Edad en años	**Número de Estudiantes**
17	**3**
18	**7**
19	**18**
MÁS DE 20	**6**

Tabla 2.1.1, edad de los estudiantes

AÑO DE GRADUACIÓN DEL BACHILLERATO	
ANTES DE 2007	**2**
2008	**2**
2009	**11**
2010	**13**
2011	**6**

Tabla 2.1.2: año de graduación

EXPERIENCIA EN OTRAS UNIVERSIDADES	
INGENIERÍA U de A	**3**
INGENIERÍA OTRA UNIVERSIDAD	**1**
OTRAS CARRERAS	**2**

Tabla 2.1.3: Experiencia otras Universidades

MOTIVACIÓN POR SU CARRERA	
NO SABEN	**2**
SE LO RECOMENDARON EN SU CASA	**4**
ESTÁ ABSOLUTAMENTE SEGURO DE ELLA	**19**
ESTUDIA EN LA NACIONAL MIENTRAS PASA A MEDICINA A LA U de A	**7**
ESTÁN SEGUROS QUE ESTA CARRERA NO ES LO QUE LES GUSTA ESTUDIAR	**2**

Tabla 2.1.4 Motivación por su carrera

2.2 Metodología de práctica.

Para que la práctica docente aporte avances significativos en el aprendizaje, nos propusimos conocer el estado inicial de conocimientos en el que llegan los estudiantes y hacer un seguimiento personal de cada uno de ellos a lo largo del semestre. No sólo como parte de un acto evaluativo, sino como una ruta que determine las pautas a seguir en todas las temáticas del curso de Matemáticas Básicas.

En cada clase pusimos en práctica la teoría constructivista basada en los procesos de colaboración, en el planteamiento de preguntas como punto de partida para aprender matemáticas y en el aporte de Pólya, basado en los siguientes pasos:

Paso 1: Entender el problema:

1.- Entiende todo lo que dice.
2.- Replantea el problema en tus propias palabras.
3.- Distingue cuáles son los datos.
4.- Comprende lo que preguntan.
5.- ¿Hay suficiente información?
6.- Compara con otros problemas que hayas resuelto antes.

Paso 2: Configurar un plan:

1.- Identifica las variables.
2.- Busca un patrón.
3.- Realiza un diagrama.
4.- Usa un razonamiento directo.
5.- Obtén una ecuación característica.
6.- Resuelve la ecuación.
7.- Usa un modelo.
8.- Usa análisis dimensional.

Paso 3: Ejecutar el plan.

1.- Implementa las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.
2.- Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento.
3.- Si es necesario vuelve a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4: Mirar hacia atrás.

1.- ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema o ejercicio?
2.- Verifica si se puede extender tu solución a un caso más general.

2.3 CONDUCTA DE ENTRADA (PRUEBA DIAGNÓSTICA)

Como actividad previa al inicio del curso y con el fin de conocer falencias y fortalezas de los estudiantes en los diversos temas a tratar, se hizo una prueba diagnóstica el primer día de clases. A los estudiantes se les insistió ese día que la prueba no era calificable, podían utilizar cualquier herramienta (como cuadernos o calculadora), había que sustentar sus respuestas y sólo se utilizarían los resultados para un estudio estadístico. Esto con el ánimo de disminuir tensiones que producen los exámenes.

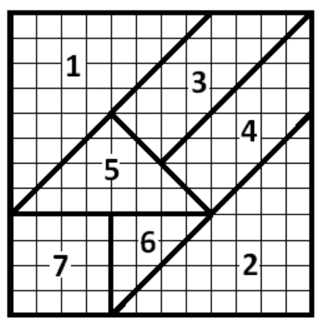
La prueba, sus resultados y algunas sustentaciones se presentan a continuación:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
PRUEBA DIAGNÓSTICA MATEMÁTICAS BÁSICAS
Grupo 15

Nota: la siguiente prueba no tiene valor evaluativo, no se tendrá en cuenta para la calificación del curso, es sólo una prueba diagnóstica con significado pedagógico, es decir, no se pierde ni se gana, respóndala de la manera más ética posible y cada punto, susténtelo en la hoja blanca que se les entregó. Algunas preguntas presentan varias respuestas correctas.
Muchas gracias por su colaboración.

NOMBRE____ DOCUMENTO_______________

RESPONDE LAS PREGUNTAS 1 Y 2 DE ACUERDO CON EL SIGUIENTE GRÁFICO



1. El área del triángulo numerado con 5 corresponde a:

a. $\frac{1}{2}$ del área cuadrado mayor. b. $\frac{1}{3}$ del área cuadrado mayor.
c. $\frac{1}{9}$ del área cuadrado mayor. d. $\frac{1}{12}$ del área cuadrado mayor.

2. El área del cuadrado mayor es de 144 cm^2. El área en cm^2, de la figura numerada con 7 es:

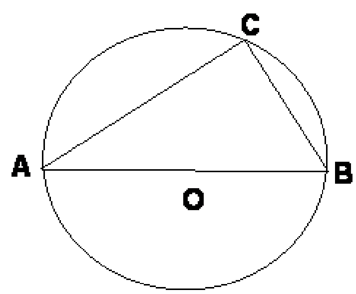
a. 8 cm^2 b. 16 cm^2 c. 36 cm^2 d. 48 cm^2

3. Las figuras numeradas con 5 y 6 corresponden a:

a. Triángulos Obtusángulos. b. Triángulos Rectángulos.

c. Triángulos Isósceles. d. Triángulos Escalenos.

4. En la figura, el triángulo está inscrito en la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB} = 12\, unidades$, $\overline{BC} = 5\, unidades$. Calcula el área del triángulo.



5. Una función es aquella en la que:

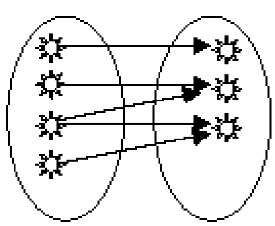
a)___ A cada elemento de un conjunto le corresponde al menos un elemento de otro conjunto.

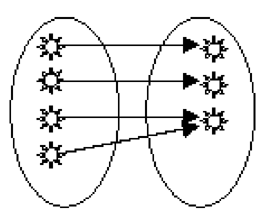
b)___ A cada elemento de un conjunto le corresponde exactamente un elemento de otro conjunto.

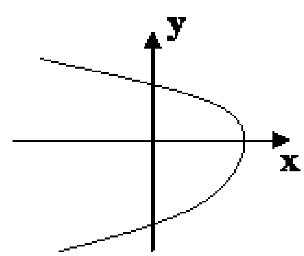
c)___ A cada elemento de un conjunto le corresponden elementos de otro conjunto.

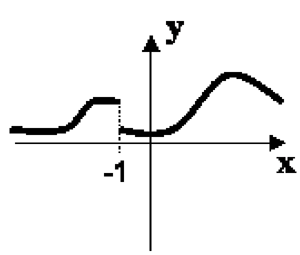
d)___ A cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada.

6. Señala cada gráfico que corresponda a una función.









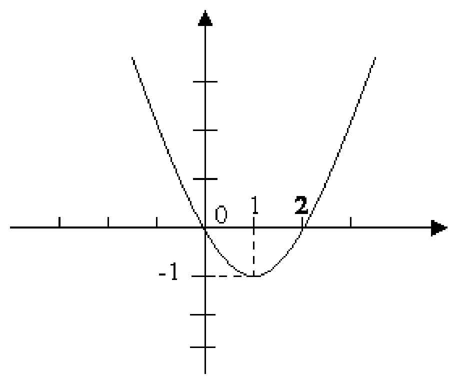
7. En la figura se representa una función cuadrática cuya ecuación es:

a)__ $y = x^2 - 2x + 1$

b)__ $y = x^2 - 2x$

c)__ $y = x^2 + 2x$

d)__ $y = x^2 + 2x + 1$



8. Escribe V si la proposición es verdadera, o F si es falsa:

a.___ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

b.___ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

c.___ $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

d.___ $\dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

e.___ $\log_a(u \cdot v) = \log_a u . \log_a v$

f.___ $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

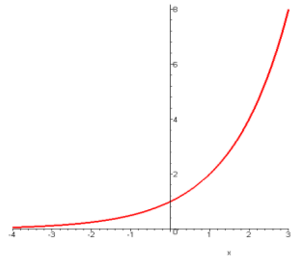
g.___ $\log_a u^n \neq n \cdot \log_a u$

h.___ $\log_a \sqrt[n]{u} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a u$.

i.___ $\begin{cases} sen(-\alpha) = -sen\ \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ tg(-\alpha) = -tg\ \alpha \end{cases}$

j.___ $sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a$

k.___ La gráfica de la ecuación $y = a^x$ *con* $a > 0$, es de la forma:

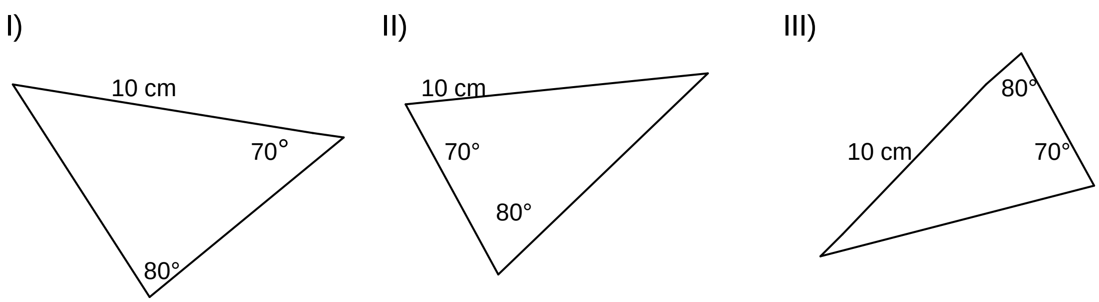


9. Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a. $\frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2}$

b. $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ó $(x-3)(x-1) \leq 0$

10. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes. Justifique su respuesta:



a) Sólo I y II b) Sólo I y III c) Sólo II y III d) I, II y III e) Ninguno.

Los resultados de la prueba diagnóstica se muestran en el siguiente gráfico:

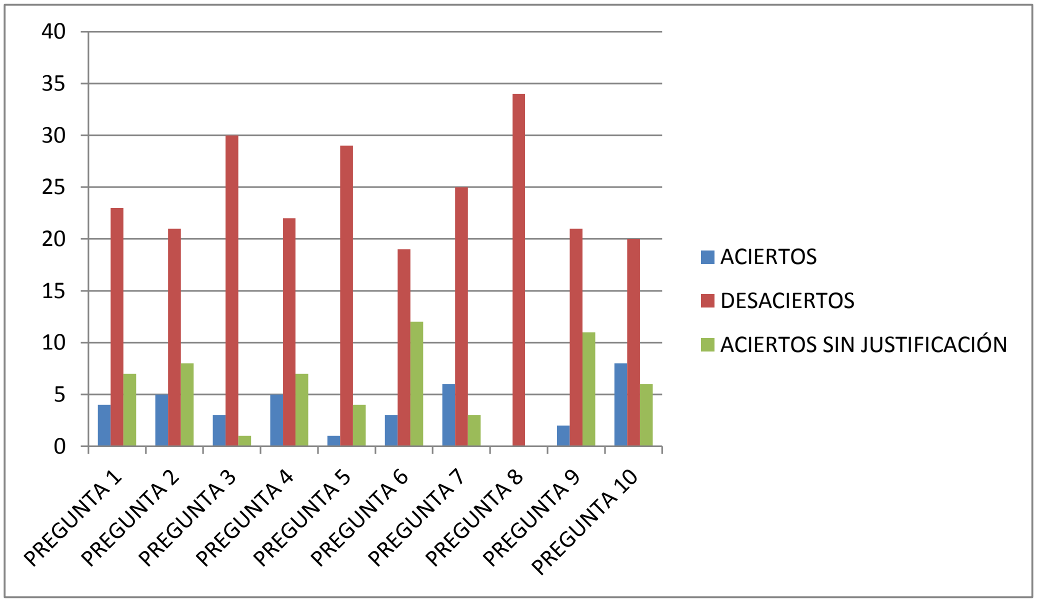


Gráfico 2.1: resultados prueba diagnóstica

2.4 Justificación prueba diagnóstica.

Miremos las justificaciones que entregaron dos estudiantes a la prueba. Uno de ellos muestra conocimientos apropiados de los temas a tratar durante el curso, el otro muestra desconocimiento de estos temas.

.

) Matemati. Básicos
prueba diagnostica.

1) área □ = 12 × 12 = 144 u²

área △s = 8 × 4 = 32 u² / 2 = 16

relación. 16 / 144 = 1/9

Rta: 1/9 (C).

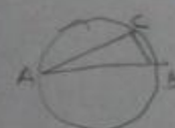
Hug
Btcu
8/10

2) área figura 7. (4 × 4) u² = 16 u²

Rta (B)

3) Son △s. isosceles porque tienen
2 lados iguales.

Rta (C)

4) 

$\overline{AB} = 12$ u

$\overline{BC} = 5$ u

$\overline{AC}$: ?

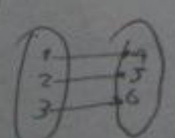
área $ABC = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$

$\overline{BC}$ es la altura porque es un △ rectángulo. } ¿porque?

área $= \frac{12 \times 5}{2} = 30$ u².

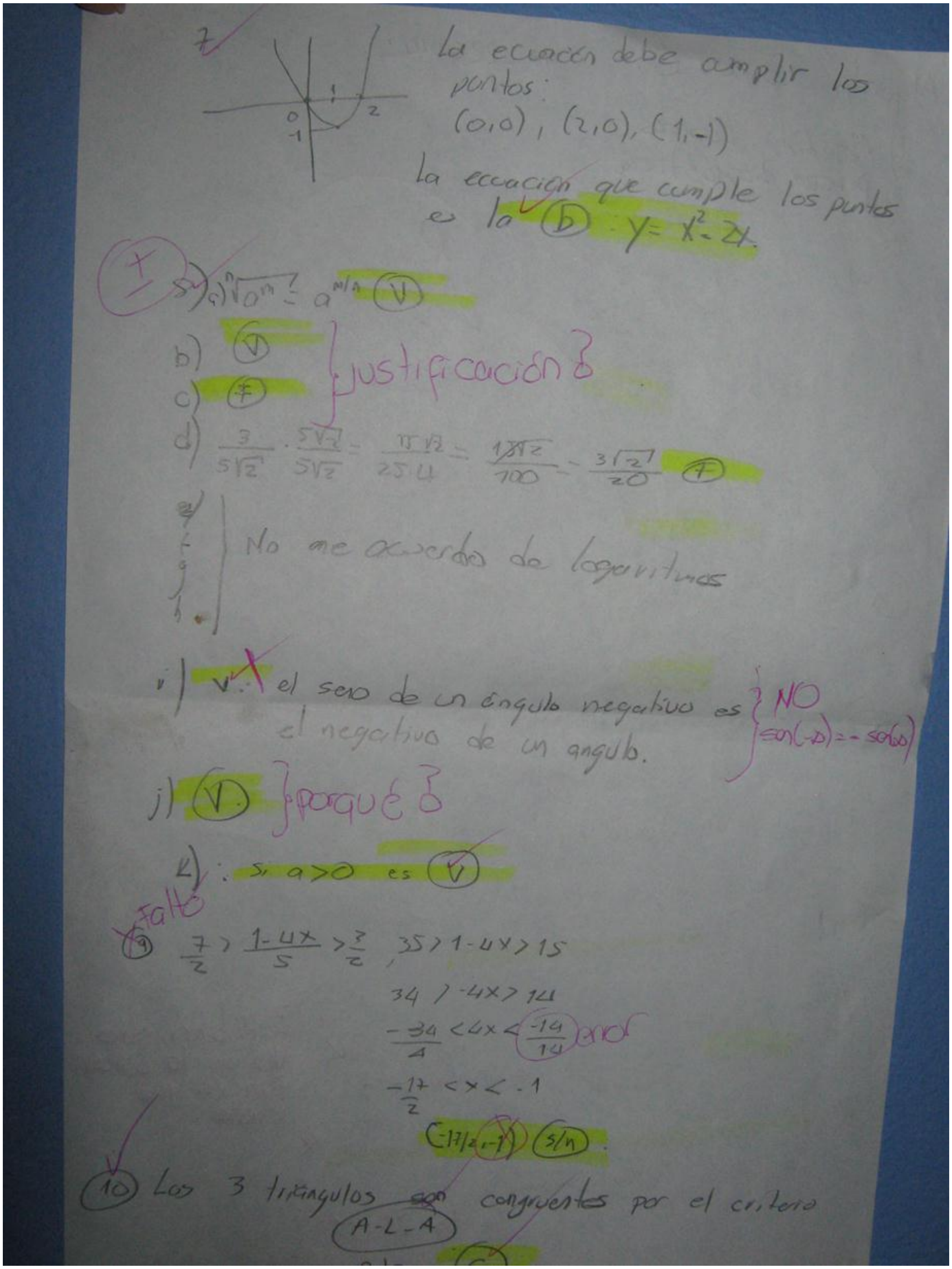
5) Una función

Rta (d)



} Esto es función

6) Las dos primeras son funciones
La 2ª y tercera NO ¿ X



7) La ecuación debe cumplir los puntos:

(0,0), (2,0), (1,-1)

La ecuación que cumple los puntos es la (b) $y = x^2 - 2x$.

5) a) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ (V)

b) (V)

c) (F)

justificación?

d) $\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{25 \cdot 4} = \frac{15\sqrt{2}}{100} = \frac{3\sqrt{2}}{20}$ (F)

e) f) g) h) No me acuerdo de logaritmos

i) V el seno de un ángulo negativo es el negativo de un angulo.

NO $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

j) (V) porqué?

k) Si $a > 0$ es (V)

Faltó

9) $\frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2}$, $35 > 1 - 4x > 15$

$34 > -4x > 14$

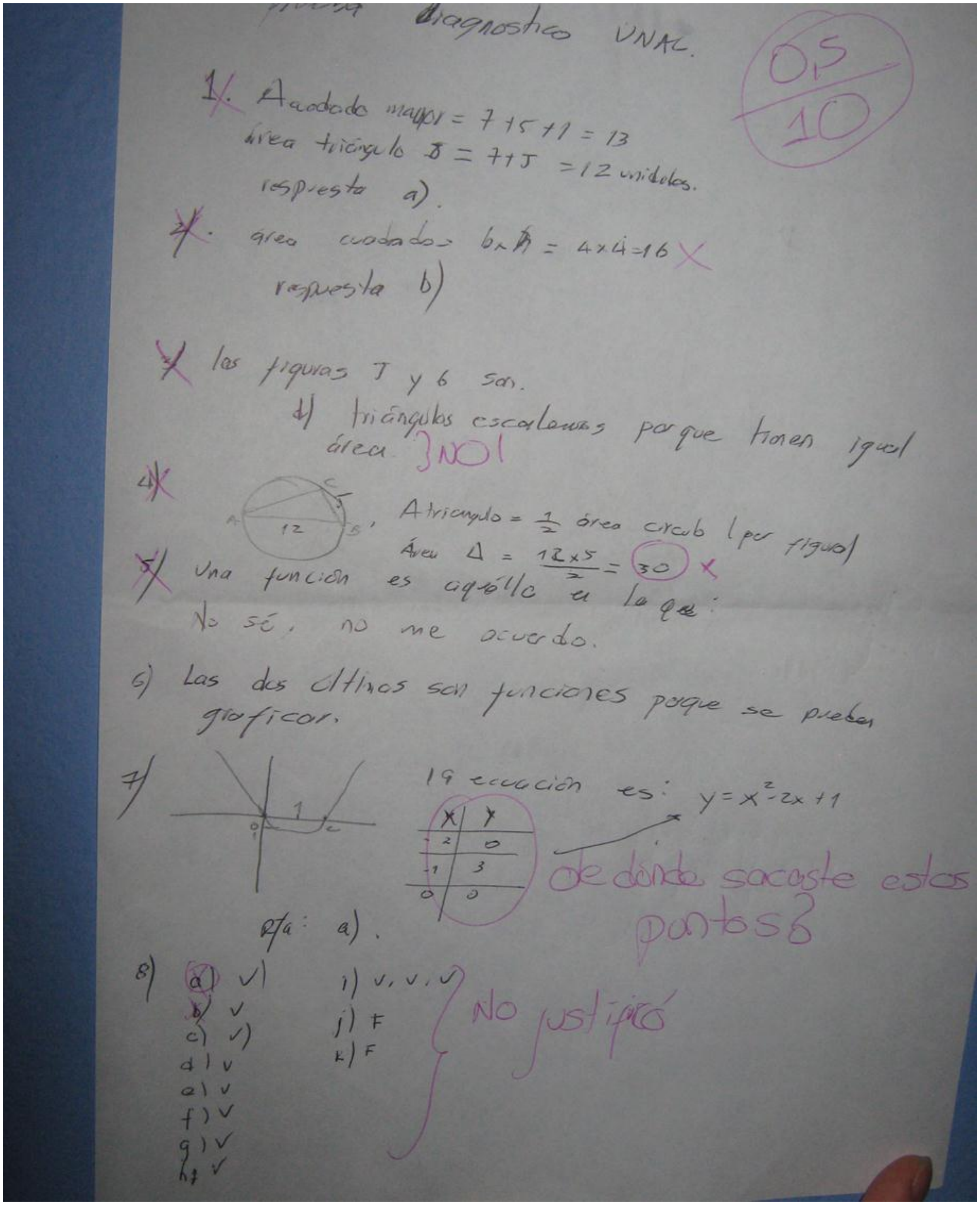
$-\frac{34}{4} < 4x < \frac{-14}{14}$ error

$-\frac{17}{2} < x < -1$

$(-17/2, -1)$ (S/n)

10) Los 3 triangulos son congruentes por el criterio (A-L-A)

Prueba diagnóstica estudiante con altos conocimientos previos de los temas



Prueba diagnostico UNAL.

0,5 / 10

1/. A cuadrado mayor = 7 + 5 + 1 = 13
área triángulo 5 = 7 + 5 = 12 unidades.
respuesta a).

2/. area cuadrado = b × h = 4 × 4 = 16 X
respuesta b)

3/ las figuras 5 y 6 son.
d) triángulos escalenos porque tienen igual área ¡NO!

4/ A triangulo = 1/2 área circulo (por figura)
Área Δ = 12 × 5 / 2 = 30 X

5/ Una funcion es aquélla a la que:
No sé, no me acuerdo.

6) Las dos últimos son funciones porque se pueden graficar.

7/ la ecuación es: $y = x^2 - 2x + 1$

X	Y
2	0
-1	3
0	0

¿de dónde sacaste estos puntos?

rta: a).

8) a) V)
b) V
c) V)
d) V
e) V
f) V
g) V
h) V
i) V, V, V
j) F
k) F

No justificó

Prueba diagnóstica estudiante con muy bajos conocimientos previos de los temas.

2.5 Evaluación

Se hicieron seis evaluaciones de 10% cada una, una prueba realizada por la Universidad a nivel nacional con un valor del 30% y el restante 10% se evaluó en talleres semanales. Cada una de las evaluaciones se revisó con los estudiantes indicándole a cada uno (sólo los que asistían a la asesoría) dónde había cometido algún error, esta retroalimentación ayudó al proceso de aprendizaje de los alumnos.

2.6 Preparación de las clases

En esta propuesta, para el desarrollo de los temas de Funciones reales dentro del curso de Matemáticas Básicas, nos apoyamos en ejemplos de la vida cotidiana partiendo de ejemplos simples y avanzando a ejemplos más elaborados. El desarrollo del tema de funciones reales que según el cronograma va de la clase 16 hasta la número 24, se describirá en la sección de resultados.

2.6 Metodología utilizada en las clases.

En este punto hicimos énfasis en las clases donde se obtuvo mejor rendimiento académico, los temas que tienen que ver con funciones.

Objetivos:

- Resolver problemas utilizando funciones algebraicas y trascendentes en una variable.
- Identificar con precisión el dominio y el rango utilizando la gráfica de una función algebraica o trascendente en una variable.
- Reconocer funciones pares e impares utilizando gráficas de funciones en una variable.
- Interpretar y encontrar fórmulas utilizando funciones definidas por secciones en una variable.

Clase 16: Funciones: definición, dominio, rango, evaluación, gráfica. Prueba de la recta vertical. Funciones lineales (pendiente, intercepto, rectas paralelas y rectas perpendiculares)

Metodología: La clase comenzó mostrando a los estudiantes varios ejemplos de funciones, relacionados con la vida cotidiana, que podían ser comentados en clase, también incluía las definiciones de función, dominio y rango.
Para la enseñanza de los temas se procedió de la siguiente forma:

a) Clases de carácter teórico-conceptual a cargo del profesor, a modo orientador, presentando los temas para situar a los alumnos en el desarrollo de su razonamiento lógico. Su desarrollo se basó en el uso de elementos auxiliares para la enseñanza, como el tablero o el proyector.

b) Desarrollo de trabajos prácticos: Los conceptos introducidos en las clases teóricas, especialmente los relativos a la solución de problemas y aplicaciones de la vida real, tenían una componente práctica basada en la propuesta y resolución de problemas, de carácter individual o grupal, así como también la investigación de tópicos referentes a las unidades programáticas, después de explicar los conceptos de función y los tipos de éstas se resolvieron problemas tomados de la vida real, con el siguiente procedimiento:

Se propuso que cada uno de ellos, de manera individual resolviera el problema, se les aclaró que no importaba que lo hicieran mal, porque a partir de esta práctica, el estudiante debería conocer sus falencias y con la ayuda de los que lo hicieron bien y con la asesoría del profesor, lo resolverían bien. Para conocer los procedimientos seguidos por los estudiantes en estos problemas, se realizó una entrevista inmediatamente después de la solución del ejercicio con el fin de evitar interferencias a la hora de reconstruir sus procesos. Se contemplaron las siguientes preguntas:

1) ¿Crees que lo resolviste correctamente?
2) ¿Podrías explicar qué es lo que se pregunta en este problema?
3) ¿Qué procedimiento utilizaste, qué pasos seguiste?
4) ¿Por qué consideras que esa respuesta es la correcta?
5) ¿Verificaste si tenías algún error?

En el caso que la respuesta fuera incorrecta, se les preguntaba:
¿Qué elementos no entiendes, qué confusiones presenta en los conceptos relacionados con el problema específico?

Ejemplos aplicados en clase y cómo se solucionaron:

1. Una pieza de equipo comprada hoy en 800000$ se devalúa linealmente hacia el valor de chatarra de 20000$ después de 20 años. Otra pieza de equipo comprada en 856000$ se devalúa linealmente hacia el valor de chatarra de 60000$ después de 16 años.

a) Obtener una relación entre el valor de cada pieza y el número de años en uso.

b) Si las dos piezas se empiezan a usar en el mismo momento, determine el número de años que deben transcurrir para que su valor sea el mismo.

c) Grafique, en un mismo sistema de coordenadas la relación entre el valor de las piezas y el número de años en uso.

Tabulemos estos datos:

Pieza equipo 1:

x (número de años en uso)	0	1	2	3	4	20
$f(x)$ (valor del equipo)	800000					20000

Pieza equipo 2:

x (número de años en uso)	0	1	2	3	4	16
$g(x)$ (valor del equipo)	856000					60000

Para ambas piezas el número de años en uso, x, es la variable independiente.

La pendiente para cada caso es el cambio del valor de cada pieza por cada año de uso.

Pieza equipo 1:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20000 - 800000}{20 - 0} = -39000$$

Pieza equipo 2:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{60000 - 856000}{16 - 0} = -49750$$

Las funciones que permiten modelar el problema son:

Pieza equipo 1: $f(x) = 800000 - 39000x$

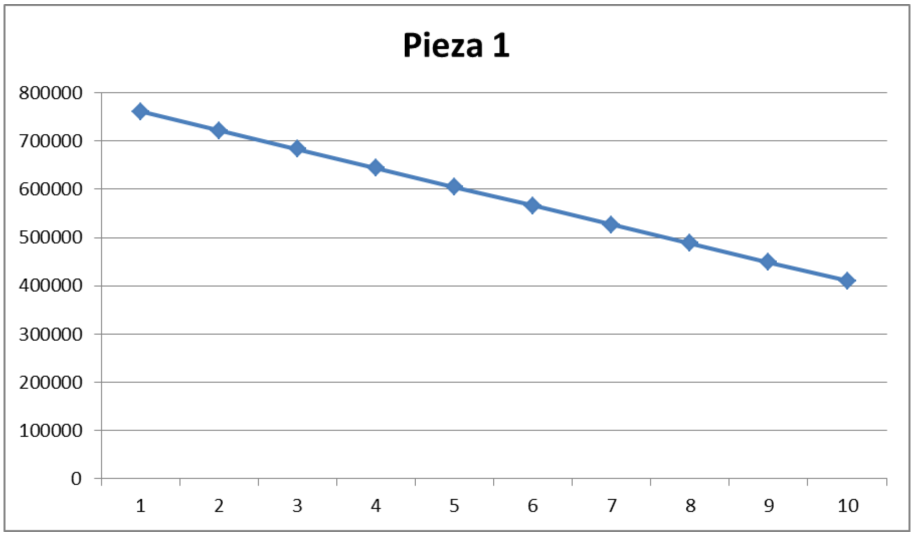
Pieza equipo 2: $g(x) = 856000 - 49750x$

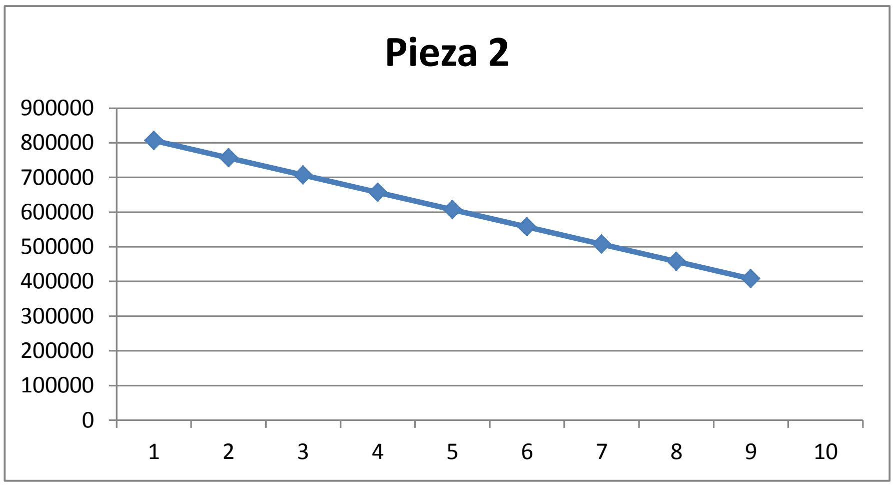
b) Para calcular el número de años que deben transcurrir para que su valor sea el mismo, igualamos los valores de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

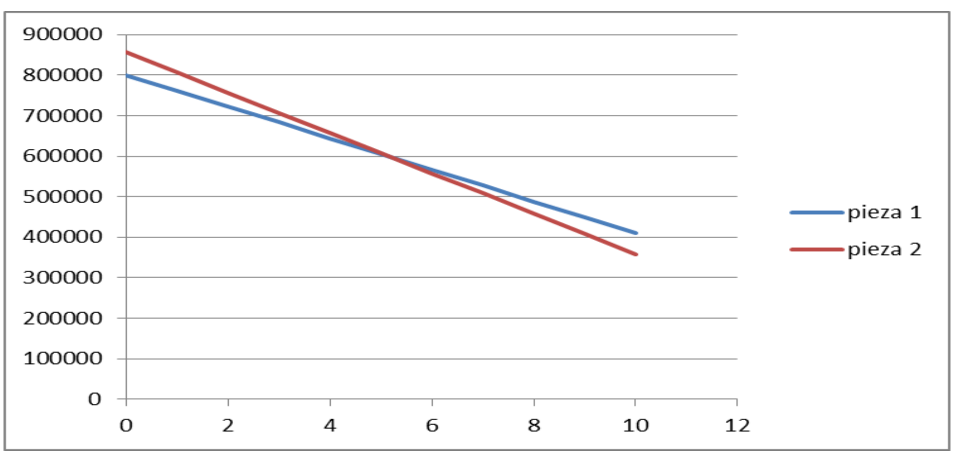
$$f(x) = g(x)$$
$$800000 - 39000x = 856000 - 49750x$$
$$10750x = 56000.$$

Despejando el valor de x:

$$x = 5.209 \textit{ años}.$$







Punto de intersección donde el valor de ambas piezas es el mismo.

Clases 17 y 18: Funciones definidas por tramos. Función valor absoluto. Funciones de la forma x^n, $x^{1/n}$. Transformación de funciones: Traslaciones o desplazamientos horizontales y verticales.

Metodología: comienza la clase explicando al grupo un poco de historia del cálculo, con el fin de bajar tensiones. Solución de algunos ejemplos indicando todos los pasos, luego se propusieron otros ejemplos para que los resolvieran por grupos (trabajo colaborativo).

Algunos ejemplos resueltos en clase son:

1. Una represa cuya capacidad ocupada el primero de abril de cierto año es de 1530 millones de litros de agua recibe de un río en tiempo de invierno (1° abril -30 de junio) 29 millones de litros por día, y en verano (1° de julio- 30 de septiembre) recibe 2 millones de litros por día. Además consume en la producción de energía 16 millones de litros por día.

a) ¿Cuántos litros tendrá la represa el 1° de mayo?

b) ¿En qué momentos la represa tendrá 1900 millones de litros de agua?

c) ¿Cuántos litros habrá en la represa el 15 de agosto?

d) En el caso de continuar el verano después del 30 de septiembre. ¿Cuántos días tendrán que pasar para que la represa esté totalmente vacía?

La solución a este problema se abordó según lo propuesto por Pólya en los pasos explicados en el marco teórico, el procedimiento fue:

- Entender el problema.

Con la ayuda de un dibujo se explicó que lo que entra a un sistema cualquiera menos lo que sale del sistema es lo que se acumula, es decir: E - S = A.
E: cantidad de agua que entra a la represa.
S: cantidad de agua que sale de la represa.
A: cantidad de agua que se acumula en la represa.

- Configurar un plan.

Se definieron variables, para luego identificar la dependiente y la independiente. Variables: tiempo (variable independiente), litros de agua en la represa (variable dependiente).

Se hizo la siguiente tabla para el invierno:

x: número de días transcurridos desde el inicio del invierno)	0	1	2	3	4
$f(x)$: Cantidad de agua en la represa (millones de litros)	1530	1530+29(1)-16(1)	1530+29(2)-16(2)	1530+29(3)-16(3)	1530+29(4)-16(4)

La ecuación que relaciona estas variables es:

$$f(x) = 1530 + 29x - 16x = 1530 + 13x$$
$$f(x) = 1530 + 13x$$

Teniendo en cuenta que hasta el inicio del verano han transcurrido 91 días, la cantidad de agua en la represa, en ese momento, es $f(91) = 1530 + 13(91) = 2713 \quad \textit{millones de litros}$

Se hizo la siguiente tabla para el verano:

x: número de días transcurridos desde el inicio del invierno.	92	93	94	95	96
$f(x)$: Cantidad de agua en la represa (millones de litros)	2713+2(92-91)-16(92-91)	2713+2(93-91)-16(93-91)	2713+2(94-91)-16(94-91)	2713+2(95-91)-16(95-91)	2713+2(96-91)-16(96-91)

La ecuación que relaciona estas variables es:

$$f(x) = 2713 + 2(x - 91) - 16(x - 91)$$

Se planteó la siguiente función por tramos para modelar el problema:

$$f(x) = \begin{cases} 1530 + 29x - 16x = 1530 + 13x & \text{si} \quad 0 \le x \le 91 \quad \text{representa el invierno} \\ 2713 + 2(x-91) - 16(x-91) = 2713 - 14(x-91) & \text{si} \quad 91 < x \le 183 \quad \text{representa el verano} \end{cases}$$

- Ejecutar dicho plan.

Una vez construida la anterior tabla se obtiene la cantidad de agua en la represa en un tiempo cualquiera x.

a) ¿Cuántos litros tendrá la represa el primero de mayo?

El primero de mayo es el día 31 a partir del inicio del invierno ($x = 31$)

$f(31) = 1530 + 13(31) = 1933$

El primero de mayo la represa tendrá 1933 millones de litros de agua.

b) ¿En qué momentos la represa tendrá 1900 millones de litros de agua?

Para este caso se presentan dos momentos, así:

$$\begin{aligned}
&\text{Invierno}: \quad f(x) = 1530 + 13x,\\
&1900 = 1530 + 13x,\\
&x = \frac{1900 - 1530}{13} = 28.46 \ \text{días}.\\
&\text{Verano}: \quad f(x) = 2713 - 14(x - 91),\\
&1900 = 2713 - 14(x - 91),\\
&x = \frac{2713 - 1900}{14} + 91 = 149.07 \ \text{días}
\end{aligned}$$

c) ¿Cuántos litros habrá en la represa el 15 de agosto?

Al llegar el 15 de agosto han transcurrido 137 días, utilizamos el segundo tramo de la función:

$$f(x) = 2713 + 2(x - 91) - 16(x - 91)$$

$$f(x) = 2713 - 14(137 - 91) = 2069 \ \text{millones de litros}.$$

d) En el caso de continuar el verano después del 30 de septiembre. ¿Cuántos días tendrán que pasar para que la represa esté totalmente vacía?

Teniendo en cuenta que x representa el tiempo desde el inicio del invierno, entonces, el tiempo total en días que tienen que pasar para que la represa esté totalmente vacía se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 2713 - 14(x - 91)\\
&0 = 2713 - 14(x - 91)\\
&x = \frac{2713}{14} + 91 = 284.8 \ \text{días}
\end{aligned}$$

Después del 30 de septiembre, para que la represa esté completamente vacía, deben transcurrir: $(284.8 - 91 - 92) = 101.8 \, \text{días}$.

- Mirar hacia atrás.

¿Es tu solución correcta? ¿Tus respuestas satisfacen lo establecido en el problema o ejercicio?, ¿Cuál fue el paso clave en tu solución?.

Cada una de las respuestas obtenidas en los ítems desarrollados es razonable y está dentro de la lógica del problema, miremos:
La cantidad de agua en la represa inicialmente es de 1530 millones de litros, cuando termina el invierno (1 de julio), la represa termina con 2713 millones de litros de agua.
La represa tendrá una cantidad de 1900 millones de litros de agua en dos momentos, durante el invierno de abril a julio y durante el verano de julio a octubre. Los datos obtenidos son: 28.46 días y 149.07 días después de haber iniciado el invierno, cantidades que son lógicas.

2. Hallar el dominio y el rango o imagen de la siguiente función: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

- Entender el problema.

Se le preguntó al grupo ¿Cuál es la condición que debe cumplir la cantidad subradical para que la raíz cuadrada sea un número real?, todo el grupo sabía que la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los reales.

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ es un número real para $x^2-4x+3\geq 0$,
Factorizando el binomio se tiene:
$(x-3)(x-1)\geq 0$

Resolvamos la anterior desigualdad:

$(x-3)(x-1)\geq 0$ si y sólo si $(x-3)\ y\ (x-1)$ tienen el mismo signo.

Los números críticos (los valores de x que hacen al polinomio igual a 0) son: $x=3$ y $x=1$.

Analizando signos en los diferentes intervalos:

Intervalo	Signo de $(x-3)$	Signo de $(x-1)$	Signo de $(x-3)(x-1)$
(- ∞, 1)	-	-	+
(1, 3)	-	+	-
(3, ∞)	+	+	+

La solución está dada por los intervalos que cumplan que $(x-3)(x-1) \geq 0$, (signo positivo en la cuarta columna).

Solución: $Dom\ f:(-\infty,1] \cup [3,\infty)$

Clase 19.

Funciones pares y funciones impares, álgebra de funciones: suma, diferencia, producto y cociente de funciones y sus respectivos dominios.

Se inicia con las definiciones, los ejercicios resueltos en clase comienzan por el de menos profundidad hasta los más complejos. En estas clases se enfatizó en los conocimientos previos adquiridos, debido a la importancia que reviste este recurso en el paradigma constructivista del aprendizaje. De ahí que nuestro esquema para la resolución de problemas quedó estructurado de la siguiente manera:

- ✓ Conocimientos previos (como principal recurso)
- ✓ Comprensión del problema
- ✓ Concepción del plan
- ✓ Ejecución del plan
- ✓ Verificación del resultado (visión retrospectiva)

Como se explicó en la clase número 16, para la solución de algún ejercicio o problema se utilizó la misma metodología basada en la que cada estudiante entregaba un resultado, después se le indagaba por los siguientes aspectos:

1) ¿Crees que lo resolviste correctamente?

2) ¿Podrías explicar qué es lo que se pregunta en este problema?

3) ¿Qué procedimiento utilizaste, qué pasos seguiste?

4) ¿Por qué consideras que esa respuesta es la correcta?

5) ¿Verificaste si tenías algún error?

Por último en grupos (estudiantes avanzados con los menos avanzados), se hacía la socialización de la solución del ejercicio o problema.

Comenzamos explicando de una manera sucinta la diferencia entre función par e impar.

- Una función f se dice par si para cualquier $x \in Dom(f)$ se verifica: $f(-x) = f(x)$.
- Una función *f* se dice impar si para cualquier $x \in Dom(f)$ se verifica: $f(-x) = -f(x)$.

Ejemplo resuelto en clase:

Ejemplo: Determinar si la función es par, impar o ninguna: $f(x) = x^2 - 5$

Sustituyo en x por $-x$

$f(-x) = (-x)^2 - 5$

$f(-x) = x^2 - 5$

Como el resultado es igual a la función original, entonces la función es par, o sea que es simétrica con respecto al eje y.

Práctica:
Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna.

1. $f(x) = 4x^3$

2. $g(x) = -3x^2 - 5$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4. $f(x) = x + |x|$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Definición:

Dadas las funciones reales f y g queremos definir la suma $f+g$ y la diferencia $f-g$, el producto de un número r por una función rf y el cociente f/g de la siguiente manera:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad Dom(f.g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g)$ *se exculyen los valores de x para los que* $g(x) \neq 0$

Ejemplo resuelto en clase:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$, hallar el dominio para $(f+g)(x)$

Solución :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9-x^2}$$
Se debe cumplir que : $x \geq 0 \ y \ 9 - x^2 \geq 0,$
factorizando la última expresión : $(3-x)(3+x) \geq 0,$
la intersección es : $x \geq 0, \quad x \leq 3, \quad x \geq -3,$
el dominio es : $Dom(f+g) = [0,3]$

Clases 22, 23 y 24.

Función Exponencial, Función Logarítmica, Propiedades de los logaritmos.

Como en todas las clases, se iniciaba con aplicaciones del tema a la vida cotidiana y explicando las propiedades y definiciones, luego se resolvían ejercicios siguiendo la misma metodología expuesta en las clases anteriores.
La función exponencial es la que más se presta para resolver ejemplos de la vida cotidiana debido a las grandes aplicaciones que encontramos de ella.

El crecimiento poblacional de una región o población “en años” sugiere el modelo matemático dado por: $N = N_0 e^{kt}$, donde N_0 es la población inicial, t. es el tiempo transcurrido en años y k es una constante. En 1798, el economista inglés Thomas Malthus observó que la relación $N = N_0 e^{kt}$ era válida para determinar el crecimiento de la población mundial y estableció, además, que como la cantidad de alimentos crecía de manera lineal, el mundo no podía resolver el problema del hambre. Esta predicción ha tenido un impacto tan importante en el pensamiento económico, que el modelo exponencial de crecimiento poblacional se conoce con el nombre de modelo Malthusiano.

Ejercicio resuelto en clase:

La población mundial al inicio de 1990 era de 5.3 mil millones de personas. Si la población continúa creciendo con la razón actual de aproximadamente 2% por año:

- Encuentre la función $N(t)$ que exprese la población mundial (en miles de millones) como función del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al inicio de 1990.

- Según este modelo, ¿cuál sería la población mundial al inicio de 2017?

Resolvimos el problema con la metodología propuesta al principio:

- Conocimientos previos:

Para este caso los estudiantes entendieron lo que se les preguntaba y como conocimientos previos sólo el concepto de porcentaje.

- Comprensión del problema:

Se identificaron las variables dependiente (población mundial) e independiente (tiempo) y se hizo la siguiente tabla basados en los datos del problema.

Tiempo (años)	1990	1991	1992	1993	1995
Población (miles de millones de personas)	5.3	5.406	5.51	5.62	5.85

- Concepción del plan:

Utilizar la función exponencial que permita hallar $N(t)$, la población mundial existente en cualquier año, a partir de 1990.

La pregunta del problema es: ¿cuál sería la población mundial al inicio de 2017?

- Ejecución del plan:

Con dos datos cualesquiera de la tabla hallamos el valor de la constante k:
Para el año 0: $t_0 = 0\ (\textit{año}\ 1990),\ N_O = 5.3$ mil millones de personas.
Para el año 1: $t = 1,\ N = 5.406\ \textit{mil millones}$, remplazando en $N = N_O e^{kt}$ queda:

$$5.406 = 5.3e^{k.1}$$

$$e^k = 5.406/5.3 = 1.02.$$

para despejar k se toma $\ln$ a ambos lados:
$\ln(e^k) = \ln(1.02),\quad k = 0.02.$ La función que relaciona las variables es: $N = 5.3e^{0,02t}$

Según este modelo, ¿cuál sería la población mundial al inicio de 2017?
$N = 5.3e^{0,02t}$. Reemplazamos t por la cantidad de años que hay entre 1990 y 2017, es decir 27 años, así:

$$N = 5.3e^{0,02*27} = 9.09483 \text{ mil millones de personas, aproximadamente.}$$

Según las condiciones del problema, la población aproximada para el año 2017 serán 9 mil 94 millones 830 mil personas*.

Este dato es una aproximación, ya que el redondeo hecho al calcular la constante k, es muy fuerte.

- Verificación del resultado (visión retrospectiva):

Después de obtener el resultado se les preguntaba a los estudiantes si tenía sentido la respuesta y se evaluaba año por año, para los datos tabulados, hasta llegar al mismo resultado.

LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES:

La metodología utilizada para el abordaje de este tema es igual a las ya reportadas en parágrafos anteriores, respecto a la apropiación del concepto de función, con un poco de historia para pasar a la etapa de definición rigurosa de logaritmo.
Iniciamos con estos ejemplos sencillos para la clase:

1) ¿A qué exponente hay que elevar la base 5 para obtener 25?

   Al exponente 2, ya que $5^2 = 25$. Decimos entonces que "el logaritmo de 25 en base 5 es 2". Simbólicamente lo expresamos de la forma $\log_5 25 = 2$ equivalente a $5^2 = 25$. (Observa que un logaritmo es un exponente.)

También podemos decir que $2^3 = 8$ es equivalente a $\log_2 8 = 3$.

El logaritmo de un número x en base 10 se denota como $\log x$

Definimos logaritmo en base $a,$ así:

El logaritmo en base a de un número N denotado por $\log_a N$ es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número, es decir:
$\log_a N = x \quad \Leftrightarrow \quad N = a^x$

En clase propusimos completar las incógnitas de los siguientes ejercicios:

$$\log_6\left(\frac{1}{36}\right) = ?; \qquad \log_? 4 = 2; \qquad \log_5 125 = ?;$$

$$\log_?\left(\frac{1}{27}\right) = 3; \qquad \log_?\left(\frac{1}{25}\right) = -2; \qquad \log_3 ? = -2;$$

$$\log_? 625 = 4; \qquad \log_?\left(\frac{1}{216}\right) = -3; \qquad \log_5 \sqrt[3]{25} = ?;$$

$$\log_? 0.5 = -\frac{1}{2}; \qquad \log_6 1296 = ?; \qquad \log_4 256 = ?;$$

$$\log_{128} ? = \frac{1}{3}; \qquad \log_{36} ? = \frac{3}{2}; \qquad \log_a ? = n;$$

$$\log_{1/3} ? = 2; \qquad \log ? = 3; \qquad \log ? = 0; \qquad \log_4 2 = ?$$

Igual que en las clases anteriores siguiendo el modelo constructivista basado en procesos de colaboración y planteamiento de preguntas como punto de partida para aprender matemáticas, en este caso logaritmos, se hizo la socialización de la solución del ejercicio y de las siguientes ecuaciones utilizando las propiedades de los logaritmos vistas en la clase:

Ejercicios resueltos:
Encontrar el valor para x que satisfaga cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\log x = \log(2x-6)$

$$\log x - \log(2x-6) = 0$$

$$\log\left(\frac{x}{2x-6}\right) = 0$$

$$10^{\log\left(\frac{x}{2x-6}\right)} = 10^{0}$$

$$\left(\frac{x}{2x-6}\right) = 1$$

$$x = 2x-6$$

$$x = 6$$

Verificación del resultado: $\log(6) = \log[(2.6)-6]$

2. $\log_2 x^3 = 5$

$$3\log_2 x = 5$$

$$3\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) = 5$$

$$\frac{\log x}{\log 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log x = \frac{5}{3}\log 2.$$

$$x = 10^{\frac{5\log 2}{3}}$$

$$x = 3.175$$

Verificación del resultado: $\log_2 (3.175)^3 = 3.\log_2 (3.175) \cong 5$

Según lo propuesto por la pedagogía constructivista, antes de terminar la clase se eligieron a diez estudiantes para indagarles lo siguiente:

1) ¿Crees que los resolviste correctamente?

2) ¿Podrías explicar qué es lo que se pregunta en estos ejercicios?

3) ¿Qué procedimiento utilizaste y qué pasos seguiste?

4) ¿Por qué consideras que esa respuesta es la correcta?

5) Verifica cada respuesta en la ecuación original y comprueba que es correcta.

3. RESULTADOS

Presentaremos los resultados de la prueba inicial o diagnóstica hecha el primer día de clase, los resultados de la prueba correspondiente al tema de funciones y el resultado de la última prueba realizada por la Universidad. Con base en estos resultados realizaremos sus respectivos análisis.

Durante el semestre se realizaron 6 evaluaciones del 10% propuestas por la escuela de matemáticas de la Universidad, una prueba del 30% que se realiza a todos los estudiantes de todas las sedes de la Universidad en el país y el restante 10% se evalúa mediante tareas quincenales. Como se mencionó en la introducción, los temas donde los estudiantes mostraron mejores resultados, fueron las clases 16-24, temas de funciones, estas notas se muestran a continuación:

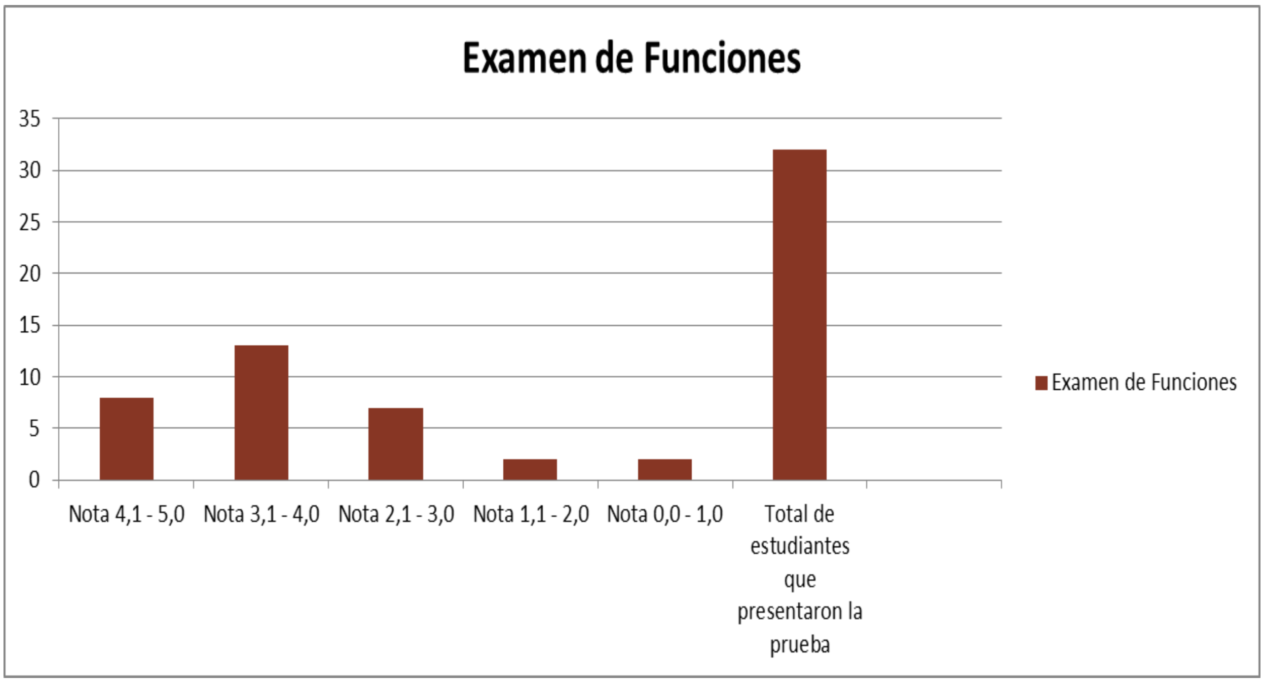


Gráfico 3.1: resultados del examen de funciones.

De 34 estudiantes que se presentaron el primer día a clases, cancelaron el curso 7 estudiantes, Los resultados de la evaluación final realizada por la Universidad, para aquellos que culminaron el curso, se anotan en la siguiente tabla:

Calificación	Número de estudiantes	Porcentaje
Sin nota*	6	22.22%
0<nota<1.0	1	3.7%
1.0≤nota<2.0	5	18.5%
2.0≤nota<3.0	4	14.8%
3.0≤nota<4.0	8	29.62%
4.0≤nota<5.0	3	11.11%

Tabla 3.2: notas de la última prueba del curso ***Estudiantes que no presentaron la prueba final**

Calificación	Número de estudiantes	Porcentaje
0<nota<1.0	26	75%
1.0≤nota<2.0	3	8%
2.0≤nota<3.0	1	3%
3.0≤nota<4.0	3	8%
4.0≤nota<5.0	1	3%

Tabla 3.3: Notas de la prueba diagnóstica

De la tabla 3.3 se resalta que únicamente 4 estudiantes obtuvieron una nota satisfactoria. La nota obtenida por cada estudiante se le informó a cada uno de ellos de manera privada, haciendo énfasis en sus deficiencias y motivándolo a continuar con su proceso de formación con un poco más de esfuerzo.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

- Los resultados obtenidos por los estudiantes en la evaluación final de período muestran que 6 estudiantes no se presentaron. Al tratar de encontrar la razón de estas ausencias se concluyó que 4 de estos estudiantes sólo asistieron a 7, 8, 10 y 11 clases durante el semestre y dos de ellos habían indicado al inicio del curso que se sentían desmotivados para continuar su carrera. Uno de los seis estudiantes que no presentaron la prueba final, a pesar que asistía regularmente a las clases, no asistía a las asesorías y en los tres primeros exámenes llevaba un promedio de 1.7.

- De los tres estudiantes que obtuvieron una nota entre 4.0 y 5.0, dos asistieron a 26 clases durante el curso, el otro asistió a 24 clases. Ninguno de ellos fue el que obtuvo una nota entre 4.0 y 5.0 en la prueba diagnóstica.

- De los ocho estudiantes que obtuvieron una nota entre 3.0 y 4.0, sólo uno de ellos obtuvo una nota entre 3.0 y 4.0 en la prueba diagnóstica.

- De un 11% que obtuvieron una nota aprobatoria en la prueba diagnóstica, se pasó a 41% de aprobados en la prueba final.

- Los tres estudiantes que tenían experiencia en otras universidades culminaron satisfactoriamente el curso.

- Durante el semestre hubo buena asistencia a las clases y aquellos estudiantes que obtuvieron bajas notas fueron los de menor asistencia.

- Para cada una de las evaluaciones los estudiantes contaban con la realización de un taller previo, de espacios de asesoría y del trabajo dirigido en clase. Uno de los objetivos en cada clase, en los talleres y en las asesorías fue el de brindar confianza a todos ellos que permitiera rodearlos de seguridad y entregarles protagonismo según la pedagogía constructivista.

- Los estudiantes conservan arraigadas formas de aprendizaje que se dan en secundaria donde se prioriza el aprendizaje memorístico y no el aprendizaje significativo.

- Por medio de varias estrategias, como el correo electrónico, se intentó motivar a los estudiantes para que no abandonaran la Universidad.

- Los mejores resultados, desde el punto de vista de calificaciones, se obtuvieron en las clases sobre funciones, en cada una de ellas se utilizó el método de colaboración; es decir, los estudiantes más aventajados realizaban los talleres con los menos aventajados acompañados siempre por el profesor.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

La mayoría de los estudiantes tomó con seriedad el curso, dedicándole tiempo y esfuerzo para obtener mejores resultados en su aprendizaje, esto se reflejó en la participación de los estudiantes en la clase y en los talleres; se conformaron grupos de estudio; la labor académica se desarrolló en un ambiente sin tensiones y de disciplina.

El curso además de refrescar y clarificar conceptos, permitió que los estudiantes tomaran conciencia de su papel en la Universidad y de la importancia de las matemáticas en sus vidas y en la carrera por ellos elegida.

Aunque la actitud de los estudiantes hacia el curso fue positiva y participativa, su rendimiento en el mismo no fue tan bueno y corrobora que el nivel de conocimientos que traen los estudiantes de la educación básica y media, es muy bajo comparado con el nivel que se exige en la Universidad y por esta razón la Universidad debe implementar estrategias para evitar que aquéllos que no sean capaces de sostenerse académicamente, opten por la deserción.

Algunas recomendaciones que se hacen para mejorar en estos aspectos son:

- Determinar el nivel de conocimientos y habilidades que traen los estudiantes del bachillerato y que no se puede inferir a partir de la prueba de admisión, mediante la aplicación de una prueba diagnóstica que permita conocer habilidades de los estudiantes. Con aquellos que obtengan un nivel bajo, programar un curso con mayor acompañamiento.

- Clasificar a los estudiantes y conformar los grupos de acuerdo al nivel detectado en la prueba diagnóstica. Con esto se pretende crear grupos homogéneos en los cuales se pueda implementar metodologías acordes al nivel de conocimientos de cada grupo.

6.BIBLIOGRAFÍA

1. CAMPANARIO, JUAN y MOYA , AIDA (1999). ¿Cómo enseñar Ciencias?, Principales tendencias y propuestas. Investigación didáctica, vol 19(2), p.p 179-192.

2. JARAMILLO, CARLOS y ESTEBAN DUARTE, PEDRO. Enseñanza de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. Revista Educación y Pedagogía. Vol 18. p.p 111-117.

3. MORENO ARMELLA, LUIS y WALDEGG, GUILLERMINA (1998). La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿coincidencia o complementariedad?, Enseñanza de las ciencias, vol. 16 número 3. p.p 421-429.

4. SANTOS TRIGO, LUZ MANUEL, La resolución de problemas matemáticos, fundamentos cognitivos. México Ed. Trillas: Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, 2007.

5. HORST RUMPF, (2001). Los conocimientos no se pueden transmitir a otros como informaciones. Enseñanza de las ciencias vol 14 número 2 pp 85-92.

6. http://www.colposgrado.edu.mx/memorias/dominguez_cuenca1.pdf

7. CARMEN GLORIA ACEVEDO, SANDRA CARRILLO, MAURICIO CASTRO, ROY COSTILLA, SILVIA ORTIZ, ERNESTO TREVIÑO, Aportes para la enseñanza de de la Matemática. http://unesdoc.unesco.org/images/0018/001802/180273s.pdf.

8. POSSO Abel, OBREGÓN DE MORA Gloria. Nivel de conocimiento matemático del estudiante que ingresa a la Universidad, Matemáticas & Educación, Volumen 2, Número 2, p.p 43-53.