colección textos

textos textos textos textos textos textos

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Germán Arenas Sicard

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias
Saber más y formar mejor

Electricidad y magnetismo

Electricidad y magnetismo

Germán Arenas Sicard

Departamento de Física
Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

Electricidad y magnetismo

© Germán Arenas Sicard,

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

© Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Ignacio Mantilla, Decano
Eugenio Andrade, Vicedecano Académico

Jorge Ortiz Pinilla, Director de Publicaciones

Primera edición, 2008
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-701-965-0

Impresión:
Guías de impresión
contacto@guiasdeimpresion.com

Diagramación: Margoth Hernández sobre original en LaTeX del autor
Diseño de carátula: Andrea Kratzer

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Arenas Sicard, Germán 1946–
Electricidad y magnetismo / Germán Arenas Sicard. - Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2008
XIX, 318 p.

ISBN 978-958-701-965-0

1. Electricidad 2. Magnetismo

CDD-21 537 / 2008

Índice general

Electricidad y magnetismo xv

1. Precisiones iniciales **1**

1.1. La electricidad 1

1.2. La carga eléctrica 1

1.3. La corriente eléctrica 4

1.4. Temas para discusión 5

1.5. Actividades prácticas 6

2. Fuerzas eléctricas y campos eléctricos **7**

2.1. Introducción 7

2.2. Los experimentos de Coulomb 8

2.3. Magnitud de las fuerzas 11

2.4. El campo eléctrico 13

2.5. Líneas y tubos de fuerza 14

2.6. Campos generados por colecciones de cargas 16

2.7. Comentarios 17

2.8. La ley de Gauss 18

2.9. Campos eléctricos generados por cargas discretas 24

2.10. Campos eléctricos generados por cargas distribuidas 27

2.11. Las pruebas de la ley de inverso al cuadrado 28

2.12. Cálculo de campos con la ley de Gauss 30
2.13. Resumen y comentarios 32
2.14. Temas para discusión 34
2.15. Ejercicios 34
2.16. Actividades prácticas 36

3. El potencial electrostático **38**
3.1. Introducción 38
3.2. El potencial escalar eléctrico 38
3.3. La diferencia de potencial y el camino de integración 42
3.4. Funciones potencial para distribuciones continuas de carga . 44
3.5. La ecuación de Poisson 46
3.6. La ecuación de Laplace 48
3.7. Potencial en una lente electrostática 52
3.8. Unicidad de la solución 54
3.9. La medición de campos eléctricos 56
3.10. Un potencial en coordenadas cilíndricas 57
3.11. Resumen y comentarios 58
3.12. Temas para discusión 59
3.13. Ejercicios 60
3.14. Actividades prácticas 64

4. Fuerzas magnéticas y campos magnéticos **66**
4.1. Introducción 66
4.2. Los experimentos de Ampère 67
4.3. La corriente eléctrica y la densidad de corriente 69
4.4. La fuerza entre dos circuitos de corriente 71
4.5. La fuerza entre dos corrientes paralelas 73
4.6. El campo magnético 75

4.7. La densidad de flujo magnético en el interior de un solenoide 79
4.8. El torque sobre un lazo de corriente 80
4.9. La fuerza de Lorentz 82
4.10. La ley de Ampère y sus aplicaciones 86
4.11. La ley de Ampère en general 89
4.12. El potencial vector magnético 94
4.13. Comentarios sobre el potencial vector 96
4.14. ¿Monopolos magnéticos? 97
4.15. La medición de campos magnéticos 99
4.16. Resumen 100
4.17. Temas para discusión 101
4.18. Ejercicios 102
4.19. Actividades prácticas 106

5. Las contribuciones de Faraday y Maxwell 108
5.1. Introducción 108
5.2. La ley de Faraday 109
5.3. La regla de Lenz 113
5.4. Ejemplos de inducción magnética 114
5.5. ¿Un potencial eléctrico escalar? 118
5.6. La corriente de desplazamiento 119
5.7. Las ecuaciones de Maxwell y los potenciales 126
5.8. Temas para discusión 127
5.9. Ejercicios 129
5.10. Actividades prácticas 134

6. Las ecuaciones de Maxwell y los campos que se propagan 135
6.1. Introducción 135
6.2. La estructura de los campos 136

6.3. Los potenciales retardados 141
6.4. Los experimentos de Hertz 147
6.5. Los campos retardados 149
6.6. Resumen 152
6.7. Comentarios 153
6.8. Temas para discusión 154
6.9. Ejercicios 154
6.10. Actividades prácticas 155

7. Reflexiones sobre los campos (1) 156

7.1. Introducción 156
7.2. La energía de una colección de cargas puntuales 157
7.3. La ley de Ohm 163
7.4. El efecto Hall 166
7.5. Campos estáticos en conductores 168
7.6. Las condiciones de frontera 174
7.7. Condensadores 176
7.8. El proceso de "carga" de un condensador 179
7.9. Resumen y comentarios 181
7.10. Temas para discusión 182
7.11. Ejercicios 182
7.12. Actividades prácticas 184

8. Reflexiones sobre los campos (2) 185

8.1. Introducción 185
8.2. Inductancia 185
8.3. La inductancia como parte de un circuito 189
8.4. Energía e inductancia 194
8.5. La energía magnética 195

8.6. Conservación de la energía en el electromagnetismo 199
8.7. Comentarios 201
8.8. *Momentum* electromagnético 203
8.9. Resumen y comentarios 206
8.10. Temas para discusión 207
8.11. Ejercicios 208
8.12. Actividades prácticas 210

9. Campos con medios dieléctricos 212
9.1. Introducción 212
9.2. Contribución de los medios dieléctricos 212
9.3. Un dieléctrico isotrópico en un condensador 214
9.4. Cargas de polarización 216
9.5. Cargas superficiales 218
9.6. El vector desplazamiento eléctrico 219
9.7. La "constante" dieléctrica 220
9.8. Desplazamiento eléctrico y campo eléctrico en una frontera 221
9.9. Los "mecanismos" de la polarización 222
9.10. Electrostricción, piezoelectricidad y ferroelectricidad . . . 225
9.11. Ruptura y pérdidas 227
9.12. Temas para discusión 228
9.13. Ejercicios 229

10. Campos con medios magnéticos 231
10.1. Contribución de los medios magnéticos 231
10.2. La hipótesis de Ampère 231
10.3. Corrientes "verdaderas" y corrientes electrónicas orbitales . 232
10.4. El momento magnético 233
10.5. La magnetización 235

10.6. La intensidad de campo magnético 237
10.7. Corrientes de magnetización 238
10.8. ¿Cómo se diseña un electroimán? 240
10.9. Los polos magnéticos 243
10.10. Comportamiento de los materiales en un campo magnético 245
10.11. Los materiales ferromagnéticos 248
10.12. Temas para discusión 252
10.13. Ejercicios 253
10.14. Actividades prácticas 254

A. Instrumentos matemáticos **255**

A.1. Introducción 255
A.2. Los vectores y el álgebra de vectores 256
A.3. El vector área 259
A.4. El producto escalar 261
A.5. El ángulo y el ángulo sólido 263
A.6. El producto vectorial 265
A.7. Las rotaciones 268
A.8. El producto escalar triple 270
A.9. El producto vector triple 271
A.10. El cálculo con vectores 272
A.11. Las integrales de línea 273
A.12. Las integrales de línea con vectores 275
A.13. Las integrales de superficie 277
A.14. Las integrales de superficie con vectores 279
A.15. Las integrales de volumen 280
A.16. El gradiente 281
A.17. La divergencia 286
A.18. El laplaciano 290

A.19. El rotacional 293
A.20. El teorema de Stokes 296
A.21. Resumen 298
A.22. Ejercicios 299

B. Funciones de Green **302**
B.1. Las funciones de Green para la ecuación de Poisson 302
B.2. La función de Green para la ecuación de onda 303

C. Radiación y antenas **307**
C.1. Introducción 307
C.2. El dipolo de Hertz 308
C.3. Una antena receptora 311
C.4. Comentarios 313

Índice de figuras

2.1. Balanza de torsión de A. Coulomb 9
2.2. Geometría para la ley de Coulomb 10
2.3. Líneas de campo eléctrico 15
2.4. Ejemplos de líneas de campo eléctrico 16
2.5. La función aguja 19
2.6. Sobre la ley de Gauss. 22
2.7. Líneas del campo generado por un dipolo cerca y lejos . . . 25
2.8. Cálculo del campo generado por una esfera de cargas 28
2.9. Un electroscopio sencillo 37

3.1. Acerca de la definición de potencial eléctrico 40
3.2. Ejemplos de potenciales y campos eléctricos 42
3.3. Cálculo del potencial generado por una esfera de carga . . . 44
3.4. Sobre el potencial entre dos planos con carga uniforme . . . 46
3.5. Sobre el potencial en el espacio entre dos planos conductores 50
3.6. Acerca del potencial entre dos cilindros conductores 50
3.7. Acerca del método de relajación 53
3.8. Una lente electrostática y el potencial entre electrodos . . . 54
3.9. Un potencial (a) uniforme y (b) modificado 57
3.10. Una componente de un cañón electrónico 59

4.1. Sobre la regla de la mano derecha 68
4.2. Acerca de los experimentos de Ampère 68
4.3. Sobre la definición de densidad de corriente 70
4.4. Sobre el cálculo de la fuerza entre dos circuitos de corriente 71
4.5. Acerca del cálculo de la fuerza entre dos corrientes paralelas 73
4.6. Sobre el campo generado por una corriente en un anillo . . 77
4.7. La geometría de las bobinas de Helmholtz 78
4.8. La geometría de un solenoide 79
4.9. Acerca de las fuerzas sobre un lazo de corriente 81
4.10. Acerca del experimento de J.J. Thompson 85
4.11. Acerca de la integral de línea del campo magnético 87
4.12. Dos lazos iguales con integral de línea distinta 87
4.13. Acerca de la Ley de Ampère en un solenoide largo 88
4.14. Ilustración de un alambre enrollado sobre un toroide 89
4.15. Sobre el cálculo del campo con la Ley de Ampère 90
4.16. Sobre la equivalencia de dos desplazamientos 91
4.17. Sobre la integral de línea cuando el camino de integración encierra al lazo de corriente 92
4.18. Sobre la integral de línea cuando el camino de integración *no* encierra al lazo de corriente 92
4.19. Acerca de la medición de campo aprovechando el efecto Hall 99
4.20. Un motor eléctrico 102
4.21. Geometría para el ejercicio 102
4.22. Esquema de un espectrógrafo de masas 104
4.23. Sobre el barrido de la pantalla en un monitor de televisión . 104
4.24. Geometría para el ejercicio 105
4.25. Diagrama de un posible experimento 106

5.1. El símbolo convencional para una batería 109

5.2. La geometría para la expresión de Faraday 112
5.3. Sobre la regla de Lenz 113
5.4. Sobre un ejemplo de inducción magnética 115
5.5. Sobre otro ejemplo de inducción magnética 115
5.6. Esquema de un generador elemental de corriente 116
5.7. El *generador*, con un *conmutador* mecánico 117
5.8. El generador, con *corrección* del campo 118
5.9. Acerca del flujo de corriente en una superficie 121
5.10. Acerca de una dificultad con la ley de Ampère 122
5.11. Esquema para un motor *de inducción* 128
5.12. Geometría para un tema de discusión 129
5.13. Geometría para un ejemplo de inducción 129
5.14. Esquema para el segundo ejercicio 130
5.15. Un experimento de inducción magnética 131
5.16. Esquema de una inducción en un electroimán 132
5.17. Sobre un cálculo de inducción magnética 132

6.1. Sobre la estructura espacial de una onda plana 138
6.2. Sobre los campos emitidos por una carga en movimiento . . 144
6.3. Sobre los campos emitidos por una carga en movimiento . . 146

7.1. Sobre la adición de una capa de carga eléctrica 160
7.2. Sobre la relación entre campo e intensidad de corriente . . . 164
7.3. La geometría para un sensor de efecto Hall 167
7.4. Sobre las cargas y campos en un conductor 170
7.5. Acerca de la ley de Gauss *dentro* de un conductor 170
7.6. Sobre el campo eléctrico cerca de un conductor 171
7.7. Sobre el cálculo de los campos cerca de un conductor 172
7.8. Sobre las condiciones de frontera 175

7.9. La geometría de un condensador de placas planas 176
7.10. Acerca del proceso de *carga* de un condensador 180
7.11. Sobre la diferencia de potencial en un condensador que se carga 181
7.12. La intensidad de corriente en un experimento fotoeléctrico . 183

8.1. Sobre las líneas de campo que enlazan dos circuitos 186
8.2. Geometría de un solenoide largo 188
8.3. Esquema de un *circuito RL* 189
8.4. La intensidad de la corriente como función del tiempo . . . 190
8.5. La geometría de dos solenoides acoplados 191
8.6. La intensidad de corriente en un circuito 195
8.7. Sobre el flujo de Poynting en un circuito sencillo 202
8.8. Sobre el cálculo del *momentum* electromagnético 204
8.9. Dos lazos acoplados por el campo magnético 208
8.10. Un circuito con dos autoinductancias e inductancia mutua . 209

9.1. Modelo elemental de un material en un campo eléctrico . . 213
9.2. Sobre un condensador lleno de un material 215
9.3. Geometría para calcular las cargas de polarización 217
9.4. Sobre el cálculo de cargas superficiales 219
9.5. Acerca de las condiciones de frontera entre dos dieléctricos . 222
9.6. Sobre los mecanismos de polarización de un dieléctrico . . . 223
9.7. Acerca de la polarizabilidad como función de la frecuencia . 224
9.8. Sobre el comportamiento de algunos dieléctricos 226
9.9. Un condensador lleno con dos trozos de dieléctricos 229
9.10. Un condensador parcialmente lleno con un dieléctrico . . . 230

10.1. Sobre el momento magnético de un electrón en órbita . . . 234
10.2. Sobre la magnetización no uniforme 236

10.3. El cálculo del vector potencial para un dipolo magnético . 238
10.4. Esquema del núcleo toroidal para un electroimán 241
10.5. Acerca de una barra cilíndrica con magnetización uniforme 244
10.6. Esquema del aparato de Quincke 247
10.7. Sobre los comportamientos dia- y paramagnético 248
10.8. Sobre un experimento con un núcleo magnético 249
10.9. Forma general de las curvas de magnetización 250
10.10. Esquema de la transición de un dominio magnético a otro 251
10.11. Geometría de un circuito magnético 254
10.12. Una dependencia de magnetización e intensidad magnética 254

A.1. Representación de vectores y su suma 257
A.2. Una rotación de ejes coordenados 258
A.3. Acerca de la definición del vector área 260
A.4. Sobre el producto escalar de dos vectores 262
A.5. Sobre la definición de ángulo 263
A.6. Sobre la definición de ángulo sólido 264
A.7. Una regla de mano derecha para el producto vectorial . . . 266
A.8. Acerca del vector área como producto vectorial 267
A.9. Acerca del producto vectorial en mecánica 267
A.10. Dos resultados de las rotaciones de un dado 268
A.11. Sobre el resultado de rotaciones pequeñas 268
A.12. Sobre el producto escalar de tres vectores 270
A.13. Sobre la definición de integral de línea 273
A.14. Posibles caminos de integración 273
A.15. Otros dos caminos de integración 274
A.16. Acerca del cálculo del volumen de agua en un estanque . . 277
A.17. Una región de integración 278
A.18. Acerca del flujo incompresible sobre dos superficies 280

A.19. Acerca de la posición del CM de un hemisferio 280
A.20. El gradiente en una dimensión 281
A.21. Contornos de valor constante de una función 282
A.22. Posibles isotermas en un horno 283
A.23. El cálculo del flujo de campo en las caras de un volumen . 287
A.24. Acerca del Teorema de Gauss 288
A.25. Sobre la integral de superficie de un campo 289
A.26. Acerca de la curvatura de una función 292
A.27. Un camino de integración para evaluar un rotacional . . . 294
A.28. Tres lazos en planos perpendiculares y su equivalente . . . 295
A.29. Acerca del teorema de Stokes 297

Electricidad y magnetismo

Frente a la tradición debemos tener un comportamiento
que la conserve en la conciencia, sin doblegarnos ante ella.
La tradición debe ser protegida de la desaparición,
pero debemos separarnos de su mítica autoridad.
Th. W. Adorno, *Tesis sobre la tradición*

Presentación

Este es un curso sobre electricidad y magnetismo clásicos. Quien estudia y profundiza la teoría tiene oportunidad de adquirir conocimientos muy finos y una gran claridad de conceptos. Un experimentador emplea la teoría del electromagnetismo clásico y conoce bastante de sus aproximaciones. Sabemos que la naturaleza, la materia, es mucho más complicada de lo que describen las teorías clásicas. Entonces, ¿para qué dedicarle tiempo a estas? Una buena justificación para el estudio de una teoría clásica es precisamente que se puede considerar como un ejercicio en la construcción de una teoría y en las modificaciones que le introducen para poderla emplear en casos más complejos; aunque no solo es un ejercicio, la teoría que nos va a ocupar es eminentemente práctica.

La física experimental emplea la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo de muchas maneras; por ejemplo, se construyen y emplean electroimanes, también sistemas para formar haces de electrones o iones (llamados *cañones*). Se han construido sistemas magnéticos y eléctricos para enfocar o desviar esos haces en lo que se llama *óptica electrónica*. En las universidades se ha trabajado en la construcción de fuentes de muy alta tensión y su aplicación en sistemas prácticos, incluido el estudio de la electricidad atmosférica. Se ha adquirido una vasta experiencia que puede servir a los nuevos estudiosos de la física. Nuestra sociedad moderna está basada en el dominio de la electricidad y el magnetismo y prácticamente lo damos por garantizado. Para ilustrarlo, basta recordar qué graves inconvenientes

surgen cuando se interrumpe el suministro de la energía eléctrica. El funcionamiento de los seres vivos muestra que los fenómenos eléctricos están en la base de todo lo que percibimos.

Una de las fallas que se puede encontrar en la enseñanza de la física y, claro está, en los textos empleados, es una actitud que podríamos llamar "ritualización". La física, y para nuestro propósito el electromagnetismo, se presenta como *la verdad*, como una serie de conocimientos seguros, matematizados e inconmovibles. Con este curso se intenta ofrecer una visión del electromagnetismo como una representación *viva* de situaciones experimentales: es muy cierto que la matematización es esencial y, de hecho, el grado de abstracción logrado en nuestro tema es muy alto, pero no olvidemos sus orígenes.

El presente texto no pretende responder todas las preguntas posibles: probablemente es imposible lograrlo. Sí se busca provocar preguntas pero, sobre todo, se trata de lograr que los estudiantes fortalezcan su capacidad para:

- Tomar y trabajar informaciones concretas.
- Representarse los órdenes de magnitud de las cantidades físicas trabajadas.
- Formular argumentos adecuados.
- Comprender y criticar un discurso especializado.
- Juzgar y criticar los desarrollos y conocimientos de las ciencias naturales.
- Reconocer, observar y explicar fenómenos electromagnéticos en su entorno cotidiano.
- Aplicar sus conocimientos en la acción sobre su ambiente.

Para el logro de estos objetivos proponemos actividades de reflexión, ejercicios y actividades prácticas en los diferentes capítulos.

El electromagnetismo es, sin duda, muy rico en ecuaciones; es necesario conocerlas y manejarlas y saber aplicarlas para resolver problemas. Pero no es menos cierto que las bases experimentales están expresadas en esa matematización; tampoco es menos cierto que la verdad del electromagnetismo está aún ahora, a comienzos del siglo XXI, en debate y que podríamos estar muy cerca de un "cambio de paradigmas", de acuerdo con la expresión de Kuhn[1]. Una presentación viva de la teoría podría muy bien ser

[1] T. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas* (1962) . Ver, por ejemplo, http://www.des.emory.edu/mfp/Kuhn.html para un resumen.

más interesante para un estudiante: se está participando en un proceso de construcción y en una aventura intelectual de alcance global, en el mejor sentido del término. Se debería lograr que la abundancia de ecuaciones y la destreza operacional necesaria para manejarlas no se conviertan en un oscurecimiento de la realidad palpable en las situaciones físicas.

Newton propuso una estructura para la construcción de una teoría física: a partir de situaciones experimentales se realiza un proceso de inducción para enunciar los axiomas de la teoría. Por supuesto, es imprescindible una etapa previa de definición cuidadosa de los términos que se van a emplear en la teoría.

Luego de las etapas anteriores, se buscan reglas para la clase de enunciados y de razonamientos que se considerarán válidos en el desarrollo de la teoría, mediante el uso del lenguaje técnico para manejar los conceptos. Finalmente se podrán emplear los resultados deducidos de los axiomas, empleando las reglas y el lenguaje, para compararlos con los resultados cualificados e interpretados de situaciones experimentales nuevas; por una parte, para buscar apoyo y confirmación (o lo contrario) para la teoría; para predecir nuevos fenómenos o relaciones entre fenómenos. Importante en todo este proceso es una "vocación práctica" de la teoría. No se desarrolla la teoría a partir de axiomas totalmente arbitrarios, se desarrolla la teoría y se desarrollan aplicaciones que pueden ser puestas a prueba por físicos o técnicos en situaciones similares en cualquier otro lugar o momento.

Tras mucho trabajo, la teoría del electromagnetismo clásico se ha basado en cuatro ecuaciones que traducen en un lenguaje técnico, con las necesarias definiciones, los resultados de cuatro situaciones experimentales. El lenguaje matemático que se emplea también ha cambiado bastante desde los desarrollos originales. Una de las variantes más poderosas emplea el lenguaje de las ecuaciones diferenciales parciales con vectores. En este curso lo aplicaremos extensamente. El apéndice A se ocupa de una presentación básica del tema[2].

Es necesario mantener vigilancia sobre el uso del lenguaje empleado. Aunque la física y todas las ciencias naturales pretenden ser consistentes en el uso técnico de las palabras, el lenguaje esconde todavía muchas trampas. En muchas obras científicas y no científicas podemos encontrar trampas similares.

[2] Se encuentra una extensa colección de ejercicios elementales resueltos, en español, en la página www.selectividad.profes.net

En electromagnetismo hay palabras que no se han depurado de sus orígenes. Es el caso de la palabra "fuerza" que se emplea en contextos diferentes al definido en mecánica; el caso de la palabra "inducción", que tiene varios significados diferentes. Quien se aproxima al estudio de esta rama de la física debe tener simplemente precaución y, si es del caso, buscar la clarificación del significado de una palabra dentro de un contexto. Quienes trabajamos desde hace algún tiempo en estos campos, también conservamos muchas de esas confusiones en nuestro lenguaje. El estudiante deberá considerar muchas expresiones como una forma coloquial de expresarse. Habrá que allanar, a su debido tiempo, las dificultades que puedan ocasionar.

En este curso emplearemos el sistema internacional de medidas (SI), aunque hay otros sistemas de uso frecuente en la física, sobre todo en los desarrollos teóricos. A pesar de las desventajas que puedan atribuirse al SI, parece conveniente que una primera aproximación a una teoría compleja se realice con un solo sistema de unidades; cuando se tengan más firmes y claros los conceptos, se podría pasar a emplear otros sistemas de unidades, de acuerdo con las necesidades.

He tratado de criticar y eliminar errores presentes en muchos documentos; no puedo asegurar que no haya introducido algunos errores propios. Pero confío en el espíritu crítico de mis lectores, en su capacidad analítica y en un sano escepticismo, necesario en todo estudiante –estudioso– de las ciencias. No se está exponiendo una doctrina infalible, sino una teoría que se construyó –socialmente–; se está argumentando: si el argumento no es convincente, debe rechazarse. Recordemos que el lema de la Royal Society, a la que perteneció Newton, traducido del latín, expresa que *nadie está obligado a jurar sobre las palabras de los maestros*. Los maestros seguramente intentan –o intentamos– obrar honradamente, pero ¿hay alguien exento de equivocarse?

En este contexto resulta interesante recordar uno de los diálogos entre maestro y aprendiz en la novela de Umberto Eco *El nombre de la rosa:*

Pero entonces –me atreví a comentar– aún estáis lejos de la solución...

Estoy muy cerca, pero no sé de cuál.

¿O sea que no tenéis una única respuesta para vuestras preguntas?

Si la tuviera, Adso, enseñaría teología en París.

¿En París siempre tienen la respuesta verdadera?

Nunca, pero están muy seguros de sus errores.

¿Y vos? –dije con infantil impertinencia–. ¿Nunca cometéis errores?

A menudo –respondió–. Pero en lugar de concebir uno solo, imagino muchos, para no convertirme en el esclavo de ninguno.

El lector encontrará en este libro una exposición del paradigma clásico, es decir la *vieja* historia, un tanto eurocentrista, necesaria para explicar muchos fenómenos experimentales y aún para predecir nuevos comportamientos (todavía aparecen muchos artículos, en revistas de renombre mundial, con desarrollos basados en ese paradigma). Pero se mostrará cómo la construcción de esa solución a muchos problemas no deja de tener dificultades lógicas y experimentales.

Se dice que un libro se escribe sobre la base de otros; eso es aún más cierto en el caso de un libro de texto. Es claro que los libros con los que aprendimos tienen gran influencia a la hora de escribir. Sin tratar de mencionar todos, se puede afirmar que, de los fácilmente accesibles, aún cuando no se comparta completamente el punto de vista, será interesante echar una ojeada a:

- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley, 1964, volumen 2.
- D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1989.
- E. Purcell, *Electricity and Magnetism*, McGraw Hill, 1984.
- M.H. Shamos, *Great Experiments in Physics*, Dover, 1987.

Una serie de libros ha influido poderosamente sobre el autor de estas líneas; el autor de esa serie es uno de los más interesantes teóricos de comienzos del siglo XX. Son interesantes por su tratamiento de la teoría que se une cuidadosamente con la discusión de los experimentos; para nuestro tema y para otros se puede recomendar la consulta de:

- A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, traducción y reedición Academic Press, 1964, volumen 3 (Electrodynamics).

y para la matemática:

- P. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.

1

Precisiones iniciales

1.1. La electricidad

Nos apoyaremos en muchos documentos que aparecen en la internet. El lado positivo de esa red es que ofrece una manera de mantenerse informado en la actualidad, en la "acción". Uno de los negativos es que la terminología empleada puede estar dirigida a un conjunto de lectores de un nivel que no exige gran precisión en los conceptos. Es así como se encuentran afirmaciones como "la electricidad se mueve" o "las baterías convierten energía química en electricidad". Se emplea la palabra *electricidad* con el significado de una sustancia. Sobre eso va la primera advertencia.

Emplearemos la palabra "electricidad" con un sentido muy diferente; es una teoría –y una práctica, claro está– acerca de una clase de fenómenos. También emplearemos la palabra "magnetismo" con el sentido de una teoría –y una práctica– sobre otro conjunto de fenómenos. Cuando hayamos justificado la unión de las dos, sobre la base de que tienen como origen físico común las cargas eléctricas, emplearemos también la palabra "electromagnetismo" como una teoría. Le asignaremos, además, la cualificación "clásico", para limitarnos a los desarrollos anteriores a la mecánica de lo microscópico, la teoría cuántica.

1.2. La carga eléctrica

Una de las discusiones necesarias antes de emprender el trabajo es sobre la "carga eléctrica". Durante años muchas experiencias se realizaron y de ellas se extrajeron varias conclusiones que aún aceptamos.

En primer lugar, que algunos objetos pueden "cargarse", como se decía antiguamente. En realidad se puede comprobar que algunos objetos en contacto, o ligeramente frotados entre sí, muestran comportamientos nuevos; por ejemplo, pueden atraerse entre sí –con fuerzas diferentes de la gravitatoria– o atraer objetos livianos –incluso objetos que no están "cargados"–; suelen ser de materiales como vidrio, plásticos, resina. Otros cuerpos, sobre todo los metales, tienen además la propiedad de propagar esa "carga". Con base en estas observaciones se construyeron máquinas que podían "cargar" por rozamiento: las llamamos máquinas electrostáticas. Fueron útiles para realizar muchos experimentos, pero su funcionamiento no solo es peligroso sino poco confiable. Sirvieron, de todas maneras, para plantear la hipótesis de que la "carga eléctrica" existe en dos variedades.

No solo por frotamiento se "cargan" los objetos: se puede comprobar que mediante ciertos dispositivos químicos (que fueron bautizados elementos galvánicos o pilas voltáicas), se puede trabajar en forma mucho más confiable. En los grabados que muestran los laboratorios de experimentación, como los de Faraday o los de la Royal Society, ocupa un lugar importante un dispositivo formado por muchos "pares de placas", que eran las máquinas empleadas para producir los fenómenos que se estudiaban.

Los dispositivos para "cargar" funcionaron de manera muy empírica. Se construyeron siguiendo reglas prácticas, pero sin conocimiento básico. En realidad una explicación "de primeros principios" acerca de cómo funcionan ambos tipos de máquinas tuvo que esperar hasta avanzado el siglo XX, con el desarrollo de la teoría cuántica. Tendremos también que dejar para más tarde una profundización en cómo funcionan; ellos superan el alcance de este libro. Para nuestros fines consideraremos esas máquinas como los elementos, las máquinas capaces de suministrar energía suficiente a nuestro sistema experimental, para lograr separar las cargas positivas de las cargas negativas. Una precaución es necesaria: muchos textos se refieren a estas máquinas como "generadores de carga", aunque afirmar que la carga se genera es una falacia. El estudiante atento podría tomar esa expresión como una metáfora con el significado de "generador de desequilibrios eléctricos", por ejemplo. Esas máquinas convierten energía (mecánica, química, luminosa) en energía suministrada a las cargas eléctricas que ya están en los cuerpos. Todos los efectos que estudiaremos se basan en esta conversión de energía. A esos dispositivos los llamaremos *baterías eléctricas* o simplemente *baterías*; varios textos los denominan *pilas eléctricas* y reservan la primera denominación a los elementos recargables, o *acumuladores*. Se trata de una decisión que no parece esencial, pero debe ser consciente.

La que llamaremos carga eléctrica es una propiedad intrínseca de la materia, no tiene que generarse. En realidad los cuerpos, todos los cuerpos, poseen, todo el tiempo, cargas eléctricas. Ya desde el siglo XVIII, los experimentos han mostrado que hay dos tipos de carga eléctrica. Desde finales del siglo XIX se comprobó experimentalmente que los "átomos" tienen partes que se pueden separar, realizando trabajo sobre ellas. Tales partes, o mejor "partículas" (porque son pequeñas), pueden clasificarse en algunas que llevan "carga positiva" y que identificamos por su comportamiento diferente de otras que llevan "carga negativa". Actualmente identificamos las primeras, por ejemplo, con los llamados iones positivos (o con los positrones) y las segundas con los iones negativos o con los electrones.

La carga eléctrica es una propiedad de los cuerpos; insistiremos, no existe carga eléctrica sin masa: en los cuerpos hay partículas con masa y con carga. Las partículas que tienen masa y carga son llamadas "portadoras de carga" en ciertos contextos. Todo esto se ha confirmado experimentalmente. También se ha comprobado que la carga está "cuantizada"; esto quiere decir que se podrán encontrar cuerpos con múltiplos enteros de una unidad de carga, ya sea positiva o negativa[1]. Los cuerpos que no muestran estar cargados y llamaremos "eléctricamente neutros", también tienen un enorme número de cargas, solo que hay un balance con tantas cargas positivas como negativas. Los fenómenos "eléctricos" se observan en realidad en las acciones entre cuerpos con un desbalance en la carga. Pero desbalances relativamente muy pequeños, de mucho menos que el 1 % en el número de cargas desbalanceadas, relativas al número total de cargas existentes.

Se han encontrado procesos, sobre todo relacionados con la física de los núcleos atómicos, en los cuales hay "creación" y "destrucción" de partículas cargadas, pero siempre conservando la carga neta: si aparece o desaparece una partícula con carga positiva, aparece o desaparece también una partícula con carga negativa. Aparentemente, la carga eléctrica se conserva. Se planteará una ecuación que expresa esta "conservación de la carga".

La teoría que se desarrollará supone que los cuerpos tienen densidades de carga por unidad de longitud, de área o de volumen, y que esas densidades varían de manera continua. En realidad, los objetos macroscópicos cargados en los que se observan habitualmente los fenómenos eléctricos tienen tan gran número de portadoras de carga (del orden de 10^{22} o más) que podremos esperar que las variaciones del número de portadoras de carga se vean como fenómenos casi continuos.

[1] Los físicos teóricos han buscado una explicación a esta cuantización de la carga; es parte de un debate que se mencionará posteriormente.

1.3. La corriente eléctrica

Llamaremos corrientes eléctricas a los movimientos netos de partículas portadoras de carga. Muchos efectos de "la electricidad" son manifestaciones de este movimiento. En realidad cuando dos cuerpos "se cargan" por frotamiento o por contacto, hay movimiento de portadoras. Muchos textos emplean la expresión "transporte de carga"[2].

Un lector atento podría formular muchas preguntas, como las siguientes. ¿Por qué se mueven las portadoras? Lo más frecuente es que exista un agente externo –como una batería que suministra energía– que "ocasiona" el movimiento. ¿Qué clase de partículas se mueven para constituir una corriente eléctrica? Depende del cuerpo que esté "conduciendo la electricidad". En el caso de los metales, los electrones son mucho más móviles y, prácticamente, son los únicos que se mueven[3]. En una solución acuosa, como en un tanque de electroformado, hay iones positivos y negativos que se mueven en direcciones opuestas. Algo similar ocurre en una lámpara fluorescente: en su interior se mueven iones y electrones en direcciones opuestas, con velocidades muy diferentes, debido a sus muy diferentes masas. ¿Qué tan rápido se mueven esas portadoras de carga? Existe un rango enorme de velocidades: en un alambre de cobre de sección $0,5$ mm^2 que lleve[4] una corriente de 5 amperios, los electrones se mueven en forma errática, pero con un promedio de rapidez de 1 mm/s. En el tubo de un monitor de computador pueden ir a 1/10 de la velocidad de la luz; en un moderno microscopio electrónico, a más de la mitad de la velocidad de la luz.

En una situación concreta puede haber diferentes tipos de portadoras de carga en movimiento. Un ejemplo sencillo es un circuito formado por una "batería", un par de alambres de cobre y un bombillo. Cuando se conectan y el bombillo brilla, en el cobre y en el bombillo se mueven electrones; se dice que el flujo de carga es un flujo de electrones. En la batería, llena de electrolitos, la corriente eléctrica representa el movimiento de iones entre sus electrodos de conexión con el exterior –antiguamente se les llamaba "placas"–. Pero en la batería ¡no fluyen electrones! Los iones negativos fluyen en una dirección y los positivos en la contraria.

Se ha definido un sentido *positivo* de la corriente, por razones puramente históricas, como el sentido de movimiento de las portadoras de carga

[2] Se recomienda consultar la página de wikipedia.org sobre el tema corriente eléctrica.

[3] Un lector atento podrá preguntar por la evidencia experimental para la presencia de electrones en los cuerpos metálicos. Más tarde se presentará esta evidencia.

[4] Tendremos ocasión de aclarar qué significa esto. Por ahora bastará decir que estamos tomando valores "normales" para encontrar estos valores estimados.

positivas. Eso significa que las portadoras negativas se mueven en el sentido opuesto al sentido convencional de la corriente. Esta convención causa no pocas dificultades al estudiante, pero es la convención válida en la actualidad.

Otras preguntas de un lector atento podrían ser ¿Y cómo sabemos qué clase de portadoras de carga se mueven en cada situación? Para algunos propósitos solo importa el movimiento de cargas, no de qué clase son. ¿Todos los electrones son iguales? Más adelante se ofrecerán argumentos acerca de que los electrones que chocan con la pantalla de un monitor de televisión, los que se mueven por los alambres en las líneas de alta tensión –del suministro de energía– son la misma clase de partículas, por ejemplo. Se puede argumentar que algunas portadoras de carga que se mueven en un rayo y en un tubo de descarga luminosa son de igual naturaleza; se puede mostrar experimentalmente que los electrones en un rayo, en una máquina electrostática y en la corriente que circula en un circuito o en un impulso nervioso son de igual naturaleza.

1.4. Temas para discusión

- Las dos variedades de partículas eléctricas reconocidas hoy, en forma astuta se designan *positiva* y *negativa*, porque actúan como opuestas. La suma de una variedad de carga a la otra parecía dar una carga cero. ¿Cómo se puede estar seguro(a) de que solo hay dos variedades? [Ayuda: considere el efecto de llevar primero una variedad de carga a un cuerpo y luego otra; ¿dependería el resultado del orden en que se realicen estos procesos?] Si hubieran, por ejemplo, tres tipos de carga que funcionaran como los colores primarios –que en adición adecuada dan iluminación blanca–, ¿cómo se podría mostrar que esa es la realidad?

- Se menciona en el texto que los electrones se mueven en un metal con una velocidad pequeña. Pero cuando se conecta un bombillo con una pila eléctrica, por medio de dos alambres de metal, el metal dentro del bombillo se enciende y emite luz “instantáneamente”. ¿Cómo se podría explicar esto?

1.5. Actividades prácticas

Sugeriremos la realización de experiencias sencillas con el objeto de incentivar la comprensión de los conceptos discutidos. Para el tema presente son éstas.

- Una experiencia que requiere un mínimo de instrumentos: un frasco cilíndrico de vidrio de unos 10 o 15 cm de altura, limpio, y un rincón de dos paredes –que deben estar recubiertas con estuco: no funciona si son de ladrillo–. El frasco, con su eje vertical, se oprime contra el rincón y, manteniéndolo así, se desliza hacia arriba. Con precaución se suelta –puede que caiga: la gravedad aún actúa sobre él–. Si todo va bien, podría quedarse "pegado" a la pared, al menos por algún tiempo. ¿Cómo se explica que el frasco esté "pegado"? ¿Cómo se explica que el efecto se encuentra para algunas combinaciones de materiales –frasco y pared– y no para otros? ¿Cuánto tiempo dura el efecto? ¿Qué condiciones ambientales favorecen su aparición?

- También es muy notorio el efecto que un trozo de plástico, como una cuchara "desechable", frotado con paño, tiene sobre un chorro delgado de agua. Observe este efecto; es importante que el chorro sea muy delgado: puede regularse el flujo de salida de una llave de agua hasta que deja de gotear y se ve un chorro continuo. Se acerca ahora la cuchara frotada a unos 3 cm por debajo de la boca de la llave y tan cerca como se pueda del chorro, sin interrumpirlo. ¿Se desvía el chorro de la vertical? ¿Qué tanto? ¿Podría calcularse la fuerza centrípeta que actúa sobre una porción de agua que fluye?

- Para completar la experiencia, si se toca ahora la cuchara con el paño que se frotó y se acerca de nuevo al chorro de agua, ¿se mantiene el efecto observado anteriormente? Se puede probar con otros materiales, como el poliestireno inflado frotado con paño o con tela de algodón.

- Procure conservar un reporte de sus observaciones, para discutir los resultados con otros y como futura referencia: eso hacen los físicos profesionales, no solo los experimentadores sino también los teóricos –es decir, todos los que proponen cosas nuevas–.

2

Fuerzas eléctricas y campos eléctricos

2.1. Introducción

Durante siglos, la humanidad ha sido testigo de fenómenos eléctricos: con seguridad nuestros antepasados observaron, asustados, las descargas atmosféricas[1]. Mucho más tarde comenzó la realización de experimentos, la cual se dificultaba cuando las únicas máquinas capaces de separar cargas positivas y negativas por frotamiento eran las "máquinas electrostáticas". Tales máquinas son poco confiables y su buen funcionamiento depende mucho de condiciones externas que no son fáciles de controlar, como la humedad del aire o la limpieza de los utensilios empleados por los experimentadores. Por ello, la cuantificación y la explicación de los fenómenos eléctricos progresó en forma muy lenta. Un enorme avance en la experimentación se dió cuando, tras experimentos como los de Galvani y Volta, se empezaron a emplear los separadores de cargas que hoy denominamos "pilas", o "baterías", haciendo un honor, sin saberlo, a los primeros y primitivos modelos empleados en la experimentación.

Hacia el final del siglo XVIII se dio una importante discusión acerca de la naturaleza de la electricidad –o del "fuego eléctrico", como se llamaba entonces–. Parecía reinar un acuerdo general sobre que se trataba de un

[1] Las descargas atmosféricas son, todavía, motivo de investigación. El lector interesado podrá consultar una abundante literatura; dos contribuciones modernas son *El rayo*, de H. Torres, Universidad Nacional de Colombia, 2002 y el libro de Lars Wahlin, publicado en la internet por la empresa Colutron, en http://www.colutron.com/download_files/chap6.pdf.

fluido o dos, aunque no estaba bien definido. Sobre la base de esa interpretación, se inventaron, por ejemplo, "botellas de Leyden" para almacenarlo. Se reconocía la posibilidad de colocar la materia en dos estados "de electrificación", pero se debatía sobre si era la manifestación de un exceso de dos fluidos o al exceso o defecto de uno solo. El debate sobre las teorías de un fluido o de dos puede ser históricamente interesante, pero en la actualidad tenemos teorías mucho más explícitas acerca de la constitución eléctrica de la materia. Se reconocen dos tipos de cargas, denominadas, de manera arbitraria pero conveniente, *positivas* y *negativas*.

> Se atribuye el descubrimiento de dos clases de carga eléctrica a Charles Francois du Fay, en 1733. Las designó vítrea (+) y resinosa (-). Debemos la designación empleada hoy a Benjamin Franklin quien, de manera enteramente arbitraria, les dió la designación de electricidad positiva y negativa al exceso o al defecto de *un solo* fluido en un cuerpo. Para nuestros propósitos, esa concepción no será relevante. Solo nos interesa la valiosa terminología matemática.

Las cargas negativas se asocian a electrones, con pocas excepciones, y las positivas con iones, igualmente con excepciones. Así las cosas, se debe reconocer que puede resultar conveniente referirse a las teorías modernas, pero el electromagnetismo clásico es una teoría macroscópica acerca de la materia y sus conclusiones no dependen en una manera fundamental de una imagen sobre la constitución microscópica de la materia.

Volvamos a los primeros experimentos, o al menos a los primeros que fueron publicados, en los cuales se intentó cuantificar las interacciones eléctricas. Varios investigadores habían llegado a resultados similares, pero la falta de difusión impidió que sus experimentos fueran conocidos a su debido tiempo.

2.2. Los experimentos de Coulomb

Entre los años 1785 y 1787, el físico francés Charles Augustin de Coulomb realizó una serie de experimentos con cargas eléctricas y finalmente propuso lo que conocemos en la actualidad como *Ley de Coulomb*.

Los experimentos fueron coronados con éxito mediante la construcción de un aparato descrito en la compilación de Shamos, *Great Experiments in Physics*[2]. Consiste en un tubo ancho de vidrio de unos treinta centímetros de diámetro y treinta de altura, cerrado por arriba por medio de un disco de vidrio que tiene una abertura cilíndrica en el centro y otra hacia un lado.

[2] Imagen del aparato en el Conservatoire d´Arts et Mètiers, Paris.

Sobre este disco se coloca un tubo de vidrio más estrecho terminado en un dispositivo que lleva colgado un alambre de plata. Este dispositivo permite aplicar torsión al alambre y lleva un círculo dividido, para determinar el ángulo de torsión.

En el extremo inferior del alambre se coloca una barra de material no conductor de la electricidad y, en los extremos de esta, un disco de papel reforzado y una esfera que será uno de los cuerpos cargados en el experimento. El segundo cuerpo, otra esfera también montada en una barra aislante, se introduce en el equipo a través de la segunda abertura del disco de vidrio (Figura 2.1).

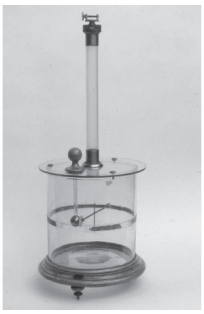

FIGURA 2.1. Balanza de torsión de A. Coulomb

Los experimentos consistieron en cargar el segundo cuerpo por medio de un generador electrostático y tocar con él al primero, para repartir la carga por igual. Una vez logrado esto, Coulomb observó que los dos cuerpos se repelían y, aplicando torsión, acercó los dos cuerpos a distancias cada vez menores. Claro está, se había calibrado el alambre como resorte de torsión en un experimento anterior. A partir de los datos de distancia entre los cuerpos cargados y la fuerza de torsión necesaria para mantenerlos a esa distancia, Coulomb llegó a la conclusión de que dos cuerpos cargados igualmente se repelen con fuerzas inversamente proporcionales a la distancia entre ellos.

Coulomb también intentó realizar experimentos con cuerpos de cargas de diferente signo, pero, aunque teóricamente posibles, presentan dificultades considerables; la evidencia no es tan concluyente.

A partir de esos resultados se realiza la inducción de una ley general. Aunque los experimentos se realizan con cuerpos de dimensiones pequeñas, éstas no son cero. Pero el axioma, la “Ley de Coulomb”, supone que sí podría haber tales cuerpos de dimensiones cero, pero con carga. Es, por supuesto, una idealización. Sobre esa base ideal se construye una teoría.

De acuerdo con ella, la fuerza que actúa entre dos cuerpos cargados, supuestos de dimensión cero, es decir entre "cargas puntuales", tiene dirección radial, es proporcional al valor de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre cuerpos cargados. Dos cargas eléctricas del mismo signo se repelen y dos cargas de signo contrario se atraen.

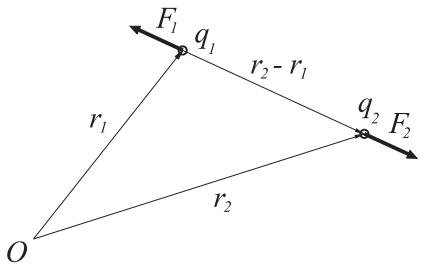

FIGURA 2.2. Geometría para la ley de Coulomb

Supongamos que dos cargas q_1 y q_2 están localizadas en posiciones definidas por los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ (Figura 2.2). La fuerza eléctrica que actúa sobre la segunda carga se puede describir como

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \tag{2.1}$$

Donde ϵ_0 es una constante, llamada "permitividad del vacío", que depende de nuestro sistema de unidades.

$$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$$

Queda un problema sin resolver en la ecuación y es la definición de las cargas eléctricas, con su unidad, el coulomb. Esta definición debe esperar a la definición de unidad de intensidad de corriente eléctrica. Por ahora solo mencionaremos que la carga eléctrica en el sistema de unidades MKSA (metro, kilogramo, segundo, amperio) es una magnitud derivada, definida, para el caso de corrientes eléctricas constantes, como la intensidad de corriente multiplicada por el tiempo que la corriente fluye. En otras palabras, 1 coulomb = 1 amperio · segundo.

> Las determinaciones experimentales, cuando se llevan a cabo con cuidado, arrojan resultados que deben ser corregidos. Una correlación directa entre fuerza y distancia no está de acuerdo con el exponente -2. Esto se debe, principalmente, a que las cargas no están realmente distribuidas en forma uniforme. Cuando se realiza la corrección por este efecto, se recupera el exponente -2, dentro de los límites de la incertidumbre experimental.

2.3. Magnitud de las fuerzas

La ley de Coulomb y la ley de gravitación de Newton aparecieron, históricamente, dentro de teorías que consideraban acciones a distancia entre cuerpos, sin ningún elemento intermedio. Son fuerzas que varían como el inverso del cuadrado de la distancia, que actúan sobre la línea que une las dos masas o los dos cuerpos cargados, actúan en rangos de distancia muy grandes, pero tienen magnitudes muy distintas. Recordemos que la fuerza de gravitación ejercida por una masa, m_1, sobre otra, m_2, situadas en posiciones definidas por los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ está dada por

$$\vec{F}_{2G} = Gm_1m_2\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \tag{2.2}$$

Donde G es la constante de gravitación, que en nuestro sistema de unidades es

$$G = 6,67262 \times 10^{-11} Nkg^{-2}m^2$$

Si ahora queremos comparar las fuerzas eléctrica y gravitacional que actúan entre dos cuerpos cargados, debemos evaluar la expresión:

$$\frac{|\vec{F}_{\text{eléctrica}}|}{|\vec{F}_{\text{gravitacional}}|} = \frac{q_1}{m_1}\frac{q_2}{m_2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \tag{2.3}$$

En el caso de dos electrones, tendremos en cuenta que la relación de carga a masa es $q/m = 1,759 \times 10^{11} Ckg^{-1}$, de manera que

$$\frac{|\vec{F}_{\text{eléctrica}}|}{|\vec{F}_{\text{gravitacional}}|} = 4,17 \times 10^{42}$$

¡El resultado es un número muy grande! Si tuviéramos que calcular la aceleración de un cuerpo al que se aplican dos fuerzas distintas, con una relación entre ellas de 10^6, seguramente ignoraríamos el efecto de la más pequeña. Si aplicáramos esos razonamientos al movimiento de un sistema solar, se esperaría que las fuerzas eléctricas predominaran; pero no es así: la fuerza que mantiene en órbita a nuestro planeta alrededor del Sol es precisamente la *despreciable* fuerza gravitacional; así mismo, es la fuerza que nos mantiene sujetos a nuestra Tierra e impide que flotemos en el espacio. ¿Cómo se puede explicar que la gravitación sea la fuerza predominante en el universo?

Para empezar a entender y resolver esa paradoja, debemos tomar en cuenta que hay carga eléctrica "positiva" y "negativa", mientras solo hay "masa positiva". Esto significa que las fuerzas gravitacionales son siempre acumulativas; por el contrario, las fuerzas eléctricas pueden cancelarse unas con otras.

Supongamos una situación hipotética, con el universo comenzando con cargas eléctricas distribuidas al azar. Inicialmente podríamos esperar que las fuerzas eléctricas predominen sobre las gravitatorias. Las fuerzas eléctricas harían que las cargas positivas se sitúen tan lejos unas de otras y tan cerca como sea posible de las cargas negativas. Así, cada carga positiva podría encontrar una carga negativa hasta formar una pareja muy cercana. De acuerdo con lo que sabemos, tan cerca como 10^{-10} m (el tamaño de un átomo). Las fuerzas eléctricas ejercidas por las dos cargas de cada par sobre otras cargas se cancelan efectivamente, excepto para las más cercanas. Las fuerzas eléctricas se cancelan para escalas de longitud mucho más grandes que el espacio entre pares de cargas. Será posible que la gravedad predomine y se convierta en la única fuerza de largo alcance si el número de cargas positivas en el universo es casi igual al número de cargas negativas. No habría, prácticamente, cargas sin su pareja (de signo contrario). Pero para que se cancelen las fuerzas eléctricas de largo alcance, será necesario que la diferencia relativa entre los números de cargas positivas y negativas sea increíblemente pequeña. La exactitud de ese equilibrio entre el número de cargas es tan extrema, que la mayoría de los físicos cree que la carga neta en el universo es exactamente cero. Es tan importante ese equilibrio que se ha postulado un principio de conservación de la carga. Hasta el presente no se ha encontrado ningún proceso que incluya la creación o destrucción de carga eléctrica neta (hay procesos en que aparecen o desaparecen cargas en pares).

En suma, conocemos dos fuerzas de largo alcance en el universo: la fuerza eléctrica y la gravitacional. La primera de ellas es mucho más intensa que la primera, pero suele permanecer "oculta" dentro de átomos neutros. El balance muy exacto de fuerzas positivas y negativas comienza a fallar a escala atómica. En realidad, las fuerzas entre átomos y entre moléculas son de naturaleza eléctrica. Son eléctricas las fuerzas que impiden que nuestras edificaciones sean inestables o las que permiten el funcionamiento biológico de los seres vivos a nivel molecular. Pero nuestro curso no tratará de ese electromagnetismo a escala tan pequeña, sino con el "electromagnetismo clásico", es decir a escalas mucho mayores. Aunque incursionaremos en el campo de lo microscópico, de tanto en tanto.

En los fenómenos que describe el electromagnetismo clásico, la materia se coloca en situaciones de no equilibrio, de modo que el ajuste de cargas positivas y negativas se rompe. Esto permite que las fuerzas eléctricas se manifiesten en situaciones macroscópicas. Por supuesto, se requiere muy poca desviación del equilibrio para lograr el desarrollo de fuerzas enormes. No es casual que la mayoría de las máquinas y herramientas que la humanidad

ha desarrollado durante el último siglo, empleen de una u otra manera la electricidad: las fuerzas y los efectos logrados son enormes.

Como ya se afirmó, las leyes de Newton y de Coulomb son ejemplos de teorías llamadas de *acción a distancia*. Si uno de los cuerpos se cambia de lugar, las ecuaciones (2.1) y (2.2) predicen que las fuerzas respectivas que actúan sobre el otro responden *inmediatamente*, para todas las distancias. En especial, las fuerzas, que son iguales y opuestas, actúan sobre los dos cuerpos cargados en todo tiempo. Pero cuando consideramos que la velocidad a la que se transportan esos efectos no es infinita, el cambio en el primer cuerpo no se nota en el segundo en forma inmediata, sino tras un cierto retardo, que depende de la distancia. Un ejemplo imaginario y extremo es considerar qué sucedería si uno de los cuerpos desaparece; durante un cierto tiempo, el segundo seguirá experimentando una fuerza gravitacional o eléctrica como si el primer cuerpo aún estuviera en su posición. Durante ese tiempo, habría acción pero no reacción, en desacuerdo con la tercera ley de Newton. Existe un debate aún abierto acerca de este tema; lo único que afirmaremos, por el momento, es que las *teorías clásicas* no dan respuesta completa a esta cuestión.

2.4. El campo eléctrico

Las teorías de acción a distancia no son compatibles con esta idea de propagación de los efectos. La tercera ley de Newton está ligada a la conservación de la cantidad de movimiento en el universo, que la mayoría de los físicos, basados en la experiencia, se resiste a abandonar. Para rescatar la idea de conservación de la cantidad de movimiento, podemos abandonar la idea de acción a distancia y adoptar *teorías de campo*, en las que existiría un medio, llamado *campo* que transmite las fuerzas de un cuerpo al otro. En electromagnetismo se reconocerán dos campos, uno llamado eléctrico y otro llamado magnético. Las interacciones electromagnéticas se transmiten a través de esos campos, a la velocidad de la luz.

Los campos pueden transmitir energía y cantidad de movimiento. Esto significa que aunque las acciones y reacciones actúan sobre dos cuerpos no sean, en todo momento, exactamente iguales y opuestas, no hay violación de la conservación de la cantidad de movimiento. En primera instancia, podremos evitar algunos problemas de las teorías de acción a distancia, considerando solo situaciones en las cuales nuestros sistemas físicos alcanzaron un estado estacionario: las fuerzas ya no cambian en el tiempo.

Veamos cómo se define un campo de fuerzas eléctricas. Consideremos que tenemos N cargas, numeradas q_1 a q_N, colocadas en posiciones dadas por los vectores $\vec{r_1}$ a $\vec{r_N}$. Queremos medir la fuerza que estas cargas ejercen sobre una *carga de prueba*. Experimentalmente se encontrará que las fuerzas eléctricas disfrutan de la propiedad de superposición: la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga de prueba q, situada en una posición $\vec{r}$, es simplemente la suma vectorial de todas las fuerzas ejercidas sobre ella por cada una de las N cargas tomadas como aisladas. Así, la fuerza que actúa sobre la carga de prueba está dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{2.4}$$

Resulta conveniente definir un vector $\vec{E}(\vec{r})$, llamado el campo eléctrico, que es la fuerza que se ejercería sobre la carga de prueba de valor una unidad (1 coulomb), situada en la posición $\vec{r}$. La fuerza sobre otra carga q sería

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

y el campo eléctrico estará dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{2.5}$$

Las unidades son *newton/coulomb* para el campo eléctrico[3].

El campo eléctrico generado por una carga q, situada en el origen de coordenadas, es puramente radial; si la carga que lo origina es positiva, apuntará hacia afuera; si es negativa, apuntará hacia adentro. Tiene la magnitud:

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde $r = |\vec{r}|$, la magnitud del vector posición.

2.5. Líneas y tubos de fuerza

Algunos científicos de finales del siglo XIX no se sentían del todo a gusto con el concepto de acción a distancia. Faraday, el genio experimentador,

[3] Pospondremos la discusión acerca de cómo se miden los campos eléctricos hasta después de la discusión del potencial electrostático. En principio sería posible medir las fuerzas con medidores tan sensibles como la balanza de Coulomb, pero los métodos prácticos más empleados se basan en desarrollos teóricos posteriores.

se sentía particularmente a disgusto con esa idea y prefería pensar en el campo eléctrico en términos de una estructura o un medio que *transporta* las fuerzas entre cargas.

Faraday imaginaba líneas cuyas tangentes en cada punto serían paralelas al campo eléctrico en ese punto, con flechas en las líneas para marcar esta dirección. Por ejemplo, el campo de una carga positiva aislada, lejos de otras cargas, tiene líneas que salen en forma radial de la carga. En el caso de una carga negativa, las líneas apuntan hacia la carga.

Tal definición de las líneas de campo implica dos propiedades. La primera es que, bajo condiciones estáticas, una línea debe comenzar en una carga positiva y terminar en una negativa. La segunda es que dos líneas no se pueden cruzar (¿por qué?).

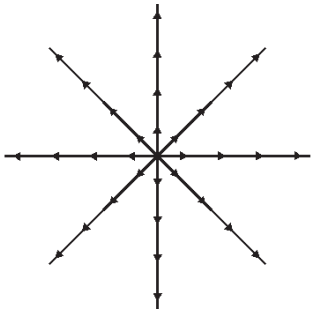

FIGURA 2.3. Líneas de campo eléctrico

Las líneas de fuerza son una representación útil del campo electrostático (Figura 2.3). Su utilidad puede aumentarse introduciendo una restricción adicional. Imaginemos que se dibujan tubos de sección variable, tales que sus paredes son, en todas partes, paralelas a las líneas de fuerza. Las líneas de fuerza no cruzan las paredes de los tubos. El espacio estaría lleno de tales tubos: las secciones de los tubos se escogen de modo que el número de tubos por unidad de área normal al campo en un punto del espacio es igual a la magnitud del campo en ese punto.

Se puede demostrar que si el número de tubos por unidad de área normal al campo en un punto del espacio es igual a la magnitud del campo en ese punto, lo mismo será cierto para cualquier otro punto a lo largo del "eje" del tubo. Así los tubos tendrían una sección pequeña y estarían empacados de manera compacta en regiones en que el valor del campo es alto. Por el contrario, serían pocos y tendrían una sección grande en la cual el valor del campo es pequeño. Nótese que en la teoría electromagnética nada requiere

de la existencia de tales tubos, pero estos son una representación que ayuda a pensar en cómo son los campos.

Es difícil dibujar tubos en un diagrama y se ha convertido en práctica hacer líneas que pasan por el eje del tubo, de modo que el campo se dibuja como un número discreto de líneas, comenzando en las cargas positivas y terminando en las negativas.

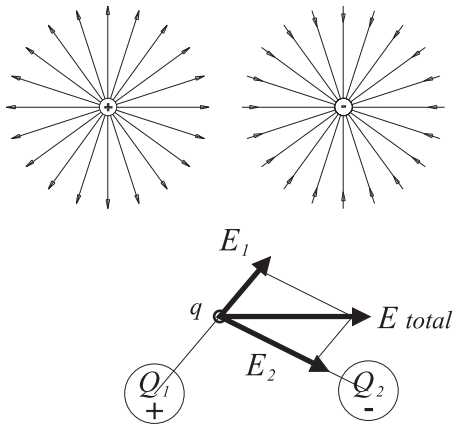

FIGURA 2.4. Ejemplos de líneas de campo eléctrico

En la figura (2.4) se muestran algunos ejemplos de líneas "de campo". La figura habría que completarla con líneas que no se muestran saliendo del plano del dibujo.

Debido a la definición de estas líneas, a menudo se habla de la intensidad de campo eléctrico en un lugar del espacio dado en términos del *número de líneas por unidad de área*, a pesar de las dificultades lógicas que surgen al hablar de un número no entero de líneas por unidad de área.

2.6. Campos generados por colecciones de cargas

El campo eléctrico producido por una colección de cargas es el vector suma de los campos producidos por cada una de las cargas. Los campos eléctricos pueden superponerse de la misma manera que se superponen las fuerzas.

¿Cómo se maneja el caso en que las cargas pueden considerarse ya no como separadas, discretas, sino como una distribución continua de carga? Primero, la carga estará representada por una densidad de carga, función de la

posición $\rho(\vec{r}')$. La carga eléctrica alrededor de un punto de vector posición $\vec{r}''$ será $\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}''$, donde $d^3\vec{r}''$ es el elemento de volumen en $\vec{r}''$. Una extensión simple del concepto de sumar campos producidos por cargas (2.5) nos lleva al campo producido por una distribución continua, dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3\vec{r}'' \tag{2.6}$$

donde el volumen de integración es todo el espacio o, por lo menos, todo el espacio en que la densidad de carga, $\rho(\vec{r}')$, no es cero.

2.7. Comentarios

Se debe entender que, aunque se introduce el concepto de campo eléctrico a partir de los experimentos de Coulomb, la definición de campo eléctrico (2.6) depende solo de la parte de la ley que dice que la fuerza es proporcional a la carga y no de la que afirma que la fuerza es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre las cargas. La definición tampoco requiere que conozcamos la configuración de las cargas que da origen al campo antes de que seamos capaces de determinar la intensidad del campo en forma experimental. En principio podríamos medir la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio colocando en él un cuerpo pequeño (infinitesimal) con carga q (una carga de prueba), para medir la fuerza total experimentada por ese cuerpo. Luego quitaríamos la carga de él y volveríamos a medir la fuerza. La diferencia entre los dos resultados es la fuerza de origen eléctrico y la relación de esa fuerza a la carga q es la intensidad de campo eléctrico. La dirección del campo es la misma dirección de la fuerza, si q es positiva y es la contraria, si la carga es negativa.

En alguna literatura se afirma que la carga de prueba debe ser infinitesimal para que no altere el campo. Esto, realmente, es una advertencia para el experimentador, no para el teórico. Simplemente recuerda que si las cargas que dan origen al campo están libres de moverse, la introducción de una nueva carga puede hacer que algunas cambien de posición, lo que, a la vez, podría alterar la fuerza experimentada por la carga de prueba. Si las cargas están fijas en el espacio, no habrá problema alguno. En otras palabras, cuando un experimentador realice mediciones, deberá asegurarse de que su instrumento (en este caso, la carga de prueba) produzca una perturbación mínima en lo que se está midiendo.

En lo que sigue encontraremos una expresión matemática compacta y equivalente a la ley de Coulomb, pero más conveniente. Entre otras cosas, nos

permitirá calcular con mayor facilidad los campos eléctricos en caso de simetrías de las distribuciones de cargas eléctricas. Nos permitirá, además, lo que es más importante, plantear situaciones experimentales que suministren criterios cuantitativos acerca de si el exponente en la ley de Coulomb debe tomarse como exacta o accidentalmente igual a dos.

2.8. La ley de Gauss

De la definición de campo se puede deducir un teorema muy interesante. Es llamado la *ley de Gauss*. Para justificarlo en un caso simple, consideremos una carga q, situada en el origen de coordenadas, que genera un campo eléctrico alrededor suyo. Calculemos ahora el flujo del campo eléctrico en una superficie esférica S, de radio r, centrada también en el origen. El flujo de campo eléctrico a través de esta superficie, según la definición general, está dado por

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_r dS_r = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.7}$$

donde se aprovecha que la normal a la superficie siempre es paralela al campo eléctrico local. Sabemos además del *teorema de Gauss* que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} d^3\vec{r} \tag{2.8}$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie S.

Calculemos $\nabla \cdot \vec{E}$ directamente. En un sistema de coordenadas cartesianas, el campo estará dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \tag{2.9}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. De esa manera

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{x}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3xr^2}{r^5} \tag{2.10}$$

Para ello hemos aprovechado que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \tag{2.11}$$

Para las derivadas $\partial E_y/\partial y$ y $\partial E_z/\partial z$ se encuentran expresiones similares. La divergencia del campo eléctrico estará dada por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{r^5} = 0 \qquad (2.12)$$

Estos resultado son intrigantes. De las ecuaciones (2.7) y (2.8) encontramos que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\ d^3\vec{r} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (2.13)$$

Pero acabamos de calcular un valor cero para la integral. Esta paradoja puede ser *resuelta* examinando con cuidado la ecuación (2.12). En el origen ($r = 0$) encontramos que $\nabla \cdot \vec{E} = 0/0$, lo que significa que $\nabla \cdot \vec{E}$ puede tomar cualquier valor. Los *dos cálculos* pueden conciliarse si $\nabla \cdot \vec{E}$ se representa mediante una especie de "función aguja" que sea cero en casi todas partes, excepto arbitrariamente cerca del origen, donde toma valores muy grandes, de modo que la integral de volumen del pico sea finita.

Veamos cómo se puede construir una función aguja unidimensional, para aplicar luego esas ideas a nuestro caso tridimensional. Para eso haremos una pequeña disgresión matemática. Consideremos primero la función

$$\begin{aligned} g(x,\epsilon) &= 1/\epsilon, && \text{para } |x| \leq \epsilon/2, \\ &= 0, && \text{para } |x| > \epsilon/2. \end{aligned}$$

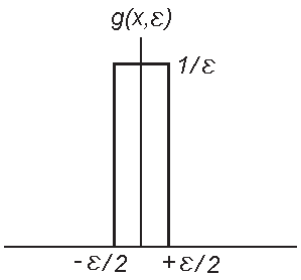

FIGURA 2.5. La función aguja

Resulta claro que siempre será (Figura 2.5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\epsilon)dx = 1 \qquad (2.14)$$

Consideremos ahora la función

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} g(x, \epsilon) \tag{2.15}$$

Que es cero en todas partes, excepto arbitrariamente cerca a $x = 0$. De acuerdo con la ecuación (2.14) también posee una integral finita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.16}$$

De esta manera, $\delta(x)$ tiene las propiedades requeridas para una "función aguja". La función unidimensional que estamos construyendo se denomina "función delta de Dirac", porque fue inventada por el físico Paul Dirac en 1927, para adelantar su investigación teórica acerca de la mecánica cuántica. La función delta y otras parecidas fueron investigadas por los matemáticos y clasificadas como "funciones generalizadas", porque son funciones que no están bien definidas en $x = 0$, pero su integral está bien definida.

Consideremos ahora una integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx \tag{2.17}$$

donde $f(x)$ es una función de buen comportamiento[4] cerca de $x = 0$. Como la función delta es cero excepto muy cerca de $x = 0$, es claro que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0) \tag{2.18}$$

donde se ha empleado la ecuación (2.16). La ecuación anterior, válida para cualquier función con buen comportamiento, es, efectivamente, la definición de función delta. Si, además, corremos el origen de coordenadas y definimos $\delta(x - x_0)$ como una "función aguja" centrada en $x = x_0$, la ecuación (2.18) nos dice que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0) \tag{2.19}$$

Terminemos la disgresión matemática. En realidad, para resolver nuestro problema con la divergencia del campo eléctrico, necesitamos una "función aguja" tridimensional; es decir, una función que sea cero casi en todas

[4] Es decir, no tiene singularidades y es integrable.

partes, excepto arbitrariamente cerca del origen de coordenadas, de modo que su integral de volumen sea la unidad. Si llamamos esta función como $\delta(\vec{r})$, es fácil ver que esta función puede ser el producto de tres funciones unidimensionales

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{2.20}$$

Esta función es claramente cero en todas partes, excepto cerca del origen, pero ¿es su integral de volumen la unidad? Si la integramos sobre un cubo de lado $2a$, centrado en el origen y alineado con sus aristas paralelas a los ejes coordenados, podemos separar las variables, de modo que

$$\int_{cubo} \delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{-a}^{+a} \delta(x)dx \int_{-a}^{+a} \delta(y)dy \int_{-a}^{+a} \delta(z)dz \tag{2.21}$$

La integral puede convertirse en una integral sobre todo el espacio tomando el límite $a \to \infty$. Pero ya sabemos que para cada función delta unidimensional, su integral sobre todo el eje coordenado es la unidad, de modo que de la ecuación anterior se sigue

$$\int \delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1 \tag{2.22}$$

que es el resultado deseado. Una generalización simple de los argumentos previos nos conduce a

$$\int f(\vec{r})\delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = f(\vec{0}) \tag{2.23}$$

donde $f(\vec{r})$ es una función con buen comportamiento cerca del origen. Finalmente, si cambiamos el origen de coordenadas y escribimos

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{2.24}$$

lo que representa una función aguja centrada en $\vec{r} = \vec{r}_0$, se puede demostrar sencillamente que

$$\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0) \tag{2.25}$$

Hasta ahora hemos considerado integrales sobre todo el espacio, pero es evidente que el resultado de la ecuación (2.25) es válido aún para volúmenes de integración finitos, pero que contienen el punto $\vec{r} = \vec{r}_0$. Nótese, además, que la integral es cero si el volumen no contiene este punto.

Volvamos ahora a nuestro problema con la divergencia del campo eléctrico. El campo generado por una carga q situada en el origen tiene una divergencia que es cero en todas partes, excepto en el origen y satisface la ecuación

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, d^3\vec{r} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.26}$$

para un volumen V esférico centrado en el origen. Estos dos hechos pueden ser consistentes si, para una carga q en el origen,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) \tag{2.27}$$

donde se ha empleado la ecuación (2.22).

Todo resulta más interesante cuando se consideran situaciones no simétricas. Consideremos, para arrancar nuevamente, una carga q centrada en el origen y rodeada de una superficie esférica S, centrada también en el origen. Supongamos que ahora desplazamos la esfera, que ya no estará centrada en el origen. ¿A qué será igual el flujo del campo eléctrico saliendo de S? El cálculo directo no es simple porque los vectores normales locales a la superficie no son paralelos al campo eléctrico local. Pero con el desarrollo anterior, obtener el resultado es casi tan simple. Tendremos que del teorema de Gauss y de la ecuación (2.27)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} d^3\vec{r} \tag{2.28}$$

A partir de esto es claro que el flujo de $\vec{E}$, saliendo de S es igualmente q/ϵ_0 para una superficie esférica desplazada del origen. Además, la ecuación (2.28) nos dice que si el desplazamiento es tan grande que la carga ya no está dentro de la esfera, el flujo será cero. Y ¿qué pasará si la superficie ya no es esférica, sino de una forma arbitraria? Nuevamente, el teorema de Gauss y la ecuación (2.27) nos dicen que el flujo es q/ϵ_0 cuando la carga está contenida dentro de la superficie y cero si está fuera de ella. El resultado es independiente de la forma de la superficie (ver figura 2.6).

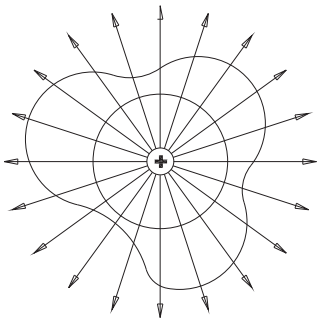

FIGURA 2.6. Sobre la ley de Gauss.

Consideremos ahora N cargas q_i situadas en las posiciones $\vec{r}_i$. Una generalización de la ecuación (2.27) nos llevará a

$$\nabla \cdot \vec{E} = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{2.29}$$

De modo que el teorema de Gauss implicará ahora que (Figura 2.6)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\, d^3\vec{r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{2.30}$$

donde Q es la carga total contenida (encerrada) en la superficie S. Este resultado es llamado la "ley de Gauss" y es independiente de la forma de la superficie.

Supongamos, finalmente, que en lugar de tener un conjunto discreto de cargas, tenemos una distribución continua de cargas descrita por una densidad $\rho(\vec{r}\,')$, función de la posición. La carga contenida en un volumen "rectangular" de dimensiones dx, dy y dz, colocado en una posición $(\vec{r}')$ estará dada por $\rho(\vec{r}')dxdydz$. Si integramos $\nabla \cdot \vec{E}$ sobre este elemento de volumen, obtendremos

$$\nabla \cdot \vec{E} dxdydz = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r}\,')dxdydz}{\epsilon_0} \tag{2.31}$$

donde hemos empleado la ecuación (2.30). Aquí estamos suponiendo que el volumen $dxdydz$ es tan pequeño que $\nabla \cdot \vec{E}$ no varía notoriamente dentro de él. De esta manera, podemos afirmar que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \tag{2.32}$$

Esta es la primera de nuestras ecuaciones básicas para el campo eléctrico. La derivación que hemos seguido para llegar a la ecuación (2.32) es válida para campos generados por cargas en reposo. Podría ser que, en un caso con cargas en movimiento, hubiera necesidad de introducir correcciones, pero no es el caso. La ecuación (2.32) será universalmente válida.

La primera ecuación de Maxwell equivale a la ecuación que describe la interacción entre cargas, la ecuación de Coulomb; en primer lugar, expresa que el campo eléctrico depende linealmente de la magnitud de la carga que lo genera; en segundo lugar, es válida solamente si los campos dependen de la distancia como $1/r^2$. Para que sea, como se afirmó arriba, válida, habría que encontrar una prueba experimental de que el exponente en la expresión de Coulomb es realmente 2 y no por accidente. Tal prueba ocupó a Maxwell

y a Cavendish en el siglo XIX y a varios experimentadores en el siglo XX. Más adelante volveremos sobre este importante tema.

La ecuación (2.32) es una ecuación diferencial que describe el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas eléctricas. Ya conocemos la solución a esta ecuación cuando las cargas son estacionarias; está dada por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3\vec{r}\,' \tag{2.33}$$

Las ecuaciones (2.32) y (2.33) pueden conciliarse siempre que

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right) = -\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{2.34}$$

donde se ha empleado la expresión (2.27). Se sigue ahora que

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3\vec{r}\,' = \int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3 = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{2.35}$$

es el resultado deseado. La forma más general de la ley de Gauss se obtendrá integrando sobre un volumen V rodeado por una superficie S y haciendo uso del teorema de Gauss,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})d^3\vec{r} \tag{2.36}$$

2.9. Campos eléctricos generados por cargas discretas

Un dipolo eléctrico es una configuración de dos cargas de igual magnitud pero signo contrario $+q$ y $-q$, separados por una distancia d. Suele llamarse "eje del dipolo" al segmento que une las dos cargas. Calcularemos el campo eléctrico en un punto P, a una distancia r, sobre la recta bisectora perpendicular a la línea que une las dos cargas.

La componente del campo debida a $+q$ solamente tiene una magnitud

$$E_{+q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0[r^2+(d^2/4)]} \tag{2.37}$$

y está dirigida hacia fuera de la carga positiva. La componente del campo debida a $-q$ sola tiene la misma magnitud y está dirigida hacia la carga

negativa. De una inspección al diagrama (Figura 2.7) resulta evidente que el campo resultante local es paralelo al eje del dipolo. Puesto que

$$\cos(\theta) = \frac{d/2}{[r^2 + (d^2/4)]^{1/2}} \tag{2.38}$$

el valor del campo en el punto P será

$$E = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[r^2 + (d^2/4)]}\frac{d/2}{[r^2 + (d^2/4)]^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{[r^2 + (d^2/4)]^{3/2}} \tag{2.39}$$

El producto qd suele llamarse "momento de dipolo" y se denota como p. Cuando se usa como vector, es decir $q\vec{d} = \vec{p}$, su sentido se toma en la dirección desde $-q$ hasta $+q$.

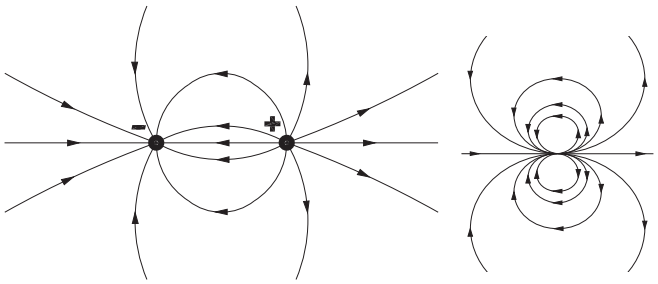

FIGURA 2.7. Líneas del campo generado por un dipolo cerca y lejos

Encontraremos campos eléctricos de este tipo asociados con moléculas y a sus interacciones en muy diversas situaciones. A menudo estamos interesados en los campos que un dipolo produce a distancias grandes comparadas con la separación d entre las cargas. Si examinamos la ecuación (2.39) veremos que cuando $d \ll r$, el término en d del denominador puede despreciarse y el campo depende del inverso de la tercera potencia de r. Aunque la ecuación (2.39) muestra esa propiedad solo para posiciones a lo largo de la línea bisectora perpendicular, se puede comprobar que esta propiedad es válida para todas las direcciones, mientras valga que $d \ll r$. En realidad, un campo que depende del inverso del cubo de la distancia puede tomarse como identificador de un campo generado por un dipolo, o por una distribución de cargas con momento de dipolo.

Supongamos ahora que tenemos un segundo dipolo, idéntico al primero, excepto en que sus momentos de dipolo $\vec{p}$ son antiparalelos. Tal configuración se denomina cuadrupolo lineal. Calculemos el campo en la línea bisectora perpendicular, a una distancia r de las cargas positivas. Si examinamos

la figura correspondiente, veremos que el campo neto en P será un vector paralelo a la dirección de $\vec{r}$. La contribución al campo de la carga $+2q$ es

$$E_{2q} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{2.40}$$

y está dirigido hacia afuera de $2q$. Cada una de las cargas $-q$ genera un campo

$$E_{-q} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0[r^2 + d^2]} \tag{2.41}$$

dirigido hacia la carga negativa. De esta manera el campo total es normal a cada dipolo con una magnitud

$$E_r = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}}\right] \tag{2.42}$$

Los cuadrupolos que encontramos en la naturaleza suelen estar asociados con moléculas y también sus campos son interesantes a distancias grandes comparadas con sus dimensiones. La ecuación (2.42) toma una forma sencilla bajo tales circunstancias. Si factorizamos $1/r^2$, la ecuación toma la forma

$$E_r = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[1 - (1 + \frac{d^2}{r^2})^{-3/2}\right] \tag{2.43}$$

Para encontrar una aproximación, emplearemos la expansión binomial

$$(1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \cdots \tag{2.44}$$

y consideraremos que para $a \ll 1$, los dos primeros términos constituyen una buena aproximación. Si tomamos $(d/r)^2$ como a y con $n = -3/2$, entonces

$$\left(1 + \frac{d^2}{r^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{d^2}{r^2} \tag{2.45}$$

De modo que el campo cuadrupolar será aproximadamente

$$E_r = \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \tag{2.46}$$

Así, el campo lejano sobre la línea bisectora perpendicular a un cuadrupolo lineal decae con la cuarta potencia de la distancia. Se puede demostrar, claro está, que igualmente es el caso para otras direcciones.

Resulta útil imaginar un cuadrupolo lineal empezando con dos dipolos dirigidos en direcciones opuestas pero coincidentes al comienzo, y luego deslizando uno en una distancia d a lo largo de la línea común entre las cargas.

Naturalmente habrá otras configuraciones cuadrupolares, realizando el corrimiento en otras direcciones, por ejemplo perpendicular a la línea común, para formar un paralelogramo de cargas. El cálculo de los campos variará en detalles en cada caso; pero, en principio, es la aplicación de la superposición de los campos producidos por cargas aisladas. A grandes distancia encontraremos también una dependencia del inverso de la cuarta potencia de la distancia y una dependencia del producto de una de las cargas y del cuadrado de la dimensión del cuadrupolo. Análogamente, se puede extender el proceso para formar, con dos cuadrupolos, un octupolo y, así, sucesivamente.

2.10. Campos eléctricos generados por cargas distribuidas

Imaginemos un cascarón esférico centrado en O, de radio r_0, sobre el que una carga q se distribuye uniformemente, de modo que la carga por unidad de área de la esfera es σ, con

$$\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

Calculemos la intensidad del campo eléctrico en un punto P, a una distancia r del centro de la esfera. El punto P queda fuera de la esfera en la figura, pero podría quedar adentro. Primero hagamos algunas consideraciones acerca de la simetría del problema: el uso de un sistema de coordenadas esféricas podría ser conveniente; podríamos aventurar que el campo eléctrico tiene una dirección radial y solo tendremos que calcular esa componente. Usaremos la línea $\overrightarrow{OP}$ como referencia para nuestro sistema de coordenadas.

Una región infinitesimal (Figura 2.8) sobre la esfera con área $r_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$ tendrá una carga $\sigma r_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$ y producirá en el punto P un campo dado por

$$d^2E = \frac{\sigma r_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta)} \tag{2.47}$$

Encontraremos el campo eléctrico total en P, tomando la suma vectorial de los campos producidos por tales elementos de carga considerando toda la esfera. Aprovechando la simetría del problema, podemos justificar que la suma de los campos elementales (2.47) carece de componente perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ y solo calcularemos la componente paralela a $\overrightarrow{OP}$. Esta componente es $d^2E(\cos\alpha)$, donde

$$\cos\,\alpha = \frac{r - r_0\cos\theta}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta)^{1/2}} \tag{2.48}$$

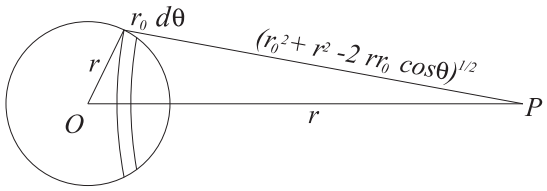

FIGURA 2.8. Cálculo del campo generado por una esfera de cargas

De modo que el campo neto en P es

$$E_P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma r_0^2 (r - r_0\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta)^{3/2}} \tag{2.49}$$

En el resultado de la integración aparecerá la expresión $(r^2 + r_0^2 - 2rr_0)^{1/2}$, que debe ser escrita como $(r - r_0)^{1/2}$ o como $(r_0 - r)^{1/2}$, dependiendo de que P esté fuera o dentro de la esfera, para evitar cantidades imaginarias. El resultado será

$$E_P = \frac{\sigma r_0^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{para } r_0 \le r$$
$$E_P = 0 \qquad \text{para } r < r_0$$

Así pues, una esfera cuya superficie está uniformemente cargada, produce un campo eléctrico que, en el exterior, es idéntico al que produciría una carga del mismo valor total situada en su centro; en el interior, el campo producido es cero.

2.11. Las pruebas de la ley de inverso al cuadrado

Para los físicos del siglo XIX resultaba seguramente importante tener cierta seguridad de estar desarrollando una teoría que describiera una realidad y ya sabemos que la evidencia aportada por los experimentos de Coulomb no era demasiado confiable. Por ello, Maxwell y Cavendish emprendieron pruebas más confiables. Primero una preparación teórica.

En lugar de suponer que la ley de inverso del cuadrado de la distancia es válida, imaginemos que la ley involucra una potencia n, no necesariamente entera. Calculemos el campo eléctrico que se esperaría en el interior de una esfera como la que acabamos de considerar. Bajo la nueva suposición, el campo debido a una carga sería de la forma

$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^n} \tag{2.50}$$

Aplicando la ecuación (2.50) al cascarón esférico uniformemente cargado, el campo producido por un elemento de área sería

$$d^2E = \frac{\sigma r_0^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta)^{n/2}} \tag{2.51}$$

Y la suma de esos campos sería

$$E_P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma r_0^2(r - r_0\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta)^{(n+1)/2}} \tag{2.52}$$

Realizando la integración, el resultado será

$$\begin{aligned} E_P = {} & \frac{\sigma r_0}{2\epsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\times \\ & \times \left\{(r+r_0)^{2-n}[r(2-n)-r_0] - (r-r_0)^{2-n}[r(2-n)+r_0]\right\} \end{aligned} \tag{2.53}$$

para puntos fuera del cascarón esférico, y

$$\begin{aligned} E_P = {} & \frac{\sigma r_0}{2\epsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\times \\ & \times \left\{(r+r_0)^{2-n}[r(2-n)-r_0] + (r-r_0)^{2-n}[r(2-n)+r_0]\right\} \end{aligned} \tag{2.54}$$

para puntos en el interior del cascarón esférico.

Es fácil comprobar que la ecuación (2.53) se reduce a la ya encontrada para $n = 2$ y que la ecuación (2.54) se hace cero. Pero eso no es así para otros valores de n.

El experimento de Cavendish consistió en lo siguiente: se construyó un sistema de dos cascarones esféricos conductores; el exterior estaba formado por dos hemisferios que se podían separar para poder llegar a la esfera interior. Un alambre conductor conectaba las dos esferas mientras una máquina electrostática "cargaba" la esfera exterior. Cuando el proceso de carga se completaba, se eliminaba el alambre, se separaban los hemisferios exteriores y se medía la cantidad de carga en la esfera interior. Se esperaría que si el exponente es dos, no habría carga en el interior porque el campo es cero; sin embargo, una desviación en el exponente daría un valor de carga diferente de cero. Dentro de la sensibilidad de los instrumentos de Cavendish, no se encontró carga en la esfera interior.

Maxwell también realizó experimentos similares y encontró[5] que el exponente no diferiría de 2 en más de $5*10^{-3}$. Posteriormente, en 1936, Plimpton y Lawton realizaron un experimento mucho más refinado y mostraron que

[5] Treatise on Electricity and Magnetism, Vol.1, Art. 74a-74e.

el exponente estaría[6] entre los límites $2 \pm 1 \times 10^{-9}$. Más tarde, el experimento de Williams, Faller y Hill en 1971 confirmó[7] que el exponente difiere de 2, como máximo, en una cantidad que está entre $(2,7 \pm 3,1) \times 10^{-16}$. Eso significa una excelente base experimental para desarrollar una teoría acerca de las interacciones clásicas como veremos en los capítulos que siguen. De todas maneras, el tema está abierto a la discusión y revisión (dicho de otra manera, el electromagnetismo aún está vivo), como se puede comprobar en diversas publicaciones de actualidad, aunque en contextos que ya no son de física clásica[8].

2.12. Cálculo de campos con la ley de Gauss

Uno de los cálculos más simples que se pueden realizar usando la ley de Gauss es la del campo eléctrico alrededor de un cascarón esférico uniformemente cargado. Ya realizamos ese cálculo y vale la pena comparar los dos métodos.

El cascarón esférico que se considera tiene radio r_0 y tiene una carga q uniformemente distribuida. Calculemos la intensidad de campo eléctrico en un punto que está a una distancia r del centro de la esfera. Para ello "dibujamos" una superficie esférica imaginaria, llamada superficie gaussiana, de radio r, concéntrica con el cascarón cargado. Debido a la simetría del problema, podemos esperar que el campo eléctrico tenga la misma intensidad en todos los puntos de esta esfera gaussiana y que sea en todas partes normal a la esfera. De esta manera, el flujo de campo eléctrico total sobre la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \int d\vec{S} = E 4\pi r^2 \tag{2.55}$$

Este flujo total está relacionado con la carga total encerrada dentro de la superficie gaussiana. Si $r_0 \leq r$, la carga encerrada es q, de modo que

$$\Phi_E = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.56}$$

de donde se sigue que

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} \tag{2.57}$$

[6] *A Very Accurate Test of Coulomb's Law of Force Between Charges*, S. J. Plimpton and W. E. Lawton, Physical Review, 1936.

[7] *New Experimental Test of Coulomb's Law: A Laboratory Upper Limit on the Photon Rest Mass*, E.R. Williams, J.E. Faller and A. Hill, Physical Review Letters, 1971.

[8] Ver, por ejemplo, *The Mass of the Photon*, Lian-Chen T., Jun L., G.T. Gillies, Physical Review Letters, 2005.

En contraste, para los puntos en el interior de la esfera, la carga encerrada es cero y por tanto la intensidad del campo es cero. Estos resultados se encontraron por un proceso más laborioso; la ventaja que nos trae la ley de Gauss es evidente.

Un nuevo ejemplo tiene también una apariencia artificiosa, pero veremos su importancia más adelante. Es el caso del campo eléctrico generado por una distribución lineal de carga, con una densidad lineal de carga λ_0 en c/m.

Supondremos que la línea coincide con el eje z y tiene longitud "infinita". La simetría del problema se adecúa a un sistema de coordenadas cilíndricas y llamaremos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a la distancia de un punto en el que calcularemos el campo hasta el eje z. La simetría del sistema de cargas también nos permite prever que el campo será independiente de z y que su dirección es radial (siempre hay cargas simétricamente situadas en relación con cualquier posición a lo largo del eje). Con estas consideraciones, el campo será de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{r}/r \tag{2.58}$$

La superficie gaussiana que tiene la simetría del problema es una cilíndrica, de altura h y radio r, coaxial con la línea de carga. La contribución flujo de campo eléctrico será cero en las "tapas" del cilindro. El flujo tendrá el valor

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)\ 2\pi r h \tag{2.59}$$

en la superficie lateral. Debe ser proporcional, además, a la carga total en una longitud h de la línea. De esta manera

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{2.60}$$

para la "línea infinita de carga".

Un ejemplo más es, naturalmente, el de la "distribución plana infinita de carga", con densidad de carga σ_0 en c/m^2. La simetría del problema nos permite elegir coordenadas cartesianas. Hagamos coincidir el plano de la carga con el plano xy, de modo que Oz es perpendicular a ese plano de la carga. El campo, por simetría, debería ser independiente de x y de y y de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{k} \tag{2.61}$$

Además debe ser "antisimétrico", es decir

$$E(-z) = -E(z) \tag{2.62}$$

Usaremos, entonces, una superficie gaussiana cilíndrica, de altura $2z$, con sus tapas en los planos $+z$ y $-z$ y de radio ρ. El flujo eléctrico será

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{2.63}$$

El campo es perpendicular a las tapas, de modo que el flujo en el cilindro es cero y en las tapas vale

$$\oint_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\pi\rho^2)(E(-z) - E(z)) = (\pi\rho^2)\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \tag{2.64}$$

El campo generado por una "superficie infinita de carga" tendrá el valor

$$E(z) = \frac{\sigma_0}{2\,\epsilon_0}\,\text{signo}\,(z) \tag{2.65}$$

donde signo (z) toma valor $+1$ si $0 < z$ o -1 si $z < 0$.

Si ahora empleamos el concepto de superposición de los campos producidos por cargas distintas, es fácil calcular en el caso de dos distribuciones de carga superficial, con densidades $+\sigma_0$ y $-\sigma_0$, separadas por una distancia a, el campo eléctrico por fuera de las dos distribuciones es cero y entre las dos es el doble del calculado arriba.

Estos casos ilustran cómo la ley de Gauss suministra las bases para calcular algunos tipos de campos eléctricos. Lo que hace posible el uso de la ley de Gauss es la existencia de alguna simetría a partir de la que se puede inferir la simetría del campo, para emplear una superficie gaussiana adecuada. En casos sin esa simetría, la ley de Gauss es de poca ayuda en el cálculo concreto, aunque expresa una relación válida en general.

2.13. Resumen y comentarios

La ley de fuerza entre dos cargas se desarrolló, si tomamos como referencia los artículos publicados, a partir de mediciones directas con esferas cargadas. De acuerdo con esos experimentos, la fuerza sigue aproximadamente una dependencia del inverso del cuadrado de la distancia. A partir de esos resultados se postuló que la ley es exacta para cargas puntuales. Por otro lado, los experimentos del tipo de Cavendish suponen que si una ley de inverso del cuadrado de la distancia vale para cargas puntuales, se debiera observar experimentalmente un campo nulo dentro de una esfera cargada, solamente si $n = 2$.

La ley de inverso del cuadrado de la distancia ha sido muy exitosa para predecir el comportamiento de cargas estáticas, aunque la base experimental inicial de la ley es limitada. Una limitación adicional está en la teoría de los experimentos del tipo de Cavendish. Su predicción depende de una integral cuyo proceso de límite requiere una densidad de carga continua; a nivel molecular se pueden esperar discontinuidades de la densidad de carga. Se puede intentar dar un rodeo a la dificultad diciendo que se usan volúmenes infinitesimales en la integración, pero que son suficientemente grandes para contener aún muchas cargas elementales, volúmenes grandes comparados con las dimensiones de las moléculas. Es, por supuesto, un subterfugio criticable, pero funciona con la precisión que ha sido probado.

Otra aproximación está implícita en la teoría que subyace en las pruebas de la ley de Coulomb. Las cargas que se supone están "en reposo", en la realidad estarán seguramente en movimiento a grandes velocidades, aunque con pequeñas amplitudes. Su movimiento es, en parte, el movimiento térmico de los cuerpos en donde está la carga. Posteriormente veremos que los campos generados por cargas en movimiento son distintos a los generados por cargas en reposo. Eso quiere decir que la ley de Coulomb tiene una validez estadística; las mediciones deben realizarse en tiempos largos para promediar las pequeñas fluctuaciones en la densidad de carga que serán producidas por el movimiento aleatorio de las cargas. Si los instrumentos son suficientemente sensibles y tienen un tiempo de reacción suficientemente corto, podrían observarse fluctuaciones estadísticas. De hecho, se observan. Por ejemplo, en los amplificadores electrónicos de alta ganancia (como en la formación de una imagen en un microscopio electrónico) un mínimo de "ruido" irreducible en la salida (es decir, fluctuación) puede atribuirse al movimiento aleatorio de los electrones en ciertas resistencias.

Otras dificultades con la ley de Coulomb son de otro orden. La definición de intensidad del campo eléctrico en un punto requiere, en principio, de la medición de una fuerza sobre una carga de prueba situada en ese punto. ¿Se justifica una referencia a una intensidad de campo en el espacio vacío?

El lenguaje que emplearemos en la discusión sobre campos eléctricos (y más tarde sobre campos magnéticos) implicará que estos campos tienen una realidad física propia, aparte de la presencia inmediata de cargas. Podríamos justificar este uso como una manera de hablar con brevedad sobre situaciones físicas complejas. Nuestros resultados experimentales son datos sobre el comportamiento de cargas. No podemos observar los campos sino con la ayuda de cargas. Será una importante disciplina mental relacionar siempre el comportamiento predicho de los campos con las posibles mediciones que puedan realizarse para observar ese comportamiento.

2.14. Temas para discusión

- Coulomb supuso que la carga en una de sus esferas conductoras (de unos 5 mm de diámetro) se repartía por igual con otra esfera idéntica que fuera tocada por aquella. ¿Cómo se podría argumentar a favor?
- Un cuerpo cargado puede actuar sobre objetos no cargados; por ejemplo sobre pequeños trozos de papel. ¿Cómo se podría asegurar si su carga es positiva o negativa?
- Describa cómo funciona un electroscopio.
- Describa experiencias simples que muestren la conservación de la carga.
- Si el flujo de campo electrostático a través de una superficie cerrada es cero, ¿puede haber cargas dentro de esa superficie? Argumente su respuesta.

2.15. Ejercicios

1. ¿Cuántos electrones habrá en un peine cargado que atrae un trozo de papel de 1 g que está a 5 cm de distancia con una aceleración de 1 cm/s^2? Suponga que la carga en el trozo de papel es de igual magnitud que la carga en el peine y desprecie la fuerza gravitatoria.
2. Un rayo promedio transporta una carga de 30 C. ¿A cuántos electrones equivale esta carga?
3. Dos cargas puntuales de -5×10^{-8} C están fijas en los puntos (0 mm, 0 mm) y en (5 mm, 0 mm). Una partícula con masa 5 mg y carga 8×10^{-9} C se deja libre desde el reposo en el punto (10 mm, 0 mm).
   - Calcule el campo eléctrico (magnitud, dirección, sentido) debido a las dos cargas negativas en el punto (10 mm, 0 mm).
   - Calcule la aceleración con que arranca la partícula de carga positiva. ¿Se mantiene constante esa aceleración?
4. Dos esferas idénticas, de radio 1,0 cm y masa 10 g están suspendidas de un mismo punto mediante hilos de seda de 19 cm de longitud. Ambas esferas poseen cargas negativas y numéricamente iguales. Las dos esferas alcanzan el equilibrio con un ángulo de 90° entre los hilos.
   - Determine el valor de las cargas. Si la distribución de carga fuera uniforme en cada esfera, ¿a qué sería igual la densidad de carga?

- Determine la tensión en los hilos. ¿Cambiaría esta si las cargas no fueran negativas, sino positivas pero del mismo valor ya calculado?

5. Calcule la intensidad de campo eléctrico a una distancia r a partir del eje de un cilindro de radio R, infinitamente largo, cargado uniformemente, suponiendo que la carga esté solamente en la superficie del cilindro. Use la ley de Gauss. Considere los casos $r < R$ y $R < r$.

6. ¿A qué es igual la intensidad de campo eléctrico en un punto a la distancia r a lo largo de la recta bisectora perpendicular de un alambre de longitud *finita*, L, que está uniformemente cargado? ¿Puede emplearse la ley de Gauss en esta solución? ¿Por qué?

7. Determine la intensidad de campo eléctrico en un punto P que está situado a una distancia d sobre la perpendicular trazada desde un extremo de un alambre uniformemente cargado de longitud L. Muestre que ese campo hace un ángulo φ con la perpendicular, igual a $\varphi = \theta/2$, donde θ es el ángulo definido por los extremos del alambre y el punto en que se está determinando el campo eléctrico.

8. Un cascarón esférico uniformemente cargado tiene radio a. Concéntrico con ese hay un segundo cascarón de radio b, con una carga del mismo valor pero sentido opuesto, donde $a < b$. Determine el campo eléctrico a una distancia r desde el centro común, donde $a \leq r \leq b$. ¿Cómo se compara ese campo con el campo que existiría si el segundo cascarón no existiera (o fuera de radio infinito)?

9. Una molécula de H_2, con cargas de valor $\pm 1,6 \times 10^{-19}$ C a una distancia 10^{-10} m y masas $1,66 \times 10^{-27}$ kg, se coloca dentro de un campo eléctrico uniforme 3×10^4 N/C, haciendo un ángulo θ con esta dirección. Muestre que el torque que actúa sobre el dipolo es $pE \operatorname{sen} \theta$. ¿Cómo se esperaría que se mueva la molécula en ese campo uniforme?

10. Calcule el valor del campo eléctrico producido por:

- Una carga numéricamente igual a un electrón a distancias r de $1 * 10^{-8}$ m, $1 * 10^{-7}$ m y $1 * 10^{-6}$ m.

- Un dipolo con cargas numéricamente iguales a un electrón y separación $d = 1 * 10^{-9}$ m a distancias r de $1 * 10^{-8}$ m, $1 * 10^{-7}$ m y $1 * 10^{-6}$ m.

- Un cuadrupolo con cargas numéricamente iguales a un electrón y separación $d = 1 * 10^{-9}$ m a distancias r de $1 * 10^{-8}$ m, $1 * 10^{-7}$ m y $1 * 10^{-6}$ m.

- Haga dos gráficos para mostrar la dependencia funcional de estas fuerzas con la distancia, uno con escalas lineales, otro con escalas logarítmicas. Discuta el alcance y el confinamiento de las fuerzas eléctricas a distancias cortas de las cargas que las producen.

- Calcule qué valores de aceleración producen esos campos sobre un electrón o un protón.

  Recuerde que $m_e = 9,1{\times}10^{-31}$ kg, $m_p = 1,66{\times}10^{-27}$ kg, que $q_e = -1,6{\times}10^{-19}$ C y que la constante de la fuerza de Coulomb es 9×10^9 $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

2.16. Actividades prácticas

- Una actividad interesante y útil para aclarar el sentido de la física –no solo del tema electricidad– es el empleo de programas de simulación. Estos programas usan las ecuaciones básicas como definición de fuerzas (con sus dependencias funcionales) y las aplican para calcular el movimiento de partículas, de la luz, los campos, etcétera. Se sugiere montar en un computador el programa "xyZet", cuyo autor es Michael Luedke, de la Universidad de Kiel. Se puede encontrar una versión beta para Linux en la página ftp.ipn.uni-kiel.de/pub/xyZET/linux/ y para Windows –que requiere además del programa "x-win32"– en la página ftp.ipn.uni-kiel.de/pub/windows95/Xyzet_W95_Demo/. Algunas explicaciones vienen en alemán; podemos suministrar una versión en español. La mayoría de las ventanas que se abren –se pueden colocar en diversos sitios de la pantalla– están en inglés, lo que esperamos no presente grandes dificultades.

- Una vez instalado el programa anterior, se sugiere correr el archivo ("experimento") Dipol_und_Feld.exp, que muestra las líneas de campo generadas por un dipolo –en la pantalla "Main Control Panel" se activa "START"–. Además, el archivo Potentialflaeche.exp muestra las líneas de campo de cargas (para correr éste, se aconseja desactivar, en la pantalla "Electrical Field and Potencial", la opción "equipotential surface" y activar "electr. field lines".)

- Para nuestra discusión y para comprender acerca de la posibilidad de un equilibrio de fuerzas eléctricas, así como la relación de los campos y la posición de las cargas, son interesantes el archivo Gauss.exp y el Ladung_u_Feld.exp.

Por interesantes que sean los resultados de las simulaciones, no se debe olvidar que estas reproducen la teoría. Pero falta ver si la teoría corresponde con la realidad –o en qué medida corresponde–.

En nuestro ambiente hay muchos campos eléctricos no solo constantes, sino variables; no los percibimos porque nuestros sentidos no se desarrollaron para depender de esos estímulos, a diferencia de muchos otros seres vivos. Podemos, sin embargo, construir instrumentos que nos informen acerca de la presencia de esos campos. Uno de ellos es llamado electroscopio.

- Recomendamos la construcción de un electroscopio. Se puede realizar simplemente con una lámina de latón, doblada como muestra la figura (Figura 2.9), que sirve de soporte, y una tira de lámina muy delgada de aluminio, doblada en dos y pegada por el doblez al soporte –será necesario asegurar un buen contacto eléctrico entre las dos por medio de polvo de grafito, de un lápiz–.

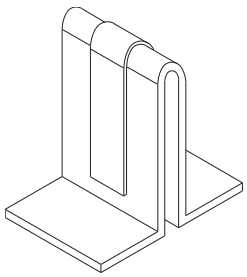

FIGURA 2.9. Un electroscopio sencillo

Si ahora se acercan objetos de plástico, que hayan sido frotados con tejido, se podrá ver la reacción del electroscopio a las cargas no compensadas. Para los(as) más ambiciosos(as) queda la construcción de un detector electrónico.

Se encuentran instrucciones para la construcción de un detector electrónico algo complejo, pero muy interesante, en www.ece.rochester.edujones/demos/ahern.html

- Finalmente, vale la pena construir y estudiar el comportamiento de un "generador electrostático".

Se encuentran instrucciones para la construcción de un generador electrostático según Kelvin en physics.about.com/cs/experiments/a/260303.htm y en www.csiro.au/helix/experiments/dhexpkelvin.shtml. Para un electróforo –inventado, según parece, por A. Volta–, en members.ozemail.com.au/∼macinnis/scifun/elecmag.htm, en www.g8cyerichmond.freeserve.co.uk/electrophor.htm y en www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/maussion/statelec /PagesEngl/13Phorus.html

3

El potencial electrostático

3.1. Introducción

Para predecir el comportamiento de partículas con carga que se mueven bajo la influencia de campos electrostáticos, resulta necesario calcular el valor y la dirección de la intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r})$. El problema se convierte en un problema de mecánica, el de movimiento de una partícula de carga q y masa m en presencia de fuerzas $q\ \vec{E}(\vec{r})$.

La definición de un potencial electrostático suministra un método muy práctico de cálculo de los campos, pero no solo eso: en aplicaciones como la llamada "óptica de electrones" o en la "óptica de iones" los campos eléctricos que permiten acelerar y "enfocar" las partículas cargadas, los campos suelen generarse a través de la definición de superficies de potencial constante, llamadas "superficies equipotenciales". Por esas razones resulta conveniente dedicarle un esfuerzo al estudio de esa función. En lo que sigue plantearemos la definición y trabajaremos el cálculo del potencial electrostático. El estudio de ese potencial se justifica por otras razones: permite una visión más profunda en la física de las cargas eléctricas; a partir de ecuaciones de energía se obtiene mucha información acerca del posible movimiento de partículas cargadas. Una ventaja adicional es que manejar relaciones escalares resulta generalmente más simple que manipular relaciones vectoriales.

3.2. El potencial escalar eléctrico

Supongamos que las coordenadas del punto en que calculamos el efecto de las cargas es $\vec{r} = (x, y, z)$ y que las coordenadas donde están las cargas

son $\vec{r}\,' = (x', y', z')$. Supondremos, además, que las cargas están distribuidas con una densidad volumétrica $\rho(\vec{r}\,')$. La intensidad del campo eléctrico en el punto $\vec{r} = (x, y, z)$ es la superposición de contribuciones de las cargas en los puntos $\vec{r}\,' = (x', y', z')$, como vimos en el capítulo anterior. La componente x del campo tiene una dependencia funcional de las coordenadas dada por $(\vec{r} - \vec{r}\,')/|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3$, que puede escribirse como

$$\frac{x - x'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Se demuestra con facilidad que

$$\frac{x - x'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2}} \quad (3.1)$$

Y como nada hay diferente en el eje x, respecto a los otros, podremos escribir que

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad (3.2)$$

donde $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es un operador diferencial que actúa sobre las componentes de $\vec{r}$ pero no sobre las de $\vec{r}\,'$. Se sigue, a partir de la superposición de las fuerzas eléctricas que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (3.3)$$

donde se define

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \quad (3.4)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico generado por una colección de cargas fijas puede calcularse como el gradiente de un potencial escalar. Ese potencial se puede expresar como una integral de volumen que representa el efecto de la distribución de cargas.

El potencial escalar generado por una carga q situada en el origen es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.5)$$

Sabemos que las fuerzas eléctricas se suman, de modo que la fuerza total que ejerce un conjunto de N cargas discretas q_i situadas en $\vec{r}_i$ sobre una

carga de prueba se podrá calcular a partir de una función (un potencial) escalar

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\vec{r}_i)$$

donde

$$\phi_i(\vec{r}_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

El potencial escalar es simplemente la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas tomadas como si estuvieran solas.

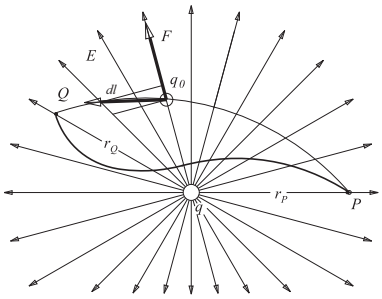

FIGURA 3.1. Acerca de la definición de potencial eléctrico

Supongamos ahora que una partícula con carga q_0 es movida a lo largo de alguna trayectoria desde el punto P hasta el punto Q por las fuerzas eléctricas (Figura 3.1). El trabajo neto realizado sobre esa partícula es

$$W = \int_P^Q \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza eléctrica y $\vec{dl}$ es el elemento de línea a lo largo de la trayectoria. Haciendo uso de los resultados anteriores, obtendremos que

$$W = q \int_P^Q \vec{E} \cdot \vec{dl} = -q \int_P^Q \vec{\nabla}\phi.\vec{dl} = -q(\phi(Q) - \phi(P)) \tag{3.6}$$

El trabajo eléctrico realizado por las demás cargas sobre nuestra partícula de prueba es simplemente menos la carga multiplicada por la diferencia en el potencial eléctrico entre el punto final y el punto inicial de la trayectoria.

Esta cantidad es independiente del camino tomado entre P y Q, de modo que el campo eléctrico generado por una distribución estacionaria de cargas

es un ejemplo de campo conservativo. En realidad, este resultado es inmediato, si recordamos que el campo eléctrico es el gradiente de un potencial escalar. El trabajo realizado por la partícula cuando se lleva a lo largo de una trayectoria cerrada es cero, de modo que

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{3.7}$$

Para cualquier camino cerrado C. Esto implica que, empleando el teorema de Stokes, o la definición de rotacional

$$\vec{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \tag{3.8}$$

para cualquier campo eléctrico generado por cargas estacionarias. La ecuación (3.8) se sigue también de la ecuación (3.3), porque $\vec{rot}\ (\vec{grad}\ \phi) = 0$ para cualquiera función potencial ϕ.

La unidad del SI para el potencial eléctrico es el voltio, equivalente a un joule por coulomb. De acuerdo con la ecuación (3.6), el trabajo eléctrico realizado sobre una partícula cuando se la lleva entre dos puntos es el producto de su carga por la diferencia de potencial entre los dos puntos (llamada también "diferencia de voltaje").

La unidad del campo eléctrico puede también expresarse en términos de voltio/metro(V/m) de acuerdo con la definición de potencial.

El potencial escalar está definido excepto por una constante aditiva. La transformación

$$\phi(\vec{r}) \to \phi(\vec{r}) + c$$

deja al campo eléctrico calculado sin ningún cambio. El potencial puede fijarse sin ambigüedad, especificando su valor en un solo punto. La convención más usual (en los desarrollos teóricos) es que el potencial es cero "en el infinito".

La convención está implícita en la ecuación (3.4), en la que puede comprobarse que

$$\phi \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad |\vec{r}| \to \infty$$

siempre que la carga total

$$\int \rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'$$

sea finita y su extensión esté acotada.

La primera de las imágenes en la figura 3.2 muestra una representación del potencial generado por una carga positiva en el plano que contiene esa

carga; para acercar una carga de prueba se debería realizar un trabajo equivalente al de subirla por una montaña, como la que muestra la figura. La segunda muestra el potencial generado por dos cargas positivas, equivalente a dos montañas. La tercera muestra el potencial generado por un dipolo (una carga positiva y una negativa, del mismo valor). Equivale a una montaña y un pozo. La cuarta muestra, para comparación, el potencial y el campo generado por un pez eléctrico (alumnus.caltech.edu/rasnow/). Nótese que para una carga negativa, los roles de la montaña y el abismo son al contrario. Esta representación no vale, claro está, para puntos muy cercanos a las cargas.

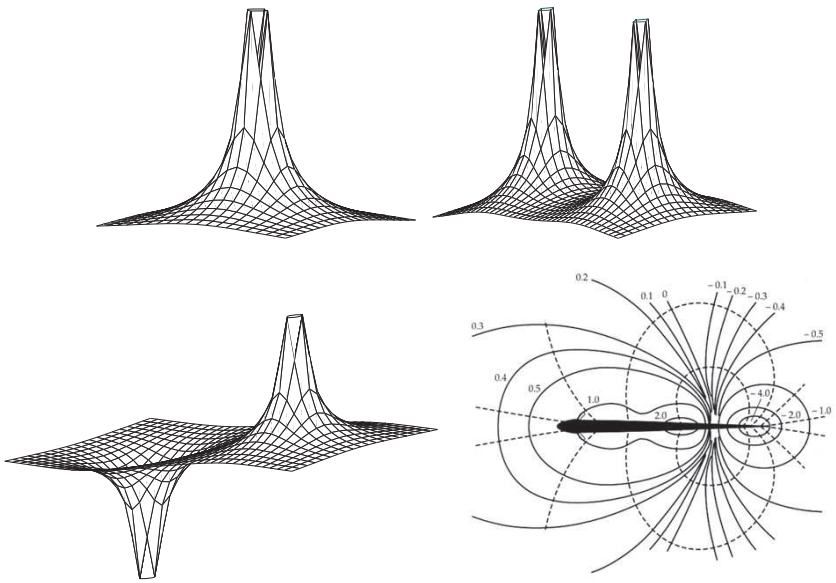

FIGURA 3.2. Ejemplos de potenciales y campos eléctricos

3.3. La diferencia de potencial y el camino de integración

Volvamos al resultado expresado en la ecuación (3.6). Tomemos, para simplificar, el potencial generado por una carga q' situada en el origen de coordenadas y llamemos a nuestra carga de prueba q. Si los dos puntos P y Q están sobre una línea radial a distancias del origen dadas por r_P y

r_Q, respectivamente, es fácil calcular que el trabajo realizado al mover la carga de prueba (de valor 1 C) será

$$\Delta V = -\int_P^Q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} dr = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_P}\right) \tag{3.9}$$

Como se esperaría, se requiere que un agente externo realice un trabajo positivo para mover una carga de prueba positiva hacia más cerca de otra carga positiva. Es claro, además, que mover la carga de Q a P requiere un trabajo de signo contrario.

Supongamos, ahora, que el punto P está situado sobre otra línea radial, pero aún a la misma distancia r_P de q'. Podríamos escoger varios caminos de integración para llevar la carga q hasta Q, como se muestra en la figura 3.1. Es posible aproximar este camino tanto como queramos por una sucesión de incrementos (o decrementos) radiales y arcos. Pero la integral de línea sobre los arcos es cero, porque el campo es normal a esos desplazamientos; por el contrario, la integral de línea sobre los incrementos radiales tiene el mismo resultado que en la ecuación (3.9). De esta manera, al menos en el caso de una carga puntual, la diferencia de potencial entre dos puntos depende solo de la posición de esos puntos y no del camino usado para calcularla. Tenemos libertad para escoger el camino que nos haga más fácil el cálculo.

Este resultado, que la diferencia de potencial es independiente del camino, tiene una importancia fundamental (no solo es un resultado matemático). Supongamos que lo contrario fuese cierto. En la situación que consideramos (Figura 3.1), supongamos que se requiere menos trabajo para mover a q entre P y Q a lo largo de un camino I que a lo largo de un camino II. Una inversión de la dirección de movimiento resulta solo en un cambio de signo en el trabajo realizado por un agente exterior; la carga q podría moverse de P a Q a lo largo del camino I y regresar de Q a P a lo lago del camino II. En total habría una ganancia de trabajo, aunque el sistema físico volviera a su estado inicial. Estaríamos ganando energía en un proceso que podemos repetir cuantas veces quisiéramos y tendríamos una fuente de energía. ¡Tendríamos que reescribir mucho de la física basada en la conservación de la energía!

La ecuación (3.7) resume, entonces, el hecho de que en el campo electrostático la diferencia de potencial no depende del camino empleado en el cálculo. Resultará evidente también que la ecuación (3.7) se aplica a cualquier configuración de cargas estáticas, por las mismas consideraciones de energía.

3.4. Funciones potencial para distribuciones continuas de carga

Calculemos ahora las funciones potencial para algunas distribuciones de carga. Un primer ejemplo (Figura 3.3) será el del cascarón esférico de radio r_0 con carga total q'. Podremos comparar directamente los resultados con el campo que hemos calculado en el capítulo anterior.

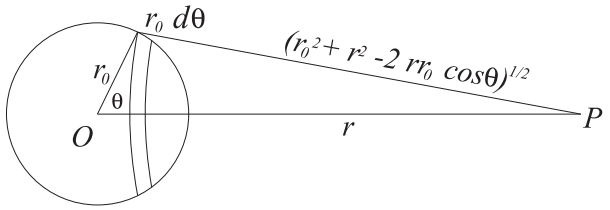

FIGURA 3.3. Cálculo del potencial generado por una esfera de carga

La línea desde el centro de la esfera, O, hasta el punto en que calcularemos el potencial, P, a una distancia r desde O, será nuestro eje $\overrightarrow{OP}$ para un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ). Consideremos un anillo circular de ancho $r_0 d\theta$, radio $r_0 \operatorname{sen}(\theta)$ y centrado en el eje de referencia. Todos los puntos de ese anillo están a una distancia $(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta)^{1/2})$ de P. La carga total en el anillo es $2\pi\sigma\ r_0^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta$.

A partir de la definición (3.4), tomando el cero del potencial "en el infinito", el potencial generado por este anillo de carga en el punto P será

$$d\phi = \frac{2\pi\sigma\ r_0^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta))^{1/2}} \tag{3.10}$$

Y el potencial total en P, sumando la ecuación anterior con los límites $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, es

$$\phi = \frac{2\pi\sigma\ r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} [(r^2 + r_0^2 + 2rr_0)^{1/2} - (r^2 + r_0^2 - 2rr_0)^{1/2}] \tag{3.11}$$

En esta ecuación (3.11), cada término entre paréntesis representa una distancia: las distancias de P al punto más cercano y al punto más lejano de la esfera. El primer radical es simplemente $(r + r_0)$; el segundo puede ser $(r - r_0)$ o $(r_0 - r)$, dependiendo de si $r_0 < r$ o $r < r_0$. Como la carga total es $q' = 4\pi\sigma\ r_0^2$, la función potencial está dada, fuera de la esfera, por

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{4\pi\sigma\ r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3.12}$$

y dentro de la esfera por

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{4\pi\sigma\ r_0}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q^{'}}{4\pi\epsilon_0 r_0} \tag{3.13}$$

En el capítulo encontramos anterior que el campo eléctrico fuera de un cascarón esférico uniformemente cargado sería como si la carga estuviera concentrada en el origen; no es sorprendente el resultado anterior: el potencial fuera del cascarón también es como si la carga estuviera concentrada en el origen. Habíamos encontrado también que el campo dentro del cascarón es cero; ahora encontramos que el potencial es constante; no se requiere realizar más trabajo contra las fuerzas eléctricas para mover una carga de prueba hasta el interior del cascarón que para llevarla justo hasta el cascarón.

Como segundo ejemplo, consideremos una "línea de carga", es decir un cilindro infinito, uniformemente cargado. Calculemos por ahora la diferencia de potencial entre dos puntos a distancias r_1 y r_2 a partir del eje de la distribución de carga. Supondremos que $r_1 < r_2$. La carga estará dada por una densidad lineal de carga, λ_0. Para encontrar la diferencia de potencial entre los dos puntos, emplearemos ahora el campo eléctrico calculado en el capítulo anterior,

$$E = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{3.14}$$

y calcularemos la integral de línea

$$\Delta V_{r_2 \to r_1} = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{\lambda_0\, dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} ln \frac{r_2}{r_1} \tag{3.15}$$

En este caso, si tratamos de definir el cero del potencial "en el infinito", todos los puntos alrededor de la distribución de carga tendrían potencial infinito. Resulta necesario definir el cero de otra manera. Volveremos sobre este problema más tarde.

Un ejemplo más será el de dos planos paralelos infinitos cargados uniformemente. También en el capítulo anterior encontramos que el campo eléctrico en la región entre dos planos infinitos, con densidades superficiales de carga σ_0 y $-\sigma_0$ es perpendicular a los planos y tiene un valor de σ_0/ϵ_0.

Empleemos este resultado para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos A y B que están en la región entre las placas (Figura 3.4). Supongamos que la distancia entre planos es d y la distancia entre A y B es z, con el vector $\overrightarrow{AB}$ haciendo un ángulo θ con la normal a las placas. La integral de camino del campo nos resulta

$$\Delta V_{A \to B} = \frac{\sigma_0 z \cos\theta}{\epsilon_0} \tag{3.16}$$

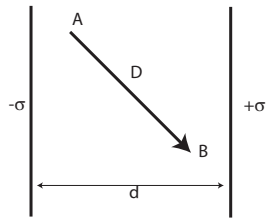

FIGURA 3.4. Sobre el potencial entre dos planos con carga uniforme

Así, cuando el punto A está en el plano cargado negativamente y B en el plano cargado positivamente, la diferencia de potencial será la diferencia de potencial entre planos,

$$\Delta V = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0} \tag{3.17}$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior, no es conveniente definir el cero de potencial en el infinito.

3.5. La ecuación de Poisson

El campo eléctrico generado por un conjunto de cargas estacionarias puede expresarse como el gradiente de una función escalar, el potencial electrostático, de modo que

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{3.18}$$

Esta ecuación puede combinarse con la ley de Gauss, para encontrar una ecuación diferencial parcial para el potencial escalar

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{3.19}$$

Este es un ejemplo de un tipo de ecuación muy famoso, conocido como la "ecuación de Poisson".

En su forma más general, la ecuación de Poisson puede expresarse como

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = v(\vec{r}) \tag{3.20}$$

donde $u(\vec{r})$ es algún potencial escalar que debe determinado y $v(\vec{r})$ es una "función fuente" conocida. La condición de frontera más conocida aplicada a esta ecuación para encontrar su solución es que el potencial u es cero "en el infinito". Las soluciones a la ecuación de Poisson se pueden superponer. Así,

si u_1 es el potencial generado por la función fuente v_1 y u_2 es el generado por la función v_2, de modo que

$$\nabla^2 u_1 = v_1 \qquad\qquad \nabla^2 u_2 = v_2$$

entonces, el potencial generado por $v_1 + v_2$ será $u_1 + u_2$, con

$$\nabla^2(u_1 + u_2) = \nabla^2 u_1 + \nabla^2 u_2 = v_1 + v_2 \tag{3.21}$$

La ecuación de Poisson tiene esta propiedad porque es lineal tanto en los términos de potencial como en los términos de fuente.

Esta propiedad de las soluciones de la ecuación de Poisson sugiere un método general para resolver la ecuación diferencial. Supongamos que se pudieran construir todas las soluciones generadas por fuentes puntuales. Por supuesto, tales soluciones deben satisfacer ciertas condiciones de frontera. Cualquier función fuente, muy general, podría construirse a partir de fuentes puntuales, con los pesos (es decir, con los valores de carga) adecuados; eso quiere decir que una solución de la ecuación de Poisson debería poderse expresar como una suma con pesos de soluciones (potenciales) de fuentes puntuales. De esa manera, una vez conocidas las soluciones con fuentes puntuales, podremos construir cualquier otra solución. En términos matemáticos, la ecuación para una fuente puntual de magnitud unidad es

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{3.22}$$

cuya solución se hace cero para $|\vec{r}| \to \infty$. La función $G(\vec{r}, \vec{r}')$ es la solución generada por una fuente puntual situada en $\vec{r}'$. Los matemáticos la denominan "función de Green". La función generada por una función fuente $v(\vec{r}')$ será simplemente la suma, con pesos apropiados, de todas funciones de Green que son solución a la ecuación de Poisson

$$u(\vec{r}') = \int G(\vec{r}, \vec{r}\,')v(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' \tag{3.23}$$

Se puede demostrar fácilmente que esta es la solución correcta: recordemos que el operador ∇ actúa sobre las coordenadas $\vec{r}$ pero no sobre las $\vec{r}'$. Así,

$$\nabla^2 u(\vec{r}') = \int [\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,')]v(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')v(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' = v(\vec{r}') \tag{3.24}$$

Regresemos a la ecuación (3.19),

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \tag{3.25}$$

Conocemos ya la función de Green para esta ecuación; recordemos el potencial de una "carga puntual" y modifiquemos la expresión quitando la parte $q/4\pi\epsilon_0$. Se puede expresar como

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.26}$$

Nótese que ahora la solución general para la ecuación de Poisson puede expresarse como

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \tag{3.27}$$

resultado al que ya habíamos llegado por otro método.

3.6. La ecuación de Laplace

En las regiones del espacio que están libres de carga, el lado derecho de la ecuación (3.19) es cero. Esta forma de ecuación diferencial suele llamarse ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{3.28}$$

Aunque esa diferencia de nombres es solo una cuestión de costumbre. El símbolo ∇^2 se denomina "operador laplaciano" o simplemente "el laplaciano".

Los métodos para encontrar la función potencial que se han discutido hasta ahora requieren de un conocimiento completo de la configuración de las cargas eléctricas. Pero hay muchas situaciones en que nuestro conocimiento de esa configuración es incompleto. Podríamos conocer la distribución de cargas en una región limitada del espacio y el valor del potencial o del campo eléctrico en la frontera de esta región. Lo que nos permiten las ecuaciones de Laplace o de Poisson es la posibilidad de encontrar la función potencial en estas condiciones de conocimiento incompleto. Los matemáticos han trabajado durante mucho tiempo y han encontrado muchos métodos analíticos y un gran número de funciones analíticas que podemos escoger, de modo que satisfagan las condiciones de frontera que la función debe satisfacer.

Hay también problemas, de enorme interés práctico, para los que no es posible encontrar una función analítica que sea solución de la ecuación diferencial. Para tales casos se han desarrollado varias técnicas numéricas para encontrar valores del potencial, punto a punto, sobre la región de interés. A menudo, el método consiste en disponer un arreglo simétrico de

puntos para asignar valores al potencial en estos puntos, de una manera que puede ser arbitraria. La ecuación (3.28) se convierte en una especie de prueba de esa asignación y su aplicación permite encontrar un nuevo conjunto de valores, corregidos, si es el caso. Una nueva aplicación de (3.28) resultará en una "mejor aproximación", etcétera. Qué tan buenos sean los resultados dependerá de la elección de los valores iniciales y del número de veces que la prueba (3.28) se aplique.

Ya sea en forma analítica o numérica, la solución buscada será una que satisfaga simultáneamente la ecuación de Poisson o de Laplace y las condiciones de frontera dadas. Un ejemplo de solución numérica se presenta en seguida[1] para una representación en dos dimensiones de un potencial. Como los lectores sabrán, se puede representar un potencial de varias maneras. Una de ellas se obtiene mediante "equipotenciales", que son superficies (o líneas) que resultarían de la unión de puntos que tengan el mismo valor de potencial. Para ello, es necesario suponer que se conocen los valores de potencial en ciertas superficies.

Para lo que sigue haremos uso de un concepto que discutiremos mucho más tarde: el concepto de conductor eléctrico. Por ahora, nos interesa sobre todo una propiedad de los materiales conductores: la de permitir que algunas partículas portadoras de carga se muevan con facilidad en su interior. Tanto que, en comparación con el espacio fuera del conductor, el trabajo necesario para mover una partícula cargada dentro del conductor es cero. Eso quiere decir que el potencial en cada punto en el interior del material conductor es igual y que cada pedazo aislado de material conductor es una superficie (o un volumen) equipotencial; es el caso de los metales, en los que se mueven con mucha facilidad los electrones. Si consideramos solamente campos "estáticos", se pueden realizar equipotenciales con láminas de metal.

Ahora bien, es posible conectar dos (o más) láminas de metal a los terminales positivo o negativo de una pila eléctrica o de un otro separador de cargas (electrónico o electrostático) por medio de alambres, también conductores eléctricos. La acción de esa "máquina separadora de cargas" equivaldrá a lograr que haya una diferencia de potencial (trabajo por unidad de carga) entre las láminas. Examinemos varias posibilidades a la luz de la teoría formulada anteriormente.

Un primer ejemplo es el caso de dos láminas conductoras paralelas, tales que su separación sea mucho menos que sus dimensiones laterales

[1] El lector o estudioso interesado podría consultar la página web del GRUCAD, www.grucad.ufsc.br, donde encontrará un programa, EFCAD (Electromagnetic Field Computer Aided Design) y su manual, para resolver problemas de cálculo de campos eléctricos y magnéticos.

(Figura 3.5). Las condiciones de frontera que debe satisfacer el potencial que vamos a calcular, para el espacio entre las placas, serían de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= V_0/2 && \text{para } z = d/2 \\ &= -V_0/2 && \text{para } z = -d/2 \end{aligned}$$

Lo anterior corresponde al caso del potencial (o del campo eléctrico) entre dos distribuciones de carga, una positiva y otra negativa. Nuestros resultados describen un campo constante, dirigido de la placa con potencial positivo hacia la placa con potencial negativo y perpendicular a ellas. El experimento confirma la predicción; esto significa que el método experimental para generar ese tipo de campo eléctrico es simplemente el descrito.

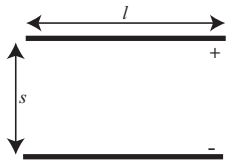

FIGURA 3.5. Sobre el potencial en el espacio entre dos planos conductores

Naturalmente, cerca de los bordes de las placas, ni el potencial ni el campo eléctrico serán como hemos descrito lejos de esos bordes. Sin embargo, para muchas aplicaciones prácticas, la uniformidad del campo obtenida es suficiente. Volveremos sobre este tema más adelante.

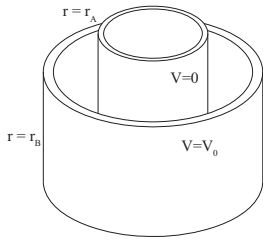

FIGURA 3.6. Acerca del potencial entre dos cilindros conductores

Un segundo ejemplo es el de dos láminas conductoras cilíndricas coaxiales (Figura 3.6). Las condiciones de frontera serían del tipo

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta,z) &= V_0 && \text{para } r = r_A \\ &= 0 && \text{para } r = r_B \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de Laplace en el espacio entre las dos láminas corresponderá al campo y al potencial calculados para una línea de carga.

En la ecuación anterior se ha ajustado el cero de potencial a uno de los cilindros; como hemos visto, este ajuste no tiene consecuencias para el valor o para la dirección del campo eléctrico resultante.

Un último ejemplo, que ya adivinará el lector, es el de dos láminas conductoras deformadas para darles formas esféricas concéntricas. La conexión de estas láminas a los terminales de una pila produce un campo con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta,\varphi) &= V_0 && \text{para } r = r_P \\ &= 0 && \text{para } r = r_Q \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de Laplace será un potencial que equivale al de una carga puntual, ajustando el cero de potencial a uno de los cascarones esféricos. Este ajuste tampoco tendrá consecuencias para el valor o para la dirección del campo eléctrico resultante.

¿Qué aplicaciones tiene todo esto? Mencionaremos solamente la aplicación de los dispositivos mencionados y los campos generados con ellos en numerosas situaciones. El movimiento de los electrones dentro de un tubo de imagen, en un monitor de televisor o de computador se calcula, parcialmente, como la trayectoria del electrón en los campos generados por la conexión de los electrodos que forman el "cañón electrónico" con diferentes potenciales. El movimiento se puede gobernar para acelerar, "enfocar" y "dirigir" los electrones en puntos sobre el material fosforescente que recubre el interior del monitor. Una fuente de iones, o cañón de iones, emplea igualmente electrodos a potenciales diferentes para lograr que los iones sean acelerados y dirigidos.

En varias técnicas modernas de análisis de materiales, se bombardea una superficie con un haz de electrones (o de iones) de energía cinética especificada por el potencial que los acelera. Tras la interacción, es necesario analizar con qué energía salen los electrones del material; esto se logra con dispositivos que desvían las partículas acelerándolas en campos que pueden ser de líneas paralelas, de simetría cilíndrica o esférica[2, 3].

[2] Ver, por ejemplo, el artículo de W. Stechelmacher, *Energy Analysers for Charged Particle Beams*, en J. Physics E (Sci. Instruments), 1973. Se pueden consultar, además, en la sección de Tesis, de la biblioteca de la Universidad Nacional de Colombia, muchos trabajos realizados sobre temas similares en la década de los setenta del siglo XX.

[3] El lector interesado podría disfrutar de la conferencia Nobel de Ernst Ruska (uno de los inventores del microscopio electrónico) que se encuentra en

3.7. Potencial en una lente electrostática

Las llamadas "lentes electrostáticas", empleadas para el manejo de haces de partículas cargadas, suelen constar de una serie de discos metálicos coaxiales perforados (Figura 3.8) con diferentes potenciales aplicados desde "fuentes de tensión" externas. La elección cuidadosa de los potenciales y el cálculo de las trayectorias permitirán predecir el comportamiento de los haces en tales sistemas. Veamos primero cómo es un método general muy sencillo para resolver la ecuación de Laplace.

En un sistema de coordenadas bidimensional cartesiano, la expresión para el laplaciano de una función, $\nabla^2\phi$, es

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{3.29}$$

Supongamos que la región en que vamos a calcular el potencial es un rectángulo (Figura 3.7) y definimos en ella un arreglo de puntos, separados en la dirección Ox y en la dirección Oy por distancias h pequeñas en comparación con las dimensiones de la región de interés (ver figura 3.7).

Las primeras derivadas del potencial, calculadas en un punto arbitrario $(x, y) = (nh, mh)$[4] del arreglo, que llamaremos, para simplificar $\phi(x, y) = \phi(n, m)$, pueden aproximarse por las diferencias de potencial entre los puntos vecinos,

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} \approx \frac{\phi(n+1,m) - \phi(n,m)}{h} \approx \frac{\phi(n,m) - \phi(n-1,m)}{h}$$

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \approx \frac{\phi(n,m+1) - \phi(n,m)}{h} \approx \frac{\phi(n,m) - \phi(n,m-1)}{h}$$

y las segundas derivadas, de manera similar, por las diferencias entre las primeras derivadas,

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(n+1,m) - 2\times\phi_(n,m) + \phi(n-1,m)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi(n,m+1) - 2\times\phi_(n,m) + \phi(n,m-1)}{h^2}$$

http://nobelprize.org/physics/laureates/1986/ruska-lecture.pdf. El lenguaje que emplea no es demasiado técnico y puede ser fácilmente seguido el proceso de diseño de una de las máquinas de investigación, producto del siglo XX.

[4] Con $1 \le n \le N$ y $1 \le m \le M$, por ejemplo, si hay $N \times M$ puntos en el arreglo.

De esta manera la ecuación diferencial que se quiere resolver, (3.29), se convierte en una ecuación que nos dice

$$\phi(n,m) = \frac{1}{4}[\phi(n-1,m) + \phi(n+1,m) + \phi(n,m-1) + \phi(n,m+1)] \quad (3.30)$$

El criterio de control acerca de cómo debe ser el potencial en cada punto es simplemente que debe ser el promedio del potencial en los cuatro puntos vecinos. ¿Cómo se aplica en la práctica el criterio? En primer lugar, los

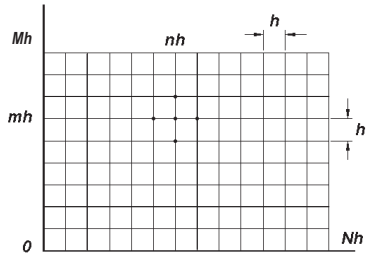

FIGURA 3.7. Acerca del método de relajación

valores del potencial en los bordes de la región están fijos. Es posible, además, que algunos otros puntos correspondan a valores fijos de potencial, si se quiere que el conjunto describa un sistema de varios electrodos. A todos ellos se les asignará este valor, que no va a cambiar. Luego, se asignará a todos los demás puntos un valor inicial arbitrario para $\phi(n,m)$. Para lograr acercarse a valores más aproximados, se calculará, a partir del punto $n = 2, m = 2$ hasta el $n = N-1, m = M-1$, una nueva aproximación, empleando la fórmula (3.30). Este proceso se repetirá muchas veces, hasta cuando los cambios sean inferiores a un cierto valor prefijado. Este proceso es llamado por los matemáticos un "método de relajación" y puede converger muy lentamente. Hay métodos más rápidos, pero su explicación es más compleja[5].

Una lente electrostática sencilla es un sistema de tres discos perforados, con los dos exteriores unidos al mismo potencial y el central a otro potencial (Figura 3.8). Con base en un proceso de relajación se calculó la distribución de potencial en el plano meridional (un plano que pasa por el eje del sistema) de la lente mencionada anteriormente. Una imagen tridimensional del

[5] Además hay que señalar una modificación necesaria cuando se quieren calcular potenciales con simetría cilíndrica, debido a que el laplaciano tiene una expresión más complicada. Dejamos al lector interesado la búsqueda de más detalles de tales métodos. Por ejemplo, se encuentra una interesante presentación titulada *Electric Potential and Charge* en www.av8n.com/physics/laplace.html.

potencial muestra una forma característica, similar a una silla de montar. Una representación en forma de las líneas equipotenciales (que corresponden a superficies tridimensionales) se muestra en la figura. Con base en esta

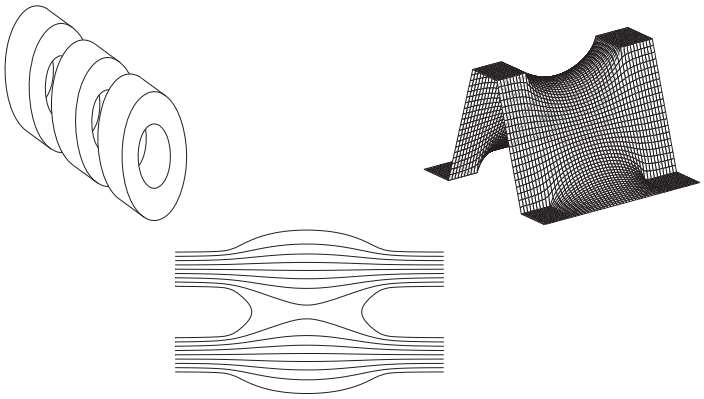

FIGURA 3.8. Una lente electrostática y el potencial entre electrodos

distribución de potencial se pueden calcular las fuerzas que actúan sobre cada partícula cargada de un haz que llega en dirección aproximadamente axial a esta lente. Se predice una acción de enfoque de la lente sobre el haz. El experimento confirma también la predicción. Una explicación cualitativa de cómo funciona una lente electrostática para electrones tiene en cuenta, si se recuerda que el potencial es un trabajo por unidad de carga, que los electrones tendrán, al llegar a cada diferente superficie equipotencial, una determinada energía cinética y, por ello, una determinada velocidad. Si se recuerda que el efecto de cambio de dirección de la luz en una lente se puede explicar precisamente por un cambio de velocidad en la superficie de la lente, se puede argumentar, por analogía, que una distribución de potencial como el señalado para el sistema de tres electrodos funciona exactamente de esta manera, como una lente, justificando así el título de esta sección.

3.8. Unicidad de la solución

El lector se preguntará, seguramente, ¿cómo se puede afirmar, como se afirmó en la sección sobre la ecuación de Laplace, que el potencial entre dos electrodos metálicos planos, cilíndricos o esféricos, equivale al potencial generado por dos láminas de carga, por una línea de carga o una carga puntual, respectivamente? O, expresado de otra manera, si ya se ha encon-

trado una solución a la ecuación, ¿cómo se puede estar seguro de que es la única? La respuesta, suministrada por los matemáticos, es la unicidad de la solución (excepto, como ya se dijo, por una constante aditiva).

El razonamiento puede ser como sigue. Supongamos que existen dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2. Si las dos son solución de nuestro problema, las dos deben satisfacer la ecuación de Laplace, de modo que

$$\nabla^2(\phi_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla^2(\phi_2) = 0 \tag{3.31}$$

o también

$$\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \tag{3.32}$$

Cada una de las soluciones debe ajustarse a las condiciones de frontera, de modo que, en las fronteras,

$$(\phi_1 - \phi_2) = 0 \tag{3.33}$$

Por ejemplo, en el problema del cascarón de carga, tanto ϕ_1 como ϕ_2 deben ser cero en el infinito. Formemos ahora la función (que tiene caracter vectorial)

$$\vec{W} = (\phi_1 - \phi_2)\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2) \tag{3.34}$$

Apliquemos a este vector $\vec{W}$ el teorema de Gauss, que afirma

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{W} d^3\vec{r} = \int_S \vec{W} \cdot d\vec{S} \tag{3.35}$$

o también, explícitamente

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [(\phi_1 - \phi_2)\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)] d^3\vec{r} = \int_S [(\phi_1 - \phi_2)\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)] \cdot d\vec{S} \tag{3.36}$$

La integral al lado izquierdo de la ecuación anterior es sobre el volumen en el que las funciones son válidas y la del lado derecho es sobre la superficie que encierra este volumen; esto es, la superficie sobre las que se aplican las condiciones de frontera. Tales condiciones, expresadas en la ecuación (3.33), nos dicen que la integral de la derecha en (3.36) es cero.

Emplearemos, además, una identidad vectorial conocida

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\psi) \cdot \vec{A} + \psi \ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \tag{3.37}$$

en la que identificaremos ψ con $\phi_1 - \phi_2$ y $\vec{A}$ con $\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)$. Haciendo esto, la expresión (3.36) queda

$$\int_V [(\phi_1 - \phi_2)\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) + \vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2) \cdot \vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)] d^3\vec{r} = 0 \tag{3.38}$$

Según la ecuación (3.32), el primer término en el integrando es cero y nos quedamos con

$$\int_V [\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)]^2 d^3\vec{r} = 0 \tag{3.39}$$

A la izquierda tenemos una suma (integral) de términos que solo pueden ser positivos o cero. Pero si su valor fuera positivo en alguna región, la integral sobre todo el volumen no podría ser cero. Así se concluye que $\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2)$, la máxima tasa de cambio de $(\phi_1 - \phi_2)$, debe ser cero en todas partes y, como consecuencia, en todas partes

$$(\phi_1 - \phi_2) = \text{ constante} \tag{3.40}$$

Dado que esta diferencia era cero en la frontera, deberá ser cero en todas partes; dicho de otra forma, las *dos soluciones* son la misma. Si hemos encontrado una solución a la ecuación de Laplace, podemos confiar en que hemos encontrado la solución única.

3.9. La medición de campos eléctricos

La definición de campo eléctrico, como la fuerza sobre una carga de prueba de 1 As, sugiere un método para medir la intensidad del campo. Se requiere un cuerpo –cargado– de prueba y una balanza sensible para medir la fuerza. Es probable que haya necesidad de calcular correcciones, debidas al desplazamiento de la densidad de carga en nuestro cuerpo de prueba, por la influencia del campo a la que está sometida, lo que hará que nuestra carga no se comporte como "puntual".

Un medidor de campo eléctrico, denominado "molino de campo", expone una lámina metálica a la acción de un campo eléctrico para luego cubrirlo y medir la carga que la lámina "adquirió". Nuevamente, lo que se mide es, directamente, una diferencia de potencial y, a través de inferencias basadas en la construcción del equipo, se determina el campo eléctrico.

Una medición indirecta se lleva a cabo en un sistema diseñado para acelerar o enfocar partículas: si el movimiento de estas resulta como se había previsto, tendremos alguna confianza en que la distribución de campos es como se había diseñado. De lo contrario, se rediseñan los electrodos que están fijando los potenciales. No es una medición local, sino global.

Pero en la mayoría de los casos la medición de campos eléctricos se hace en otra forma indirecta, a través de la medición de diferencias de potencial[6].

[6] Recordemos que se mencionó atrás la expresión "diferencia de voltaje" como una

Un electroscopio, que suele presentarse como un instrumento para detectar la presencia de cargas eléctricas es, también, un detector de la diferencia de potencial entre su electrodo interior y el exterior del aparato. La medición de potenciales en la transmisión de impulsos nerviosos, la de potenciales en un tanque de electroformado, en la práctica de la electroencefalografía o la electrocardiografía, se mide directamente la diferencia de potencial entre dos o más puntos y a partir de esos resultados se calcula, si se quiere, el campo eléctrico. La forma de las gráficas de diferencia de potencial como función del tiempo o de la posición permite conclusiones valiosas sobre el sistema examinado.

3.10. Un potencial en coordenadas cilíndricas

Realicemos un cálculo del potencial electrostático en coordenadas cilíndricas, no solo como ejemplo sino para ver efectos que deberemos discutir más adelante. Nuestro caso será el de un campo uniforme (se puede suponer que producido por dos distribuciones superficiales de carga muy lejos) que tomaremos como $\vec{E}(x, y) = (E_{ext}, 0, 0) = \vec{E}(r, \theta)$. Este campo uniforme es alterado por la introducción de un cilindro conductor sin carga neta y sin conexión con otras equipotenciales.

Cuando realizamos este sistema (Figura 3.9), se puede esperar que las cargas en el cilindro se redistribuyan. Habrá un exceso de cargas positivas y en posición diametral una de cargas negativas; esas distribuciones de carga producen una alteración del potencial y del campo eléctrico.

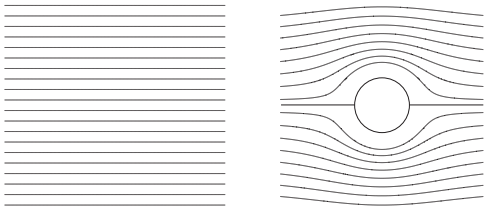

FIGURA 3.9. Un potencial (a) uniforme y (b) modificado

Tomaremos el centro del cilindro como origen de coordenadas y el cero de potencial como el potencial de este punto, de modo que se puede esperar que

medida del trabajo sobre una carga unidad. Para medir campos se mide o calcula, indirectamente, qué trabajo realizaría el campo al llevar una carga unidad desde el punto P hasta el punto Q. a partir de esta determinaciónm se infiere cómo es la intensidad del campo $\vec{E}$.

el potencial *sin* el cilindro será de la forma $\phi(x, y) = -xE_{ext} = -r\cos\theta E_{ext}$. Lo escribiremos en la forma

$$\phi(r, \theta) = -\frac{r}{a}\, a\, \cos\theta E_{ext} \tag{3.41}$$

Donde a es el radio del cilindro conductor. Para expresar el efecto del cilindro conductor, razonaremos así: en primer lugar, el término adicional al potencial debe anular el potencial en $r = a$ para cualquier ángulo. Resulta razonable escoger también una dependencia con $\cos\theta$. En segundo lugar, el término adicional debe modificar el potencial en la vecindad del cilindro, pero no lo debe alterar muy lejos, cuando $r \to \infty$. Parece recomendable escoger una dependencia con $1/r$. De esa manera, el potencial, que dentro del cilindro es cero, fuera del cilindro sería de la forma

$$\phi(r, \theta) = -\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right)\, a\, \cos\theta E_{ext} \tag{3.42}$$

Será necesario asegurarse de que esta función cumple la ecuación de Laplace. La distribución del potencial antes y después de la introducción del cilindro se muestra en la figura 3.9 (la dirección $\vec{Ox}$ va hacia arriba). Para calcular el campo, deberemos aplicar el operador gradiente a la expresión (3.42). Las líneas de campo son perpendiculares (localmente) al cilindro conductor.

3.11. Resumen y comentarios

El estudio del potencial electrostático tiene gran importancia en la comprensión del comportamiento de las cargas en presencia de campos. No solo se ha desarrollado una serie de métodos analíticos con elegantes soluciones a problemas de potencial que incluyen el desarrollo en polinomios especiales. Desde el punto de vista de la práctica, sobre todo en el desarrollo y explicación de métodos modernos de investigación en campos que van desde el análisis de los sólidos y sus superficies hasta el empleo de aceleradores de partículas[7], los potenciales son de enorme importancia.

Resulta interesante, además, la contrastación de los argumentos matemáticos y los argumentos físicos en relación con el potencial. Son dos puntos de vista diferentes y podrían ser complementarios. Un estudiante atento podrá tener en cuenta los dos campos y desarrollar un sentido acerca de la diferente estructura que tiene la física.

[7] Debe recordarse aquí que los aceleradores no son simplementa máquinas "exóticas" que se emplean en investigaciones sino, además, máquinas empleadas en ciertos tratamientos médicos.

Junto con los métodos analíticos, más "elegantes", los métodos numéricos y los recursos modernos de cálculo y presentación son de enorme utilidad. El lector interesado encontrará, consultando la internet, un enorme número de programas didácticos y pequeñas aplicaciones para mostrar cómo funciona en la práctica la teoría del potencial. La creciente disponibilidad y el creciente uso de computadores pone al alcance del estudiante recursos de los que no se soñaba a finales del siglo XX[8].

3.12. Temas para discusión

- Un dispositivo bastante usado consiste en dos cilindros conductores dispuestos sobre un eje común, como muestra el diagrama adjunto (Figura 3.10), que están conectados a potenciales diferentes; si puede, observe la parte posterior (el "cuello") de un tubo de imagen de un televisor para ver varios elementos similares –por precaución, procure que esté desconectado del tomacorriente–.

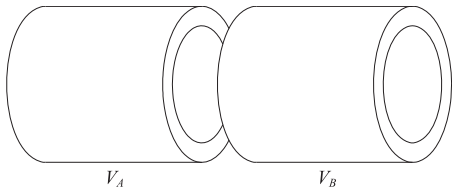

FIGURA 3.10. Una componente de un cañón electrónico

  Haga un diagrama de cómo esperaría usted que sean las equipotenciales y las líneas de campo eléctrico. ¿Para qué se empleará este dispositivo?

- ¿Podría un electroscopio funcionar como sensor de diferencias de potencial?

- Estudie una descripción del "electróforo" –por ejemplo en Wikipedia–; se afirma que este aparato puede suministrar una cantidad ilimitada de carga –exceso de carga, diremos–. ¿De dónde sale la energía necesaria para ello?

[8] Para un estudiante del siglo XXI podría ser difícil creer que en los años setenta del siglo XX probablemente no había 10 computadores en toda la Universidad Nacional de Colombia, que cada uno de ellos no alcanzaba la capacidad de un computador personal promedio de la actualidad y que gran parte del tiempo ¡se dedicaban a actividades de administración!

- Un ejemplo de campo con muchas aplicaciones prácticas es el de una carga aislada colocada cerca a una lámina conductora que está a potencial cero –una lámina infinita a potencial cero–. Se propone que las líneas de campo y las equipotenciales entre la lámina y la carga son iguales a las que habría entre esa carga y una carga de signo contrario situada en una posición simétrica respecto de la carga "real" –es el llamado "método de las imágenes"–. ¿Qué opina usted?

  El método de las imágenes tiene mucha aplicación en el cálculo numérico de potenciales entre dos electrodos: en la práctica se supone que varias cargas están actuando simultáneamente; el problema de cálculo del potencial se convierte en un problema algebráico, para encontrar el valor y la posición de las cargas. Varios métodos modernos de análisis de superficies a través de la interacción con iones o electrones lentos aprovechan el concepto de carga imagen. Resulta interesante visitar la página de Virtual Physics Laboratory, www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewforum.php?f=16 para dos animaciones de la teoría correspondiente. En la página web.mit.edu/6.013_book/www/book.html se describe una experiencia sobre este tema.

3.13. Ejercicios

1. Los enlaces moleculares pueden ser de varios tipos:

   Iónicos atracción por cargas de diferente signo

   Covalentes compartición de electrones entre átomos

   Van der Waals atracción entre moléculas polarizadas con distribuciones de carga no esféricas

   Hidrógeno un tipo de atracción de van der Waals que involucra átomos de hidrógeno

   Los potenciales de todos, excepto los iónicos, son no simétricos, sino funciones complicadas de posición y orientación. Pero para lo que sigue los consideraremos simétricos. También supondremos que en el enlace covalente se transporta un electrón de un átomo al otro por cada enlace. Se solicita calcular la energía en kJ/mol de los enlaces de la tabla 3.1.

   La molécula de ciclohexano (un disolvente orgánico) se encuentra en dos configuraciones llamadas el bote y la silla. Vista desde "arriba", la molécula se ve como un hexágono. Vista desde el lado, cuatro átomos de C están coplanares casi en un cuadrado. En la configuración bote, los átomos de los extremos están al mismo lado del cuadrado plano, en la configuración silla están en lados opuestos. Suponga que las coordenadas

de los átomos son $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(-0.217; 0.5; 0.266)$ y $(1.217; 0.5; 0.266)$ o $(1.217; 0.5; -0.266)$ –son coordenadas relativas, para que los ángulos entre pares de enlaces sean de 111 grados–. Se solicita calcular la razón de la energía de la configuración bote a la configuración silla, suponiendo que todos los enlaces están igualmente cargados. La energía de la configuración es la suma de la energía de cada par de átomos en la configuración.

Átomos enlazados	Tipo de enlace	Distancia entre átomos
Na+ y Cl-	Iónico	$2,76 \times 10^{-10}\, m$
H+ y O-	Covalente	$1,03 \times 10^{-10}\, m$
C- y H+	Covalente (1)	$1,14 \times 10^{-10}\, m$
C- y C+	Covalente (1)	$1,54 \times 10^{-10}\, m$
C– y C++	Covalente (2)	$1,34 \times 10^{-10}\, m$
C— y C+++	Covalente (3)	$1,20 \times 10^{-10}\, m$
H+ y O-	Van der Waals	$2,60 \times 10^{-10}\, m$
O- y OH+	Hidrógeno	$1,54 \times 10^{-10}\, m$

Tabla 3.1.

2. Dos placas planas de metal se mantienen paralelas entre sí a una distancia d mucho menor que sus dimensiones laterales. Se conectan entre sí por medio de una tira de metal. Una lámina plana de plástico, que tiene una carga σ por unidad de superficie se coloca paralela y entre las placas de metal, de modo que su distancia a una de ellas es $d/3$. Se solicita calcular los campos eléctricos cerca a cada una de las placas.

3. En un cierto tubo electrónico, los electrones son emitidos desde una superficie plana metálica caliente –el emisor–; son recogidos por otra superficie metálica plana, paralela al emisor, que está separada por d de él. Supondremos que d es pequeña comparada con otras dimensiones de todo el sistema. El potencial eléctrico entre las placas tiene la forma $\phi = kx^{4/3}$, donde x es la distancia desde el emisor.

   - ¿A qué es igual la densidad superficial de carga σ en el emisor? ¿En el colector?
   - ¿A qué es igual la densidad volumétrica de carga $\varrho(x)$ para $0 < x < d$?

   Los tubos electrónicos ya no son tan usados en electrónica, pero aún los emisores de potencia de microondas y los monitores de televisión o de computadores los emplean –a comienzos del siglo XXI–. Los emisores de electrones son indispensables en varios métodos de análisis para investigación.

4. La máxima intensidad de campo eléctrico, que puede existir cerca de la superficie de un conductor en el vacío, sin que tenga lugar la llamada "emisión de campo" de electrones, es alrededor de 10^8 v/m. Si la carga superficial que produce este campo es negativa, compare el número de electrones en exceso por unidad de área con el número de átomos por unidad de área. Compare la fuerza que actúa sobre un electrón en este campo con la fuerza que actúa sobre un electrón debido a su enlace con el protón en un átomo de hidrógeno.

5. Dos láminas metálicas planas se colocan horizontales, paralelas entre sí, a una distancia d, pequeña comparada con sus dimensiones laterales. Una batería que produce una diferencia de potencial $V_0 = 100V$ se conecta a ellas.

   - Diga cómo espera que sea la forma funcional del potencial y del campo eléctrico entre las láminas. Suponga que la placa inferior está cargada positivamente y la superior negativamente.
   - Se practican dos aberturas de tamaño $r < d$ en la placa inferior y a través de una de ellas se dispara un haz de electrones con un ángulo de elevación de $\pi/4$ respecto de las placas –y en un plano que pasa por las dos aberturas–. ¿Qué clase de movimiento espera que describan los electrones? ¿Qué función podría desempeñar el dispositivo descrito sobre el haz de electrones? Si se quisiera modificar el dispositivo para actuar sobre un haz de protones ¿qué habría que cambiar en la geometría y los potenciales?

6. Dos láminas metálicas se curvan en forma de superficies cilíndricas coaxiales de radios a y b, con $a < b$. Luego se conecta a ellas una batería que mantiene una diferencia de potencial $V_0 = 100V$ entre ellas ($V_a < V_b$). Diga qué forma funcional espera para $V(r)$, con $a < r < b$, entre los cilindros pero lejos de sus bordes. Argumente su respuesta. ¿Qué tipo de distribución (ideal) de carga produciría esta forma de potencial? ¿Qué cambios esperaría usted si las dos placas ya no fueran cilindros completos sino, por ejemplo, medios cilindros? Suponga que siguen coaxiales y están muy cerca uno del otro ($b - a \ll b$).

7. Para tener una idea de cómo se mueven los electrones y los iones en una lámpara de descarga en un gas, se propone el siguiente cálculo: dos láminas metálicas anchas, paralelas, separadas por una distancia $d = 0,1$ m, se conectan a una batería que establece entre ellas un potencial de 100 V. De la lámina negativa arranca un protón y, simultáneamente, de la positiva arranca un electrón. Se mueven bajo la influencia del campo establecido entre las láminas.

- Calcule la intensidad de campo eléctrico entre las dos láminas. Calcule la aceleración del protón y del electrón.
- Calcule qué plano, paralelo a las láminas, alcanzan simultáneamente el protón y el electrón –por ahora desprecie la atracción entre ellos–.
- Tome ahora en cuenta la atracción entre el protón y el electrón y prediga cómo cambia esta fuerza la coordenada del plano de encuentro, calculado anteriormente.
- Las lámparas de descarga en un gas más empleadas (sobre todo para alumbrado público) están llenas de argón y de vapores de mercurio o de sodio –luz blanca o amarilla–. ¿Cómo aplicaría usted las conclusiones de sus cálculos anteriores a estas lámparas?

8. Las células nerviosas son dispositivos electroquímicos que generan desequilibrios de carga eléctrica por difusión selectiva de iones a través de su membrana[9]. El interior –en condiciones de reposo– se mantiene hasta a -80 mV respecto del exterior. Como consecuencia, todos los animales –vivos– producen campos eléctricos, que pueden ser detectados por otros animales. Los electrocitos son células nerviosas o musculares modificadas que pueden producir diferencias de potencial más altas. Los animales con órganos eléctricos tienen desde decenas hasta miles de electrocitos en serie (verdaderas pilas eléctricas) y llegan a centenares de voltios de diferencia de potencial (700 V).

   - Si el espesor de una membrana de célula nerviosa es del orden de algunas decenas de radios atómicos ($3,3 \times 10^{-9}$ m), calcule la intensidad del campo eléctrico en la membrana nerviosa. Compárelo con los campos más intensos que se pueden mantener en el aire seco sin que haya descargas (*chispas*).
   - Calcule la máxima intensidad de campo eléctrico producido por un pez temblador, que vive en los ríos de la Orinoquia. Suponga que su longitud corporal es del orden de 1 m.

9. Muestre, por medio de un cálculo directo, que la expresión (3.42) satisface la ecuación de Laplace. ¿En qué sentido significa eso que la función tiene curvatura cero?

   - Muestre que el campo eléctrico que se deriva del potencial (3.42) está dado por

$$\vec{E} = \hat{r} E_{\text{ext}} \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] \cos\theta - \hat{\theta} E_{\text{ext}} \left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] \operatorname{sen}\theta \tag{3.43}$$

[9] Ver, por ejemplo, www.whatislife.com/education/fact/history.htm.

- Realice un diagrama para mostrar la distribución de cargas y el campo eléctrico en ese potencial.

10. Una esfera conductora de radio a se conecta a un terminal de una batería (el otro está "a tierra", lo que la lleva a un potencial V. Calcule qué relación hay entre la carga Q que tiene ahora la esfera, suponiendo que el potencial de referencia está "en el infinito".

    - Una esfera de diámetro 10 cm se carga ahora hasta alcanzar un potencial $V_1 = 100$ V. Otra esfera de diámetro 5 cm se lleva hasta un potencial $V_2 = 200$ V y se coloca a una distancia $d = 100$ cm de la primera. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que actúa entre las dos esferas.

11. El campo eléctrico de la Tierra se debe a una separación de cargas entre la superficie de ella y las capas superiores de la atmósfera, o de las nubes. No existe aún una explicación completa acerca de por qué se da esa separación. Muchas publicaciones mencionan una intensidad de campo del orden de 200 N/C cerca de la superficie –bajo condiciones de *buen tiempo*–.

    - Si la dirección de éste campo es hacia abajo, ¿cuál es el signo de la carga sobre la superficie de la Tierra y cuál el signo de las cargas en las capas altas de la atmósfera?
    - Suponga que la Tierra se comporta como un cascarón esférico cargado. Calcule la carga neta de la Tierra. Calcule también la densidad superficial de carga en Coulomb y en cargas elementales por metro cuadrado.
    - ¿Qué fenómeno conocido podría disminuir la intensidad del campo eléctrico de la Tierra? ¿Cuál fenómeno podría aumentarla?

    El aire no es completamente aislante; su conductividad eléctrica aumenta con la altura –se puede interpretar como una consecuencia de la acción de radiaciones ionizantes–, de modo que la diferencia de potencial entre el suelo y la ionósfera alcanza un valor entre 200 y 500 kV, con una intensidad de corriente de 2×10^{-12} A/m^2 en condiciones de buen tiempo. Se pueden consultar muchas publicaciones, como los libros mencionados en el capítulo anterior o la página /thunder.msfc.nasa.gov/primer/.

3.14. Actividades prácticas

Un dispositivo muy fácil de construir permite visualizar el concepto de campo escalar: una lámina de cartulina o cartón paja, mojada en una solución

débil de una sal iónica, como el sulfato de magnesio, se convierte en un material débilmente conductor. Si se colocan dos discos metálicos –monedas, por ejemplo– planos sobre el papel y se conectan a los terminales de una batería, en aquel se establece un sistema de corrientes eléctricas (movimiento de iones); conectando ahora un voltímetro por un lado a uno de los discos metálicos que nos servirá como potencial de referencia, se puede explorar cómo es la distribución de líneas equipotenciales sobre la cartulina. La observación servirá para ayudar en la comprensión del concepto de potencial. Conviene medir diferencias de potencial no solo respecto de uno de los contactos, sino también respecto de un potencial arbitrario en otro punto de la cartulina. Dispositivos similares a éste se han empleado en el estudio de distribuciones de potencial en sistemas de óptica electrónica y de óptica iónica –sistemas capaces de acelerar, enfocar, desviar y reflejar partículas cargadas–.

La dirección del campo eléctrico –y, en realidad, la dirección de movimiento de los iones en un medio isotrópico– se encuentra como las líneas normales a las equipotenciales.

> 5 g de sulfato de magnesio en $0,25$ l de agua bastan para humedecer una cartulina de $0,3 \times 0,4$ m^2. Las mayores dificultades en esta actividad son la falta de homogeneidad del material, que produce equipotenciales asimétricas y la calidad de los contactos entre los discos y la cartulina húmeda. El campo generado, por supuesto, no es electrostático; pero con elementos de capítulos posteriores se puede mostrar que es una solución de la Ecuación de Laplace.

- Dos discos metálicos cerca del centro de la cartulina con una batería de 9 V colocada sobre ellos, se acercan a la distribución de potencial generada por un dipolo. Se recomienda explorar esta configuración. Cámbiese el punto –potencial– de referencia para mirar el efecto.

- Otra configuración interesante es la de dos contactos paralelos que se pueden lograr con dos láminas metálicas rectas, para estudiar las equipotenciales entre ellas.

- Resulta igualmente interesante el campo entre una recta y un disco pequeño, como modelo del campo producido por una carga frente a un plano conductor a potencial cero.

- Si ya tiene instalados los programas sugeridos en el capítulo anterior, continúe experimentando con el archivo Faraday_Kaefig.exp, acerca del campo y el potencial generados por una distribución de carga sobre una superficie esférica.

4

Fuerzas magnéticas y campos magnéticos

4.1. Introducción

A finales del siglo XVIII y el comienzo del siglo XIX muchos pensadores se ocupaban de dos conjuntos de fenómenos que hasta entonces parecían diferentes: los fenómenos eléctricos y los fenómenos magnéticos. Desde muchos puntos de vista de la filosofía predominante en Europa, se sospechaba una unidad de la naturaleza, pero no se había encontrado una relación entre aquellos[1]. Por eso, la noticia de un resultado que mostraba relaciones entre ellos encendió una verdadera fiebre de trabajo que culminó con la segunda de las leyes fundamentales que estamos construyendo. Hacia 1820, suele afirmarse que en el curso de una demostración experimental, Hans Christian Oersted, un científico (y filósofo) danés, descubrió que una brújula colocada cerca de un alambre por el que circulaba una corriente eléctrica experimentaba un patrón sistemático de desviaciones de su dirección habitual Sur-Norte[2]. Hasta entonces se había creído que el magnetismo sería una propiedad de unas rocas poco usuales. Oersted realizó algunosexperimentos

[1] Incluso se habían ofrecido premios, como el de la Academia Bávara de Ciencias. El estudiante interesado podrá consultar el artículo Oersted and the Discovery of Electromagnetism por Frederick Gregory en http://www.clas.ufl.edu/users/fgregory/oersted.htm

[2] Una expresión más exacta, en el espíritu de la época de Oersted, sería "un alambre que cierra un circuito voltáico" o simplemente "un alambre conectado a una pila voltáica". Empleamos una expresión consecuente con descubrimientos posteriores, que atribuyen los efectos a partículas portadoras de carga moviéndose en el alambre conductor.

para asegurarse de su descubrimiento y publicó sus resultados entre sus conocidos en diversas sociedades científicas de Europa[3].

En Francia, una presentación de los resultados estimuló tanto el trabajo que varios estudiosos prácticamente abandonaron por algún tiempo otros temas y se dedicaron al magnetismo de las corrientes eléctricas. Uno de ellos fue André Marie Ampère, de cuyos resultados nos ocuparemos pronto[4, 5]. El examen de los resultados nos llevará a terminar este capítulo con dos leyes para un campo magnético, comparables con las dos leyes fundamentales para los campos electrostáticos.

4.2. Los experimentos de Ampère

Ampère empleó un alambre largo e hizo que una corriente I circulara a lo largo de él. Llamaremos a esa corriente la *corriente central*. Su primer experimento fue comprobar que una brújula colocada cerca del alambre, y en un plano perpendicular a él, sigue una serie de líneas concéntricas[6]. La dirección de circulación de esas líneas se toma convencionalmente como la dirección a la que apunta el *norte* de la aguja magnética. Usando esta convención, la circulación de esos lazos está dada por una "regla de la mano derecha" (Figura 4.1): si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de movimiento de la corriente, los dedos de la mano derecha, cerrados, muestran el sentido de circulación de los lazos.

[3] Puede encontrarse un resumen sobre el trabajo de Oersted en Shamos, M. (Ed.) Great Experiments in Physics, Dover, 1959, pp. 121-127

[4] El descubrimiento de la corriente eléctrica se atribuye a Luigi Galvani, quien en 1781 (se dice que fue realmente su esposa quien notó el fenómeno), observó que la chispa producida por una "máquina electrostática" hacía que los músculos de las patas de una rana se contraían violentamente. Las ideas de Galvani sobre la electricidad fueron debatidas y corregidas por su compatriota, Alessandro Volta, pero el descubrimiento del fenómeno le pertenece aún.

[5] Ampère tuvo noticias el 11 de septiembre de 1820 sobre los descubrimientos de Oersted. Una semana más tarde, Ampère presentó su primer informe a la Academia de Ciencias de París. Tenía muchos competidores, como veremos.

[6] Si se quiere repetir el experimento, también aquí se encontrará una dificultad. Las líneas que idealmente seguiría la brújula son concéntricas, solo en el caso de que la influencia de la Tierra sobre ella sea mucho más pequeña que la influencia de la corriente central; en otras palabras, si la intensidad de la corriente es muy grande o la brújula está muy cerca de ella. Uno de los problemas de la experimentación suele ser la eliminación de influencias extrañas al fenómeno que se quiere observar. Véanse las actividades prácticas sugeridas.

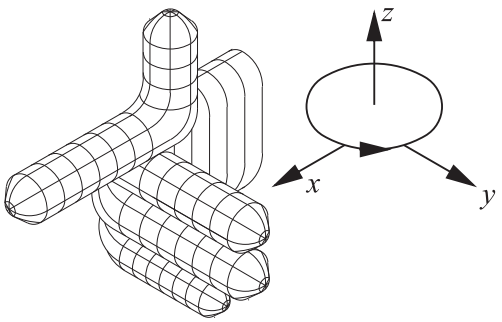

FIGURA 4.1. Sobre la regla de la mano derecha

Nuevas series de experimentos de Ampère se realizaron con un alambre de prueba (Figura 4.2), que llevaba una corriente I', colocada cerca de la corriente central. Los instrumentos de Ampère permitían medir las pequeñas fuerzas que actuaban sobre el alambre de prueba. Sus resultados no son tan nítidos como los del experimento de Coulomb, porque las corrientes eléctricas, a diferencia de las cargas eléctricas, no se pueden localizar; deben *circular* en circuitos completos. Además, se debe eliminar o compensar el efecto del campo magnético terrestre, para destacar los nuevos efectos[7]. Deberíamos imaginar que el circuito que completa la conexión del alambre central está suficientemente lejos del alambre de prueba como para influir de modo apreciable en los resultados del experimento. El circuito que se conecta al alambre de prueba es más problemático.

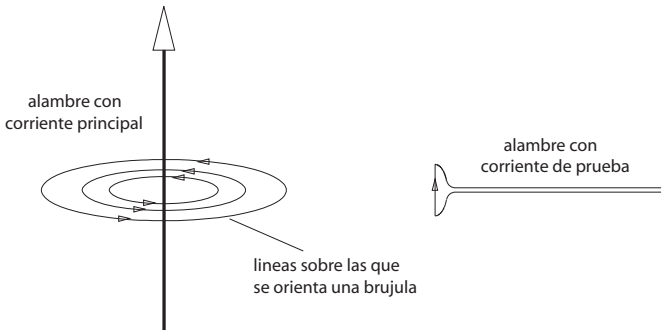

FIGURA 4.2. Acerca de los experimentos de Ampère

[7] Una manera conveniente es orientar los alambres que llevan las corrientes de prueba en la dirección del Norte terrestre, como se podrá comprender con lo que sigue.

Afortunadamente, si se entorchan los alambres de alimentación, como indica la figura, sus efectos se cancelan y poco o nada influyen en el resultado del experimento. De todas maneras, no es una tarea sencilla.

Ampère descubrió que la fuerza ejercida sobre el alambre de prueba por la corriente central es directamente proporcional a su longitud. Realizó, además, las siguientes observaciones.

- Si la corriente en el alambre de prueba (o corriente de prueba) es paralela a la corriente central, entonces los alambres se atraen entre sí. Si alguna de las dos corrientes se invierte, la fuerza es de repulsión.
- Si la corriente central va hacia arriba y la corriente de prueba apunta radialmente hacia el alambre central, la fuerza sobre el alambre de prueba es hacia abajo. Si se invierte el sentido de la corriente de prueba, la fuerza será hacia arriba.
- Si la corriente de prueba se coloca inicialmente paralela a la corriente central y el alambre de prueba se gira en un plano que contiene el alambre central, de modo que la corriente de prueba termina apuntando radialmente hacia el alambre central, la fuerza sobre el alambre de prueba tiene magnitud constante y es perpendicular al alambre de prueba.
- La fuerza entre dos corrientes paralelas es proporcional al producto de las corrientes y decae como el inverso de la distancia perpendicular entre los alambres.

La tarea para los teóricos era ahora proponer una *ley de las fuerzas* que permita dar cuenta de tan complicados resultados.

4.3. La corriente eléctrica y la densidad de corriente

Antes de considerar esa ley de fuerzas conviene hacer una precisión. Hablaremos de un "filamento de corriente"; con esa designación se señala un alambre muy delgado –idealmente sin dimensiones laterales– que representa un camino para partículas con carga eléctrica. Por ahora, además, no indagaremos en otras propiedades que pueden ser importantes en otros contextos. Por ejemplo, si las portadoras de carga se mueven sin oposición, si hay que realizar un trabajo para que se muevan o simplemente cuál es su naturaleza. Todo esto quedará para un capítulo posterior.

Más tarde resultará importante una definición de *densidad de corriente*. Para ello consideremos una situación análoga a la de un cable eléctrico (Figura 4.3), en que muchos filamento de un conductor llevan corriente; es posible que la corriente que lleva cada uno de los hilos no sea igual a la de los demás; eso significa que si consideramos las corrientes en una superficie transversal al cable, encontraremos que la intensidad de la corriente es función de la posición. En el límite en que los diferentes hilos tienen "áreas infinitesimales", la corriente será una función continua de la posición.

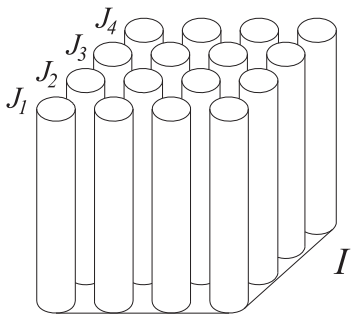

FIGURA 4.3. Sobre la definición de densidad de corriente

Definiremos un "vector densidad de corriente" (por unidad de área), $\vec{J}$, que tiene magnitud dada por la función descrita y dirección dada por el sentido de movimiento de portadoras de carga positivas que hacen esta corriente –si las portadoras son de carga negativa, el sentido convencional de la corriente es opuesto al de su movimiento–. Si la corriente pasa por una área S, rodeada por un camino cerrado, que es el perímetro de S, la corriente total será

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.1}$$

Un ejemplo podría aclarar el concepto de vector densidad de corriente. Imagínese un volumen de un líquido homogéneo, conductor de la electricidad, limitado por dos electrodos cilíndricos, de radios a y b (coaxiales, con $a < b$) y de altura h. Si conectamos el cilindro interior al terminal positivo de una batería y el exterior al terminal negativo, podremos comprobar que habrá un movimiento de portadoras de carga (iones). La corriente total en el electrodo interior es igual que en el electrodo exterior (el número de portadoras de carga que *inician* el viaje a través del líquido es igual al número de portadoras que lo *terminan* en cada segundo). De esa manera se puede afirmar que la dirección del vector densidad de corriente, dentro del líquido, es radial hacia afuera ($\vec{J}$ es paralelo a $\vec{r}$) y su magnitud es inversamente proporcional al área lateral de un cilindro de altura h y circunferencia $2\pi r$;

para $a \leq r \leq b$, $\vec{J} = \hat{r} I_0 / h 2\pi r$. Si el líquido no es homogéneo, la distribución de la densidad de corriente podría modificarse.

4.4. La fuerza entre dos circuitos de corriente

Recordemos que comenzamos el tema de electrostática con las fuerzas entre dos cargas puntuales; a partir de ellas se predijeron los efectos de los agregados de cargas sobre una carga de prueba. En forma similar, emplearemos una idealización de un elemento de corriente "puntual" y su efecto sobre otro elemento de corriente. Calcularemos el efecto conjunto de los elementos de corriente en un circuito sobre los elementos de corriente de otro circuito, sumando los efectos "elementales". La prueba experimental se puede realizar sobre los circuitos completos y será una evidencia indirecta de si la ley de fuerza fue correctamente enunciada o debe ser corregida.

En la figura (4.4) se ilustra el tipo de cálculo que intentaremos. Un primer lazo conductor (o circuito) es recorrido por una corriente I_1 y otro por una corriente I_2. Definiremos elementos de longitud (segmentos infinitesimales) $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$ que son parte de los circuitos en que circulan I_1 y I_2. Cada elemento es un vector cuya dirección positiva se define por la dirección de la corriente en su circuito. El vector $\vec{R}$, cuya magnitud es la distancia de $d\vec{l}_1$ a $d\vec{l}_2$ y cuya dirección debe tomarse de $d\vec{l}_1$ a $d\vec{l}_2$. El vector $\vec{R}$ hará un ángulo θ_1 con la dirección positiva de $d\vec{l}_1$. Estos dos vectores, además, fijan un plano en el espacio, cuya normal está dirigida por el pulgar derecho, cuando los demás dedos se curvan de $d\vec{l}_1$ a $\vec{R}$. El elemento $d\vec{l}_2$ hará un ángulo θ_2 con esta normal. Necesitamos estas relaciones geométricas para describir la interacción entre los dos elementos de corriente $I_1 d\vec{l}_1$ y $I_2 d\vec{l}_2$.

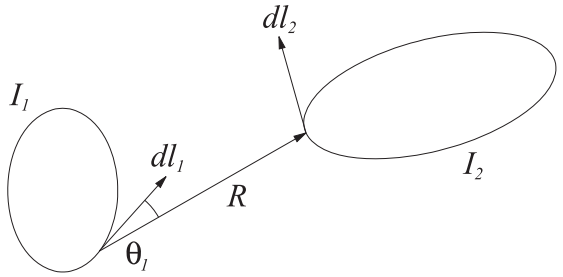

FIGURA 4.4. Sobre el cálculo de la fuerza entre dos circuitos de corriente

La fuerza, $d^2\vec{F}_{21}$, que actúa sobre el elemento $d\vec{l_2}$ debido a la corriente en $d\vec{l_1}$, es proporcional a las dos corrientes y al cuadrado del inverso de su separación, así como a los senos de los ángulos θ_1 y θ_2,

$$d^2F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\frac{dl_1 dl_2}{R^2}\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{4.2}$$

donde $\mu_0/4\pi$ es una constante de proporcionalidad. La dirección de la fuerza sobre $d\vec{l_1}$ siempre es perpendicular a la dirección de $d\vec{l_2}$ y a la normal al plano fijado por $d\vec{l_1}$ y $\vec{R}$. En contraste con la electrostática, en que la teoría comienza con una fuerza entre cargas que tienen carácter escalar, la teoría de la interacción entre corrientes comienza con la fuerza entre elementos vectoriales. En ambos casos, la ley de fuerza es una de inverso del cuadrado de la distancia. En términos de nuestro lenguaje vectorial, la ley de fuerza es

$$d^2\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(d\vec{l_2} \times \frac{d\vec{l_1} \times \hat{R}}{|\vec{R}|^2}\right) \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) no es una ecuación que pueda ponerse a prueba directamente[8]. No es posible aislar el efecto de un elemento de corriente de un circuito del resto del circuito en que circula la corriente. La prueba de validez está en su capacidad de predecir la fuerza que un circuito completo ejerce sobre otro circuito completo, integrando la ecuación (4.3) sobre el circuito 1 para encontrar la fuerza total sobre un elemento del circuito 2 y luego sumando sobre todo el circuito 2. En los casos en que la geometría sea sencilla, tales integraciones se pueden realizar. Por ahora tomaremos la fórmula de Biot y Savart, (4.3), como una relación que ha sido adecuadamente puesta a prueba. Veremos cómo[9].

La fuerza total que un circuito 1 ejerce sobre un circuito 2 será

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 d\vec{l_2} \times \oint_1 \frac{d\vec{l_1} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \tag{4.4}$$

[8] Estrictamente tampoco la ley de Coulomb, si se refiere a cargas puntuales.

[9] Esta es la ley de fuerza propuesta por Jean Biot y Felix Savart, contemporáneos de Ampère. El estudiante alerta se preguntará si Ampère no desarrolló su propia ley de fuerza. La respuesta es sí y, lo que es más interesante, es una ley de fuerza distinta:

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2}\left[3(d\vec{l_1}\cdot\hat{R_{12}})(d\vec{l_2}\cdot\hat{R_{12}}) - 2(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2})\right]\hat{R_{12}}$$

Las razones para que la ley de Biot y Savart se prefiera son de carácter histórico. Interesante es, de todas maneras, que las predicciones de la ley de fuerza propuesta por Ampère son casi siempre equivalentes. Los casos en que difieren no carecen, empero, de importancia. Un estudiante curioso podría consultar, por ejemplo, la tesis "Longitudinal electrodynamical forces and their possible technological applications", de Lars Johansson, Lund Institute of Technology, 1996, que contiene un interesante recuento sobre el tema.

Para nuestros cálculos, será importante, tener en cuenta que la posición de $d\vec{l}_1$, en relación con un sistema de coordenadas, estará dado por variables $x, \acute{y}, \acute{z}$ y la posición de $d\vec{l}_2$ por variables x, y, z. Así tendremos que

$$\vec{R} = \hat{i}(x - x') + \hat{j}(y - y') + \hat{k}(z - z') \tag{4.5}$$

y además

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \tag{4.6}$$

La ecuación (4.4) involucra integraciones que pueden ser tediosas, a menos que la simetría del problema las simplifique. De todas maneras, tiene un papel fundamental en la teoría y podremos realizar deducciones importantes sin necesidad de realizar cálculos detallados en muchos casos.

4.5. La fuerza entre dos corrientes paralelas

Un importante ejemplo de cálculo directo empleando la ecuación (4.4) es la predicción de la fuerza que un segmento de alambre recto, de longitud L, que lleva una corriente I_2, experimenta cuando está a una distancia x de otro alambre de longitud efectiva infinita, que lleva una corriente. La situación está ilustrada en la figura (4.5).

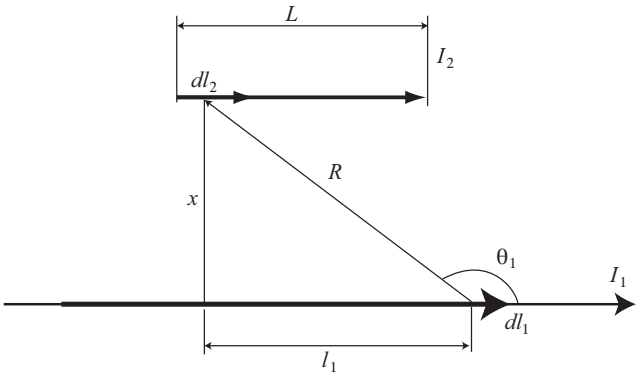

FIGURA 4.5. Acerca del cálculo de la fuerza entre dos corrientes paralelas

Una cuestión para sustentar es cómo es posible emplear la ecuación (4.4) en el cálculo de un alambre recto, cuando la integral debe realizarse sobre el circuito cerrado completo. Una primera respuesta sería que nos proponemos calcular solo la fuerza que ejerce el alambre 1 sobre una parte, que tiene longitud L, de otro circuito 2. La segunda parte de la respuesta es que podremos asegurarnos, experimentalmente, que el resto del circuito 1, que lo cierra, esté tan lejos que solo el segmento recto tenga efectos significativos. Estamos haciendo uso deliberado de la dependencia del inverso del cuadrado de la distancia, colocando el alambre de regreso "en el infinito". Primero, calcularemos la integral en el circuito 1. Consideremos que el elemento $d\vec{l}_1$ está a una distancia l_1 del pie de la perpendicular y que la distancia entre los alambres es x. Así

$$l_1 = -x\cot\theta_1 \qquad dl_1 = x\csc^2\theta_1 d\theta_1 \qquad R = x\csc\theta_1 \tag{4.7}$$

Hagamos uso de la simetría como sigue. La dirección del integrando (vector) es siempre la misma, saliendo del dibujo, para todos los elementos sobre I_1; como consecuencia, la integración se convierte en una integral escalar y la segunda integral en (4.4) tiene una magnitud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} = \int_0^{\pi} \frac{x\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \csc^2\theta_1 d\theta_1}{x^2\csc^2\theta_1} = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\theta_1 d\theta_1 = \frac{2}{x} \tag{4.8}$$

Es claro que esta integral tiene el mismo valor para todos los elementos a lo largo de L, de modo que la fuerza que actúa sobre el alambre de longitud L tendrá una magnitud

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_0^L \frac{2}{x} dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{L}{x} \tag{4.9}$$

La dirección de la fuerza, como se vio, es de atracción entre las corrientes I_1 y I_2. Dejamos al lector el ejercicio de mostrar que la inversión de una de las corrientes cambia la dirección de la fuerza.

La ecuación anterior no solo reproduce la observación de Ampère acerca de las fuerzas entre corrientes[10]. Además representa la base de definición y realización práctica de la unidad de corriente eléctrica.

La constante $\mu_0/4\pi$, como dijimos, es una constante de proporcionalidad. El valor de μ_0 en el SI es $4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. Un alambre de longitud 1 m se coloca paralelo y a una distancia de 1 m de otro alambre de longitud efectiva infinita. Los alambres se conectan en serie a una fuente de tensión (la máquina separadora de cargas) y se regula la corriente I_1 hasta que la

[10] Observación que, en forma cualitativa, exponen muchas demostraciones de la física.

fuerza, de atracción o de repulsión, sobre el alambre corto es igual a 2×10^{-7} newton. La corriente será 1 amperio, por definición internacional[11].

En nuestra discusión acerca de las fuerzas electrostáticas, se mencionó que la definición de la unidad de carga, el coulomb, debería esperar hasta definir la unidad de corriente; ahora podemos considerarla. Una carga de 1 coulomb (1 C) se define como la carga que pasa por la sección de un alambre en 1 segundo (1 s) cuando la corriente eléctrica es 1 amperio (1 A). El amperio se ha escogido como la unidad básica para las mediciones eléctricas de manera arbitraria, por razones de conveniencia. No es posible guardar 1 coulomb ni tampoco 1 amperio; es necesario construir un aparato que haga posible reproducir una determinada carga o una determinada intensidad de corriente. Pero en la técnica se emplean comúnmente medidores de corriente más que medidores de carga. Los medidores de corriente requieren calibración basada en un patrón; estas razones prácticas, no la lógica, llevaron a escoger la unidad que empleamos en el SI.

4.6. El campo magnético

En este punto en la consideración de las interacciones entre corrientes eléctricas podemos introducir un concepto de campo. En la introducción del concepto de campo eléctrico, después de considerar fuerzas entre cargas, encontramos que las fuerzas son proporcionales a la carga sobre la que medimos la fuerza. Ahora son proporcionales a la intensidad de la corriente.

Un examen de la ecuación (4.3) muestra que la fuerza sobre un elemento de corriente $I_2\,d\vec{l_2}$ es proporcional a la magnitud de este elemento, lo que nos permite definir un campo, en forma análoga al campo eléctrico, pero con características diferentes, como veremos. El campo que definiremos relaciona la fuerza sobre un elemento de corriente con el elemento:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l_2} \times \vec{B} \tag{4.10}$$

[11] Es claro que esta es una descripción sobresimplificada. Hay muchas correcciones que se deben introducir en un laboratorio de metrología que tenga las instalaciones necesarias para realizar la unidad de corriente. Debe hacerse notar que la definición anterior fue adoptada en 1948. Anteriormente se definía la unidad de corriente en términos de la cantidad de plata depositada en un electrodo en un montaje para realizar electrodeposición. Debe tenerse en cuenta que muchos laboratorios de metrología mantienen patrones indirectos, basados en la ley de Ohm, que discutiremos más adelante. Hoy en día se emplean dos efectos cuánticos para lograr refinamientos en la realización de estos últimos patrones eléctricos.

El campo $\vec{B}$ se denomina "densidad de flujo magnético". El nombre se justificará más tarde[12]. Las dimensiones de $\vec{B}$ en el SI son, de acuerdo con la ecuación anterior, newton por amperio por metro y la unidad se denomina tesla (T). La ecuación (4.10) sugiere, en principio, un método para determinar $\vec{B}$; no necesitamos saber cómo se está generando el campo $\vec{B}$ para medir la fuerza debida a él. Resulta más complicado que en el caso eléctrico, en primer lugar, porque la determinación de la fuerza sobre un elemento de un circuito presenta dificultades, pero además porque hay un producto vectorial en su definición.

La definición (4.10) lleva a una expresión para la fuerza sobre un circuito completo que rotularemos 2

$$\vec{F}_{21} = I_2 \oint_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B} \tag{4.11}$$

Cuando se conocen las corrientes que generan el campo $\vec{B}$, la ley de Biot y Savart nos muestra que el campo se puede calcular a partir de esas corrientes como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{R}}{R^3} \tag{4.12}$$

A partir de la ecuación (4.10) se puede ver que la fuerza sobre un elemento de corriente es perpendicular al elemento y también a $\vec{B}$. El orden en los factores de este producto vectorial debe ser tomado con cuidado para no obtener un cambio indeseable en la dirección de la fuerza calculada.

Una comparación con el campo calculado para el caso de una corriente en un alambre recto infinito muestra que la magnitud de ese campo está dada por

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, x} \tag{4.13}$$

Y que la fuerza sobre el segundo alambre, de longitud L, será

$$F_2 = L\, I_2\, B \tag{4.14}$$

La densidad de flujo magnético asociado a una corriente en un alambre infinito tiene una magnitud B que decae con el inverso de la distancia al alambre. Pero hay que prestar atención a la dirección de este campo: si dibujamos una línea continua de manera que el campo $\vec{B}$ sea siempre tangente a esta línea, esta será una circunferencia. Aunque tal campo circular es solo un caso especial debido a la geometría simple del alambre, veremos como

[12] Empleamos el nombre del Sistema Internacional; ocasionalmente nos referiremos simplemente a $\vec{B}$ como "el campo magnético".

hecho general que tales líneas no tienen extremo: son líneas cerradas sobre sí mismas. Suelen dibujarse diagramas de *líneas de campo* para $\vec{B}$ lo mismo que para $\vec{E}$ en la electrostática, como ayuda eficaz para la comprensión de la forma del campo.

Calcularemos el campo $\vec{B}$ para el caso de una corriente I que circula en un lazo plano circular de radio a. La figura 4.6 muestra en forma esquemática la situación, con la corriente entrando al plano del dibujo en el lado inferior y saliendo en el lado superior. Nos interesa el campo en un punto sobre el eje de simetría del lazo, a una distancia z de su centro. Tomaremos este como el eje $\overrightarrow{Oz}$ de un sistema de coordenadas.

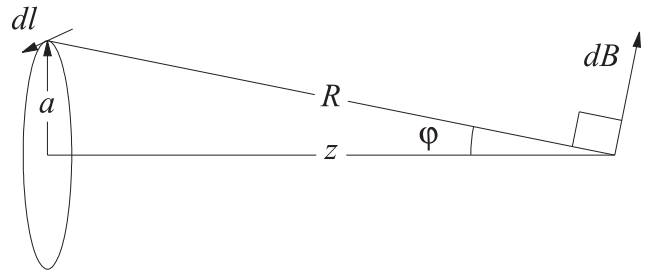

FIGURA 4.6. Sobre el campo generado por una corriente en un anillo

Un elemento de corriente en la parte superior del lazo dibujado produce un campo $d\vec{B}$ en el punto sobre el eje, dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \tag{4.15}$$

donde $\vec{R}$ se muestra en el diagrama (Figura 4.6). El vector $d\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{R}$ y a $d\vec{l}$. Un elemento de corriente simétrico en la parte inferior del lazo producirá una contribución simétrica. Como el lazo en su totalidad puede considerarse formado por tales pares, las componentes del campo perpendiculares al eje $\overrightarrow{Oz}$ se anulan y queda solo una componente axial. La componente axial, según la ecuación (4.15) es

$$dB_z = dB \operatorname{sen} \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \operatorname{sen} \varphi}{R^2} \tag{4.16}$$

Donde φ y R son constantes para la integración sobre el lazo. La componente axial del campo será, entonces,

$$B_z = \frac{\mu_0 I a \operatorname{sen} \varphi}{2R^2} \tag{4.17}$$

Pero $\operatorname{sen}\varphi = a/R$ y $R^2 = a^2 + z^2$, de modo que

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{4.18}$$

Un examen de cómo varía este campo axial con z, la distancia al centro del lazo, servirá para diseñar una interesante aplicación. La magnitud del campo disminuye en forma monótona con x. La pendiente de $B_z(z)$ es cero en el plano del lazo y se aproxima a cero a grandes distancias. La curvatura de esta función es negativa cerca del plano del lazo y se hace positiva para valores z grandes, luego debe ser cero en algún punto intermedio del eje. En otras palabras, para este valor intermedio, que llamaremos z_1, la función $B_z(z)$ debe aproximarse a una recta con pendiente negativa. Si un lazo idéntico se coloca ahora coaxial con el anterio (Figura 4.7) y a una distancia 2 z_1, el campo del segundo lazo crecerá en forma aproximadamente lineal cerca del punto z_1, de modo que el campo conjunto será constante en una región cerca del eje.

Un par de lazos de corriente colocados de esa manera suele llamarse *bobinas de Helmholtz*[13] y se usa en la experimentación cuando se quiere tener un campo controlable con facilidad o cuando se quiere compensar un campo indeseado (como el campo terrestre).

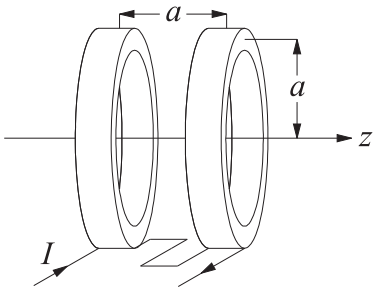

FIGURA 4.7. La geometría de las bobinas de Helmholtz

[13] La palabra bobina aparecerá con frecuencia: apunta a que un solo lazo de alambre requeriría una corriente muy grande para generar un campo apreciable; resulta más práctico arrollar muchos lazos de alambre paralelos y cercanos con una corriente menor. El conjunto es, entonces, un arrollamiento o una bobina de alambre.

4.7. La densidad de flujo magnético en el interior de un solenoide

Un solenoide está formado por un alambre conductor enrollado en forma de hélice sobre un cilindro (Figura 4.8). Normalmente se supone que la longitud de la hélice es mucho mayor que su radio. Llamaremos a al radio de la hélice, L a su longitud y N al número de vueltas de alambre. La corriente que circula será I. El eje de la hélice lo haremos coincidir con el eje $\overrightarrow{Oz}$.

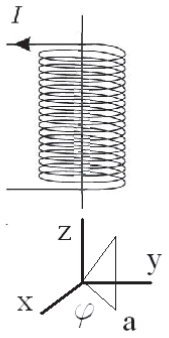

FIGURA 4.8. La geometría de un solenoide

Para aplicar la definición (4.12) emplearemos, para la posición de los elementos de corriente y la posición del punto de observación

$$\vec{r}\,' = a\hat{r} + (h/2\pi)\varphi\hat{k} \qquad\qquad \vec{r} = z\hat{k}$$

donde $h = L/N$ es el paso de la hélice, $\hat{r} = \cos\varphi\hat{i} + \operatorname{sen}\varphi\hat{j}$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios en dirección radial y axial, respectivamente. Los límites de la integración serán $-L/2 < z' < L/2$, $-N\pi < \varphi < N\pi$. La componente axial del campo será

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi}\int_{-N\pi}^{N\pi}\frac{d\,\varphi}{[a^2 + (z - h\varphi/2\pi)^2]^{3/2}} \tag{4.19}$$

Para calcular, podremos realizar los cambios de variable $u = h\varphi/2\pi + z$ y definiremos un ángulo θ tal que $u = \arctan\theta$. La fórmula anterior se convierte en

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2h}\int_{-L/2-z}^{L/2-z}\frac{du}{[a^2 + (u)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2h}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta \tag{4.20}$$

El resultado del cálculo es, llamando $n = N/L$ al *número de espiras por unidad de longitud*,

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 nI}{2}[\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1] \tag{4.21}$$

donde

$$\tan\theta_2 = \frac{L/2 - z}{a} \qquad\qquad \tan\theta_1 = -\frac{L/2 + z}{a}$$

Y empleando las transformaciones trigonométricas adecuadas, llegamos a que el campo en el eje del solenoide tiene una magnitud

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 nI}{2}\left[\frac{L/2 - z}{[a^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2}} + \frac{L/2 + z}{[a^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2}}\right] \tag{4.22}$$

Se puede mostrar que las componentes B_x y B_y (sobre el eje) son muy pequeñas comparadas con B_z, si el solenoide es muy largo ($a \ll L$) y el enrollado es apretado ($1 \ll N$) En tal caso, el campo es aproximadamente uniforme en el interior del solenoide

$$B_z(0,0,z) = \mu_0 nI \tag{4.23}$$

Aunque cerca de los bordes $z = \pm L/2$ el campo axial es poco menos de la mitad que en el centro[14].

4.8. El torque sobre un lazo de corriente

El vector torque (momento) de una fuerza $\vec{F}$, actuando sobre un punto desplazado en $\vec{r}$ de un centro de rotación está dado, en notación vectorial, por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.24}$$

La dirección del vector torque es la dirección del eje de rotación.

Consideremos un lazo plano cerrado de forma arbitraria (Figura 4.9) en una región donde hay un campo uniforme $\vec{B}$. Si este lazo plano lleva una

[14] Para el lector estará claro que la fórmula encontrada se puede justificar para el eje de un solenoide muy largo. En el caso de un solenoide real no se puede esperar que solo haya campo $\vec{B}$ en el interior ni que sea paralelo al eje de simetría; al fin y al cabo, *las líneas de campo son cerradas*, aunque sí tiene un valor mucho menor, como se comprueba experimentalmente. Una mejor aproximación, con gráficas muy bien logradas, se puede encontrar en el libro de E.M. Purcell, *Electricidad y magnetismo*, McGraw-Hill, 1984.

corriente I, cada elemento de corriente experimentará una fuerza. Fijémonos en un elemento $d\vec{l}$. A partir de la ecuación (4.11) la fuerza sobre este elemento de corriente es

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \tag{4.25}$$

y el torque que esta fuerza origina (en relación con el origen de coordenadas) es

$$d\vec{\tau} = I\left[\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})\right] \tag{4.26}$$

que se puede convertir en

$$d\vec{\tau} = I\left[(\vec{r} \cdot \vec{B})d\vec{l} - (\vec{r} \cdot d\vec{l})\vec{B}\right] \tag{4.27}$$

Podemos suponer que $\vec{B}$ tiene solo componente en la dirección $\overrightarrow{Ox}$, es decir $\vec{B} = \hat{i}B$ y como $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ y $\vec{l} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$, la ecuación anterior equivale a

$$d\vec{\tau} = IB\left[\hat{i}(-ydy - zdz) + \hat{j}(xdy) + \hat{k}(xdz)\right] \tag{4.28}$$

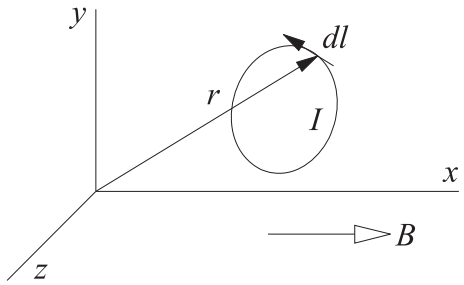

FIGURA 4.9. Acerca de las fuerzas sobre un lazo de corriente

El torque sobre todo el lazo es la suma de la ecuación (4.28) sobre el lazo. En consecuencia, las tres componentes del torque serán

$$\tau_x = -IB \oint (ydy + zdz) \qquad \tau_y = IB \oint xdy \qquad \tau_z = IB \oint xdz$$

La primera de estas integrales es cero, la segunda es la proyección del vector área $\vec{S}$, en el plano xy y la tercera es la proyección de $\vec{S}$ en el plano xz. El resultado es que se pueden combinar en la relación

$$\vec{\tau} = I\vec{S} \times \vec{B} \tag{4.29}$$

Evidentemente, un lazo de corriente en un campo $\vec{B}$ uniforme experimenta un torque solo alrededor de ejes perpendiculares al campo. Con base en esta ecuación (4.29) se diseñaron los instrumentos denominados "galvanómetros", en los que sobre una bobina actúa un torque proporcional a la corriente en la misma bobina y proporcional al seno del ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$.

Esto significa que en un campo magnético un lazo de corriente se comporta como un dipolo eléctrico en un campo eléctrico[15]. Por esta analogía, la cantidad $I\vec{S}$ suele llamarse "momento magnético" o "dipolo magnético", escrito $\vec{M}$, del lazo de corriente.

4.9. La fuerza de Lorentz

Consideremos una carga q en movimiento, con velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo $\vec{B}$. ¿Qué efecto tiene este campo? Para argumentarlo, recordemos la relación (4.14), escrita sin subíndices

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{4.30}$$

donde $\vec{L}$ representa la longitud y la dirección de un alambre y $\vec{B}$ es el campo presente en la posición del alambre. Consideremos un alambre conductor en el que las portadoras de carga, cada una con carga q, se mueven en el interior con rapidez promedio v. En un tiempo corto, dt, cada portadora se mueve una distancia promedio $v\,dt$, de modo que si hay n portadoras por unidad de volumen, habrá $n\,q\,S\,v\,dt$ unidades de carga en el volumen de área S y longitud $v\,dt$. Todas esas cargas atravesarán un plano perpendicular al alambre durante el tiempo dt, de modo que la carga que atraviesa normalmente un plano en la unidad de tiempo es $n\,q\,S\,v$. Esta es, por definición, la intensidad de la corriente

$$I = n\,q\,S\,v = n\,q\,\vec{S} \cdot \vec{v} \tag{4.31}$$

[15] Excepto que hay un momento angular asociado con la corriente que circula (a fin de cuentas, hay portadoras de carga con masa en movimiento). Esto introduce la complicación de un movimiento giroscópico, despreciable en lazos de corriente macroscópicos, pero que desempeña un papel considerable en la reacción de las corrientes electrónicas en los átomos frente a un campo magnético externo. Si no fuera por el momento angular de los electrones, se podría esperar que un átomo con un electrón "no compensado" en su órbita se alineara con el vector área de esa órbita, en la dirección de la densidad de flujo magnético externo. En lugar de ello, el campo externo produce precesión de la órbita alrededor de la dirección del campo.

Aquí hemos empleado el producto escalar, aprovechando que la velocidad y el vector área de la sección son paralelos. Si empleamos ahora la ecuación de fuerza, deberemos considerar la expresión

$$I\vec{L} = n\,q\,(\vec{S}\cdot\vec{v})\vec{L} = \rho(\vec{S}\cdot\vec{L})\vec{v} \tag{4.32}$$

donde hemos colocado $\rho = n\,q$, porque el producto del número de portadoras de carga por unidad de volumen multiplicado por la carga en cada portadora es una densidad de carga. El cambio en el producto escalar es posible porque $\vec{L}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Ahora, consideremos un cuerpo cargado (cilíndrico) de sección S y longitud L moviéndose con velocidad $\vec{v}$. Si la densidad de carga en ese cuerpo es ρ, la carga total será $q = \rho\,S\,L$, de modo que para este cuerpo, la cantidad $q\vec{v}$ desempeña el mismo papel que $I\vec{L}$ en el alambre. Si la carga no está distribuida en forma uniforme sobre el cuerpo, la situación se puede considerar como uniforme sobre volúmenes más pequeños. Como cada elemento se mueve con la misma velocidad, podremos afirmar que

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.33}$$

Puesto que la fuerza sobre una portadora de carga en movimiento involucra el producto vectorial de la velocidad y de $\vec{B}$, esta fuerza será perpendicular a ambos; su efecto no será cambiar la magnitud de la velocidad, sino su dirección. En una región en que el campo $\vec{B}$ sea uniforme y una portadora de carga llegue con velocidad perpendicular al campo, la trayectoria de la carga es una circunferencia de radio r tal que

$$\frac{m\,v^2}{r} = q\,v\,B \qquad\qquad r = \frac{m\,v}{q\,B} \tag{4.34}$$

donde m es la masa de la portadora de carga. El radio de la circunferencia es así una medida del *momentum* de la portadora. Si se conocen $\vec{B}$ y $\vec{v}$ y se mide el radio de la trayectoria, la relación de carga a masa se puede determinar experimentalmente.

La energía cinética de la portadora es $m\,v^2/2$. Si no se conoce $\vec{v}$, pero sí la energía cinética y el *momentum* (o el radio de la trayectoria), tendremos suficiente información para calcular m/q. La energía cinética se puede determinar fácilmente si se trabaja con partículas que han sido aceleradas por una diferencia de potencial conocida. Volveremos sobre estos temas más adelante.

Combinemos la fuerza magnética sobre una carga en movimiento (4.33) con la fuerza que actúa sobre una carga en un campo eléctrico:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.35}$$

Esta es la llamada "ley de fuerza de Lorentz" o simplemente "fuerza de Lorentz"[16]. La fuerza eléctrica sobre la partícula cargada es paralela al campo eléctrico local; la fuerza magnética es perpendicular a la densidad de flujo magnético local y a la velocidad. No se ejerce una fuerza magnética sobre una partícula cargada en reposo.

La ecuación de movimiento de una partícula de carga q y masa m, moviéndose en campos eléctrico y magnético será

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.36}$$

Esta ecuación de movimiento fue verificada en un experimento famoso llevado a cabo por J.J. Thompson en Cambridge, en 1897. Thompson estaba investigando los "rayos catódicos", entonces una misteriosa forma de radiación emitida por un elemento metálico calentado, sometido a un potencial negativo relativo a otro elemento metálico (el primero se denominó *cátodo* y el segundo *ánodo*) y situados dentro de un tubo evacuado[17, 18].

Consideremos con atención la geometría del experimento de Thompson (Figura 4.10). Definamos las coordenadas de modo que los *rayos catódicos* se muevan inicialmente en la dirección $\overrightarrow{Ox}$ y estarán sujetos a un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, en la dirección $\overrightarrow{Oz}$ y a un campo uniforme $\vec{B}$ en la dirección $-\overrightarrow{Oy}$. Supongamos, con Thompson, que los rayos catódicos son un haz de partículas de masa m y carga q. La ecuación de movimiento de estas partículas en la dirección z es

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = q(E - v\,B) \tag{4.37}$$

donde v es la rapidez de las partículas en la dirección x. Thompson comenzó su experimento conectando primero el campo eléctrico (de deflexión de los

[16] El físico holandés Hendrik Antoon Lorentz, premiado con el Nobel en 1902, fue el primero que la formuló. Debe notarse que no es trivial una tal formulación antes de reconocer que en la corriente eléctrica, más que un fluido continuo, son portadoras de carga discretas las que dan lugar a todos los fenómenos conocidos. Su conferencia para el premio puede encontrarse en http://nobelprize.org/physics/laureates/1902/lorentz-lecture.html.

[17] En sentido técnico, *vacío* designa simplemente gases a presión inferior a una atmósfera. El vacío (la extracción de gases de un recipiente cerrado) logrado en aquella época, aunque se basaba en importantes avances tecnológicos, apenas era suficiente para observar algunos fenómenos. Algo más de un siglo después, resulta prodigioso que se pudiera lograr tanto con tan pocos recursos.

[18] La importancia del experimento es doble; en primer lugar, varias escuelas de físicos disputaban sobre la naturaleza de esos rayos catódicos. La escuela alemana sostenía que era una radiación electromagnética; la escuela francesa y la inglesa sostenían que era un haz de partículas. Thompsom mostró que esto último es la realidad. Además se encontró que hay partículas más livianas que el átomo del elemento químico más liviano conocido, el hidrógeno: la implicación final sería que ¡el "indivisible" átomo tiene partes!

rayos, claro está: ¡el de aceleración debería estar siempre!) y midiendo la deflexión d de los rayos en la dirección x, después de que hubieran viajado una cierta distancia l a través del campo. De la ecuación de movimiento es claro que esta deflexión está dada por

$$d = \frac{q}{m}\frac{Et^2}{2} = \frac{q}{m}\frac{El^2}{2v^2} \tag{4.38}$$

donde el "tiempo de vuelo" t se reemplaza por l/v. Esta fórmula es válida solo si $d \ll l$. Luego, Thompson conectó el campo magnético y lo ajustó hasta que logró que los rayos catódicos no se desviaran.

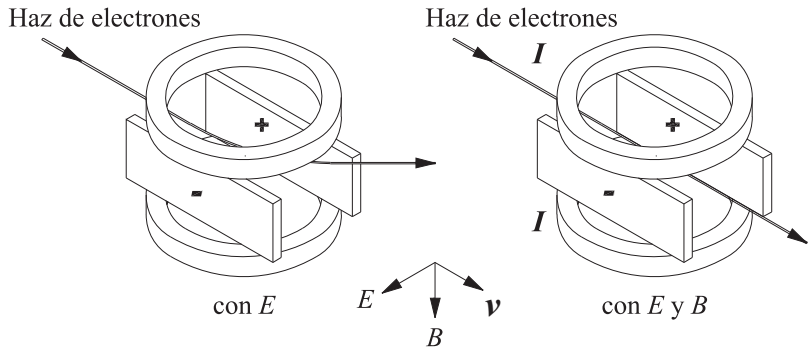

FIGURA 4.10. Acerca del experimento de J.J. Thompson

La falta de desviación significa que la fuerza neta sobre las partículas es cero en la dirección z; en otras palabras, que cuando se ajustan los campos para desviación cero, la ecuación (4.37) resulta en

$$v = \frac{E}{B} \tag{4.39}$$

Las ecuaciones anteriores (4.38) y (4.39) pueden combinarse y reorganizarse para obtener la relación de carga a masa de los rayos catódicos a partir de cantidades que se determinan o se calculan desde los resultados experimentales[19].

$$\frac{q}{m} = \frac{2\,d\,E}{l^2 B^2} \tag{4.40}$$

[19] Este es un experimento fácil de realizar, pero requiere un *tubo al vacío* construido adecuadamente. Una extensión elemental de las ideas permite comprender que se puede determinar el cociente carga sobre masa de cualquier portadora de carga. Si se desarrolla un método independiente para medir carga, se podrá determinar la masa de esas portadoras.

Thompson concluyó, a partir de sus resultados, que los rayos catódicos están hechos de partículas con carga negativa (el signo de la carga es obvio por la dirección de la deflexión inicial) con una relación carga sobre masa de $-1,7 \times 10^{11}\, C/kg$.

Una década más tarde, Robert Millikan realizó su famoso experimento de la gota de aceite y descubrió cargas móviles con carga de $-1,6 \times 10^{-19}$ C. Suponiendo que esas cargas móviles y las que constituyen los rayos catódicos son de igual naturaleza, los dos experimentos implican que la masa de esas partículas es $9,4 \times 10^{-31}\, kg$. Esta es la masa de electrón. Así, los rayos catódicos son, realmente, haces de electrones liberados en el cátodo caliente y acelerados por la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo. Debe anotarse que los valores "modernos" para la masa y la carga del electrón son $9,1 \times 10^{-31}$ kg y $-1,6 \times 10^{-19}$ C. Resultará curioso para el estudiante que la denominación "rayos catódicos" fue empleada en la literatura científica y técnica hasta mucho después de 1960. Los interesados pueden consultar en Shamos, op. cit., pp. 216-231 y 238-246.

4.10. La ley de Ampère y sus aplicaciones

Para empezar a considerar una de las leyes fundamentales para la densidad de flujo magnético, examinaremos la integral de línea de $\vec{B}$ sobre un camino cerrado. Veremos que la integral está relacionada con la corriente total "encerrada" por ese camino. La otra ley surge como una consecuencia necesaria de la definición (4.12).

Consideremos un caso particular: el campo $\vec{B}$ asociado con la corriente en una línea infinita de corriente se calculó como de magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\, x} \tag{4.41}$$

donde I es la corriente en el alambre y x es la distancia perpendicular al punto en que se está calculando el campo. La dirección de $\vec{B}$ está dada por una regla de mano derecha, sabemos que es perpendicular al alambre y a la normal al alambre: es tangencial en cada punto a una circunferencia trazada con radio r. La integral de línea de $\vec{B}$ sobre un arco de circunferencia (Figura 4.11) en un plano perpendicular al alambre, de radio x, que define un ángulo θ en el alambre tendrá un valor

$$\int_M^N \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_M^N B\, x\, d\theta = \frac{\mu_0 I \theta}{2\pi} \tag{4.42}$$

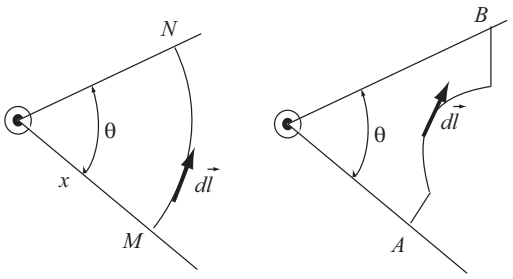

FIGURA 4.11. Acerca de la integral de línea del campo magnético

Donde hemos colocado $dl = xd\theta$ y hemos tenido en cuenta que $d\vec{l}$ es paralelo a $\vec{B}$. La integral es función solo del ángulo y no del radio x. Si elegimos un camino arbitrario que define el mismo ángulo θ, el resultado es el mismo: el camino se puede considerar como formado de segmentos de circunferencia unidos por segmentos radiales. A lo largo de los segmentos radiales, la integral es cero, porque $d\vec{l}$ es normal a $\vec{B}$; la integral sobre los arcos es igual a la integral ya calculada.

Resulta ahora claro que si el camino de integración es cerrado, y encierra completamente a la corriente, el valor del integrando es $\mu_0 I$, en el caso *(a)*, mientras es 0 si no encierra la corriente, en el caso *(b)*; la corriente presente es la misma en los dos casos (Figura 4.12).

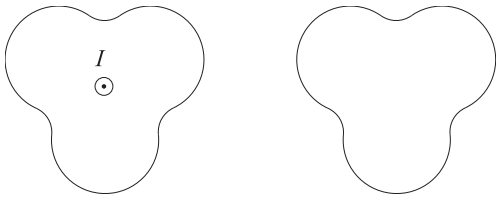

FIGURA 4.12. Dos lazos iguales con integral de línea distinta

Deberemos argumentar si esto es cierto en general. Por ahora supondremos que así es, es decir que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{4.43}$$

y examinaremos qué consecuencias tiene.

En primer lugar, calcularemos la densidad de flujo magnético dentro de un solenoide muy largo.

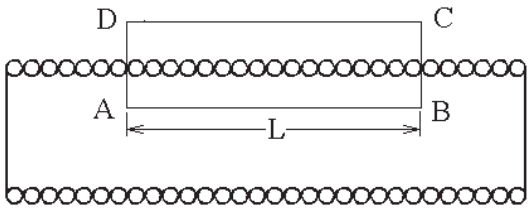

FIGURA 4.13. Acerca de la Ley de Ampère en un solenoide largo

En un solenoide largo, mostrado esquemáticamente en la figura 4.13, la intensidad del campo afuera de él es despreciable, mientras los puntos considerados estén lejos de los extremos de la hélice. El campo sobre el eje está dirigido paralelo a este y es constante en magnitud.

La integral de línea de $\vec{B}$ a lo largo de un rectángulo que incluya un segmento axial (AB), dos radiales (BC) y (DA) y un segmento por fuera del solenoide (CD), consiste en cuatro partes

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} \qquad (4.44)$$

La integral sobre AB es BL, porque B es constante. Las integrales sobre BC y DA son cero porque $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$; la integral sobre DA es cero porque $B = 0$. Entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL \qquad (4.45)$$

Con n espiras por unidad de longitud y una corriente I en el alambre, la corriente total encerrada por el rectángulo $ABCD$ es $(nL)\, I$. En consecuencia, la densidad de flujo magnético en puntos del eje lejos de los extremos del solenoide es $B = \mu_0 nI$, resultado que se puede comparar con la expresión (4.22).

Los solenoides largos se emplean en los casos en que un campo muy uniforme se requiere sobre un volumen limitado, como en la técnica de resonancia magnética nuclear.

Un segundo ejemplo de aplicación es el cálculo de la densidad de flujo magnético en un alambre enrollado sobre un toroide (Figura 4.14). Consideraremos ese arrollamiento como equivalente a un solenoide doblado para que un extremo se toque con el otro, como ilustra la figura.

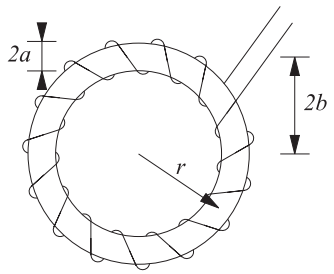

FIGURA 4.14. Ilustración de un alambre enrollado sobre un toroide

La ley de Ampère se puede emplear para determinar el campo $\vec{B}$ en un punto que esté a r del eje de simetría del toroide. De la simetría de la configuración, podemos esperar que $\vec{B}$ tenga la misma magnitud en todos los puntos sobre una circunferencia de radio r centrada en el eje. La regla de la mano derecha muestra que $\vec{B}$ está orientado a lo largo del arco de ese círculo en dirección antihoraria cuando la corriente está en la dirección de las flechas en la figura. La integral de línea alrededor de esta circunferencia es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi\, rB \tag{4.46}$$

Con un total de N espiras y una corriente I en cada una, la ley de Ampère requiere que $2\pi\, rB = \mu_0 NI$, de donde

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\, r} \tag{4.47}$$

La magnitud del campo no es uniforme sobre la sección de cualquier toroide, pero si exigimos ahora que r sea grande, comparado con las dimensiones de la sección del toroide, aproximadamente valdrá que $N = 2\pi\, r\, n$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud. La magnitud del campo en el toroide se aproximará a

$$B \approx \mu_0 n\, I \tag{4.48}$$

que es la misma expresión obtenida para el solenoide muy largo. Esto nos confirma que un solenoide muy largo puede considerarse como un toroide en el límite en que el radio del toroide se hace muy grande.

4.11. La ley de Ampère en general

Una demostración de la validez de la ley de Ampère es básica para la teoría del electromagnetismo. Emplearemos una interpretación geométrica de los

cálculos necesarios para encontrar la densidad de flujo magnético generada por una corriente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_1 \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \tag{4.49}$$

Hemos omitido los índices en I y en $d\vec{l}$ que aparecen en la ecuación (4.12), porque ya no son necesarios. La integral en (4.49) se realiza sobre el circuito que lleva la corriente (Figura 4.15).

El campo $\vec{B}$ en un punto P, de posición $\vec{r}$, es la suma de las contribuciones de todos los elementos de corriente. Lo que se debe calcular ahora es la integral de la expresión (4.49) sobre una curva cerrada, recorrida por P. Llamaremos $\delta\vec{r}$ a los elementos de esta curva. La expresión completa por calcular será así

$$\oint \vec{B} \cdot (\vec{r}) \delta\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_P \oint_I \frac{d\vec{l} \times \vec{R} \cdot \delta\vec{r}}{R^3} \tag{4.50}$$

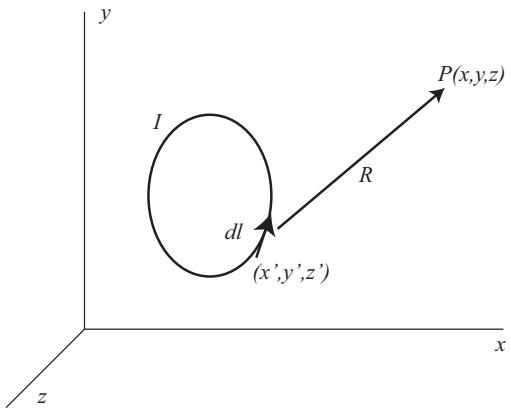

FIGURA 4.15. Sobre el cálculo del campo con la Ley de Ampère

Empleamos el rótulo P para la integral sobre la curva en el que se recorren las coordenadas (x, y, z) y el rótulo I para la integral sobre el lazo en el que se recorren las coordenadas (x', y', z'). Será conveniente evaluar los productos $\vec{B} \cdot \delta\vec{r}$ dejando su integral para más tarde.

Un argumento crucial es este: la relación geométrica entre el punto P y el lazo de corriente es la misma si desplazamos el punto P en la cantidad $\delta\vec{r}$ que si dejamos P fijo y desplazamos el lazo de corriente en $\delta\vec{r}' = -\delta\vec{r}$. La figura 4.16 muestra las dos alternativas.

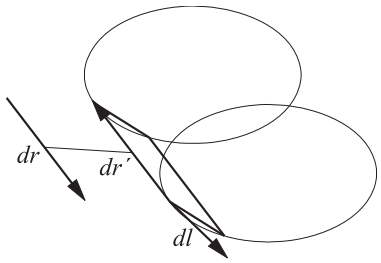

FIGURA 4.16. Sobre la equivalencia de dos desplazamientos

Cambiaremos un poco la expresión (4.49) usando el vector $\hat{R} = \vec{R}/R$. El integrando de la ecuación anterior se puede escribir como

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_I \frac{d\vec{l} \times \hat{R} \cdot \delta\vec{r}'}{R^2} \tag{4.51}$$

con la integración sobre las coordenadas primadas. El numerador en el integrando es un producto escalar triple, en el que pueden intercambiarse los productos escalar y vector, con lo que se obtiene

$$-d\vec{l} \times \hat{R} \cdot \delta\vec{r}' = \hat{R} \times d\vec{l} \cdot \delta\vec{r}' = \hat{R} \cdot d\vec{l} \times \delta\vec{r}'$$

De modo que la ecuación (4.51) queda

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_I \frac{\hat{R} \cdot d\vec{l} \times \delta\vec{r}'}{R^2} \tag{4.52}$$

Ahora es más fácil interpretar geométricamente este integrando. En la figura 4.16 se esquematiza que cuando el elemento $d\vec{l}$ se desplaza en $\delta\vec{r}'$, barre un área dada por un vector $d\vec{l} \times \delta\vec{r}'$. La dirección de este vector área es hacia afuera del área en forma de cinta que es barrida por todo el lazo de corriente. El producto escalar de $d\vec{l} \times \delta\vec{r}'$ con el vector unitario $\hat{R}$ puede interpretarse como la componente de ese vector área a lo largo de $\hat{R}$ o como la proyección del área sobre un plano perpendicular a $\hat{R}$. Esta área, dividida por R^2, es el ángulo sólido que define el área $d\vec{l} \times \delta\vec{r}'$ en el punto P. La integral a la derecha de la ecuación (4.52) es el ángulo sólido que la cinta barrida por todo el lazo define en P. Escribamos este ángulo sólido como $d\Omega$. La ecuación (4.52) se convierte en

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\Omega \tag{4.53}$$

Ahora solo tenemos que hacer cambios en el lazo de corriente: una serie de desplazamientos $\delta\vec{r}'$ que son los opuestos de los desplazamientos $\delta\vec{r}$ del

camino cerrado que recorre P. En este proceso, este lazo barre una superficie cerrada. Si el lazo original pasa a través del lazo de corriente, en la imagen complementaria el punto P queda *dentro* de la superficie barrida (Figura 4.17); la integración de (4.53) es la integración del ángulo sólido de esta superficie vista *desde adentro* y en consecuencia es 4π.

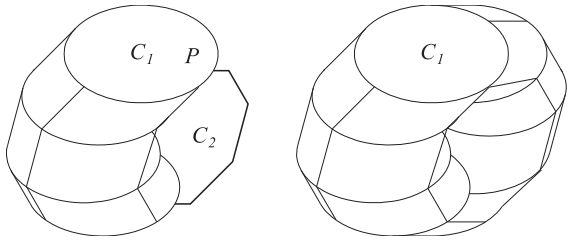

FIGURA 4.17. Sobre la integral de línea cuando el camino de integración encierra al lazo de corriente

La integral que estamos calculando es, entonces,

$$\oint_P \vec{B}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = \mu_0 I \tag{4.54}$$

Si el camino del punto P no atraviesa el lazo de corriente, la superficie complementaria no encierra a P (Figura 4.18). El ángulo sólido es *cero*, y la integral también.

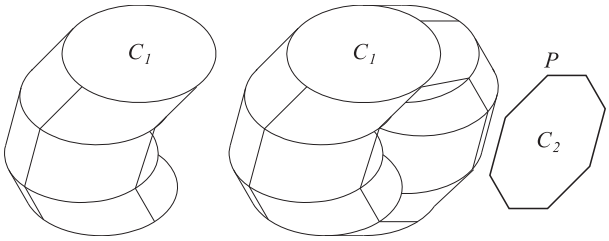

FIGURA 4.18. Sobre la integral de línea cuando el camino de integración *no* encierra al lazo de corriente

Recuérdese que una superficie cerrada tiene un vector área cero. Una superficie abierta, observada desde un punto P externo, puede tener su vector área "alejándose" de P o "acercándose", según sea la dirección en que se recorre su perímetro. En el primer caso, el ángulo sólido definido en P será positivo; en el segundo caso, negativo. Si ahora las dos superficies de igual perímetro, pero recorrido en diferentes sentidos, se combinan en una superficie cerrada, el ángulo sólido definido por esta, en P, es cero.

Podemos generalizar ahora, considerando que la corriente que atraviesa nuestro lazo no es un filamento, sino una distribución de corriente $\vec{J}$. Así, una forma más general de la ley de Ampère es

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.55}$$

Debe anotarse que el área de integración en esta ecuación no está definida en forma unívoca. Cualquier área con perímetro dado por los límites de la región en que pasa la corriente puede tomarse en cuenta.

A la forma diferencial de la ley de Ampère se puede llegar con el siguiente argumento. La integral en el lado izquierdo de la ecuación (4.55) puede convertirse, por medio del teorema de Stokes, en una integral de superficie. Recordemos el teorema; dice que si $\vec{V}$ es una función vectorial continua y finita, C una curva cerrada y S una área apoyada en esa curva,

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{S} \tag{4.56}$$

Empleando el teorema, nuestra ecuación [4.55] queda

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.57}$$

aplicada a cualquier superficie. Apliquémosla a una superficie infinitesimal, quitando, en efecto, los símbolos de integración:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.58}$$

Ahora bien, si dos productos de la forma $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ y $\vec{P} \cdot \vec{R}$ son iguales, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{P} \cdot \vec{R}$, no se sigue en forma general que $\vec{Q} = \vec{R}$. Pero si esa igualdad es válida para cualquier orientación de $\vec{P}$, entonces la conclusión es $\vec{Q} = \vec{R}$. La ecuación anterior vale para todas las áreas $d\vec{S}$, , de modo que podemos concluir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{4.59}$$

Esta es una ecuación que relaciona la tasa de cambio de la densidad de flujo magnético en un punto del espacio con la densidad de corriente en ese punto. Si se encontraran experimentalmente condiciones en que la ecuación (4.59) no sea válida, deberíamos reinvestigar las relaciones de $\vec{B}$ con las corrientes. Como veremos, si $\vec{B}$ o $\vec{J}$ son función del tiempo, no surgirán fenómenos nuevos, pero sí deberemos modificar la ley para condiciones no estacionarias.

4.12. El potencial vector magnético

Otra consecuencia de la ecuación (4.59) es que, excepto en las regiones en que no hay corrientes, no podremos encontrar un potencial escalar para obtener la densidad de flujo magnético. En algunos casos especiales, un potencial escalar ha sido aplicado con éxito, cuando no hay corrientes. Pero es posible, y tiene más importancia teórica y práctica, encontrar una función vectorial, a partir de la cual podemos encontrar $\vec{B}$. De manera similar a como se encuentra $\vec{E}$ a partir de un potencial escalar ϕ, será posible encontrar $\vec{B}$ como el rotacional de otra función, $\vec{A}$ [20]

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4.60}$$

Esta función se denomina el potencial vector. Para desarrollar la relación anterior, regresemos a la ecuación (4.12) sin índices

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \tag{4.61}$$

Recordemos que la integración y el vector $d\vec{l}$ involucran coordenadas (x', y', z'), que el punto de observación $\vec{r}$ está fijo por las coordenadas (x, y, z) y que $\vec{R}$ involucra las diferencias de las coordenadas. Es fácil comprobar la relación

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

por medio de la cual la ecuación (4.61) toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint d\vec{l} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{4.62}$$

Recordaremos ahora otra identidad acerca de los operadores diferenciales, que se puede verificar directamente

$$\vec{\nabla} \times (e\vec{V}) = e\,\vec{\nabla} \times \vec{V} - \vec{V} \times \vec{\nabla}\, e$$

Donde e es una función escalar y $\vec{V}$ una función vectorial de la posición. El integrando de la ecuación (4.62) podrá escribirse como

$$d\vec{l} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)\vec{\nabla} \times d\vec{l} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{d\vec{l}}{R}\right)$$

[20] El nombre se escoge por analogía con ϕ, pero no se asocia directamente con el concepto de trabajo. Hay una asociación indirecta: el lector interesado podrá mostrar fácilmente que la derivada temporal de $\vec{A}$, así como la derivada espacial de ϕ, tiene las dimensiones de V/m.

Pero como las diferenciaciones en el rotacional son respecto de las coordenadas de P, el primer término en la fórmula anterior es cero, y nuestra ecuación (4.62) toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \vec{\nabla} \times \left(\frac{d\vec{l}}{R} \right) \tag{4.63}$$

Aprovecharemos ahora que la diferenciación y la integración en esta ecuación se realizan respecto de diferentes variables, para intercambiar su orden

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \vec{\nabla} \times \oint \frac{d\vec{l}}{R} \tag{4.64}$$

lo que nos muestra que el vector $\vec{B}$ puede ser encontrado como el rotacional de un vector $\vec{A}$, definido como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{R} \tag{4.65}$$

¿Para qué todo esto? En la próxima sección lo comentaremos. Por ahora digamos que, en general, ni $\vec{B}$ ni $\vec{A}$ son fáciles de calcular, aunque éste último puede ser más fácil. La simplificación no es tan grande como cuando se introdujo el potencial electrostático. De todas maneras el vector potencial tiene una gran importancia teórica que va más allá de su utilidad para calcular $\vec{B}$. Una de esas implicaciones puede encontrarse recordando que la divergencia de un rotacional es siempre cero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

donde $\vec{V}$ es cualquier función vectorial. Si la comparamos con la ecuación (4.60), encontraremos una relación completamente general y muy importante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.66}$$

análoga a la ley de Gauss para el campo electrostático. La ecuación anterior dice que no hay cargas "magnéticas" análogas a las eléctricas que funcionen como fuentes de $\vec{B}$ y que para un volumen dado, tanto flujo de $\vec{B}$ entra por la superficie como sale. Si recordamos también que la definición de $\vec{B}$ surgió de una ley de fuerza con dependencia del cuadrado de la distancia, comprenderemos que la ecuación anterior también incluye esa dependencia de la distancia, como se puede mostrar fácilmente[21].

[21] Resulta un tanto redundante este resultado: el punto de partida para todo este desarrollo es la interacción entre corrientes eléctricas; la conclusión es que la densidad de flujo magnético producida por las corrientes NO es producida por cargas magnéticas. Así las cosas, se justifica un debate acerca de si la prueba de que tales "cargas magnéticas" existieran se obtuviera, ¿cómo se debieran modificar las leyes que estamos construyendo? Y ¿qué nuevo nombre reclamaríamos para las nuevas ecuaciones?

4.13. Comentarios sobre el potencial vector

Aunque el rotacional de la función dada por (4.65) resulta en el campo $\vec{B}$ asociado con la corriente eléctrica I, no es la única posibilidad. De manera similar a la constante arbitraria que se puede sumar al potencial electrostático, al potencial vector se le puede sumar una función que tenga rotacional cero, es decir el gradiente de una función escalar,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \tag{4.67}$$

La función $\vec{A}'$ tiene el mismo rotacional que $\vec{A}$ y producirá el mismo campo $\vec{B}$ [22].

Una restricción adicional que puede ser conveniente es la especificación de la divergencia de $\vec{A}$, que no cambiará la relación entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$. Por ejemplo, si colocamos el rotacional de $\vec{A}$ en la ecuación que expresa la ley de Ampère, se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \tag{4.68}$$

El rotacional del rotacional de un vector es el gradiente de la divergencia menos el laplaciano

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

Así nuestra ecuación se transforma en

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Si escogemos ahora la divergencia de $\vec{A}$ igual a cero, llegamos a

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{4.69}$$

que tiene la forma de la ecuación de Poisson, discutida anteriormente. En coordenadas cartesianas podremos separar esta ecuación vectorial en tres escalares y conocemos ya un método para realizar los cálculos para encontrar el potencial vector a partir de la distribución espacial de corrientes.

Calculemos el potencial vector generado por una corriente eléctrica I circulando por un solenoide largo, de radio a y con su eje en la dirección $\overrightarrow{Oz}$. Ya se ha calculado el valor ($B = \mu_0 n I$), con n el número de espiras por unidad

[22] Por razones aparte del electromagnetismo, la formación de una función $\vec{A}'$ a partir de $\vec{A}$ se denomina una *transformación de calibración* o *de aforo* –en inglés *gauge transformation*–. Esencialmente esta indefinición en $\vec{A}$ proviene de que es necesario definir el rotacional y la divergencia de un vector para especificarlo completamente –teorema de Helmholtz–. La relación entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ solo especifica el rotacional de $\vec{A}$.

de longitud. Su dirección es axial, según una regla de mano derecha. Supondremos que en el exterior, el campo es cero. El rotacional del potencial vector debe dar ese resultado.

Aprovechando la simetría del problema, emplearemos coordenadas cilíndricas (r, φ, z). Una posible expresión para el potencial vector es, dentro del solenoide, recordando la ecuación (4.65) y que la dirección de la corriente es azimutal, $\vec{A} = (0, F\,r, 0)$. La aplicación del operador rotacional, expresado en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right] \tag{4.70}$$

resulta en que $2F = B$; entonces, para $r \leq a$,

$$\vec{A} = (0, \mu_0 n I \frac{r}{2}, 0) \tag{4.71}$$

Para calcular ahora el potencial vector *por fuera* del solenoide, buscaremos un campo vectorial que en $r = a$ coincida con la expresión anterior (independiente del azimut) y que tenga en cuenta la definición (4.65). Así se puede justificar que, para $a \leq r$,

$$\vec{A} = (0, \mu_0 n I \frac{a^2}{2r}, 0) \tag{4.72}$$

Una imagen realizada por el lector interesado, mostraría que la forma de la magnitud de $\vec{A}$ (4.71, 4.72) es como una montaña con un cráter en su centro.

4.14. ¿Monopolos magnéticos?

Ya calculamos la densidad de flujo magnético de un alambre infinito que lleva una corriente I. Si colocamos un sistema coordenado cartesiano con el eje $\overrightarrow{Oz}$ en la dirección del alambre, el campo puede ser expresado como

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{\rho^2}, \frac{x}{\rho^2}, 0\right) \tag{4.73}$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Si se calcula directamente la divergencia de este campo, el resultado es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{2yx}{\rho^4} - \frac{2yx}{\rho^4}\right) = 0 \tag{4.74}$$

como debiera ser, de acuerdo con la ecuación (4.66). Pero cuando discutimos la ley de Gauss en electrostática tuvimos una divergencia de campo cero excepto en una región arbitrariamente pequeña, en el caso de las cargas puntuales. ¿Será este el caso para la densidad de flujo magnético? Es decir, será que hay fuentes puntuales de campo magnético para las que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(x, y, z) = 0$ en todas partes, excepto en una región arbitrariamente pequeña? La respuesta corta es no. Pero la respuesta larga no es tan simple.

La relación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(x, y, z) = 0$ significa que las líneas –o tubos– de campo $\vec{B}$ no tienen fuentes o sumideros, son líneas continuas y cerradas. En todas las configuraciones que podemos investigar, las líneas de campo son de alguna manera similares a las líneas que se pueden trazar para un solenoide que lleva corriente. Conocemos la convención de llamar a los polos de un imán Norte y Sur, de acuerdo con la dirección general en que se orienta si está suspendido como una brújula. En realidad, podríamos suspender un solenoide de un hilo y mientras lo recorra una corriente, también tendrá esa misma tendencia de orientarse[23]. La afirmación de que esa relación vale en forma universal significa que todos los campos magnéticos del universo se comportan como los campos generados por una corriente. ¡Esta es una afirmación formidable!

En 1931, el físico P.A.M. Dirac, tratando de explicar por qué la carga eléctrica está cuantizada, postuló la existencia de cargas magnéticas, también llamadas monopolos magnéticos. Por supuesto, no basta con que un teórico tan notable como Dirac los postulara, es necesario encontrar evidencias experimentales. Varios experimentos se han realizado para detectar monopolos magnéticos, desde búsquedas en sólidos hasta análisis cuidadosos de los resultados en experimentos con aceleradores de partículas. Se han registrado eventos, pero no se ha logrado evidencia reproducible de la existencia de tales partículas. Frente a este hecho experimental, se pueden encontrar publicaciones recientes sobre el tema[24].

[23] Esa tendencia se interpreta como que la Tierra posee una densidad de flujo magnético con polos "cerca" de los polos geográficos del planeta. La existencia, intensidad y distribución de este campo magnético fue ya tema de investigación para C.F. Gauss y K. Weber, a comienzos del siglo XIX y continúa siendo tema de trabajo para muchos profesionales de diferentes disciplinas. En Colombia hay un observatorio magnético, de la red internacional, situado en la isla Santuario, en la laguna de Fúquene.

[24] Como el libro *Magnetic Monopoles* de Y. Shnir, en la respetable editorial Springer. Los interesados podrían consultar muchas páginas de la internet, como la www.absoluteastronomy.com/encyclopedia acerca del tema.

4.15. La medición de campos magnéticos

En principio podría emplearse la definición de campo B para medir su intensidad, construyendo balanzas suficientemente sensibles. Hay, además, métodos más avanzados, que emplean efectos estudiados en capítulos posteriores. Por ahora discutiremos un método de medición que es, aunque de manera un poco indirecta, una medición de fuerza sobre portadoras de carga, basado en el llamado efecto Hall. Para ello, supongamos que tenemos una lámina conductora que lleva una corriente eléctrica dentro de un campo magnético, perpendicular a la lámina. El conjunto está sostenido rígidamente, de modo que la fuerza magnética que actúa sobre él no lo puede mover; la figura 4.19 ilustra la situación que consideraremos.

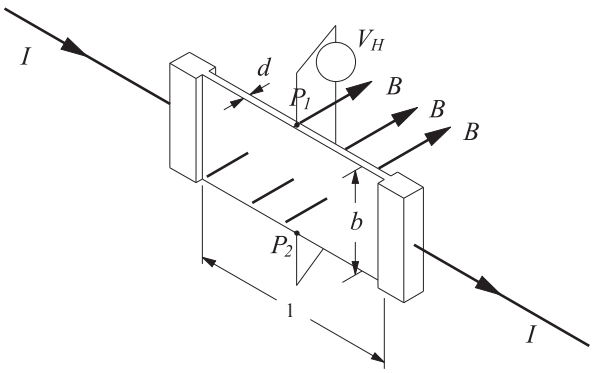

FIGURA 4.19. Acerca de la medición de campo aprovechando el efecto Hall

Sea I la intensidad de la corriente que circula. Dos contactos P_1 y P_2 en los bordes de la lámina están conectados a los terminales de un medidor de pequeñas diferencias de potencial. El medidor señalará una tensión cuya polaridad depende de la dirección de la corriente y de la intensidad de flujo magnético. La aparición de esta tensión se llama efecto Hall. Este efecto se puede explicar con base en la fuerza de Lorentz.

En el conductor los electrones se mueven contra la dirección convencional de la corriente. La fuerza de Lorentz que actúa sobre ellos ocasiona un desplazamiento de ellos, perpendicular a la dirección de la corriente, y con él una "tensión Hall", V_H, entre puntos opuestos en los bordes de la lámina.

La acción de la fuerza de Lorentz sobre portadoras de carga positivas causaría una tensión Hall de sentido contrario. Para la misma dirección de la corriente, la velocidad de las portadoras sería opuesta a la de los electrones.

Este cambio de sentido y el cambio de polaridad de las portadoras haría que la fuerza de Lorentz actúe en el mismo sentido que para electrones, pero la tensión transversal cambiaría de sentido. Un experimento similar mostrará si las portadoras de carga que constituyen la corriente eléctrica son de carga positiva o negativa, una información muy importante en la investigación de los conductores y sus propiedades.

Se ha encontrado que la tensión Hall es proporcional a la intensidad de flujo magnético, $V_H \sim B$. Es proporcional a la intensidad de la corriente I e inversamente al espesor de la lámina conductora

$$V_H = R_H \frac{IB}{e} \tag{4.75}$$

La magnitud R_H, que depende del material y de la temperatura, suele llamarse constante Hall. Sus dimensiones son $\mathrm{m}^2/\mathrm{A{\cdot}s}$. Para el cobre, por ejemplo, tiene un valor de $-5,3 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{A{\cdot}s}$. En el capítulo sobre conductores volveremos a considerar esta propiedad.

El efecto Hall se aprovecha en las llamadas sondas Hall para medir el campo B. Una calibración de la sonda y toda la electrónica conectada para medir se puede realizar con un patrón de campo o con un aparato basado en una balanza de corriente. Las sondas Hall se elaboran muy pequeñas, para medir el campo B casi punto a punto. Además, se puede girando la sonda, mostrar el carácter vectorial del campo B, debido a que en cada caso se mide solo la componente perpendicular a la sonda.

4.16. Resumen

La relación que representa la fuerza entre elementos de corriente, la ecuación (4.3), es una hipótesis cuya integral sobre lazos completos de corriente puede verificarse experimentalmente. Nos suministra una expresión para la fuerza entre "elementos puntuales". Es una ley de acción a distancia, igual que la ley de Coulomb. La separamos en dos partes, introduciendo el concepto de densidad de flujo magnético –la fuerza sobre un elemento de corriente está determinada por el campo $\vec{B}$–, el cual a la vez, está determinado por elementos de corriente en otra parte.

Las propiedades de la integral, de la divergencia y del rotacional de $\vec{B}$ permiten encontrar otras relaciones: de la integral de línea se sigue que el rotacional de $\vec{B}$ es proporcional a la densidad de corriente; la divergencia de $\vec{B}$ es cero, lo cual significa que el flujo de $\vec{B}$ sobre una superficie cerrada es siempre cero. Finalmente se dedujo que $\vec{B}$ siempre se puede reemplazar

por el rotacional de un potencial vector y este, a la vez, se puede calcular a partir de la distribución de corrientes.

La teoría presentada explica el efecto magnético de las corrientes eléctricas, pero aún no explica el efecto magnético de los imanes permanentes. La hipótesis –genial– de Ampère fue postular que estos campos *se pueden siempre reemplazar* por los producidos a partir de distribuciones convenientes de corrientes eléctricas. En casos como el imán de barra recta o el imán de anillo, no es difícil encontrar esa distribución de corrientes. Quedaron, ciertamente, puntos pendientes por explicar, como las notables magnitudes de esas corrientes y que no disiparan energía por calentamiento del material. La explicación satisfactoria de todos estos interrogantes debió esperar al desarrollo de una teoría acerca de los movimientos internos de los electrones en los átomos, en el siglo XX.

4.17. Temas para discusión

- La forma vectorial de la ley de fuerza entre dos elementos de corriente está dada por la ecuación (4.3), que expresa la fuerza sobre el elemento 2. La separación $\vec{R}$ se define como un vector que termina en el elemento 2. Si se intercambian los subíndices en los elementos de longitud, $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$, y se invierte el sentido de $\vec{R}$ cambiándole el signo, se obtiene la fuerza sobre el elemento 1. De acuerdo con la tercera ley de Newton, estas dos debieran ser iguales y opuestas. ¿Lo son?

- Un *galvanómetro de tangentes* es un dispositivo que se empleó para medir corrientes. Está formado por una bobina circular montada con su plano en el meridiano del campo magnético terrestre. En el centro de esa bobina se monta una brújula, cuya orientación estará determinada por los efectos combinados del campo terrestre y del campo producido por una corriente que circula por la bobina. En un instrumento tal, la bobina está devanada en dos partes, con alambres de conexión externa en cada mitad. Cuando la mitad de la bobina se conecta a un dispositivo que hace circular una intensidad de corriente constante, la deflexión de la aguja es $(0,5\,\arctan)$. Cuando se conectan las dos mitades de la bobina, la deflexión es $(1,0\,\arctan)$. ¿A qué será igual la deflexión cuando se conectan las dos mitades de la bobina en paralelo?

- El dispositivo mostrado en la figura 4.20, con tres solenoides y un imán permanente (que puede ser una brújula) podría emplearse como motor. Argumente y encuentre una explicación de cómo funciona y qué condiciones deben llenar las corrientes en los solenoides –espaciados 120^o alrededor del imán– para que el motor funcione.

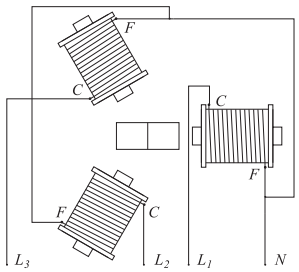

FIGURA 4.20. Un motor eléctrico

4.18. Ejercicios

1. Una barra conductora muy larga de radio exterior a fue taladrada con un radio b –con ejes paralelos– pero el eje del taladro quedó desplazado en una cantidad c (Figura 4.21). Una corriente fluye por el conductor, con densidad uniforme j Am^{-2}. Calcule una expresión para la densidad de flujo magnético B en el eje del taladro, lejos de los extremos del conductor.

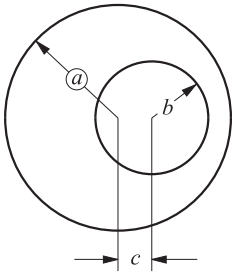

FIGURA 4.21. Geometría para el ejercicio

2. Calcule la densidad de flujo magnético dentro de un cable coaxial largo en el que el conductor interno y el externo llevan la misma corriente pero en direcciones opuestas. Suponga que el conductor interno tiene un radio a y el radio interno del segundo conductor es b; su radio externo es c. Puede suponerse además que las corrientes están distribuidas de manera uniforme en los conductores.

   - Calcule la densidad de flujo magnético $\vec{B}(r)$ dentro del conductor interno ($r < a$).
   - Calcule la densidad de flujo magnético $\vec{B}(r)$ entre los dos conductores ($a < r < b$).

- Calcule la densidad de flujo magnético $\vec{B}(r)$ dentro del conductor externo ($b < r < c$).
- Calcule la densidad de flujo magnético $\vec{B}(r)$ fuera del cable ($c < r$).

3. ¿A qué es igual la densidad de flujo magnético sobre la línea normal que pasa por el centro de un lazo conductor de dimensiones a y b, que lleva una corriente I?

4. El lazo del problema anterior, está en el mismo plano que un conductor rectilíneo infinito que lleva una corriente I_0. Éste es paralelo a los lados b, con el lado más cercano a una distancia x de él. ¿A qué es igual la fuerza sobre el lazo? ¿Hay torque sobre el conductor rectilíneo? Muestre en un diagrama cuál debe ser la dirección de las corrientes para que la fuerza sea de atracción.

5. En el centro de un solenoide largo, con n espiras por unidad de longitud, se encuentra una bobina corta, formada por N espiras sobre un cilindro de sección S. El eje del solenoide es horizontal y el de la bobina es vertical. La bobina se cuelga en el extremo de una balanza, la que se encuentra en equilibrio cuando no circulan corrientes. Cuando pasa la misma corriente por el solenoide y por la bobina, es necesario añadir un peso P a la balanza, para recuperar el equilibrio. La longitud del brazo derecho de la balanza es L. Calcule la intensidad de la corriente.

6. Un motor unipolar –también llamado motor de disco de Faraday– consiste en un disco conductor sólido de radio a, que puede girar alrededor de un eje colocado a través de su centro y normal al plano del disco. Un terminal de una batería se conecta a este eje y el otro a una escobilla que desliza sobre el borde del disco. Normal al plano del disco hay un campo $\vec{B}$ con densidad de flujo uniforme. Muestre que el torque sobre el disco está dado por $(BIa^2)/2$, donde I es la intensidad de la corriente que circula entre el eje y el borde del disco.

7. La figura 4.22 muestra un tipo de *espectrógrafo de masas*, en el que un ión de carga q y masa m que viaja con velocidad $\vec{v}_0 = \hat{i}v_{0x} + \hat{j}v_{0y}$ entra en una región en la que un campo eléctrico uniforme está en la dirección y y un flujo magnético uniforme en la dirección z.

   - Muestre que la trayectoria del ión es una cicloide y discuta la naturaleza de la trayectoria para diferentes valores de $\theta = \arctan(v_{0x}/v_{0y})$.
   - Muestre que los iones pasarán a través del plano $x - z$, que es el plano de la abertura de entrada, en una dirección paralela a $\vec{v}_0$ en

puntos cuya separación es proporcional a m/q y es independiente de la dirección o magnitud de $\vec{v}_0$.

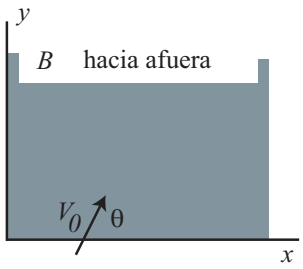

FIGURA 4.22. Esquema de un espectrógrafo de masas

8. El "barrido" en un monitor de televisión con tubo de rayos catódicos se logra desviando el haz de electrones con un campo magnético generado por un conjunto de bobinas desviadoras –en la jerga de los especialistas se dice *deflectoras*– que están colocadas alrededor del cuello del tubo de imagen (Figura 4.23). Los electrones son emitidos por un cañon de electrones con una energía cercana a 3 keV. Después de la desviación son acelerados hasta 20 keV o más.

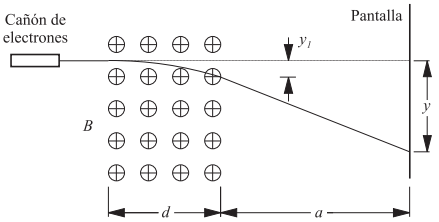

FIGURA 4.23. Sobre el barrido de la pantalla en un monitor de televisión

- Suponga que el campo producido por las bobinas de deflexión es similar al de solenoides muy largos. Plantee qué valores probables tienen las dimensiones de esas bobinas –y el tubo de imagen– y calcule un valor estimado para el valor de B en la región de desviación. Se puede despreciar la aceleración posterior de los electrones.

9. En una fábrica de películas plásticas, una lámina ancha se mueve sobre rodillos con velocidad $\vec{v}$ (Figura 4.24). El rozamiento, durante el proceso, ha hecho que se acumulen sobre ella cargas con densidad σ.

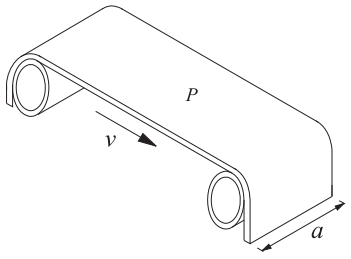

FIGURA 4.24. Geometría para el ejercicio

- Calcule la densidad de flujo magnético B (muy) cerca de la superficie de la lámina en movimiento en el centro de un sector plano (P en la figura).
- Calcule el vector potencial en ese mismo punto, usando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

10. Dos alambres infinitos paralelos llevan corrientes iguales en direcciones opuestas. Un punto P está situado en un plano perpendicular a las dos corrientes, a una distancia $\vec{r}_1$ del alambre que lleva la corriente saliendo del plano y a una distancia $\vec{r}_2$ del alambre que lleva la corriente entrando al plano. Muestre que el potencial vector $\vec{A}$ en el punto P está dado por

$$\vec{A} = \hat{k} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right) \ln \frac{r_1}{r_2}$$

donde $\hat{k}$ es un vector unidad en la dirección normal saliendo del plano. A partir de esta ecuación, ¿cómo es la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ en ese plano?

11. La figura 4.25 es un esquema de un montaje con el que se quiere determinar la rapidez y la masa de un electrón. Un cañón electrónico (no detallado) acelera los electrones a una velocidad de valor v. Los electrones entran, a través de una pequeña abertura, A_1, en un campo magnético uniforme, $\vec{B}$. Después de pasar por las aberturas A_2 y A_3, llegan a una región en la cual dos placas cilíndricas generan un campo eléctrico, de modo que los electrones se mueven en una trayectoria circular de radio R. Los electrones que atraviesan la abertura A_4 son contados en un dispositivo apropiado.

- Explique cómo funciona un cañón electrónico y derive una ecuación que permita calcular el valor de la velocidad de los electrones acelerados en él.

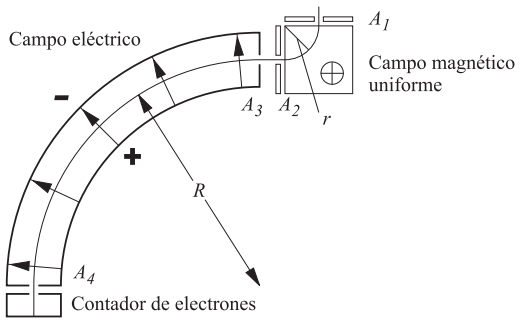

FIGURA 4.25. Diagrama de un posible experimento

- Argumente qué forma de trayectoria tienen los electrones dentro de la región con campo magnético y explique por qué no hay cambios en el valor de la velocidad en todo el montaje mostrado.
- Derive una expresión para la velocidad y para las masas de los electrones que son registrados en el tubo contador (TC).
- Los datos del experimento son $r = 0,5$ m, $R = 2,0$ m, la distancia entre las placas es $d = 0,02$ m, de modo que se puede considerar un campo de valor constante. Entre las placas se aplica un voltaje V_A. El experimento consiste en acelerar los electrones a diferentes velocidades y medir para qué voltajes y campos magnéticos se registran electrones en TC. Un par de valores son $V_A = 10,68$ kV y $B = 7.76$ mT. Calcule los valores resultantes de la rapidez y la masa de los electrones.

12. Una barra conductora tiene forma de paralelepípedo de lados a, b y c, con ($c \ll b \ll a$). La barra se mueve en la dirección de su lado a, dentro de un campo magnético, $\vec{B}$, perpendicular a las caras formadas por a y c. Determine la intensidad del campo eléctrico dentro de la barra y la densidad de carga en las superficies de las dos a y b (Ayuda: considere que en el conductor hay electrones "libres" de moverse y hay iones que permanecen casi inmóviles respecto del sólido).

4.19. Actividades prácticas

- Si ya tiene instalados los programas sugeridos en el capítulo anterior, continúe experimentando con el archivo Erd_Magnet Feld.exp, acerca del comportamiento de una partícula cargada en movimiento dentro de

un campo magnético. También el archivo Magnetfeld.exp, sobre muchas posibles trayectorias de una partícula cargada en un campo homogéneo.

- La experiencia de Oersted es muy fácil de reconstruir: se requiere una pequeña brújula, un trozo de cable de cobre aislado –con plástico– de unos 3 ó 4 m de largo, una batería y cinta adhesiva. Coloque la brújula sobre una mesa y pegue el cable –sobre la brújula– a la mesa en la dirección Norte-Sur. Conecte la batería a los extremos del cable y observe la desviación de la aguja de la brújula. Aleje el cable y repita sus observaciones. Pegue ahora el cable en la dirección Este-Oeste y repita las observaciones. En todos los casos, pruebe cambiando las conexiones del cable con ambos terminales de la batería.

- Con los mismos materiales empleados anteriormente, construya un galvanómetro de tangentes: enrolle el cable en forma de aro, en el que pueda centrar la brújula y asegure el conjunto con cinta adhesiva. Conecte la pila al cable y observe la desviación de la aguja de la brújula desde la posición Norte-Sur. En realidad, se ha construido un instrumento para medir la intensidad de la corriente que circula por el cable. Si dispone de un medidor de corriente, podría hacer un estimado de qué tan sensible es su galvanómetro. Si, además, construye la bobina en dos partes, podría probar las reflexiones formuladas anteriormente al respecto. Si orienta la bobina perpendicular al meridiano magnético, podría experimentar si es posible orientar la aguja en la dirección Sur-Norte. Otro posible resultado es lograr que la aguja gire en un solo sentido, por medio de la interrupción oportuna del paso de la corriente.

- Se puede construir, además, un solenoide: enrolle el cable alrededor de un cilindro –por ejemplo un tornillo de hierro–; cuando termine de enrollar el cable, saque el tornillo. Conecte la batería a los extremos del alambre y observe qué acción tiene la corriente sobre la brújula. Recuerde que sobre la aguja magnética actúa, *todo el tiempo*, el campo magnético de la Tierra. ¿Podría lograrse, en una región limitada, que el campo magnético total sea cero? ¿Cómo lo haría?

- Ahora vuelva a introducir el tornillo en el solenoide. Conecte la batería y observe si la densidad de flujo magnético es mayor que antes; por ejemplo, observe si la fuerza sobre ganchos de papelería es mayor que antes. Usted ha construido un electroimán; en un capítulo posterior estudiaremos la explicación de este fenómeno, en el que las corrientes que producen el campo magnético parecen multiplicarse. Por ahora investigue propiedades como el alcance de las fuerzas, la influencia del número de espiras –o la longitud del cable empleado, el número de baterías, etcétera–.

5

Las contribuciones de Faraday y Maxwell

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores nos hemos ocupado de las fuerzas entre cargas eléctricas que están "en reposo", a través de la definición de un campo eléctrico –y de un potencial escalar–. Dos ecuaciones básicas resumen las propiedades generales del campo electrostático generado por cargas puntuales: la dependencia de las cargas y del inverso del cuadrado de la distancia

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.1}$$

$$rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \tag{5.2}$$

Luego nos ocupamos de las cargas que se mueven como un flujo independiente del tiempo (corrientes eléctricas independientes del tiempo) y de las fuerzas entre ellas. Definimos un campo magnético y un potencial vector. Nuevamente, dos ecuaciones resumen las propiedades generales del campo: la dependencia de las fuentes y la dependencia de las fuerzas –entre elementos de corriente– con el inverso del cuadrado de la distancia

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{5.3}$$

$$rot\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \tag{5.4}$$

Si las cargas y corrientes que generan los campos están localizados en una región del espacio, tomaremos como condiciones de frontera que los campos

son cero "en el infinito". Así podremos encontrar los valores de los campos y de las fuerzas sobre nuestra carga de prueba o nuestra corriente de prueba.

La pregunta que podría surgir es qué tanto se cambia ese esquema cuando tomamos en cuenta cargas o corrientes que tienen variaciones temporales arbitrarias. La sorprendente respuesta es muy poco. Veamos cómo.

5.2. La ley de Faraday

Hasta 1830 la única manera conocida de lograr una corriente eléctrica estacionaria era conectar a los terminales de una batería un alambre por el cual se quería hacer circular la corriente. Aún hoy medimos la capacidad de una batería para mover cargas en términos de medir su "voltaje". Le damos a esta medida el significado de qué trabajo puede realizar la batería sobre una carga, es decir a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería –positivo y negativo, en la convención usual–.

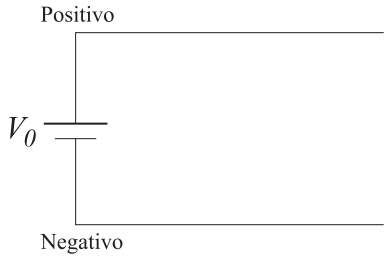

FIGURA 5.1. El símbolo convencional para una batería

Sabemos, además, que ese trabajo por unidad de carga corresponde a la integral de una fuerza por unidad de carga; es decir, el "voltaje" de la pila corresponde a

$$V = \phi(\text{pos}) - \phi(neg) = -\int_{\text{pos}}^{\text{neg}} \vec{\nabla}\,\phi \cdot d\vec{l} = \int_{\text{pos}}^{\text{neg}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (5.5)$$

Donde V es el voltaje de la batería; *pos* y *neg* denotan los terminales y $d\vec{l}$ es un elemento de longitud a lo largo del alambre (Figura 5.1). La ecuación anterior es consecuencia de que el campo se puede derivar de un potencial. Ciertamente, se requiere una diferencia de potencial entre los extremos de un alambre para que un campo "empuje" a las portadoras de carga a lo largo de aquél. Este campo está dirigido del terminal positivo de la batería

al negativo. El campo estará "forzando" a los electrones –cargas negativas– a moverse a lo largo del alambre desde el terminal negativo hasta el terminal positivo. En el sentido convencional se afirma que "una corriente positiva va, en el alambre, del terminal positivo hasta el terminal negativo". En el interior de la batería, por supuesto, la corriente continúa: los electrones no se están creando ni destruyendo en este sistema. El carácter conservativo del campo asegura que la diferencia de potencial –voltaje– entre los terminales de la batería es igual, independiente de los alambres que se les conecten. La cantidad V suele llamarse "fuerza electromotriz", o simplemente f.e.m.[1]

Si consideramos un lazo cerrado de alambre –sin una batería–, se puede afirmar que, si el campo eléctrico es conservativo, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$. Otra manera de expresarlo es que la f.e.m. alrededor de ese lazo es

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{5.6}$$

El campo $\vec{E}$ conservativo hace que la f.e.m. sobre el alambre cerrado sea cero y no circule corriente en él. Todo esto pareciera tener sentido, sobre todo experimentalmente. Pero Michael Faraday[2], hacia 1830, descubrió *que un campo magnético que cambia en el tiempo puede producir corrientes eléctricas en un lazo cerrado*. Es decir, pareciera que tuviéramos un generador *escondido* que imprimiera una f.e.m en el lazo, y que

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0 \tag{5.7}$$

Esto significa, inmediatamente, que el campo eléctrico ya no es conservativo y $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq \vec{0}$. Tendremos que cambiar nuestras formulaciones en relación con el campo eléctrico[3]. Pero si la explicación de los resultados experimentales lo exige, lo haremos.

[1] Esta designación es claramente errada. La magnitud V tiene que ver con que las cargas se muevan y ciertamente es una magnitud electromotriz. Pero no es una fuerza. Esta es una de las persistencias del lenguaje. Debe recordarse que esta designación se originó el el siglo XIX, cuando la palabra *fuerza* se empleaba con muchos significados. Un ejemplo más es la designación *Die Erhaltung der Kraft*, literalmente *La conservación de la Fuerza* a uno de los documentos originales de la hipótesis de conservación de la *energía*, de H. Helmholtz, Berlín, 1847.

[2] Se encuentra en la internet un sinnúmero de páginas sobre el tema *inducción de Faraday*. Se puede recomendar a los interesados una lectura: *Michael Faraday: un genio de la física experimental*, por G. Carmona et al., http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/136/htm/faraday.htm También en libro, de G. Carmona et al., Fondo de Cultura Económica, México, 1995-2003.

[3] Es decir, en relación con las fuerzas sobre cargas.

Faraday, tras el asombroso descubrimiento de Oersted, en que *la electricidad se convertía en magnetismo*, buscaba, guiado por la idea de la unidad de la naturaleza, la forma de lograr lo contrario, es decir, convertir el magnetismo en electricidad. Un resumen muy esquemático, que no sustituye la lectura de las obras que recomendaremos, es este. Para lograr su objetivo, Faraday empleó un núcleo de hierro como soporte de dos bobinas, previendo que tales construcciones intensifican –como en un electroimán– el efecto de las corrientes eléctricas. Se esperaba que el paso de corriente en una de las bobinas produjera el paso de corriente en la otra bobina, lo que sería evidenciado con la conexión de un galvanómetro entre los extremos de esta. Pero, a pesar de que Faraday empleó baterías (según la construcción de Volta) más y más "poderosas", es decir con más y más pares de placas, el efecto de las corrientes constantes no se detectó. El éxito se logró[4] cuando Faraday observó paso de corriente en su segunda bobina en los momentos en que conectaba o desconectaba la fuente de tensión en la primera. Parecía que la creación o la eliminación del campo $\vec{B}$ era necesaria para generar corrientes eléctricas.

Faraday continuó sus experimentos, logrando generar una fuerza electromotriz, manteniendo el campo $\vec{B}$ constante pero moviendo el lazo de alambre o haciendo que un imán pasara a lo largo del eje de una bobina. Finalmente, logró una expresión que resume sus experimentos sobre el proceso que llamó "inducción magnética".

La representación que Faraday tenía de las líneas de fuerza, le llevaba a razonar a través del flujo de campo magnético calculado sobre la superficie S que se apoya en el circuito C, que puede, pero no tiene que, coincidir con el lazo de alambre (Figura 5.2).

Definimos este flujo magnético como

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{5.8}$$

La ecuación (5.8) justifica la designación *densidad de flujo magnético*, que se emplea para B en el SI. La afirmación de Faraday es "alrededor de una trayectoria cerrada en el espacio existe una f.e.m. que es el negativo de la tasa de cambio de flujo magnético sobre una área limitada por esa curva". En nuestro lenguaje vectorial,

$$V = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -K\frac{d\Phi}{dt} = -K\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0 \tag{5.9}$$

[4] Se ha afirmado que accidentalmente, como si una búsqueda con toda esa complicada construcción hubiera sido accidental. Ver Shamos, op. cit, pp.128 a 158. Por supuesto, no fue accidental. Lo que muestra esto es la necesidad de una preparación cuidadosa y una no menos cuidadosa observación de los resultados, cuidándose de ideas preconcebidas.

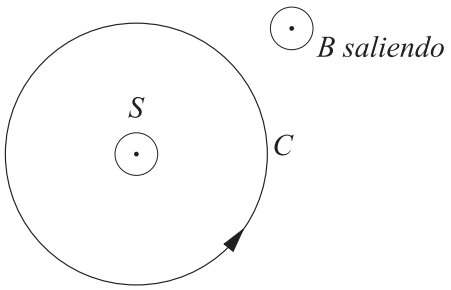

FIGURA 5.2. La geometría para la expresión de Faraday

El lado izquierdo de la ecuación (5.9) puede ser función del tiempo por cambios en $\vec{B}$ o en $\vec{S}$ [5]. En este último caso, los límites de integración serán dependientes del tiempo. Algunas situaciones típicas en que un flujo magnético, sobre una área apoyada en un lazo, varía en el tiempo son

- Un lazo de alambre que gira en presencia de un campo $\vec{B}$ constante.
- La magnitud de $\vec{B}$ cambia o la dirección de $\vec{S}$ cambia por rotación del lazo en relación con $\vec{B}$, en campos no uniformes.
- El lazo de alambre se contrae o expande.

El lado derecho de la ecuación (5.9) puede tener una interpretación en términos del trabajo realizado por $\vec{E}$ cuando trabaja sobre un alambre; la frase anterior debe interpretarse como trabajo del campo sobre las cargas en el alambre, claro está. La f.e.m. se evidencia porque las cargas ganan energía, pero la interpretación de Faraday es que esa f.e.m. existe aún cuando no existan cargas o un alambre conductor en el espacio considerado. Supongamos que la tasa de cambio de flujo magnético es constante –para que la integral de línea de $\vec{E}$ sea constante. De la definición de campo eléctrico, como la fuerza sobre una carga positiva unidad, la integral de línea del campo es el trabajo realizado sobre una carga de prueba cuando atraviesa el camino de integración. Si esta integral no es cero, la carga que se mueve aumenta –o disminuye– su energía. Por eso, hablamos de una f.e.m. Aunque la carga no esté, es práctica común hablar de que hay una f.e.m., aún en una curva imaginaria en el espacio sobre el área en que hay un cambio de flujo magnético.

[5] La constante de proporcionalidad K es, en el SI, la unidad.

5.3. La regla de Lenz

Anteriormente se mencionó que en la ecuación que expresa la afirmación de Faraday,

$$V = -K\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \tag{5.10}$$

la constante K es igual a 1, aunque podría haberse elegido igual a -1. La decisión del signo está basada en un principio: el universo es estable frente a pequeñas perturbaciones[6]. Aplicado al caso especial de la inducción magnética, se llama *regla de Lenz* o *ley de Lenz*. De acuerdo con esta regla[7], la corriente inducida en un lazo cerrado tendrá la dirección que tratará de contrarrestar el cambio en flujo magnético que generó la f.e.m.

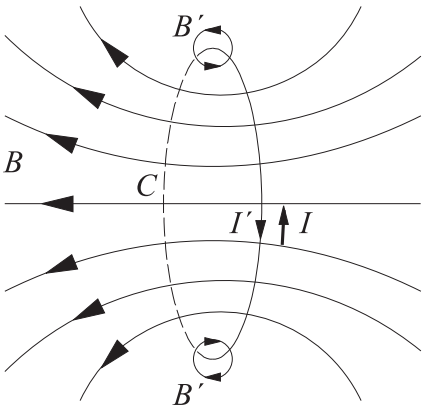

FIGURA 5.3. Sobre la regla de Lenz

Veamos la Figura (5.3) y supongamos que el campo $\vec{B}$ está aumentando en magnitud. La corriente $I´$ en un lazo cerrado circula en el sentido horario –vista desde la izquierda–. Esta corriente generará un campo $\vec{B}´$ que se opone al aumento de flujo magnético. La dirección de esta corriente es opuesta a la dirección de la corriente original, que da lugar a $\vec{B}$; eso significa que la constante es positiva.

Se ha encontrado que la ley de Faraday predice correctamente la f.e.m. generada en lazos de corriente y, como consecuencia, se acepta que el campo inducido existirá aún en ausencia de un lazo conductor sobre la curva C en el espacio. La ecuación (5.10) vale para cualquier lazo cerrado y debe valer

[6] Se denomina a veces principio de LeChatelier y afirma que cualquier cambio genera una reacción que trata de minimizar el cambio.

[7] Enunciada por el físico ruso Heinrich Lenz, en 1834.

para cualquier superficie S apoyada en C. Ahora bien, si el flujo dependiera de cuál de estas superficies tomamos para el cálculo, no valdría la ley, que exige una f.e.m. igual, dependiente del lazo. Conocemos ya la condición para que el flujo de $\vec{B}$ en una superficie S dependa solo de la frontera C de las superficies; se expresa diciendo que el flujo en la superficie cerrada, formada por cualquier par de esas superficies es cero

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{5.11}$$

o también como $div\, \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. No habrá cambios en esta propiedad de las líneas de campo $\vec{B}$.

La expresión para la ley de Faraday, (5.9), puede convertirse en una ecuación de campo empleando el teorema de Stokes. El resultado es

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{5.12}$$

una de nuestras ecuaciones básicas para los campos eléctricos y magnéticos. Esta ecuación describe cómo un campo magnético variable puede generar un campo eléctrico.

Para precisar nuestras ideas, si tomamos la divergencia de los dos lados de la ecuación (5.12), resulta en

$$\frac{d\,\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{dt} = 0 \tag{5.13}$$

y esto exige solo que la divergencia del campo $\vec{B}$ sea constante en el tiempo; es decir, el flujo magnético no tiene porque estar bien definido, pero su derivada temporal sí debe estarlo. En ausencia de monopolos magnéticos, un hecho observacional, los campos deben ser generados por corrientes, de modo que tomaremos $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Esta ecuación no cambia.

5.4. Ejemplos de inducción magnética

Una manera de recordar la regla de Lenz es similar a las reglas ya conocidas de la mano derecha. Dice así: el sentido de la f.e.m. inducida por un flujo magnético que cambia está dado por los dedos de la mano derecha, cuando el pulgar apunta en la *dirección opuesta* a un campo que produciría ese cambio de flujo. Veamos cómo funciona con algunos ejemplos elementales.

Para el primero (Figura 5.4) supongamos que tenemos dos lazos de alambre planos, paralelos entre sí y separados por una pequeña distancia axial (ver

figura). El lazo de la izquierda se puede conectar a una fuente de f.e.m. de modo que exista una corriente constante en él y el de la izquierda es un simple lazo cerrado.

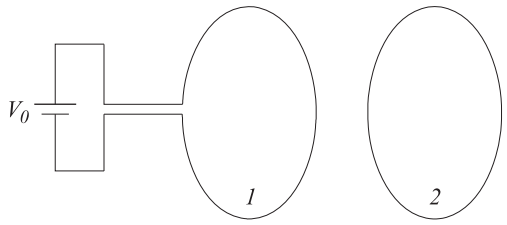

FIGURA 5.4. Sobre un ejemplo de inducción magnética

El primer lazo produce un campo $\vec{B}$ en el espacio circundante, resultando en un flujo neto sobre el área del segundo; si este flujo no cambia, no habrá f.e.m. inducida. Ahora acerquemos el primer lazo al segundo: el flujo aumentará porque el campo es más intenso. Usando la regla de la mano derecha enunciada en el párrafo anterior, la f.e.m. inducida y la corriente que circula en el segundo lazo estarán en el sentido opuesto a la corriente en el primero. Las dos corrientes, con sentido opuesto, se repelerían y se predice una fuerza sobre el primer lazo, oponiéndose al movimiento. Si en la ley de Faraday no hubiera un signo menos, habría una fuerza de atracción entre los lazos. ¿Qué muestra el experimento[8]? La primera predicción y no la segunda es apoyada por la práctica.

En otro ejemplo (Figura 5.5), consideremos un alambre doblado en forma de "U" sobre el que descansa un alambre cruzado que está libre de deslizarse.

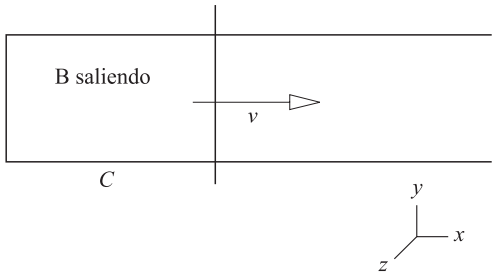

FIGURA 5.5. Sobre otro ejemplo de inducción magnética

Normal al plano de la "U" hay un campo $\vec{B}$ de magnitud uniforme. Por medio de una cuerda se impulsa el alambre cruzado hacia la derecha de la

[8] Es una experiencia que aparece en numerosas demostraciones de física.

figura. El camino cerrado formado por la "U" y el alambre cruzado estará aumentando su área y el flujo sobre esa área aumentará, resultando en una f.e.m. inducida en sentido anti horario. El alambre cruzado conducirá ahora una corriente eléctrica y habrá una fuerza sobre él que se opone a la fuerza que lo está moviendo hacia la derecha. Nuevamente, la ausencia de un signo menos en la ley de Faraday predeciría una fuerza "ayudando" a la fuerza original.

Un simple lazo de alambre girando en un campo magnético uniforme es un ejemplo de generador eléctrico elemental.

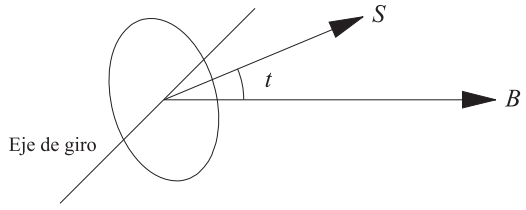

FIGURA 5.6. Esquema de un generador elemental de corriente

La figura 5.6 muestra una vista de la situación. Consideremos que el lazo gira con velocidad angular ω alrededor de un eje diametral –el eje perpendicular a la dirección del campo $\vec{B}$–. En el instante mostrado, el vector área del lazo, $\vec{S}$ hace un ángulo θ con el campo. Si empezamos a contar el tiempo cuando el vector área y el campo son paralelos, $\theta = \omega\, t$. La ley de Faraday puede escribirse como

$$V = -\frac{d}{dt}(B\, A\, \operatorname{sen}\omega\, t) \tag{5.14}$$

Puesto que la f.e.m. en este lazo es una función del seno del ángulo de rotación, se invierte cada media vuelta. Para conectar este generador al exterior, se inventaron, pocos años después del descubrimiento, sistemas de escobillas, que aún están en uso en algunos motores. El lazo de alambre no está cerrado dentro del generador; sus extremos están conectados a dos anillos que giran con el lazo y dos contactos deslizantes, las escobillas, conectan el generador con el exterior. Para evitar que la f.e.m. cambie de signo, se inventaron sistemas un poco más complicados, dividiendo los anillos en sectores (Figura 5.7), para que funcionen como "conmutadores" mecánicos, logrando que una de las escobillas esté siempre conectada al terminal positivo y la otra al terminal negativo del lazo[9].

[9] Para un análisis de la conversión de energía mecánica en eléctrica en este generador, deberemos esperar hasta estudiar con más detalle el fenómeno de conducción eléctrica en los materiales.

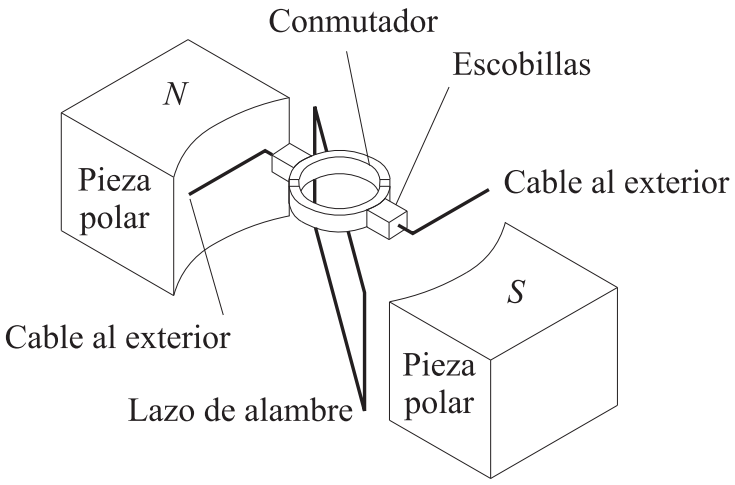

FIGURA 5.7. El *generador*, con un *conmutador* mecánico

Nuestro análisis del generador ha supuesto un campo uniforme, pero un análisis más cuidadoso muestra que, cuando el generador suministra corriente a una carga externa, tal suposición no es válida. La corriente, que hemos supuesto tiene un máximo para $\operatorname{sen}\theta = \pm 1$, también producirá un campo magnético que, en ese instante, será perpendicular al campo "externo". De esa manera el flujo magnético neto en el lazo es la suma del flujo externo y del flujo producido por la corriente y la tasa de cambio de este flujo no es igual al que usamos en la ecuación (5.14). La desviación de ese supuesto será una función de la corriente. En especial, cuando el generador está construido con varias bobinas orientadas en forma simétrica alrededor del eje y con un mayor número de segmentos en el conmutador, el flujo producido por las bobinas introduce dificultades con chisporroteo entre los segmentos. Las escobillas se colocan de modo que se mueven de un segmento al siguiente en el momento en que la diferencia de voltaje entre ellos es mínima o cero. De lo contrario hay pérdida de eficiencia y quemaduras en el conmutador[10].

[10] Para evitar muchos de estos problemas se puede construir el conjunto "al revés", es decir, dejando las bobinas fijas y haciendo que el campo magnético gire, generado por un imán permanente o por un electroimán. Así, por ejemplo, están construidos los *alternadores* en los automóviles y algunos motores eléctricos. Para un ejemplo elemental, se puede consultar la página www.amasci.com/amateur/coilgen.html. A quien lo haga, se recomienda considerar son cuidado el lenguaje empleado y criticarlo. Se recomienda, además, consultar www.sparkmuseum.com/motors.htm.

Para recuperar las condiciones inicialmente supuestas, los generadores se modifican con un campo magnético adicional al constante inicial (Figura 5.8), generado por electroimanes, montados de manera que su campo es normal a ese campo inicial.

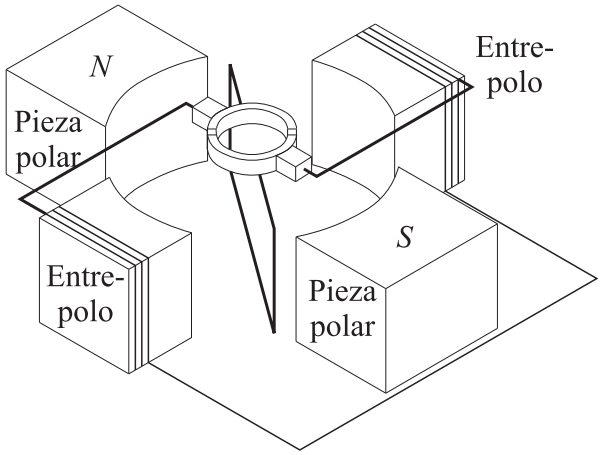

FIGURA 5.8. El generador, con *corrección* del campo

En esos electroimanes las bobinas están conectadas en serie con la bobina que gira a través del conmutador, de modo que el campo generado en ellos es máximo cuando la corriente es máxima y está dirigido opuesto al campo de la bobina misma. Por medio de una construcción apropiada, el campo de la bobina se puede prácticamente cancelar y se recuperan las condiciones del análisis inicial[11].

5.5. ¿Un potencial eléctrico escalar?

Se mencionó ya un cambio necesario en nuestras ecuaciones. Podemos describir el campo eléctrico en términos de un potencial escalar, es decir $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, pero solo cuando $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$. Cuando estamos describiendo situaciones en que el flujo magnético Φ_B cambia, el rotacional del campo eléctrico no es cero; en otras palabras, el campo eléctrico ya no es conservativo. ¿Tendremos que abandonar el concepto de potencial escalar? Afortunadamente no; aún es posible definir un potencial escalar con sentido físico similar, como sigue.

[11] Se recomienda consultar www.reliance.com/mtr/mtrthrmn.htm, a pesar de las dificultades ocasionadas por las unidades empleadas en esta página.

Comencemos con la ecuación (ley de Gauss) para la divergencia de $\vec{B}$; ya conocemos que es válida para campos constantes y variables

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.15}$$

Sabemos también que el campo magnético puede expresarse como el rotacional de un potencial vector

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{5.16}$$

Coloquemos ahora esta expresión en la expresión diferencial para la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} \tag{5.17}$$

Esta expresión puede reorganizarse, intercambiando las derivadas, como

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{5.18}$$

Sabemos que un vector cuyo rotacional es cero, puede expresarse como gradiente de un potencial escalar, es decir

$$\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}\phi \tag{5.19}$$

o también

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.20}$$

¡Esta es una ecuación muy interesante! Podemos interpretarla como expresión de que el potencial escalar ϕ describe los campos conservativos generados por cargas eléctricas y que el potencial vector describe el campo eléctrico que no es conservativo y depende del tiempo.

5.6. La corriente de desplazamiento

La difusión y aceptación de los trabajos de Michael Faraday significaron una revolución en la física: ya no se debería hablar de electricidad y magnetismo por separado sino de electromagnetismo. Faraday lo logró a través de experimentos cuidadosamente realizados, pero sus explicaciones eran de tipo más bien cualitativo. Faltaba una revolución similar en la teoría, sobre todo con apoyo de las matemáticas.

Esta revolución teórica la completó James C. Maxwell, sobre la base de los trabajos de muchos otros. Uno de los cambios que introdujo Maxwell fue la formulación diferencial. Antes de 1864 las leyes del electromagnetismo se escribían en forma integral. La primera se formulaba como "el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada dividida por ϵ_0". La segunda decía "el flujo de campo magnético sobre una superficie cerrada es cero". La tercera, "la fuerza electromotriz generada en una curva cerrada es igual a menos la tasa de cambio del flujo de campo magnético sobre la superficie limitada por esa curva" y la cuarta, la ley de Ampère, "la integral de línea del campo magnético alrededor de una curva cerrada es igual a la corriente eléctrica total dentro de la curva multiplicada por μ_0". La primera contribución de Maxwell fue mostrar que esas leyes se pueden formular como ecuaciones diferenciales[12]. Recordemos que nuestras versiones diferenciales de las ecuaciones tienen, hasta ahora, el siguiente aspecto:

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.21}$$

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{5.22}$$

$$rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} \tag{5.23}$$

$$rot\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \tag{5.24}$$

¡La segunda (y más importante) contribución de Maxwell fue mostrar que estas ecuaciones deben ser corregidas!

El lector alerta habrá notado ya algo extraño en el conjunto de ecuaciones (5.21) hasta (5.24). Según estas, en primer lugar, los campos magnéticos variables generan campos eléctricos, pero los campos eléctricos variables no alteran los campos magnéticos. En segundo lugar, hay un problema asociado con la ley de Ampère: para verlo en detalle, escribámosla en forma integral

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \tag{5.25}$$

Esto afirma que "la integral de línea del campo magnético alrededor de una curva cerrada C es igual a la corriente eléctrica total dentro de la curva multiplicada por μ_0"; la dificultad está en que el flujo de cargas no está bien definido, en general.

[12] Con eso logró una descripción de causas de campos y sus relaciones que dependen de cada punto, a diferencia de la descripción mediante integrales, que incluye acciones no locales. La importancia de este cambio podrá entenderse con lo que sigue en este capítulo y en el siguiente.

Un ejemplo interesante es el de una esfera de un material radiactivo, que estaría emitiendo partículas cargadas, por ejemplo, electrones. Esa situación representa, desde el punto de vista de la generación de campos magnéticos, una densidad de corriente radial hacia afuera. ¿A qué será igual el flujo de la corriente sobre un círculo máximo de esta esfera? Si tomamos una de las posibles orientaciones de esa línea, la corriente sale en dos posibles direcciones y su flujo está mal definido (o es cero). ¿Qué dirección tiene el campo magnético? ¿Puede definirse un campo magnético?[13]

Para poder definir bien el flujo de la densidad de corriente, la integral de $\vec{J}\cdot d\vec{S}$ debería depender del borde C de la superficie S, pero no de los detalles de S. Esto solo es posible si la densidad de corriente cumple $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$. Lo cual solo es cierto para corrientes que no dependen del tiempo. Veamos esto en detalle (Figura 5.9).

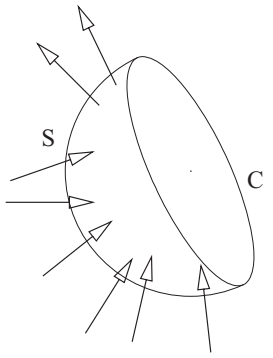

FIGURA 5.9. Acerca del flujo de corriente en una superficie

Consideremos el flujo de $\vec{J}$ sobre una superficie cerrada S que encierra un volumen V. Este flujo será equivalente a la tasa a la que la carga eléctrica fluye a través de S. Pero tenemos muchas razones (experimentales y teóricas) para creer que la carga se conserva, que no hay procesos de creación o destrucción (neta) de cargas. Así pues, la tasa de flujo de carga a través de S será igual a la tasa de disminución de la carga contenida en el volumen V. Así,

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3\vec{r} \tag{5.26}$$

Empleando el teorema de Gauss, obtendremos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{5.27}$$

[13] Ver Feynman et al., op. cit., volumen II, sección 18-2.

De modo que la divergencia de la densidad de corriente es cero solo en el estado estacionario, cuando $\partial \rho / \partial t \equiv 0$.

El problema con la ley de Ampère se ilustra con el siguiente ejemplo, muy famoso. Consideremos un alambre recto muy largo, interrumpido por un par de placas conductoras paralelas (Figura 5.10). Supongamos que C es un lazo que rodea al alambre. En el caso que no depende del tiempo, la interrupción simplemente no permite el paso de la corriente eléctrica y no habrá campo magnético generado; no habrá dificultad con la ley de Ampère. Por tanto en la situación dependiente del tiempo, una corriente existe transitoriamente, realizando la separación de cargas en las dos placas, de modo que habrá un campo magnético transitorio. Durante este tiempo, la integral de línea del campo magnético sobre C será diferente de cero. De acuerdo con la ley de Ampère, la corriente a través de una superficie apoyada sobre C debe ser, también, diferente de cero.

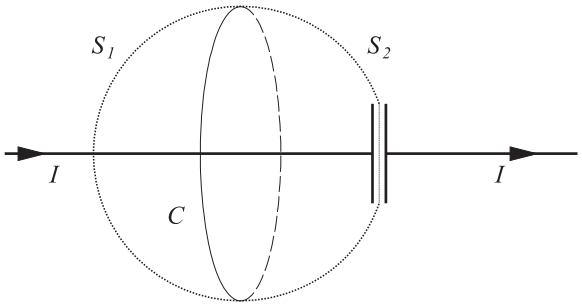

FIGURA 5.10. Acerca de una dificultad con la ley de Ampère

Podríamos considerar dos superficies; una de ellas, S_1, es atravesada por el alambre. El cálculo de la integral de $\vec{J}$ sobre esta superficie no presenta problema, porque la intensidad de corriente a través de ella no es cero. Sin embargo sobre una segunda superficie, S_2, que pasa por el espacio entre las dos placas, y por tanto no es atravesada por el alambre, sí lo hay. La corriente en esta superficie es cero. Los flujos son distintos, aunque las dos superficies están apoyadas en la misma curva C. ¿Estará fallando la ley de Ampère? Veamos algún detalle para buscar una arreglo satisfactorio.

Observemos que, aunque S_2 no intercepta la corriente eléctrica, sí está en una región en que hay un campo eléctrico cambiante, debido a las cargas que se están acumulando en las placas. Pudiera ser que la adición de un término proporcional a ese cambio de campo, $\partial \vec{E} / \partial t$ al lado derecho de la ecuación (5.24) "arreglara" la ley de Ampére. Ensayemos esa idea. Así fue, en resumen, como Maxwell razonó.

Escribiremos ahora, en lugar de la ecuación (5.24).

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \lambda \, \frac{\partial \, \vec{E}}{\partial \, t} \tag{5.28}$$

El factor λ es un factor que hemos de averiguar. Queremos que el flujo de los términos en el lado derecho de la ecuación (5.28) esté bien definido a través de cualquier curva C; debiera depender solo de C y no de la superficie S sobre el que está siendo evaluado. Para eso, la divergencia del lado derecho de la ecuación debe ser cero. Esta es, además, una condición necesaria para que la ecuación sea consistente, porque la divergencia del lado izquierdo de la ecuación ya es cero. Tomemos, entonces, la divergencia de (5.28) y encontramos que

$$0 = \mu_0 \, \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \lambda \, \frac{\partial \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial \, t} \tag{5.29}$$

Pero sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.30}$$

Combinando las dos ecuaciones, llegamos a

$$\mu_0 \, \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\lambda}{\epsilon_0} \, \frac{\partial \, \rho}{\partial \, t} = 0 \tag{5.31}$$

como vimos arriba, una ecuación que expresa la conservación de la carga es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \, \rho}{\partial \, t} = 0 \tag{5.32}$$

Las dos ecuaciones anteriores son compatibles si $\lambda = \epsilon_0 \, \mu_0$. Modificaremos, en consecuencia, la cuarta ecuación de Maxwell en la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \epsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial \, \vec{E}}{\partial \, t} \tag{5.33}$$

La divergencia del lado derecho de esta ecuación (5.33) resulta como una consecuencia de la conservación de la carga. El término adicional fue denominado por Maxwell *corriente de desplazamiento*[14]. Este término corrige el problema con la ley de Ampère, aunque no es una corriente. Maxwell logró resolver una inconsistencia en las ecuaciones del electromagnetismo. El término adicional estaría relacionado con la generación de campos magnéticos por campos eléctricos que varían en el tiempo; Faraday, el experimentador,

[14] Más tarde volveremos sobre el porqué de ese nombre.

no había observado tales fenómenos. ¿Cómo se justifica la adición de un término a una ley de la física?

La respuesta podría ser que el efecto no se observaba en los experimentos de Faraday, pero se observaría en situaciones realizables más tarde. Veamos por qué, calculando su orden de magnitud y estimando la posibilidad de medirlo. Primero, consideremos un experimento en que un campo magnético 100 veces más intenso que el de la Tierra, es decir 1×10^{-2} tesla, que se puede generar con un par de bobinas de Helmholtz, se conecta o desconecta súbitamente, es decir en $0,1$ segundo, y que tenemos en esa región un lazo de alambre que encierra un área de $0,01$ m^2. ¿Qué valor tendrá la f.e.m. inducida en esa curva? La ley de Faraday dice que

$$V = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \approx \frac{B\,S}{\Delta\, t} \tag{5.34}$$

Colocando los valores supuestos anteriormente –arbitrarios, pero razonables–, obtendremos que la f.e.m. es $V \approx 0,001V$, lo que resulta fácilmente medible en la actualidad y posible de medir en un laboratorio de comienzos del siglo XIX.

Veamos ahora la inducción de campos magnéticos por campos eléctricos variables. Supongamos que nuestro aparato experimental tiene dimensiones similares al anterior; es un par de placas metálicas de área $0,01$ m^2, separadas por $0,01$ m y con una diferencia de potencial de $100\ V$. El campo eléctrico tendrá un valor de 10^4 V/m. Supongamos que las placas se conectan entre sí y la diferencia de potencial desaparece en $0,1$ s. Encontraremos la magnitud del campo magnético inducido integrando la ecuación de Ampère-Maxwell sobre un cuadrado de lado $l = 0,1\,m$[15].

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial}{\partial\, t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{5.35}$$

¿Qué tan grande será ese campo magnético? Si el campo cae de un valor E a cero en un tiempo $\Delta\, t$ la ecuación anterior se puede aproximar por

$$4 \times l\, B = \epsilon_0\, \mu_0\, \frac{E\, l^2}{\Delta\, t} \tag{5.36}$$

Colocando en esta fórmula los valores conocidos y los supuestos, encontraremos que $B \approx 10^{-13}$ T. Nuestra tecnología moderna nos permite detectar campos magnéticos del orden de 10^{-9} T, de modo que es comprensible que

[15] Recuérdese que un rotacional siempre está asociado, por definición, con una integral de línea.

Faraday no notara el fenómeno en 1830, cuando sus cambios en los campos prácticamente eran realizados con la mano.

El efecto comienza a ser notorio cuando consideramos tiempos de cambio mucho más pequeños. Por ejemplo, en un horno de microondas se dan cambios en los campos eléctricos en tiempos de $\Delta t \approx 10^{-9}$ s. Los campos magnéticos inducidos son ya significativos. Eso significa que si los campos eléctricos oscilan rápidamente, la inducción de campos magnéticos es un efecto observable. En los fenómenos de radiación de campos, es ya muy importante. La inclusión del término de corriente de desplazamiento tuvo consecuencias vitales para el desarrollo de nuestra sociedad, como veremos.

Ahora podemos escribir las ecuaciones de Maxwell, uno de los propósitos principales de nuestra construcción de la teoría. Son

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.37}$$

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{5.38}$$

$$rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} \tag{5.39}$$

$$rot\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t} \tag{5.40}$$

Con estas cuatro ecuaciones diferenciales se pretende tener una descripción teórica completa del comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Recordemos su origen experimental. La primera dice cómo son generados los campos eléctricos por las cargas. La segunda dice que no se han encontrado cargas magnéticas[16]. La tercera expresa la inducción de campos eléctricos por los campos magnéticos que cambian y la cuarta describe cómo los campos magnéticos están generados por corrientes y por campos eléctricos que cambian. Es muy importante que ahora se describe la inducción de campos eléctricos por los campos magnéticos que varían en el tiempo y viceversa. Estas ecuaciones resumen casi cien años de experimentación, desde Coulomb hasta Ampère y Faraday. El nombre que llevan, de Maxwell, es merecido: fue Maxwell quien las completó e impulsó su aplicación –en forma de componentes, el uso del cálculo vectorial fue muy posterior–.

El modesto origen de las ecuaciones, recordemos, fue a través de experimentos con aparatos movidos a bajas velocidades, en tiempos comparables con segundos o, aún décimos, de segundo. Resultará notable que la extrapolación de estas ecuaciones a procesos que ocurren con mayor rapidez, en

[16] Además, lleva implícita una dependencia de las fuerzas con el inverso del cuadrado de la distancia.

tiempos 10 millones de veces más cortos -o menores aún- resulte en predicciones exitosas. Naturalmente, es posible que ninguno de los creadores de la teoría hubiera visto dónde están los límites. Nosotros, en el siglo XXI, los vemos claramente: en los procesos de generación y absorción de los campos. ¡Pero esa es una historia diferente! Para explicar estos efectos se emplea, desde el comienzo del siglo XX, la concepción de la energía transmitida en paquetes, denominados *fotones*[17].

Resulta sorprendente conocer los fenómenos que iniciaron esa historia: uno de ellos es la *radiación de un cuerpo negro* (que en realidad significa la radiación emitida por un objeto como nuestro Sol). Su espectro de radiación, es decir la distribución de energía en su emisión, como función de la frecuencia o de la longitud de onda, no se puede explicar en términos de la física conocida hasta el final del siglo XIX. Hacia 1900, M. Planck, buscando una explicación, encontró una que, infortunadamente, hacía necesario postular la emisión de radiación en cantidades discontinuas de energía. Para su fortuna, un par de experimentadores habían logrado realizar una medición confiable. Para su gloria, la extraña explicación fue adoptada y extendida por otros, entre ellos Einstein, algunos años más tarde.

5.7. Las ecuaciones de Maxwell y los potenciales

Anteriormente se mostró que se pueden derivar los campos eléctrico y magnético de los potenciales escalar y vector

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t} \tag{5.41}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{5.42}$$

La definición de esos potenciales no es única, pero podemos restringirla, adoptando la siguiente convención

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon_0\,\mu_0 \frac{\partial\,\phi}{\partial\,t} \tag{5.43}$$

$$\phi(\vec{r}) \to 0 \qquad \text{cuando } |\vec{r}| \to 0 \tag{5.44}$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden combinarse con la primera de las ecuaciones de Maxwell para obtener

$$\epsilon_0\,\mu_0 \frac{\partial^2\,\phi}{\partial\,t^2} - \nabla^2\,\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.45}$$

[17] Se puede consultar la página //nobelprize.org/physics/laureates/1918/planck-bio.html para una interesante historia acerca del origen de esta concepción.

La cuarta ecuación de Maxwell nos lleva además a

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \, \vec{J} - \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \, \vec{\nabla} \phi}{\partial \, t} - \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^{\, 2} \vec{A}}{\partial \, t^2} \quad (5.46)$$

o, también,

$$\epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^{\, 2} \vec{A}}{\partial \, t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \, \vec{J} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \, \phi}{\partial \, t} \right) \quad (5.47)$$

La ecuación anterior incluye los potenciales escalar y vector. Pero se simplifica con nuestra convención (5.43): el último término se hace cero. Con ello, las ecuaciones de Maxwell (que expresan la física de los campos electromagnéticos) se convierten en las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^2 \, \phi}{\partial \, t^2} - \nabla^2 \, \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.48)$$

$$\epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^{\, 2} \vec{A}}{\partial \, t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \, \vec{J} \quad (5.49)$$

En el estado estacionario, es decir si las derivadas con el tiempo se anulan, $\partial / \partial \, t = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a ecuaciones de Poisson, que ya sabemos resolver (en principio). Cuando se deben añadir los términos dependientes del tiempo, son ecuaciones más complicadas, que predicen un cúmulo de nuevos fenómenos. Son, en realidad, ecuaciones de onda tridimensionales con la fuente de las ondas incluida. Pronto volveremos sobre este importante asunto.

5.8. Temas para discusión

- En el capítulo anterior se discutió el motor de disco de Faraday. Si, en lugar de enviar una corriente I por el disco, se conectan el eje y el borde del disco con un amperímetro y se aplica torque para hacer girar el disco, el dispositivo se convierte en un generador de corriente. Analice esta situación; en especial, identifique un lazo cerrado en el que se pueda identificar un cambio en el flujo magnético, asociado con la f.e.m. inducida y con la corriente.

- En un campo magnético homogéneo se coloca un anillo de alambre, de modo que puede girar en torno a un diámetro, que es perpendicular a la dirección del campo $\vec{B}$. Si el valor del campo *comienza a crecer*, diga cuáles son las posibles posiciones de equilibrio mecánico del anillo y cuál de estas es estable. ¿Cambiarán estas posiciones si el valor del campo *decrece*?

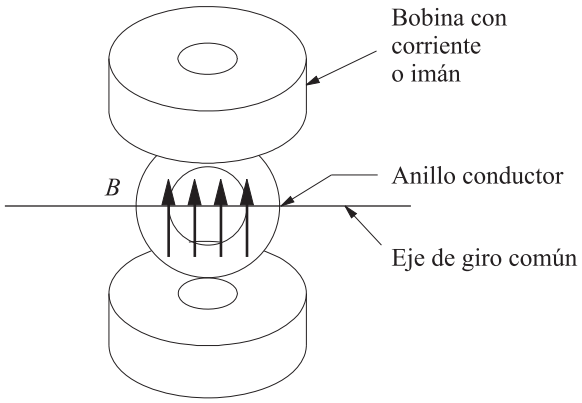

FIGURA 5.11. Esquema para un motor *de inducción*

- Un lazo conductor *cerrado* se monta sobre pivotes entre los polos de un imán (Figura 5.11). Los polos del imán se montan de manera que pueden girar alrededor del mismo eje que el lazo, aunque no hay conexión mecánica entre los polos y el lazo.

  La dirección de $\vec{B}$ es perpendicular al eje de giro. A partir de la regla de Lenz, prediga cómo se comporta el lazo conductor cuando el campo se gira. La discusión puede llevar a la explicación de cómo funciona el motor de inducción, uno de los más empleados en la industria.

- Uno de los experimentos de Faraday consistió en acercar un alambre que conduce una corriente a otro alambre, paralelo al primero. Se indujo una corriente en el segundo alambre, en la dirección opuesta a la de la *corriente inductora*. Cuando alejó el primer alambre, Faraday observó que la *corriente inducida* tenía la dirección de la *corriente inductora*. ¿Podría usted explicar esto en términos de la tasa de cambio de un flujo magnético en un lazo cerrado?

- En otros libros encontrará usted enunciados de la ley de Faraday y de la regla de Lenz que, verbalmente, son diferentes de las que hemos adoptado; la descripción física que resulta, por supuesto, es la misma. Discuta con sus compañeras(os) las posibles ventajas y desventajas de unas y otras expresiones.

- Un lazo rectangular de alambre está situado en un plano con un conductor recto muy largo, por el cual pasa una corriente I (Figura 5.12). Los lados AD y BC son paralelos al conductor recto. Se dispone de un aparato –aunque en el diagrama no se muestra– que mide la cantidad de carga que

circula por el lazo. Este puede ser cambiado de la posición mostrada a la posición representada por las líneas punteadas de dos maneras: primero, desplazándolo paralelamente a sí mismo; segundo, girándolo alrededor del lado BC en 180^o. ¿En qué caso es mayor la carga movida?

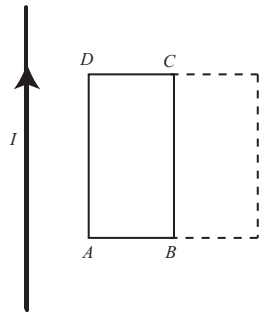

FIGURA 5.12. Geometría para un tema de discusión

5.9. Ejercicios

En los siguientes ejercicios se podrán tener situaciones en los cuales hay un campo $\vec{B}$ *externo* que produce flujos magnéticos en diversos dispositivos. En todos ellos podrá circular una corriente eléctrica y esta, a la vez, podría modificar el campo. Se tomará la magnitud de estos campos *inducidos* como despreciable, frente al primero.

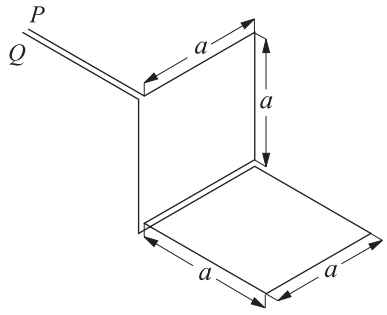

FIGURA 5.13. Geometría para un ejemplo de inducción

1. Un alambre se dobla de manera que forma dos lazos cuadrados, como muestra la figura 5.13, de lados a y paralelos a los planos $y - z$ y $x - z$.

En la región alrededor de los lazos hay una densidad de flujo magnético dado por

$$\vec{B} = (\hat{i}\cos 30^o + \hat{j}\,\text{sen}\,30^o)(bt + c)$$

El dispositivo podría provocar desplazamientos de carga en el alambre, excepto que se aplica una diferencia de potencial entre los extremos P y Q para evitarlo. Calcule la magnitud y la polaridad de esta diferencia de potencial.

2. Una barra metálica desliza sobre dos rieles paralelos a una distancia d, como muestra la figura (5.14).

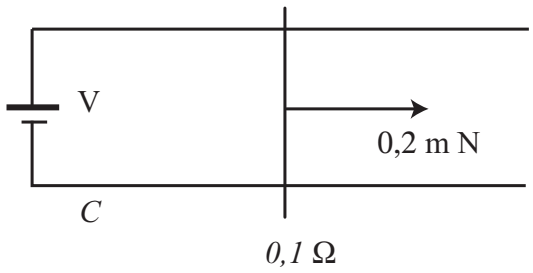

FIGURA 5.14. Esquema para el segundo ejercicio

- Una batería, conectada a los rieles, asegura que circule una corriente de 5 A en la barra. Las mediciones muestran que la fuerza aplicada a la barra es igual a 2×10^{-4} N. ¿Por qué?
- La batería ahora se desconecta y se reemplaza por un conductor. Los rieles y el conductor tienen resistencia despreciable, pero la barra metálica tiene una resistencia entre los contactos de $0,1$ Ohm. Determine la corriente en la barra metálica cuando se mueve perpendicular a sí misma y en contacto con los rieles, con velocidad de 100 m/s.
- Entre los extremos de los rieles se conecta ahora una batería con f.e.m. constante V_B. La velocidad de la barra ahora se aproxima a un valor final constante. ¿A qué es igual ese valor? ¿A qué es igual la corriente cuando esa velocidad terminal se alcanza?

Ayuda: como se verá en un capítulo posterior, se puede suponer que en la barra se cumple que f.e.m.= resistencia $\cdot$ intensidad de la corriente.

3. La figura 5.15 muestra una situación experimental, en que por debajo del plano horizontal h hay un campo magnético $\vec{B}$ de intensidad $1,60$

T, de dirección horizontal. Por encima de ese plano se encuentra un lazo conductor rectangular rígido, de ancho $a = 0,40$ m y muy largo. El plano definido por el lazo es vertical. La masa del lazo es $m = 0,200$ kg.

- El lado inferior del lazo se baja hasta entrar en el campo magnético, aunque los contactos A y B aún están por fuera de él. Se conecta una fuente de corriente entre los contactos. ¿Para qué valor y dirección de la corriente actúa una fuerza neta cero sobre el lazo?

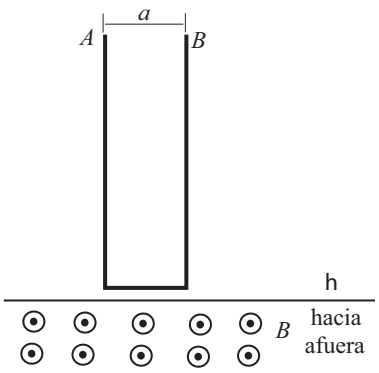

FIGURA 5.15. Un experimento de inducción magnética

- El lazo se mueve ahora con velocidad constante $v = 2,0$ cm/s hacia dentro del campo magnético. ¿Qué voltaje se inducirá entre los contactos A y B?
- Ahora se deja el lazo en reposo, ligeramente por encima del plano h, y luego se deja caer libremente. Calcule la dependencia del voltaje inducido como función del tiempo.
- Se repite el experimento anterior con una variación: se cierra el circuito del lazo. La resistencia total es de $R = 5$ Ohm. Describa cualitativamente cómo varían la aceleración y la velocidad del lazo, mientras este no está totalmente dentro del campo $\vec{B}$. Calcule la velocidad terminal v_0.

4. La figura 5.16 muestra una región en la cual la densidad de flujo magnético, $\vec{B}$, está confinado a un volumen cilíndrico de radio $r = 0,05$ m y es homogéneo en esta región; esta es una representación idealizada del campo en un electroimán para investigación. El campo decrece en magnitud a una tasa constante de 1×10^{-2} T/s.

- Si se colocan electrones (inicialmente en reposo) en los puntos A, B y C, donde $r = 0,05$ m, calcule las aceleraciones instantáneas que van a experimentar.
- Si el campo inicial tenía un valor $B = 0,35$ T y se colocan en las posiciones C y C', simétrica de C respecto del eje que pasa por A, dos partículas con carga $q = 1 \times 10^{-6}$ C y masa $m = 1 \times 10^{-2}$ kg, ¿qué momento angular adquirirán éstas? ¿De dónde salió ese momento angular? ¿No se conserva el momento angular?

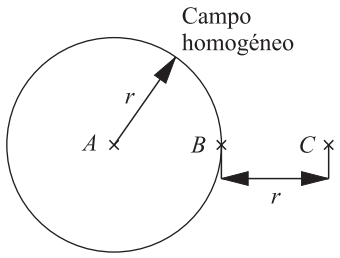

FIGURA 5.16. Esquema de una inducción en un electroimán

5. Un lazo circular (1) de radio a lleva una corriente I constante (Figura 5.17). Coaxial con él, pero con centro a distancia r, ($a \ll r$), se coloca otro lazo (2) de radio igual, abierto.

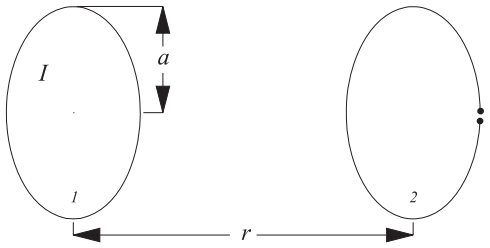

FIGURA 5.17. Sobre un cálculo de inducción magnética

El lazo (2) se hace ahora girar alrededor de uno de sus diámetros. ¿A qué es igual la f.e.m. generada?

6. Un fluxómetro, o flujómetro, emplea la inducción para encontrar una medida de campos magnéticos. Una bobina de alambre corta, de área conocida (S), resistencia conocida (R) y con muchas vueltas (N) se introduce en la región en que se va a determinar la intensidad de flujo

magnético. Luego se extrae de allí, se gira por 180^o alrededor de uno de sus diámetros y se vuelve a introducir en el campo magnético. Los extremos del alambre van a un instrumento que indicará la carga transportada integrando la corriente generada por la f.e.m. inducida.

- Halle una expresión para el flujo magnético en la bobina antes de sacarla. Calcule el flujo después de que la bobina regresa al campo magnético. Si el proceso de extracción y de reintroducción duran 1 s cada uno, haga un diagrama que muestre cómo varía la f.e.m. inducida como función del tiempo.

- Empleando la relación entre f.e.m. y la intensidad de corriente mencionada antes, muestre en su diagrama cómo varía la intensidad de la corriente en la bobina como función del tiempo.

- Muestre, en su diagrama, como varía la carga transportada –integral de la corriente– como función del tiempo. ¿Dependerá de qué tan rápido se realiza la operación del flujómetro?

- Realice el cálculo de la carga transportada para $B = 0,5$ T, $N = 1.000$, $S = 5 \times 10^{-4}$ m^2, $R = 1.000$ Ohm.

7. El inductor terrestre es un aparato que se puede emplear para medir las componentes del campo magnético terrestre. Un modelo de él consiste en una bobina corta, con $N = 1.000$ vueltas, área $S = 4 \times 10^{-2}$ m^2 y una resistencia $R = 100$ Ohm. La bobina puede ser girada por un ángulo de 180^o alrededor de uno de sus diámetros y este eje puede orientarse a voluntad, por ejemplo horizontal y en el meridiano magnético. En los extremos del alambre se instala también un instrumento para medir la carga transportada.

   - La densidad de flujo magnético B_T de la Tierra tiene una magnitud cercana a $0,5 \times 10^{-4}$ T. Calcule el valor de la carga transportada en un giro del inductor terrestre, con el valor y la orientación descritos anteriormente. ¿Qué componente de $\vec{B}_T$ contribuye a la corriente inducida?

   - El campo $\vec{B}_T$, en general, no es horizontal; en Colombia tiene una inclinación de unos 10^o hacia abajo, cuando se mira hacia el norte. ¿Cómo se podrían determinar la componente vertical y la horizontal de $\vec{B}_T$?

5.10. Actividades prácticas

- Resulta sencillo construir un solenoide: sobre un tubo de PVC de 60 mm de diámetro y 60 mm de largo, se devanan dos capas con alambre de cobre esmaltado de $0,5$ mm de diámetro. Cuando este se conecta a un medidor de 0 a 1 mA y se introduce o saca un imán permanente, se podrá comprobar que circulan corrientes hasta de 100 μA.

- Un poco más complicado es lograr la inducción de corriente con otra corriente. Se puede emplear el alambre de cobre ya usado en el experimento de Oersted para realizar un solenoide que se pueda colocar coaxial y dentro del solenoide descrito en el párrafo anterior. Es mejor usar baterías de NiCd recientemente cargadas para la experiencia. Conecte y desconecte el solenoide interno –que llamaremos *primario*– a la(las) pila(s) y observe si se induce corriente, medida por el instrumento conectado al otro solenoide que llamaremos *secundario*. ¿Cambiará algo si el solenoide primario está afuera del secundario? ¿Cambiará si se coloca un trozo de metal dentro del primario?

- Para observar mejor el efecto, se recomienda emplear la bobina de inducción de un automóvil con motor de gasolina: tiene los dos solenoides y un núcleo de hierro en un todo compacto. De los tres contactos eléctricos usuales, hay uno común a ambos solenoides. A ese debe conectarse uno de los terminales de la pila. El otro, al terminal simétrico. El medidor, al contacto común y al electrodo central. La conexión –o desconexión– de una pila pequeña muestra ya efectos considerables.

6

Las ecuaciones de Maxwell y los campos que se propagan

6.1. Introducción

En los capítulos anteriores hemos construido la teoría básica del electromagnetismo clásico, las ecuaciones de Maxwell, a partir de los resultados de cuatro situaciones experimentales. Comenzamos ahora a explorar las consecuencias de esas ecuaciones: ¿Qué forma tienen las posibles soluciones de esas ecuaciones diferenciales? ¿Se pueden crear y observar esos campos? ¿Qué nuevas posibilidades se abren? ¿Qué consecuencia tiene la introducción de materiales de diferentes composiciones en los campos generados?

Primero exploraremos la posibilidad de campos dependientes del tiempo y la posición. En el espacio vacío, es decir, en las regiones en que no hay cargas ni corrientes eléctricas, se expresan así

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \tag{6.1}$$

$$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{6.2}$$

$$rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} \tag{6.3}$$

$$rot\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial\,t} \tag{6.4}$$

con una notoria simetría entre campos eléctricos y magnéticos.

Se puede mostrar una sencilla, pero interesante, solución de esas ecuaciones; basta con suponer que los campos tienen la forma funcional llamada *onda*

plana; en el curso de la discusión veremos por qué se llama así[1]: esta forma funcional es

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Aquí, $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son vectores constantes, $\vec{k}$ suele llamarse el vector de onda y ω es la frecuencia angular [rad/s], que está relacionada con la frecuencia en hertz [1/s] por la ecuación $\omega = 2\,\pi\,f$. Convencionalmente, diremos que la frecuencia es positiva. La cantidad φ es una diferencia de fase entre los campos eléctrico y magnético.

Es más conveniente escribir las suposiciones anteriores como

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Por convención, se toman las partes reales de las definiciones anteriores como los valores de los campos que actúan sobre las cargas o sobre las corrientes de prueba. La diferencia de fase, φ, queda absorbida en el vector $\vec{B}_0$, suponiendo que puede ser un complejo. En general, también $\vec{E}_0$ será complejo.

6.2. La estructura de los campos

¿Qué resultará de aplicar las ecuaciones de Maxwell a estos campos supuestos? Sabremos bajo qué condiciones es posible que nuestra suposición es válida. Sin restringir la generalidad del análisis, escogeremos un sistema de coordenadas cartesianas, con el eje $\overrightarrow{Oz}$ en la dirección del vector $\vec{k}$. De esta manera

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k\,z - \omega t \tag{6.5}$$

Busquemos los lugares $\vec{r}$ en que hay un máximo de campo eléctrico. Es claro que ellos satisfacen la relación

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k\,z = \omega t + n\,2\pi \tag{6.6}$$

[1] Ciertamente es una suposición irreal, en el mismo sentido que son irreales una línea de carga eléctrica infinita o una corriente circulando en un alambre de longitud infinita. Se puede argumentar que estos campos no se pueden producir. Aún así, este ejemplo permite profundizar en el tipo de soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Más tarde se restringirán estas soluciones, para tomarlas como buenas aproximaciones en una porción del espacio. Hay, naturalmente, otra forma más estricta y complicada de explorar estas soluciones. Por ahora, seguiremos el camino sencillo.

con n un entero. La solución a la ecuación (6.6) para un tiempo t único, por ejemplo $t = 0$, es un conjunto de planos paralelos (un plano para cada valor de n) cuyas normales están en la dirección de $\vec{k}$. Si tomamos en cuenta ahora la variación del tiempo, esos planos se desplazan en la dirección de $\vec{k}$ con una velocidad $\vec{v} = (0, 0, v_z)$, con

$$v_z = \frac{\omega}{k} \tag{6.7}$$

La distancia entre planos adyacentes con campo máximo estará dada por

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k} \tag{6.8}$$

y suele llamarse "longitud de onda".

Consideremos ahora un campo vectorial general

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{6.9}$$

¿A qué es igual la divergencia de $\vec{A}$? Es fácil calcular que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = ik_xA_x + ik_yA_y + ik_zA_z \tag{6.10}$$

$$= i\,\vec{k}\cdot\vec{A} \tag{6.11}$$

¿Y como es el rotacional? Un poco más difícil: la componente x será

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (i\,k_yA_z - i\,k_zA_y) \tag{6.12}$$

$$= i\,(\vec{k}\times\vec{A})_x \tag{6.13}$$

Las otras componentes serán similares y se puede generalizar a

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = i\,\vec{k}\times\vec{A} \tag{6.14}$$

Esta es una consecuencia de la forma armónica de las funciones escogidas ¡Una poderosísima herramienta para desarrollar teoría! Las derivadas se transforman en multiplicaciones y las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (en nuestro caso, ecuaciones en vectores).

Apliquemos este método a los campos (en el vacío) dados por $\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ y $\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. La primera de las ecuaciones de Maxwell queda convertida en

$$i\,\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \tag{6.15}$$

Esto significa que el campo eléctrico es perpendicular a $\vec{k}$, la dirección de propagación de la onda. La segunda de las ecuaciones de Maxwell es ahora

$$i\,\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \tag{6.16}$$

Expresa que el campo magnético es perpendicular a $\vec{k}$. Así, los campos son transversales a la dirección de propagación. La tercera ecuación de Maxwell toma ahora la forma

$$i\,\vec{k}\times\vec{E}_0 = i\,\omega\,\vec{B}_0 \tag{6.17}$$

El producto escalar de esta ecuación (6.17) con $\vec{E}_0$ nos lleva a

$$\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0 = \frac{\vec{E}_0\cdot\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega} = 0 \tag{6.18}$$

Denotando que el campo eléctrico es perpendicular al campo magnético. El producto escalar de la ecuación (6.17) con $\vec{B}_0$ resulta

$$\vec{B}_0\cdot\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\,\vec{B}_0\cdot\vec{B}_0 \tag{6.19}$$

que es una expresión positiva; los vectores $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre sí y forman un triedro rectangular *de mano derecha* (Figura 6.1).

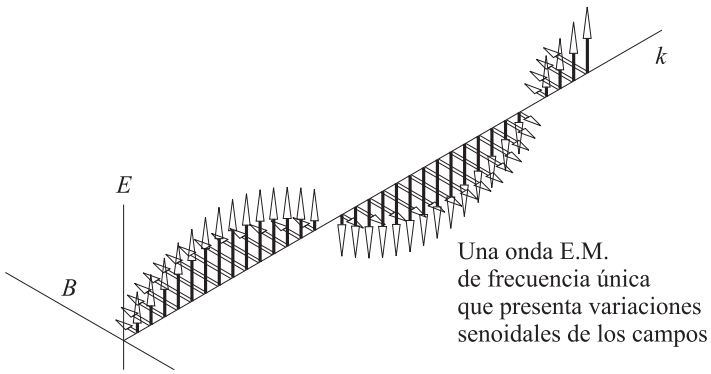

FIGURA 6.1. Sobre la estructura espacial de una onda plana

La última de las ecuaciones de Maxwell se convierte en

$$i\,\vec{k}\times\vec{B}_0 = -i\,\omega\,\epsilon_0\,\mu_0\vec{E}_0 \tag{6.20}$$

Combinada con la ecuación (6.17) resulta, como consecuencia de

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}_0) = (\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\,\vec{k} - k^2\,\vec{E}_0 = -\omega^2\,\epsilon_0\,\mu_0\vec{E}_0 \tag{6.21}$$

en una relación muy interesante entre constantes físicas y los parámetros de la forma funcional propuesta

$$k^2 = \omega^2 \, \epsilon_0 \, \mu_0 \tag{6.22}$$

Sabíamos que la rapidez de propagación de los campos –de los máximos, dijimos, pero también de los mínimos y de toda la estructura de campos– depende de la magnitud del vector de onda y de la frecuencia angular (ω/k). Si llamamos ahora c a esa rapidez[2], obtendremos la predicción, resultante de aplicar las ecuaciones de Maxwell a unos campos armónicos: esos campos se propagan con rapidez

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \, \mu_0}} \tag{6.23}$$

y son campos transversales. Las constantes ϵ_0 y μ_0 se pueden medir o definir. La primera de ellas está relacionada con las fuerzas entre cargas eléctricas; la segunda, con fuerzas magnéticas entre corrientes eléctricas. Los valores "modernos" son

$$\epsilon_0 = 8,85418 \cdots \times 10^{-12} \, C^2 \, N^{-1} \, m^{-2}$$
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, N \, A^{-2}$$

Si calculamos con estos valores la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el espacio vacío, resulta

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \, \mu_0}} = 2,99792 \cdots \times 10^8 \, m \, s^{-1} \tag{6.24}$$

Se reconoce inmediatamente la velocidad de la luz. Maxwell la reconoció ya en los años 1870 (algunos años antes se habían mediciones confiables, con los métodos de Fizeau y Foucault). Conjeturó, entonces, que la luz, cuya naturaleza era hasta entonces desconocida, podría ser una forma de onda electromagnética; una notable predicción. Recordemos que las ecuaciones de Maxwell habían surgido de experimentos con bancos de baterías, cargas, corrientes, bobinas y otros utensilios que aparentemente nada tenían que ver con la luz[3].

Otra notable predicción de Maxwell fue que no solo la luz se comporta como una forma de onda electromagnética, sino que podrían existir muchas otras

[2] Es la inicial de la palabra latina *celeritas*.

[3] Resulta interesante una polémica acerca del valor de c. Louis Essen, el inventor de los relojes atómicos de cesio, se propuso determinarlo para las microondas, a partir de 1946, y llegó, en 1950, a un valor claramente más grande que el medido por métodos ópticos, $299.792,5 \pm 1$ km/s. La 17 Conferencia General sobre Pesas y Medidas adoptó, en 1983, el valor $299.792,458$ km/s.

formas de onda, diferentes solo en su longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, a la que no hemos fijado ninguna restricción[4].

Otra consecuencia de las ecuaciones (6.15) a (6.20), junto con la relación $c = \omega/k$ es que

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \tag{6.25}$$

Es decir, el campo magnético asociado a una onda plana es más pequeño en magnitud que el campo eléctrico. Si comparamos las fuerzas que esos campos ejercerían sobre una carga eléctrica, dadas por la fórmula de Lorentz

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{6.26}$$

la relación entre las fuerzas es

$$\frac{F_{\text{magnética}}}{F_{\text{eléctrica}}} \approx \frac{v\,B_0}{E_0} \approx \frac{v}{c} \tag{6.27}$$

En otras palabras, si la carga (sobre la que actúa el campo de la onda) no se mueve con velocidad cercana a la luz, la fuerza magnética es muy pequeña comparada con la eléctrica. Por ello se supone, habitualmente, que los fenómenos de interacción de las ondas electromagnéticas y los átomos son un fenómeno esencialmente eléctrico. Se dice, por ejemplo, que las ondas están polarizadas en un plano, que coincide con el plano definido por el vector $\vec{E}_0$. Eso significa que las ondas polarizadas en un plano, digamos el $x - z$ son independientes de las polarizadas en el plano $y - z$ cuando ambas se propagan en la dirección $\overrightarrow{Oz}$. Los fenómenos de refracción, absorción y reflexión de las ondas en las superficies de separación de materiales diferentes se pueden estudiar, con ventajas, como fenómenos electromagnéticos. Se pueden explicar muchísimos efectos como manifestación de la naturaleza eléctrica de los materiales yd el campo y, lo que es indispensable, se pueden comparar las predicciones con los resultados.

[4] Desde el tiempo de Maxwell hasta nuestros días prácticamente se han observado –o detectado– todas las ondas no visibles del llamado "espectro electromagnético". En todos los rangos de longitud de onda –o de frecuencia– se logra, a través de interpretación acerca de la información suministrada por las ondas electromagnéticas, ganancia de información acerca de la naturaleza de la materia, como en los gases y el polvo entre estrellas, los gases y las partículas de nuestra atmósfera o, incluso, la composición de estrellas y otros planetas en nuestro sistema solar. A finales del siglo XIX no se había llegado a tanto y faltaba la demostración de la existencia de muchas de ellas. Véase, por ejemplo, Drude, P., *Theory of Optics*, Leipzig, 1900, en edición Dover, New York, 1959, pp. 127 y ss.

6.3. Los potenciales retardados

En el capítulo anterior, sobre las contribuciones de Faraday y Maxwell, encontramos una formulación de las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales escalar y vector

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{6.28}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{6.29}$$

Una solución a estas ecuaciones para el potencial escalar puede encontrarse cuando la densidad de carga que lo produce está definida sobre todo el espacio y tiende a cero *en el infinito*. Necesitaremos un desarrollo que hemos pasado al apéndice 2, acerca de las funciones de Green. La matemática de lo que sigue requiere que el lector conozca ese desarrollo. Pero la discusión posterior de los conceptos puede seguirse aún sin él [5].

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell en el estado estacionario se reducen a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.30}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{6.31}$$

La solución a estas ecuaciones se puede encontrar empleando las funciones de Green para la ecuación de Poisson

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \tag{6.32}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \tag{6.33}$$

Las ecuaciones de Maxwell, dependientes del tiempo, se pueden resolver empleando la función de Green, ecuación (A2.25). Para el potencial escalar tendremos

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)\, \rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' dt' \tag{6.34}$$

Con expresiones similares para las componentes del vector $\vec{A}$. Empleando la definición de función delta, estos enunciados pueden reducirse a

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \tag{6.35}$$

[5] Ver Sommerfeld, A., op.cit., pp. 147 y ss.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \tag{6.36}$$

Estas expresiones son (o se pretenden que sean) una solución general para las ecuaciones de Maxwell. Las soluciones dependientes del tiempo se parecen a las soluciones en estado estacionario, excepto por la extraña manera en que dependen del tiempo. De acuerdo con las ecuaciones (6.35) y (6.36), si queremos calcular los potenciales en el lugar $\vec{r}$ y el tiempo t, tendremos que calcular integrales que incluyen la carga y las corrientes igual que en el caso estacionario. Pero con una importante diferencia: la contribución de la carga –o de la densidad de corriente– en el punto $\vec{r}\,'$ no se toma en cuenta en el tiempo t, sino en un tiempo anterior, $t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)$. Ese tiempo anterior es el último tiempo en que una señal luminosa, emitida desde $\vec{r}\,'$, sería recibida en $\vec{r}$ antes del tiempo t. Este tiempo se llama "tiempo retardado" y los potenciales en (6.35) y (6.36) se denominan *potenciales retardados*. Muchos autores adoptan la convención de encerrar entre paréntesis cuadrados las cantidades:

$$\vec{c}(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c) \equiv [\vec{c}(\vec{r}\,',t)] \tag{6.37}$$

con el significado de *calcúlese con el tiempo retardado*. Usando esta convención, las ecuaciones (6.35) y (6.36) quedan como

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[\rho(\vec{r}\,',t)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \tag{6.38}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{J}(\vec{r}\,',t)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \tag{6.39}$$

Ahora podemos discurrir sobre los cambios que introduce la adopción de la corriente de desplazamiento en el electromagnetismo –clásico–, desde un punto de vista profundo. Una distribución de carga $\rho(\vec{r},t)$ puede imaginarse como compuesta por una colección de series de cargas que aparecen en forma instantánea[6], en algún punto $\vec{r}\,'$ y en un instante t' y luego desaparecen. Matemáticamente esto se escribe

$$\rho(\vec{r},t) = \int\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')\rho(\vec{r}\,',t')d^3\vec{r}\,'dt' \tag{6.40}$$

Igualmente, podemos imaginar que una distribución de densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r},t)$ está formada por una serie de corrientes que aparecen instantáneamente y luego desaparecen

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \int\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')\vec{J}(\vec{r}\,',t')d^3\vec{r}\,'dt' \tag{6.41}$$

[6] No estamos diciendo esto de las cargas elementales, sino de los desequilibrios de carga.

Cada una de esas fugaces distribuciones de carga y de corriente origina una onda esférica en el potencial correspondiente. Es decir, la densidad de carga en $\vec{r}\,'$ y $t\,'$ envía una onda de potencial escalar

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.42}$$

En forma similar, la densidad de corriente en $\vec{r}\,'$ y $t\,'$ envía una onda de potencial vector

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\,\vec{J}(\vec{r}\,',t')}{4\pi}\frac{\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{6.43}$$

Estas ondas llevan a otras cargas y corrientes los efectos de los cambios ocurridos en $\vec{r}\,'$ y $t\,'$. Estos efectos viajan a la velocidad de la luz, de modo que, cuando alcanzan a otras cargas y corrientes, su acción estará *retrasada*. Cada carga y cada corriente en el universo está emitiendo esas ondas esféricas[7]. El resultado está expresado en las ecuaciones (6.35) y (6.36). Por supuesto, podemos convertir esos potenciales retardados en campos eléctricos y magnéticos, empleando los operadores diferenciales adecuados. Después podríamos calcular la fuerza sobre cargas, empleando la expresión para la fuerza de Lorentz.

Pero al hacer todo esto, estaremos superando y nos habremos escapado de la aparente acción a distancia de la ley de Coulomb y de la ley de Biot y Savart. La información electromagnética es llevada por ondas esféricas en los potenciales y, por ello, viaja a la velocidad de la luz. Si se cambia la posición de una carga, otra carga distante solo responderá al cambio con un retardo que es consecuencia de que una onda se propaga entre una y la otra.

Las fórmulas para calcular el potencial escalar en el estado estacionario y en el estado dependiente del tiempo, respectivamente

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \qquad \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{[\rho(\vec{r}\,',t)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,'$$

se ven muy similares, pero hay una importante diferencia. Podríamos imaginar que para cada cuerpo cargado[8] *se está realizando* la integral prescrita –y también la correspondiente al potencial vector– sobre el resto del universo. El campo obtenido de esos potenciales determinará la ecuación de

[7] ¡Nuestro universo está *lleno de campos electromagnéticos*!

[8] Que puede ser una unidad indivisible, como un electrón o un ion.

movimiento de ese cuerpo, a través de la fuerza de Lorentz. Sin embargo, la información que para ese cuerpo se recibe del resto del universo esta anticuada, porque las ondas viajan a una velocidad finita. Si consideramos los efectos de cargas y corrientes más y más lejanas, el retraso es cada vez mayor[9]. ¿Cómo reacciona nuestro cuerpo cargado? Con la información más actualizada que hay sobre cargas y corrientes lejanas. La densidad de carga $\rho(\vec{r},t)$ no se incorpora a la integral, sino la densidad de carga retardada $[\rho(\vec{r},t)]$. Una expresión similar vale para la distribución de corrientes.

Consideremos una situación imaginaria, en la que una carga q aparece en una posición $\vec{r}_0$ en un tiempo t_1, se mantiene allí por algún tiempo y luego desaparece en un tiempo t_2. ¿Cómo será el campo eléctrico generado por esa carga? La respuesta es

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} && \text{para } t_1 \le t - |\vec{r}-\vec{r}_0|/c \le t_2\\ &= 0 && \text{en otro caso}\end{aligned}$$

Ahora bien, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, porque no hay corrientes y por tanto no hay un potencial vector. Así

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} && \text{para } t_1 \le t - |\vec{r}-\vec{r}_0|/c \le t_2\\ &= \vec{0} && \text{en otro caso}\end{aligned}$$

La situación se esquematiza en la figura 6.2. La carga emite un campo coulombiano que se propaga radialmente desde la posición de la carga, a la velocidad de la luz. La carga sigue emitiendo un campo, pero a medida que se mueve, el *origen* de ese campo va cambiando.

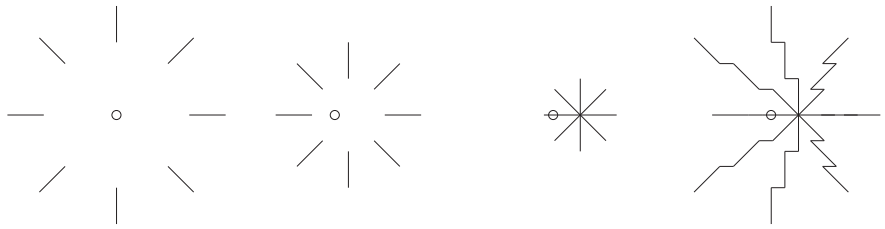

FIGURA 6.2. Sobre los campos emitidos por una carga en movimiento

[9] De manera similar, un astrónomo observa galaxias muy lejanas mirando, en cierta forma, atrás en el tiempo. La luz que se observa viniendo de galaxias lejanas trae información de lo que sucedía hace mucho tiempo.

En forma similar, podría argumentarse que una corriente, cuando aparece y desaparece, emitirá un campo magnético que se propaga a la velocidad de la luz. La última de las gráficas muestra una construcción similar cuando la carga aparece y desaparece en distintos lugares y distintos tiempos[10].

En las teorías de acción a distancia, las líneas de campo son como alambres rígidos pegados a las cargas o alrededor de las corrientes. Si las cargas –y las corrientes– se mueven, también lo hacen las líneas de campo, llevando a situaciones de acción a distancia. En la teoría de los campos dependientes del tiempo, las cargas emiten el campo eléctrico y las corrientes emiten el campo magnético. Si movemos una carga o una corriente, las líneas de campo emitidas antes de este movimiento no resultan afectadas, de modo que el campo de una carga (o corriente) lejana solo responde al cambio en posición después de un retraso suficiente para que el campo se propague entre las dos cargas –o las dos corrientes–. Las líneas de campo pueden, entonces, ser curvas (ver actividades prácticas), más similares a los *tentáculos* imaginados por Faraday.

Cuando se enunciaron la ley de Coulomb y la ley de Biot y Savart, no era evidente la realidad de los campos; se podría tratar de un concepto artificial para incluir muchas influencias. Las únicas cantidades medibles parecían ser las fuerzas entre cargas y corrientes; estas se describían a través de la definición de campos, pero no se tenía modo alguno de saber si esos campos persisten aún después de que la carga o la corriente ya no están presentes. En la teoría dependiente del tiempo, los campos se muestran con existencia propia. Aclarémoslo con el siguiente ejemplo.

Supongamos que una carga q_1 existe solo por un cierto tiempo y luego desaparece. Durante ese tiempo emite un campo coulombiano. Una segunda carga, q_2, interactúa con ese campo, pero está suficientemente lejos como para que el campo de la primera llegue cuando ya esta dejó de existir. Esto quiere decir que el campo está transmitiendo energía –y *momentum*–. Cualquier cosa que transmita energía y *momentum* es *real* en el sentido de la física[11]. Más tarde deberemos examinar el tema de transmisión de energía y *momentum* en una onda electromagnética con más cuidado.

Consideremos también una carga en movimiento. Esta carga emitirá continuamente ondas esféricas de potencial escalar; un esquema del patrón de ondas resultante sería como se muestra en la figura 6.3; esta sugiere que los

[10] Equivale a decir: la carga se mueve.

[11] Si se coloca un recipiente con agua para que sea iluminado por el Sol, el agua se calentará. Si alguien se expone mucho tiempo al Sol, podría experimentar dolorosas quemaduras de la piel. ¿Podrían ser causados estos efectos muy reales por objetos no reales?

campos eléctricos son más intensos frente a la carga en movimiento que detrás (menor distancia entre las superficies equipotenciales). Si la partícula que lleva esa carga se mueve en agua o en aire, con una velocidad mayor que la de la luz en ese medio, es posible obtener un efecto muy interesante, que se ilustra en la figura 6.3.

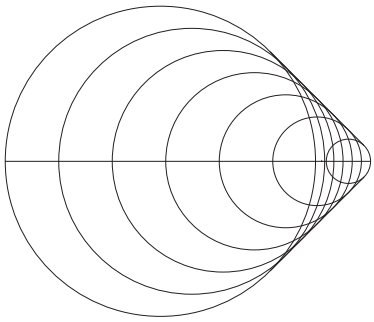

FIGURA 6.3. Sobre los campos emitidos por una carga en movimiento

El lugar geométrico del frente de onda externo se ha convertido en un cono –la envolvente de las esferas de radios crecientes–. La amplitud de la onda en el cono es extremadamente alta: es una onda de choque. El semiángulo θ del cono es simplemente $\arccos(c/v)$. En el agua, estas ondas de choque son producidas por objetos muy rápidos; en el aire, por objetos que se mueven a velocidades supersónicas; ¿habrá ondas de choque electromagnéticas? La velocidad de las cargas no puede alcanzar la velocidad de la luz en el espacio vacío, pero en los materiales ocurre un fenómeno interesante[12]. El campo electromagnético oscilante de una onda produce movimiento y una ligera separación de las cargas positivas y negativas en los átomos. Estas cargas separadas representan pequeños dipolos variables que oscilan con la frecuencia de la onda original. Además, funcionan como pequeñas antenas –son cargas aceleradas– que producen a su vez nuevos campos de la misma frecuencia. El fenómeno notable es que cuando se suman los dos campos –el inicial y el reemitido– el resultado sensible es una velocidad de la onda menor que la velocidad en el vacío[13]. Si ahora se dispara una partícula a

[12] Cuyo análisis completo supera el alcance de este curso. Ver www.shef.ac.uk.

[13] Una descripción simplificada, claro está, que no toma en cuenta las sutilezas de la diferencia entre velocidad de fase, de grupo, de propagación de señal. Pero todos estos conceptos deben dejarse para un tratamiento sistemático de las ondas y superan el alcance de este libro.

través de un material a mayor velocidad que la velocidad de la onda electromagnética en él, podría tenerse una onda de choque electromagnética. Se esperaría un cono intenso de emisión.

La investigación de una notoria emisión de luz azul en los reactores nucleares rodeados de agua, fue encargada por su profesor a P.A. Cherenkov. Este, insatisfecho con las explicaciones existentes y tras analizar sus propiedades experimentalmente (1934-1937), propuso, junto con I. Frank y I.Y. Tamm la hipótesis de que sería esa radiación que hoy se conoce como radiación Cherenkov[14]. Si se conoce, por ejemplo, la velocidad de la onda en un material transparente que rodee un acelerador de partículas y se mide el ángulo del cono de la onda de choque, se podrá determinar la velocidad de una partícula que escapó del acelerador.

6.4. Los experimentos de Hertz

Como se dijo antes, el cálculo que lleva de magnitudes eléctricas y magnéticas a la velocidad de la luz (6.24) condujo a Maxwell a la predicción de las ondas electromagnéticas, hacia 1870. Pero no a predecir cómo se podrían producir o detectar experimentalmente. Esa tarea la cumplió H. Hertz en una serie de experimentos entre 1885 y 1889. En sus experimentos, descubrió cómo propagar efectos eléctricos en el espacio, midió la velocidad de propagación y la longitud de onda. Mostró su naturaleza de ondas transversales a través de experimentos sobre reflexión, refracción y polarización, análogos a los que se pueden realizar con la luz visible. En resumen, confirmó la naturaleza electromagnética de la luz, de acuerdo con la conjetura de Maxwell[15].

Vale la pena considerar los instrumentos empleados por Hertz para producir los "rayos eléctricos", como él las llamó. Era claro que debería poner en movimiento cargas y lo logró, haciéndolas mover mediante lo que hoy llamamos "una fuente pulsada de tensión", que en ese tiempo se llamaba "carrete de Ruhmkorff", por el nombre de su fabricante. Empleó también una "bobina de inducción", muy similar a las que emplean en la actualidad los motores de combustión interna. Estos dispositivos se basan en la inducción electromagnética de fuerzas electromotrices (ver problema 5 del capítulo 5 y el capítulo 7, sobre inductancias). La fuente de alta tensión, conectada a dos varillas de latón –terminadas en esferas pulidas–, hacía

[14] Se recomienta la lectura del discurso de presentación por K. Siegbahn, http://nobelprize.org/physics/laureates/1958/press.html y el discurso de Cherenkov.

[15] Ver Shamos, op.cit., páginas 184 a 197.

saltar chispas entre estas y movía cargas a lo largo de las varillas[16]. En el experimento citado por Shamos, un cilindro parabólico, colocado detrás de la antena emisora, le servía a Hertz para dirigir la onda; este dispositivo estaba diseñado y construido con base en los conocimientos de la óptica de la luz. Uno de sus detectores de la presencia de campos era un anillo metálico casi cerrado, terminado en una esfera, por un lado, y por una punta, en el otro. La detección de campos variables era por la observación de chispas (manifestación de corrientes inducidas en el anillo a varios metros de distancia del emisor de ondas). Otro detector era también similar al emisor, con dos varillas terminadas en esferas y cada una a un lado de un sistema similar para observar chispas[17]. Igualmente dotada de un cilindro parabólico, permitió a Hertz y a sus ayudantes una serie de experimentos que mostraron

- La propagación rectilínea de la onda, a través del efecto de los reflectores parabólicos y a través del efecto de pantallas metálicas que producían sombra. Además, propagación de la onda a través de algunos materiales, como una puerta de madera y reflexión en un metal.
- La polarización de la onda, a través de la colocación de una reja de alambres rectos paralelos entre el emisor y el receptor y observación del efecto de esa reja sobre la intensidad de las chispas.
- La reflexión de las ondas en pantallas metálicas, determinando los ángulos de incidencia sobre la pantalla y reflexión desde la pantalla.
- La refracción (cambio de dirección) de las ondas en un prisma isósceles de una resina similar al alquitrán (un prisma con ángulo de 30^o grados, de lados $1,20$ m y altura $1,50$ m).

Estos resultados, en palabras de Hertz, significan que "hemos aplicado el término rayo de fuerza eléctrica a los fenómenos ... investigado[s]. Podríamos tal vez designarlos rayos de luz de muy grande longitud de onda [alrededor de 30 cm. G.A.]. Los experimentos descritos me parecen eminentemente adaptados para eliminar cualquier duda respecto de la identidad de la luz, el calor radiante y el movimiento de las ondas electromagnéticas. Creo que de ahora en adelante tendremos mayor confianza en hacer uso de las ventajas que esa identidad nos permita obtener tanto en el estudio de la óptica como en el de la electricidad"[18].

[16] En términos modernos, empleaba una antena *emisora* formada por dos varillas rectas.

[17] En términos modernos, empleaba una antena *receptora* formada por dos varillas rectas.

[18] Shamos, op. cit., p. 195. No son experimentos triviales y seguramente requirieron

6.5. Los campos retardados

Una vez calculados los potenciales retardados, el trabajo de calcular los campos es el de calcular el resultado de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Si llamamos $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, el tiempo retardado es $t_R = t - R/c$. Una cantidad retardada la escribiremos como $[F(\vec{r}, t)] \equiv F(\vec{r}, t_R)$. Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell serán

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R} d^3\vec{r}'$$
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{J}]}{R} d^3\vec{r}'$$

Es fácil comprobar que

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left([\rho]\vec{\nabla}(R^{-1}) + \frac{[\partial\rho/\partial t]}{R}\vec{\nabla}t_R \right) d^3\vec{r}' \tag{6.44}$$
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{[\rho]}{R^3}\vec{R} - \frac{[\partial\rho/\partial t]}{cR^2}\vec{R} \right) d^3\vec{r}' \tag{6.45}$$

donde hemos aprovechado los resultados

$$\vec{\nabla}(R) = \frac{\vec{R}}{R} \qquad \vec{\nabla}(R^{-1}) = -\frac{\vec{R}}{R^3} \qquad \vec{\nabla}(t_R) = -\frac{\vec{R}}{cR}$$

En forma similar,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{\nabla}(R^{-1}) \times [\vec{J}] + \frac{\vec{\nabla}t_R \times [\partial\vec{J}/\partial t]}{R} \right) d^3\vec{r}' \tag{6.46}$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{R} \times [\vec{J}]}{R^3} + \frac{\vec{R} \times [\partial\vec{J}/\partial t]}{cR^2} \right) d^3\vec{r}' \tag{6.47}$$

De estas expresiones se puede encontrar que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left([\rho]\frac{\vec{R}}{R^3} + \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\frac{\vec{R}}{cR^2} - \frac{[\partial\vec{J}/\partial t] \times \vec{R}}{cR^2} \right) d^3\vec{r}' \tag{6.48}$$

de muchos ensayos fallidos. Pero de la descripción de Hertz se puede entrever que debió ser muy divertido ver cómo las predicciones de la teoría y la astucia de los diseñadores experimentales permitían obtener resultados novedosos. Resulta notable, además, la elaboración intelectual de los resultados experimentales directos.

que es la generalización de la ley de Coulomb para campos dependientes del tiempo, y

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{[\vec{J}] \times \vec{R}}{R^3} + \frac{[\partial \vec{J}/\partial t] \times \vec{R}}{cR^2} \right) d^3\vec{r}' \tag{6.49}$$

la generalización del campo calculado a partir de la ecuación para la fuerza de Biot y Savart. Naturalmente, las integrales se extienden a la región en que las densidades de carga o de corriente están definidas.

Examinemos un poco las magnitudes relativas de los términos en estas expresiones. Para ello, supongamos que nuestas variaciones de cargas y corrientes tienen lugar en un tiempo t_0, al que daremos un valor conveniente, acorde con el experimento realizado. Definiremos, además, una cantidad $R_0 = c\,t_0$ que será la distancia viajada por la luz en ese tiempo. Evaluemos las expresiones (6.48) y (6.49) en el límite "de campo cercano", $R \ll R_0$, y de "campo lejano" $R_0 \ll R$. En la región de campo cercano

$$\frac{|t - t_R|}{t_0} = \frac{R}{R_0} \ll 1 \tag{6.50}$$

y la diferencia entre el tiempo t y el tiempo retardado t_R será pequeña. Podremos entonces expandir las cantidades retardadas en series de Taylor, como

$$[\rho] = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_R - t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(t_R - t)^2 + \cdots \tag{6.51}$$

lo que equivale a

$$[\rho] = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{R}{c} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\frac{R^2}{c^2} + \cdots \tag{6.52}$$

La expansión de las cantidades retardadas en la región de campo cercano resulta en

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho\,\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\frac{\vec{R}}{c^2 R} - \frac{\partial \vec{J}/\partial t}{c^2 R} + \cdots \right) d^3\vec{r}' \tag{6.53}$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \vec{J}/\partial t^2 \times \vec{R}}{c^2 R} \cdots \right) d^3\vec{r}' \tag{6.54}$$

En la expresión para el campo eléctrico, el primer término corresponde con el campo de Coulomb, el segundo es la corrección por efectos retardados y el tercero es el término debido a la inducción según Faraday. En la expresión para el campo magnético, el primer término es la ley de Biot y Savart y

el segundo la corrección por retrasos. Observemos que las correcciones son del orden de $(R/R_0)^2$, porque los términos en (R/R_0) se anularon en la expansión de Taylor.

Esto significa que en un típico experimento de electricidad elemental, con una escala de distancias de $2\,m$ y una escala de tiempo de $t_0 = 0,1\,s$, podremos decir que la distancia recorrida por la luz en t_0 es $R_0 = 30.000$ km. Las correcciones por retraso son del orden de $(1,5\times10^7)^{-2} \sim 4\times10^{-15}$. Es claro que podemos confiar en las predicciones de la ley de Coulomb, la de Biot y Savart y la ley de Faraday para analizar nuestro experimento[19].

Por otro lado, en la región de campo lejano, $R_0 \ll R$, en las expresiones (6.48) y (6.49) los términos más grandes serán los que varían como R^{-1}, de modo que

$$\vec{E} \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[\partial\vec{J}_\pi/\partial t]}{c^2 R} d^3\vec{r}' \tag{6.55}$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\partial\vec{J}_\pi/\partial t]\times\vec{R}}{c^2 R^2} d^3\vec{r}' \tag{6.56}$$

donde se definió una *corriente perpendicular*

$$\vec{J}_\pi = \vec{J} - \frac{\vec{J}\cdot\vec{R}}{R^2}\vec{R} \tag{6.57}$$

y donde se está aprovechando que $[\partial\rho/\partial t] = -[\vec{\nabla}\cdot\vec{J}]$ y que $[\vec{\nabla}\cdot\vec{J}] = -[\partial\vec{J}/\partial t]\cdot\vec{R}/cR +$ términos del orden de $(1/R^2)$.

Supongamos ahora que nuestras cargas y corrientes están localizadas en una región cercana a $\vec{r}' = \vec{r}_0$. Llamaremos $\vec{R}_0 = \vec{r} - \vec{r}_0$, con $R_0 = |\vec{r} - \vec{r}_0|$. Supongamos, además, que el tamaño de la región en la que hay cargas y corrientes es mucho menor que R_0. Las cantidades retrasadas podrán expresarse en forma parecida a

$$[\rho(\vec{r},t)] \simeq \rho(\vec{r}, t - R_0/c) \tag{6.58}$$

[19] Incluso en una escala de tiempo mil veces menor, la corrección es usualmente despreciable. Claro que, a medida que la frecuencia de los fenómenos sube, se llegará al punto en que la corrección deberá ser tomada en cuenta.

La expresión para el campo eléctrico se reduce a

$$\vec{E} \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{[\int \partial\vec{J}_\pi/\partial t\, d^3\vec{r}']}{c^2 R_o} \tag{6.59}$$

y el campo magnético estará dado por

$$\vec{B} \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{[\int \partial\vec{J}_\pi/\partial t\, d^3\vec{r}'] \times \vec{R}_0}{c^3 R_0^2} \tag{6.60}$$

Obsérvese que estos campos en la región lejana[20]

$$\frac{E}{B} = c \qquad\qquad \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$

Estas son dos características que encontramos en una onda electromagnética plana. Eso quiere decir que las expresiones (6.59) y (6.60) describen una onda propagándose radialmente hacia afuera de la región en que hay cargas y corrientes. La onda está generada por corrientes que varían en el tiempo. Sabemos que si las cargas se mueven con velocidades constantes, constituyen corrientes constantes, de modo que las corrientes no constantes están asociadas a cargas con aceleración. De las expresiones anteriores se puede concluir que las cargas aceleradas emiten ondas electromagnéticas.

Los campos que predicen las expresiones (6.59) y (6.60) decaen como el inverso de la distancia a la fuente, es decir más lentamente que las fuerzas descritas por la ley de Coulomb o de Biot y Savart. ¡Este hecho hace posible la astronomía! Porque permite que nos llegue una cantidad apreciable de las ondas emitidas por fuentes muy lejanas. Insistiremos en que son campos variables que podemos describir como *montados* sobre otros campos que llenan el espacio.

6.6. Resumen

La exploración de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell ha producido sorpresas; no solo las ondas electromagnéticas planas: es posible buscar ondas electromagnéticas de simetrías distintas, como cilíndrica o esférica con expresiones analíticas. Otro tipo de ondas son posibles y sus propiedades son predecibles. En realidad los experimentos de Hertz abrieron un campo de investigación y aplicación muy vasto.

[20] Véase Sommerfeld, op. cit., pp. 145 y ss.

Las consideraciones acerca de los potenciales retardados hacen ver que las definiciones de campos eléctrico y magnético no son simplemente un concepto que resulta cómodo para resumir muchas propiedades de las fuerzas eléctricas y magnéticas. Los campos adquieren una realidad propia, consistente con observaciones simples que se pueden sacar de la vida cotidiana.

Además el análisis de la estructura de los potenciales y de los campos retardados resulta en propiedades insospechadas. Es importante que podamos seguir trabajando con las "viejas" expresiones para las fuerzas eléctricas y magnéticas, así como las expresiones de Faraday para la inducción de fuerzas electromotrices, cuando trabajamos a escala de laboratorio. También es importante el resultado en el límite de campos lejanos; confirmamos que, aunque las ondas planas de extensión infinita son irreales, representan una buena aproximación a la estructura de los campos que nos llegan de fuentes muy lejanas (o que enviamos a lugares lejanos.).

Los campos en la región que no corresponde a los límites de campo cercano y campo lejano son muy interesantes y muy complejos; considerarlos en detalle supera el alcance de este curso, de modo que debemos dejar esa exploración para cursos especializados en campos de comunicaciones, emisión y recepción de ondas, ondas guiadas, ondas en cables, etcétera.

6.7. Comentarios

Maxwell había llegado a sus ecuaciones a partir de una concepción mecánica. Su modelo generó mucho rechazo entre los físicos. La contribución de Hertz, al proponer la aceptación de las ecuaciones sin aceptar el modelo, expresado en la frase "lo esencial de la teoría de Maxwell son sus ecuaciones" resultó de gran importancia para el futuro de la teoría electromagnética, la física y las tecnologías posteriores. También con la mecánica de Newton aceptamos sus ecuaciones como una descripción de los comportamientos de la materia, sin tener que aceptar las intenciones originales de su autor.

Es importante el concepto de campo retardado, un progreso en relación con los conceptos simples de acción a distancia entre cargas o entre corrientes. En experimentos realizados a escalas de laboratorio y con frecuencias bajas, las aproximaciones de campos que se propagan con "rapidez infinita" no se apartan mucho de los resultados. Pero cuando se sube la frecuencia o se amplía la escala de longitudes, esas aproximaciones son insostenibles, teórica y prácticamente.

6.8. Temas para discusión

- Un sistema de posicionamiento global (*GPS* son las siglas de un conocido sistema; *Galileo* es otra versión, aún en desarrollo) depende de la coordinación de señales de varios satélites y de un conocimiento muy exacto de sus posiciones. ¿Cómo influye la velocidad de las ondas electromagnéticas en la práctica del sistema?

- Discuta qué implicaciones tendría la introducción de un *tiempo adelantado*, en lugar de un *tiempo retardado*, como se trabajó en este capítulo[21].

El lector interesado podría consultar la página www.ja-gps.com.au/whatis gps.html o la selair.selkirk.bc.ca/flight1/gps-theory/index.htm para una descripción técnica del sistema GPS. Sobre las actividades del sistema de posicionamiento Galileo, hay información en europa.eu.int/comm /dgs/energy _transport/galileo/doc/galileo_press _kit_april2002_en.pdf y en www.euractiv.com/Article?tcmuri=tcm :29-117496-16&type=LinksDossier

6.9. Ejercicios

Advertencia: Los siguientes (pocos) ejercicios no se resuelven aplicando las complicadas ecuaciones en este capítulo; se requiere más que todo una reflexión en la situación física.

1. En una región del espacio (vacío) se encuentra un campo eléctrico con componentes

$$E_x = A \operatorname{sen} \beta y \operatorname{sen} \omega t \qquad E_y = 0 \qquad E_z = 0$$

   Determine el campo magnético asociado, evalúe β y muestre que el campo es una combinación de ondas viajeras. Determine la dirección de propagación.

2. Una lámina de material conductor, en forma de paralelepípedo rectangular, de dimensiones b, c y d, con $c \ll d$, $b \ll d$, se mueve con aceleración $\vec{a}$ constante, en la dirección del lado menor. Como consecuencia de la aceleración se produce una redistribución de los electrones que pueden moverse en el conductor.

   - Encuentre la intensidad del campo eléctrico en la lámina.

[21] Cuando termine, realice una consulta acerca de la teoría de Wheeler y Feynman sobre potenciales avanzados o la conferencia Nobel de R.P. Feynman, en nobelprize.org/physics/laureates/1965/feynman-lecture.html.

- Encuentre la densidad superficial de cargas en las superficies perpendiculares a la aceleración.

3. Un cilindro metálico macizo de radio R gira sobre su eje con una velocidad angular constante ω. Los electrones se mueven con el metal, con diferentes aceleraciones.

   - Calcule la intensidad de campo eléctrico como función de la distancia desde el eje del cilindro.
   - Calcule la diferencia de potencial entre el eje y la superficie del cilindro.

4. Muestre, con un cálculo directo, que la elección de un potencial escalar $\phi(\vec{r}) = 0$ para todo $\vec{r}$ y un potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0\, exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$ resulta en campos eléctrico y densidad de flujo magnético de la forma que llamamos onda plana. ¿Para qué condición entre $\vec{A}_0$ y $\vec{k}$ es esto cierto? ¿Es válida aún nuestra convención entre los potenciales?

6.10. Actividades prácticas

- Existen varias simulaciones relacionadas con el problema de una carga acelerada. Ensaye y estudie los efectos que se describen cuando una carga tiene movimientos acelerados, cargando el programa xyZet y los archivos Bremsstrahlung.exp, Schwingende_Ladung.exp y Schwingende_Ladung_Feld.exp.

  También el archivo Ladung_und_Feld.exp resulta interesante para nuestros propósitos de comprender las predicciones de la teoría.

7

Reflexiones sobre los campos (1)

7.1. Introducción

En varias ocasiones se ha mencionado que el estado de un cuerpo cargado es un estado lejos del equilibrio; eso quiere decir que se ha realizado trabajo sobre el conjunto de cargas para separar las positivas y las negativas. En la primera parte de este capítulo calcularemos el trabajo realizado, que estará disponible como "energía almacenada" cuando se permita que las cargas vuelvan a su equilibrio. Comenzaremos por un sistema de cargas aisladas y luego pasaremos a sistemas continuos. Presentaremos una de las dificultades (actuales aún) del electromagnetismo clásico.

Uno de los procesos por los que "se pierde" energía eléctrica[1] es el calentamiento de los cuerpos por los que circula la corriente. Consideraremos brevemente la relación entre el campo eléctrico aplicado a las portadores de carga y la intensidad de la corriente. El examen detallado de las formas de conducción en diferentes materiales queda fuera del alcance de este libro. Este tratamiento elemental será importante cuando consideremos el trabajo realizado por agentes externos.

También vamos a considerar cómo son los campos electrostáticos cerca de los conductores. En el capítulo sobre electrostática se afirmó que se pueden generar campos de geometrías especiales, con un buen grado de

[1] El lector entenderá, naturalmente, que esta es otra forma coloquial de referirse a una conversión de energía. La misma forma de expresión es empleada por las empresas generadoras o distribuidoras cuando cobran "el consumo de energía".

aproximación, empleando conductores como equipotenciales. Se justificará esa afirmación. Finalmente se considerará el comportamiento de los dispositivos llamados condensadores.

7.2. La energía de una colección de cargas puntuales

Consideremos un conjunto de N cargas puntuales q_i situados en posiciones $\vec{r}_i$ (donde i va de 1 a N). ¿Cuánto trabajo habrá sido necesario para formar esa distribución de cargas? Para calcularlo, supondremos que el estado inicial era de cargas sin interacción apreciable, es decir, muy lejos unas de otras [2].

Sabemos que el campo electrostático es conservativo y puede ser descrito en términos de un potencial escalar

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{7.1}$$

Sabemos también que la fuerza eléctrica sobre una carga q es

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \tag{7.2}$$

El trabajo que debemos realizar contra las fuerzas eléctricas para llevar una carga q desde un punto P hasta un punto Q es

$$W = -\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{l} = -q\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_P^Q \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{l} = q[\phi(Q)-\phi(P)] \tag{7.3}$$

El signo negativo en la expresión anterior resulta porque debemos ejercer una fuerza $-\vec{F}$ sobre la carga para contrarrestar la fuerza ejercida por el campo eléctrico. Recuérdese además que el potencial escalar generado por una carga q' situada en la posición $\vec{r}'$ es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{7.4}$$

Consideremos que se ha construido la colección de cargas una por una. No se requiere trabajo para traer la primera, porque no hay campo eléctrico en contra. Fijada esta carga en la posición $\vec{r}_1$, para traer la segunda carga hasta la posición $\vec{r}_2$ habrá que trabajar en contra del campo eléctrico generado

[2] Algunos autores llaman a este trabajo la *energía interna* del sistema de cargas.

por la primera. De acuerdo con las ecuaciones (7.3) y (7.4), este trabajo está dado por

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{7.5}$$

Cuando se trae la tercera carga, como los campos eléctricos y los potenciales se suman, el trabajo realizado para llevar esta tercera carga hasta la posición $\vec{r}_3$ será simplemente la suma de los trabajos realizados contra el campo generado por cada una de las cargas 1 y 2 tomados por separado

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right) \tag{7.6}$$

Y el trabajo total realizado para traer las tres cargas es

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right) \tag{7.7}$$

Este resultado se puede generalizar para las N cargas, así,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i\, q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{7.8}$$

La restricción de que j debe ser mayor que i hace la suma anterior algo complicada. Si fuéramos a sumar sobre todos los posibles pares, con la restricción $j \neq i$, cada pareja de cargas sería contada dos veces. Resulta conveniente escribir la expresión para el trabajo sumando sobre los pares, pero dividiendo por dos para encontrar el resultado correcto

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i\, q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{7.9}$$

Esta es la energía potencial de la colección de cargas. Podemos considerar esta ecuación como la expresión del trabajo realizado para traer las cargas desde "el infinito" a las posiciones especificadas. También será la energía cinética que se liberará si cada una de las cargas quedara libre de moverse desde la posición especificada. ¿Cómo se almacena esta energía? Una interpretación es que se almacena en el campo eléctrico. Se puede argumentar como sigue. La expresión (7.9) puede ser escrita como

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i \tag{7.10}$$

donde

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{7.11}$$

es el potencial escalar en la posición $\vec{r}_i$ de la i-ésima carga, debido a las otras cargas de la colección.

Una expresión para la energía potencial de una distribución continua de carga podría ser obtenida por analogía con las expresiones (7.10) y (7.11), convirtiendo las sumas en integrales

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \, \phi \, d^3\vec{r} \tag{7.12}$$

donde

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}')|} \, d^3\vec{r}' \tag{7.13}$$

es el potencial generado por una distribución continua de carga. Pongamos a prueba estas expresiones. Sabemos que la ley de Gauss se puede expresar como

$$\rho = \epsilon_0 \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \tag{7.14}$$

De modo que la ecuación (7.12) puede escribirse como

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r} \tag{7.15}$$

La derivada de un producto por escalar suministra el resultado

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \, \phi) = \phi \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}\phi \tag{7.16}$$

Con $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$ obtenemos

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \, \phi) \, d^3\vec{r} + \int E^2 \, d^3\vec{r} \right] \tag{7.17}$$

Podemos aplicar el teorema de Gauss a la primera integral, para tener

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\oint_S (\vec{E} \, \phi) \, d\vec{S} + \int_V E^2 \, d^3\vec{r} \right] \tag{7.18}$$

Donde V es un volumen que encierra las cargas y S, la superficie que rodea ese volumen. Supongamos que el volumen V es una esfera centrada en el origen y tomemos el límite de la expresión (7.18) cuando esta esfera se hace muy grande. Sabemos que el campo eléctrico, en general, para grandes distancias de una distribución de carga, decae como $1/r^2$. El potencial decae como $1/r$. Pero el área de la esfera crece con r^2. En el límite $r \to \infty$ (es decir: para volúmenes bastante grandes), la integral de superficie en (7.18) decae como $1/r$ y se hace cero. Nos queda entonces

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, d^3\vec{r} \tag{7.19}$$

como expresión para la energía potencial, integrando sobre todo el espacio –donde $E \neq 0$–. Esto lo podemos interpretar como que la energía potencial está almacenada en el campo eléctrico. Si tomamos la energía almacenada en una unidad de volumen, podremos decir que la densidad de energía eléctrica es

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tag{7.20}$$

Nótese que no es posible medir la energía eléctrica en una parte de un volumen total. Solo la energía total es medible. El concepto de densidad de energía será conveniente cuando se piense en relaciones de energía; se usará con frecuencia en la teoría electromagnética.

Tomemos el otro camino para calcular la energía. Imaginemos que se construye la distribución de carga como una sucesión de capas delgadas de carga colocadas una encima de la otra. En cada paso se trae una pequeña cantidad de carga desde muy lejos y se distribuye encima de la carga que ya está concentrada en una esfera de radio r (Figura 7.1).

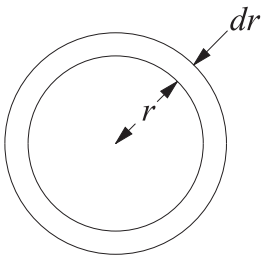

FIGURA 7.1. Sobre la adición de una capa de carga eléctrica

La nueva capa de carga va de r a $r + dr$. Se continúa el proceso hasta que el radio de la esfera sea a. Si la carga $q(r)$ es la contenida en la esfera de radio r, el trabajo realizado al traer la carga dq hasta ella será el producto del potencial de la carga que ya estaba por la nueva carga aportada[3]

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r} dq \tag{7.21}$$

Si la densidad de carga en la esfera es constante, la carga que ya estaba es

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{7.22}$$

[3] Recuérdese que el campo y el potencial generados por una distribución esférica simétrica de carga son iguales al caso en que la carga estuviera concentrada en el centro.

y la carga nueva aportada es

$$dq = 4\pi r^2 \rho \, dr \tag{7.23}$$

Así, la expresión (7.21) resulta en

$$d\,W = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2 r^4 dr \tag{7.24}$$

El trabajo total necesario para construir toda la esfera de carga será la suma de estas contribuciones desde cero hasta el radio a

$$W = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho^2 \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0}\rho^2 a^5 \tag{7.25}$$

Esto, teniendo en cuenta que la carga total Q de la esfera es $(4/3)\pi\rho a^3$, es igual a

$$W = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a} \tag{7.26}$$

¿Qué valor resulta para la energía, a partir de la expresión (7.19)? Evaluémosla para esta misma distribución. Sabemos que el campo es radial y con simetría esférica, es decir $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$. Aplicando la ley de Gauss obtenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho \, dV \tag{7.27}$$

donde V es una esfera de radio r. Así,

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3} \qquad \text{para } r < a \tag{7.28}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad \text{para } a \leq r \tag{7.29}$$

Con todo esto, el trabajo realizado se puede calcular como

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a^6}\int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}\right) \tag{7.30}$$

que se reduce a

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\, a}\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a} \tag{7.31}$$

Este es el mismo resultado que ya habíamos obtenido. ¿Por qué comprobamos el resultado (7.26)? Porque es inconsistente con las ecuaciones de las que arrancamos, las (7.10) y (7.11). En (7.26) el resultado es definitivamente positivo, mientras que en (7.10) el resultado puede ser negativo –por ejemplo para una colección de dos cargas de sentido opuesto–. La inconsistencia se introdujo cuando se reemplazó la ecuación (7.11), que excluye explícitamente la interacción de una carga consigo misma, con la condición $i \neq j$. En la versión integral, (7.13), esa interacción no se excluye. Las energías potenciales (7.10) y (7.11) son distintas porque en la primera se comenzó con cargas puntuales –ya preparadas, por así decirlo– mientras en la segunda se trabajó con "cargas infinitesimales". Si fuéramos a trabajar la energía potencial de cargas puntuales, usando la ecuación (7.26), deberíamos sumar la energía necesaria para construir las cargas puntuales.

¿A qué es igual esa energía? En realidad es infinita. Una forma de verlo es suponer que nuestras cargas "puntuales" están realmente formadas por una carga distribuida en una esfera de radio a muy pequeño. De acuerdo con nuestros cálculos, la energía necesaria para construir la i-ésima carga es

$$W_i = \frac{3}{5}\frac{q_i^2}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{7.32}$$

Esta sería la "auto-energía" de la i-ésima carga. Podríamos entonces reescribir nuestra ecuación [7.19] para la energía como

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2\, d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\phi_i + \sum_{i=1}^{N} W_i \tag{7.33}$$

Para conciliar las dos expresiones. Pero si las cargas son realmente puntuales, entonces $a \to 0$ y las autoenergías de las cargas se vuelven infinitas. La energía potencial predicha por las dos ecuaciones difiere en una cantidad infinita. ¿Qué significa esto? La idea de localizar la energía potencial en el campo resulta inconsistente con la suposición de cargas puntuales. ¿Qué

alternativas hay? Una de ellas es suponer que las cargas elementales, como los electrones, no son puntuales, sino que tienen una cierta extensión, son distribuciones de carga. Otra salida es aceptar que la teoría clásica del electromagnetismo deja de ser válida a muy pequeñas escalas de longitud –y echamos la culpa a efectos cuánticos–. Solo que la "versión cuántica" del electromagnetismo sufre de los mismos problemas. Este, el problema de las autoenergías de las partículas cargadas, es una dificultad que no está aún resuelta[4].

7.3. La ley de Ohm

La experiencia muestra que en un conductor circula una corriente de intensidad I cuando se aplica entre sus extremos una diferencia de potencial V, que en la forma más simple se relacionan como $V = IR$, donde R es una "constante" llamada resistencia. Esta relación suele llamarse "ley de Ohm". Aquellos conductores –muy escasos– en los que R es constante (al menos en forma aproximada) suelen llamarse *conductores óhmicos*. La unidad de resistencia es *voltio/amperio* y se denomina *ohm* o simplemente Ω. Su inverso es el Siemens, $1\,S = 1$ A/V. Por ahora solo queremos generalizar esta relación empírica y encontrar su forma vectorial.

Consideremos para ello una longitud l de un material conductor, de sección transversal S, con una corriente I que va por él en la dirección axial, que tomaremos como $\overrightarrow{Oz}$. En general, esperaremos –empíricamente– que la resistencia del conductor sea proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su sección[5].

[4] Véase el libro de Feynman, Leighton, Sands, *Las conferencias de física de Feynman*, Addison Wesley, Reading, 1964, volumen 2, capítulo 8.

[5] Una consideración cualitativa podría ser parecida a la siguiente. Los electrones en un metal se desplazan bajo la acción del campo eléctrico externo, pero al desplazarse deben viajar en regiones con potenciales eléctricos generados por otros electrones y por los iones del material. Esto significa una fuerte interacción de los electrones con el resto del material, que se ha comparado con los choques en mecánica. En estos choques, la energía ganada por los electrones, debida al campo externo (trabajo de la batería), se transmite al resto del material. Entre mayor sea la longitud viajada, mayor será esa pérdida de energía cinética. En términos de medida macroscópica, se traduce como una resistencia del medio al movimiento de los electrones. La explicación cualitativa del efecto del área se deja al lector.

Georg Simon Ohm publicó, en 1827 los resultados de una serie de experimentos diseñados para relacionar una corriente eléctrica –medida, ahora sí, por los efectos magnéticos– con el potencial aplicado. Su observación inicial es que la f.e.m. de una pila parecía disminuir cuando los alambres de conexión se hacen largos; la disminución depende del material del alambre y es proporcional a la longitud de los alambres. Uno de los problemas básicos resueltos por Ohm es el de mantener constante la diferencia de potencial durante la medida. La resolvió mediante el uso de generadores térmicos, los llamados termopares, en que la unión de dos alambres de metales diferentes se mantienen a temperatura constante y generan una diferencia de potencial muy pequeña, pero controlable. En la actualidad, una serie de tales elementos, llamado "termopila" se emplea como medidor de potencia radiante, por ejemplo en las investigaciones con láseres de potencia o en la energía solar.

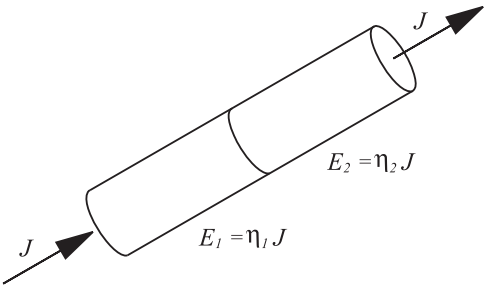

FIGURA 7.2. Sobre la relación entre campo e intensidad de corriente

Podemos entonces escribir que

$$R = \eta \frac{l}{S} \tag{7.34}$$

La constante del material que hemos denominado η se llama *resistividad* y se mide en unidades de *ohm.metro*. La ley de Ohm resulta así expresada como

$$V = \eta \frac{l}{S} I \tag{7.35}$$

Sabemos, además, que $I/S = J_z$ y que $V/l = E_z$, de modo que la ecuación anterior es también (Figura 7.2)

$$E_z = \eta \, J_z \tag{7.36}$$

La suposición inicial acerca del eje del conductor carece de importancia en un material isótropo, de modo que la fórmula anterior se puede generalizar como

$$\vec{E} = \eta \, \vec{J} \tag{7.37}$$

que es la forma vectorial de la ley de Ohm[6].

[6] ¿Cómo la generalizaría el lector para el caso de un material conductor no isotrópico?

Si una portadora de carga, con carga q, se mueve a través de una región con una diferencia de potencial V, ganará una energía $q\,V$ por la acción del campo eléctrico. En una resistencia, esa energía se transforma en calentamiento del material; se puede interpretar como una transferencia de energía y *momentum* de las portadoras de carga, que chocan con otras partículas que no se mueven[7].

Supongamos ahora que N portadoras pasan por unidad de tiempo a través de una sección del material. La intensidad de la corriente es $I = N\,q$. La energía ganada por las portadoras (insistimos, trabajo realizado por la batería sobre ellas), que aparecerá como calentamiento de la resistencia, es, por unidad de tiempo

$$P = N\,q\,V = I\,V \tag{7.38}$$

Es decir, la potencia calefactora será

$$P = I\,V = I^2 R = \frac{V^2}{R} \tag{7.39}$$

Estas ecuaciones se pueden generalizar a

$$P' = \vec{J}\cdot\vec{E} = \eta\,J^2 \tag{7.40}$$

donde P' es ahora la potencia disipada por unidad de volumen en el material resistivo (en realidad es la energía eléctrica convertida en térmica durante un segundo).

La resistividad de los materiales, que hemos denominado η, es una propiedad que tiene un rango enorme de valores, como muestra la tabla siguiente.

Material	1/Resistividad $(\Omega\,m)^{-1}$	Conducción por
Cobre	$6,5\cdot 10^{7}$	Electrones
Plomo	$5,2\cdot 10^{6}$	libres
Carbono	$2,9\cdot 10^{4}$	Electrones
Germanio	$2,2\cdot 10^{0}$	excitados
Silicio	$4,6\cdot 10^{-3}$	térmicamente
NaCl	$1,7\cdot 10^{-7}$	Iones que se
Vidrio	$10^{-13}\cdots 10^{-7}$	difunden

En varios tipos de materiales se puede explicar el comportamiento de la resistividad por un modelo de los "mecanismos" de conducción eléctrica.

[7] Una teoría más acertada deberá tener en cuenta los *choques* con los defectos de las redes cristalinas, con las ondas mecánicas, etcétera.

Con base en estos mecanismos se acostumbra a clasificar los conductores sólidos en aislantes, semiconductores, conductores y hasta superconductores. El estudio de estos mecanismos corresponde a un curso de mecánica cuántica de los sólidos. En otros materiales, como se ha mencionado, las portadoras de carga pueden ser iones positivos y negativos, además de los electrones. Se pueden encontrar, además, agrupaciones más complicadas de varias moléculas atraídas por los iones, a modo de racimos, que se mueven como unidades portadoras de carga. El comportamiento de tales cuerpos en un campo eléctrico es, naturalmente, muy complicado[8]. Resulta muy interesante el movimiento de moléculas más complejas a través de medios líquidos o semilíquidos, bajo la influencia de un campo eléctrico, como es el caso de la "electroforesis en gel" empleada para separar moléculas, en las investigaciones biofísicas[9].

7.4. El efecto Hall

Ya se mencionó el efecto Hall cualitativamente, en relación con la medición de campos magnéticos. Se puede ahora avanzar en forma cuantitativa, para el caso en que las portadoras de carga sean electrones (Figura 7.3). La tensión Hall, V_H, entre los bordes de la lámina conductora se puede describir por medio de un campo eléctrico

$$E_H = \frac{V_H}{b} \tag{7.41}$$

donde b es el ancho de la lámina. Los electrones, con carga $-e$, experimentan un desplazamiento debido a la fuerza magnética, hasta que esta queda compensada por la fuerza eléctrica dada por la expresión (7.41).

En el estado estacionario habrá equilibrio entre esas fuerzas, es decir

$$\vec{F_B} = -\vec{F_E}$$
$$-e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}_H$$

[8] Aunque la ley de Ohm casi nunca se cumple exactamente, porque la resistencia de un conductor depende de variables como la temperatura o incluso la intensidad de la corriente, un efecto descubierto hacia el final del siglo XX, el llamado efecto Hall cuántico, permite definir un patrón de resistencia, de modo que –como se mencionó anteriormente– muchos laboratorios de metrología pueden tener patrones de f.e.m. y patrones de resistencia, para realizar la unidad 1 amperio.

[9] El lector interesado puede consultar la página colombiana www.javeriana.edu.co/Facultades/Ciencias/neurobioquimica/libros/celular/electroforesis.html o la cubana www.bvs.sld.cu/revistas/uni/vol1_2_00/uni07200.htm.

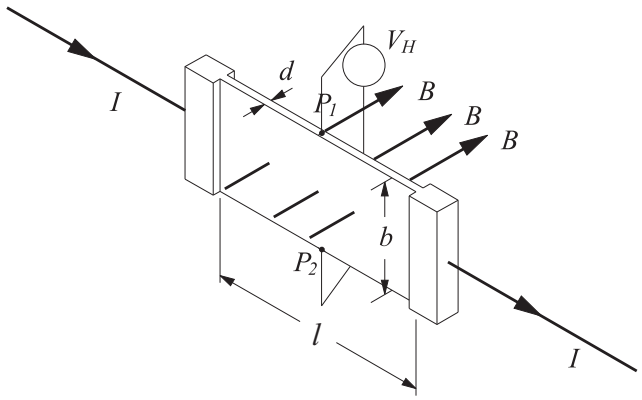

FIGURA 7.3. La geometría para un sensor de efecto Hall

Dado que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$, vale para las magnitudes de los vectores $evB = eE_H$, o sea

$$v = \frac{E_H}{B} = \frac{V_H}{bB} \tag{7.42}$$

Con esta relación se puede determinar la velocidad promedio de los electrones.

La velocidad promedio de los electrones se puede expresar como proporcional al campo eléctrico aplicado a lo largo de la lámina, $v = m_u\, E_a$; se denomina "movilidad" al factor de proporcionalidad m_u. El campo aplicado E_a se puede expresar en términos de la intensidad de la corriente I, la longitud l y la resistencia R de la lámina

$$E_a = \frac{V_a}{l} = R\frac{I}{l} \tag{7.43}$$

Sabemos, además, que $R = \eta\, l/A$, donde η es la resistividad del material. Así se llega al resultado, empleado anteriormente

$$V_H = m_u\, E_a\, b\, B = m_u\, \eta \frac{IB}{d} = R_H \frac{IB}{d} \tag{7.44}$$

En el caso de los metales $\eta = 1/m_u\, n\, e$, con n la densidad de portadoras, electrones, de modo que $R_H = 1/n\, e$. Se puede, entonces, a través de mediciones del efecto Hall, determinar la densidad de electrones en unmetal.

La siguiente tabla muestra valores de la constante Hall para algunos materiales[10]

Material	R_H en $m^2/A\,s$
Cobre	$-5,3 \times 10^{-11}$
Plata	$-8,9 \times 10^{-11}$
Bismuto	$-5,0 \times 10^{-7}$
Arseniuro de indio	-1×10^{-4}
Arseniuro fosfuro de indio	-2×10^{-4}
Cadmio	$+6,0 \times 10^{-11}$
Cinc	$+1,0 \times 10^{-10}$

7.5. Campos estáticos en conductores

Supongamos que se aplica un campo eléctrico estático a un buen conductor (un material de conductividad alta). Recuérdese el cálculo realizado de la distribución de potencial alrededor de un cilindro conductor. ¿Qué ocurrirá? El campo eléctrico impulsará el movimiento de cargas[11], y estas se redistribuirán dentro del conductor hasta que el campo eléctrico (la suma del campo externo inicial más el de las cargas redistribuidas) se anula y el conductor vuelve a ser una región *equipotencial*. Las cargas, entonces, cesan de fluir. Podría pensarse que las corrientes podrían seguir circulando en lazos cerrados, pero, de acuerdo con la ley de Ohm, esto requeriría una f.e.m. diferente de cero, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$, actuando sobre cada lazo[12]. Pero sabemos que en estado estacionario ,la circulación del campo es cero

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{7.45}$$

[10] Una explicación cualitativa para el gran valor de R_H en los semiconductores es que en ellos hay muchas menos portadoras de carga que en los metales –del orden de 10^{-3} hasta 10^{-11}–, de modo que, para intensidades de corriente iguales, la velocidad promedio de las portadoras es mucho mayor y la fuerza magnética también. Por ello, para intensidades de corriente de algunos miliamperios y en campos magnéticos débiles, se pueden medir tensiones Hall apreciables. Las sondas Hall de materiales semiconductores se han vuelto muy comunes; por ejemplo en los motores que impulsan los disquetes o los discos duros funcionan como sensores de tiempo de rotación en los sistemas que mantienen constante la rapidez de rotación de esos elementos de almacenamiento de información.

[11] Aquí nos referimos a corrientes macroscópicas; una representación atómica de la estructura de los materiales muestra que hay cargas en movimiento –los electrones– en regiones cerradas, que no constituyen corrientes en el sentido que empleamos aquí para esa palabra.

[12] A menos que se trate de un *superconductor* con $\eta = 0$.

a lo largo de un lazo C cerrado. La alternativa es que

$$\vec{J} = \vec{E} = 0 \tag{7.46}$$

dentro del conductor. De aquí se sigue, aplicando la ley de Gauss, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, que $\rho = 0$ en el interior del conductor –en el estado estacionario, pero no necesariamente en el transitorio–. ¿Cómo es posible que se cancele el campo externo si no hay una densidad volumétrica de cargas? La respuesta es que las cargas –desequilibradas– estarán en la superficie del conductor. En realidad, dentro de unas pocas capas atómicas bajo la superficie. Sabemos que la diferencia en el potencial escalar entre dos puntos P y Q es

$$\phi(Q) - \phi(P) = \int_P^Q \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{7.47}$$

Pero si P y Q están dentro del conductor, es claro que la diferencia de potencial entre esos puntos es cero. Esto será cierto sin importar dónde están P y Q dentro del conductor, de modo que el conductor se constituye en una región de potencial escalar constante. Un corolario sería que la superficie de un conductor representa una superficie equipotencial, en el caso estático. En realidad esto ya se había aprovechado para realizar campos electrostáticos de geometrías definidas por medio de superficies conductoras.

No solo es cero el campo dentro del conductor. Es posible demostrar que en una cavidad cerrada dentro de un conductor el campo es cero, siempre que no haya cargas dentro de la cavidad misma. Para ello apliquemos la ley de Gauss (Figura 7.4) sobre una superficie S cerrada que rodee la cavidad y esté totalmente dentro del material conductor. Como el campo eléctrico es cero, su integral será cero, lo que nos dice que no hay una carga neta dentro de la superficie S. Todavía podría haber iguales cantidades de carga positiva y negativa distribuidas sobre la superficie interna.

Para mostrar que no es así, hagamos uso de la relación para estado estático (7.45) en un lazo cerrado C, que está parcialmente en la cavidad y parcialmente en el material conductor. Si hubiera líneas de campo dentro de la cavidad, irían de las cargas superficiales positivas a las negativas.

En presencia de campo eléctrico, la integral de línea de $\vec{E}$ a lo largo de la porción del lazo que está dentro de la cavidad no sería cero, pero a lo largo de la porción en el conductor sí es cero (porque el campo eléctrico es cero). Esto quiere decir que la integral cerrada no sería cero y esto contradice la ecuación (7.45). Esta ecuación implica que la integral de línea del campo, a lo largo de cualquier lazo que pase por la cavidad, de un punto en la superficie interna a otro, es cero. Esto solo puede ser posible si el campo eléctrico es cero en todas partes de la cavidad.

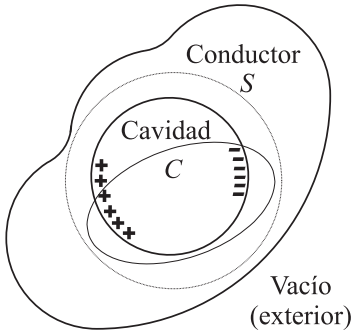

FIGURA 7.4. Sobre las cargas y campos en un conductor

Es claro que si la cavidad contiene carga neta, el argumento anterior falla, pero muestra que si una cavidad está completamente rodeada por material conductor, ninguna distribución estática de cargas fuera de ella producirá campos dentro (Figura 7.5). Esto tiene gran aplicación, porque podemos aislar –*blindar* es la palabra de la jerga técnica– un circuito eléctrico de los campos externos, colocándolo dentro de una envoltura metálica[13].

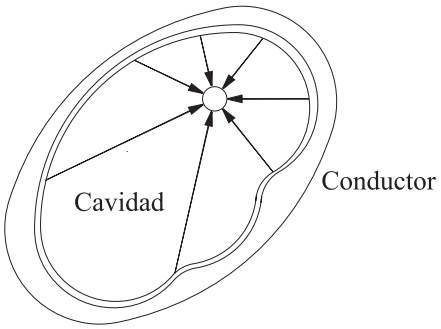

FIGURA 7.5. Acerca de la ley de Gauss *dentro* de un conductor

Naturalmente, el efecto de blindar funciona en ambas direcciones: una distribución estática de cargas encerrada en una cavidad de un conductor no produce un campo externo, siempre que el conductor esté conectado a un potencial definido, casi siempre cero o *tierra*. Seguir este razonamiento se lo dejamos al lector.

[13] Una experiencia muy simple es envolver un teléfono celular en una hoja de aluminio y llamar a él. ¿Que esperaría el lector? Otra experiencia inquietante es colocar el teléfono en el interior de un horno de microondas –sin que éste funcione, ¡claro está!– y llamar al teléfono. ¿Qué sucederá?

Continuemos considerando una región pequeña (Figura 7.6) cerca de la superficie del conductor. Supongamos que la densidad local de carga es σ y que el campo eléctrico justo fuera de la superficie es $\vec{E}$.

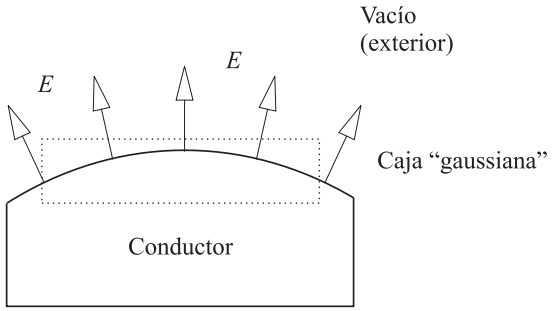

FIGURA 7.6. Sobre el campo eléctrico cerca de un conductor

Este campo debe ser *normal* a la superficie del conductor. Cualquier componente paralela a la superficie sería anulada cierto tiempo más tarde por las corrientes eléctricas que se producen. Otra manera de expresar esto es decir que la superficie es una equipotencial; sabemos que el gradiente del potencial, $\vec{\nabla}\phi$, es perpendicular a las superficies equipotenciales y por ello $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ debe ser perpendicular a la superficie conductora. Usemos la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, d^3\vec{r} \tag{7.48}$$

Donde V será una *caja gaussiana*, es decir un cilindro de altura infinitesimal y bases paralelas –localmente– a la superficie del conductor. Es claro que $\vec{E}$ no tendrá componente perpendicular a los lados de la caja, de modo que estos no tienen contribución al flujo en el lado izquierdo de la ecuación anterior. Tampoco la base que está dentro del conductor, porque para estos sitios $\vec{E} = \vec{0}$. La única contribución será, entonces, $E_\perp A$, donde $E_\perp$ es la componente de campo normal a la superficie y A el área de la sección de la caja.

La carga encerrada en la caja es simplemente $A\sigma$, de modo que la ley de Gauss expresa que

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{7.49}$$

es la relación entre el campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor y la densidad superficial de carga.

Examinemos esta situación con más detalle. Si consideramos que tenemos una densidad de carga superficial σ, esperaríamos que, por simetría, existiera un campo debajo de la capa de carga, simétrico respecto del superior

(Figura 7.7). Si calculáramos el flujo sobre la caja gaussiana, ambas bases contribuirían en $E_{capa}A$ a la integral de superficie, donde E_{capa} es la magnitud del campo generado arriba y abajo de la capa[14].

La aplicación de la ley de Gauss nos da un campo simétrico, es decir

$$\begin{aligned} E_{\text{capa}} &= +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} && \text{arriba,} \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} && \text{abajo.} \end{aligned}$$

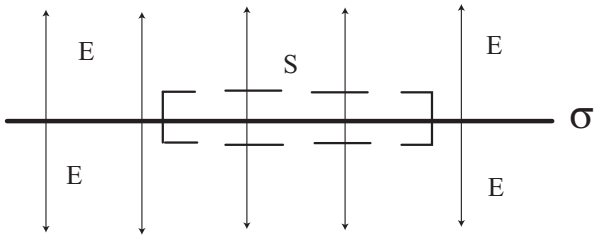

FIGURA 7.7. Sobre el cálculo de los campos cerca de un conductor

Entonces, ¿cómo surge el campo *asimétrico* alrededor de una superficie conductora? Las fórmulas obtenidas nos dicen que debemos sumar un campo adicional –no generado por la distribución superficial de carga– de magnitud

$$E_{\text{externo}} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{7.50}$$

tanto arriba como abajo de la capa de carga. El campo total es la suma del campo generado por la capa y del campo externo, para obtener

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= +\frac{\sigma}{\epsilon_0} && \text{arriba,} \\ &= 0 && \text{abajo.} \end{aligned}$$

para estar de acuerdo con el argumento anterior.

En el capítulo sobre el potencial electrostático se mencionó ya el caso de una barra o cilindro de material conductor que se introduce dentro de un campo eléctrico uniforme, con su eje perpendicular a la dirección del campo inicial (que denominamos campo exterior, $\vec{E}_{ext}$). El campo resultante fuera del cilindro, en coordenadas cilíndricas, está dado por

[14] Es un cálculo ya realizado en el capítulo sobre electrostática.

$$\vec{E} = \hat{r}E_{\text{ext}}\left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right]\cos\theta - \hat{\theta}E_{\text{ext}}\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right]\operatorname{sen}\theta \tag{7.51}$$

Con a el radio del cilindro. Para la superficie conductora, es decir $(r = a)$, la expresión se simplifica a

$$\vec{E}(a,\theta) = \hat{r}E_{\text{ext}}2\cos\theta \tag{7.52}$$

Lo que se puede interpretar como el efecto de la presencia de una distribución de carga superficial, con densidad $\sigma(\theta) \sim \cos\theta$, que modifica el campo inicial[15]; esta es, claro está, la solución estacionaria; no se puede esperar que en el caso de un campo variable con el tiempo o con una conductividad baja, la solución sea tan sencilla.

Otro asunto interesante: el campo externo ejerce una fuerza sobre la capa de carga[16]; así, la fuerza que actúa sobre la superficie del conductor actúa siempre hacia afuera y está dada –por unidad de superficie– por la relación

$$p = \sigma\, E_{\text{externo}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \tag{7.53}$$

donde E es el valor del campo eléctrico inmediatamente fuera de la superficie del conductor. Es decir, habrá una presión electrostática actuando sobre un conductor. Este efecto puede visualizarse cargando pompas de jabón: la presión adicional las puede romper. Nótese que, de acuerdo con la fórmula anterior, la presión electrostática es equivalente a la densidad de energía justo fuera del conductor; esto no es casual. Supongamos que el conductor se expande en una distancia dx debido a esa presión electrostática. El campo eléctrico será entonces excluido de la región que ahora ocupará el conductor expandido. Esta región tiene un volumen $dV = dx\,A$, con A la superficie del conductor. La energía del campo decrecerá en una cantidad $dE = u_E dV = (\epsilon_0/2)E^2 dV$, donde u_E es la densidad de energía del campo. Este decremento de energía debe suponerse debido a un trabajo realizado por el campo sobre el conductor para que este se expanda. Este trabajo será $W = pAdx$, donde p es la fuerza por unidad de área que el campo ejerce sobre el conductor. Si consideramos la conservación de la energía, $dE = dW$, entonces

$$p = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \tag{7.54}$$

[15] Y a su vez es el resultado de las fuerzas debidas al campo externo.

[16] El campo generado por la capa no ejerce fuerza sobre la capa misma; de manera similar una carga no ejerce fuerza sobre sí misma.

Las fuerzas que actúan sobre el conductor son hacia afuera; ¿qué tan grandes son? ¿Como para lograr que un recipiente metálico explote? Si calculamos, por ejemplo, qué tan grande es el campo que produce una presión equivalente a la de una diferencia de presión igual a una atmósfera, $\approx 10^5 N/m^2$, encontraremos $E \approx 10^8$ V/m. Es un campo tan grande que, en condiciones reales, no corremos riesgo de romper un conductor metálico, pero sí uno líquido, la pompa de jabón mencionada arriba[17].

7.6. Las condiciones de frontera

En muchas aplicaciones de la teoría de los campos electromagnéticos es importante conocer las condiciones de frontera que satisfacen los campos eléctricos en las superficies de separación de dos medios materiales, como las superficies entre un conductor y el espacio "vacío". Las condiciones se encuentran aplicando las mismas ecuaciones de Maxwell, en forma integral, a la superficie, empleando la caja gaussiana que ya conocimos, cuando se trata de emplear ecuaciones relacionadas con divergencias –o lo que es lo mismo, con flujos– y como camino de integración, para las ecuaciones con rotacionales, un lazo *stokesiano*[18], que tiene dos lados largos, paralelos a la superficie de separación y dos muy cortos perpendiculares a ella. Consideremos una superficie de separación P entre dos medios, M_1 y M_2 (Figura 7.8).

¿Qué forma toma la ley de Gauss? En el límite que ya se mencionó, cuando las tapas de la caja gaussiana se hacen arbitrariamente cercanas, el flujo de campo eléctrico en los lados de la caja se hace despreciable y solo queda la contribución de las tapas

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_{\perp 1} - E_{\perp 2})A \tag{7.55}$$

donde $E_{\perp i}$ es la componente perpendicular del campo a la tapa en el medio M_i $(i = 1, 2)$ y A la sección de la tapa. La carga encerrada en la caja es σA, con σ la densidad superficial de carga en la superficie entre los medios. La contribución de cualquier distribución volumétrica de carga es despreciable

[17] Esta igualdad entre presión y densidad de energía es similar a la equivalencia entre tensión superficial y la energía necesaria para crear una superficie nueva en un líquido de área unitaria. Esta última es la relación empleada en la determinación experimental de esas cantidades.

[18] Emplearemos esta designación, que no es usual, como analogía del nombre muy usual de caja gaussiana.

en el límite de las tapas muy cercanas. La ley de Gauss expresa entonces que

$$E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{7.56}$$

Es decir, que la presencia de una densidad superficial de carga produce una discontinuidad en la componente del campo eléctrico que es perpendicular a la superficie.

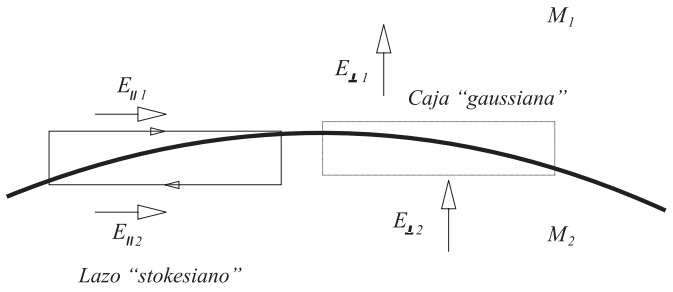

FIGURA 7.8. Sobre las condiciones de frontera

Y ¿qué expresará la ley de Faraday, aplicada al lazo mencionado? Los términos predominantes en la integral de línea se deben a los lados largos,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \simeq (E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2})l \tag{7.57}$$

donde $E_{\parallel i}$ $(i = 1, 2)$ es la componente del campo eléctrico paralela a la superficie y l la longitud de los lados largos, etcétera. El flujo del campo magnético a través de la superficie tendida sobre el lazo es aproximadamente $B_\perp S_l$, donde S_l es el área del lazo. Pero $S_l \to 0$ cuando los lados cortos del lazo se aproximan entre sí y el flujo magnético tiende a cero –excluimos el caso en que el campo $\vec{B}$ se hace infinito–. Entonces la ley de Faraday nos dice que

$$E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0 \tag{7.58}$$

Es decir, la componente paralela del campo eléctrico es continua.

Estas relaciones tendrán que ser revisadas cuando se analice la situación de los campos eléctricos en la presencia de materiales diversos.

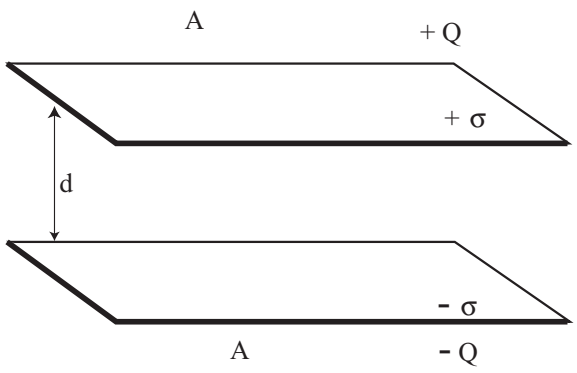

FIGURA 7.9. La geometría de un condensador de placas planas

7.7. Condensadores

Un condensador consiste en dos piezas de material conductor de la electricidad, separados por un material aislante[19]. Se pueden transferir cargas de un trozo de material conductor a otro y se dice que el condensador "está cargado"; se requiere que no haya un camino de regreso para las cargas transferidas: suele decirse que los dos conductores están aislados. El aire seco es un buen aislante, aunque su cualidad como aislante, depende del campo eléctrico que exista. Por ejemplo, para campos superiores a un valor crítico de $E_{crit} \simeq 10^6\, V/m$ deja de ser aislante. Esa cualidad depende, además, de la presión. Cuando el aire –en general, un gas– deja de ser aislante se produce una "ruptura" asociada a la formación de chispas eléctricas.

Consideremos, para simplificar nuestros cálculos, que los dos trozos de metal son placas paralelas (Figura 7.9) mucho más extensas que la distancia entre ellas y muy cerca del plano xy. Llamemos A al área de las placas y d a la distancia entre ellas ($d \ll \sqrt{A}$). Supondremos que cada placa tiene una carga de magnitud Q, aunque una de un signo y la otra del contrario. Podemos esperar que esa carga se distribuya en forma de densidades superficiales $\sigma = \pm Q/A$.

Para tomar una decisión, supongamos que la placa superior es positiva y la inferior negativa. De acuerdo con lo calculado en el capítulo de

[19] Esto es desde el punto de vista de quien sabe electricidad. Uno de los primeros tipos de condensador era una botella de vidrio con una hoja de metal por fuera y otra por dentro, conectadas por separado a contactos exteriores. Más tarde estudiaremos el efecto de un material en las propiedades eléctricas de un condensador. Por ahora supondremos que el aislante es un "vacío".

electrostática, el campo generado por la carga en la placa superior es normal a las placas y tiene magnitud

$$E_{sup} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{arriba} \tag{7.59}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{abajo} \tag{7.60}$$

De manera similar, la carga en la placa inferior genera un campo

$$E_{inf} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{arriba} \tag{7.61}$$

$$= +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{abajo} \tag{7.62}$$

despreciando las variaciones de ese campo constante cerca de los bordes de las placas. La superposición de estos campos resulta en un campo total

$$E_\perp = +\frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \text{entre placas} \tag{7.63}$$

$$= 0 \qquad \text{por fuera} \tag{7.64}$$

Como el campo es uniforme, la diferencia de potencial entre las placas es

$$V = E_\perp \, d = \frac{\sigma \, d}{\epsilon_0} \tag{7.65}$$

Se define una característica que relaciona la carga transferida entre placas, dividida por la diferencia de potencial entre placas. Se denomina *capacitancia* –antiguamente se decía capacidad– como

$$C = \frac{Q}{V} \tag{7.66}$$

La unidad de capacitancia es coulomb/voltio y se llama Faradio. Es una unidad muy grande y en la práctica suelen emplearse condensadores de micro –nano– y picofaradios. Como hemos visto, la capacitancia para un condensador de placas planas paralelas es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\,\sigma}{V} = \frac{\epsilon_0 \, A}{d} \tag{7.67}$$

Así, la capacitancia depende de factores geométricos; si duplicamos la carga trasferida, se duplicará la diferencia de potencial.

¿Cuánta energía se requiere para "cargar" un condensador hasta que en cada placa haya una carga $\pm Q$? Podemos suponer que el exceso de carga en cada placa se forma gradualmente, transfiriendo pequeñas cantidades de carga de

una placa hacia la otra –aquí es donde una batería suele manifestarse como "máquina que hace trabajo sobre las cargas"–. Si la carga en cada placa es $\pm q(t)$ y una cantidad de carga $+dq$ se transfiere de la placa negativa a la positiva, el trabajo realizado por la batería es $dW = V\,dq = q\,dq/C$, donde V es la diferencia de potencial instantánea en el tiempo, t, entre las dos placas. El trabajo total realizado para "cargar" el condensador será

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{7.68}$$

donde se ha empleado la definición de capacitancia (7.66). La energía "almacenada" en el condensador es igual al trabajo realizado para "cargarlo"

$$\text{Energía} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{7.69}$$

un resultado válido para todo tipo de condensador. Calculemos la energía en el campo eléctrico generado en un condensador de placas paralelas. El campo es aproximadamante, despreciando las deformaciones en los bordes, igual a $E_\perp = V/d$ y ocupa un volumen aproximadamente igual a $A\,d$. Dado que la densidad de energía en un campo eléctrico es $u_E = (\epsilon_0/2)E^2$, la energía almacenada en el campo será

$$\text{Energía} = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{V^2}{d^2}A\,d = \frac{1}{2}CV^2 \tag{7.70}$$

coincidiendo con la ecuación (7.69). Naturalmente, lo que se está describiendo es que si se conecta un condensador a los terminales de una batería, habrá una corriente por un cierto tiempo (una corriente transitoria) mientras el condensador "se carga". Como resultado, una cierta cantidad de energía, dada por la expresión (7.69) se almacena. Un condensador es, así, un dispositivo que puede almacenar energía[20].

¿Cómo se aplica, en este caso, la idea de que un campo eléctrico ejerce una presión sobre un conductor? La expresión para esa presión es $p = -(\epsilon_0/2)E^2$. Esto, aplicado a nuestro condensador de placas paralelas, significa una fuerza de atracción sobre cada placa –hacia la otra–, dada por

$$F = p\,A = \frac{\epsilon_0}{2}E_\perp^2\,A = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{d} \tag{7.71}$$

Un ejemplo más es el de dos cilindros conductores coaxiales, de radios a y b, con $a < b$. ¿Cómo es la capacitancia de un tramo de longitud unidad?

[20] Otra expresión alternativa es que un condensador se puede cargar, pero de energía. Se emplea una expresión similar, "cargar un acumulador", en la jerga de la electricidad automotriz, por ejemplo.

Supongamos que la carga por unidad de longitud es $+q$ en el cilindro interior y $-q$ en el exterior. Podemos suponer que el campo eléctrico es radial, $\vec{E} = E_r(r)\,\hat{r}$, empleando coordenadas cilíndricas. La ley de Gauss, aplicada a un cilindro de radio r y longitud uno, coaxial con los conductores, nos permite calcular el campo eléctrico. Para $a < r < b$, tendremos que

$$2\pi\, r\, l\, E_r(r) = \frac{q\, l}{\epsilon_0} \qquad\qquad E_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{7.72}$$

El campo eléctrico será cero para $r < a$ y para $b < r$. La diferencia de potencial entre los cilindros es

$$V = -\int_{\text{externo}}^{\text{interno}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\text{interno}}^{\text{externo}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \tag{7.73}$$

$$= \int_a^b E_r(r)dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} \tag{7.74}$$

De modo que

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{7.75}$$

Y la capacitancia por unidad de longitud de los dos cilindros concéntricos es

$$C' = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \tag{7.76}$$

7.8. El proceso de "carga" de un condensador

Se puede ganar información acerca del comportamiento transitorio de las cargas cuando se carga un condensador, considerando el sistema físico formado por la batería que realiza el trabajo[21], el condensador y una resistencia –que puede ser simplemente la resistencia de los alambres de conexión, pero incluye cualquier otra resistencia que se haya puesto en el paso de la corriente eléctrica– como un circuito eléctrico, adoptando el punto de vista favorito de los ingenieros electricistas. Las conexiones se esquematizan como aparece en la figura 7.10. Se supone que existe alambres ideales –sin resistencia– que conectan los diferentes elementos; un interruptor comienza en el tiempo $t = 0$ el proceso de carga del condensador.

Llamaremos $q(t)$ a la carga que se ha llevado en el tiempo t de una placa a la otra del condensador, $I(t)$ a la intensidad de la corriente y V_0 a la f.e.m. de la batería. R es la resistencia total presente.

[21] Si se quiere, se puede considerar otro tipo de máquina que realice la tarea, como un generador basado en la inducción electromagnética.

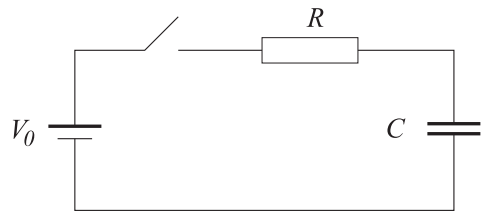

FIGURA 7.10. Acerca del proceso de *carga* de un condensador

La base del razonamiento es que el campo eléctrico (la f.e.m.) actúa sobre las portadoras de carga y las transporta; en cada elemento del circuito la diferencia de potencial y la intensidad de la corriente tienen una relación funcional y la suma de las diferencias de potencial entre los terminales de la batería es igual a la f.e.m. (la energía disponible para cada carga).

La relación entre carga y corriente es $I(t) = dq(t)/dt$, por definición. Entre los terminales –conexiones– de la resistencia hay una diferencia de potencial $V_R = R\, I(t) = R\, dq(t)/dt$. Entre los terminales del condensador, habrá, así, una diferencia de potencial $V_C = V_0 - V_R(t) = U_0 - R\, dq(t)/dt$.

Pero en el condensador la relación entre carga y diferencia de potencial es $q(t) = C\, V_C(t)$, de modo que se sigue

$$V_0 - R\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}q(t)$$
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V_0}{R}$$

Esta es una ecuación diferencial para la carga transportada. Es una ecuación "inhomogénea": contiene un término diferente de cero al lado derecho. Pero en este caso se puede convertir en homogénea, derivando con el tiempo cada término, lo que nos permite obtener

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dq}{dt} = 0$$
$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC}I(t) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea para la intensidad de la corriente. La función solución de ésta –se puede comprobar realizando las operaciones indicadas– que nos han encontrado los matemáticos, es

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{7.77}$$

La diferencia de potencial en el condensador –proporcional a la carga transferida– en el tiempo t será

$$V_C(t) = V_0 - R\,I(t) = V_0 - V_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = V_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{7.78}$$

Es decir, en tiempos comparables con el producto RC, la corriente será grande y el condensador aún no estará cargado (Figura 7.11).

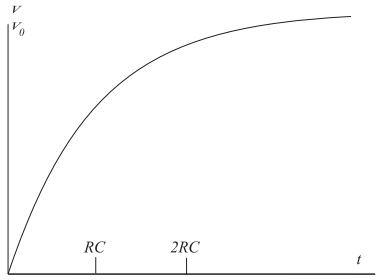

FIGURA 7.11. Sobre la diferencia de potencial en un condensador que se carga

Pero para tiempos $RC \ll t$ la corriente es despreciable y el condensador estará cargado. Esto es un comportamiento transitorio que se puede comprobar experimentalmente.

7.9. Resumen y comentarios

Para establecer una distribución arbitraria de cargas eléctricas es necesario realizar algún trabajo, por fuerzas externas al sistema de cargas o, lo que es más común, por máquinas capaces de mover cargas dentro de conductores, las llamadas baterías o generadores. Se considera, entonces, que la energía en ese sistema inestable está almacenada en el campo eléctrico. Resulta importante destacar un problema no resuelto aún: las autoenergías en la formación de *cargas puntuales*.

La ley de Ohm define una relación entre densidad de corriente y campo eléctrico, que depende de la "máquina" que esté suministrando energía a un circuito. Pero las corrientes a las que se refiere disipan energía eléctrica, de manera que será necesario explicar la existencia de corrientes que no disipan energía, para explicar las propiedades magnéticas de sistemas usuales, como los imanes permanentes.

El método de los circuitos, pese a sus limitaciones, resulta conveniente para calcular relaciones de energía en sistemas eléctricos sencillos. Es claro que

su validez está limitada a los casos en que la longitud de onda de los campos considerados es mucho mayor que las dimensiones del sistema experimental.

7.10. Temas para discusión

- Varios textos afirman que en el proceso de cargar un condensador "la diferencia de potencial V se opone al aumento de carga de cada placa". Discuta esa afirmación.

- Dos condensadores con capacitancia C_1 y C_2 se cargan inicialmente con cargas q_1 y q_2. Muestre que, excepto en casos especiales, la energía electrostática almacenada decrece cuando los condensadores se conectan en paralelo (placa positiva con positiva y negativa con negativa). ¿A dónde se va el resto de energía? ¿Para qué condiciones no hay pérdida?

  El lector interesado podría consultar el artículo de Boykin, T.B., Hite, D., Singh, N., The Two Capacitor Problem With Radiation, Am. J. Phys, **70**, 2002 (415-420).

- Es posible calcular la fuerza que actúa sobre una de las placas de un condensador a partir de consideraciones de energía: se iguala el trabajo requerido para alejar la placa en una distancia dx con la energía almacenada en el volumen adicional entre las placas. Discuta si considera el método razonable, universal, elegante.

- Las moléculas de agua tienen un momento de dipolo permanente. Las sales *inorgánicas* contienen iones positivos y negativos. ¿Cómo podría ser la interacción entre los dipolos y las carga que conduce a la disolución de las sales por el agua?

  El agua es una sustancia con propiedades muy peculiares. Quienes estén interesados podrían consultar la página de la London South Bank University www.lsbu.ac.uk/water/ para más información.

7.11. Ejercicios

1. Compruebe que la expresión (7.77) es una solución de la ecuación para la intensidad de la corriente durante la carga de un condensador. Calcule para los valores posibles $V_0 = 1,5$ V, $C = 1\,\mu$F y $R = 10\,\Omega$ el tiempo característico RC y el valor máximo de la intensidad de la corriente. ¿Qué pasará cuando la resistencia disminuye a un valor $R = 10\,m\Omega$, típico de un alambre de conexión?

2. Escriba la ecuación diferencial para la carga en un condensador durante el proceso de descargarlo (cuando no hay una batería, sino solo resistencia). Encuentre una solución y describa sus características. ¿Se trata de otro comportamiento transitorio? Si así fuera, ¿con qué tiempo característico? ¿con qué corriente máxima?

3. Un condensador de placas planas y paralelas con $C = 100$ pF y una separación entre placas $d = 0,01$ m se conecta con una batería que establece una diferencia de potencial $V_0 = 10$ V. Luego se desconecta la batería. Suponga que la placa inferior estaba conectada al potencial negativo. Esta placa se ilumina con luz azul, cuyo efecto es arrancar del metal electrones con energías entre 0 y $1,5$ eV. La intensidad de la corriente que va de la placa inferior hacia la superior varía con el tiempo como muestra la figura 7.12.

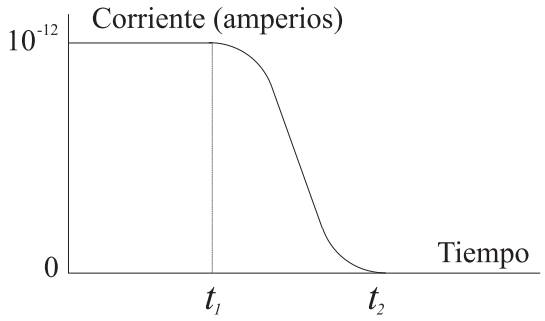

FIGURA 7.12. La intensidad de corriente en un experimento fotoeléctrico

- ¿En cuanto tiempo será la diferencia de potencial entre placas igual a cero (t_1)?
- ¿A qué será igual la diferencia de potencial para tiempos mucho mayores que t_2?

4. Muestre que cuando un dipolo de momento $\vec{p}$ se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, la energía electrostática es $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

- A partir de esta expresión, calcule el torque ejercido por el campo sobre el dipolo. ¿La interacción entre dipolo y carga es de atracción o de repulsión?
- La energía calculada anteriormente, ¿es igual si el dipolo se forma colocando las dos cargas, una después de la otra, en el campo? Si no es así, calcule la diferencia; si así es, justifique físicamente su argumento.

5. Un cascarón esférico de radio interno a y radio externo b está centrado en el origen de coordenadas. Se practica un pequeño agujero que atraviesa su pared. Si no hay carga neta en este conductor, ¿qué tanto trabajo se requiere para traer una carga q_1 del infinito, a través del agujero y hasta el origen de coordenadas? ¿Cómo cambia la respuesta si el cascarón tiene una carga total q_2?

7.12. Actividades prácticas

- Un experimento muy sencillo es medir la diferencia de potencial sobre un condensador cuando una batería lo está cargando. Se puede emplear el circuito de la figura en el texto, con los valores $V_0 = 9$ V, $R_0 = 1 \times 10^5$ Ohm, $C_0 = 1000$ μF. Estos tres elementos se conectan en serie y el voltímetro (se recomienda un instrumento digital) en paralelo con el condensador. Se mide la diferencia de potencial como función del tiempo.

- Una vez se da por terminada la carga del condensador, se puede retirar la batería. Hay dos opciones: conectar la resistencia R_0 al otro terminal del condensador o no conectar nada. Nuevamente se mide la diferencia de potencial como función del tiempo.

- Calcule el valor esperado para la constante de tiempo R_0C_0 y compárelo con lo que arrojan los resultados experimentales. Procure explicar cualquier discrepancia encontrada. ¿Qué comportamiento esperaría si la resistencia empleada fuera mayor que $R_0 = 1 \times 10^6$ Ohm? ¿Por qué?

- Si conecta alambres cortos de cobre a los terminales del condensador y, cuando este está cargado se conectan uno al otro, ¿qué efecto se podría esperar? ¿Para qué se puede emplear?

8

Reflexiones sobre los campos (2)

8.1. Introducción

En el capítulo anterior se han mencionado varias consideraciones acerca de la energía necesaria para establecer un campo eléctrico. También es necesario realizar un trabajo para establecer un campo magnético. A este tema dedicaremos algún espacio.

Antes exploraremos la proporcionalidad entre el flujo magnético y la intensidad de la corriente, en los dispositivos llamados inductancias[1].

También vamos a considerar cómo son los campos electrostáticos cerca de los conductores. En el capítulo sobre electrostática se afirmó que se pueden generar campos de geometrías especiales, con un buen grado de aproximación, empleando conductores como equipotenciales. Se justificará esa afirmación. Finalmente se discutirán ideas acerca del transporte de energía y *momentum* por las ondas electromagnéticas.

8.2. Inductancia

Hemos discutido acerca de capacitancias y resistencias; desde el punto de vista adoptado entonces, los circuitos se tratan como si estas propiedades

[1] El lector notará que no hay completa consistencia en la designación de la propiedad y del dispositivo; tampoco la hay en el caso de las resistencias: empleamos la misma palabra para los dos conceptos.

de un circuito estuvieran en un circuito ideal, separadas. En realidad, en un circuito siempre habrá parejas de conductores con diferentes potenciales, los cuales constituyen un condensador; suele hablarse de una capacitancia "parásita" o "distribuida". La resistencia de los alambres también es una resistencia distribuida. Además, los alambres de un circuito encierran campos magnéticos y pueden encontrarse flujos magnéticos que no son despreciables. La consideración de estos flujos magnéticos nos llevará a la definición de una propiedad de los circuitos, llamada inductancia.

Si consideramos dos lazos de alambre estacionarios, rotulados como C_1 y C_2, y una corriente estacionaria, I_1, circula en el primer lazo, se producirá un campo $\vec{B}_1$ (Figura 8.1). Podremos afirmar que algunas de las líneas de este campo pasarán a través del segundo lazo[2].

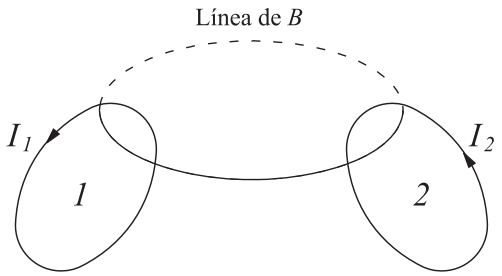

FIGURA 8.1. Sobre las líneas de campo que enlazan dos circuitos

Sea Φ_2 el flujo del campo $\vec{B}_1$ en el lazo C_2. Escribiremos que

$$\Phi_2 = \int_{C_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \tag{8.1}$$

Donde $d\vec{S}_2$ es un elemento de superficie de una área limitada por el lazo 2. Este flujo, en general, no es fácil de calcular, excepto para geometrías muy simples. Aún así, se puede afirmar, a partir de la ley de Biot y Savart, que la magnitud del campo $\vec{B}_1$ es proporcional a la intensidad de la corriente I_1

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{8.2}$$

Donde $d\vec{l}_1$ es un elemento de línea del lazo 1 situado en la posición $\vec{r}'$; en este caso es un punto del lazo C_2. Como consecuencia, el flujo magnético será proporcional a la intensidad de la corriente, es decir

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{8.3}$$

[2] Es claro que hemos empleado una expresión coloquial. ¿Cómo lo expresaría el lector?

Aquí hemos escrito M_{21} como una constante de proporcionalidad, llamada *inductancia mutua* de los dos lazos. Justificaremos, en lo que sigue, por qué la llamamos inductancia *mutua*.

Sabemos que el campo $\vec{B}_1$ se puede expresar en términos de un potencial vector

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \tag{8.4}$$

El teorema de Stokes nos permite expresar el flujo Φ_2 en términos del potencial vector que corresponde con $\vec{B}_1$

$$\Phi_2 = \int_{C_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{C_2} \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \tag{8.5}$$

Donde $d\vec{l}_2$ es un elemento de línea en el circuito 2. Además la expresión que relaciona el vector potencial con las corrientes dice que

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{8.6}$$

De esta manera

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{8.7}$$

Este resultado significa que

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{8.8}$$

La ecuación anterior nos permitiría determinar, en principio, el valor de la inductancia mutua. Casi nunca se usa para ello, porque suele ser difícil de calcular. Podemos, de todas maneras, deducir dos características importantes; primero, que la inductancia mutua es una cantidad puramente geométrica –si ignoramos la constante μ_0– y solo tiene que ver con posiciones relativas de los dos lazos, sus tamaños y formas. En segundo lugar, nos dice que si intercambiamos los papeles de los lazos 1 y 2, la integral no cambia, es decir un resultado sorprendente: podemos omitir los índices en la inductancia mutua; esto justifica, además, que la hayamos calificado de *mutua*. Podemos, entonces, eliminar los subíndices y decir que

$$M_{21} = M_{12} = M \tag{8.9}$$

En otras palabras, una corriente, I, circulando en el lazo C_1, produce un flujo magnético en el C_2 igual al que produciría la misma corriente, circulando en el lazo C_2, en el C_1, sin importar qué forma tienen estos lazos[3].

[3] Así se construyen inductancias mutuas patrón, formadas por un solenoide muy largo con una bobina corta alrededor y cerca del centro del solenoide. En este caso, el flujo fácil de calcular es el producido por el solenoide largo en la región donde está la bobina corta.

La corriente que circula en el lazo C_1 también produce un flujo magnético en este; este flujo también es proporcional a la intensidad de la corriente

$$\Phi = LI \tag{8.10}$$

La constante de proporcionalidad, L, se denomina *autoinductancia* y también depende de la geometría del lazo.

La unidad para inductancias –flujo magnético por unidad de corriente– en el sistema SI es el henry (H); $1\,H = 1$ volt $\cdot$ segundo/amperio. También es una unidad muy grande: son usuales las inductancias de micro o milihenry.

Realicemos el cálculo (aproximado) de la autoinductancia de un solenoide largo de radio r y longitud l (Figura 8.2). Sabemos que la intensidad de flujo

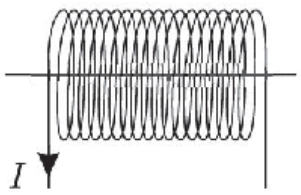

FIGURA 8.2. Geometría de un solenoide largo

magnético en el interior de este solenoide es aproximadamente uniforme, es axial y su magnitud está dada por

$$B = \mu_0 nI \tag{8.11}$$

con n el número de espiras por unidad de longitud. El flujo magnético por cada espira será $B\,\pi\,r^2 = \mu_0\,n\,I\,\pi\,r^2$. El solenoide tiene $n\,l$ espiras y el flujo total será

$$\Phi = n\,l\,\mu_0\,n\,I\,\pi\,r^2 \tag{8.12}$$

y la inductancia del solenoide es $L = \Phi/I$

$$L = n^2\,\mu_0\,\pi\,r^2\,l \tag{8.13}$$

Esta sencilla fórmula tiene limitaciones que el lector comprenderá: el campo $\vec{B}$ no es realmente uniforme en el interior ni estrictamente cero en el exterior de un solenoide real. Aún así, nos servirá como aproximación inicial a los órdenes de magnitud de las inductancias que sí se pueden construir[4].

[4] En la internet hay muchos documentos acerca de cálculos de inductancias. Muchos son, infortunadamente, muy inexactos. Se recomienda la consulta del libro de F. Kohlrausch, V. Kose y S. Wagner, *Praktische Physik*, Teubner, 1996, para fórmulas aproximadas, con explicación de su rango de validez.

8.3. La inductancia como parte de un circuito

Consideremos ahora que la corriente I, circulando por un solenoide, cambia. Supongamos por ahora que ese cambio es tan lento que los efectos de corriente de desplazamiento y de campos retardados son despreciables. Esto significa que el tiempo típico del cambio es muy largo comparado con el tiempo en que la luz avanza una longitud típica del circuito. En este caso, las fórmulas deducidas arriba tienen validez.

Un cambio en la intensidad de la corriente implica un cambio en el flujo magnético en el solenoide. De acuerdo con la ley de Faraday, este cambio genera una f.e.m. en él. Basados en la regla de Lenz, la f.e.m. tiene un sentido opuesto al cambio en la corriente, es decir

$$V_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{8.14}$$

si llamamos V_L a la f.e.m. generada.

Un solenoide está construido con alambre que tiene alguna resistencia eléctrica, R. ¿Qué pasará si conectamos el solenoide a una batería de f.e.m. dada por V_0? La resistencia y la inductancia del solenoide se representan

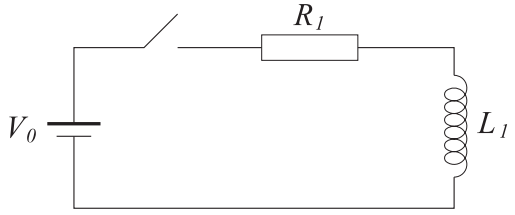

FIGURA 8.3. Esquema de un *circuito RL*

como una resistencia ideal (sin nada más) y una inductancia ideal (sin resistencia) (Figura 8.3). La relación entre tensión y la corriente en ésta es $V_L = -LdI/dt$. La ecuación que da la suma de tensiones en el circuito es

$$V_0 = IR + L\frac{dI}{dt} \tag{8.15}$$

Una ecuación diferencial para la intensidad de la corriente. La podemos reacomodar para obtener

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} - \frac{R}{L}I \tag{8.16}$$

Cuya solución general es de la forma

$$I(t) = \frac{V_0}{R} + K\, e^{-\frac{R}{L}t} \tag{8.17}$$

Para encontrar la constante K, supondremos que la batería se conecta en el tiempo $t = 0$, para el que $I = 0$, de modo que $K = -V_0/R$ y

$$I(t) = \frac{V_0}{R}[1 - e^{-\frac{R}{L}t}] \tag{8.18}$$

Se puede ver que, después de que la batería se conecta, la intensidad de la corriente aumenta y alcanza su valor estacionario V_0/R tras un tiempo comparable con la constante de tiempo del circuito, $\tau = L/R$ (Figura 8.4).

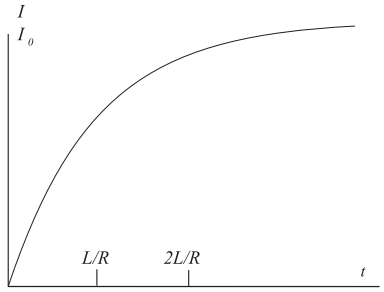

FIGURA 8.4. La intensidad de la corriente como función del tiempo

Analicemos el efecto de la autoinductancia. La f.e.m. generada por la inductancia actúa cuando hay aumentos o disminuciones de la intensidad de corriente, evitando que esta suba o caiga en tiempos mucho menores que τ. Este efecto puede ser conveniente o puede ser una molestia. Por ejemplo, si se conecta un circuito con inductancia cero a una batería, se generarían enormes campos eléctricos por el salto de corriente. Al revés, si se desconecta súbitamente la corriente en un solenoide, se genera un pico[5] de voltaje. En el caso de los electroimanes se acostumbra colocar una protección para evitar estos efectos, que podrían dañar equipos electrónicos delicados. Un circuito que limita la subida de la corriente se emplea en los llamados bombillos ahorradores de energía. Los alambres que llevan corriente a un generador de ondas en un horno de microondas se enrollan en forma de solenoide, para confinar las oscilaciones de alta frecuencia al interior del horno, donde se espera estén controladas.

[5] Pico o aguja son designaciones, en la jerga especializada, de un máximo pronunciado, pero de corta duración.

Estudiemos un efecto de la inductancia mutua que va a tener aplicaciones interesantes. Para ello, tomemos un caso ideal: supongamos que tenemos dos solenoides largos (Figura 8.5), uno puesto encima del otro, con sus ejes comunes (para nuestro caso ideal, podrían estar uno alrededor del otro.).

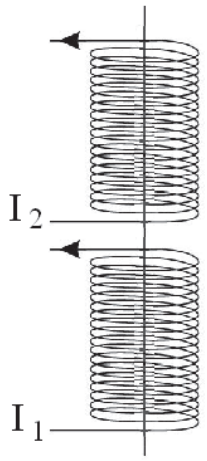

FIGURA 8.5. La geometría de dos solenoides acoplados

La longitud de cada solenoide es l y su radio r. El solenoide de abajo tiene n_1 vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente I_1. El flujo magnético que pasa por cada una de las espiras del solenoide de arriba es $\mu_0 n_1 I_1 \pi r^2$ y el flujo total en el solenoide de arriba es $\Phi_2 = n_2 l \mu_0 n_1 I_1 \pi r^2$, donde n_2 es el número de espiras por unidad de longitud en el solenoide de arriba. De aquí se puede calcular que la inductancia mutua de los dos solenoides está dada por

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \pi r^2 l \tag{8.19}$$

Recordemos que las autoinductancias de los solenoides están dadas por

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 \pi r^2 l \qquad\qquad L_2 = \mu_0 n_2^2 \pi r^2 l$$

De modo que la inductancia mutua en este caso, –ideal– es

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{8.20}$$

Anotaremos de paso que, en un caso más general, algo del flujo producido por un circuito *no pasa* por el otro, de modo que la inductancia mutua será menor que en el caso ideal

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{8.21}$$

con el "coeficiente de acoplamiento" k en el rango $0 \leq k \leq 1$.

Supongamos, además, que los solenoides tienen resistencias R_1 y R_2. Si el solenoide de abajo tiene una corriente $I_1(t)$ circulando por él y una tensión total V_1 entre sus extremos, la caída de tensión en la resistencia es $I_1(t)R_1$. La caída de voltaje –de tensión– en la inductancia debida a la autoinductancia será $L_1 dI_1/dt$. Habrá, además, una f.e.m. debido al acople inductivo con el solenoide de arriba. Sabemos que el flujo en el solenoide de abajo, debido a la corriente $I_2(t)$ en el solenoide de arriba es

$$\Phi_1 = MI_2 \tag{8.22}$$

aplicando la ley de Faraday (y la de Lenz) resulta que la f.e.m. en el solenoide de abajo, debida a la variación de la corriente en el de arriba, es

$$V_M = -M\frac{dI_2}{dt} \tag{8.23}$$

De esta manera, la ecuación del circuito para el solenoide de abajo es

$$V_1 = R_1 I_1 + L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} \tag{8.24}$$

en forma análoga, para el solenoide de arriba, la ecuación de circuito es

$$V_2 = R_2 I_2 + L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} \tag{8.25}$$

Con V_2 la tensión total en el solenoide de arriba.

Veamos qué ocurre cuando se conecta en forma súbita una batería de f.e.m. V_1 –constante– al solenoide de abajo en el tiempo $t = 0$. Supongamos que el solenoide de arriba no está conectado a nada –o a un voltímetro de muy alta resistencia, de modo que $I_2 = 0$–. ¿A qué es igual la f.e.m. inducida en el solenoide de arriba? La condición $I_2 = 0$ nos permite ver que la ecuación de circuito para el solenoide de abajo es, ahora,

$$V_1 = R_1 I_1 + L_1\frac{dI_1}{dt} \tag{8.26}$$

La solución de esta ecuación, para V_1 constante y $I_1(t = 0) = 0$, será

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}\left[1 - \exp(-\frac{R_1}{L_1}t)\right] \tag{8.27}$$

La ecuación de circuito para el solenoide de arriba es ahora

$$V_2 = M\frac{dI_1}{dt} \tag{8.28}$$

De modo que

$$V_2 = V_1\frac{M}{L_1}\exp(-\frac{R_1}{L_1}t) \tag{8.29}$$

o también

$$V_2 = V_1 k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\exp(-\frac{R_1}{L_1}t) \tag{8.30}$$

Si recordamos que las autoinductancias son proporcionales al cuadrado del número de espiras, se justifica que

$$V_2 = V_1 k\frac{n_2}{n_1}\exp(-\frac{R_1}{L_1}t) \tag{8.31}$$

Nótese que $V_2(t)$ es discontinua para $t = 0$. Eso no nos causa problemas, porque supusimos que la resistencia del solenoide de arriba es infinita, de modo que no hay discontinuidad en la corriente ni en el campo magnético. Pero ¿qué decir de la corriente de desplazamiento, proporcional a $\partial\vec{E}/\partial t$?[6]. Se afirmó, explícitamente, que se despreciarían estos efectos en el análisis del sistema: nuestras consideraciones valdrían para un experimento realizado en el *campo cercano* de una mesa de laboratorio. Se puede esperar, si hubiéramos mantenido estos términos, que el salto de tensión en el circuito de arriba no fuera realmente una discontinuidad, sino una rampa de tensión que tiene lugar en una escala de tiempo comparable con el tiempo que toma la luz para viajar una distancia comparable con el tamaño de nuestro circuito. Nuestros aparatos de medida serán, con seguridad, tan lentos, que para los fines prácticos el salto es instantáneo, aunque la corriente de desplazamiento permanece –por fortuna– finita.

Prosigamos nuestra discusión. La relación entre las tensiones en los dos circuitos es

$$\frac{V_2(t=0)}{V_1} = k\frac{n_2}{n_1} \tag{8.32}$$

de modo que si $n_1 \ll n_2$ hay un efecto de "amplificación de voltaje" considerable en el circuito de arriba. Esto constituye la base para la generación de picos de alta tensión en los motores de explosión o en los "carretes de inducción" que empleaban Hertz y sus colegas[7]. El circuito de abajo, llamado "primario" se conecta a una batería (de 12 V) y la acción de conectar

[6] Es claro que $\partial\vec{E}/\partial t$ es discontinuo en $t = 0$, una situación claramente irreal.

[7] Aunque es más eficaz un sistema que genera la alta tensión cuando se desconecta el circuito de abajo, cuando una corriente está circulando en el solenoide 1. La formación de chispas, que erosionan los contactos del interruptor, es uno de los problemas que aquejan a estos sistemas.

o desconectar la cumple un dispositivo mecánico. El enorme pico de voltaje inducido en el circuito secundario –del orden o superior a los 20.000 V– causa una chispa en este circuito. Esto significa que se debería escoger $1 \ll n_2/n_1$. Pero si el solenoide primario es mucho más corto que el otro, seguramente muchas líneas de campo no atravesarán al secundario y el coeficiente de acoplamiento k será muy bajo. En la práctica, un diseñador tendrá que buscar un compromiso para realizar solenoides con un número razonable de espiras y de una forma adecuada para localizar el flujo magnético en forma eficiente.

8.4. Energía e inductancia

Consideremos ahora el trabajo realizado por la batería sobre el circuito ya considerado. La batería tiene una f.e.m. V_0, el circuito, además, una resistencia R y una inductancia L. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ se realiza la conexión de la batería con el circuito. La ecuación del circuito es

$$V_0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{8.33}$$

La potencia suministrada por la batería es $V_0 I$ [8]. El trabajo total realizado por la batería desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = T$ será

$$W = \int_0^T V_0 I \, dt \tag{8.34}$$

Aprovechando la ecuación del circuito, (8.33), obtenemos

$$W = L\int_0^T I\frac{dI}{dt}\, dt + R\int_0^T I^2\, dt = \frac{1}{2}LI_T^2 + R\int_0^T I^2\, dt \tag{8.35}$$

El último término en esta ecuación representa la conversión irreversible de energía eléctrica en calórica –en la resistencia–. Es un término que crece indefinidamente, mientras la batería esté conectada al circuito. El primer término representa la energía almacenada en la inductancia en el tiempo $t = T$. Esta energía no crece indefinidamente y se puede recuperar, desconectando ahora la inductancia de la batería y conectando sus terminales a la resistencia. La nueva ecuación del circuito es

$$0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{8.36}$$

[8] Cada carga q que viaja alrededor del circuito, *cae* por una diferencia de potencial V_0. El trabajo realizado sobre ella es qV_0, para *elevarla* al potencial de arranque. El trabajo realizado por unidad de tiempo –la potencia– es nqV_0, donde n es el número de cargas que en la unidad de tiempo pasan por un lugar del circuito. Pero $I = nq$, de modo que la potencia es $V_0 I$.

Y su solución es, tomando como condición inicial $I(T) = I_T$

$$I(t) = I_T \, exp\left(-\frac{R}{L}(t-T)\right) \tag{8.37}$$

Esta expresión describe una corriente que decae desde el valor I_T.

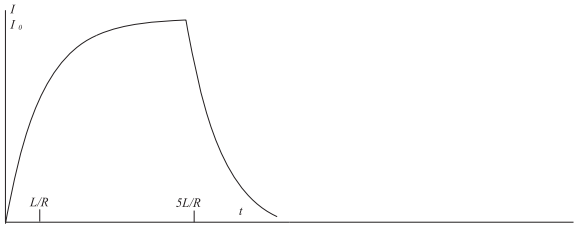

FIGURA 8.6. La intensidad de corriente en un circuito

La energía eléctrica se convierte en calórica –en la resistencia– después de que la batería se desconectó y alcanza un valor

$$\int_T^\infty I^2 \, R \, dt = \frac{1}{2} L I_T^2 \tag{8.38}$$

Es decir, la energía calórica que aparece en la resistencia es igual a la que había en la inductancia, en el momento de desconectar la batería. Esta energía se podrá considerar como almacenada en el campo magnético generado alrededor de la inductancia –por la corriente que circula en ella– (Figura 8.6).

8.5. La energía magnética

En la sección anterior se discutió brevemente el trabajo realizado por una batería conectada a un circuito que tiene una inductancia –y una resistencia–. ¿Cómo es el trabajo de dos baterías conectadas a dos circuitos acoplados por una inductancia mutua? Supongamos de nuevo dos solenoides colocados uno encima del otro y conectados a dos baterías de f.e.m. V_1 y V_2. Las ecuaciones de circuito para este sistema son

$$V_1 = R_1 I_1 + L\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}$$
$$V_2 = R_2 I_2 + L\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$$

El trabajo realizado por las baterías, para aumentar las corrientes desde cero a I_1 y I_2 en el tiempo de 0 hasta T será

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T (V_1 I_1 + V_2 I_2) dt \\ &= \int_0^T (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M \int_0^T \left(I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir como

$$W = \int_0^T (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{8.39}$$

La energía almacenada en los dos solenoides es

$$W_B = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{8.40}$$

Nótese cómo el término que depende de la inductancia mutua incrementa la energía almacenada –que llamaremos magnética– si I_1 y I_2 tienen la misma dirección de flujo, de modo que generan campos magnéticos que se refuerzan. De lo contrario, este término disminuye la energía si las corrientes van en sentidos opuestos. La energía almacenada nunca puede ser negativa.

En el caso de la autoinductancia y en el de la inductancia mutua se comentó que la energía almacenada se puede considerar *almacenada* en el campo magnético que rodea los solenoides. ¿Cómo se puede argumentar esto en forma general? Para ello consideremos un sistema de N circuitos, rotulados $i = 1$ hasta N. Cada uno de ellos lleva una corriente I_i. El flujo magnético que atraviesa el i-ésimo circuito es

$$\Phi_i = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_i = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_i \tag{8.41}$$

Donde se aprovechó el teorema de Stokes y la relación entre la densidad de flujo magnético y el potencial vector.

La f.e.m. inducida en el i-ésimo circuito por un cambio en el flujo será, de acuerdo con la Ley de Faraday

$$V_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} \tag{8.42}$$

La tasa a que hace trabajo la batería que mantiene la corriente I_1 en este circuito –contra el cambio en f.e.m. de la ecuación anterior– es

$$P_i = I_i \frac{d\Phi_i}{dt} \tag{8.43}$$

Y el trabajo requerido para llevar las corrientes en los N circuitos desde 0 hasta I_{0i} en el tiempo de 0 hasta T es

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T I_i \frac{d\Phi_i}{dt}\, dt \tag{8.44}$$

Este trabajo es, claro está, igual a la energía magnética total almacenada en el campo magnético que rodea y atraviesa todos los circuitos. Esta energía debería ser independiente de la manera como se llegó a tener las corrientes con intensidades I_i. Supongamos, para ser concretos, que se ha llegado a las corrientes finales I_{0i} por aumentos en forma de rampa en cada uno de los N circuitos. Esto se expresa diciendo que

$$I_1 = I_{0i} \frac{t}{T} \tag{8.45}$$

Los flujos magnéticos son proporcionales a las corrientes, de modo que también tendrán una variación temporal como una rampa

$$\Phi_1 = \Phi_{0i} \frac{t}{T} \tag{8.46}$$

Si colocamos esto en la expresión (8.44), podemos transformarla en

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T I_{0i} \Phi_{0i} \frac{t}{T^2}\, dt \tag{8.47}$$

y la evaluación de estas integrales nos da

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_{0i} \Phi_{0i} \tag{8.48}$$

De esta manera, las expresiones (8.41) y (8.48) implican que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_{0i} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l_i} \tag{8.49}$$

¿Cómo se extenderían estas ideas a un sistema de corrientes eléctricas con una densidad de corriente $\vec{J}$? Debemos definir un volumen V que contenga todos los circuitos que estamos considerando. Convertimos un elemento de corriente en el i-ésimo circuito en una densidad de corriente $\vec{J} = I_i d\vec{l_i}/dl_i S_i$, donde S_i es el área limitada por el circuito i-ésimo. Se justifica así expresar

un elemento de volumen como $d^3\vec{r} = S_i dl_i$. Sabemos, además, que si despreciamos el efecto de las corrientes de desplazamiento, $\mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$, de modo que el trabajo que estamos calculando es

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J}\, d^3\vec{r} \tag{8.50}$$

o también

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}\, d^3\vec{r} \tag{8.51}$$

De las derivadas de los vectores se sabe que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{8.52}$$

Lo que implica que

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (-\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A})\, d^3\vec{r} \tag{8.53}$$

Aprovechemos ahora el teorema de Gauss y que se puede definir un potencial vector $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, para obtener

$$W = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_S \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2\, d^3\vec{r} \tag{8.54}$$

Donde S es la superficie que encierra a V, es decir, encierra todas las corrientes eléctricas que estamos considerando. Si hacemos esta superficie muy grande, podemos esperar que los campos magnéticos producidos por las corrientes varíen como r^{-3} a grandes distancias. El potencial vector decrece como r^{-2} y la superficie S crece con r^2. Esto significa que el primer término de la ecuación (8.54) es despreciable cuando $r \to \infty$ y la expresión se reduce a

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo el espacio}} B^2\, d^3\vec{r} \tag{8.55}$$

Esta expresión es válida para cualquier campo magnético y podremos definir una densidad de energía magnética por unidad de volumen dada por

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.56}$$

Nótese cómo, de la misma manera que en el caso eléctrico, no es posible medir la energía magnética en una parte de un volumen total. Sólo la energía total es medible. El concepto de densidad de energía será conveniente cuando se piense en relaciones de energía; se usará con frecuencia en la teoría electromagnética.

8.6. Conservación de la energía en el electromagnetismo

Hemos argumentado que la densidad de energía en un campo eléctrico está dada por

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tag{8.57}$$

y la densidad de energía en un campo magnético por

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.58}$$

Esto sugiere que una expresión para la energía por unidad de volumen, cuando se tiene un campo electromagnético general, podría ser[9]

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.59}$$

Tenemos ahora las herramientas –conocimientos– para mostrar que en la teoría clásica del electromagnetismo se conserva la energía. Antes de eso, hagamos una pequeña disgresión. Ya conocemos una ley de conservación, la conservación de la carga eléctrica, que se puede expresar como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{8.60}$$

Si integramos esta ecuación sobre un volumen V, limitado por una superficie S, obtendremos

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d^3\vec{r} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{8.61}$$

Esta es la tasa de decremento de la carga –no equilibrada– contenida en un volumen V es igual al flujo neto de carga a través de la superficie S.

De manera análoga, una ley de conservación de la energía en el electromagnetismo podría tener la forma

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, d^3\vec{r} = \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \tag{8.62}$$

donde u es la densidad de energía del campo electromagnético y $\vec{\Pi}$ representa el flujo de energía electromagnética[10]. La ecuación anterior expresa

[9] Realmente las expresiones anteriores se justificaron para el caso electrostático o magnetostático, respectivamente, pero lo extenderemos al caso de campos dinámicos; esta extensión se justificará en el argumento siguiente. Véase el libro de Feynman, Leighton y Sands, op.cit., volumen II, capítulo 27.

[10] En otras palabras, la cantidad de energía $|\vec{\Pi}|$ pasa, por unidad de tiempo y por unidad de área, por un punto en la dirección de $\vec{\Pi}/|\vec{\Pi}|$. Empleamos el símbolo $\vec{\Pi}$ aunque muchos textos –pero no, en todos– emplean el símbolo $\vec{S}$, porque hemos empleado este último para los elementos de área.

que la tasa de decremento de la energía electromagnética en un volumen V es igual al flujo neto de energía a través de la superficie S.

La expresión anterior, (8.62), es incompleta porque, como hemos visto, la energía en los campos eléctricos se puede *perder* a través de la interacción con la materia. Hemos argumentado que la tasa de conversión en energía calórica, la llamada *pérdida óhmica* por unidad de volumen en un conductor es $\vec{E} \cdot \vec{J}$. La expresión (8.62) debe corregirse en este término. Cuando lo hacemos, la expresión es

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\, d^3\vec{r} = \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, d^3\vec{r} \tag{8.63}$$

La expresión anterior, en forma diferencial, sería

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = -\vec{E} \cdot \vec{J} \tag{8.64}$$

Veamos ahora si podemos derivar esta expresión a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para ello comencemos con la ley de Ampère, incluyendo la corriente de desplazamiento

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{8.65}$$

Si multiplicamos esta ecuación escalarmente con $\vec{E}$ obtendremos

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{8.66}$$

Lo que se puede reescribir como

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) \tag{8.67}$$

Ahora bien, de la teoría general de los campos vectoriales, se sabe que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{8.68}$$

de modo que la expresión (8.67) puede quedar como

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) \tag{8.69}$$

Empleando la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{8.70}$$

transformamos nuestra expresión en

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) \tag{8.71}$$

que se puede reescribir como

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \tag{8.72}$$

Podremos obtener nuestra ley de conservación si identificamos ahora

$$u = \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \tag{8.73}$$

con la densidad de energía y la expresión

$$\vec{\Pi} = \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \tag{8.74}$$

con el flujo de energía, llamado "flujo de Poynting" o "vector de Poynting"[11].

8.7. Comentarios

Veamos si las expresiones anteriores tienen sentido. Sabemos que los objetos expuestos al Sol se calientan (agua, seres vivos, piedras...). Esto ocurre porque se absorbe energía del Sol, es decir, ondas electromagnéticas emitidas por él. Esa observación empírica indica que las ondas transportan energía. Los campos eléctrico y magnético en una onda plana –buena aproximación para una onda que salió de un astro a varios millones de kilómetros– son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{k}$ de la onda; sabemos, además, que $B = E/c$. La ecuación (8.74) puede, entonces, transformarse en una siguiente relación para los campos en una onda. Primero, las relaciones mencionadas se pueden expresar como

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{c} \hat{k} \tag{8.75}$$

[11] Por J. H. Poynting, un físico inglés del siglo XIX, que empleó el razonamiento presentado.

Así, el flujo de Poynting para la radiación electromagnética es

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0\, c}\hat{k} = \epsilon_0 c E^2 \hat{k} \tag{8.76}$$

lo que nos dice que el flujo de energía es en la dirección de propagación de la onda. Es un resultado razonable.

La densidad de energía de la radiación electromagnética es, usando $B = E/c$,

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0\, c^2} = \epsilon_0 E^2 \tag{8.77}$$

Nótese que las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. Finalmente, como las ondas viajan a la velocidad de la luz, podemos esperar que, en un segundo, la energía contenida en un volumen de sección unitaria y longitud ($c \cdot 1\, segundo$) sea igual al flujo de energía en una área unitaria, es decir

$$|\vec{\Pi}| = c\, u = \epsilon_0\, c\, E^2 \tag{8.78}$$

lo que está de acuerdo con lo discutido arriba. Habrá muchas oportunidades en las que la interpretación de $\vec{\Pi}$ como la tasa de flujo de energía por unidad de área será conveniente. En la mayoría de los casos prácticos, tal interpretación será válida, aunque debe tomarse en cuenta que solo la integral de $\vec{\Pi}$ sobre una superficie cerrada puede ser medida –recuérdese la interpretación de la densidad de energía–.

Un ejemplo interesante es el de un alambre de longitud L y radio a por el que va una corriente I constante (Figura 8.7).

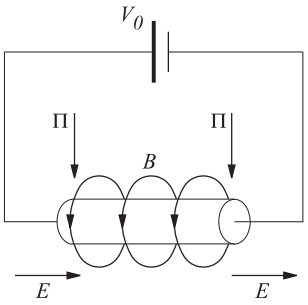

FIGURA 8.7. Sobre el flujo de Poynting en un circuito sencillo

El campo eléctrico en el alambre –y en su superficie– es V/L, donde V es la caída de potencial entre sus extremos. El campo magnético en la superficie

del alambre tiene magnitud $\mu_0 I/2\,\pi\,a$. Estos dos campos son perpendiculares entre sí, como puede comprobar el lector. El flujo de Poynting está dirigido hacia la superficie del alambre ($\vec{\Pi}\cdot d\vec{S} < 0$) y tiene una magnitud

$$\Pi = \frac{V}{L}\frac{I}{2\,\pi\,a} \tag{8.79}$$

Los campos son constantes en el tiempo, de modo que las integrales en la expresión (8.63) serán

$$\int \vec{E}\cdot\vec{J}\,d^3\vec{r} = -\int \frac{V}{L}\frac{I}{2\,\pi\,a}\,dS = -V\,I \tag{8.80}$$

y la energía que fluye *hacia* el alambre a través de los lados es igual a la tasa en que se convierte en energía calórica dentro del alambre[12].

Hay que tener precauciones en la interpretación del flujo de Poynting como flujo de energía. El siguiente ejemplo clásico lo muestra. Supongamos que el alambre del que se discutió arriba no está conectado a una batería, está aislado y tiene un exceso de carga eléctrica. Podemos suponer un campo magnético en su vecindad, como el campo terrestre. En la superficie del alambre, el vector $\vec{\Pi}$ es, en general, diferente de cero, pero interpretarlo como un flujo de energía será falso. Como se anotó anteriormente, solo su integral sobre una superficie cerrada tiene sentido. En este caso, como $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no están relacionados, la integral será cero.

8.8. *Momentum* electromagnético

La observación empírica que se mencionó antes, de objetos puestos al Sol, muestra que las ondas electromagnéticas transportan energía. No es tan fácil observar si también transportan *momentum*. Suponiendo que así es, cuando la dirección o magnitud del flujo de energía se altera por interacción con un cuerpo, hay, en consecuencia, una reacción igual a la tasa de cambio del vector *momentum* en la onda, a esta reacción se la denomina "presión de radiación". El origen electromecánico de la presión de radiación como un fenómeno superficial no es difícil de comprender. Si consideramos la reflexión en un metal (por ejemplo un espejo), la onda genera corrientes eléctricas en la superficie –como se dijo, en unas capas atómicas–, que están en fase con los campos de la onda. En consecuencia, hay una fuerza sobre

[12] Dejamos al lector la discusión acerca de cómo es que las conexiones a la fuente de energía –batería– están en los extremos del alambre, pero la energía fluye a través de los lados del alambre. Véase el libro de Feynman et al., ibid.

ellas, cuyo promedio en el tiempo es diferente de cero, actuando en esa capa de corriente. Emplearemos un argumento atribuido a Einstein para calcular esa presión (Figura 8.8). Supongamos que tenemos un vagón de ferrocarril[13] de masa M y longitud L que es libre de moverse sobre los rieles en una dirección. Se emite radiación electromagnética desde un extremo del vagón –con energía total En–, la cual viaja a lo largo del vagón y es absorbida en el otro extremo. A comienzos del siglo XX se mostró que la masa efectiva de esta radiación es $m = En/c^2$ [14]. A primera vista, el proceso descrito aparece como un corrimiento espontáneo del centro de masa de todo el sistema –muy pequeño, si se quiere, pero es lo que queremos considerar–. Esto viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento –*momentum*– si suponemos que el vagón no está sujeto a fuerzas externas. La única manera en que el centro de masa permanecería estacionario es si el vagón se mueve en la dirección opuesta a la dirección de propagación de la radiación. Si el vagón se mueve una distancia x, entonces la posición del centro de masa del sistema antes y después del proceso de emisión y absorción es igual si –supondremos que $m \ll M$–

$$M\,x = m\,L = \frac{En}{c^2}L \tag{8.81}$$

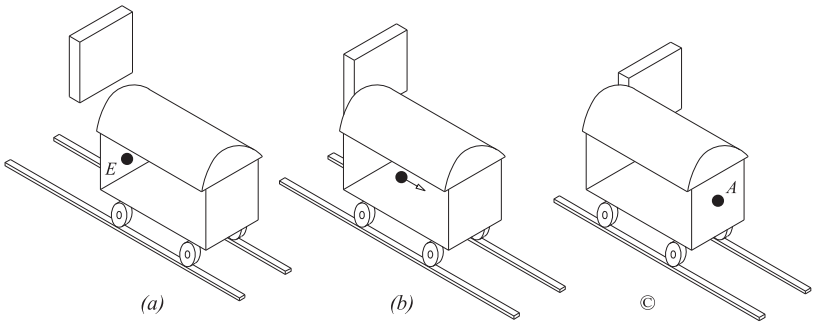

FIGURA 8.8. Sobre el cálculo del *momentum* electromagnético

[13] Para los europeos de comienzos del siglo XX, aún los del siglo XXI, los ferrocarriles eran y son un tremendo avance de la época para transportarse. Para otras naciones –nosotros– no lo son tanto. Los argumentos están claramente teñidos por la cultura en la que creció su autor.

[14] H. Poincaré derivó, y publicó en 1900, una fórmula para el *momentum* de la radiación emitida por un cuerpo, con retroceso de este y absorbida por otro cuerpo, más tarde. Los interesados pueden consultar el artículo de H.E. Ives, en Journal of the Optical Society of America, **42**, 540-543 (1952).

Pero ¿qué mueve al vagón? Si la radiación posee un *momentum* p, el vagón recula con el mismo *momentum*, en el momento en que la radiación es emitida. Cuando la radiación llega al otro extremo y es absorbida, le "devuelve" este *momentum* al vagón y este se detiene. El tiempo "de vuelo" de la radiación es L/c. Así, la distancia que viaja una masa M –el vagón– con *momentum* p en este tiempo es

$$x = v\,t = \frac{p}{M}\frac{L}{c} \tag{8.82}$$

Y eso resulta, aprovechando la relación (8.81), en

$$p = M\,x\,\frac{c}{L} = \frac{En}{c} \tag{8.83}$$

que es la relación buscada. Se puede definir, además, una densidad de *momentum* de manera análoga a la densidad de energía: si las ondas tienen una densidad de energía u, poseerán una densidad de *momentum* $\vec{g}$ con magnitud $g = u/v$.

Si la radiación electromagnética –es decir, las ondas electromagnéticas– poseen *momentum*, deben ejercer una fuerza sobre los cuerpos que la absorben (o emiten). Supongamos que un cuerpo absorbedor 100 % está en el camino de una onda plana. La cantidad de radiación absorbida por unidad de tiempo y unidad de área será simplemente la contenida en un cilindro de longitud $c \cdot 1\,segundo$ y área seccional 1 m^2. La cantidad de *momentum* absorbida será igual a la densidad de *momentum* multiplicada por el volumen del cilindro mencionado, es decir $c\,g$. Esto significa que la presión de la radiación será

$$P = \epsilon_0 E^2/2 \tag{8.84}$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico. En otras palabras, la presión de la radiación es igual a la densidad de energía de la onda –en realidad debería decirse la densidad promedio–.

¿Qué magnitud tiene esta presión? Por ejemplo, la potencia incidente en la superficie de la Tierra debida a la radiación del Sol es igual a 1.300 $\mathrm{W/m}^2$ (integrando la potencia en todas las frecuencias). Así, suponiendo ondas planas,

$$|\vec{\Pi}| = c\,u = 1300\,W\,m^{-2} \tag{8.85}$$

de modo que

$$P = u \simeq 4 \times 10^{-6}\,N\,m^{-2} = 4 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa} \tag{8.86}$$

La presión de radiación es pequeña comparada con la presión que ejerce nuestra atmósfera sobre nosotros –una atmósfera es, aproximadamente,

$10^5\,Pa$–. Esta presión, de todas maneras, es importante en la formación de una de las colas de los cometas (formada por partículas cargadas). No es tan fácil detectar la presión de la radiación en nuestra vida diaria. En el otro extremo, se han reportado experimentos de confinamiento con láseres con potencias por unidad de área de $10^{18}\,W\,m^{-2}$, lo que significa presiones en el rango de 10^4 atmósferas. Recordemos que la presión en una profundidad oceánica de 10.000 metros sería del orden de 10^3 atmósferas (¡!).

La discusión anterior podría sugerir que la presión de la radiación no tiene que ver con el electromagnetismo clásico. Sólo la presentamos por su simplicidad. En realidad es fácil ver, desde el punto de vista de las ecuaciones de Maxwell, que en el caso de una onda reflejándose en un metal, la onda que penetra el metal es absorbida gradualmente y su amplitud depende de la profundidad dentro de aquél –ya no es una onda de amplitud constante–. Las fuerzas sobre los electrones producen corrientes perpendiculares al campo $\vec{B}$, lo que produce fuerzas en la dirección de propagación, es decir una presión. Se puede calcular que, igual que en la derivación de los párrafos anteriores, la presión de la radiación es igual a la energía combinada de las ondas incidente y reflejada y la densidad de momentum que se calculó anteriormente[15]. En el caso de los materiales no conductores, el cálculo es un poco más complicado, pero lleva a resultados similares.

8.9. Resumen y comentarios

Se definió la inductancia (flujo magnético dividido por la intensidad de la corriente que lo produce) y se discutió su relación con el trabajo reversible empleado en generar los campos magnéticos. Desde el punto de vista de los ingenieros, la inductancia se trata como "un elemento de los circuitos" con interesantes aplicaciones. Desde el punto de vista físico es imposible que un circuito no tenga inductancia, aunque se puede minimizar, cuando conviene que sus efectos no sean importantes. En otros casos, por ejemplo en la producción de campo magnéticos intensos pulsados, es indispensable tenerla en cuenta para dimensionar adecuadamente los equipos de trabajo. Los efectos inductivos pueden ser muy importantes en la práctica de la generación de alta tensión y también en la transmisión de potencia eléctrica (es la base de funcionamiento de los transformadores).

[15] Ver, por ejemplo, en S. G. Lipson, H. Lipson, *Optical Physics*, Cambridge University Press, 1969, capítulo 4. Se encontrarán algunas dificultades relacionadas con la notación y las unidades empleadas.

La consideración de las energías en los campos nos llevó a definir una densidad de energía para los campos dependientes del tiempo y una expresión para una "conservación de la energía" en los campos electromagnéticos. A partir de estas discusionens se argumenta que los campos electromagnéticos pueden ejercer presión sobre los cuerpos.

Una muy interesante aplicación moderna de esta presión de radiación son las llamadas "pinzas de luz" (*optical tweezers*) que se han promovido como una herramienta para manipular objetos muy pequeños. Esencialmente se basan en que una partícula de material no conductor se puede mantener en equilibrio estable cerca del foco de un objetivo de microscopio que está enfocando la luz (onda electromagnética) proveniente de un láser potente. Se emplea un láser que emite en el rango infrarrojo para no maltratar las partículas manipuladas. Se emplea, además, un láser ultravioleta ya no para confinar, sino para *cortar* las partículas[16].

8.10. Temas para discusión

- Es fácil comprobar que, de acuerdo con la ecuación (8.13), un solenoide ideal de 1.000 espiras, de 1 m de largo y $0,2$ m de diámetro tiene una autoinductancia de $0,395$ H. ¿Esperaría el lector que un solenoide construido con esas dimensiones tenga realmente esa autoinductancia? ¿Por qué?

- Describa cualitativamente el funcionamiento de un transformador de alta tensión, como los empleados en la distribución de energía eléctrica. Tenga en cuenta no solo los requerimientos eléctricos sino también los térmicos, de tamaño, de exposición al ambiente, etcétera.

- Describa cómo diseñaría un cañón electrónico para funcionar acelerando los electrones con energías de 200 keV (en un microscopio electrónico para investigación de materiales). Consulte acerca de los modelos que se ofrecen en la actualidad.

[16] Una de las primeras, o la primera descripción, se publicó en A. Ashkin, J.M. Dziedzic, J.E. Bjorkholm and S. Chu. 1986. "Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles." Opt. Lett. 11 (5) 288-290. Puede consultarse, por ejemplo, la página www.stanford.edu/group/blocklab/Optical%20Tweezers%20Introduction.htm para comenzar a comprender todos los conocimientos aplicados en tales instrumentos. Muchas aplicaciones se mencionan en la página www.ipass.net/brianrodr/tweezers.html.

8.11. Ejercicios

1. Calcule el flujo del vector de Poynting para una superficie cilíndrica que rodea las dos pilas (cada una de f.e.m. $= 1,5$ V) de una linterna. Suponga que el bombillo incandescente tiene una resistencia $R = 1,0\,\Omega$.

2. Dos lazos de alambre están situados uno cerca del otro, como muestra la figura 8.9.

   El flujo magnético que produce, en el lazo 2, una corriente circulando en el lazo 1 es la mitad del que produce en el 1. La autoinductancia del lazo 1 es 1×10^{-3} H. El lazo 2 se conecta a un osciloscopio que mide la f.e.m. sin que circule una corriente apreciable. La corriente en el lazo 1 es $I_1 = 2\,\mathrm{sen}\,(377\,t)$ A. ¿A qué es igual el voltaje medido por el osciloscopio?

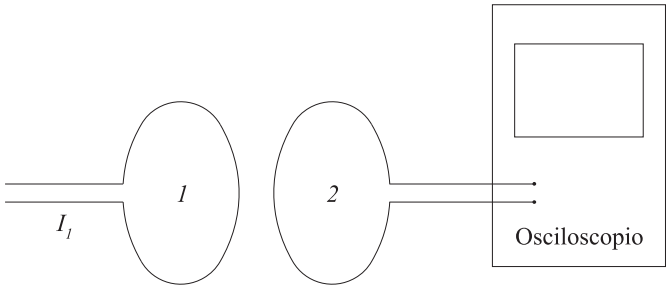

FIGURA 8.9. Dos lazos acoplados por el campo magnético

3. Dos bobinas tienen autoinductancia igual a $0,2$ H y una inductancia mutua $0,1$ H. La resistencia de cada una es 1 Ohm. Una batería de 2 V se conecta súbitamente a una de ellas. Si la segunda tiene conectados sus extremos con un alambre de resistencia casi cero, ¿qué carga total se moverá a través de una sección de su alambre?

4. Una bobina de 500 vueltas se enrolla apretadamente alrededor de la parte central de un solenoide muy largo que tiene 25 vueltas de alambre por centímetro. El diámetro del solenoide es 2 cm. ¿A qué es igual la inductancia mutua entre esas dos bobinas?

5. Dos bobinas están conectadas en serie con una batería y un interruptor (Figura 8.10). Tienen autoinductancias L_1, L_2 y resistencias R_1 y R_2, respectivamente; entre ellas hay una inductancia mutua, M. Calcule la constante de tiempo para el circuito (hay dos posibles respuestas).

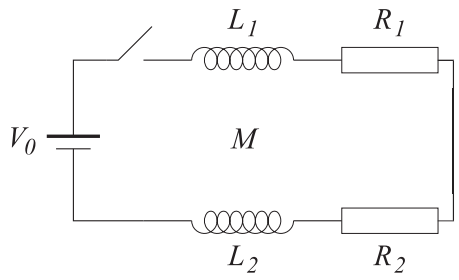

FIGURA 8.10. Un circuito con dos autoinductancias e inductancia mutua

6. Con una varilla cilíndrica de plástico de 1 cm de diámetro se construye un anillo de $0,21$ m de diámetro externo. Este se envuelve con alambre de cobre para formar una bobina toroidal. El diámetro del alambre (incluido el aislante) es $1,2$ mm. El diámetro del conductor es $1,0$ mm. La resistencia de la bobina es $0,25$ Ohm.

   - ¿A qué es igual la constante de tiempo del toroide?
   - Se aplica al toroide una f.e.m. de $0,1$ V. ¿Cuánta energía se almacena en el campo magnético?
   - Si a un condensador se le aplicara la misma f.e.m. y la energía almacenada fuera igual, ¿qué valor tendría la capacitancia C?

7. Un cable coaxial está construido con un alambre central rodeado de un aislante y con un cilindro conductor externo que lleva la corriente de retorno. El alambre tiene radio a y el conductor externo tiene radio b.

   - Se podría suponer que la corriente en el alambre interno fluye en la superficie externa de él. Muestre que la autoinductancia por metro de longitud es, en este caso,

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

   - Calcule la autoinductancia si la corriente está distribuida de manera uniforme sobre el alambre central. Compare sus resultados para apreciar la importancia de la suposición acerca de la distribución de corrientes.

8. Considere dos lazos circulares de radio a, coaxiales y separados por una distancia d ($a \ll d$). Durante un tiempo limitado, ($0 \leq t \leq t_M$), una corriente de intensidad $I = K_0 t^2$ a través de uno de los lazos (C_1). Tome la resistencia de los lazos como R.

- Si se desprecian las autoinductancias, ¿a qué es igual el torque sobre el lazo C_2?
- Si se desprecian las autoinductancias, muestre que la fuerza sobre C_2 está dada por

$$\frac{3\mu_0^2\pi^2a^2K_0^2t^3}{2d^7R}$$

- Indique de qué dirección actúa la fuerza calculada anteriormente. Diga en qué manera afecta la autoinductancia a los valores que se podrían calcular para la fuerza y para el torque sobre el lazo C_2.
- ¿Cómo se alterarían los valores de la fuerza y el torque, calculados sin considerar la autoinductancia, pero con el lazo C_2, girado 90^o sobre un eje normal a la línea de unión de los centros de los lazos?

8.12. Actividades prácticas

- Una experiencia interesante es montar un circuito en el cual se conecta un cargador de baterías (en la actualidad son bastante comunes, como los teléfonos celulares) en paralelo con un interruptor y los dos en serie con un bombillo incandescente de baja potencia. El conjunto va a un tomacorriente casero de 110 V, 60 Hz. El cargador (sin conectar ningún circuito a él) se puede representar como una inductancia. Si inicialmente el interruptor está cerrado ¿cómo se espera sea el brillo del bombillo? ¿Qué cambio se espera cuando el interruptor se abre? ¿Por qué?
- Mida el voltaje que suministra el cargador, preferiblemente con un multímetro digital. ¿Es un voltaje continuo o alterno? ¿Es una superposición de los dos? Compárelo con el voltaje de salida que está previsto, según está escrito sobre la carcaza. ¿Qué dispositivo(s) podría haber en el interior?

La dificultad principal para proponer actividades en los temas tratados en este capítulo está en el rango de frecuencias que es necesario trabajar para obtener resultados apreciables: es relativamente fácil conseguir un tiempo característico del orden de los segundos en un circuito con condensadores (RC), pero es muy difícil obtener tiempos similares en circuitos con inductancias (L/R). La mayoría de las experiencias interesantes con inductancias requieren equipo especializado: generadores de señales y osciloscopios. Se obtienen programas para emplear una tarjeta de sonido de un computador como osciloscopio; pero los altos voltajes que pueden generarse cuando se

conecta, y, sobre todo, cuando se desconecta una inductancia, pondrán en peligro esos circuitos.

Es recomendable observar y estudiar las simulaciones presentadas en las páginas de Molecular Expressions, en micro.magnet.fsu.edu/electromag/. Los textos no son presentados con profundidad ni detalles numéricos, pero sirven para orientarse en la búsqueda de materiales más detallados.

Se obtiene información mucho más técnica (y, con seguridad, más útil) en las páginas de www.allaboutcircuits.com/, aunque con la aproximación de circuitos de dimensiones pequeñas frente a la longitud de onda de los campos trabajados. Estas páginas y las anteriores avanzan sobre temas de los próximos capítulos en este texto.

Recordemos lo afirmado al comienzo de este libro: los conocimientos sobre el electromagnetismo han cambiado profundamente las culturas humanas. Una buena parte de esos cambios, sobre todo en la generación y distribución de energía eléctrica y el uso de las ondas electromagnéticas, se basa en el empleo de las propiedades (y dispositivos) que denominamos inductancia mutua y autoinductancia. Basta con mirar a nuestro alrededor para encontrarlas.

9

Campos con medios dieléctricos

9.1. Introducción

Este capítulo muestra un tratamiento elemental de los cambios introducidos en los campos eléctricos cuando se consideran materiales, no solo el vacío, como en los capítulos anteriores. Posteriormente se presenta una descripción de algunas de las propiedades de los materiales sometidos a campos eléctricos. Existe mucha investigación actual acerca de las propiedades de los materiales, sobre todo en relación con las posibles aplicaciones en todos los aspectos de la vida moderna. Para no complicar el tema en demasía, nos limitaremos, casi exclusivamente, a considerar los efectos en campos estáticos.

9.2. Contribución de los medios dieléctricos

Hasta ahora discutimos los campos eléctricos –y magnéticos– suponiendo que, además de las cargas y de los conductores que son las fuentes de campo y aquellas que fijan las condiciones de borde para el potencial, el espacio está "vacío". Una consideración más cercana a la realidad experimental mostrará que siempre habrá un medio material presente. ¿Cómo se toma en cuenta esta realidad? ¿Qué cambios trae en la teoría? Un medio material no es más, para el problema que tenemos por resolver, que un conjunto de cargas adicionales y nuevas contribuciones al cálculo del campo. La dificultad está en que son muchas; no vamos a tener información suficiente acerca de la

posición de las partículas cargadas y de sus movimientos. Tendremos que buscar soluciones a un problema bajo condiciones difíciles.

Si los materiales considerados están en equilibrio mecánico y térmico y podemos considerarlos "en reposo" y además medimos los campos en tiempos largos[1], se justifica una imagen simplificada en la cual los átomos y los electrones están "fijos" en sus posiciones promedio, es decir, en sus posiciones de equilibrio.

Para calcular el campo y el potencial en presencia de materiales, podemos proceder primero como si no hubiera el material e introducir un factor de corrección –esto lo hizo Faraday, a partir de datos experimentales–. Veamos primero cómo son las justificaciones teóricas para esta forma de trabajo.

Imaginaremos que el material –eléctricamente neutro– está compuesto de átomos o moléculas con núcleos positivos "rodeados" de electrones negativos. Podemos suponer que estos átomos o moléculas son estructuras *deformables*, de modo que al aplicar un campo externo se produce un desplazamiento de las cargas (Figura 9.1), formando dipolos –aunque estos dipolos pueden existir siempre, dependiendo de la estructura de las moléculas que componen en material–; la acción del campo sobre estos dipolos se traduce en fuerzas y torques sobre ellos.

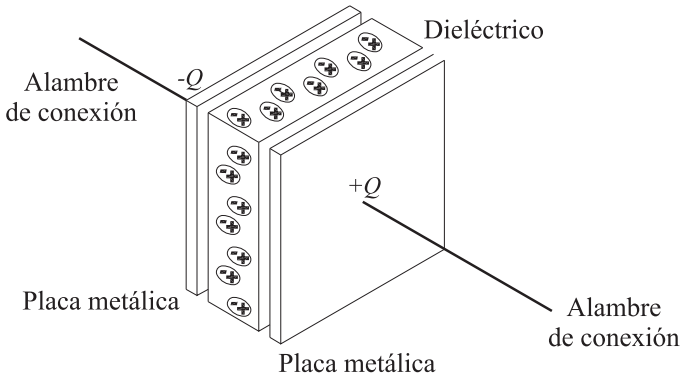

FIGURA 9.1. Modelo elemental de un material en un campo eléctrico

Podría haber, además, algunos –pocos– electrones libres de moverse por el sólido. Por tradición se designa a un material de estas características como *un dieléctrico*.

[1]En realidad significa que nuestros instrumentos, incluidas las cargas o corrientes de prueba, reaccionan lentamente. La excepción es cuando medimos el "ruido" en los circuitos.

Más formalmente, los materiales dieléctricos son malos conductores de la electricidad –comparados con los metales–, en los que pueden existir campos electrostáticos con una disipación de energía muy pequeña[2]. Sus propiedades son útiles en la construcción de condensadores, de líneas de transmisión de señales y muchas otras. Son materiales dieléctricos el vidrio, la porcelana, el caucho, los plásticos, el aire seco, el vacío y varios líquidos y gases.

Los dieléctricos se clasifican en aquellos con moléculas polares y moléculas no polares, según que sus componentes tengan momentos de dipolo permanente o no. Un ejemplo de los primeros es el agua H_2O (o el hielo) y de los segundos, el CO_2. En contra de la acción de ordenamiento de la estructura del sólido por el campo actúan la agitación térmica y otras fuerzas.

Los momentos de dipolo individuales son $\vec{p} = q\,\vec{r}$, donde q es el valor de las cargas en el dipolo y $\vec{r}$ la separación entre ellas. Estos momentos de dipolo se pueden sumar sobre volúmenes suficientemente grandes para que haya un número grande de dipolos, pero suficientemente pequeños para considerarlos elementos de volumen $d^3\vec{r}$. La suma de los dipolos sobre estos volúmenes, dividida por el volumen, se denomina "polarización" $\vec{P}$.

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} \tag{9.1}$$

Las unidades de la polarización son coulomb/m^2.

9.3. Un dieléctrico isotrópico en un condensador

Emplearemos un condensador plano con separación entre placas muy pequeña, comparada con sus otras dimensions, para considerar los campos como unidimensionales y despreciar los efectos de bordes (Figura 9.2).

Cada placa del condensador tiene una carga $+Q$ o $-Q$ y el campo producido por estas cargas –que llamaremos campo externo, $\vec{E}_{\text{ext}}$– desplaza las cargas en el material, estableciendo dipolos locales. Cada dipolo crea un campo local que varía en magnitud, pero tiende a estar dirigido en el

[2]El lector se preguntará por qué la nueva designación; los materiales que llamaremos dieléctricos son los mismos que llamamos aislantes, por oposición a los conductores, en los que las partículas cargadas se mueven con facilidad. El prefijo griego *dia* significa a través –como en diámetro o diagonal–. El nombre proviene de que se puede colocar una lámina de material entre las placas de un condensador, sin descargarlo. El forro de plástico de un cable o un alambre eléctrico es un aislante también, así como los elementos de cerámica o vidrio que se emplean para aislar las líneas de alta tensión. En muchos de estos casos se habla de un aislante, pero cuando importa lo que sucede en el interior de un condensador, se emplea la "nueva" denominación.

sentido opuesto al campo eléctrico externo. De esta manera podemos esperar que el campo total en el espacio lleno de dieléctrico fluctúe mucho en magnitud, pero en promedio sea menor que $\vec{E}_{\text{ext}}$.

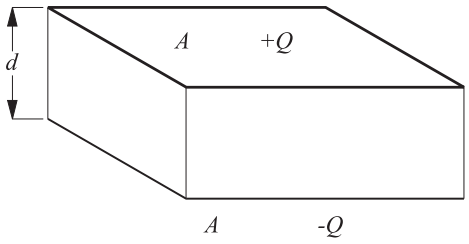

FIGURA 9.2. Sobre un condensador lleno de un material

Vamos a aproximar de la siguiente manera al campo dentro del dieléctrico, $\vec{E}_{die}$, aunque varíe mucho con la posición. Entre dos puntos A y B en el dieléctrico, suponiendo que la distancia entre moléculas es mucho menor que $\overline{AB}$, se produce una diferencia de potencial

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}_{\text{die}} \cdot d\vec{l} \tag{9.2}$$

El campo promedio entre A y B será el campo uniforme $\vec{E}$ que daría lugar a una diferencia de potencial equivalente, es decir

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} \tag{9.3}$$

Como se discutió anteriormente, $E < E_{\text{ext}}$. Eso significa, además, que la diferencia de potencial entre placas disminuye[3] y, como el cociente Q/V define la capacitancia del condensador, la capacitancia del condensador lleno de dieléctrico, que llamaremos C', es mayor en un factor K

$$C' = K\,C \tag{9.4}$$

donde C es la capacitancia sin dieléctrico. Se denomina a K la "constante dieléctrica"[4]. Se puede mostrar también –empleando la ley de Gauss– que si se tiene una carga q en un espacio lleno de dieléctrico de constante

[3] Nótese que hemos supuesto que la carga en cada placa del condensador permanece constante. Será diferente la situación si supusiéramos que la diferencia de potencial es la que permanece constante. ¿Cómo sería posible lograr esto último?

[4] Se usa esta denominación acostumbrada, aunque, como discutiremos más adelante, no es una constante, en general.

dieléctrica K, el campo eléctrico –también promedio, claro está– tiene la expresión

$$\vec{E} = \frac{q\,\vec{r}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,K\,r^3} \tag{9.5}$$

mientras no se salga de la región llena de dieléctrico[5].

9.4. Cargas de polarización

Examinemos con más detalle el dieléctrico dentro del condensador plano. El material, a pesar del corrimiento de las cargas, continúa sin carga neta. Podemos esperar que en un volumen mucho mayor que el volumen de una molécula haya tanta carga positiva como negativa; el desplazamiento de las cargas solo hace que en un volumen dado ingrese tanta carga negativa, desde una cara del volumen, como carga positiva, desde la cara opuesta. Esto será cierto con una importante excepción: en las caras de la lámina dieléctrica, donde las propiedades del medio cambian en forma abrupta. En un volumen pequeño del lado izquierdo en la figura 9.3, las cargas negativas en el material se corren a la izquierda sin quedar compensadas por cargas positivas corriéndose hacia la derecha. Así, se forma una capa de carga negativa en el dieléctrico adyacente a la placa con carga positiva. Un fenómeno análogo se produce en el lado izquierdo del condensador. El campo eléctrico reducido puede considerarse una consecuencia de esa nueva capa efectiva de carga, "producida" por la atracción de la carga en la placa del condensador sobre las cargas en la placa dieléctrica. La carga efectiva, que produce el campo eléctrico, será igual a la carga en las placas y la carga de polarización en la superficie del dieléctrico.

¿Qué pasará si el campo externo no es uniforme o si el material no fuera homogéneo? Podríamos esperar que más cargas entren en un volumen y menos salgan, por caras opuestas. La densidad de carga local sería diferente de cero. Tales densidades de carga se denominan *densidades de carga de polarización*. Podemos esperar que estén relacionadas con el momento de dipolo por unidad de volumen $\vec{P}$. Calculemos explícitamente esta *carga de polarización*.

[5]Los dieléctricos cumplen tres funciones en los condensadores: conservan la distancia entre las placas, permitiendo menores separaciones y aumentando la capacitancia; disminuyen el campo efectivo, como se discutió más arriba, permitiendo mayor separación de carga a menor diferencia de potencial y reducen la posibilidad de chispas entre placas –en el fenómeno formalmente denominado ruptura dieléctrica–.

Consideremos un volumen $d\,x\,d\,y\,d\,z$ –ver figura–. Bajo el efecto del campo aplicado, las cargas positivas se desplazan en promedio $\vec{s}_+$; las negativas, en promedio, $\vec{s}_-$, estos desplazamientos se pueden expresar como

$$\vec{s}_+ = s_{+x}\hat{i} + s_{+y}\hat{j} + s_{+z}\hat{k} \tag{9.6}$$

$$\vec{s}_- = s_{-x}\hat{i} + s_{-y}\hat{j} + s_{-z}\hat{k} \tag{9.7}$$

Representaremos la densidad de carga positiva con ρ_+, la densidad de carga negativa con ρ_-; las dos tienen igual valor, pero signo contrario.

Consideremos primero las componentes de desplazamiento en la dirección $\overrightarrow{Ox}$.

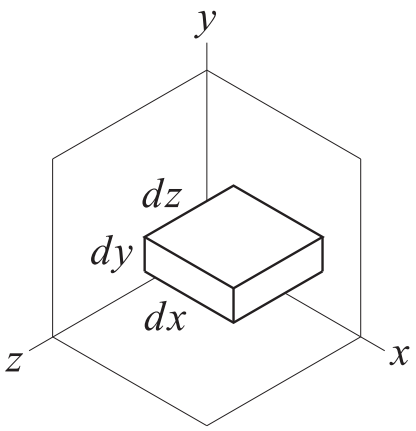

FIGURA 9.3. Geometría para calcular las cargas de polarización

Del lado izquierdo de la figura, las cargas positivas que están dentro de un paralelepípedo de lado s_{+x} y área $d\,y\,d\,z$, entrarán en el volumen; esto significa que la densidad de carga aumenta en

$$\rho_+\, s_{+x}\, d\,y\,d\,z \tag{9.8}$$

Del lado derecho, dejarán el volumen cargas positivas y disminuirá la densidad en

$$\rho_+\, s_{+x}\, d\,y\,d\,z + \frac{\partial}{\partial\, x}(\rho_+\, s_{+x})\, d\,y\,d\,z\,d\,x \tag{9.9}$$

La diferencia de las dos expresiones será el cambio neto de la densidad de carga positiva, es decir

$$-\frac{\partial}{\partial\, x}(\rho_+\, s_{+x})\, d\,y\,d\,z\,d\,x \tag{9.10}$$

Por un cálculo análogo, se verá que la densidad de carga negativa cambiará en

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_- s_{-x})\, d\,y\, d\,z\, d\,x \tag{9.11}$$

El cambio neto en densidad de carga será

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_+ s_{+x} + \rho_- s_{-x})\, d\,y\, d\,z\, d\,x \tag{9.12}$$

Si tomamos en cuenta que $\rho_+ = -\rho_- = \rho$, el cambio neto de densidad de carga es

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho\,(s_{+x} - s_{-x}))\, d\,y\, d\,z\, d\,x \tag{9.13}$$

Sabemos que s_{+x} y s_{-x} tienen sentidos opuestos, su diferencia $(s_{+x} - s_{-x})$ representa la separación promedio de las cargas positivas y negativas; la cantidad $q\,(s_{+x} - s_{-x})$ será la componente x del momento de dipolo de una molécula y $\rho\,(s_{+x} - s_{-x})$ será la componente x del momento de dipolo por unidad de volumen. Así, el cambio neto de densidad de carga es

$$-\frac{\partial}{\partial x} P_x\, d\,y\, d\,z\, d\,x \tag{9.14}$$

Si extendemos el argumento a las direcciones $\overrightarrow{Oy}$ y $\overrightarrow{Oz}$, resultará que el cambio total en densidad de carga en el volumen $d\,y\, d\,z\, d\,x$ es

$$-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) d\,y\, d\,z\, d\,x \tag{9.15}$$

y la densidad adicional de carga, resultante de la polarización del dieléctrico es

$$\rho_P = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \tag{9.16}$$

9.5. Cargas superficiales

A veces es más conveniente considerar la carga en la superficie de un dieléctrico como una distribución superficial, aunque realmente estará en un volumen de espesor pequeño. Consideremos la definición anterior (9.16) aplicada a una caja gaussiana en la superficie del dieléctrico (Figura 9.4). La carga en el volumen de la caja es

$$-\int_{\text{caja}} \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, d^3\vec{r} = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \tag{9.17}$$

donde S es la superficie de la caja y hemos aprovechado el teorema de Gauss. La contribución al flujo de los lados de la caja es despreciable y solo quedan las integrales de superficie sobre las tapas A y B. El medio externo a la caja no esta polarizado y esa integral es también cero. Lo único que queda es

$$-\int_B \vec{P}\cdot d\vec{S}_B = -\int_B P_n{}' dS_B \tag{9.18}$$

con $P_n{}'$ la componente normal de la polarización.

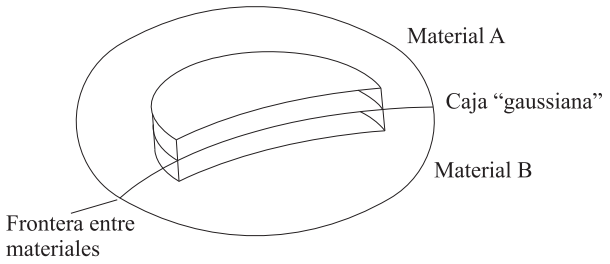

FIGURA 9.4. Sobre el cálculo de cargas superficiales

Esto nos dice que el valor de $-P_n{}'$ puede considerarse como el valor de la carga por unidad de superficie. Por costumbre no se emplea la componente de la polarización hacia adentro del dieléctrico, como se calculó en la ecuación (9.18), sino la componente hacia afuera del dieléctrico, $P_n = -P_n{}'$, de modo que se dice de la carga superficial

$$\sigma_P = P_n \tag{9.19}$$

Esta carga de polarización no es distinta de la densidad volumétrica $-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$, solo es una manera distinta de expresarla en la superficie, una región en que la tasa de cambio de $\vec{P}$ con la posición es muy grande.

9.6. El vector desplazamiento eléctrico

Si recordamos la ley de Gauss en forma integral

$$\oint \vec{E}\cdot\, d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0}\, d^3\vec{r} \tag{9.20}$$

y que ahora estamos expresando la densidad de carga como cargas de “dos tipos”: una que se puede mover libremente –la denominaremos ρ_L– y otra

que se manifiesta como un efecto de polarización, ρ_P, dividiremos el segundo miembro de la ecuación anterior, así

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0} \, d^3\vec{r} = \int \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \, d^3\vec{r} - \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \, d^3\vec{r} \tag{9.21}$$

Si empleamos ahora el teorema de Gauss sobre el término del lado izquierdo y multiplicamon con ϵ_0, podremos expresar esa relación como

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \int \rho_L \, d^3\vec{r} \tag{9.22}$$

o también, considerando que la relación vale para cualquier voluman, como

$$div(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_L \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \tag{9.23}$$

Donde definimos el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, dependiente solo de la carga libre ρ_L. En muchos casos, el empleo del vector $\vec{D}$ es útil; por ejemplo, cuando se tienen situaciones con un condensador de placas paralelas, lleno de dieléctrico: el vector $\vec{D}$ es uniforme y es el mismo si el condensador está vacío o lleno de dieléctrico (suponiendo una carga dada en las placas). Por el contrario, cuando se introduce el dieléctrico, cambian simultáneamente $\vec{E}$ y $\vec{P}$. El desplazamiento eléctrico es el mismo alrededor de una carga aislada si hay o no un dieléctrico alrededor de ella.

En el caso de superficies que no sean perpendiculares al campo, hay una especie de quiebre (la llamaremos refracción) de las líneas de $\vec{D}$ y el resultado es que la divergencia del desplazamiento y no éste permanece independiente del medio. Las dimensiones del desplazamiento eléctrico son de carga/área, de modo que la variación temporal del desplazamiento tendrá unidades de corriente/área, lo que justifica el nombre de *corriente de desplazamiento* que asignó Maxwell al término adicional en la ecuación de Ampère.

9.7. La "constante" dieléctrica

¿Qué relación hay entre $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en un dieléctrico? ¿O entre el campo aplicado y la polarización del material? No hay una respuesta simple a esa pregunta, aún si nos conformamos con discutir el caso de campos constantes. En realidad, uno de los campos de investigación –física y tecnológica– en materiales más activos es precisamente acerca de las propiedades de los dieléctricos. En algunas situaciones podríamos aplicar consideraciones simplificadas; la polarización depende del desplazamiento relativo de cargas positivas y negativas, de modo que si entre ellas se ejercen fuerzas –aproximadamente–

elásticas, se puede considerar el comportamiento dentro de una teoría lineal. Es la llamada teoría clásica. Bajo estas suposiciones simplistas, hay una relación lineal entre polarización y campo aplicado

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \tag{9.24}$$

La "constante" de proporcionalidad χ_e se denomina "susceptibilidad eléctrica" y no tiene dimensiones. Aceptando esta suposición, la relación entre desplazamiento y campo es

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = K \epsilon_0 \vec{E} \tag{9.25}$$

Como discutiremos más adelante, la susceptibilidad y la "constante" dieléctrica pueden depender de la frecuencia.

9.8. Desplazamiento eléctrico y campo eléctrico en una frontera

¿Cómo se establecen las condiciones de frontera para los campos? Sabemos que en el caso electrostático valen las relaciones

$$\oint \vec{E} \cdot \, d\vec{l} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{9.26}$$

y significan que no hay saltos abruptos en la componente tangencial del campo $\vec{E}$ ni en la componente normal de $\vec{D}$, suponiendo que no haya una densidad infinita de carga.

Si aplicamos estas relaciones a una caja gaussiana con tapas paralelas a la superficie de separación de dos dieléctricos, se puede comprobar que (Figura 9.5)

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d^3\vec{r} = \int \rho \, d^3\vec{r} \tag{9.27}$$

La carga dentro de la caja, en el límite de altura muy pequeña es simplemente la distribución superficial de carga en la separación de los medios, es decir

$$-D_{1n} S_1 + D_{2n} S_2 = \sigma \, S_{AB} \tag{9.28}$$

Esto significa que

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \qquad\qquad K_2 \epsilon_0 E_{2n} - K_1 \epsilon_0 E_{1n} = 0 \tag{9.29}$$

Si en la separación no hay carga, tampoco hay discontinuidad. La última relación vale si $\vec{E}$ y $\vec{D}$ son paralelos y no hay carga en la separación. Pero

si el campo $\vec{E}_1$ hace un ángulo θ_1 con la normal a la superficie y $\vec{E}_2$ un ángulo θ_2 con la misma, las relaciones son más complejas

$$E_{1t} = E_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \qquad E_{1n} = E_1 \cos(\theta_1) \tag{9.30}$$

$$E_{2t} = E_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \qquad E_{2n} = E_2 \cos(\theta_2) \tag{9.31}$$

De aquí resulta

$$\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \tan(\theta_1) \qquad \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \tan(\theta_2) \tag{9.32}$$

o, en otras palabras, una refracción de las líneas de campo, expresada como

$$\frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{1n}} = \frac{\tan(\theta_2)}{\tan(\theta_1)} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{K_2}{K_1} \tag{9.33}$$

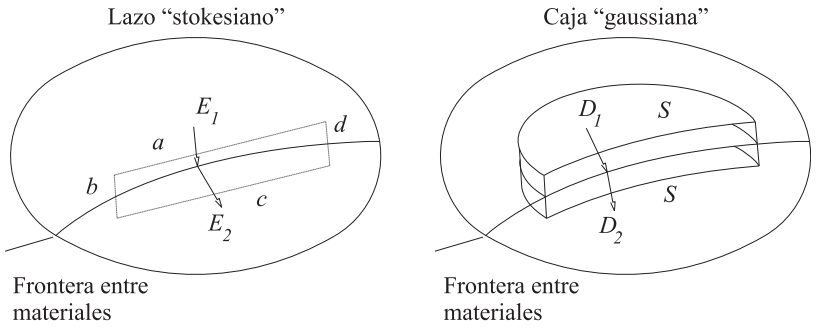

FIGURA 9.5. Acerca de las condiciones de frontera entre dos dieléctricos

9.9. Los “mecanismos” de la polarización

La polarización de un material dieléctrico puede clasificarse como: atómica o molecular, electrónica, polarización por orientación o en superficies (Figura 9.6)[6].

La contribución atómica o molecular a la polarización surge por el desplazamiento y deformación de iones en relación con otros iones en una molécula o en una red cristalina. La polarización electrónica de debe a desplazamiento de la posición promedio de los electrones en relación con el respectivo

[6] Pueden consultarse muchas obras sobre el tema, como *The Nature and Properties of Enginnering Materials*, de Z.D. Jastrzebski, Wiley, N. York, 1997.

núcleo de cada átomo. La magnitud de ese desplazamiento depende de la intensidad del campo eléctrico aplicado y de la fuerza de atracción de los electrones por los núcleos o de unos iones por otros. Tanto la polarización atómica como la electrónica contribuyen a la formación de dipolos.

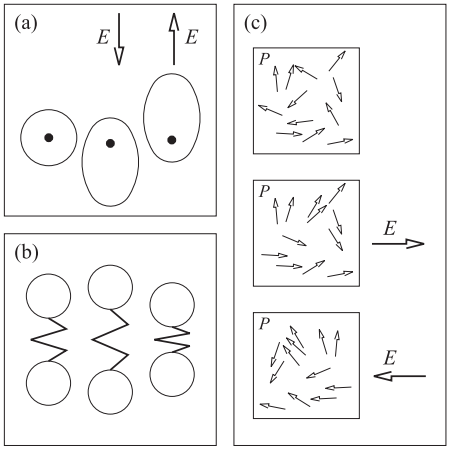

FIGURA 9.6. Sobre los mecanismos de polarización de un dieléctrico

La polarización por orientación aparece en sustancia cuyas moléculas tienen momento de dipolo permanente. Bajo la acción de un campo eléctrico aplicado, sobre las moléculas actúan torques que tratan de orientarlas en la dirección del campo. Esa tendencia es contrarrestada por la agitación térmica de las moléculas: entre mayor es la temperatura, mayor es la tendencia a las orientaciones al azar y menor el grado de orientación. Así, la polarización por orientación depende mucho de la temperatura, en contraste con los otros tipos de polarización discutidos anteriormente.

Para campos de intensidad moderada, la polarización es proporcional al campo aplicado; en campos intensos esa proporcionalidad no se mantiene, porque si todos los dipolos están orientados, la polarización crece muy lentamente con el campo, o no crece: se dice que hay una saturación en la polarización. La polarización por orientación ocurre principalmente en líquidos o gases, en los que las moléculas tienen libertad para girar. En los sólidos la rotación de las moléculas está restringida y, como consecuencia, la constante dieléctrica cambia. Por ejemplo, la constante dieléctrica del agua a 0° C es 82 y la del hielo es 10.

Cada uno de esos efectos contribuye a la polarización total del material; así puede decirse que

$$P = P_e + P_i + P_o \tag{9.34}$$

donde los subíndices denotan las contribuciones electrónica, iónica y orientacional. Suele definirse una "polarizabilidad", α, suponiendo que hay N dipolos por unidad de volumen, de modo que la magnitud de la polarización es $P = \alpha N E$, donde E es la magnitud del campo efectivo aplicado. Así habrá una polarizabilidad para cada una de las contribuciones a la polarización que se mencionaron antes.

En un campo eléctrico oscilante, la polarizabilidad total dependerá de la capacidad de los distintos dipolos para orientarse en la dirección del campo durante cada inversión del campo (Figura 9.7).

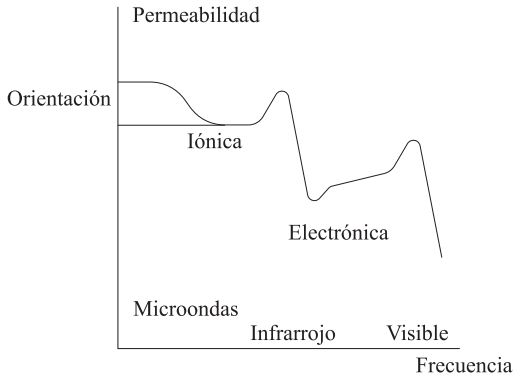

FIGURA 9.7. Acerca de la polarizabilidad como función de la frecuencia

A bajas frecuencias, los dipolos tienen suficiente tiempo y se orientarán completamente en la dirección del campo[7]. Si la frecuencia del campo aplicado es mucho más alta que la frecuencia de relajación de los dipolos, estos no alcanzan a reorientarse con suficiente rapidez y la polarización por orientación, que es efectiva a bajas frecuencias, resulta "amortiguada" a altas frecuencias. El tiempo de relajación es mucho más corto en la polarización iónica y aún menor en la electrónica. De esa manera, a las frecuencias en el rango de las ondas visibles, solo hay contribuciones a la polarización debidas a los electrones. Como se ilustra en la figura, el muy conocido –y usado– efecto de calentamiento del agua por las microondas ocurre en el rango en que los efectos de orientación son muy grandes. Los cambios en polarización son los que disipan muy eficazmente la energía transportada por los campos y esa energía absorbida se percibe como calentamiento.

[7] La orientación se lleva a cabo en una dirección y luego en la opuesta, siguiendo los cambios en la dirección del campo. El proceso de reorientación tiene un ritmo propio con un tiempo característico, llamado "tiempo de relajación". Este es el tiempo promedio en que los dipolos pasan del estado inicial al estado final de orientación.

La polarización en superficies aparece en materiales inhomogéneos, entre dos o más materiales con diferentes constantes dieléctricas –o conductividad eléctrica–. Esta inhomogeneidad resulta en la acumulación de cargas de polarización en las superficies internas del material.

9.10. Electrostricción, piezoelectricidad y ferroelectricidad

La aplicación de un campo eléctrico ocasiona distorsiones en la configuración electrónica o la rotación de dipolos permanentes: esto resulta en cambios en las dimensiones o en deformaciones de los sólidos. Este fenómeno se conoce como *electrostricción*. En muchos materiales, esta deformación es normalmente muy pequeña, excepto en campos muy intensos y la deformación resultante está en la dirección del campo. Si, por el contrario se deforma el material, no siempre hay un fenómeno inverso.

Una serie de materiales en los que el efecto es grande. Se denominan materiales *piezoeléctricos*[8]. Si a una lámina delgada del material piezoeléctrico se colocan electrodos y se aplica un voltaje continuo (Figura 9.8), se origina una deformación del volumen que puede emplearse en *actuadores* mecánicos para realizar pequeños desplazamientos. Si el voltaje es alterno, se produce una deformación de la superficie con la misma frecuencia del voltaje; esta deformación se propaga hacia el interior del material –como una onda mecánica–. Si se escoge adecuadamente la frecuencia, se logran efectos de resonancia electromecánicos y la emisión de sonido. El efecto inverso permite elaborar dispositivos como sensores de impacto, micrófonos y otros similares.

Relacionado con la piezoelectricidad hay otro efecto: la ferroelectricidad. Resulta del alineamiento espontáneo de los dipolos en una interacción muy intensa. Un cristal ferroeléctrico, además de una asimetría en su celda básica, debe tener una dirección especial –es un material anisotrópico–.

[8] La justificación en los materiales cristalinos, como el cuarzo, es que la distribución se carga no es simétrica en cada celda elemental –que forma, por repetición, todo el material–. La deformación del material produce un desplazamiento neto entre las cargas positivas y negativas; la acumulación de carga en las superficies equivale a un campo eléctrico producido por la deformación. En el caso de los polímeros piezoeléctricos, hay grupos de moléculas unidas como cristalitos ordenados. Esos cristalitos forman en la matriz polimérica un material similar, pero con estructura distinta. El material polímero piezoeléctrico más popular es el fluoruro de polivinilideno, PVDF. Ver, por ejemplo, la página www.ktech.com/featured_products/piezoelectric_polymers.cfm o la más técnica www.ieee-uffc.org/ultrasonics/teaching/i8610212.pdf.

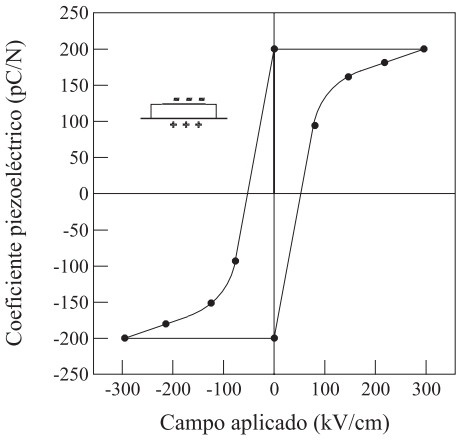

FIGURA 9.8. Sobre el comportamiento de algunos dieléctricos

El efecto depende mucho de la temperatura: la agitación térmica se opone al ordenamiento, de modo que se encuentra una temperatura, por encima de la cual el efecto desaparece; se denomina "temperatura de Curie", con un drástico aumento de la constante dieléctrica cerca de esta temperatura.

Los materiales ferroeléctricos tradicionales son la sal de Rochelle (tartrato de sodio y potasio tetrahidratado), el titanato de bario, $BaTiO_3$ y el de estroncio, $SrTiO_3$, el grupo de materiales denominados KDP KH_2PO_4, KH_2AsO_4 y el niobato de potasio $KNbO_3$. Un progreso muy importante en las aplicaciónes resultó con el descubrimiento (hacia 1970) de las propiedades del zirconato-titanato de plomo, $Pb(Zr,Ti)O_3$, o PZT, que tiene una respuesta piezoeléctrica muy fuerte y una polarización remanente grande. Los materiales ferroeléctricos son importantes cuando se trata de obtener constantes dieléctricas muy altas –como en la fabricación de condensadores que puedan tener dimensiones muy pequeñas–. Los materiales ferroeléctricos son todos piezoeléctricos, pero no al revés; un ejemplo usual es el cuarzo, empleado sobre todo en circuitos para fijar su frecuenia de oscilación –computadores, microcontroladores y otros–. Los materiales ferroeléctricos se emplean en detectores de aceleración (en los *airbag* de los automóviles modernos) y control activo de vibración, en sistemas para formar imágenes a partir de ondas térmicas o ultrasónicas. La investigación sobre sus propiedades y aplicaciones es muy activa.

Cuando se calienta un material piezoeléctrico, las distancias entre átomos aumentan en una forma asimétrica y puede ocurrir que la polarización cambie y con ella la diferencia de potencial entre las caras de una lámina.

Esto se llama "efecto piroeléctrico". Se emplea en generadores de tensión con poca corriente, como en encendedores para gas[9].

Los materiales ferroeléctricos forman *dominios*, que son regiones con polarización constante (ver el próximo capítulo para una presentación de los ferromagnéticos, de los que el prefijo ferro- se toma aquí prestado). Entre esas regiones, la polarización cambia de dirección en pocos nanometros, formando las *paredes de dominio*, en las que la polarización prácticamente desaparece. La presencia de estos dipolos en regiones pequeñas, que permanecen estables a menos que un campo eléctrico externo se aplique para cambiar su orientación, es un fenómenos muy empleado y muy investigado para elaborar *circuitos con memoria*, en las llamadas memorias de acceso aleatorio ferroeléctricas (FeRAM), en las tarjetas de memoria y en las llamadas tarjetas inteligentes del "dinero plástico"[10].

9.11. Ruptura y pérdidas

Un importante aspecto práctico de un buen aislamiento es que no haya "ruptura dieléctrica". Ya se mencionó este término: significa que hay un límite para la intensidad del campo eléctrico, por encima de la cual el material deja de ser aislante y se produce conducción eléctrica en él. Suele expresarse en voltios/mm –del espesor del material–. Depende del espesor del material y del tiempo durante el que actúa el campo eléctrico. Un incremento de espesor aumenta el voltaje de ruptura, pero no de forma lineal sino –una relación puramente empírica– con la potencia $0,4$ del espesor. Esta variación se debe a la presencia de defectos y poros en el material que terminan produciendo una especie de falla prematura. La humedad en la superficie, los contaminantes, las temperaturas elevadas. el envejecimiento y las tensiones mecánicas actúan desmejorando las cualidades aislantes de un material.

A la orientación de los dipolos y la rotación resultante se opone la fricción interna del material y la agitación térmica de las moléculas. Se requiere energía para mantener esta rotación; eso significa una "pérdida de potencia" para los generadores. Esta pérdida depende de la frecuencia de la tensión aplicada. Puede haber también conducción eléctrica a través del aislante. La energía así "perdida" termina calentando el material. Un aislante

[9] Se puede obtener más información a partir de la página virtualskies.arc.nasa.gov/research/youDecide/piezoElectMat.html.

[10] Para el lector interesado serán interesantes las páginas acereca de desarrollos en este campo, como ieeexplore.ieee.org/xpl/RecentIssue.jsp?punumber=58, la my.ece.ucsb.edu/yorklab/Projects/Ferroelectrics/thinfilm%20ferroelectrics.htm.

–dieléctrico– ideal no absorbería energía; la energía empleada para cargar un condensador construido con ese dieléctrico ideal se podría recuperar[11]. Usualmente, la pérdida de energía, cuando se aplica una tensión alterna a un condensador, se mide por la diferencia de fase entre la tensión y la corriente –que debiera ser $\pi/2$ para un dieléctrico ideal–. El factor de disipación es la fracción de la energía "perdida" en un ciclo sobre la energía promedio almacenada.

9.12. Temas para discusión

- La energía necesaria para lograr la orientación (y reorientación) de los dipolos de un material en un campo oscilante explica las pérdidas de energía eléctrica. Justifique que esta absorción de energía crece con la frecuencia hasta cuando los dipolos no alcanzan a orientarse y la absorción –y la constante dieléctrica– disminuyen para frecuencias más altas. El agua es opaca para las microondas y el infrarrojo, y es transparente para la luz visible. ¿En qué aprovechamos esta propiedad?

- En instalaciones de muy alta tensión (centrales eléctricas, por ejemplo) se emplean gases como SF_6 a presión, en lugar de aire, entre elementos a diferentes potenciales. ¿Qué motivos habrá para aplicar esa sofisticada tecnología?

- En principio, la determinación de la constante dieléctrica consiste en medir la capacitancia de un condensador que tiene geometría conocida sin y con el material dieléctrico, para formar la relación entre ellas. Discuta las limitaciones de tal aproximación muy simplificada. ¿Cómo modelaría el comportamiento de un material que, además de ser un dieléctrico, tiene una ligera conductividad eléctrica?

- Dos placas conductoras paralelas muy grandes están cargadas uniformemente con densidad de carga σ y su separación es d. Un disco de material dieléctrico de radio a y espesor d se coloca entre las placas. ¿Cómo afectará la presencia del dieléctrico al campo entre las placas en lugares alejados del dieléctrico? ¿Será cierto que $\vec{D}$ es independiente de la presencia del dieléctrico? ¿Cómo se interpreta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$?

[11] Sin contar con las "pérdidas" por radiación que se discutieron anteriormente.

La determinación de la constante dieléctrica es un método muy poderoso para la investigación de suelos, por ejemplo. Aunque no se reduce a tomar muestras, es posible realizar las investigaciones sin contacto. Un ejemplo interesante es el intento –de la ESA– de encontrar agua en Marte, examinando el comportamiento dieléctrico de su suelo, a través de las ondas de radio reflejadas.

9.13. Ejercicios

1. Un condensador de placas paralelas está lleno, como se muestra en la Figura (9.9), con dos materiales de igual tamaño pero diferente constante dieléctrica.

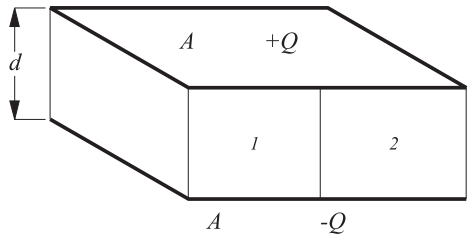

FIGURA 9.9. Un condensador lleno con dos trozos de dieléctricos

   Muestre que la capacitancia está dada por $C = (\epsilon_0 A/d)[(K_1 + K_2)/2]$.

2. Un condensador de placas paralelas separadas por una distancia d tiene cargas $\pm Q$. Una lámina de dieléctrico de espesor e, con $e < d$, está entre las placas, con sus superficies paralelas a las placas. Calcule la diferencia de potencial entre las placas, el campo en el dieléctrico y el campo en el espacio sin dieléctrico.

3. Un condensador de placas paralelas separadas por una distancia d tiene cargas $\pm Q$ está lleno por dos láminas de dieléctrico, una de espesor e y constante dieléctrica ϵ_1 y la otra de espesor $d - e$ y constante dieléctrica ϵ_2. ¿A qué es igual la diferencia de potencial entre las placas, el campo en cada dieléctrico, la densidad de carga superficial en la separación entre dieléctricos y la capacitancia?

4. Un condensador tiene placas rectangulares, paralelas, separadas por una distancia d. Está lleno por dos cuñas de dieléctrico: a lo largo de uno de sus lados, una de ellas comienza con espesor 0 y termina con espesor d;

tiene constante dieléctrica ϵ_1. La segunda comienza con espesor d y termina con 0; tiene constante dieléctrica ϵ_2. ¿A qué es igual la capacitancia de este condensador?

5. Un condensador de placas paralelas se conecta a una batería que mantiene una diferencia de potencial V_0 entre las placas (Figura 9.10). Una lámina de material dieléctrico, de constante K se inserta entre las placas, llenando completamente el espacio entre ellas.

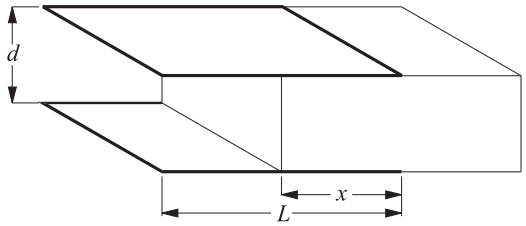

FIGURA 9.10. Un condensador parcialmente lleno con un dieléctrico

- Muestre que la batería realiza un trabajo $q_0V_0(K-1)$ durante el proceso de inserción. Aquí q_0 es la carga inicial en una placa antes de la inserción.
- Diga cuánto trabajo es realizado por fuerzas mecánicas sobre la lámina cuando ésta es insertada entre las placas. ¿Este trabajo es realizado sobre o por el agente que inserta la placa?

6. Dos tubos coaxiales de radios a y b, con $(a < b)$, se introducen con su eje vertical en un baño de aceite que tiene constante dieléctrica K y densidad δ. Si se aplica una diferencia de potencial V_0 entre los tubos, muestre que el aceite sube una altura

$$h = \frac{V_0^2(K-1)\,\epsilon_0}{\ln(b/a)\,\delta\,(b^2-a^2)\,g}$$

Proponga valores razonables para un dispositivo experimental y para las propiedades del aceite; encuentre de qué orden de magnitud sería h. ¿Se podría emplear este dispositivo para bombear aceite?

10

Campos con medios magnéticos

10.1. Contribución de los medios magnéticos

Nuestro estudio de las propiedades magnéticas de los materiales seguirá un patrón similar al empleado en la discusión de los materiales dieléctricos. De la misma manera, la información insuficiente acerca de los detalles de las distribuciones de corrientes en el nivel microscópico nos llevará a definir un campo $\vec{H}$, denominado "intensidad de campo magnético", para tener en cuenta las propiedades observadas.

10.2. La hipótesis de Ampère

El lector habrá notado que se ha discutido acerca de las corrientes eléctricas como "fuentes" de la densidad de flujo magnético, $\vec{B}$. Pero las ideas sobre el magnetismo surgieron con los imanes permanentes naturales y solo desde el descubrimiento de Oersted se encontró una relación entre unos y otras. ¿Cómo se explica el campo de los imanes permanentes? La hipótesis de Ampère es que en el interior de un imán permanente existen corrientes eléctricas, movimientos de cargas que generan los campos que se observan experimentalmente. Su hipótesis, aunque muy atrevida para su tiempo, explicaba muchos fenómenos; por ejemplo, el campo generado por un imán permanente en forma de barra es análogo al producido por un solenoide –si consideramos la región externa a ambos–. De manera similar debiera explicarse la existencia del imán más grande de que disponemos, la Tierra.

La hipótesis es muy osada, porque en la época de Ampère, y mucho tiempo después, se carecía de una representación de los materiales que pudiera justificarla[1]. Mucho más tarde, como hemos visto, se comenzó a trabajar una teoría acerca de la constitución atómica de los materiales, con la que se puede plantear un modelo de cargas en movimiento dentro de ellos[2]. Para lo que sigue consideraremos que los átomos no son solo distribuciones de carga eléctrica, sino también cargas en movimiento, que constituyen corrientes eléctricas microscópicas. Ampère, naturalmente, no tenía esta información. La física atómica mostró mucho más tarde que se puede justificar la existencia de corrientes microscópicas en los materiales. Las propiedades magnéticas de los materiales tienen su origen en propiedades cuánticas de los átomos. Solo se logró un progreso significativo aplicando a los materiales las nuevas leyes de la física en el siglo XX [3]. Eso supera el alcance de este curso y debemos limitarnos, en lo que sigue, al tratamiento "clásico".

10.3. Corrientes "verdaderas" y corrientes electrónicas orbitales

En el espacio vacío, la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ se relaciona con la densidad de corriente a través de la ecuación

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{10.1}$$

que expresa la circulación de $\vec{B}$ sobre una línea cerrada C como función de toda la corriente que atraviesa una superficie S, cuyo límite es la línea C. En esta relación debemos tener en cuenta todo tipo de corrientes: haces de electrones moviéndose en el vacío, iones en movimiento, electrones orbitando alrededor del núcleo o el spin electrónico. Formalmente se distingue entre la densidad de corriente "verdadera", que incluye densidades de corriente o movimientos de carga con dimensiones macroscópicas y otras densidades de corriente asociadas con la constitución del medio material

[1] Un problema adicional es la magnitud de esas corrientes: si fueran corrientes convencionales, producirían una elevación de temperatura suficiente para fundir el hierro. No resultaba satisfactorio el estado de conocimientos acerca del magnetismo.

[2] Ver, por ejemplo, la página www.aacg.bham.ac.uk/magnetic_materials/history.htm y el capítulo sobre magnetismo en el informe de IUPAP, *Physics Now*.

[3] Una primera contribución es el concepto de que puede haber dipolos magnéticos, sin recurrir a corrientes que producen calentamiento. Otra es la existencia del spin, un momento angular adicional de los electrones, sin equivalente clásico. Ver más adelante.

–efectos atómicos, podríamos decir–. Llamaremos $\vec{J}_v$ a las corrientes "verdaderas" y $\vec{J}_m$ a las debidas al material, de modo que afirmaremos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S} \tag{10.2}$$

El segundo término de la derecha es análogo a la suma que hicimos sobre las cargas de polarización en nuestra discusión de propiedades dieléctricas.

10.4. El momento magnético

Consideremos un lazo C, plano, por el que circula una corriente I y está en una región donde hay un campo magnético $\vec{B}$. Definamos un sistema coordenado $\overline{Oxyz}$, en el que la posición del lazo está dada por el vector $\vec{r}$. La fuerza que actúa sobre un elemento de corriente del lazo es

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{10.3}$$

El torque que actúa sobre este elemento de corriente es

$$d\vec{\tau} = I(\vec{r} \times (\, d\vec{l} \times \vec{B})) \tag{10.4}$$

$$= I((\vec{r} \cdot \vec{B})\, d\vec{l} - (\vec{r} \cdot\, d\vec{l}) \cdot \vec{B}) \tag{10.5}$$

Supongamos, ahora, sin pérdida de generalidad, que el campo $\vec{B}$ está en la dirección $\overrightarrow{Oz}$. Escribamos también explícitamente $\vec{r}$ y $d\vec{l}$, así

$$\vec{B} = \hat{i}\, B + \hat{j}\, 0 + \hat{k}\, 0 \tag{10.6}$$

$$\vec{r} = \hat{i}\, x + \hat{j}\, y + \hat{k}\, z \tag{10.7}$$

$$d\vec{l} = \hat{i}\, dx + \hat{j}\, dy + \hat{k}\, dz \tag{10.8}$$

De esa manera, el torque sobre el elemento de corriente será

$$d\vec{\tau} = I\, B\, \left[\hat{i}\,(-y\, dy - z\, dz) + \hat{j}\,(x\, dy) + \hat{k}\,(x\, dz)\right] \tag{10.9}$$

donde aprovechamos que $\vec{r} \cdot \vec{B} = x\, B$ y $\vec{r} \cdot d\vec{l} = x\, dx + y\, dy + z\, dz$.

Las componentes del torque sobre todo el lazo se encuentran integrando la expresión (10.9) y son

$$\tau_x = -I\,B \oint (y\,dy + z\,dz) = 0 \tag{10.10}$$

$$\tau_y = I\,B \oint x\,dy \tag{10.11}$$

$$\tau_z = I\,B \oint x\,dz \tag{10.12}$$

Los términos en las dos últimas ecuaciones son $I\,B$ por la proyección del área S, definida sobre C, sobre el plano XY o sobre el plano XZ, respectivamente. Puede afirmarse entonces que

$$\vec{\tau} = I\,\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{10.13}$$

donde $\vec{m}$ se denomina "momento magnético" del lazo C –cuando lo recorre una corriente I–. Las dimensiones del momento magnético son, claro está, Amperio $\cdot\,\mathrm{m}^2$.

Resulta interesante calcular el momento magnético de una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en una trayectoria circular.

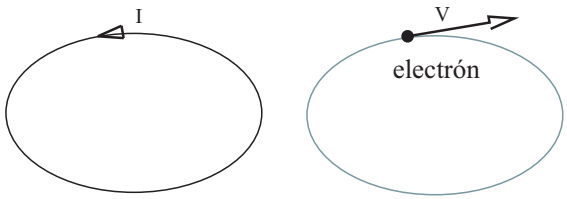

FIGURA 10.1. Sobre el momento magnético de un electrón en órbita

En este caso se puede suponer que la corriente equivalente es igual a la carga dividida por el periodo de rotación (Figura 10.1), es decir

$$I = \frac{q}{2\pi\,r/v} = \frac{q\,v}{2\pi\,r} \tag{10.14}$$

El producto del área por la corriente es $S\,I = q\,v\,r/2$ y el momento magnético tiene magnitud

$$|\vec{m}| = \frac{q\,v\,r}{2} \tag{10.15}$$

Si comparamos esta expresión con la del momento angular de la masa que está girando, respecto del centro de giro, es decir $|\vec{j}| = m\,v\,r$, veremos que la razón de momento magnético a momento angular es

$$\frac{|\vec{m}|}{|\vec{j}|} = \frac{q}{2\,m} \tag{10.16}$$

Esta expresión sigue siendo válida para el movimiento de los electrones en órbitas alrededor de los núcleos atómicos –según los modelos primitivos del átomo, a comienzos del siglo XX–. Debe notarse, sin embargo, que la investigación de los espectros de emisión por los átomos obligó a aceptar la existencia de una nueva variable para describirlos, que suele llamarse una variable cuántica, el momento angular de spin. Para esta variable, la magnitud del momento angular es $m = -g(e/2\,m)$, donde g se denomina "factor de Landé" y es aproximadamente igual a 2.

10.5. La magnetización

De manera análoga a la definición de polarización, tomaremos un volumen grande, para que haya muchos momentos magnéticos en él, pero pequeño para tratarlo como elemento de volumen. Si sumamos todos los momentos magnéticos y dividimos por el volumen en que están, tendremos la definición de magnetización $\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}}{\Delta V} \tag{10.17}$$

Consideremos ahora una región de un material magnetizado, en que la magnetización no es uniforme.

Un esquema sobre la situación está en la figura 10.2. En cada elemento de volumen podemos sustituir el momento magnético total por una corriente eléctrica que circula por la frontera de ese elemento de volumen. Consideraremos primero las componentes z de la magnetización. Esa componente del momento magnético en un elemento de volumen 1 es

$$M_z\,dx\,dy\,dz \tag{10.18}$$

y en volumen adyacente es, en una aproximación lineal

$$\left[M_z + \frac{\partial\, M_z}{\partial x}\,dx\right]\,dx\,dy\,dz \tag{10.19}$$

Asociaremos a estos momentos magnéticos las corrientes efectivas I_1 y I_2, respectivamente

$$I_1\,dx\,dy = M_z\,dx\,dy\,dz \tag{10.20}$$

$$I_2\,dx\,dy = \left[M_z + \frac{\partial\, M_z}{\partial x}\,dx\right]\,dx\,dy\,dz \tag{10.21}$$

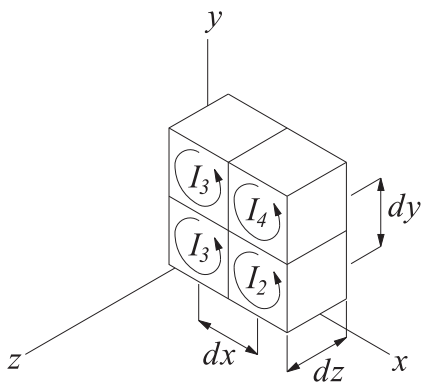

FIGURA 10.2. Sobre la magnetización no uniforme

La corriente en la separación entre los dos volúmenes es la diferencia entre los dos e irá en la dirección y

$$(I_1 - I_2)\, dx\, dy = -\left(\frac{\partial M_z}{\partial x}\, dx\right) dx\, dy\, dz \tag{10.22}$$

$$I_y = -\frac{\partial M_z}{\partial x}\, dx\, dz \tag{10.23}$$

La densidad de corriente será $J_{my}^{(1)}$, con

$$J_{my}^{(1)} = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \tag{10.24}$$

De manera análoga, el cambio en magnetización en el elemento de volumen que está detrás del 1 contribuirá con una densidad de corriente efectiva $J_{my}^{(2)}$

$$J_{my}^{(2)} = \frac{\partial M_x}{\partial z} \tag{10.25}$$

La densidad de corriente efectiva total será

$$J_{my} = J_{my}^{(1)} + J_{my}^{(2)} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \tag{10.26}$$

En forma similar, se puede calcular que

$$J_{my} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \tag{10.27}$$

$$J_{mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \tag{10.28}$$

Las tres expresiones se resumen en

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{10.29}$$

Solo si el momento magnético por unidad de volumen no es constante en el espacio, habrá una "corriente de magnetización" equivalente, que surge realmente como resultado de la contribución de todos los lazos elementales de corriente en el material. En forma similar al caso de la polarización, dividiremos los efectos de las corrientes entre las "verdaderas", $\vec{J}_v$, que circulan por alambres y las corrientes de magnetización en los materiales magnetizados, empleando la ecuación de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}_v \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int \vec{\nabla} \times \vec{M} \cdot d\vec{S} \tag{10.30}$$

y el teorema de Stokes para lograr

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}_v \cdot d\vec{S} + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \tag{10.31}$$

Reagrupando podemos definir un campo $\vec{H}$, llamado "intensidad de campo magnético"

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J}_v \cdot d\vec{S} \tag{10.32}$$

10.6. La intensidad de campo magnético

En los materiales magnéticos, en general, la magnetización $\vec{M}$ es una función de la intensidad de campo magnético, $\vec{H}$, pero puede ser una función muy complicada. En algunos materiales, hay una relación lineal

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{10.33}$$

de modo que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 K_m \vec{H} = \mu \vec{H} \tag{10.34}$$

Se denomina susceptibilidad del material a χ_m y permeabilidad relativa del material a $K_m = 1 + \chi_m$. Naturalmente, para el *vacío* $\chi_m = 0$; dependiendo del material puede ser $\chi_m < 0$ para materiales *diamagnéticos*, y $0 < \chi_m$ para materiales *paramagnéticos*. En la sección 9 se tratará este tema.

El campo $\vec{H}$ se introdujo para describir el componente de un material, pero puede emplearse en forma más general. Por ejemplo, para el vacío no hay magnetización $\vec{M}$, de modo que $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ y, si calculamos la circulación

de la intensidad de campo magnético sobre una curva que está alrededor de una línea de corriente, ésta es

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{10.35}$$

Las unidades para el campo $\vec{H}$ son Amperio/metro, como se puede inferir fácilmente de la ecuación anterior.

10.7. Corrientes de magnetización

También de manera análoga a la definición de cargas de polarización, definiremos corrientes de magnetización. Para ello necesitamos calcular primero el vector potencial para un dipolo magnético. Tomaremos como dipolo un anillo de corriente de radio a, con I como el valor de la intensidad de corriente (Figura 10.3).

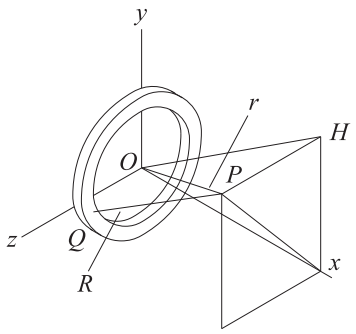

FIGURA 10.3. El cálculo del vector potencial para un dipolo magnético

Definiremos un sistema coordenado con ejes $\overrightarrow{Oz}$ y $\overrightarrow{Oy}$ sobre el plano del anillo y $\overrightarrow{Ox}$ a lo largo del eje de simetría. La posición del punto de observación será $\vec{r}$. Para realizar el cálculo necesitamos las cantidades

$$d\,\vec{l} = -\hat{j}\,d\,y' + \hat{k}\,d\,z' \tag{10.36}$$

$$R^2 = x^2 + (y - y')^2 + (z')^2 = r^2 + a^2 - 2\,y\,y' \tag{10.37}$$

Así, un elemento de corriente contribuye al potencial vector con

$$d\,\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi} \frac{-\hat{j}\,d\,y' + \hat{k}\,d\,z'}{[r^2 + a^2 - 2\,y\,y']^{1/2}} \tag{10.38}$$

Y el potencial vector será

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\left\{-\hat{j}\int_{-a}^{+a}\frac{d\,y'}{[r^2+a^2-2\,y\,y']^{1/2}} + \hat{k}\int\frac{d\,z'}{[r^2+a^2-2\,y\,y']^{1/2}}\right\} \tag{10.39}$$

La primera de estas integrales es cero, por simetría; la segunda es una integral elíptica que se calculará numéricamente. Podemos encontrar una aproximación válida para distancias grandes comparadas con el tamaño de los dipolos –en la práctica, quiere decir distancias de micrómetros, muy grandes comparadas con los tamaños de los átomos–. Cuando $(a^2 \ll r^2)$, esa expresión es

$$\vec{A} = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\int\frac{d\,z'}{r[1+a^2/r^2-(2\,y\,y'/r^2)]^{1/2}} \tag{10.40}$$

$$= \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\int\left(1+\frac{y\,y'}{r^2}\right)d\,z' \tag{10.41}$$

Para integrar, realizaremos la transformación a coordenadas polares

$$y' = a\,\cos(\theta) \qquad z' = a\,\operatorname{sen}(\theta) \qquad d\,z' = a\,\cos(\theta)\,d\,\theta \tag{10.42}$$

La expresión para el potencial vector es ahora

$$\vec{A} = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{ya\,\cos(\theta)}{r^2}\right)a\,\cos(\theta)\,d\,\theta \tag{10.43}$$

$$= \hat{k}\frac{\mu_0 I a}{4\,\pi}\frac{y\,a\,\pi}{r^2} \tag{10.44}$$

Recordando que $(\pi\,a^2 I\hat{k} = \vec{m})$ y que $(y/r^3 = r\,\operatorname{sen}(\varphi)/r^3)$, podemos resumir que

$$\vec{A} = \hat{k}\,\frac{\mu_0\,m\,r\,\operatorname{sen}(\varphi)}{4\,\pi\,r^3} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{10.45}$$

En esta expresión, a pesar de que comenzamos el cálculo con un lazo circular, la forma ya no importa, debido a la relación de distancias $(a^2 \ll r^2)$.

Una vez calculado este potencial vector, consideremos un volumen de integración $d^3\vec{r}'$, en el que hay una magnetización $\vec{M}$. El momento magnético en ese volumen es $\vec{M}d^3\vec{r}'$. Si las coordenadas de ese volumen son x', y', z', la contribución de ese momento magnético al potencial vector, que genera todo el cuerpo magnetizado, será

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\vec{M}d^3\vec{r}'\times\vec{R}}{R^3} \tag{10.46}$$

y el potencial vector, generado por todo el cuerpo,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3}\, d^3\vec{r}^{\,\prime} \tag{10.47}$$

Esta expresión se puede transformar en una integración sobre la superficie y otra sobre el volumen. Recordemos que

$$\vec{R} = \hat{i}(x - x^{\prime}) + \hat{j}(y - y^{\prime}) + \hat{k}(z - z^{\prime}) \tag{10.48}$$

De modo que las derivadas respecto a las coordenadas de las fuentes son

$$\text{grad}^{\prime} = \vec{\nabla}^{\prime} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial\, x^{\prime}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial\, y^{\prime}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial\, z^{\prime}} \tag{10.49}$$

Así que

$$\vec{\nabla}^{\prime}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \tag{10.50}$$

Nótese el signo (+). Con esto se puede modificar la expresión (10.47) para obtener

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \vec{M} \times \vec{\nabla}^{\prime}\left(\frac{1}{R}\right)\, d^3\vec{r}^{\,\prime} \tag{10.51}$$

Aprovechamos la identidad

$$\vec{\nabla} \times (e\,\vec{V}) = \vec{\nabla}(e) \times \vec{V} + e\,\vec{\nabla} \times \vec{V} \tag{10.52}$$

para obtener, con el teorema de Gauss, de (10.51), la expresión

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \left\{ \int \frac{\vec{\nabla}^{\prime} \times \vec{M}}{R}\, d^3\vec{r}^{\,\prime} - \int \vec{\nabla}^{\prime} \times \left(\frac{\vec{M}}{R}\right)\, d^3\vec{r}^{\,\prime} \right\} \tag{10.53}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\,\pi} \left\{ \int \frac{\vec{\nabla}^{\prime} \times \vec{M}}{R}\, d^3\vec{r}^{\,\prime} - \int \left(\frac{\vec{M}}{R}\right) \times\, d\,\vec{S}^{\prime} \right\} \tag{10.54}$$

La primera de estas integrales, sobre el volumen del material magnetizado, representa la contribución de las corrientes de magnetización en el volumen. La segunda representa la contribución de la densidad superficial de corriente, que es diferente de cero cuando la magnetización no es paralela a la normal a la superficie.

10.8. ¿Cómo se diseña un electroimán?

Para emplear todo lo desarrollado anteriormente, apliquémoslo a un diseño práctico. Un electroimán se construye con un material "ferromagnético" sobre el que se construye un solenoide –o dos–, que lleva la corriente eléctrica.

Para comenzar, supondremos que el material ferromagnético –con frecuencia conocido como "núcleo"– tiene forma de rosquilla de radio promedio r (Figura 10.4); el solenoide, construido sobre el núcleo, tiene forma de toroide, con N vueltas de alambre.

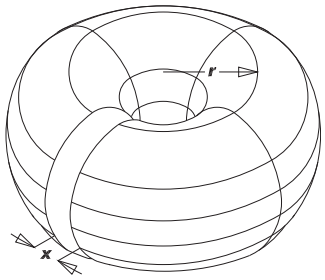

FIGURA 10.4. Esquema del núcleo toroidal para un electroimán

De acuerdo con lo discutido en la sección anterior, si calculamos la circulación de $\vec{H}$ sobre una circunferencia concéntrica y dentro del toroide,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N\, I \tag{10.55}$$

donde I es la intensidad de la corriente en el alambre. Por simetría, se puede argumentar que la magnitud de la intensidad de campo magnético es, dentro del toroide, $|\vec{H}(r)| = N\, I/2\,\pi\, r$, donde r es el radio de la circunferencia de integración.

Pero un electroimán tiene además una brecha en el núcleo, de ancho $x \ll 2\,\pi\, r$. Debemos calcular ahora

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N\, I = \int_0^x \vec{H}_b \cdot d\vec{l} + \int_x^{2\,\pi\, r} \vec{H}_i \cdot d\vec{l} \tag{10.56}$$

donde $\vec{H}_b$ es el campo en la brecha y $\vec{H}_i$ en el interior del material.

Sabemos que las líneas de campo para $\vec{B}$ son continuas, es decir $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Podemos esperar que la presencia de la discontinuidad del material produzca ligeras deformaciones de $\vec{B}$ en la brecha, pero las consideraremos despreciables y supondremos que la densidad de flujo magnético es uniforme a lo largo de una línea de integración, igual que en el caso de la bobina toroidal sin material de relleno. Cuando circula una corriente de intensidad I en el alambre, en los materiales $B/H = \mu_0 K_m$, donde, claro está, K_m es una función de H, como se discutirá más adelante.

Con lo anterior, se puede argumentar que

$$H_i = \frac{B}{\mu_0 K_m} \qquad\qquad H_b = \frac{B}{\mu_0} \tag{10.57}$$

De modo que la ecuación (10.56) se puede transformar en

$$N\,I = \int_0^x \frac{B}{\mu_0}\,d\,l + \int_x^{2\,\pi\,r} \frac{B}{\mu_0 K_m}\,d\,l \tag{10.58}$$

$$= \frac{B}{\mu_0}\left[\frac{2\,\pi\,r - x}{K_m} + x\right] \tag{10.59}$$

$$= \frac{B}{\mu_0}\left[\frac{l}{K_m} + x\right] \tag{10.60}$$

Hemos llamado l a la longitud del núcleo. Pero, ¿para qué todo esto? Designemos los campos en la bobina toroidal *sin* núcleo como H_0 y B_0. El cálculo es simple

$$2\pi\,r\,H_0 = \frac{2\pi\,r\,B_0}{\mu_0} = \frac{(2\,\pi\,r - x)B}{\mu_0 K_m} + \frac{xB}{\mu_0} \tag{10.61}$$

Así que la relación entre las dos densidades de flujo magnético es

$$\frac{B_0}{B} = \frac{l + K_m x}{K_m(l + x)} \tag{10.62}$$

En el límite en que $x \to 0$,

$$\frac{B_0}{B} = \frac{1}{K_m} \tag{10.63}$$

El resultado es que la densidad de flujo magnético con núcleo es mucho más grande que sin núcleo –en el espacio entre polos–. Para x pequeños comparados con l decrece rápidamente. Por ejemplo, si $K_m = 1.000$ y $x = l/1.000$, la relación B_0/B toma un valor $1/500$.

Además, se puede calcular, aplicando la ecuación (10.62) en la (10.57) que la intensidad de campo magnético en la brecha y en el núcleo es

$$H_b = \frac{K_m H_0\,(l + x)}{l + K_{m\,x}} \tag{10.64}$$

$$H_i = \frac{H_0\,(l + x)}{l + K_{m\,x}} \tag{10.65}$$

Y se cumple que $H_b/H_i = K_m$. El campo H en la brecha es mucho más intenso que en el núcleo.

Otra manera usual de considerar el papel que cumple el núcleo es considerar qué pasa con el flujo magnético. Para $x = 0$ el flujo es

$$S\,B = \Phi = \frac{N\,I}{l/\mu_0 K_M S} \tag{10.66}$$

debido a que

$$B = N\,I\,\mu_0 \frac{1}{l/K_m + x} \tag{10.67}$$

(10.66) y la ley de Ohm, donde Φ juega el papel de la corriente eléctrica, $N\,I$, el papel de la f.e.m y recibe la designación "fuerza magnetomotriz" y el término $l/\mu_0 K_M S$ juega el papel de la resistencia, denominándose "reluctancia", debido a que depende de la geometría en forma similar –con K_m equivalente a $1/\eta$–. Cuando $x \neq 0$, la ecuación [10.66] se convierte en

$$\Phi = \frac{N\,I}{[(l/\mu_0 K_M S) + (x/\mu_0 S))]} \tag{10.68}$$

Cada término de este denominador se llama *reluctancia*. Y se habla de una "suma de reluctancias" en un "circuito magnético".

10.9. Los polos magnéticos

Un tema muy usual en la literatura –y en la historia del magnetismo– es el de los polos magnéticos, sobre todo aplicando el término a un imán permanente. ¿Cómo podemos definirlos? Si se intenta considerarlos como la contraparte de las cargas eléctricas encontraremos contradicciones; pero es posible identificarlos de la siguiente manera. Consideremos la definición de intensidad del campo magnético

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{10.69}$$

Si tomamos la divergencia de los términos en la ecuación anterior, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \tag{10.70}$$

En esta ecuación, el término $-\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ desempeña el papel que cumple la divergencia de la polarización en el caso de los dieléctricos. Se reemplaza

formalmente por una "densidad de carga magnética", ρ_m, que, también de manera formal, sería "la fuente de H". Es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_m \tag{10.71}$$

Esta expresión sería la "ley de Gauss" para la intensidad de campo magnético, que expresa además, una dependencia de la forma $1/r^2$ para el campo. Muestra también, que hay una densidad de polos magnéticos donde la divergencia de la magnetización es diferente de cero.

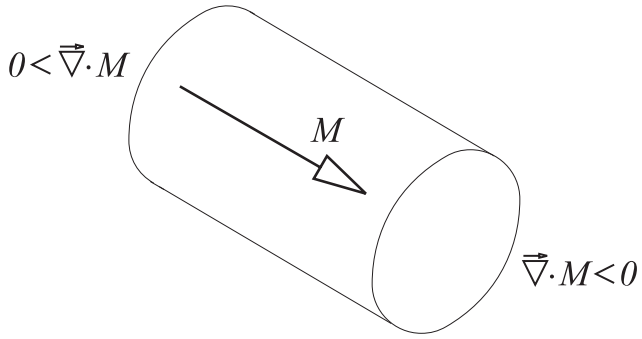

FIGURA 10.5. Acerca de una barra cilíndrica con magnetización uniforme

Por ejemplo, si tenemos una barra cilíndrica –ideal– con magnetización uniforme a lo largo de su eje (Figura 10.5), en el interior de la barra la divergencia de la magnetización es cero. En los extremos, por el contrario, hay una divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} \tag{10.72}$$

si el eje se supone en la dirección $\overrightarrow{Ox}$. Habrá una densidad de polo $-\rho_m$ en un extremo de la barra y otra densidad $+\rho_m$ en el otro extremo. Sabemos, por la definición implícita (10.53), que no hay densidad de corriente de magnetización en este sistema ideal, pero hay densidad superficial de corriente de magnetización en la superficie de la barra. Esta se comporta como un solenoide –con corriente que lo recorre– para el cálculo del campo $\vec{B}$ y como un par de polos para el cálculo de $\vec{H}$. A partir de $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, resulta $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ en el espacio fuera de la barra, aunque dentro de ella depende tanto de $\vec{H}$ como de $\vec{M}$.

10.10. Comportamiento de los materiales en un campo magnético

Desde mucho tiempo atrás es conocido como se comportan algunos materiales, como muchas aleaciones de hierro, en un campo magnético: la fuerte atracción sobre ellos es el arquetipo de comportamiento "magnético". En la ecuación (10.33) se definió la susceptibilidad magnética, como la relación entre el campo $\vec{H}$ aplicado y la magnetización. En los materiales "magnéticos", la susceptibilidad no es una constante: depende del campo externo aplicado. Se aprovechan esas propiedades, como hemos visto, en aplicaciones interesantes como los electroimanes o los transformadores.

Otros materiales tienen comportamientos mucho menos notorios en un campo magnético[4]. Comúnmente se dice que son materiales no magnéticos, pero observándolos con más detenimiento, se verá que los campos magnéticos sí tienen una acción sobre ellos. Precisamente esos comportamientos fueron observados por Jacques y Pierre Curie, hacia 1883. Sus experimentos consistieron en colgar una muestra de material de una balanza de torsión muy sensible (nuevamente una balanza de torsión, pero muy perfeccionada, comparada con la de Coulomb: puede medir diferencias de $10\mu g$) de manera que la muestra quedara cerca de los polos de un electroimán con su campo horizontal. Los hermanos Curie[5] observaron que los materiales "no magnéticos" parecían experimentar pequeños aumentos o disminuciones de peso cuando se introducen en un campo magnético. Había, pues, fuerzas de atracción o repulsión. A los materiales ligeramente atraídos los llamaron *paramagnéticos*, a los repelidos, *diamagnéticos*[6, 7].

Se puede explicar cualitativamente el comportamiento de los materiales comenzando por imaginar un átomo de hidrógeno como un núcleo positivo (un protón) con un electrón moviéndose en una órbita a su alrededor. Ya hemos considerado este modelo primitivo y calculado el momento magnético de ese electrón. En el gas hidrógeno, cada átomo está enlazado –químicamente–

[4] Una pregunta natural en un lector atento es acerca de la acción de un imán sobre *cualquier* material, ¿aceptamos, de acuerdo con la hipótesis de Ampère, que todo material tiene corrientes dentro de él?

[5] Pierre Curie recibió el premio Nobel en 1903, junto con su esposa Marie y con P. Becquerel, por el descubrimiento de un fenómeno que entonces parecía más interesante: la radiactividad. Ver la página nobelprize.org/physics/laureates/1903/index.html.

[6] Recuérdese que el prefijo *para-* significa *parecido a*.

[7] En los instrumentos modernos comerciales se emplea un sistema de microbalanza con realimentación electrónica similar a la descrita en F. Mora, *Construcción, calibración y utilización de una microbalanza*, Trabajo dirigido, Universidad Nacional de Colombia, 2001.

con otro; en las moléculas de H_2 los momentos magnéticos de los electrones están opuestos entre sí, dejando la molécula casi sin momento magnético. Este comportamiento es típico de muchas sustancias, de las que se dice carecen de momento magnético.

Cuando la molécula de hidrógeno se somete a un campo magnético, aquellos electrones cuyas órbitas están en planos normales al campo cambian ligeramente su momento angular. Este comportamiento se puede predecir a partir de la ley de Faraday: cuando el campo se incrementa –desde cero–, habrá un campo eléctrico inducido que actuará sobre los electrones. Esto significa que los momentos magnéticos de los electrones no se cancelarán y la molécula, como un todo, adquiere un momento angular –inducido por el campo magnético–. Este comportamiento, en el que el momento magnético inducido es opuesto al campo aplicado, está presente en todos los materiales y representa el *diamagnetismo*. Son diamagnéticos el agua, el hidrógeno, el amoniaco, el bismuto, el cobre, el grafito y otras sustancias; son débilmente repelidos por un imán. Es una manifestación de la ley de Lenz y se observa en sustancias cuyos átomos tienen electrones apareados.

En otras sustancias, como el oxígeno, hay electrones no apareados y sus momentos magnéticos no se cancelan. Tales moléculas poseen un momento magnético permanente –aún en ausencia de un campo externo–. Cuando se someten a un campo externo, las órbitas se alterarán, como ya se describió, pero permanece un efecto neto en que los "polos" del átomo tienden a alinearse en el campo externo. Tales sustancias son paramagnéticas. Por ejemplo, lo son el oxígeno, el estaño, el aluminio, el sulfato de cobre y muchas otras sales de los elementos "de transición". Son atraídas por un imán, aunque el efecto es débil.

Material	$\chi_m \times 10^5$
Aluminio	+2,2
Amoniaco	-1,06
Bismuto	-16,7
Cobre	-0,92
Hidrógeno	-0,00022
Oxígeno	+0,19
Silicio	-0,37
Agua	-0,90

La tabla muestra los valores de susceptibilidad magnética de algunas sustancias comunes, tanto diamagnéticas como paramagnéticas. Recuérdese

que hemos empleado el símbolo χ_m para la relación entre la magnetización (dipolo magnético por unidad de volumen) y la intensidad de campo magnético[8].

Un experimento interesante es la observación –y medición– del comportamiento de soluciones de sales (paramagnéticas) en agua (diamagnética) con concentraciones crecientes, empleando el llamado aparato de Quincke (Figura 10.6).

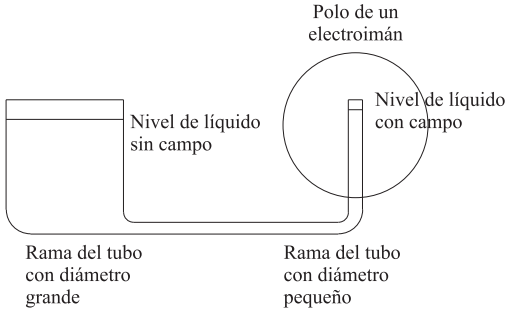

FIGURA 10.6. Esquema del aparato de Quincke

El nivel de líquido en ambas ramas del tubo en U es, sin corriente en el electroimán, el mismo, pero el nivel en la rama –de diámetro mucho menor–, que está entre los polos de este, baja o sube cuando se conecta el campo magnético –en la práctica sólo se observa el comportamiento paramagnético, mucho más evidente que el diamagnético; el diamagnetismo del agua se observa por extrapolación–.

La susceptibilidad de los materiales dia- y paramagnéticos es tan pequeña que la contribución de la magnetización al flujo de campo magnético es pequeña –la variación en la llamada "curva de magnetización" $B(H)$ no es muy notoria–; en la figura 10.7 no se muestra el efecto de cambiar el sentido del campo: la curva resultante es simétrica a la mostrada respecto al origen de la gráfica.

Pero la medición de la susceptibilidad magnética es un importante método de análisis. Puede funcionar como un método no destructivo y relativamente barato para determinar, por ejemplo, la presencia de minerales con hierro entre sedimentos; la mayoría de las sustancias de los seres vivos contienen mucha agua y pocas moléculas de la vida contienen elementos como hierro

[8] Es importante esta precaución, porque no es una convención "universal". Ver, por ejemplo, la página www.ee.surrey.ac.uk/Workshop/advice/coils/mu/.

(la hemoglobina); es posible emplear las mediciones de susceptibilidad para encontrar algunos tipos de moléculas en el estudio de desgaste de motores (a través del análisis de aceites), control de fabricación de semiconductores, análisis arqueológico de suelos y muchos procesos industriales[9].

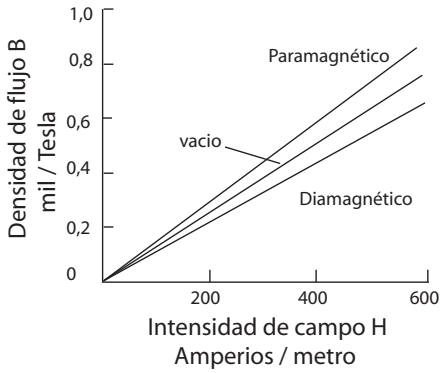

FIGURA 10.7. Sobre los comportamientos dia- y paramagnético

10.11. Los materiales ferromagnéticos

Una clase aparte son los materiales que llamamos anteriormente "magnéticos". Los primeros elementos en los que se observaron las propiedades que nos ocuparán son el hierro, el cobalto y el níquel, y muchos de sus compuestos y aleaciones. Por ese origen suele emplearse la designación general "ferromagnetismo", en contraste con los comportamientos dia- y paramagnéticos. Claro que dentro de esa clasificación gruesa se suelen distinguir otras más finas, pero de ellas no nos ocuparemos en detalle.

La curva de magnetización, que describe el comportamiento de los materiales, es muy distinta en estos materiales de la que ya vimos. Vale la pena considerar brevemente el método experimental con el que suele obtenerse esta curva. Se construye un dispositivo formado por un marco del material –más simple de construir que un toroide– con dos bobinas de igual número de espiras (Figura 10.8).

Una de ellas –conocida entre los ingenieros con el nombre de "bobina primaria"– se conecta a un generador de corriente alterna, de modo que sea

[9] Se pueden ver más ejemplos en las páginas de los distribuidores de equipo, como www.geneq.com/catalog/en/msbalance.html.

posible medir la corriente que circula. La otra –bobina "secundaria"– se conecta a un circuito integrador –el más simple es un circuito con una resistencia y un condensador, de modo que el producto RC sea mucho mayor que el período de la corriente impresa en el circuito primario. Con un buen grado de aproximación, la amplitud de la circulación de $\vec{H}$ sobre un camino dentro del marco se puede calcular a partir de la intensidad de la corriente medida, el número de espiras en la bobina primaria y de la geometría del campo. La tensión inducida en la bobina secundaria depende del número de espiras en esta, su área y la frecuencia (1/periodo) de la corriente. El circuito integrador permite integrar esta tensión, *proporcional al cambio de flujo magnético*, para obtener el valor del flujo. La curva de magnetización se puede mostrar en la pantalla de un osciloscopio. Los factores de escala dependen de variables como la geometría, fácilmente medibles.

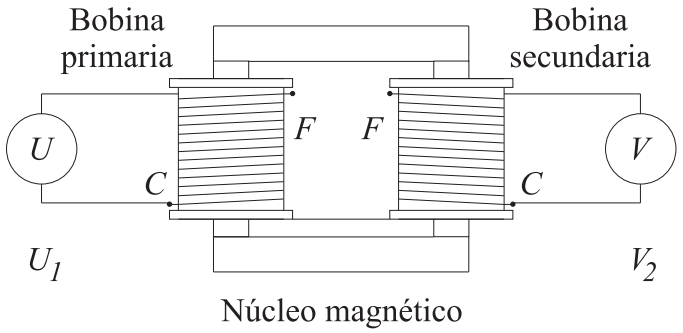

FIGURA 10.8. Sobre un experimento con un núcleo magnético

Con esta sencilla experiencia se obtienen curvas de magnetización similares a la mostrada en la figura 10.9.

Se puede observar que los valores de la densidad de flujo magnético B son mucho mayores y que este crece desde cero (cuando el material no está inicialmente magnetizado más rápido que linealmente: es el caso de la curva punteada) y alcanza, para valores adecuados de $\vec{H}$ un valor que ya solo aumenta linealmente con H; este comportamiento, debido a la orientación casi completa de los dipolos magnéticos en la dirección del campo, se denomina *saturación* del material. La magnetización M del material es "completa" y contribuye de manera constante a la densidad de flujo. Si ahora se reduce la corriente, y en consecuencia H, una parte de la magnetización permanece, aún para corriente cero, alcanzando un valor llamado "densidad de flujo remanente" o simplemente *remanencia*. Si se quisiera desmagnetizar el material, habría que aplicar ahora un campo $\vec{H}$ opuesto a esta

magnetización. Si este campo tiene un valor considerable, se dice que el material tiene una alta *coercividad*.

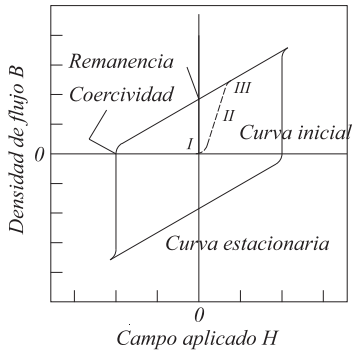

FIGURA 10.9. Forma general de las curvas de magnetización

Para explicar que puedan existir materiales con magnetización espontánea, P. Weiss propuso –en 1907, basado en los trabajos anteriores de Ampère, Gauss y Weber–, la existencia de *dominios magnéticos*. Un dominio es una región de material en que un número grande de átomos (10^{12} a 10^{18}) están alineados (Figura 10.10). Se puede demostrar, aplicando la mecánica cuántica, que así tienen menor energía potencial. La interacción clásica entre dipolos magnéticos no es suficiente para explicar esa alineación–. La alineación de los dominios en un volumen más grande es más o menos aleatoria y por eso la magnetización en esos volúmenes grandes es cero. Las tres regiones de la curva de magnetización inicial pueden explicarse en términos de qué pasa con los dominios, así: la aplicación de un campo externo actúa como una presión sobre las paredes de los dominios; estas no se mueven con facilidad, sino como si estuvieran trabadas entre sí[10].

Las paredes trabadas requieren un campo más intenso para moverse y se produce entonces un salto. El efecto global es así que la región inicial I, cerca del origen de la curva punteada, corresponde a un desplazamiento reversible de las paredes de los dominios; la región siguiente, II, a un desplazamiento irreversible de las paredes y la III a rotación de los dominios.

Una barra magnetizada, como la que consideramos anteriormente, genera un campo magnético alrededor suyo; eso significa que hay una energía –magnetostática– asociada con ella; resulta de la presencia de "polos magnéticos" libres en la superficie. Si la barra se parte en dos, a lo largo, y se

[10] En una estructura cristalina real hay defectos, átomos de otras especies o fuera de sitio, que funcionan como traba para muchos procesos, entre otros para el movimiento de las paredes de dominio.

convierte en dos dominios, la energía magnetostática se reduce y si aquella se sigue dividiendo, se reducirá también la energía magnetostática. Una configuración en una estructura cerrada de la magnetización tiene también menos energía. Entre dominios hay regiones, llamadas "paredes de dominio", en que los dipolos magnéticos cambian gradualmente de una orientación a la otra. En estas paredes, los dipolos magnéticos ya no se orientan en direcciones que minimicen la energía, de modo que la creación de paredes aumenta la energía magnetostática. Por eso, el proceso de división

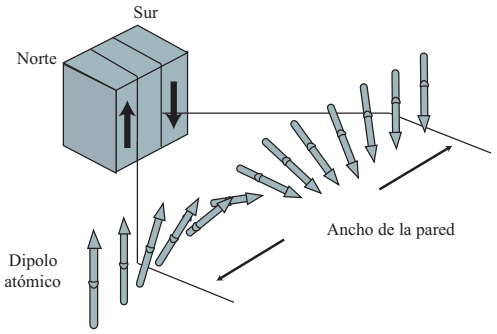

FIGURA 10.10. Esquema de la transición de un dominio magnético a otro

en dominios no sigue indefinidamente. La división en dominios sigue hasta cuando la reducción obtenida por la división es menor que el aumento debido a la creación de la pared. La estructura de dominios depende de la composición del material. Cuando se magnetiza un material, los dominios se van orientando progresivamente hasta cuando todos están orientados, con las limitaciones impuestas por la agitación térmica. Cuando se observa la curva de magnetización con el dispositivo mencionado arriba, es posible observar en la curva de magnetización pequeños saltos –si se amplifican se puede escuchar un ruido audible– llamados "ruido de Barkhausen", explicable como la inducción producida por saltos en la magnetización. Los dominios magnéticos se pueden observar por varios métodos, con los que se puede comprobar que su tamaño varía, acorde con el material, entre las décimas de milímetro y los milímetros. Como representan imanes pequeños, se puede emplear un método llamado "decoración" para observarlos: una superficie muy pulida del material se recubre con una suspensión coloidal de partículas de Fe_3O_4 –un *ferrofluido*–. Las partículas se ordenan, en forma preferente, cerca de las paredes de los dominios. Con un microscopio óptico es posible observar su distribución y tamaño. Otros métodos ópticos o de microscopía electrónica pueden ser empleados también[11].

[11] Véase la página physics.nist.gov/Divisions/Div841/Gp3/Pubs/pdf/epg692.pdf.

Los materiales ferromagnéticos suelen clasificarse en *materiales blandos* y *materiales permanentes*, según su comportamiento en presencia de un campo magnético. Los materiales blandos son aquellos que tienen una alta permeabilidad y baja coercividad; significa que se dejan magnetizar y desmagnetizar con facilidad. Se emplean en aplicaciones en las que deben trabajar con corrientes altermas. Los materiales permanentes –o duros– se emplean por su capacidad de mantener campos magnéticos. Tienen una coercividad grande y una remanencia grande. Su permeabilidad puede ser baja y se requiere un valor alto del campo H para alcanzar la saturación. Suelen magnetizarse en un campo producido por un solenoide recorrido por una corriente muy grande, durante un tiempo muy pequeño –un campo magnético *pulsado*–.

10.12. Temas para discusión

- Una región del espacio está en la vecindad de *corrientes verdaderas*, pero está limitada de modo que es imposible, dentro de esa región, describir un camino cerrado que rodee una corriente. Argumente que el campo $\vec{H}$, dentro de esa región, puede describirse como derivable de un potencial escalar magnético. Considere algunas ventajas de ello. Busque una región de tal naturaleza en la vecindad de un alambre recto y largo que lleva una corriente; en la vecindad de un solenoide de longitud L; en la vecindad de un imán permanente.

- Sugiera un método para encontrar el valor del exponente en la ley de fuerzas entre polos magnéticos usando imanes de barra. Véase el ejercicio 3 más adelante.

- En el capítulo correspondiente se definió la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ en términos de fuerzas sobre corrientes. Discuta una formulación posible en términos del torque sobre un dipolo magnético ($\vec{m}$). ¿Qué mérito le encuentra a cada una de ellas?

- Los efectos más notorios de la presencia de un material ferromagnético dentro de un solenoide son el cambio en el campo y en las inductancias; discuta si, como se mencionó anteriormente, esto equivale a la presencia de corrientes adicionales. En especial, discuta la realidad de las corrientes de magnetización y sus efectos posibles.

10.13. Ejercicios

1. Un imán de barra idealizado tiene sección circular de área S y longitud L. Está magnetizado uniformemente con un momento magnético por unidad de volumen $\vec{M}$. Encuentre el momento magnético de la barra. Muestre que, asociada con $\vec{M}$, hay una corriente $I_m = \vec{M} \cdot \vec{L}$ sobre la superficie cilíndrica, dirigida en un sentido de mano derecha alrededor del cilindro. ¿Cómo se definiría $\vec{L}$?

2. Un imán en forma de aguja, de longitud $2d$ y sección S, con $\sqrt{S} \ll d$, tiene magnetización uniforme $\vec{M}$ a lo largo de su eje. Un punto de observación P tiene coordenadas (r, θ) respecto a un sistema de coordenadas con origen en el centro del imán y con eje polar en la dirección de la aguja, con $2d \ll r$. Muestre que la magnitud del potencial vector en P está dada por

$$A = \frac{\mu_0 \, m \, \operatorname{sen}\theta}{4\pi \, r^2}$$

   donde m es la magnitud del momento magnético del imán.

3. Considere el imán del ejercicio anterior. Ahora un punto P está sobre el eje de la aguja y un punto Q está sobre la recta bisectora perpendicular a la aguja. Para ambos $d \ll r$. Use la expresión

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R})}{R^5} - \frac{\vec{M}}{R^3} \right] dV'$$

   para la densidad de flujo magnético, encuentre el vector $\vec{B}$ en los puntos P y Q. Muestre que es igual al campo $\vec{H}$ que se obtiene de las cargas magnéticas efectivas en los extremos del imán, multiplicado por μ_0. ¿A que es igual la relación B_P/B_Q?

4. Se emplean una barra de *material para imanes permanentes* (*im.per.*) y *piezas polares de hierro dulce* (en la práctica es hierro casi puro) en una construcción con la geometría mostrada en la figura 10.11.

   Las curvas características del material para imanes se muestran en la figura 10.12. Se supondrá que la permeabilidad del hierro dulce es infinita y se despreciarán los campos fuera de los materiales.

   - El material para imanes se magnetiza hasta el punto P pasando una corriente suficiente por una bobina externa. Calcule la densidad de flujo magnético después de que la corriente se interrumpe.

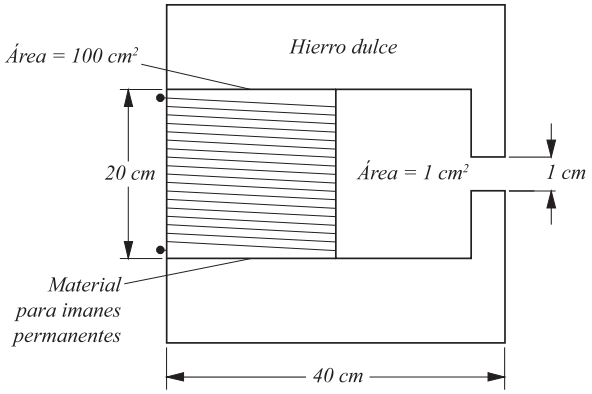

FIGURA 10.11. Geometría de un circuito magnético

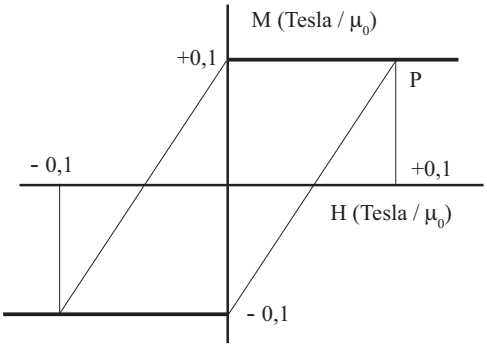

FIGURA 10.12. Una dependencia de magnetización e intensidad magnética

10.14. Actividades prácticas

- Una página llena de información acerca de materiales magnéticos, llamada *Soft Magnetics Application Guide*, se encuentra en www.arnoldmagnetics.com/mtc/pdf/ASoftMag.pdf.
- Varias actividades cualitativas, pero interesantes, son propuestas en el Exploratorium, en www.exploratorium.edu/snacks/iconmagnetism.html.
- Procure reunir el equipo necesario y realice el experimento sobre observación del comportamiento de un marco ferromagnético, como se describe en el texto.

Apéndice A

Instrumentos matemáticos

A.1. Introducción

La física es una ciencia construida socialmente, de modo que el reporte de resultados es una de sus características más importantes. Muchos de ellos deben ser cuantitativos, para tener un mayor valor. Se trata de obtener, para las propiedades de los cuerpos y de los fenómenos, valores numéricos. Además de ello, se definen reglas para operar con esos números. Las páginas siguientes se ocupan de algunas de estas reglas, de los instrumentos matemáticos para la física[1]. Se trata de una versión muy corta de los diferentes temas que no pretende el rigor en el tratamiento que tendrá un texto matemático formal.

En la presentación de cantidades físicas, a veces basta con un valor –por ejemplo la masa de un objeto o la temperatura a la que se encuentra–. Se emplean números reales, que denominamos *escalares*[2]. Los escalares poseen magnitud, pero no dirección. La mayoría tienen además, *dimensiones*; dos excepciones importantes son las medidas de ángulo (plano) y ángulo sólido.

> **Tema para discusión**: No todas las cantidades físicas se suman de la misma manera; si se tienen, por ejemplo, 2 vasos de poliestireno inflado –un excelente aislante térmico–, cada uno con $0,1$ kg de agua a $60\,^o$C, al mezclarlas en un vaso tendremos $0,2$ kg de agua, pero no a $120\,^\circ$C.

[1] Proponemos un uso de la palabra instrumento más afín al sentido en las ciencias sociales, como algo que nos es útil en el ejercicio de las artes y oficios. Ver el *Diccionario de la Lengua Española*, DRAE.

[2] Aunque en el proceso de medición el resultado no es, estrictamente, un número real.

En muchos casos no basta un valor (aún con dimensiones) sino se requiere una dirección; se emplean ahora *vectores*, cuyo prototipo es un desplazamiento, es decir un elemento de línea con dirección. Supondremos que las operaciones matemáticas con las variables representadas por escalares son ya conocidas. Trabajaremos en lo que sigue, con énfasis, en las operaciones con vectores.

Para un tratamiento en profundidad pueden estudiarse obras como el libro de Kreiszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley 1999 –en su parte B–. El libro de Feynman, Leighton y Sands, The Feynman Lectures on Physics, contiene también una corta pero interesante presentación del tema. Son páginas útiles la newton.javeriana.edu.co/tutoriales/vectorial/default.asp, la dieumsnh.qfb.umich. mx/vector y www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICAII/Tema0.pdf, entre otras. En la página joshua.smcvt.edu/linearalgebra/ se encuentra un curso gratuito sobre espacios vectoriales. Para una colección de problemas resueltos puede consultarse la de Alberto Miyara, en www.geocities.com/matematica_y_fisica/problemas.html

A.2. Los vectores y el álgebra de vectores

Los elementos de línea, aún con dirección, son móviles y no dan –en forma intrínseca– una información sobre la posición. Para ello se define un punto de arranque de todos los desplazamientos, el *origen*. Se justifica, entonces, hablar del vector posición: es el desplazamiento desde el origen que nos lleva a un punto elegido. Emplearemos la convención de escribir las cantidades vectoriales con una flecha encima de ellas.

Las cantidades vectoriales pueden sumarse, aunque, como es natural, deben emplearse vectores con las mismas unidades (dimensiones) en estas sumas.

La suma de dos vectores se representa mediante un paralelogramo (Figura A.1)

$$\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} \tag{A.1}$$

Si llamamos $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ a tres vectores, puede comprobarse que la suma es conmutativa y asociativa, es decir

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{A.2}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{A.3}$$

Los vectores posición, como los prototipos que son, nos servirán para visualizar sus propiedades. Son usuales dos formas (complementarias) de presentarlas: la primera es *geométrica*, basada en los elementos de línea en el

espacio. La otra se basa en los sistemas de *coordenadas*. En esta, se representa un vector como una matriz fila, formada por las componentes del vector en cierto conjunto de ejes cartesianos (los ejes x, y y z)

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \tag{A.4}$$

El valor de la componente a_x es la coordenada x de la *punta* del vector menos la coordenada x de su *cola*. La suma de dos vectores $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$ será entonces

$$\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \tag{A.5}$$

Si n es un escalar, el producto de un escalar por un vector será

$$n\,\vec{a} \equiv (n\,a_x, n\,a_y, n\,a_z) \tag{A.6}$$

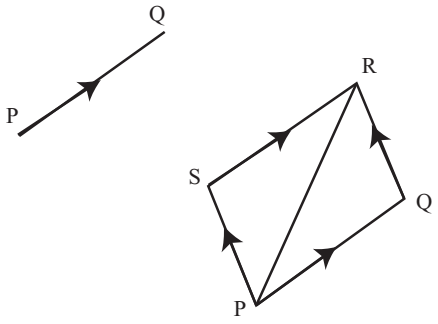

FIGURA A.1. Representación de vectores y su suma

Se puede comprobar fácilmente que el álgebra de vectores es distributiva en relación con la multiplicación por escalar, es decir $n\,(\vec{a} + \vec{b}) = n\,\vec{a} + n\,\vec{b}$. La multiplicación por escalar nos permitirá, además, asignar dimensiones distintas a la longitud a nuestros vectores.

Se definen vectores unidad –o vectores *unitarios*– en las direcciones de los ejes como $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Cualquier vector puede ahora expresarse en términos de los vectores unidad, los que forman, en la terminología de los matemáticos, una base del espacio vectorial

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k} \tag{A.7}$$

En este caso es una base ortonormal, porque los tres vectores unitarios son perpendiculares entre sí.

Son ejemplos de magnitudes en la física que se deben expresar como vectores: los desplazamientos desde un origen

$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{A.8}$$

las fuerzas

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \tag{A.9}$$

las velocidades

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} \tag{A.10}$$

y muchos otros.

Una manipulación importante en el trabajo con vectores es la transformación de coordenadas. Supongamos que cambiamos de una base ortogonal x, y, z, a una nueva base x', y', z', relacionada con la anterior por una rotación alrededor del eje z en un ángulo θ (Figura A.2).

En la nueva base, las componentes de un vector desplazamiento $\vec{r}$ desde el origen son (x', y', z'), relacionadas con las anteriores por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{A.11}$$

No necesitamos cambiar el nombre para el vector desplazamiento; seguirá siendo $\vec{r}$, con magnitud y dirección independientes de los cambios en los vectores base.

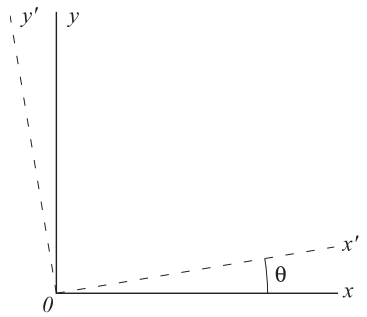

FIGURA A.2. Una rotación de ejes coordenados

Las componentes sí dependen en la manera especificada por las tres ecuaciones anteriores, que preservan la magnitud y la dirección de $\vec{r}$.

Podemos avanzar un poco más: si todo vector puede representarse como un desplazamiento (un desplazamiento es sólo un caso particular de un elemento con dirección), podemos esperar que las componentes de un vector general se transformen de manera análoga; en el caso de rotación de los vectores base en un ángulo θ alrededor del eje z, las componentes de un vector general $\vec{a}$ se transformarán de acuerdo con las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos\theta + a_y \operatorname{sen}\theta \\ a_{y'} &= -a_x \operatorname{sen}\theta + a_y \cos\theta \\ a_{z'} &= a_z \end{aligned} \tag{A.12}$$

Con reglas de transformación equivalentes para rotaciones alrededor de los ejes x y y. Podremos también considerar estas ecuaciones como un criterio de decisión sobre un vector: tres cantidades (a_x, a_y, a_z) pueden tomarse como las componentes de un vector si se transforman de acuerdo con esas ecuaciones. Si no lo hacen, no pueden ser las componentes de un vector. Por supuesto, las cantidades escalares son invariantes bajo tales transformaciones. En muchos casos encontraremos cantidades que tienen magnitud y dirección; las ecuaciones de transformación nos permitirán comprobar si las podemos considerar como vectores o no[3].

Las transformaciones de coordenadas suministran también un criterio para los escalares, en este contexto: la longitud de un vector, como hemos visto, no depende del sistema coordenado. Tampoco debería depender la magnitud de un escalar bien definido del sistema coordenado.

A.3. El vector área

Comencemos con una superficie plana, con área dada por el escalar S. Podemos definir un vector área $\vec{S}$, con magnitud S y dirección perpendicular a la superficie, con su sentido dado por una "regla de mano derecha": si los dedos de la mano derecha describen una dirección en la curva que limita la superficie, el pulgar estará en la dirección de $\vec{S}$ (Figura A.3).

La cantidad $\vec{S}$ ciertamente tiene magnitud y sentido. Para decidir si es un vector verdadero, sometámoslo a la prueba de la transformación de componentes. Sabemos que si la normal a la superficie hace un ángulo α_x con el eje x, entonces, el área tendida sobre el borde de la superficie en la dirección x será $S\cos(\alpha_x)$. Esta será la componente x de $\vec{S}$. En forma análoga, la

[3] Ver Sommerfeld, A., *Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, 1964, volumen 2, sección 2.

componente y de $\vec{S}$ será $S\,\cos(\alpha_y)$, si el ángulo que hace $\vec{S}$ con el eje y es α_y, etcétera.

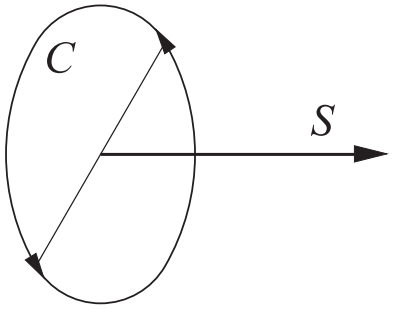

FIGURA A.3. Acerca de la definición del vector área

Podemos limitarnos, sin pérdida de generalidad, a superficies cuya normal es perpendicular a la dirección z. En este caso podemos decir que $\alpha_x = \pi/2 - \alpha_y = \alpha$. Como consecuencia, $\vec{S} = S\,(\cos(\alpha),\,\mathrm{sen}\,(\alpha), 0)$. Si ahora giramos la base alrededor del eje z por un ángulo θ, lo que equivale a girar la superficie y su normal alrededor del eje z por un ángulo $-\theta$, entonces

$$S_{x'} = S\,\cos(\alpha-\theta) = S\,\cos(\alpha)\cos(\theta) + S\,\mathrm{sen}\,(\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\theta) = S_x\,\cos(\theta) + S_y\,\mathrm{sen}\,(\theta) \quad \text{(A.13)}$$

Que es la transformación correcta para la componente x de un vector. También se puede comprobar que las otras componentes se transforman correctamente. Esto muestra que el vector área está bien definido.

De acuerdo con la regla para la suma de vectores, el área proyectada en la dirección x de dos superficies planas, unidas en una línea común será la componente x de la suma de los vectores áreas. De manera similar, para muchas superficies planas unidas, el área proyectada en la dirección x, que es la misma que el área proyectada del borde en la dirección x, es la componente x de la resultante de todos los vectores áreas

$$\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i \quad \text{(A.14)}$$

Si tomamos ahora el límite, haciendo que el número de superficies –o facetas– crezca y su área se reduzca; entonces, podríamos obtener una superficie continua con área dada por

$$\vec{S} = \sum_i \delta\vec{S}_i \quad \text{(A.15)}$$

Es claro que el área proyectada por el borde de esta superficie en la dirección x es igual a S_x. Nótese que el borde de la superficie determina al vector área y no la forma de la superficie; dos superficies que compartan el mismo borde tendrán el mismo vector área.

Podemos extraer una consecuencia de lo anterior: una curva cerrada que no esté en un plano puede tener un vector área $\vec{S}$ que es la resultante de los vectores áreas de las superficies que terminan en esa curva. Las componentes de $\vec{S}$ son las áreas proyectadas de la curva en las direcciones de los vectores base. Otro corolario sorprendente, y muy importante, es que una superficie cerrada, como no posee un borde, tiene vector área igual a cero.

Ejercicio: Una figura geométrica, limitada por superficies planas, tiene vértices en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$.

- Calcule los vectores área de cada una de las caras de la figura.
- Calcule la suma de los vectores área de las caras que tienen $0 \leq z$ y la suma de los vectores área de todas las caras.

A.4. El producto escalar

Una cantidad escalar es invariante bajo todas las transformaciones de rotación –de ejes coordenados–. Las componentes individuales de un vector se transforman, de modo que, en este contexto, no se comportan como escalares. ¿Podríamos formar una combinación de las componentes de dos vectores para tener un escalar? Consideremos el llamado *producto escalar*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{A.16}$$

Hagamos girar los vectores base un ángulo θ alrededor del eje z. En la nueva base el producto escalar toma la forma

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cos\theta + a_y \operatorname{sen}\theta)(b_x \cos\theta + b_y \operatorname{sen}\theta) \\ &\quad + (-a_x \operatorname{sen}\theta + a_y \cos\theta)(-b_x \operatorname{sen}\theta + b_y \cos\theta) + a_z b_z \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \tag{A.17}$$

De modo que $\vec{a}\cdot\vec{b}$, llamado también *producto interno*, es invariante bajo esta rotación de ejes. Puede demostrarse también que es invariante bajo rotaciones alrededor del eje x y del eje y. Así, el producto definido es un escalar. La definición es una buena definición. En realidad, es la única combinación simple de las componentes que se comporta como escalar.

Puede mostrarse fácilmente que el producto escalar es conmutativo y distributivo respecto de la suma –no hay una propiedad asociativa, claro está–:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{A.18}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{A.19}$$

¿Cuál es el significado del producto escalar? En el caso de $\vec{a} = \vec{b}$, se ve que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = (\text{longitud de } \vec{a})^2 \tag{A.20}$$

Y la invariancia del producto escalar es equivalente a la invariancia de la longitud de un vector bajo la rotación de la base (¿por qué habría de variar?). La longitud de $\vec{a}$ suele escribirse como $|\vec{a}|$.

En el caso general, podremos construir un triángulo con los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$ (Figura A.4). El cuadrado de la longitud de $\vec{b} - \vec{a}$ será

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{b} \cdot \vec{a} \tag{A.21}$$

Recordando el teorema del coseno de la trigonometría y comparándolo con la ecuación anterior, se sigue que

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta \tag{A.22}$$

donde θ es el ángulo formado por los dos vectores.

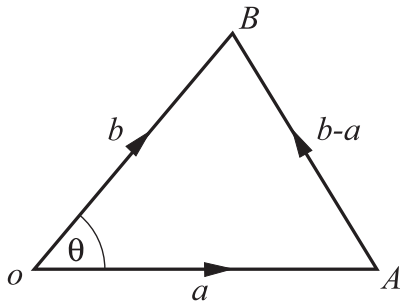

FIGURA A.4. Sobre el producto escalar de dos vectores

Se puede emplear este resultado para decidir que si $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, entonces $|\vec{a}| = 0$ o $|\vec{b}| = 0$ o los dos vectores son perpendiculares entre sí. Se puede también calcular el ángulo entre los dos vectores a partir de la ecuación A.22.

El concepto de producto escalar en mecánica se aprovecha en la definición del trabajo, W, realizado por una fuerza $\vec{F}$ y efectuando un desplazamiento $\vec{r}$ del objeto sobre el que actúa. El trabajo se puede calcular como

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{r}| \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{r} \tag{A.23}$$

Donde θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento. Otro ejemplo es que, si un fluido está pasando por la abertura de un recipiente, de modo que la velocidad de las partículas del fluido es $\vec{v}$ y el vector área de la abertura es $\vec{S}$, se denomina "tasa de flujo" al producto

$$\vec{v} \cdot \vec{S} = \text{tasa de flujo} \tag{A.24}$$

A.5. El ángulo y el ángulo sólido

Hemos pospuesto hasta ahora la discusión de dos magnitudes sin dimensión que serán importantes: no teníamos las bases necesarias.

Un ángulo se define *en un plano*, entre dos *semirrectas* que se encuentran en un punto (denominado *vértice*) y describe la posición relativa de esas dos líneas (Figura A.5). Diremos que el ángulo se origina por rotación de una de las dos líneas y su medida será la magnitud de la rotación necesaria para que coincida con la segunda. Como es posible girar en dos sentidos, es necesario establecer una convención acerca de lo que denominaremos una rotación positiva, que será en el sentido opuesto al giro habitual de las manecillas de un reloj. Se emplean habitualmente las letras griegas minúsculas (α, β, γ, ...) como símbolos para los ángulos.

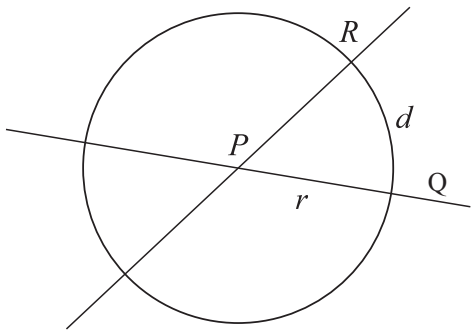

FIGURA A.5. Sobre la definición de ángulo

La unidad de medida de un ángulo, en el SI, es el radián (rad). El grado, muy corriente, no es una unidad en el SI.

Si nos desplazamos, como ilustra la figura anterior, a partir de un punto P, a lo largo de una recta, una distancia r hasta un punto Q y luego a lo largo de una circunferencia, centrada en P, por un camino de longitud d hasta un punto R, entre la semirecta PQ y la PR habrá un ángulo de d/r rad.

Esto significa que una rotación de una vuelta completa se puede reportar como un ángulo de 2π rad.

Es claro que el radián no tiene dimensiones (longitud/longitud).

Un ángulo sólido corresponde, en el espacio tridimensional, al ángulo en el bidimensional. Se puede definir como el valor de una superficie parcial S de una esfera, dividido por el cuadrado del radio de esa esfera r^2 (Figura A.6).

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{A.25}$$

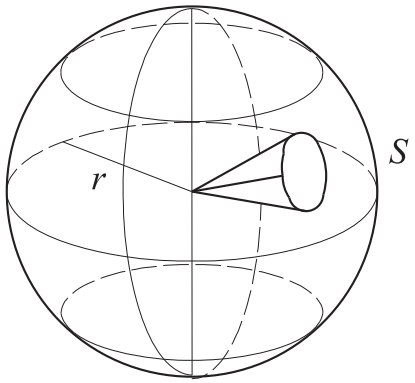

FIGURA A.6. Sobre la definición de ángulo sólido

Si imaginamos la esfera como de radio unidad, $r = 1$ m, se comprende que la superficie total es $4\,\pi$ m^2, de modo que el ángulo sólido total es $4\,\pi \approx 12,57$. El ángulo sólido no tiene dimensiones, claro está, pero se conviene en llamar la unidad el*esterradián* (sr) en el SI[4].

Cuando la superficie A no es una esfera, se define el ángulo sólido que aquella determina en un punto P, como el cociente de la superficie, S, que se genera, cuando se proyecta A sobre una esfera de radio r, dividida por el cuadrado del radio de esta

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int\int_A \frac{\hat{n} \cdot d\vec{a}}{\rho^2} \tag{A.26}$$

[4] Tanto el ángulo plano como el sólido son adimensionales y se podría, en principio, evitar el uso de esas unidades cuando se especifican valores de cantidades físicas. Pero el uso en varias aplicaciones, que emplean esos conceptos en forma intensiva, como en la luminotecnia, resulta muy conveniente mantener la designación.

Donde $\hat{n}$ es el vector unitario desde el centro de la esfera, $d\vec{a}$ el elemento de área (diferencial) de la superficie y ρ es la distancia del centro hasta la superficie.

La figura muestra la relación entre superficie y ángulo sólido. Nótese, sin embargo, que la forma del borde de la superficie no desempeña ningún papel: cualquier superficie con la misma área (escalar) definiría un ángulo sólido del mismo valor.

Tema para discusión: ¿Cómo sería una expresión parecida a (A.26) para definir el ángulo que los extremos de una curva plana determina en un punto situado en ese mismo plano?

A.6. El producto vectorial

Sabemos ya cómo construir un escalar a partir de las componentes de dos vectores. ¿Podríamos construir un vector que no sea simplemente una combinación lineal de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$? Examinemos si el llamado *producto vectorial* cumple las condiciones:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \vec{c} \tag{A.27}$$

Para ello, giremos la base en un ángulo θ alrededor del eje z, empleando las ecuaciones de transformación. La componente $c_{x'}$ será:

$$\begin{aligned} c_{x'} &= (-a_x \operatorname{sen}\theta + a_y \cos\theta) b_z - a_z(-b_x \operatorname{sen}\theta + b_y \cos\theta) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\cos\theta + (a_z b_x - a_x b_z)\operatorname{sen}\theta \\ &= c_x \cos\theta + c_y \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{A.28}$$

De modo que la componente x de $\vec{a} \times \vec{b}$ se transforma correctamente. Se puede mostrar que las otras componentes se comportan también correctamente, de modo que podemos confiar en que $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector. El *producto externo*, como se llama también, es anticonmutativo

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{A.29}$$

Es distributivo

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{A.30}$$

Pero no es asociativo, claro está

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \tag{A.31}$$

El producto vectorial, si se transforma como un vector, debe tener una dirección y una magnitud. Se puede mostrar que $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$. Para ello, calculemos $\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Esto muestra que $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{a} \times \vec{b}$. Se puede mostrar en forma similar que $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} \times \vec{b}$. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ forman un trío de vectores de mano derecha, similar a los vectores unidad $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, que cumplen $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$. La dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$ se obtiene a partir de una regla de mano derecha (Figura A.7).

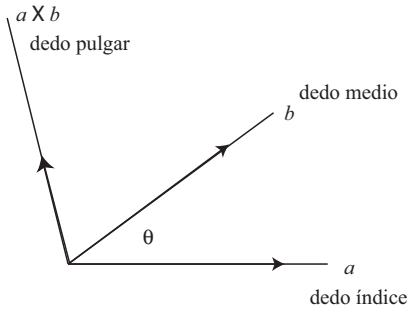

FIGURA A.7. Una regla de mano derecha para el producto vectorial

Evaluemos ahora la magnitud de $\vec{a} \times \vec{b}$. Tendremos que

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^{2+} (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned} \tag{A.33}$$

Así que

$$\text{magnitud de } \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta \tag{A.34}$$

Es claro que $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ para cualquier vector, puesto que θ es cero. De esa manera, si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, entonces podemos concluir que alguno de los vectores tiene magnitud cero o son paralelos entre sí.

Consideremos el paralelogramo basado en los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

El área escalar de ese paralelogramo es $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\operatorname{sen}\theta$. Su vector área tiene la magnitud del área escalar y es normal al plano del paralelogramo. Eso

significa que es perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$. En otras palabras, descubrimos que (Figura A.8)

$$\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{A.35}$$

Con el sentido del vector área dado por una regla de mano derecha.

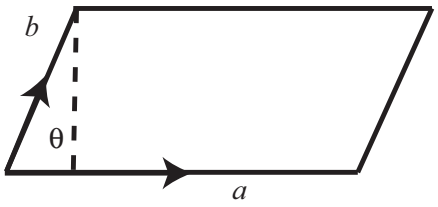

FIGURA A.8. Acerca del vector área como producto vectorial

En mecánica se emplea el producto vectorial para describir el momento de una fuerza –que mide *la capacidad* de una fuerza para hacer girar–: supongamos que una fuerza $\vec{F}$ se aplica en la posición $\vec{r}$ (Figura A.9).

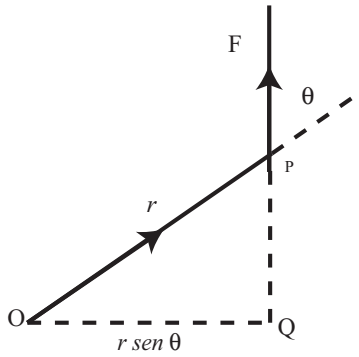

FIGURA A.9. Acerca del producto vectorial en mecánica

El momento de esa fuerza alrededor del origen O –el eje de giro– es el producto de la magnitud de la fuerza y de la longitud del brazo. La magnitud del momento es $|\vec{F}|\,|\vec{r}|\,\operatorname{sen}\theta$. La dirección del momento se toma, convencionalmente, en la dirección del eje que pasa por O y alrededor del cual la fuerza hace girar el objeto al que se aplica, en el sentido determinado por una regla de mano derecha. Así, pues, el vector momento de la fuerza –también llamado torque– es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{A.36}$$

A.7. Las rotaciones

¿Son vectores las rotaciones de un objeto alrededor de diferentes ejes? Tratemos de definir un vector rotación $\vec{\theta}$, cuya magnitud es el ángulo de giro θ y cuya dirección esté determinada por una regla de mano derecha. Veamos; la figura A.10 muestra dos dados cúbicos comunes –con sumas iguales en lados opuestos–. En el frente de la figura se muestra el resultado de aplicar una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z, seguida de una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje x. En la fila de atrás se muestra el resultado si el orden de las rotaciones es distinto: primero la rotación –de $\pi/2$– alrededor del eje x y después la rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z. Es claro que los resultados son distintos. Las rotaciones tienen una *álgebra no conmutativa*.

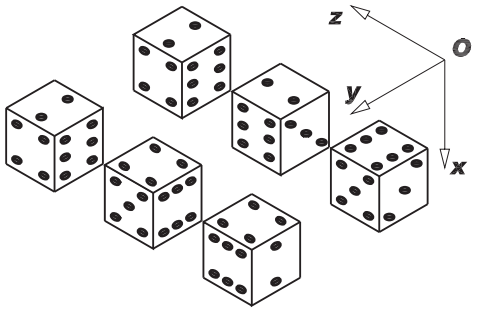

FIGURA A.10. Dos resultados de las rotaciones de un dado

Pero ¿qué pasa si los ángulos de rotación son muy pequeños, en realidad infinitesimales? Supongamos que a un vector $\vec{a}$ lo giramos un ángulo pequeño $\delta\theta_z$ alrededor del eje z (Figura A.11). ¿Cómo cambian sus componentes?

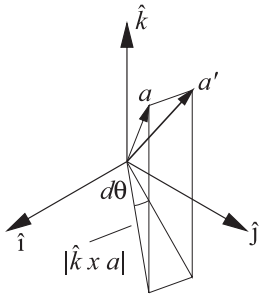

FIGURA A.11. Sobre el resultado de rotaciones pequeñas

La rotación del vector es equivalente a girar la base en un ángulo $-\delta\theta_z$ alrededor del eje z. De acuerdo con las ecuaciones de transformación, tendremos A.12

$$\begin{aligned} a_{x'} &\approx a_x \cos(\delta\theta_z) + a_y \operatorname{sen}(\delta\theta_z) \\ a_{y'} &\approx -a_x \operatorname{sen}(\delta\theta_z) + a_y \cos(\delta\theta_z) \\ a_{z'} &= a_z \end{aligned}$$

O, en otras palabras, empleando las aproximaciones $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos \approx 1$ para ángulos pequeños,

$$\vec{a}\,' \approx \vec{a} + \delta\theta_z\, \hat{k} \times \vec{a} \tag{A.37}$$

La ecuación anterior puede generalizarse para el caso de rotaciones *pequeñas* alrededor de los ejes x y y por ángulos $\delta\theta_x$ y $\delta\theta_y$, respectivamente. Se tendrá que

$$\vec{a}\,' \approx \vec{a} + \vec{\delta\theta} \times \vec{a} \tag{A.38}$$

Donde se define el vector

$$\vec{\delta\theta} = \delta\theta_x \hat{i} + \delta\theta_y \hat{j} + \delta\theta_z \hat{k} \tag{A.39}$$

que podemos denominar *vector de rotación*. Es claro que solo podemos definir $\vec{\delta\theta}$ para pequeñas rotaciones; esto quiere decir para ángulos a los que la aproximación al seno ($\simeq \theta$) y al coseno ($\simeq 1$) de ángulos es válida –en la práctica, esto quiere decir ángulos menores que $0,25$ rad o que 15^o–. De acuerdo con lo anterior, una rotación *pequeña* de un objeto alrededor del eje z seguida de otra rotación *pequeña* alrededor del eje x es –aproximadamente– igual a las dos rotaciones realizadas en distinto orden.

La posibilidad de considerar una rotación infinitesimal como un vector, permite también considerar a la velocidad angular

$$\vec{\omega} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{\delta\theta}}{\delta t} \tag{A.40}$$

como un vector. Si en lo anterior interpretamos al vector $\vec{a}\,'$ como $\vec{a}(t + \delta t)$, se puede describir el movimiento de un vector *precesando*[5] alrededor del origen de coordenadas con velocidad angular $\vec{\omega}$ con la ecuación

$$\frac{d\,\vec{a}}{d\,t} = \vec{\omega} \times \vec{a} \tag{A.41}$$

[5] Con el mismo significado que en mecánica un trompo realiza un movimiento de *precesión*. La palabra *precesar* es un neologismo.

A.8. El producto escalar triple

Consideremos ahora tres vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, no coplanares. El producto escalar triple es el resultado de la operación $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Sabemos, de la sección anterior, que $\vec{b} \times \vec{c}$ es el vector área del paralelogramo formado por $\vec{b}$ y $\vec{c}$. De esa manera, el producto escalar triple es el área escalar de ese paralelogramo multiplicada por la componente de $\vec{a}$ en la dirección perpendicular al paralelogramo (Figura A.12).

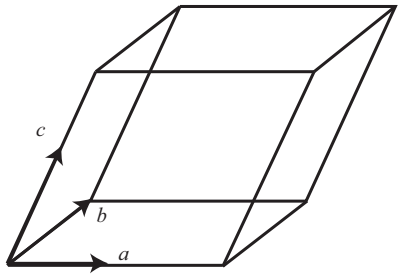

FIGURA A.12. Sobre el producto escalar de tres vectores

En consecuencia, el producto escalar triple es el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Este volumen es independiente de cómo se forme el producto triple, excepto porque

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b} \tag{A.42}$$

Es decir, el volumen será *positivo* si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman un trío de mano derecha –es decir, si $\vec{a}$ está por encima del plano formado por $\vec{b}$ y $\vec{c}$– y negativo si forman un conjunto de mano izquierda. El valor del producto escalar triple no cambia si se intercambian los operadores de los productos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \tag{A.43}$$

Cualquier permutación cíclica de los vectores deja también invariante al producto escalar triple

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \tag{A.44}$$

pero cualquier permutación anticíclica de los vectores cambia su signo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c} \tag{A.45}$$

El producto escalar triple será cero si alguno de los vectores es paralelo a otro o si los tres son coplanares.

Si los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares, cualquier vector $\vec{r}$ puede ser expresado como una combinación lineal de ellos

$$\vec{r} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} \tag{A.46}$$

Formando el producto escalar de cada lado de esta ecuación con $\vec{b} \times \vec{c}$ obtendremos

$$\vec{r} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \alpha\,\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \tag{A.47}$$

De donde se puede calcular el coeficiente α como

$$\alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \tag{A.48}$$

con expresiones semejantes para β y γ. Los tres coeficientes pueden ser encontrados de manera única.

A.9. El producto vector triple

El producto vector de tres vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, se define como $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Los paréntesis son importantes porque $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Puede mostrarse que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{c} \tag{A.49}$$

y que

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{A.50}$$

Veamos cómo, en el primer caso, el lado izquierdo la ecuación es un vector bien definido y el lado derecho contiene también vectores bien definidos. Si mostramos lo correcto de esos resultados en un sistema de coordenadas particular, debe ser válido en general.

Escojamos, por conveniencia, los ejes de modo que el eje x esté a lo largo de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ esté en el plano $x - y$. Los tres vectores pueden ser expresados como $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, 0, 0)$ y $\vec{c} = (c_x, c_y, 0)$. El vector $\vec{b} \times \vec{c}$ estará dirigido a lo largo del eje z, es decir $\vec{b} \times \vec{c} = (0, 0, b_x c_y)$. Como consecuencia, el producto $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ estará en el plano $x - y$ y será de la forma $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_y b_x c_y, -a_x b_x c_y, 0)$. Esto es el lado izquierdo de la ecuación A.49 en nuestros ejes.

Para calcular el lado derecho de la ecuación A.49, necesitamos los productos $\vec{a}\cdot\vec{c} = a_x c_x + a_y c_y$ y $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x$. Con ellos podemos calcular que

$$\begin{aligned}\text{lado derecho} &= ((a_x c_x + a_y c_y)\, b_x, 0, 0) - (a_x b_x c_x, a_x b_x c_y, 0) \\ &= (a_y c_y b_x, -a_x b_x c_y, 0) = \text{lado izquierdo}\end{aligned} \tag{A.51}$$

Que es el resultado buscado.

A.10. El cálculo con vectores

La definición de las reglas apropiadas del cálculo nos permitirá trabajar con derivadas o con integrales. Para encontrarlas supondremos que un vector $\vec{a}$ varía con el tiempo, $\vec{a} = \vec{a}(t)$. La derivada de ese vector con el tiempo se define como

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{\vec{a}(t+\delta t) - \vec{a}(t)}{\delta t}\right] \tag{A.52}$$

En términos de componentes, escribiremos la derivada como

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt}\right) \tag{A.53}$$

En algunos contextos suele escribirse $d\vec{a}/dt$ como $\dot{\vec{a}}$ (un punto sobre la variable que se debe derivar; para la segunda derivada, usaremos *dos* puntos).

Supongamos ahora que $\vec{a}$ es el producto de una función escalar $\phi(t)$ y de otro vector $\vec{b}(t)$. ¿Cómo se calcula la derivada de $\vec{a}$? Tendremos que, por ejemplo

$$\frac{da_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\phi\, b_x) = \frac{d\phi}{dt} b_x + \phi \frac{d\, b_x}{dt} \tag{A.54}$$

Lo cual nos permite asegurar que

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\vec{b} + \phi\frac{d\vec{b}}{dt} \tag{A.55}$$

Se puede demostrar, por medio de un cálculo similar, que las derivadas de los productos escalar y vector son

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} \tag{A.56}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}} \tag{A.57}$$

En forma análoga a las leyes de diferenciación en el cálculo de productos escalares. Las demás derivadas se encuentran también de manera semejante.

A.11. Las integrales de línea

Consideremos una función de dos variables $f(x, y)$, definida para todo x y todo y. ¿Qué significa "la integral de f a lo largo de una curva dada" desde P hasta Q en el plano $x - y$? Es como si primero *enderezáramos* la curva y luego integráramos.

La integral simplemente estará dada por (Figura A.13)

$$\int_P^Q f(x, y)\, dl = \text{Área bajo la curva} \tag{A.58}$$

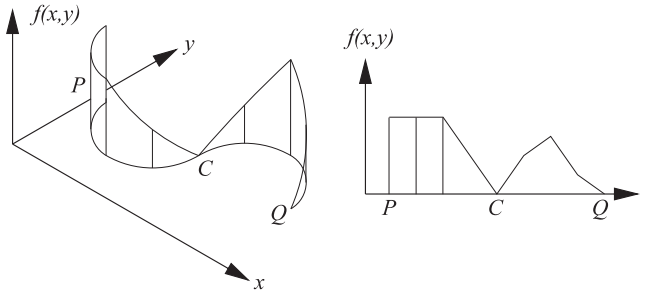

FIGURA A.13. Sobre la definición de integral de línea

Veamos un ejemplo –muy empleado en los textos de matemática–, la integral de $f(x, y) = x\, y$ entre $P = (0, 0)$ y $Q = (1, 1)$ a lo largo de dos caminos indicados en la figura (A.14).

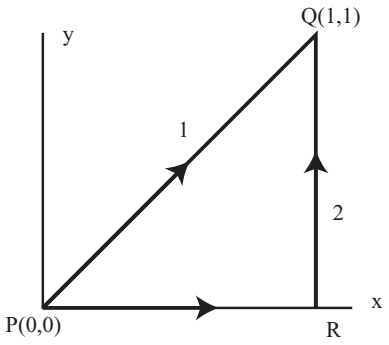

FIGURA A.14. Posibles caminos de integración

A lo largo del camino 1, tenemos que $x = y$, de modo que $dl = \sqrt{2}\,dx$. De esta manera

$$\int_P^Q x\,y\,dl = \int_0^1 x^2\sqrt{2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{A.59}$$

A lo largo del camino 2

$$\begin{aligned}\int_P^Q x\,y\,dl &= \int_0^1 xy\,dx\Big|_{y=0} + \int_0^1 xy\,dy\Big|_{x=1} \\ &= 0 + \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{A.60}$$

El valor de la integral depende de la ruta tomada entre el punto inicial y el final.

Ejercicio: Realice un dibujo *tridimensional* de la función y los caminos de integración descritos anteriormente.

Un tipo muy corriente de integral de línea es aquel en que las contribuciones de dx y de dy se evalúan por separado –por ejemplo, cuando el camino está formado por segmentos a lo largo de uno de los dos ejes–. Como ejemplo consideremos la integral

$$\int_P^Q [y^3 dx + x dy] \tag{A.61}$$

a lo largo de dos rutas (Figura A.15) entre $P = (1, 0)$ y $Q = (2, 1)$.

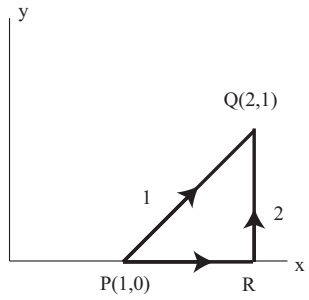

FIGURA A.15. Otros dos caminos de integración

A lo largo del camino 1, $x = y + 1$ y $dx = dy$, de modo que

$$\int_P^Q [y^3 dy + (y + 1)dy] = \frac{7}{4} \tag{A.62}$$

A lo largo del camino 2 la integral toma el valor

$$\int_1^2 y^3 dx\Big|_{y=0} + \int_0^1 x dy\Big|_{x=2} = 2 \tag{A.63}$$

Y nuevamente el valor de la integral depende del camino.

Una clase importante de integrales de línea son aquellas cuyo valor no depende del camino de integración. En este caso podría ser que

$$\int_P^Q (f dx + g dy) = F(Q) - F(P) \tag{A.64}$$

para alguna función F. Dado $F(P)$ para un punto P en el plano $x - y$, que va a funcionar como un punto de referencia, entonces se puede calcular, para cualquier otro punto del plano, el valor de la función F:

$$F(Q) = F(P) + \int_P^Q (f dx + g dy) \tag{A.65}$$

Si consideramos que la diferencia de los valores de la función F entre dos puntos es un cambio de altura, podemos buscar conjuntos de puntos Q que tienen una altura constante respecto del punto de referencia P. Una vez hallados, podemos trazar un mapa de contornos de altura constante

$$\int_P^Q (f dx + g dy) = \int_P^Q dF(x, y) = F(Q) - F(P) \tag{A.66}$$

Tendremos, además, que

$$dF(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy \tag{A.67}$$

Un ejemplo es la función $F = xy^3$; resulta que $dF = y^3 dx + 3xy^2 dy$ y que

$$\int_P^Q (y^3 dx + 3xy^2 dy) = [xy^3]_P^Q \tag{A.68}$$

Esta integral es independiente del camino de integración.

Resultará importante distinguir entre las integrales que dependen del camino de integración y aquellas que no dependen de él. Más tarde encontraremos un criterio para distinguirlas.

A.12. Las integrales de línea con vectores

Podemos sumar vectores; un paso necesario para integrarlos es la definición de *un campo vectorial*. El concepto de *campo escalar* es bastante familiar

en física experimental. Imaginemos que vamos a determinar la temperatura que alcanza un termómetro cuando se coloca en diferentes puntos dentro de un horno. La temperatura depende de la posición, $T(\vec{r})$. Un campo escalar es un conjunto de escalares asociados con puntos en el espacio.

De manera análoga, definiremos un *campo vectorial* como un conjunto de vectores asociados a cada punto del espacio. Hay muchos ejemplos que pueden ser útiles en la descripción de sistemas físicos: el campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r})$ en un fluido en movimiento describe qué velocidad llevan las partículas cuando pasan por algún lugar. Las velocidades de las partículas que forman un trompo girando dependen de la posición de esos puntos respecto del eje de giro y del punto de apoyo; de esa manera se constituyen en un ejemplo de campo vectorial.

Ejercicio: Sean los campos vectoriales $\vec{A} = \hat{i}$, $\vec{B} = -\hat{j}$, $\vec{C} = \hat{i} - \hat{j}$, $\vec{D} = x\hat{i} - x\hat{j}$. Examine y considere esos campos. Dibuje diagramas para considerar cómo son las líneas del campo.

Designemos un campo vectorial como $\vec{A}(\vec{r})$. Sea $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ un vector que describe un elemento de longitud de línea. Las integrales de línea con vectores pueden surgir como productos escalares, de la forma

$$\int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q (A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz) \tag{A.69}$$

Si $\vec{A}$ es una fuerza, la integral de línea puede describir el trabajo realizado por esta fuerza cuando desplaza un objeto desde P hasta Q.

Calculemos, para mostrar un ejemplo concreto, el trabajo realizado por una fuerza repulsiva, que varía como el inverso del cuadrado de la distancia $\vec{F} = \vec{r}/|r^3|$. El elemento de trabajo realizado es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Tomemos los puntos $P = (\infty, 0, 0)$ y $Q = (a, 0, 0)$. El primer camino de integración puede ser a lo largo del eje x, de modo que

$$W = \int_\infty^a \left(\frac{1}{x^2}\right)(-dx) = \left[\frac{1}{x}\right]_\infty^a = \frac{1}{a} \tag{A.70}$$

Un segundo camino puede ser, en primer lugar, a lo largo de una circunferencia muy grande (con radio constante) hasta el punto $R = (a, \infty, 0)$ y luego por una línea paralela al eje y hasta Q. En la primera parte no se realiza trabajo, porque $\vec{F}$ es perpendicular a $d\vec{l}$. En la segunda parte

$$W = \int_\infty^0 \frac{-ydy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{(y^2 + a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{1}{a} \tag{A.71}$$

En este caso, la integral es independiente del camino (¡por fortuna!).

Ejercicio: Calcúlese la integral de línea de la función $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + ye^x)\hat{i} + z^2\hat{j} + 2yz\hat{k}$, si el camino de integración C es la parte de la circunferencia $z^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq z$ y con $P(0,1,0)$ y $Q(0,-1,0)$ los puntos de inicio y final.

A.13. Las integrales de superficie

Tomemos una superficie, S, que no tiene por qué estar en un plano y dividámosla en elementos de área escalar δS_i. Una definición de integral de superficie, para una función escalar, es

$$\int\int_S f(x,y,z)d\,S = \lim_{\delta S_i \to 0} \sum_i f(x,y,z)\delta\, S \tag{A.72}$$

Por ejemplo, si el plano $x-y$ es la superficie de un embalse y la profundidad del suelo respecto de aquella es $p(x,y)$, el volumen de agua contenida será

$$V = \int\int p(x,y)d\,S \tag{A.73}$$

Para evaluar una integral de superficie como esta, debemos dividir la tarea y realizarla por los métodos usuales de integración, primero en una dirección (Figura A.16).

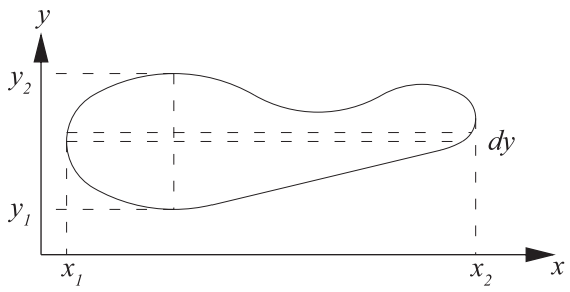

FIGURA A.16. Acerca del cálculo del volumen de agua en un estanque

El volumen en la tira mostrada en la figura es

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} p(x,y)dx\right] dy \tag{A.74}$$

Donde los límites x_1 y x_2 dependen de y. El volumen total es la suma sobre todas las tiras

$$V = \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\int_{x_1}^{x_2} p(x,y)dx\right] \tag{A.75}$$

Aunque podría evaluarse la integral tomando las tiras paralelas al eje y y no al eje x

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\int_{y_1}^{y_2} p(x,y) dy \right] \tag{A.76}$$

Este intercambio del orden de integración puede constituir un poderoso método, pero debe tenerse cuidado en la elección de los límites.

Un ejemplo muy común de cálculo es la evaluación de

$$\int \int_S x^2 y dx dy \tag{A.77}$$

sobre un triángulo con vértices $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ y $C = (1,0)$ (Figura A.17).

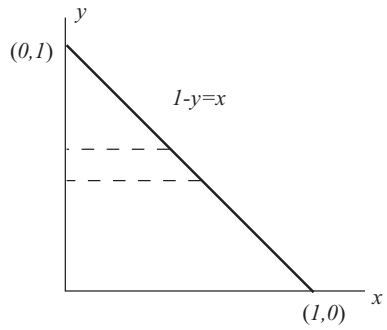

FIGURA A.17. Una región de integración

Evaluemos primero la integral con x; se supone ahora que y es constante

$$dy \left(\int_0^{1-y} x^2 y dx \right) = y\, dy \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1-y} = \frac{y}{3}(1-y)^3 dy \tag{A.78}$$

Y ahora la integral con y:

$$\int_0^1 \left(\frac{y}{3} - y^2 + y^3 - \frac{y^4}{3} \right) dy = \frac{10 - 20 + 15 - 4}{60} = \frac{1}{60} \tag{A.79}$$

Cambiemos el orden de las integraciones

$$\int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}(1-x)^2 dx = \frac{1}{60} \tag{A.80}$$

Y nos dan el mismo resultado.

En algunos casos, la integral de superficie es simplemente el producto de dos integrales separadas. Por ejemplo, la misma función que acabamos de integrar, pero ahora S es un cuadrado de lado unidad. La integral puede escribirse como

$$\int_0^1 dx \int_0^1 x^2 y dy = \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\int_0^1 y dy \right) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \tag{A.81}$$

Con los límites de integración para una variable, independientes de los límites para la otra variable. En general, la obtención de los límites correctos resultará muy importante dentro del problema de evaluar una integral de superficie. La mayoría de los textos especializados aconsejan realizar un diagrama para evitar dificultades cuando se calculan estas integrales.

A.14. Las integrales de superficie con vectores

Usaremos mucho las integrales de superficie en el cálculo con vectores (aunque, más que todo, como parte de un argumento). Un ejemplo de ellas es la tasa de flujo de un fluido con velocidad $\vec{v}$ a través de una área infinitesimal $d\vec{S}$, dada por $\vec{v} \cdot d\vec{S}$. La tasa de flujo neto a través de una superficie está formada por la tasa de flujo a través de muchas áreas infinitesimales, es decir

$$\int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \lim_{dS \to 0} \left[\sum v \cos\theta \, dS \right] \tag{A.82}$$

donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie y la velocidad de flujo del fluido (ambas tomadas localmente).

De manera similar a las integrales de línea, la mayoría de las integrales de superficie dependen de la superficie y de su borde. Otras –muy importantes– dependen solo del borde y no de la forma de la superficie misma. Como un ejemplo muy conocido (Figura A.18), consideremos el *flujo incompresible* entre dos superficies S_1 y S_2 que terminan sobre el mismo borde.

El volumen entre las superficies será constante, de modo que el fluido que entra deberá salir y esto se expresa como

$$\int \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{A.83}$$

Como una consecuencia,

$$\int \int \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{A.84}$$

depende solo del borde y no de la forma de las superficies S_1 y S_2.

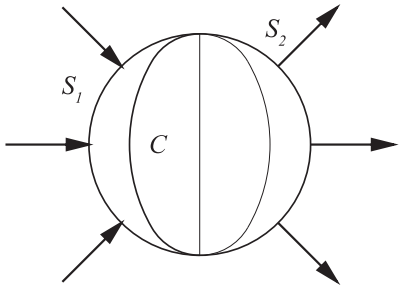

FIGURA A.18. Acerca del flujo incompresible sobre dos superficies

Ejercicio: Calcúlese la integral de superficie de la función $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y^2)\hat{i} + y\hat{j} - 2yz\hat{k}$, si la superficie de integración S es la parte de la esfera $z^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $0 \leq z$.

A.15. Las integrales de volumen

Una integral de volumen puede ser de la forma

$$\int\int\int_V f(x,y,z)d^3\vec{r} \tag{A.85}$$

donde V es un cierto volumen y $d^3\vec{r} = dxdydz$ es un elemento de volumen comparativamente pequeño.

Como ejemplo muy conocido, calculemos la posición del centro de masa de un hemisferio sólido de material de densidad ϱ y radio exterior a (Figura A.19).

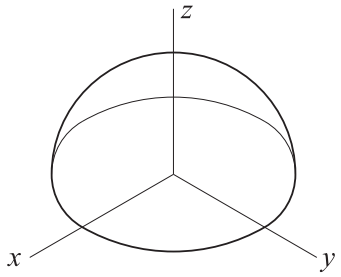

FIGURA A.19. Acerca de la posición del CM de un hemisferio

La altura del centro de gravedad será

$$\bar{z} = \frac{\int\int\int z\, d^3\vec{r}}{\int\int\int d^3\vec{r}} \tag{A.86}$$

La integral en el denominador de esta expresión (A.86) es simplemente el volumen del hemisferio, dado por $2\pi a^3/3$. La integral del numerador se puede evaluar en coordenadas esféricas, en las que $z = r\cos\theta$ y $d^3\vec{r} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi dr$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{numerador} &= \int\int\int z\, d^3\vec{r} = \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta \\ &= \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi a^4}{4} \end{aligned} \tag{A.87}$$

Lo que resulta en una posición del centro de masa dada por

$$\bar{z} = \frac{\pi a^4}{4}\frac{3}{2\pi a^3} = \frac{3a}{8} \tag{A.88}$$

Dejamos para el lector el cálculo de las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de masa del hemisferio.

A.16. El gradiente

El gradiente es un operador que actúa sobre una función escalar y produce un vector. En el caso de una función de una sola variable $f(x)$, el gradiente df/dx se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva en la posición x (Figura A.20).

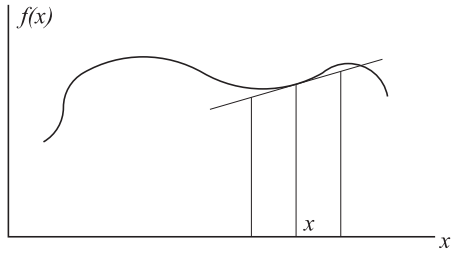

FIGURA A.20. El gradiente en una dimensión

Queremos ahora extender esta idea a los campos escalares que son funciones de dos o tres variables. Consideremos un campo $g(x, y)$, que pudiera ser

la altura de un montículo (Figura A.21). Llamaremos $d\vec{l} = (dx, dy)$ un elemento de distancia horizontal. Ahora bien, dg/dl, donde dh es el cambio de altura experimentado cuando nos desplazamos *sobre el montículo* en una distancia $d\vec{l}$ se parece al gradiente en la función de una dimensión, excepto porque dg depende de *la dirección* de $d\vec{l}$ y no solo de su magnitud.

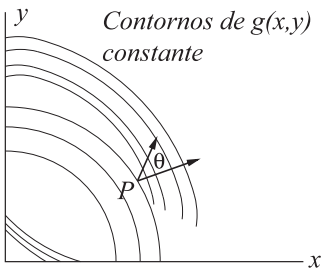

FIGURA A.21. Contornos de valor constante de una función

En la vecindad inmediata de un punto $P = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ la pendiente se reduce a un plano inclinado –en otras palabras, podemos aproximar muy bien nuestra función $g(x, y)$ a un plano inclinado–. El valor más grande de dg/dl es subiendo la pendiente de este plano. Para cualquier otra dirección

$$\frac{dg}{dl} = \left(\frac{dg}{dl}\right)_{\text{máx}} \cos\theta \tag{A.89}$$

Definiremos un vector $\vec{grad}\, g$ y lo llamaremos *gradiente de* g: su magnitud está dada por $(dh/dl)_{\text{máx}}$ y su dirección es la dirección de la pendiente más acentuada. Debido a que depende de $\cos\theta$, la componente de $\vec{grad}\, g$ en cualquier dirección será igual a dg/dl en esa dirección. Este argumento es similar al empleado en la definición de vector área.

La componente de $\vec{grad}\, g$ en la dirección x puede obtenerse dibujando el perfil de g con x para y constante, lo que nos permite encontrar la pendiente de la tangente a la curva para un valor dado de x. Esta cantidad se llama *derivada parcial de g respecto de x para y constante*. Se denota $(\partial g/\partial x)_y$. De manera similar, el gradiente del perfil para x constante se escribe$(\partial g/\partial y)_x$. Los subíndices $x\, y$ pueden omitirse cuando no haya lugar a ambigüedades.

Como consecuencia, el gradiente expresado en sus componentes será

$$\vec{grad}\, g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \tag{A.90}$$

La ecuación, para un plano tangente a la función $g(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ será, de la forma

$$g_T = g(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \tag{A.91}$$

Para que tenga los mismos gradientes locales, deberá cumplirse que

$$\alpha = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad\qquad \beta = \frac{\partial g}{\partial y} \tag{A.92}$$

Para pequeños valores de $dx = x - x_0$ y de $dy = y - y_0$, la función g coincide con el plano tangente; de esa manera tendremos que

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \tag{A.93}$$

Uniendo todo lo anterior, encontramos que

$$dg = \vec{grad}\, g \cdot \vec{dl} \tag{A.94}$$

¿Cómo generalizamos esto a tres dimensiones? Aprovechemos un ejemplo, la distribución de temperatura en un horno en estado estacionario, es decir, independiente del tiempo (Figura A.22).

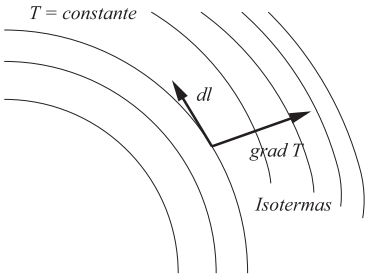

FIGURA A.22. Posibles isotermas en un horno

Definiremos $\vec{grad}\, T$, como antes, igual al vector cuya magnitud es $(dT/dl)_{\text{máx}}$ y cuya dirección es la dirección de la derivada máxima. Escribiremos este vector en la forma de componentes como

$$\vec{grad}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{A.95}$$

donde la expresión $\frac{\partial T}{\partial x} \equiv (\frac{\partial T}{\partial x})_{y,z}$ es el gradiente de un perfil unidimensional de temperatura para x y y constantes –y las similares por cambio de variables tienen significados análogos–.

El cambio en temperatura cuando se pasa de un punto P a otro punto vecino, localizado a $d\vec{l} = (dx.dy.dz)$ será

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz \tag{A.96}$$

En forma vectorial se escribirá como

$$dT = \vec{grad}\, T \cdot d\vec{l} \tag{A.97}$$

Una condición interesante se obtiene suponiendo que $dT = 0$ para algún $d\vec{l}$. Se deduce inmediatamente que $d\vec{l}$ es perpendicular a $\vec{grad}\, T$. Se denominan *isotermas* las superficies de temperatura constante y la conclusión es que esas isotermas son siempre perpendiculares a $\vec{grad}\, T$.

Claramente es posible integrar a dT. La integral de línea entre los puntos P y Q será la diferencia de temperaturas

$$\int_P^Q dT = \int_P^Q \vec{grad}\, T \cdot d\vec{l} = T(Q) - T(P) \tag{A.98}$$

Esta integral debe ser independiente del camino tomado entre P y Q, de modo que la integral del gradiente debe ser independiente del camino.

En general una integral de línea $\int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l}$ podría depender del camino, pero en ciertos campos vectoriales la integral no depende del camino. Tales campos suelen llamarse *campos conservativos*. Es fácil mostrar que si $\vec{A}(\vec{r})$ es un campo conservativo, se puede encontrar un campo escalar $\phi(\vec{r})$ tal que $\vec{A} = \vec{grad}\, \phi$.

La prueba puede ser como sigue: conservemos el punto inicial P de nuestra integral de camino fijo, de modo que la integral será una función de la posición del punto Q:

$$\int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l} = V(Q) \tag{A.99}$$

La función $V(Q)$ estará bien definida, debido a la independencia del camino que posee la integral. Consideremos ahora que se mueve el punto Q en una cantidad dx en la dirección x. La función $V(Q)$ cambiará a

$$V(Q + dx) = V(Q) + \int_Q^{Q+dx} \vec{A} \cdot d\vec{l} = V(Q) + A_x dx \tag{A.100}$$

De donde podremos decir que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A_x \tag{A.101}$$

con relaciones similares para las otras componentes de $\vec{A}$. Como consecuencia,

$$\vec{A} = \vec{grad}\, V \tag{A.102}$$

En mecánica, la fuerza gravitacional es un buen ejemplo de campo conservativo. Si $\vec{A}$ es una fuerza, el trabajo realizado por esa fuerza moviendo un objeto por algún camino es $\int \vec{A} \cdot d\vec{l}$. Si el campo de fuerzas es conservativo, la integral sobre un circuito cerrado será

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{A.103}$$

Esta expresión de trabajo cero en un camino cerrado equivale a la conservación de energía. De ahí viene el nombre de *campo conservativo*.

Un ejemplo mecánico de fuerza no conservativa es la fuerza de rozamiento. Un sistema mecánico –como un péndulo– pierde energía en su movimiento "cíclico", de modo que si $\vec{A}$ es la fuerza de rozamiento

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \neq 0 \tag{A.104}$$

Definiremos ahora un operador vectorial

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{A.105}$$

Llamado "operador nabla". Este operador actúa sobre todo lo que está a su derecha en una expresión, hasta encontrar un paréntesis de cierre. Por ejemplo

$$\vec{grad}\, g = \vec{\nabla}\, g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \tag{A.106}$$

Si tenemos dos campos escalares, ϕ y φ, es claro que

$$\vec{grad}\,(\phi\varphi) = \phi \vec{grad}\,(\phi) + \varphi \vec{grad}\,(\phi) \tag{A.107}$$

O, lo que es equivalente

$$\vec{\nabla}\,(\phi\varphi) = \phi \vec{\nabla}\,(\phi) + \varphi \vec{\nabla}\,(\phi) \tag{A.108}$$

Resulta interesante cómo se transforma este operador bajo una rotación de coordenadas. Veamos; supongamos que giramos los vectores base alrededor

del eje z en un ángulo θ. Las coordenadas *antiguas* $(x.y, z)$ se relacionan con las *nuevas* (x', y', z') por las relaciones

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta - y'\cos\theta \\ z &= z' \end{aligned} \tag{A.109}$$

La aplicación de la regla de cadena para las derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_{y',z'} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)_{y',z'} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x'}\right)_{y',z'} \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.110}$$

nos lleva a

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y} \tag{A.111}$$

Y, expresado como las componentes del gradiente, a

$$\nabla_{x'} = \cos\theta\, \nabla_x + \operatorname{sen}\theta\, \nabla_y \tag{A.112}$$

Es decir, las componentes del gradiente se comportan como las de un vector bien definido. El gradiente es un *buen vector*.

Tema de reflexión: En un documento sobre geofísica se lee que "El gradiente geotérmico tiene valores entre 10^o C por kilómetro de profundidad en el interior de los continentes y 30^o C por kilómetro de profundidad a lo largo de los bordes de placas activas". ¿Cómo interpreta usted esta afirmación?

A.17. La divergencia

Construiremos ahora un operador que actúa sobre campos vectoriales; su resultado es un escalar. Consideremos un campo vectorial general $\vec{A}$. Si calculamos $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$ sobre una superficie cerrada S, donde $d\vec{S}$ significa un elemento de superficie apuntando *hacia afuera* de S (Figura A.23), tendremos un resultado llamado *flujo* de $\vec{A}$ *saliendo* de S. Si $\vec{A}$ es la velocidad de las partículas de un fluido, su integral $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$ es la tasa de flujo de material *saliendo* de S.

Si $\vec{A}$ es constante en el espacio, se puede calcular fácilmente que el flujo neto es cero:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \vec{A} \cdot \oint d\vec{S} = \vec{A} \cdot \vec{S} = 0 \tag{A.113}$$

porque el vector área $\vec{S}$ de una superficie cerrada es cero.

Tomemos ahora un campo que no sea uniforme en el espacio. Si consideramos un volumen en forma de paralelepípedo con caras tan cercanas que $\vec{A}$ varía muy poco entre ellas, podremos calcular la contribución al flujo de las dos caras normales al eje x:

$$A_x(x+dx)dydz - A_x(x)dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial A_x}{\partial x}d^3\vec{r} \qquad \text{(A.114)}$$

donde $d^3\vec{r}$ es el volumen del paralelepípedo.

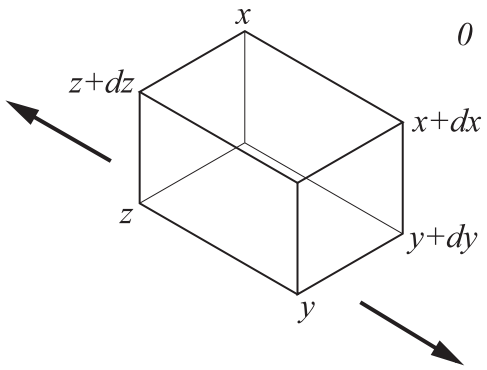

FIGURA A.23. El cálculo del flujo de campo en las caras de un volumen

Las contribuciones correspondientes de los otros dos pares de caras, normales a los ejes y y z permiten calcular todas las contribuciones al flujo como

$$\oint_{\text{superficie del paralelepipedo}} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \qquad \text{(A.115)}$$

Podríamos haber definido la divergencia de un campo vectorial como

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(A.116)}$$

que suele ser una expresión de fácil evaluación. La *definición formal* que preferimos tiene que ver con el flujo del campo vectorial

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\triangle V\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\triangle V} \qquad \text{(A.117)}$$

donde, naturalmente, $\triangle V$ es el volumen rodeado por la superficie S.

Uno de los resultados más importantes en la teoría de los campos vectoriales es el llamado *teorema de la divergencia* –o *teorema de Gauss*–. El teorema dice que para un volumen V encerrado por una superficie S

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r} \tag{A.118}$$

donde $d\vec{S}$ está dirigido hacia fuera del volumen. La demostración –con nuestros elementos de cálculo– es inmediata: dividamos el volumen en muchos pequeños paralelepípedos (Figura A.24) y sumemos $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ sobre todas las superficies.

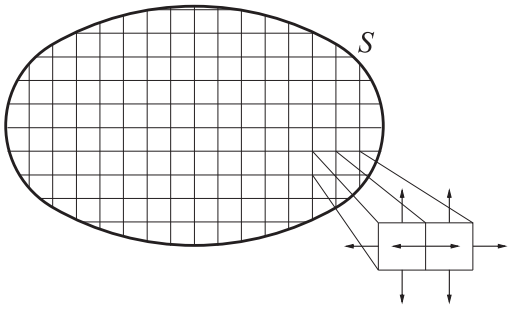

FIGURA A.24. Acerca del Teorema de Gauss

Las contribuciones de las superficies interiores se anulan unas con otras, dejando solo la contribución de la superficie externa. Podemos emplear la ecuación A.117 para cada paralelepípedo, lo que nos asegura que la suma es equivalente a $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r}$ sobre todo el volumen. De esa manera, la integral de $\vec{A} \cdot d\vec{S}$ sobre la superficie exterior es igual a la integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ sobre todo el volumen, lo que se quería mostrar.

Cuando un campo tiene divergencia cero, para cualquier superficie cerrada S

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{A.119}$$

Es decir, si dos superficies S_1 y S_2 comparten un mismo borde

$$\oint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{A.120}$$

En consecuencia, si $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, la integral de superficie depende del borde pero no de la forma de la superficie apoyada sobre él. Si la divergencia no es cero, el resultado dependerá de la superficie y del borde.

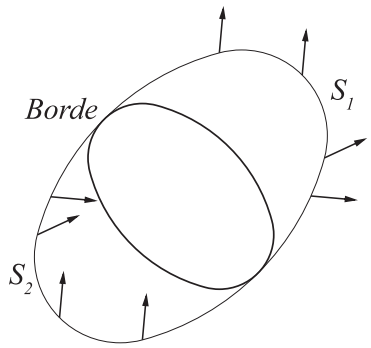

FIGURA A.25. Sobre la integral de superficie de un campo

Buena parte de los ejemplos físicos relacionados con el cálculo vectorial tienen relación con los fluidos –en un sentido limitado: ver el libro de Feynman, Leighton y Sands, ya citado–. Un ejemplo pertinente es el flujo de un fluido incompresible (su densidad no varía) cuyas partículas tienen velocidad $\vec{v}$. Naturalmente será $\oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ para cualquier superficie cerrada, ya que lo que fluye hacia dentro de la superficie deberá salir de ella (Figura A.25). De acuerdo con el teorema de la divergencia $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d^3\vec{r} = 0$ para cualquier volumen. Eso solo es posible si la divergencia de la velocidad es cero en todas partes. Así, las componentes de la velocidad de las partículas en un fluido incompresible satisfacen una ecuación diferencial

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{A.121}$$

Consideremos ahora un fluido comprensible de densidad δ y velocidad $\vec{v}$. La integral de superficie $\oint_S \delta\vec{v} \cdot d\vec{S}$ representa la tasa neta de flujo de masa fuera de la superficie S. Esto debe ser igual a la tasa de disminución de la masa dentro del volumen V rodeado por S, que se puede expresar como $-(\partial/\partial t)(\int_V \delta\, d^3\vec{r})$. De esa manera

$$\oint_S \delta\vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \delta\, d^3\vec{r})\right) \tag{A.122}$$

para cualquier volumen. Aplicando el teorema de la divergencia se sigue que

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{v}) = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \tag{A.123}$$

que suele llamarse *ecuación de continuidad del fluido*, porque expresa que el fluido no se crea ni se destruye mientras fluye de un lugar a otro. Es claro

que si la densidad se puede considerar constante, esta ecuación se reduce al resultado previo para fluido incompresible.

Ejercicio: Calcule la divergencia para las funciones $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{i} + 2z\hat{j} - y\hat{k}$, $\vec{G}(x,y,z) = e^x\hat{i} + \ln(xy)\hat{j} + e^{xyz}\hat{k}$.

A.18. El laplaciano

Vamos ahora a construir un operador que actúa sobre un campo escalar y produce un escalar. Hasta ahora construimos el gradiente (que resulta en un campo vectorial a partir de uno escalar)

$$\vec{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{A.124}$$

y la divergencia –que resulta en un campo escalar formado a partir de uno vectorial–,

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.125}$$

Para emplear estos dos operadores sobre un escalar, los combinamos como $\mathrm{div}(\vec{grad}\,\phi)$. Veamos algunas de las propiedades de ese operador.

Uno de los problemas interesantes –se puede juzgar por la gran cantidad de métodos que se han ideado para su solución– es el problema del *flujo de calor* en una barra sólida, debido a una diferencia de temperatura entre sus extremos[6]. Llamaremos *vector flujo de calor* a un vector $\vec{h}$ que tendrá la magnitud de la tasa de flujo de energía por unidad de área a través de una superficie perpendicular a la dirección de $\vec{h}$. En forma aproximada, el flujo de energía tiene lugar en la dirección opuesta al gradiente de temperatura, de modo que

$$\vec{h} = -\kappa\,\vec{grad}\,T \tag{A.126}$$

donde κ expresa la propiedad del sólido llamada "conductividad térmica". La tasa a la que la energía fluirá hacia fuera de una cierta superficie cerrada S será $\oint \vec{h}\cdot d\vec{S}$. Deberá ser igual a la tasa a la que la energía –térmica– decrece dentro del volumen encerrado por la superficie S. Se pueden entonces igualar estas dos

$$\oint \vec{h}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int c\,T\,d^3\vec{r}\right) \tag{A.127}$$

[6] Esta es una aproximación más propia de ingenieros, aunque no deja de ser interesante. Un tratamiento más profundo debiera aclarar, por ejemplo, qué *mecanismos* de transmisión de la energía están activos en los sólidos y por qué.

donde una nueva propiedad, el *calor específico del material*, se denota como c[7]. El teorema de la divergencia, empleado en la ecuación A.127 nos dice que

$$\text{div}\vec{h} = \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = -c\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{A.128}$$

Si ahora tomamos la divergencia de los dos lados de la ecuación A.126 y empleamos la A.128, encontraremos que

$$\text{div}(\kappa\, \vec{grad}\, T) = c\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{A.129}$$

o también, suponiendo que las propiedades del sólido son constantes,

$$\text{div}(\vec{grad}\, T) = \frac{c}{\kappa}\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{A.130}$$

El campo escalar $\text{div}(\vec{grad}\, T)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{grad}\, T) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{A.131}$$

El operador escalar así encontrado,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.132}$$

se denomina operador laplaciano: es independiente de una rotación del sistema de coordenadas debido a que se forma de un buen operador escalar, la divergencia , y un buen operador vectorial, el gradiente.

¿Cuál es la importancia del operador laplaciano? ¿Y qué significado tiene? Veámoslo primero en una dimensión. En este caso ∇^2 se convierte en la segunda derivada. Esta segunda derivada –con x– de una función $T(x)$ es d^2T/dx^2. Sabemos que la segunda derivada es positiva si $T(x)$ es cóncava hacia arriba y es negativa cuando es cóncava hacia abajo (Figura A.26).

Eso quiere decir que si T en un cierto punto es menor que el promedio en las vecindades de ese punto, entonces $\nabla^2 T$ es positivo. El operador laplaciano tiene que ver con la curvatura de la función y, en consecuencia, con la presencia de máximos y mínimos.

[7] Estamos empleando la noción de que la energía térmica de un sólido es proporcional a su temperatura. Un estudio posterior de termodinámica precisará esta relación.

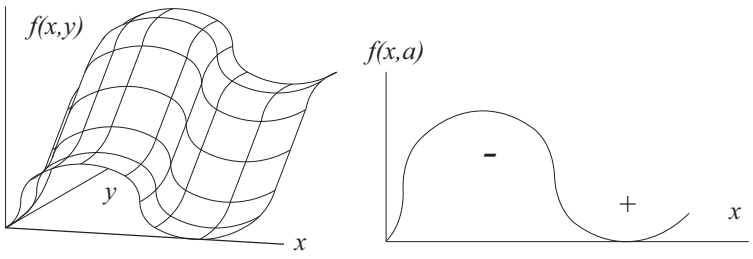

FIGURA A.26. Acerca de la curvatura de una función

En dos dimensiones, el laplaciano de la temperatura toma la forma

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{A.133}$$

Examinemos un mínimo local de temperatura. En el mínimo, la pendiente de T crece en todas las direcciones, de modo que $\nabla^2 T$ es positivo. De manera análoga, $\nabla^2 T$ será negativo cerca de un máximo local.

Examinemos ahora un *valle* de paredes pendientes en T, con el fondo del valle paralelo al eje x. En el fondo del valle el valor de la derivada $\partial^2 T/\partial y^2$ es grande y positivo –corresponde a un mínimo–; por el contrario $\partial^2 T/\partial x^2$ es pequeño –y podría ser negativo–. En resumen, $\nabla^2 T$ será positivo, lo que también se asocia a que T es menor que el valor local promedio $\bar{T}$.

Reinterpretemos el problema de la "conducción del calor" de la siguiente manera. La ecuación obtenida A.130 era

$$\mathrm{div}(\vec{grad}\, T) = \frac{c}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{A.134}$$

Podemos ahora decir que cuando $\nabla^2 T$ es positivo, la temperatura T es menor –localmente– que el promedio de las regiones vecinas, lo que "hace" que $\partial T/\partial t > 0$: en otras palabras, la región se va a calentar. De manera similar, si $\nabla^2 T$ es negativo, la temperatura local T es mayor que el promedio en los alrededores. La energía fluye hacia fuera y la región se enfría, con $\partial T/\partial t < 0$. Nuestras aproximaciones se pueden interpretar de manera razonable.

Ejercicio: Calcúlese el laplaciano de la función $G(x, y, z) = 3x^3y^2z^3$ y de la función cuyo gradiente está dado por $\vec{\nabla} F = e^x \vec{i} + y\hat{j} + x^2\hat{k}$.

A.19. El rotacional

Necesitaremos una última definición de operador; este actuará sobre campos vectoriales para producir un vector. Consideremos un campo vectorial $\vec{A}$ y un lazo –matemáticamente, se entiende: es un camino con longitud y que encierra un área, pero sin dimensiones laterales– que está sobre un plano. La integral de línea de $\vec{A}$ alrededor del lazo es $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ es un elemento de línea del lazo. En el caso de que el campo $\vec{A}$ sea conservativo, sabemos que podremos encontrar una función ϕ tal que $\vec{A} = \vec{grad}\,\phi$ y será $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ para todos los lazos. En el caso de un campo no conservativo, en general, será $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \neq 0$.

Podríamos anticipar algunas propiedades *deseables*: para lazos pequeños, $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ sería proporcional al tamaño –área– del lazo. Para un tamaño fijo del lazo, $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ dependería de la orientación del lazo. Esto último quiere decir que para alguna orientación, el valor de la integral será un máximo: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = I_{\text{máx}}$. Si el lazo se gira un ángulo θ a partir de esta orientación *óptima*, podríamos esperar que la integral de línea $I = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ será proporcional a $I = I_{\text{máx}} \cos\theta$.

La definición formal del rotacional de un vector $\vec{A}$ es otro vector con magnitud

$$|\vec{rot}\,\vec{A}| = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\delta S} \tag{A.135}$$

cuando el lazo tiene la *orientación óptima*. Aquí δS es el área del lazo. La dirección de $\vec{rot}\,\vec{A}$ será perpendicular al plano del lazo, cuando este está en orientación óptima, con su sentido dado por una regla de mano derecha, suponiendo que el lazo es de mano derecha.

No es una definición simple; tratemos de familiarizarnos con ella. Primero que todo tratemos de expresar el rotacional en términos de las componentes de $\vec{A}$. Para ello evaluemos la integral $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ alrededor de un camino rectangular en el plano $y - z$ (Figura A.27).

La contribución de los lados 1 y 3 es

$$A_z(y + dy)dz - A_z(y)dz \simeq \frac{\partial A_z}{\partial y} dydz \tag{A.136}$$

La contribución de los lados 2 y 4 es

$$-A_y(z + dz)dy + A_y(y)dy \simeq -\frac{\partial A_y}{\partial z} dydz \tag{A.137}$$

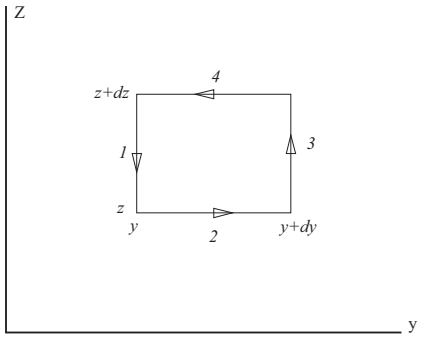

FIGURA A.27. Un camino de integración para evaluar un rotacional

Y a todas estas contribuciones las llamaremos

$$\left(\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}\right)_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dS \tag{A.138}$$

llamando $dS = dydz$ al área del lazo.

Si nuestro lazo no fuera rectangular sino de forma arbitraria, podríamos dividirlo en elementos rectangulares, para formar la integral $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ sobre los lazos resultantes. Las contribuciones de los lados interiores se cancelan, dejando solo las contribuciones del lazo externo. El área del lazo externo es igual a la suma de los lazos internos. Podemos concluir que la relación anterior, reescrita como

$$\left(\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}\right)_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dS_x \tag{A.139}$$

es válida para cualquier lazo de cualquier forma, con vector área $d\vec{S} = (dS_x, 0, 0)$ en el plano $y-z$. Por medio de razonamientos similares podríamos mostrar que si el lazo está en el plano $x - z$, entonces $d\vec{S} = (0, dS_y, 0)$ y la integral que calcularíamos será

$$\left(\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}\right)_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dS_y \tag{A.140}$$

Finalmente, si el lazo está en el plano $x - y$, será $d\vec{S} = (0, 0, dS_y)$ y la integral resulta

$$\left(\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}\right)_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dS_z \tag{A.141}$$

¿Y si nuestro lazo no está en esos planos sino es de la orientación arbitraria $d\vec{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$? Lo podremos construir como la suma de tres lazos orientados en los planos anteriores (Figura A.28).

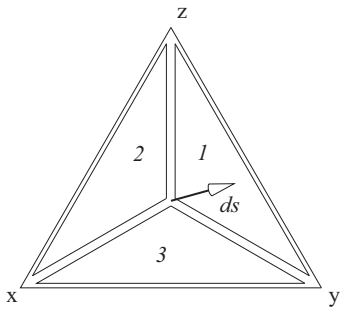

FIGURA A.28. Tres lazos en planos perpendiculares y su equivalente

Si ahora formamos la integral de línea alrededor de los tres lazos, las contribuciones de los lados que coinciden se cancelan y nos queda solo la integral de línea alrededor del lazo de orientación arbitraria

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l_1} + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l_2} + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l_3} \tag{A.142}$$

De modo que

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = r\vec{o}t\vec{A} \cdot \, d\vec{S} = |r\vec{o}t\vec{A}||d\vec{S}| \cos\theta \tag{A.143}$$

donde

$$r\vec{o}t\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{A.144}$$

Nótese que, formalmente, se puede emplear el operador nabla para encontrar

$$r\vec{o}t\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{A.145}$$

¿Qué aplicación se da a este operador? En mecánica elemental se puede considerar un cuerpo sólido rotando alrededor del eje z. La velocidad angular está dada por $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, de modo que la velocidad de un punto en la posición $\vec{r}$ será

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{A.146}$$

Evaluemos el rotacional $r\vec{o}t\vec{v}$ cerca del eje de rotación. La componente x es proporcional a la integral $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ alrededor de un lazo en el plano $y - z$; es claramente cero. En forma similar, la componente y es cero. La componente

z es $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}/dS$ alrededor de algún lazo en el plano en el plano $x-y$. Para simplificar, consideremos un lazo circular –centrado en el eje z– de radio a. Ahora tendremos $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi a \omega a$ y $dS = \pi a^2$. Como consecuencia, $(\vec{rot}\vec{v})_z = 2\omega$, independiente del radio del lazo. Cerca del eje será, entonces $\vec{rot}\vec{v} = (0, 0, 2\omega)$. Fuera del eje, en la posición $\vec{r}_0$, se puede expresar que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) + \vec{\omega} \times \vec{r}_0 \tag{A.147}$$

El primer sumando tiene el mismo rotacional que la velocidad cerca del eje y el segundo, por ser constante, tiene rotacional cero. De esta manera $\vec{rot}\vec{v} = (0, 0, 2\omega)$ en todas partes del cuerpo en rotación. A partir de ese resultado podemos interpretar físicamente qué es un rotacional: si imaginamos que $\vec{A}$ es el campo de velocidades de las partículas en un fluido, entonces $\vec{rot}\vec{A}$ en cada punto del fluido tiene magnitud igual al doble de la *velocidad angular de rotación local*. Tal velocidad angular podría, en principio, demostrarse en forma experimental, con una especie de rueda de paletas sumergida en el fluido.

Un campo vectorial en el que $\vec{rot}\vec{A} = \vec{0}$ se denomina, en consecuencia, un *campo irrotacional*.

EJERCICIO: Calcúlese el rotacional de las funciones $\vec{F}(x, y, z) = y^3\hat{i} + xy\hat{j} - z\hat{k}$, $\vec{G}(x, y, z) = 2y^3\hat{i} - 3xy\hat{j} + 3xz\hat{k}$.

A.20. El teorema de Stokes

Un teorema muy importante expresa un resultado muy empleado en la teoría de los campos vectoriales. Permite convertir integrales de línea en integrales de superficie, –o al contrario–:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{A.148}$$

para alguna superficie –no necesariamente plana– S limitada por un borde C. El teorema se puede mostrar dividiendo el lazo del borde en muchos lazos rectangulares (Figura A.29) y formando la integral del lado izquierdo sobre los lazos resultantes.

Todas las contribuciones del interior se anulan, dejando solo la contribución del borde exterior. Por otro lado, si hacemos uso de la ecuación A.143 para cada uno de los pequeños lazos, podemos ver que la contribución de todos los lazos también es la integral de $\vec{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$ a través de toda la superficie. Esto es lo que se quería mostrar.

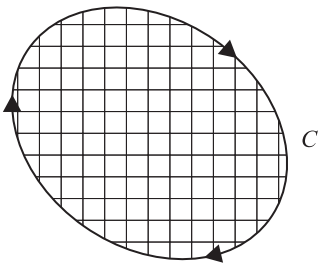

FIGURA A.29. Acerca del teorema de Stokes

Tema para discusión: Hay muchos documentos, en la internet, acerca de los teoremas integrales. Para los interesados en el funcionamiento de un dispositivo para determinar áreas, el planímetro, se pueden recomendar las páginas www.math.psu.edu/yzheng/m597k/m597kL4.pdf y www.amherst.edu/˜ tleise/Planimeter/ LinearAndPolarPlanimeters.pdf .

Una consecuencia inmediata del Teorema de Stokes es que el campo $\vec{rot}\vec{A}$ es *incompresible*: consideremos dos superficies, S_1 y S_2, con un borde común. Del teorema se puede colegir que $\int \vec{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ es igual para ambas superficies. De allí se sigue que $\oint \vec{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} = 0$ para cualquier superficie cerrada. Pero, del teorema de la divergencia sabemos que $\oint \vec{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int \mathrm{div}(\vec{rot}\vec{A})d^3\vec{r}$ para cualquier volumen. En consecuencia,

$$\mathrm{div}(\vec{rot}\vec{A}) \equiv 0 \tag{A.149}$$

Y las líneas de $\vec{rot}\vec{A}$ nunca terminan ni comienzan –tales campos se denominan *campos solenoidales*–.

Hemos visto que, para un campo conservativo, $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ para cualquier lazo; esta condición equivale a decir que se puede encontrar una función ϕ tal que $\vec{A} = \vec{grad}(\phi)$. Además sabemos que la magnitud de $\vec{rot}\vec{A}$ es igual a $lim_{dS\to 0}\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}/dS$ para algún lazo especial. De esto resulta claro que $\vec{rot}\vec{A} = 0$ para un campo conservativo.

En otras palabras, $\vec{rot}(\vec{grad}\phi) = 0$ y un campo conservativo también es un campo irrotacional. Una última afirmación será aquí que

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = \vec{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{A.150}$$

donde

$$\nabla^2\vec{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z) \tag{A.151}$$

Pero, con todo el énfasis, debe insistirse en que este último resultado *solo es válido en coordenadas cartesianas*.

A.21. Resumen

A continuación presentamos un conjunto de igualdades útiles en el trabajo con vectores. Muchas han sido presentadas anteriormente, otras se pueden considerar corolarios.

La definición de *suma de vectores* es

$$\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

La *multiplicación de vectores por un escalar* es

$$n\,\vec{a} \equiv (na_x, na_y, na_z)$$

El *producto escalar* de dos vectores se calcula como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv (a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z)$$

El *producto vectorial* será

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (a_y\,b_z - a_z\,b_y, a_z\,b_x - a_x\,b_z, a_x\,b_y - a_y\,b_x)$$

El *producto triple escalar* se expresa como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c}$$

Y el *producto triple vectorial* con

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

El *gradiente* de una función escalar es

$$\vec{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi \equiv \left(\frac{\partial\,\phi}{\partial x}, \frac{\partial\,\phi}{\partial y}, \frac{\partial\,\phi}{\partial z}\right)$$

La *divergencia* de una función vectorial es

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \frac{\partial\,A_x}{\partial x} + \frac{\partial\,A_y}{\partial y} + \frac{\partial\,A_z}{\partial z}$$

Y el *rotacional*

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \left(\frac{\partial\,A_z}{\partial y} - \frac{\partial\,A_y}{\partial z}, \frac{\partial\,A_x}{\partial z} - \frac{\partial\,A_z}{\partial x}, \frac{\partial\,A_y}{\partial x} - \frac{\partial\,A_x}{\partial y}\right)$$

El *teorema de Gauss* –el volumen V está encerrado por la superficie S– dice que

$$\oint_S \vec{A} \cdot \, d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{A} \, d^3\vec{r}$$

El *teorema de Stokes* –la superficie S tiene a C como borde– asegura que

$$\oint_C \vec{A} \cdot \, d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \, dS$$

Algunas *identidades vectoriales interesantes o útiles* son

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) \\
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi &= 0 \\
\vec{\nabla}(\phi\psi) &= \phi\vec{\nabla}(\psi) + \psi\vec{\nabla}(\phi) \\
\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) &= \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}(\phi) \\
\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) &= \phi\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}(\phi) \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \\
\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}
\end{aligned}$$

A.22. Ejercicios

1. Calcule el ángulo que define un cuadrado de lado a en un punto que está
   - En el centro del cuadrado.
   - En el punto medio de uno de los lados del cuadrado.
   - En un vértice del cuadrado.
   - En un punto por fuera del cuadrado.
2. Calcule el ángulo sólido que define un cubo de lado a en un punto que está
   - En el centro del cubo.
   - En el punto medio de una de las aristas del cubo.
   - En un vértice del cubo.

- En un punto por fuera del cubo.

3. A partir de un cálculo directo, muestre que las siguientes identidades son válidas.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$
$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

4. Un alambre de cobre de radio a tiene una cubierta aislante de radio externo b. El alambre lleva una corriente eléctrica que eleva su temperatura a T_1 cuando el exterior se mantiene a una temperatura T_2, cercana a la temperatura ambiente.

   - ¿A qué es igual $\vec{\nabla} T$ en la capa aislante? Presente una respuesta en términos de a, b, T_1 y T_2.

5. Si llamamos $\vec{R}$ al vector desde el origen de coordenadas hasta el punto (x, y, z), muestre que

   - $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 3$
   - $\vec{\nabla} \times \vec{R} = \vec{0}$
   - $\vec{\nabla} \cdot (\vec{R}/R^3) = 0$, excepto si $R = 0$
   - $\vec{\nabla} \times (\vec{R}/R^3) = \vec{0}$, excepto si $R = 0$
   - $\vec{\nabla}(1/R) = -\vec{R}/R^3$, excepto si $R = 0$
   - La segunda de las ecuaciones de este ejercicio permite asegurar que $\vec{R} = \vec{\nabla}\psi$. ¿A qué es igual ψ?

6. Muestre, por un cálculo directo, que si $\vec{A}$ es un vector constante y $\vec{R}$ está definido como en el ejercicio anterior, entonces

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{R}) = 2\,\vec{A}$$

   Sabemos además que para tres vectores

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

   Si sustituimos ahora $\vec{\nabla}$ como un vector en esta igualdad, tendríamos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{R}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{R})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{R} = 3\,\vec{A}$$

   Y esto es falso. ¿Por qué no funciona la sustitución directa?

7. El campo vectorial $\vec{C} = \vec{R}/R^3$ es muy importante en electromagnetismo.

- Calcule el flujo de $\vec{C}$ sobre una superficie esférica de radio a centrada en el origen de coordenadas.
- Aplique el teorema de Gauss para encontrar una conexión entre el flujo de $\vec{C}$ con la integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{C}$ sobre el volumen. ¿Puede usted explicar el resultado?
- Calcule la integral de línea del vector $\vec{C}$ sobre un camino cuadrado, en el plano $x-y$, de lados $2\,a$, con centro en el origen de coordenadas. Aplique el teorema de Stokes para verificar su cálculo.

8. Construya un campo $\vec{B}$ que tenga divergencia nula y un campo $\vec{E}$ de divergencia no nula.

9. Sea un campo $\vec{B} = -y\,\hat{i} + x\,\hat{j}$. Dibuje un esquema para mostrar cómo es este campo en el plano $x - y$. Calcule su rotacional.

10. Muestre que el rotacional de un campo $\vec{A} = (0, 0, A(x, y))$ satisface la igualdad $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} A \times \hat{z}$. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{B}$, donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

11. Considere un campo definido en el plano $x - y$ como $y^2\hat{i} + 2x(y + 1)\hat{j}$. Calcule la integral de camino de ese campo sobre el triángulo cerrado definido por los puntos $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$ y $C = (2, 2)$.

12. Verifique que $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d^3\vec{r} = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$, para $\vec{v} = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$, con V el volumen del cubo de lado 1, con una esquina en el origen y sus lados orientados según los ejes –cubo unidad– y S su superficie.

Apéndice B

Funciones de Green

B.1. Las funciones de Green para la ecuación de Poisson

La solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = v \tag{B.1}$$

donde $v(\vec{r})$ es una función fuente, suele llamarse una función potencial o, simplemente, el potencial. En especial expresa el potencial electrostático. El método de *funciones de Green* se puede emplear en el caso de ecuaciones diferenciales que son lineales en las fuentes y en los potenciales[1]. Su propiedad importante es la posibilidad de superponer soluciones, como veremos.

La función potencial satisface las condiciones de frontera

$$u(\vec{r}) \to 0 \qquad \text{para} \qquad |\vec{r}| \to \infty \tag{B.2}$$

cuando la función fuente está localizada. Las soluciones de la ecuación de Poisson se pueden superponer, porque es una ecuación lineal.

La función de Green, $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ es el potencial en el punto $\vec{r}$ que satisface las condiciones de frontera adecuadas, generado por una fuente de amplitud uno, situada en $\vec{r}\,'$. Es decir,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{B.3}$$

[1] Para más detalles, véase www.boulder.nist.gov/div853/greenfn/tutorial.html.

A partir de esta fuente, cualquier otra puede expresarse como una suma –superposición– de fuentes con los pesos adecuados:

$$v(\vec{r}) = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \, v(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' \tag{B.4}$$

De la propiedad de superposición se sigue que el potencial generado por la fuente $v(\vec{r})$ puede escribirse como la suma de potenciales de fuentes puntuales de amplitud uno con los pesos adecuados

$$u(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}\,') \, v(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' \tag{B.5}$$

Ya se encontró, en el capítulo sobre electrostática, que la función de Green para la ecuación de Poisson (B.1) es

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{B.6}$$

y la solución general para la ecuación de Poisson es

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{v(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r}\,' \tag{B.7}$$

Nótese el significado de la ecuación (B.6). Es un potencial de simetría esférica alrededor de la fuente y decae en forma continua con distancias crecientes a partir de ésta.

B.2. La función de Green para la ecuación de onda

Ahora nos proponemos resolver la ecuación de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = v \tag{B.8}$$

donde, ahora, $v(\vec{r}, t)$ es una función que varía con el tiempo. El potencial $u(\vec{r}, t)$ satisface las condiciones de frontera

$$u(\vec{r}) \to 0 \qquad \text{cuando } |\vec{r}| \to \infty \text{ y } |t| \to \infty \tag{B.9}$$

Las soluciones de la ecuación (B.8) se pueden superponer porque la ecuación es lineal, de modo que un método de función de Green es también adecuado.

La nueva función de Green es el potencial generado por un impulso puntual localizado en la posición $\vec{r}\,'$, aplicado en el instante t'

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},\vec{r}\,';t,t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') \tag{B.10}$$

Por supuesto, la función de Green debe satifacer las condiciones de frontera adecuadas.

Una fuente general $v(\vec{r},t)$ puede construirse como una suma con pesos de impulsos puntuales

$$v(\vec{r},t) = \int\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')\,v(\vec{r}\,',t')\,d^3\vec{r}\,'dt' \tag{B.11}$$

Se sigue que el potencial generado por esa fuente puede escribirse como la suma, con los pesos adecuados, de los potenciales generados por los impulsos puntuales

$$u(\vec{r},t) = \int\int G(\vec{r},\vec{r}\,';t,t')\,v(\vec{r}\,',t')\,d^3\vec{r}\,'dt' \tag{B.12}$$

Ahora bien, ¿cómo encontramos la función de Green adecuada?

Como primer paso, consideremos la siguiente posibilidad

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';t,t') = \frac{F(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{B.13}$$

donde $F(\phi)$ es una función escalar en general. Tratemos de demostrar que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -4\pi\,F(t-t')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{B.14}$$

En un punto $\vec{r}$ general, si $\vec{r}\neq\vec{r}\,'$, la expresión anterior se reduce a

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = 0 \tag{B.15}$$

Esto significa que debemos demostrar que G es una solución válida de la ecuación de onda en el espacio –vacío–. Se puede mostrar fácilmente que

$$\frac{\partial\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\partial\,x} = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{B.16}$$

Y por diferenciación se calcula

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = &\left(\frac{3(x-x')^2-|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}\right)F \\ &+\left(\frac{3(x-x')^2-|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^4}\right)\frac{F'}{c}+\frac{(x-x')^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\frac{F''}{c^2}\end{aligned} \tag{B.17}$$

donde $F'(\phi) = dF/d\phi$, etcétera. Podemos realizar cálculos similares para las derivadas $\partial^2 G/\partial y^2$ y $\partial^2 G/\partial z^2$ y completar

$$\nabla^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{F''}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \tag{B.18}$$

Lo que nos da la buscada conclusión

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = 0 \tag{B.19}$$

Consideremos ahora la región alrededor de $\vec{r} = \vec{r}'$. Es claro que en la expresión (B.17) el término dominante, cuando $|\vec{r} - \vec{r}'| \to 0$ es el primero, que es prácticamente igual a $F\partial^2(|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1})/\partial x^2$. También es claro que $(1/c^2)(\partial^2 G/\partial t^2)$ es despreciable frente a ese término; así, en esta región, encontramos que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G \to F(t - t')\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \tag{B.20}$$

Ya sabíamos que, de las ecuaciones (B.3) y (B.6),

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{B.21}$$

y podemos concluir que el resultado esperado

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -4\pi\, F(t - t')\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{B.22}$$

está demostrado. Finalmente escojamos

$$F(\phi) = -\frac{\delta(\phi)}{4\pi} \tag{B.23}$$

Con lo que tendremos

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, \delta(t - t') \tag{B.24}$$

Entonces, empleando la ecuación (B.13), podemos concluir que la función de Green para la ecuación de onda que nos proponíamos resolver es

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{B.25}$$

Esta función de Green se parece a la que encontramos para la ecuación de Poisson –se diferencia en el término que depende del tiempo, naturalmente–. ¿Qué efectos describe este nuevo término?

Consideremos un observador[2] en la posición $\vec{r}$. Debido a la función delta, nuestro observador solo mide un potencial diferente de cero en el tiempo particular

$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} \tag{B.26}$$

Este es el tiempo, t', en que el impulso se aplicó en la posición $\vec{r}''$ más el tiempo que requiere una señal luminosa para viajar entre los puntos $\vec{r}''$ y $\vec{r}$. En el tiempo t ($t' < t$), el lugar geométrico de los puntos en que el potencial generado es diferente de cero es

$$|\vec{r} - \vec{r}''| = c\,(t - t') \tag{B.27}$$

una esfera centrada en $\vec{r}''$ y con radio igual a la distancia recorrida por la luz en el intervalo de tiempo $t - t'$. La función de Green describe una onda esférica que surge de la posición $\vec{r}''$ en el tiempo t' y se propaga con la velocidad de la luz. La amplitud de esa onda es inversamente proporcional a la distancia recorrida desde la fuente.

[2] En realidad deberíamos decir una carga de prueba que está siendo observada para detectar efectos eléctricos o magnéticos.

Apéndice C

Radiación y antenas

C.1. Introducción

Las relaciones que se trabajaron para los campos y los potenciales se emplearán en este corto apéndice para examinar cómo son los campos eléctrico y magnético que rodean un conductos en el que hay corrientes cambiantes. Cuando un conductor se diseña con el propósito de radiar energía, en la forma de ondas electromagnéticas, se denomina antena. Puede ocurrir, también, que un conductor funcione como antena como parte de un efecto indeseado.

Sabemos la forma general para calcular el potencial vector. Las integraciones indicadas, aunque formalmente son sobre todo el espacio, solo deben llevarse a cabo sobre el conductor mismo, debido a que podemos suponer que la corriente es cero en otras partes. La dificultad surge debido a que las diferentes partes de un conductor están a diferentes distancias del punto en que calcularemos el potencial y, como la distancia aparece en la función de onda y en el denominador, la integración puede presentar problemas. Esto es sobre todo cierto si la antena es extensa, y se requiere una descripción de los campos cerca y lejos de ella. En muchos casos prácticos solo se requiere el campo a grandes distancias y se pueden introducir simplificaciones que hacen mucho más fácil la integración.

Empleando el potencial vector en la determinación de los campos de radiación, obtendremos el campo producido por un pequeño elemento de longitud de la antena, llamado antena diferencial o dipolo de Hertz[1].

[1] Ver Sommerfeld, A., Electrodynamics, op. cit., pp. 148 y ss.

C.2. El dipolo de Hertz

Consideremos dos conductores (esferas o cilindros) conectados por alambres conductores a una f.e.m. que depende del tiempo. Supondremos que hay carga eléctrica fluyendo en forma periódica de uno a otro conductor. Sea q la carga en uno de los conductores. El sistema tendrá carga neta cero, de modo que en el otro conductor habrá una carga $-q$. Hagamos $q(t) = q_0 \operatorname{sen}(\omega\, t)$. Podemos esperar que la corriente oscilante en el alambre que une los conductores causará radiación electromagnética. Consideraremos el caso simple en que la longitud del alambre de unión es mucho menor que la longitud de onda de la onda emitida. En tal caso, la corriente tendrá prácticamente la misma fase a todo lo largo del alambre y podremos afirmar que

$$I(t) = \frac{d\, q}{d\, t} = I_0 \operatorname{sen}(\omega\, t) \tag{C.1}$$

Donde $I_0 = \omega\, q_0$. Esta antena se denomina dipolo de Hertz.

El potencial vector generado por una distribución de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ está dado por la expresión

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{J}]}{\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}}\, d^3\vec{r}^{\,\prime} \tag{C.2}$$

Donde la notación $[f]$ significa que se calcula la función *retrasada*

$$[f] = f(\vec{r}^{\,\prime}, t - |\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}|/c) \tag{C.3}$$

Supongamos, ahora, para concretar, que el alambre está alineado a lo largo del eje Oz y se extiende desde $z = -l/2$ hasta $z = l/2$. Para considerar un alambre de espesor despreciable, sustituimos la corriente $\vec{J}(\vec{r}^{\,\prime}, t - |\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}|/c)\, d^3\vec{r}^{\,\prime}$ por $I(\vec{r}^{\,\prime}, t - |\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}|/c))\, dz^{\prime}\hat{z}$.

Así, el potencial vector será de la forma $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_z(\vec{r}, t)\, \hat{z}$, con

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z^{\prime}, t - |\vec{r} - z^{\prime}\hat{z}|/c))}{\vec{r} - z^{\prime}\hat{z}}\, dz^{\prime} \tag{C.4}$$

En la región en que $l \ll r$

$$\vec{r} - z^{\prime}\hat{z} \simeq r \tag{C.5}$$

y

$$t - |\vec{r} - z^{\prime}\hat{z}|/c \simeq t - r/c \tag{C.6}$$

El error en esta última aproximación es menor que a lo sumo igual a $\Delta t \sim l/c$. Este error debiera ser menor que un periodo de la onda emitida; de lo contrario la suposición de igualdad de fase sería errónea. Esto significa que

$$\frac{l}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega} \tag{C.7}$$

Lo que significa también $l \ll \lambda$, donde $\lambda = 2\pi c/\omega$ es la longitud de onda de la radiación emitida. Así, en la región de "campo lejano", $\lambda \ll r$, se puede escribir la expresión para el potencial vector como

$$A_z(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z', t - r/c)}{r}\, dz' \tag{C.8}$$

La integración es fácil de realizar, porque la intensidad de la corriente es uniforme a lo largo del alambre. El resultado es igual a

$$A_z(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0\, l}{4\pi} \frac{I(t - r/c)}{r} \tag{C.9}$$

El potencial escalar lo podemos evaluar a partir de la condición de calibración de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\, \phi}{\partial\, t} \tag{C.10}$$

Para lograrlo, recordemos que la divergencia del potencial vector es aproximadamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial\, A_z}{\partial\, z} \simeq \frac{\mu_0\, l}{4\pi} \frac{\partial\, I(t - r/c)}{\partial\, t} \left(-\frac{z}{r^2 c}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{C.11}$$

En otras palabras, hasta potencias del orden de r^{-1}, que son los campos notorios a grandes distancias, se puede aproximar el potencial por

$$\phi(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c} \frac{z}{r} \frac{I(t - r/c)}{r} \tag{C.12}$$

Una vez calculados los potenciales, podemos calcular los campos eléctrico y magnético. Calcularemos solo aquellos términos que dependen de r^{-1}. Se puede encontrar fácilmente que, empleando las coordenadas esféricas (r, θ, φ) alineadas con el eje Oz, las magnitudes de esos campos son

$$\vec{E} \simeq -\frac{\omega\, l\, I_0}{4\pi\epsilon_0\, c^2} \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{sen}\left[\omega(t - r/c)\right]}{r} \hat{\theta} \tag{C.13}$$

y

$$\vec{B} \simeq -\frac{\omega\, l\, I_0}{4\pi\epsilon_0\, c^3} \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{sen}\left[\omega(t - r/c)\right]}{r} \hat{\varphi} \tag{C.14}$$

Los campos son simétricos en el ángulo acimutal φ; no hay radiación a lo largo del eje de la antena ($\theta = 0$) y la máxima emisión está en el plano perpendicular a este eje ($\theta = \pi/2$).

La potencia promedio de la radiación que cruza una superficie esférica S (con radio mucho mayor que la longitud de la antena) será

$$P_{\text{radiada}} = \oint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} \tag{C.15}$$

donde los paréntesis angulares significan promedio temporal, sobre muchos periodos. El flujo de Poynting estará dado por

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\omega^2 l^2 I_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \operatorname{sen}^2[\omega(t - r/c)] \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \hat{r} \tag{C.16}$$

y su promedio temporal es, entonces, proporcional a un diagrama polar de $\operatorname{sen}^2\theta$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega^2 l^2 I_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \hat{r} \tag{C.17}$$

Nótese que el flujo de energía es radial hacia afuera de la fuente. La potencia total radiada será

$$P_{\text{radiada}} = \frac{\omega^2 l^2 I_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \tag{C.18}$$

Calculando estas integrales, encontraremos que la potencia total es

$$P_{\text{radiada}} = \frac{\omega^2 l^2 I_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \tag{C.19}$$

Por analogía con la potencia "disipada" en una resistencia R, que para una corriente con intensidad variable $I = I_0 \cos(\omega\, t)$, se puede expresar como

$$P_{\text{calentamiento}} = \langle I^2 R \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R \tag{C.20}$$

suele definirse una "resistencia a la radiación" de un dipolo de Hertz como

$$R_{rad} = \frac{P_{\text{radiada}}}{I_0^2/2} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0\, c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ohm} \tag{C.21}$$

Desde el punto de vista de los ingenieros, una antena está conectada a un generador como si fuera una resistencia, igual a la resistencia a la radiación más la resistencia del alambre de que está construida. La "pérdida" de potencia es, para el generador, como si hubiera una resistencia conectada a

sus terminales[2]. Pero, como $l \ll \lambda$, el valor de la resistencia a la radiación para el dipolo de Hertz es muy pequeña; la conclusión es que la potencia radiada es también muy pequeña: el dipolo de Hertz es un radiador poco eficiente. Si extendemos el argumento –con cuidado–, resulta posible que una antena más larga sea más eficiente; por ejemplo una antena con $l \sim \lambda$. En realidad una de las antenas más simples pero eficientes es la "antena de media longitud de onda", con $l = \lambda/2$. Su resistencia a la radiación es $73\,\Omega$.

Los campos generados por antenas largas se calculan considerando que están formadas por muchos dipolos de Hertz, tomando en cuenta el retraso en fase de los campos generados por cada una de estas antenas elementales. No proseguiremos con una presentación detallada del tema; remitimos al lector a otros documentos con enlaces muy variados y muy interesantes[3].

C.3. Una antena receptora

Los receptores de ondas –como los teléfonos móviles- emplean también antenas. Las ondas que llegan inducen corrientes en la antena[4], que pueden ser detectadas en un circuito eléctrico conectado a la antena. Realmente este proceso es similar a la emisión de ondas por una antena, solo que visto al revés. Se puede mostrar que las antenas detectan principalmente las ondas incidentes en la dirección que emitirían radiación. De esa manera, un dipolo de Hertz es incapaz de detectar radiación cuando su eje está en la dirección de propagación de la onda y la detecta con eficiencia cuando la dirección de propagación es perpendicular a ese eje[5].

En la teoría de los circuitos eléctricos, se representa una antena receptora como una f.e.m. conectada a una resistencia. Sea esa f.e.m. –el voltaje inducido en la antena por la onda que llega– $V_0 \cos(\omega\, t)$, R_{carga} la resistencia del circuito conectado a la antena y R_{rad} represente la potencia que la antena re-emite –aquí despreciamos la resistencia de los alambres de la

[2] Nótese que el valor dado anteriormente es sólo válido para el dipolo de Hertz.

[3] El lector interesado en una presentación muy empírica del cálculo de antenas de acuerdo con la potencia emitida puede consultar la página www.cisco.com/warp/public /102/wlan/powervalues23231.html; un poco más cercana a un tratamiento físico de las antenas es la página www.ee.surrey.ac.uk/Personal/D.Jefferies/antennas.html.

[4] El lector seguramente podrá construir su propio argumento, basado en las fuerzas eléctricas que actúan sobre las portadoras de carga en el alambre de la antena.

[5] Esta direccionalidad se aprovecha en la localización de emisoras por triangulación, como en el caso del seguimiento de animales que hacen los biólogos y ecólogos.

antena–. La cuestión que se plantea es ¿cómo se deberá elegir R_{carga} para que se extraiga la máxima potencia de la onda, para transmitirla al circuito detector? La Ley de Ohm se puede expresar como

$$V_0 \cos(\omega\, t) = I_0 \cos(\omega\, t)(R_{rad} + R_{carga}) \tag{C.22}$$

donde $I = I_0 \cos(\omega\, t)$ es la corriente inducida en el circuito.

La potencia que el detector recibe es, promediando sobre muchos periodos

$$P_{ent} = \langle V\, I \rangle = \frac{V_0^2}{2(R_{rad} + R_{\text{carga}})} \tag{C.23}$$

La potencia transferida al receptor es

$$P_{receptor} = \langle I^2\, R_{carga} \rangle = \frac{R_{\text{carga}} V_0^2}{2(R_{rad} + R_{\text{carga}})^2} \tag{C.24}$$

Y la potencia re-emitida por la antena es

$$P_{rad} = \langle I^2\, R_{rad} \rangle = \frac{R_{rad} V_0^2}{2(R_{rad} + R_{\text{carga}})^2} \tag{C.25}$$

Naturalmente, la potencia de entrada –que suministra la onda– es $P_{ent} = P_{receptor} + P_{rad}$. Para que llegue la máxima potencia al detector es necesario que

$$\frac{\partial\, P_{\text{receptor}}}{\partial\, R_{\text{carga}}} = \frac{V_0^2}{2} \left[\frac{R_{\text{carga}} - R_{rad}}{(R_{rad} + R_{\text{carga}})^3} \right] = 0 \tag{C.26}$$

Y esto significa que la condición para máxima transferencia de potencia es

$$R_{\text{carga}} = R_{rad} \tag{C.27}$$

En palabras, la resistencia del detector debe ser igual a la resistencia a la radiación de la antena. Para ese caso de transferencia óptima

$$P_{\text{receptor}} = P_{rad} = \frac{V_0^2}{8\, R_{rad}} = \frac{P_{ent}}{2} \tag{C.28}$$

Es decir, la mitad de la potencia absorbida por la antena es inmediatamente re-emitida. Este fenómeno permite localizar las antenas receptoras (en las películas de acción, pero también en la realidad)[6].

[6] La condición de igualdad de las resistencias para máxima transferencia de potencia es similar al caso en que se considera una batería no ideal –con "resistencia interna"–; la potencia máxima transferida tiene una expresión similar a la ecuación (C.28). La condición (C.27) se llama "acople de resistencias". La similaridad no es sorprendente, porque las ecuaciones de circuito son similares también.

Prosigamos. En el caso de un dipolo de Hertz de longitud l, si la amplitud del campo eléctrico de la onda es E_0, podemos esperar que

$$V_0 = E_0\, l \tag{C.29}$$

Suponiendo, claro está, que la longitud del dipolo es mucho menor que la longitud de onda. Tendremos que suponer, además, que la antena está orientada, de modo que el campo eléctrico es paralelo a su alambre. El valor promedio del flujo de Poynting en la onda incidente sobre la antena es

$$\langle \Pi_{inc} \rangle = \frac{\epsilon_0\, c\, E_0^2}{2} \tag{C.30}$$

Y la potencia transferida a un detector bien acoplado es

$$P_{\text{carga}} = \frac{E_0^2\, l^2}{8\, R_{rad}} \tag{C.31}$$

¿Cómo podríamos unir los dos tipos de argumento? Supongamos que, omitiendo el efecto de re-emisión, la potencia (C.31) recibida por la antena equivale al flujo de Poynting (C.30) sobre una área efectiva S_{efe}, es decir

$$P_{\text{carga}} = \langle \Pi_{inc} \rangle\, S_{efe} \tag{C.32}$$

Combinando las ecuaciones (C.31) y (C.30) se obtiene

$$S_{efe} = \frac{l^2}{4\epsilon_0\, c\, R_{rad}} = \frac{3}{8\,\pi}\lambda^2 \tag{C.33}$$

Y esto significa que una antena bien orientada tiene una área efectiva igual a

$$S_{efe} = 0,12\,\lambda^2 \tag{C.34}$$

Si la antena tiene una longitud $\lambda/2$, su "ancho efectivo" es $0,24\,\lambda$. La antena, aunque la supusimos *unidimensional*, actúa como bidimensional, lo que tiene mucho más sentido físico: tiene una especie de sección eficaz para recibir radiación.

C.4. Comentarios

Al comienzo supusimos que la antena de Hertz estaba formada por dos esferas unidas por un alambre; esto no es esencial y, de hecho, cuando se calcula el patrón de emisión de una antena de otras dimensiones, es inconveniente. En realidad es necesario solamente suponer un elemento conductor de

longitud L y de sección S. La intensidad de la corriente es constante a lo largo del conductor y estará distribuida en forma uniforme sobre la sección de este. Todas las demás consideraciones pueden quedar igual.

El resultado sorprendente de que la antena tiene una área efectiva lo es menos sorprendente si consideramos que, realmente, una antena no es unidimensional. De hecho, es posible improvisar antenas receptoras muy eficaces empleando dos láminas metálicas extensas, pegadas a una pared con una pequeña distancia entre las dos; a cada una de las láminas se conecta un alambre y los dos se llevan al detector. Se puede encontrar información en la página users.pandora.be/educypedia/electronics/antennatypes.htm.

Bibliografía

[1] U. Eco *El Nombre de la Rosa*, Casa editorial El Tiempo, Bogotá, 2004.

[2] G. Carmona y otros *Michael Faraday: un genio de la física experimental*, Fondo de Cultura Económica, Mexico, 1995-2003.

[3] Drude, P., *Theory of Optics*, Leipzig, 1900, en edición Dover, New York, 1959.

[4] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley, 1964, volumen 2.

[5] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1989.

[6] Z.D. Jastrzebski, *The Nature and Properties of Enginnering Materials*, Wiley, N. York, 1997.

[7] L. Johansson, *Longitudinal electrodynamical forces and their possible technological applications*, Lund Institute of Technology, 1996.

[8] F. Kohlrausch, V. Kose y S.Wagner, *Praktische Physik*, Teubner, 1996.

[9] T. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas*, 1962.

[10] Lian-Chen T., Jun L., G.T. Gillies, "The mass of the photon", *Physical Review Letters*, 2005.

[11] S. G. Lipson, H. Lipson, *Optical Physics*, Cambridge University Press, 1969.

[12] J. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol.1, Art. 74a-74e.

[13] P. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.

[14] S. J. Plimpton and W. E. Lawton, "A Very Accurate Test of Coulomb's Law of Force Between Charges", *Physical Review*, 1936.

[15] E. Purcell, *Electricity and Magnetism*, McGraw Hill, 1984.

[16] M.H. Shamos, *Great Experiments in Physics*, Dover, 1987.

[17] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, traducción y reedición Academic Press, 1964, volumen 2: Partial Differential Equations.

[18] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, traducción y reedición Academic Press, 1964, volumen 3: Electrodynamics.

[19] W. Stechelmacher, "Energy Analysers for Charged Particle Beams", en *J. Physics E. Sci. Instruments*, 1973.

[20] H. Torres, *El rayo*, Universidad Nacional, Bogotá, 2002.

[21] L. Wahlin, *Atmospheric discharges*, Colutrón, 2005.

[22] E.R. Williams, J.E. Faller and A. Hill, "New Experimental Test of Coulomb's Law: A Laboratory Upper Limit on the Photon Rest Mass", *Physical Review Letters*, 1971.

Índice alfabético

ángulo, 71, 72, 82, 87, 255, 258, 259, 263–265, 269, 286, 310
ángulo sólido, 91, 255, 264, 299

aislante, 9, 64, 166, 176, 214, 227
alambre de prueba, 68
Ampère, 67, 68, 72
amperio, 75
antena, 146, 148
antena de dipolo, 307, 308

batería, 1, 2, 4, 7, 62, 64, 65, 103, 107, 109–111, 130, 134, 139, 163, 165, 178–181, 183, 184, 189, 190, 193–196, 208, 210, 230, 312
Biot y Savart, 72, 76
bobina, 78, 101, 111, 117, 118, 133, 134, 139, 147, 187, 208, 241, 242, 248, 253
bobinas de Helmholtz, 78, 124

calibración, 9, 75, 96, 100, 245, 309
campo eléctrico, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 34, 35, 38, 39, 41, 45, 46, 50, 56, 67, 108, 110, 114, 118, 122, 124, 138, 140, 145, 152, 156, 158, 163, 166, 168, 169, 171–173, 175, 178–180, 215, 223, 225, 313
campo magnético, 67, 68, 75–78, 80, 82, 88, 98
capacitancia, 177–179, 215, 216, 228
carga superficial, 32, 45, 57, 169, 171, 173, 174, 176, 218, 219, 221
Cavendish, 24, 29
circuito, 66, 68, 71, 72, 76, 90, 111, 185, 187, 189, 190, 192–194, 196, 206, 213, 226, 249, 311, 312
coercividad, 250, 252
comportamiento transitorio, 122, 169, 179
condición de frontera, 46–51, 55, 108, 114, 174, 221
conductor, 9, 29, 49, 50, 57, 58, 66, 70, 79, 82, 99, 100, 112, 122, 156, 163, 164, 166, 168–174, 176, 178, 184, 185, 200, 212, 214, 307, 308, 313
conservación de la carga, 12, 121, 199
conservación de la energía, 43, 173, 199
constante dieléctrica, 216, 221, 223, 225, 226, 228
corriente de desplazamiento, 220
corriente de magnetización, 235, 237, 240, 244
corriente eléctrica, 4, 66
Coulomb, 8, 9, 17, 28, 68, 72
coulomb, 10, 75

dieléctrico, 213–216, 218, 220, 221, 228
diferencia de potencial, 109, 124, 163, 164, 169, 177
dipolo eléctrico, 24, 25, 82, 146, 214, 218, 223–225

dipolo magnético, 82, 238, 239, 247, 249, 251
divergencia, 20, 21, 114, 137, 287–289, 291

efecto Hall, 99, 100, 166, 167
electrón, 35, 51, 60–62, 82, 86
energía, 13, 101, 104, 145, 156, 157, 160, 162, 165, 173, 177, 178, 181, 185, 194–196, 214, 224, 227, 307, 310
equipotencial, 38, 49, 57

f.e.m. inducida, 114, 115, 124, 192, 196, 249
Faraday, 110, 111, 113, 116, 119, 141, 150, 153, 246
flujo de campo eléctrico, 18, 22, 30, 31, 174
flujo de campo magnético, 95, 100, 111, 114, 120, 175, 186, 247
flujo de Poynting, 201
fuerza de Lorentz, 84, 99
fuerza electromotriz, 110

galvanómetro, 82
generador, 2, 110
gradiente, 39, 41, 46, 58, 96, 281, 282, 284, 286

henrio, 188

inducción, 110, 111, 113, 124
inductancia, 185–192, 194–196, 206, 208–211, 252

lazo de corriente, 71, 77, 110–114, 124, 233

Maxwell, 23, 29, 120, 123, 126, 136, 138, 141, 142, 147, 152, 153, 174, 200, 206, 220
momentum de la radiación, 203
monopolo magnético, 98

onda plana, 138, 139

permeabilidad, 237, 252
Poisson, 46, 48, 302
polarización de un dieléctrico, 214, 216
polarización de una onda, 140
polo magnético, 243
portadora de carga, 3, 4, 109, 156
potencial electrostático, 38, 157, 158
potencial vector, 94, 96, 119

reluctancia, 243
remanencia, 249
resistencia, 163, 165, 166, 179, 186, 189, 193, 195

solenoide, 79, 80, 87, 187–189, 231, 244
susceptibilidad eléctrica, 221
susceptibilidad magnética, 237, 245, 247