UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación

Sandra Patricia Villarraga Perlaza

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Matemáticas
Bogotá, Colombia

2012

La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación

Sandra Patricia Villarraga Perlaza

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Naturales y Exactas

Directora:

Martha Cecilia Moreno Penagos

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Matemáticas

Bogotá, Colombia

Año 2012

Dedicatoria

A mi padre quien siempre me ha apoyado incondicionalmente, a mi madre que me cuida desde el cielo, a un amor imposible y al retoño que iluminará mi vida.

Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos a la profesora Martha Moreno por su acompañamiento constante y oportuno, a mis estudiantes quienes son la inspiración y motivación en mi quehacer pedagógico y a mi familia que siempre me ha apoyado.

Resumen

Este trabajo de postgrado se realizó con el objetivo de construir una propuesta didáctica que permitiera el estudio de la función cuadrática y la modelación de situaciones de variación y cambio, utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación; dirigida a estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria. Para tal fin, en el capítulo 1 se profundizó en los aspectos históricos relativos la evolución epistemológica del concepto de función. En el capitulo 2, se estudiaron aspectos disciplinares concernientes a los diferentes enfoques del concepto de función, el lenguaje representacional y los procesos de traducción. En el capítulo 3, se presenta una propuesta didáctica que pretende hacer un aporte para la enseñanza del concepto de función cuadrática, utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación para la modelación de situaciones reales.

Palabras clave: (Modelación, herramientas tecnológicas, instrumentos de mediación, sistema de representaciones, función, función cuadrática, dependencia entre magnitudes, aspecto dinámico, aspecto estático)

Abstract

This graduate work was done with the goal of building a teaching proposal that would allow the study of the quadratic function and the modeling of variation and change situations, using technological tools as instruments of mediation to students from ninth grade of basic education school. To this end, Chapter 1 elaborated on the historical aspects concerning epistemological evolution of the concept of function. In chapter 2, we studied aspects concerning the different disciplinary approaches to the concept of function, the representational language and translation processes. Chapter 3 presents a didactic approach that aims to make a contribution to teaching the concept of quadratic function, using technological tools as mediating tools for modeling real situations.

Keywords: (modeling, technological tools, instruments of mediation, system representations, function, quadratic function, dependence between magnitudes, something dynamic, static aspect)

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Introducción

En la educación básica secundaria, generalmente se estudia la función cuadrática por medio de expresiones como $y = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, dado que el estudio de la función cuadrática se enmarca, en la mayoría de los casos, dentro de la enseñanza de funciones polinómicas; el problema de la representación gráfica de funciones cuadráticas expresadas de esa manera radica en la determinación del vértice y del eje de simetría. Una vez conocida la coordenada x del vértice, basta con tomar valores de x próximos a ella, superiores e inferiores, y construir una tabla de valores hallando los correspondientes valores de la variable dependiente, pero, ¿cómo hallar la coordenada x del vértice?.

La principal dificultad a la que se enfrentan los estudiantes consiste en asociar una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con otra equivalente de la forma $y = a(x-h)^2 + k$, en la cual los parámetros h y k determinan las coordenadas del vértice. El estudio de la función cuadrática se centra en la manipulación algebraica y la resolución mecánica de la ecuación asociada, procedimiento a través del cual los estudiantes no establecen una relación significativa entre la expresión algebraica general y la canónica. El análisis gráfico se limita a la construcción de una tabla de valores asignando valores a la variable independiente x y obteniendo valores para la variable dependiente y. Así, se forman las parejas ordenadas que se ubican en el plano cartesiano y la unión de estos puntos por una curva continua y suave representa la gráfica de dicha función.

Ante las mencionadas dificultades, es pertinente buscar alternativas de tratamiento de la función cuadrática en las que se enfatice en la variación y se integren ambos aspectos *estático* y *dinámico*[1]. Afortunadamente en la actualidad contamos con herramientas tecnológicas que amplían las posibilidades de tratamiento didáctico y proporcionan una ventaja sobre los métodos tradicionales como el lápiz y el papel, ya que permiten la modelación y el estudio *cualitativo* y *cuantitativo* de los fenómenos físicos o situaciones reales. El modelaje es una herramienta innovadora que posibilita una conexión entre la matemática y la realidad, favoreciendo así los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estas herramientas se constituyen en un medio de experimentación que favorece la interacción del alumno con los conceptos matemáticos que modelan nuestro mundo, propiciando la construcción del conocimiento.

[1] El movimiento de una variable dentro de ciertos rangos de valores se conoce como *aspecto dinámico*, el asignar valores a una de las variables se denomina *aspecto estático*.

El presente trabajo busca realizar un aporte didáctico para la enseñanza del concepto de función cuadrática utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación.

En el capítulo 1, “**Evolución histórico epistemológica del concepto de función”,** se expondrán los momentos más importantes en el desarrollo histórico del concepto de función, así como los autores más representativos y sus aportes, destacando tres grandes periodos: el mundo antiguo, la edad media y el periodo moderno.

En el capítulo 2, “**Análisis Disciplinar”,** se resaltará la importancia del lenguaje representacional, los sistemas de representación y los diferentes enfoques para trabajar el concepto de función cuadrática.

En el capítulo 3, se realizará una **“Propuesta didáctica”** dirigida a los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Distrital Nuevo San Andrés de los Altos, cuya planta física cuenta con una sala de informática dotada con herramientas tecnológicas computacionales como *Microsoft Excel*[2]*, y Cabri*[3], además del servicio de internet que permite la descarga de software gratuitos como el *Emulador*[4] *TI 92* y el *simulador Modellus*[5] *4,* que se utilizarán en el desarrollo de las actividades. Dicha propuesta busca aprovechar las herramientas tecnológicas de la institución como instrumentos de mediación para favorecer la conceptualización de la función cuadrática a través de la modelación.

La Actividad 1, es de ambientación y familiarización, pretende involucrar al estudiante en una problemática juvenil actual, promoviendo un razonamiento algebraico por medio de situaciones de variación, formulando un modelo matemático que conducirá a entender el concepto de función.

La Actividad 2, se utilizarán como instrumentos de mediación el *Emulador de la calculadora TI 92* y el *software Cabri*, para concluir el efecto que causa sobre la gráfica la variación de los valores de los parámetros a, h, k de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

En la Actividad 3, se ejecutará el simulador *Modellus 4* para modelar diferentes situaciones relacionadas con la función cuadrática, haciendo énfasis en la variación e integrando los aspectos *estático* y *dinámico* del concepto.

---

[2] Microsoft Excel es una aplicación para manejar hojas de cálculo.
[3] Es un programa didáctico geométrico, desarrollado para permitir la manipulación directa y dinámica de la geometría, a través de la interacción didáctica.
[4] Un emulador es un programa informático destinado para emular o imitar en este caso la calculadora Texas Instrument TI 92.
[5] Modellus es una herramienta computacional orientada a la simulación y modelización de situaciones reales.

1. Evolución histórico - epistemológica del concepto de función

Los conceptos de número o de medida se encuentran en la base de gran parte de las matemáticas que el hombre ha desarrollado a lo largo de la historia. El carácter marcadamente abstracto de la noción de número hace que su exposición estructurada sea un problema didáctico difícil, su definición rigurosa es complicada y se necesitaron muchos siglos para su desarrollo (1). De la misma manera el concepto de función se ha transfigurado con el tiempo, como consecuencia tenemos una gran variedad de definiciones cuyo significado puede ser explicitado solo cuando se busca de forma más precisa en el uso posterior que se haga y en los ejemplos a los cuales se aplica. Las definiciones más intuitivas carecen de rigor y las definiciones más rigurosas que abarcan un mayor número de casos resultan lejanas de los problemas concretos originales.

Esta aparente discrepancia puede entenderse debido al carácter general del concepto de función, tal vez por esta razón, no es posible establecer un periodo exacto en el cual situar el nacimiento de este concepto. A mediados del siglo XVII, época de Descartes, Fermat, Newton y Leibnitz y dadas algunas circunstancias particulares que implicaron la generalización de las primeras definiciones del concepto, aparece por primera vez el término "*función*"; momento a partir del cual empieza a desarrollarse el análisis matemático, abordando los conceptos de diferenciación e integración como núcleo fundamental del cálculo infinitesimal. Sin embargo, la idea de función era muy limitada pues se reducía al estudio de funciones analíticas, es decir, aquellas que se pueden expresar mediante una ecuación algebraica y las desarrollables por series de potencias. En el siglo XVIII, Euler dio la primera definición formal de función, a partir de este momento, comienza a generalizarse el concepto como consecuencia de la aparición de funciones cada vez más complejas, hasta llegar a las definiciones más recientes que incorporan el lenguaje conjuntista.

En este capítulo se expondrán los momentos más importantes en el desarrollo histórico del concepto de función (2), así como los autores más representativos y sus aportes.

El ***mundo antiguo***, época en la cual, a pesar de la existencia de estudios referentes a casos particulares de dependencia entre dos cantidades, no aparecen nociones generales sobre cantidades variables y funciones. Dentro de este periodo se enunciarán algunos aportes de los babilonios, que son quizá los referentes más antiguos del estudio de fenómenos de cambio y la determinación de leyes obtenidas por medio de tablas, también mencionaremos a los griegos por su importancia y gran influencia en la transformación posterior del concepto.

La ***edad media***, período en el cual a pesar de aparecer explícitas algunas nociones generales, ya sea de forma geométrica o mecánica, se expresa la dependencia entre dos cantidades variables mediante una descripción verbal o gráfica. El estudio de fenómenos naturales como el movimiento produjo un cambio de mentalidad y motivó los primeros intentos para representar gráficamente la dependencia entre variables.

El ***período moderno***, el cual enfatiza en el estudio del movimiento y la evolución de la geometría analítica, permitiendo el desarrollo de expresiones algebraicas de funciones utilizando el método analítico, dando lugar a nuevas definiciones del concepto general de función universalmente aceptadas en el análisis matemático.

1.1 El mundo antiguo (año 3000 a.C - siglo XII d.c)

Desde la época prehistórica, cuando surgieron las primeras nociones e ideas matemáticas, el hombre se hizo sensible y observó fenómenos cambiantes como la sucesión del día y la noche y su relación con el cambio en la posición del sol, el cambio de posición de las ramas de un árbol por influencia del viento, el desarrollo de técnicas para la caza y la pesca, los cuales impulsaron el desarrollo de tecnologías materiales y simbólicas elementales (herramientas, lenguaje gestual, lenguaje verbo icónico) que fueron el cimiento para el posterior surgimiento de sistemas de representación escritos mucho más complejos (3).

La consolidación de la escritura, impulsó el surgimiento de diversos tipos e instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer el saber social y cultural construido a partir de la antigüedad. La manera más simple para representar las relaciones entre magnitudes, era a través de las tablas (arreglos numéricos en varias columnas). La utilización de diferentes signos para representar los números y los variados sistemas numéricos, hicieron difícil la interpretación de las tablas numéricas, pues no se aisló ni la noción general de magnitud variable, ni de dependencia funcional, por lo cual fue necesario desarrollar algunas ideas entre la representación algebraica y/o geométrica de las relaciones entre magnitudes.

Los sabios helenos se enfrentaron a la aparición de las magnitudes inconmensurables, al intentar resolver algunos problemas clásicos de la antigüedad como: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, cuya solución se limitaba al uso exclusivo de regla y compás. De manera oculta se desarrollaron dos métodos para solucionar dichos problemas, uno mecánico a través del cual las curvas se definían por medio de movimientos simples o compuestos y el otro como resultado de la intersección de dos cuerpos sólidos. En este desarrollo clandestino no primaba el interés por hacer gráfica la dependencia funcional, pero se crearon condiciones para reflexionar geométricamente sobre las relaciones entre magnitudes variables.

En uno de los intentos por resolver el problema de la duplicación del cubo **Menecmo de Atenas (s.IV a.C.)** descubrió que podía construir una curva como la intersección de dos sólidos: un plano y un cono circular recto; por lo cual, se le atribuye a Menecmo el descubrimiento de las secciones cónicas, que luego se llamarían elipse, hipérbola y parábola. De las secciones cónicas antes mencionadas las que darían solución al problema de la duplicación del cubo fueron la parábola y la hipérbola.

Apolonio de Perga (c. 260-190 a.C) introdujo los nombres de parábola, elipse e hipérbola, estas palabras no eran nuevas, fueron adaptaciones de las construcciones necesarias para la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas. Los métodos que usó Apolonio son similares a los modernos métodos analíticos, sin embargo, en el álgebra geométrica de los griegos no había lugar para las magnitudes negativas, además no se utilizaba un sistema de coordenadas como el que se trabaja hoy en día.

Ya en el siglo X se utilizaban las seis funciones trigonométricas, así como diferentes relaciones entre ellas y su expresión tabulada, pero estas seguían siendo de carácter geométrico, asociadas siempre a un círculo trigonométrico de radio fijo y la estimación de los valores notables de tales relaciones. El trabajo que siguió a este hallazgo se concentró en reducir los intervalos de medición y aumentar la exactitud de las tablas de senos y tangentes.

Al observar la evolución en la comprensión de la variación y el cambio en el mundo antiguo, podemos resaltar que:

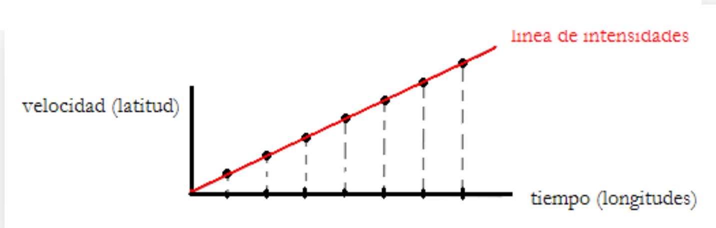
- La búsqueda de regularidades entre cantidades de magnitudes variables en fenómenos naturales sujetos al cambio (calor, distancia, velocidad, etc.) evidenciaron la variación de magnitudes y la identificación de regularidades en las relaciones de causa-efecto, representándolas principalmente en una tabla, dichos fenómenos fueron estudiados desde un punto de vista cuantitativo, el estudio de la matemática pura prevaleció sobre la cinemática.
- Algunos obstáculos conceptuales que hicieron que el estudio de fenómenos de cambio en la época antigua fuese muy reducido fueron: el uso de proporciones o la desintegración entre número y magnitud, así como el carácter predominantemente geométrico de la matemática griega.
- La comparación de conmensurabilidad entre magnitudes de la misma naturaleza inicialmente utilizó una descripción retórica de las relaciones establecidas, más tarde se utilizó el lenguaje sincopado o abreviado.

1.2 La edad media (siglo XII - siglo XV)

Una de las preocupaciones de la edad media, fue el estudio de las cosas sujetas al cambio, y en particular del movimiento. A mediados del siglo XII, el estudio cuantitativo de fenómenos adquiere gran relevancia, las Universidades de Francia e Inglaterra dieron especial importancia al estudio de diferentes aspectos de la mecánica y de varios fenómenos físicos, tomando como base las obras de Aristóteles. En la primera mitad del siglo XIV, las discusiones filosóficas acerca del infinito y la existencia de los indivisibles tuvieron como consecuencia el estudio del *movimiento* y el *cambio*; una de las nociones lógico- filosóficas que más se discutían era la noción de *forma* y su variación, la *intensidad*, teniendo en cuenta fenómenos muy diversos como calor, luz, densidad, velocidad, los cuales pueden poseer varios *“grados*” de *“intensidad*” que cambian entre dos límites establecidos; la *intensidad* se considera en relación a su *“extensión*” con el tiempo o la cantidad de materia. En el transcurso de estos estudios, aparecen conceptos fundamentales como los de *cantidad variable*, entendida como un grado de cualidad, *velocidad instantánea* o *puntual* y *aceleración*, todos ellos ligados a la idea de función (2).

Nicolás de Oresme (c.1323-1382) apoyó la representación geométrica de las magnitudes y su variabilidad, su objetivo era analizar la relación entre magnitudes variables. En su teoría sobre las latitudes de las formas, que se fundamenta en el uso de segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía y mostrar los diferentes tipos de cambio, con este tipo de representaciones (Figura 1-1), Oresme pretende hacer más entendible la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos, sin embargo, este tipo de representación no se puede considerar como la expresión de una dependencia en el sentido actual (3).

Figura 1-1 Representación de la velocidad de un móvil



En su estudio profundo, teórico y práctico de diferentes formas de movimiento mecánico y teniendo en cuenta las concepciones de Oresme, **Galileo Galilei** (1564-1642) sienta las bases de una nueva ciencia, la *mecánica*, marcando un cambio metodológico: la expresión de los fenómenos de la naturaleza mediante relaciones matemáticas expresadas por fórmulas. Galileo investigó el movimiento de un cuerpo pesado lanzado con cierta velocidad inicial horizontal, para tal fin combinó el movimiento uniforme (horizontal) y el movimiento uniformemente acelerado (vertical) y probó que si se ignora la resistencia del aire, la trayectoria que resulta es siempre una parábola.

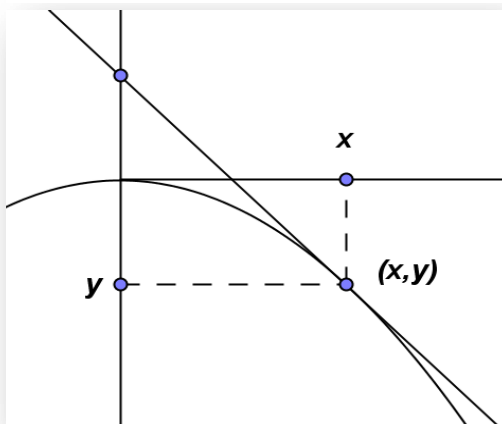
El razonamiento cinemático – geométrico de Galileo conlleva a una forma de establecer una correspondencia entre los conjuntos de puntos de una circunferencia con los de una recta sobre la cual se desplaza. Galileo plantea una paradoja bastante interesante cuando se comparan los conjuntos de los números enteros y sus cuadrados; al parecer, el primer conjunto tiene más elementos que el segundo, puesto que hay números enteros que no son cuadrados. Por otra parte cada cuadrado tiene una única raíz correspondiente y cada raíz corresponde a un cuadrado, por tal razón parece que ambos tienen el mismo número de elementos, llegando a una paradoja. En la actualidad lo anterior se traduce en una correspondencia biyectiva[6] entre el conjunto de los números enteros positivos y sus cuadrados.

El desarrollo de las ideas de Galileo abrió una nueva perspectiva en la investigación de las curvas, **Evangelista Torricelli** (1608-1647), discípulo de Galileo, descompone el movimiento parabólico en un movimiento horizontal y otro vertical (Figura 1-2), entonces la tangente tiene la dirección de la diagonal del paralelogramo cuyos lados son las componentes horizontal y vertical de la velocidad, concluyendo que la recta tangente a una curva en un punto (x, y) interseca al eje de la parábola en un punto que está situado en un segmento $2y$ unidades por encima del punto o en un segmento y unidades por

[6] Cuando una función es simultáneamente sobreyectiva e inyectiva.

encima del vértice de la parábola, esta misma idea la utilizó para hallar la tangente a otras curva afines (4).

Figura 1-2 Descomposición del movimiento



Al observar la evolución en la comprensión de la variación y el cambio en el la edad media, podemos destacar que:

- La intención de entender la naturaleza de los cambios, llevó a crear una representación geométrica que permitiera tener una visión más global del fenómeno analizado, utilizando la continuidad de los segmentos para representar todo lo que varía.
- A pesar de aparecer explícitas algunas nociones generales, ya sea de forma geométrica o mecánica, se expresa la dependencia entre dos cantidades variables mediante una descripción verbal o gráfica. El estudio de fenómenos naturales como el movimiento produjo un cambio de mentalidad y motivó los primeros intentos para representar gráficamente la dependencia entre variables.

1.3 El período moderno (siglo XVI - siglo XX)

En el siglo XVI los algebristas introducen simbología y técnicas algorítmicas más eficaces para facilitar la resolución de ecuaciones, sin embargo todavía no se estudiaba una *ecuación* del tipo $f(x,y) = 0$ como representante de una familia de curvas, era necesario diferenciar entre los papeles desempeñados por la incógnita variable y los coeficientes constantes, es decir los *parámetros* de la ecuación.

Franciscus Viète (1540-1603), tuvo especial interés por el desarrollo del simbolismo algebraico, ligándolo con la utilidad que éste tenía para la resolución de los problemas trigonométricos. Viéte fue quien realizó una clara distinción entre *variable* y *parámetro* e introdujo una simbología especial que no dejó de ser retórica, Viète puede ser considerado como el iniciador del *algebra simbólica* con la distinción de las variables y las constantes en la ecuación, pero no como el que inició el estudio de la variabilidad.

En las primeras décadas del siglo XVII, **René Descartes** (1596-1650) utiliza las primeras letras del alfabeto para los parámetros y las últimas para las variables o incógnitas, siendo más sistemático en su algebra simbólica y acercándose a la simbología actual. Descartes consideraba los parámetros e incógnitas como segmentos de rectas y no como números, este tratamiento marca el nacimiento y expansión de la *geometría analítica*, permitiendo a partir de este momento la interpretación de curvas y superficies por medio de ecuaciones, lo cual llevó a la *algebrización de la geometría.*

Pierre de Fermat (1601-1665) se propuso la reconstrucción de la obra de Apolonio "*Lugares geométricos planos"*, haciendo uso de la simbología utilizada por Vieta. Tanto Descartes como Fermat veían en los lugares geométricos un medio auxiliar para la resolución gráfica de ecuaciones, asignaron números a los segmentos trabajados por Oresme, lo que permitió expresar la relación de dependencia entre las cantidades variables mediante una ecuación. En la actualidad la idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación y el *lugar geométrico,* que consiste en los puntos de coordenadas (x, y) relativas a dos ejes fijos perpendiculares que satisfacen la ecuación, sin embargo, para Descartes y Fermat las dos cantidades desconocidas en una ecuación eran segmentos de recta.

Isaac Newton (1643-1727), consideró desde un punto de vista muy general la dependencia entre magnitudes que varían simultáneamente y se guío por el modelo del rigor matemático de los métodos geométricos antiguos. En su manuscrito "*Tratado sobre fluxiones"* (1666), Newton consideró el movimiento como el resultado de la composición de dos movimientos, el tiempo era la variable independiente, con relación a la cual todos los *fluentes*[7] dependen y cuya velocidad de variación son *fluxiones.* Con las ideas desarrolladas por Newton fue posible estudiar las curvas algebraicas y las que aparecen asociadas a ellas por medio de cuadraturas, sin embargo era difícil encontrar una forma de representación de las curvas no algebraicas, pero Newton solucionó este impase utilizando las series de potencias.

A finales del siglo XVII en Europa continental, hubo avances significativos con la introducción de métodos del cálculo diferencial, **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716) tuvo como objetivo fundamental la creación de un sistema universal apoyado en una notación y terminología que simplificara los elementos esenciales del razonamiento lógico. El mérito de Leibniz fue mostrar que el denominado *triángulo característico*[8] se podía utilizar para resolver problemas de cuadratura y para calcular la tangente a una curva. Leibniz consideraba las curvas como polígonos de infinitos lados, de longitud infinitamente pequeña, entre más pequeña fuese esa longitud las aproximaciones a la curva original mejoran, lo cual permitió resolver los problemas de las tangentes y de cuadraturas.

---

[7] El cálculo de Newton está íntimamente ligado a sus concepciones mecanicistas, basadas en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el concepto de *fluente* como cantidad que varía con el tiempo y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (4).

[8] Isaac Barrow, matemático y teólogo ideó el llamado triángulo diferencial o triángulo característico para la determinación de las tangentes a las curvas planas, en este método la tangente está dada como el límite de una cuerda cuando dos puntos se acercan uno a otro.

En 1684 se publica la revista *Acta Eruditorum* que fue el primer escrito sobre cálculo diferencial, aunque en esta obra no aparece el término de función, seis años después Leibniz lo introduce en otro trabajo, en el cual utiliza la palabra *función* para designar una magnitud representando una curva, la curva se supone definida por una relación entre x e y dada por una ecuación. Este acercamiento al concepto de función pone en evidencia la conexión entre las palabras curva, ecuación y relación.

Con el uso del cálculo se ampliaron las posibilidades de resolver diferentes tipos de problemas que no se podían resolver con métodos geométricos puros o con la geometría analítica. Uno de los principales objetivos de Leibniz era elaborar un instrumento que generalizara la idea de ecuación y que le permitiera representar y manipular todas las curvas, en especial las *trascendentes*[9].

En 1748 **Leonhard Euler** (1707-1783) en la primera parte del libro *Introducción al análisis de los infinitos,* considera las funciones no solo como herramientas de resolución de problemas, sino como un ente matemático digno de ser estudiado por sí mismo. Con esta obra Euler dio paso al nacimiento de una nueva rama de la matemática, el *análisis*, basado en el concepto de función y el uso de procesos infinitos para la representación de las funciones. Euler define las nociones básicas, co*nstante,* como la cantidad que toma siempre un mismo valor determinado y *variable* como una cantidad indeterminada, o universal que comprende en sí misma todos los valores determinados por un conjunto numérico y publica en 1748 la siguiente definición de función:

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes”

Después de esto, clasifica las funciones según diversos criterios como: algebraicas[10], trascendentes, explícitas, implícitas, uniformes, multiformes…

Hasta la aparición del libro de Euler las magnitudes seno y coseno eran consideradas como longitudes de segmentos de rectas relacionadas con una circunferencia de radio dado *R*, Euler consideró exclusivamente el círculo unitario e introdujo una nueva de forma de medir los ángulos asignándoles magnitudes lineales, de esta manera el seno y coseno adquirieron el rango de expresiones analíticas y se convirtieron en funciones matemáticas trascendentes, pero elementales[11].

---

[9] Leibniz conservó la denominación cartesiana de curva algebraica para aquellas que pueden expresarse como un polinomio de un cierto orden determinado y denominó *trascendentes* a las curvas que no admiten tal representación, es decir, las que requieren para su representación de las series infinitas. (4)

[10] Euler clasifica las curvas como algebraicas y trascendentes. Las primeras son las constituidas solo por operaciones algebraicas y en las segundas incluye aquellas en que la variable se ve afectada por alguna operación trascendente. Dentro de las funciones trascendentes incluye tanto las funciones trigonométricas y aquellas definidas por exponenciales y logaritmos como también las dadas mediante integrales.

[11] Una función se considera elemental si se construye a partir de una cantidad finita de exponenciales, logaritmos, constantes, variables y raíces de ecuaciones mediante la composición y combinación de las cuatro operaciones básicas.

En el segundo tomo de su libro *Introducción al análisis de los infinitos*, Euler hace énfasis en la noción de curva y su relación con el concepto de función, hace corresponder una curva a cada función y las curvas las considera generadas por funciones. El concepto de continuidad en Euler referencia una propiedad totalmente diferente a la concebida actualmente, para Euler todas las funciones imaginables eran continuas si existían en la naturaleza.

La noción de función aparece en diversas ocasiones y de diferentes maneras en las obras de Euler, motivadas por razones de carácter teórico o práctico. En su tratado *Cálculo diferencial*, aparece una definición de función mucho más amplia y equivalente a la actual:

"Si algunas cantidades dependen de otras cantidades de modo que si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas… Si por consiguiente, x denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual dependa de x de cualquier manera o esté determinada por ella es llamada una función de ella"

Para Euler y sus contemporáneos una función es una expresión analítica general que puede ser un polinomio, una fracción racional, expresiones que contengan senos, cosenos o logaritmos o también puede venir dadas como suma de una serie o mediante una integral (4). En el siglo XVIII, el problema de la cuerda vibrante[12] giró en torno a la determinación del tipo de funciones $y = f(x)$ que podría considerarse representaba la forma inicial de la cuerda, los matemáticos Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Jean le Rond D´Alembert y Euler debatieron las concepciones establecidas y novedosas relacionadas con la idea de *función arbitraria* y sus representaciones geométrica y analítica.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) trata de conciliar las consideraciones de D´Alembert, Euler y Daniel Bernoulli mediante una visión sintética de la naturaleza de las pequeñas vibraciones. Tras largos y difíciles cálculos, Lagrange obtiene de forma puramente analítica la representación de funciones trigonométricas de la solución general. En las primeras páginas de su libro "*Teoría de las funciones analíticas"* (1797) Lagrange comienza con la siguiente definición de función:

"Llamamos función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cuál aparecen de cualquier manera, relacionadas o no con algunas otras cantidades que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles".

Lagrange opera en sus razonamientos solo con expresiones analíticas y en la generalidad de los casos se limita al uso de series de potencias, con la convicción de que toda función auténtica del análisis pudiera representarse de tal forma.

---

[12] El curioso comportamiento de una cuerda al vibrar generó un interés particular entre los matemáticos Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Jean le Rond D´Allembert y Euler. Solo hasta 1715, Brook Taylor concluye que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es el de un péndulo simple y en consecuencia la forma de la curva que toma la cuerda es un instante dado, debería ser sinusoidal.

A comienzos del siglo XIX muchos físicos e ingenieros se interesaron por la problemática de la propagación del calor en los cuerpos sólidos, por lo cual tuvieron en cuenta la obra de **Jean Batiste Joseph Fourier** (1768-1830) *Memoria de la propagación del calor*, en la cual al final de su obra Fourier expresa una definición de función que se acerca a la concepción moderna:

"En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores dados para las abscisas x…No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a la otra de cualquier manera, y cada una de ellas está dada como si fuera una sola igualdad".

En 1821, **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) en su libro *Curso de análisis* propone la siguiente definición:

"Cuando las cantidades variables están relacionadas entre sí de modo que, dado el valor de una de éstas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se concibe a estas cantidades diversas expresadas por medio de una entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esta variable".

En 1837, **Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) expone una noción muy amplia de función que expresa cuando escribe:

"Designemos por a y b dos valores fijos y por x una magnitud variable, situada entre a y b. Si a todo x corresponde un valor finito $y = f(x)$ que varía de manera continua cuando x varía también de manera continua de a a b, diremos que y es una función continua para este intervalo"

Esta definición se acerca mucho a la idea moderna de una correspondencia general entre dos conjuntos de números reales, aunque en esa época los conceptos de "*conjunto*" y de "*número real*" no tenían aún un significado preciso. La definición anterior sería luego modificada por **Herman Hankel** (1839-1873) y publicada en el ensayo histórico sobre el tema en 1870:

"Se dice que y es una función de x si a cada valor de x de un cierto intervalo corresponde un valor bien definido de y".

Al transcurrir el tiempo, la clasificación de funciones se ampliaba y sufría cambios esenciales y con ellas se precisaban las ideas sobre arbitrariedad y la autenticidad de una relación funcional. Con el surgimiento de la teoría de conjuntos en el siglo XIX se dio la posibilidad de expresar la relación funcional entre dos conjuntos abstractos no necesariamente numéricos. La mayor precisión que adquirieron los conceptos de variable y función en conexión con la teoría de conjuntos, fue esencial para el desarrollo posterior del análisis funcional, cuya naturaleza se resume, en que en el análisis clásico la variable es una magnitud o "*número*", en análisis funcional se considera como variable la función misma.

En 1887 **Richard Julius Wilhelm Dedekind** (1831-1916) define:

"*Por una representación*[13] ϕ *de un sistema dado entendemos a una ley, de acuerdo a la cual a cada elemento determinado* s *del sistema se le asocia un determinado objeto que se denomina imagen de* s *y se denota por el símbolo* $\phi(s)$*".*

En 1911 **Giuseppe Peano** (1858-1932), en una nota "*Sobre la definición de función*" da una nueva definición del concepto de función, comienza por definir el *producto cartesiano* de dos conjuntos:

$$\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}\}$$

Luego, define la relación como un subconjunto del producto cartesiano $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ y después la función como una relación especial:

"Si dos pares ordenados (x, y) *y* (x, z) *con el mismo primer elemento están en la relación funcional* f *entonces necesariamente* $y = z$*".*

En esta última generalización del concepto se pierden muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro, de dependencia, característicos de la mayoría de los problemas que generaron la necesidad del concepto de función (2).

Al observar la evolución en la comprensión de la variación y el cambio en el periodo moderno, podemos resaltar:

- El trabajo de Descartes contribuyó a la visualización de dependencia, pues, por primera vez la expresión algebraica aparece, relacionando el lenguaje geométrico y algebraico.
- Como consecuencia de la controversia entre Euler y D´Alembert sobre el problema de la cuerda vibrante y ante la dificultad de encontrar la expresión analítica para ciertas curvas, Euler replantea su definición de función, en la cual el concepto permanece ligado al de dependencia, liberándose de la expresión analítica, evidenciando la correspondencia entre pares de elementos, sin precisarse la unicidad.
- La introducción de la teoría de conjuntos junto con la definición de función atribuida a Dirichlet permite una mayor abstracción del concepto de función para convertirlo en un objeto de estudio matemático.
- El objetivo de crear un lenguaje más efectivo condujo a la generalización de los términos: *constante, variable, coordenadas* y *parámetro* dándoles el significado actual.

[13] Dedekind llama *sistema* a lo que hoy llamamos conjunto, a la función la denomina *representación*.

2. Análisis Disciplinar

2.1 Lenguaje representacional y procesos de traducción

La apropiación de un concepto depende en gran parte de la capacidad para reconocer e interpretar diversas representaciones del mismo elemento. El lenguaje representacional tiene un papel muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, la posibilidad de usar varios registros de representación (lenguaje natural o formal, gráficos, figuras, esquemas…) es una característica muy significativa de la actividad matemática. Cada registro enfatiza en diferentes características del concepto, si a un concepto matemático solo se accede por medio de una representación se tendrá una imagen muy limitada de este, entre más representaciones se articulen, el concepto generado será más rico e incluyente. Particularmente el concepto de función hace visible la necesidad de utilizar, interpretar y traducir diferentes representaciones para caracterizar modelos matemáticos inherentes a nuestro mundo (2), la descripción verbal, la tabla de valores, la gráfica, fórmula y la expresión algebraica o geométrica, permiten expresar un fenómeno de cambio o una dependencia entre variables. Más detalladamente:

- **La *descripción verbal*:** utiliza un lenguaje coloquial para hacer una descripción generalmente *cualitativa* de la relación funcional a la cual se hace referencia. Este sistema de representación permite introducir el análisis fenomenológico de la función, es decir la diversidad de situaciones en las que este concepto está involucrado.
- **La *tabla de valores*:** da una visión *cuantitativa* de la relación funcional y es una herramienta imprescindible para el estudio de los invariantes del enfoque que trabaja la función como una relación especial de pares ordenados que obedecen a una regla de asignación. Por medio de esta se pueden identificar parejas ordenadas y hacer un estudio de los datos para encontrar patrones de regularidad o hacer regresiones que permitan encontrar expresiones algebraicas, que condensan el comportamiento de las variables involucradas. Aunque esta representación es muy utilizada en las matemáticas, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional.
- **La *gráfica*:** hace referencia a la representación en el plano cartesiano, permite visualizar características generales de la función tales como: las variaciones y los periodos constantes, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y mínimos, la periodicidad, entre otros.
- **La *expresión algebraica*:** utiliza el lenguaje propiamente algebraico; permite determinar valores de ambas variables con precisión.
- **La representación *geométrica*:** se diferencia de la representación gráfica porque no utiliza un sistema de referencia cartesiano. Incluye la descripción de la construcción geométrica para representar lugares geométricos.

Generalmente los estudiantes solo tienen en cuenta una representación y no coordinan explícitamente entre dos o más representaciones haciendo difícil la traducción entre ellas. Se puede percibir este problema cuando en las relaciones funcionales se utilizan expresiones algebraicas con el único objetivo de encontrar parejas ordenadas para elaborar una gráfica, lo que lleva a los estudiantes a mecanizar el proceso sin comprenderlo, generando dificultades para percibir fenómenos de cambio. Los procesos *dinámicos* deben ser tratados con mayor cuidado para que no sean percibidos de manera *estática;* este hecho invita a pensar en el uso de herramientas tecnológicas que posibiliten la coordinación entre diferentes representaciones.

Como se mencionó, la apropiación del concepto de función requiere de la identificación, el conocimiento y manejo de cada una de las representaciones, además de la capacidad para leer e interpretar cada una de ellas y hacer traducciones de una a otra. La tabla 2-1 muestra la variedad de las posibles traducciones (5):

Tabla 2-1Traducciones entre los diferentes sistemas de representación

Desde / **Hacia**	**Descripción verbal**	**Tabla**	**Gráfica**	**Fórmula**
Descripción verbal	---	*Medida*	*Boceto*	***Modelo***
Tabla	*Lectura*	---	*trazado*	***Ajuste***
Gráfica	*interpretación*	*lectura*	---	***Ajuste***
Fórmula	***interpretación***	***computo***	***gráfica***	**---**

Es importante distinguir entre la *lectura de graficas* y la *interpretación* de las mismas. En la *lectura de gráficas* se identifican las variables representadas en cada uno de los ejes, el significado del origen, la unidad y la graduación de los ejes, para después pasar a la identificación de los puntos de la gráfica, es decir, dado el valor de una de las variables hallar el valor correspondiente de la otra, o bien identificar si un punto dado por sus coordenadas pertenece o no a la gráfica. *Interpretar el gráfico* es una actividad más compleja ligada a cada situación y consiste en la capacidad para describir la función representada en forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica, es decir, a las variaciones que presenta.

La obtención de fórmulas que expresan una relación funcional, presentan importantes dificultades de aprendizaje. Obtener la relación que cumplen las variables de una función es abstraer lo esencial de dicha función; algo muy distinto es presentar un determinado modelo, apoyarlo con numerosos ejemplos y luego pedir que los estudiantes resuelvan una serie de ejercicios destinados a la aplicación de este modelo.

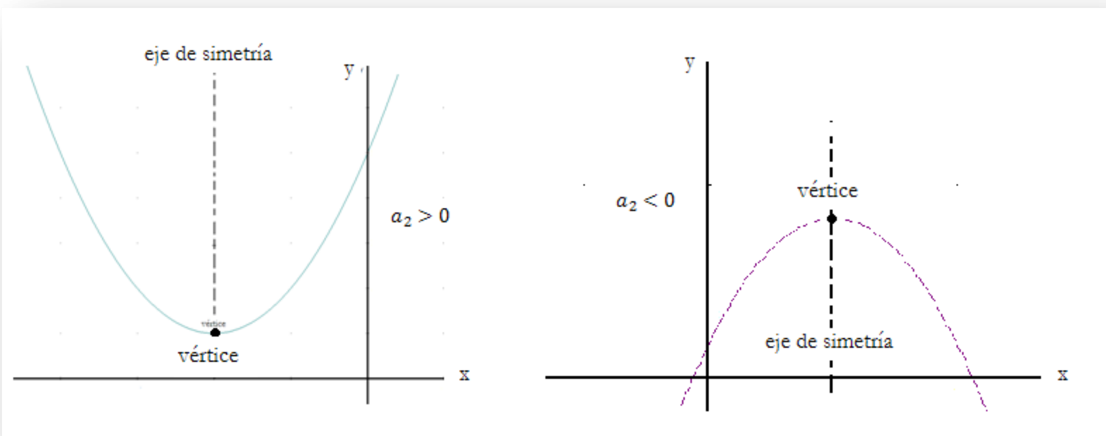
2.2 Diferentes enfoques matemáticos

2.2.1 La función cuadrática como caso particular de función polinómica[14]

La **función cuadrática** es un caso particular de función polinomial, de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ en donde n es un entero no negativo y cada a_i (con $i = 0, 1, 2, \ldots n$) es una constante real. Para $n = 2$ la función queda definida por la expresión $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $a_2 \neq 0$, donde a_2, a_1, a_0 son constantes mientras que x es una variable; la función se llama función polinomial de segundo grado o función cuadrática y su representación gráfica recibe el nombre de parábola.

Desde este enfoque las representaciones que más se utilizan son la gráfica y la algebraica; el signo del coeficiente a_2 indica la concavidad de la parábola. El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría recibe el nombre de vértice (Figura 2-1).

Figura 2-1Relación entre el coeficiente a_2 y la gráfica



---

[14] Propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN): propone introducir la función cuadrática a partir del concepto de área con dominio los reales positivos y luego extenderla a reales. Posteriormente a esta presentación, las traslaciones de la gráfica $f(x) = x^2$ se ofrecen como medio didáctico para la construcción de la función general cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; con $a \neq 0$. La función cuadrática es asumida como objeto matemático y se analiza como adición de tres funciones: la función cuadrática $f_1(x) = ax^2$, la función lineal $f_2(x) = bx$ y la función constante $f_3(x) = c$.

Por ser la función cuadrática un caso particular de las funciones polinomiales, es posible identificar algunas características especiales asociadas al valor mínimo o máximo, al eje de simetría y al vértice de la parábola (ver Figura 2-2).

Figura 2-2 Características de la función cuadrática como caso particular de función polinómica

Definición $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

1. Valor máximo o mínimo de f (x):

$f\left(\frac{-a_1}{2a_2}\right)$ *Mínimo si* $a_2 > 0$ *, máximo si* $a_2 < 0$

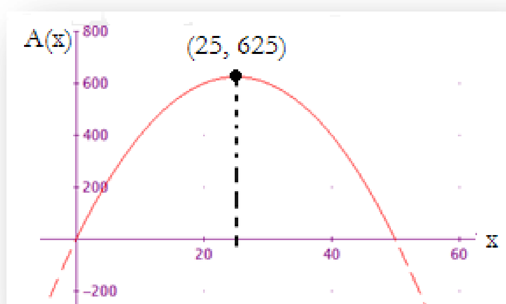
2. Eje (de simetría) de la parábola: $x = \frac{-a_1}{2a_2}$

3. Vértice de la parábola: $\left(\frac{-a_1}{2a_2}, f\left(\frac{-a_1}{2a_2}\right)\right)$

Las aplicaciones de la función cuadrática como caso particular de función polinómica se pueden evidenciar, por ejemplo, en situaciones de optimización relacionadas con costo, demanda y áreas. Este tratamiento enfatiza en la representación algebraica de puntos especiales, reflejando un aspecto estático que implica un manejo exigente del álgebra para obtener las características de la función.

Situación de optimización: Se va a construir un corral rectangular para zona de alimentación del ganado, utilizando 100 metros de cerca.

a) Si x representa el ancho del corral, exprese el área $A(x)$, en función de x.
$A(x) = x(50 - x)$
b) ¿Cuál es el dominio de la función *A*, teniendo en cuenta las restricciones físicas? $0 \le x \le 50$
c) Trace la gráfica
d) ¿Qué dimensiones del corral producirán el área máxima? ¿Cuál es el área máxima?
$625m^2$ Es el área máxima, para un rectángulo de dimensiones $25m \times 25m$
$$A(25) = 625m^2$$



2.2.2 La función cuadrática como una función potencial de proporcionalidad directa

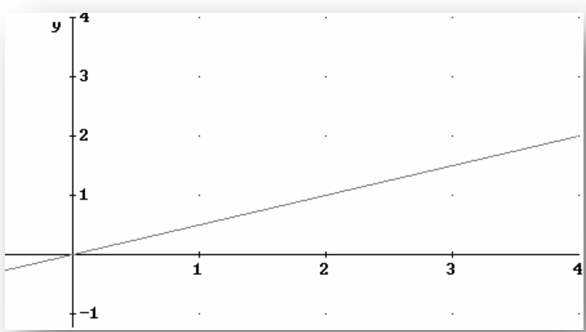
Aunque son pocos los autores que hacen un estudio de la función cuadrática utilizando la definición de la función potencial de proporcionalidad directa (6), en algunos textos de aplicación de las matemáticas en las ciencias naturales se introduce mediante la ecuación de la forma $y = kx^n$, en donde k es una constante positiva y en el caso particular para la función cuadrática $n = 2$.

Desde este punto de vista, la función cuadrática se define como: “la proporción expresada por $y = kx^2$; y varía directamente con el cuadrado de x o y es directamente proporcional al cuadrado de x”.

Las representaciones más utilizadas bajo este enfoque son la tabular y la gráfica, pues se hace énfasis en la búsqueda de una expresión general a partir de los datos. Se realiza un análisis entre dos magnitudes x y y que covarían, a partir de la tabla de valores obtenida de los datos registrados en la experiencia.

Si se observa que cuando una magnitud (x) aumenta, la otra (y) que depende de x también aumenta, pero al calcular las razones entre las dos se ve que no es directamente proporcional, entonces, como la razón no es constante se estudia la relación de y con el cuadrado de la magnitud independiente. Si esta razón es constante, se llama constante de proporcionalidad y se dice que y varía directamente con el cuadrado de x, por lo tanto la representación gráfica es una recta que pasa por el origen (ver Figura 2-3) cuya pendiente $\frac{y}{x^2}$ es la constante k de proporcionalidad.

Figura 2-3 y **directamente proporcional al cuadrado de** x



Con este enfoque las características se centran en el análisis del cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente; para esto se calculan las razones $\frac{y}{x}$ y $\frac{y}{x^2}$ en busca de la constante de proporcionalidad k que corresponde a $\frac{y}{x^2}$.

Gráficamente para la función $y = kx^2$ se obtiene una semi-parábola con vértice en el origen y ubicada en el primer cuadrante (ver Figura 2-4).

Figura 2-4 Semi-parábola con vértice en el origen

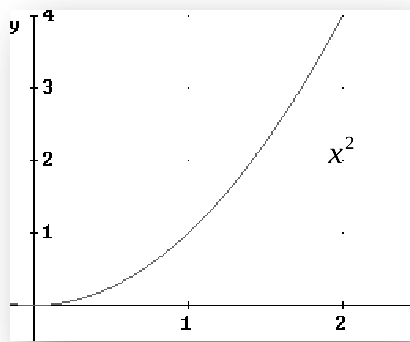


Figura 2-5 Características de la función cuadrática como una función potencial de proporcionalidad directa

Definición $y = kx^2$

1. *Constante de proporcionalidad* $k = \frac{y}{x^2}$
2. *Gráfica: semi-parábola con vértice en el origen*

Las situaciones que le dan sentido a la función cuadrática como una función potencial de proporcionalidad directa son las aplicaciones que surgen en problemas físicos como: la intensidad de la iluminación sobre una superficie, la distancia recorrida por una esfera en un plano inclinado respecto al tiempo, la relación de la producción de calor con respecto a la corriente eléctrica, el movimiento de caída libre de los cuerpos, entre otros.

Este enfoque permite apreciar el cambio de una variable con respecto a otra, debido a la asociación que se puede entablar con fenómenos físicos y situaciones del mundo real, reflejando un aspecto dinámico. No obstante, un obstáculo de este enfoque es que las situaciones que le dan sentido restringen los valores de la variable independiente a valores positivos.

Situación ecológica: Después de varios días de observación un biólogo planteo una hipótesis acerca del comportamiento de las mariposas. "El número de mariposas que se ven en el campo es proporcional al cuadrado de la temperatura". Para una temperatura de 90° F, el biólogo contó 81 mariposas.

- ¿Cuántas mariposas habrá cuando la temperatura sea de 80° F?

m → mariposas
t → temperatura
Modelo de variación → $m = kt^2$

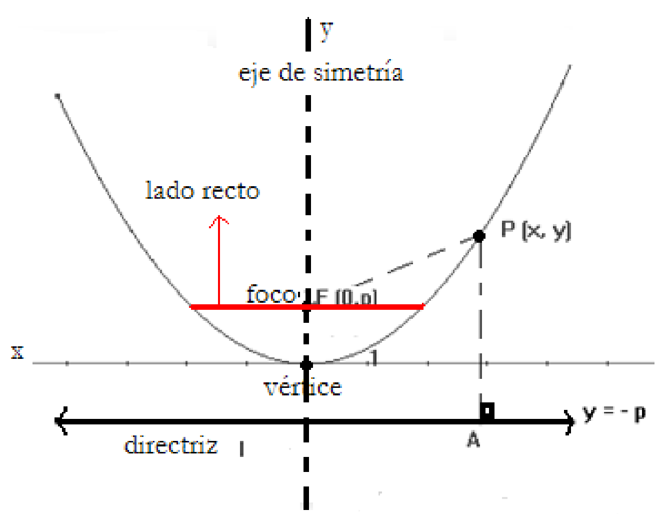
Reemplazando $m = 81$ y $t = 90$ se tiene que $81 = k90^2$, de lo cual se deduce que $k = \frac{1}{100}$. Sustituyendo en el modelo de variación el valor de k, $m = \frac{1}{100}t^2$

Para $t = 80$, $m = \frac{1}{100}80^2$, por lo tanto $m = 64$. Cuando la temperatura es de 80° F habrá 64 mariposas.

2.2.3 La función cuadrática como una herramienta de representación de curvas parabólicas o lugares geométricos[15]

En geometría analítica se estudia la función cuadrática, en un sentido geométrico, a partir de las representaciones gráficas. La parábola se ve como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija (*directriz*), situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo (*foco*) del plano y que no pertenece a la recta. Para encontrar la expresión que permita realizar el estudio de esta curva se parte de una parábola con vértice en el origen y cuyo eje de simetría coincide con el eje y , además de tener en cuenta elementos como el foco, la directriz y el lado recto.

Figura 2-6 Elementos de una parábola con vértice en el origen



[15] Tomado de (9), pág. 149

El foco F está sobre el eje y y sus coordenadas son $(0, p)$. Tomando $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, se dibuja el segmento $\overline{PA}$ perpendicular a la recta l que representa la distancia del punto P a la directriz.

Conocidas las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz se procede a realizar un estudio analítico para obtener la ecuación de la parábola. Como el punto P pertenece a la parábola debe satisfacer la condición geométrica, es decir, que la distancia del punto P al foco debe ser la misma que la distancia del punto a la directriz, es decir $|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$.

Analíticamente las distancias de $\overline{FP}$ y $\overline{PA}$ son: $|\overline{FP}| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ y $|\overline{PA}| = \sqrt{(y+p)^2}$. Igualando las dos distancias se tiene $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$; luego se eleva al cuadrado ambos miembros de la igualdad y simplificando se obtiene la ecuación de la curva:

$$x^2 = 4py$$

Haciendo una traslación de ejes se puede obtener la ecuación de la parábola con vértice de coordenadas (h, k) que no coinciden con el origen. Esta ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Las representaciones más comunes que utiliza este enfoque son la descripción verbal, gráfica y algebraica; ya que la descripción verbal esta asociada a la condición geométrica que se debe cumplir y la gráfica al lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha condición. La expresión algebraica surge como la ecuación matemática que traduce la descripción verbal y es representada por la gráfica.

Las características en las que se enfatiza con este enfoque son la ecuación de la parábola, la ecuación de la directriz y las coordenadas del foco (ver Figura 2-7).

Figura 2-7 Características de la parábola como lugar geométrico

1. Ecuación de una parábola con vértice en el origen: $y^2 = 4px$

- *Foco:* $(p, 0)$
- *Ecuación de la directriz:* $x = -p$
- *Longitud del lado recto:* *4p*
-

2. Ecuación de una parábola con vértice (h, k): $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

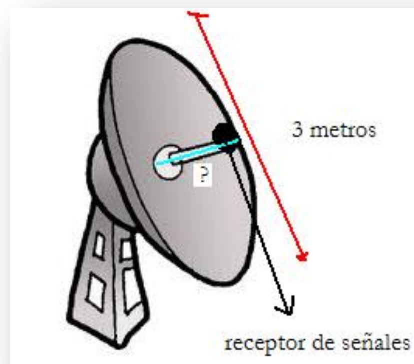
- *Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha*
- *Si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda*

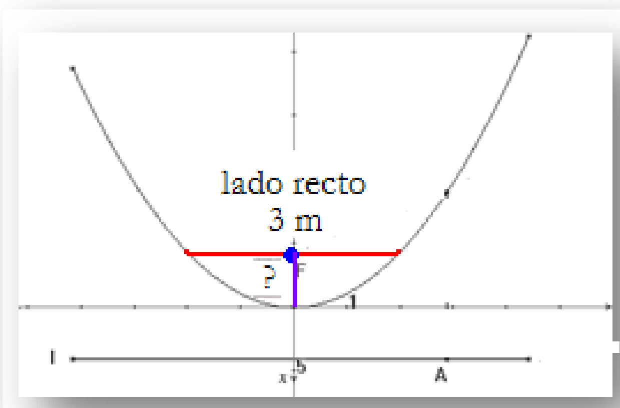
Entre las situaciones que le dan sentido a este enfoque se encuentran situaciones físicas con antenas parabólicas, espejos cóncavos y convexos, y algunas aplicaciones de la ingeniería como la construcción de puentes[16]. Para esto, se requiere hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto (longitud de la cuerda que pasa por el foco y perpendicular al eje de simetría) y/o la gráfica dadas. La visión de la parábola como lugar geométrico muestra un aspecto dinámico cuando se realiza la construcción geométrica, pero este es obstaculizado al estudiar las situaciones que le dan sentido dado que la solución de este tipo de problemas hace énfasis en un trabajo algebraico para la identificación del parámetro p y a partir de este construir la grafica, pasando del aspecto dinámico al aspecto estático. Aunque se trabajan los dos aspectos dinámico y estático no se evidencia la relación entre ambos.

Situación "antenas parabólicas": Una antena parabólica tiene 3 metros de ancho, en la parte donde está situado su aparato receptor.

- ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor de señales?

Ubicando la parábola en un plano cartesiano, podemos identificar algunas características.





Teniendo en cuenta que el lado recto tiene una medida de $3m$ y este es igual a cuatro veces el valor de p

[16] Propuesta de Vicent Font (2001): sugiere comenzar el estudio de la función cuadrática por medio de la gráfica para obtener la expresión simbólica; se propone utilizar dos métodos que tienen en cuenta el hecho que la gráfica se encuentra sobre un plano de ejes graduados o sin graduación. Utilizando ejes sin graduación se presenta la parábola como lugar geométrico, en el cual se considera la gráfica de una función como: "*una curva que es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones*", a través de este acercamiento Font realza la importancia de los ordenadores y hace notar como a través de acciones planteadas a los estudiantes durante el proceso de construcción se pueden identificar ciertas características propias de la parábola.

Lado recto= $4\,p$
$3 = 4p$
$\frac{3}{4} = p = 0.75$

La distancia entre el receptor y el fondo de la antena es igual a $0.75\ m$

2.2.4 La función cuadrática como relación especial de pares ordenados que obedecen a una regla de asignación

Con este acercamiento se presenta la función cuadrática como un caso especial de relación y se utiliza la definición conjuntista de función: *a cada valor de la variable* x *en el dominio se asigna un único valor de otra variable* y *en el codominio determinado por la regla de asignación*. Para la función cuadrática $f(x) = x^2$ la regla de asignación es "*elevar al cuadrado*" por lo que la definición es: "*el conjunto de parejas ordenadas* (x, y) *cuya segunda componente es el cuadrado de la primera*".

$$R = \{(x, y)/y = x^2\}$$
$$f : R \to R^+ \cup \{0\}$$
$$x \to x^2$$

En este acercamiento usualmente se enfatiza en las representaciones algebraica, tabular y gráfica. Utilizando este enfoque se construye una tabla de valores en la cual aparecen explícitamente el dominio y el conjunto de llegada, la regla de asignación establece pares ordenados, origen-imagen, que se suelen simbolizar por (x, y). La gráfica de la función cuadrática está formada por un conjunto de puntos del plano cartesiano de manera que la segunda componente de cada pareja ordenada es el cuadrado de la primera componente.

Bajo este acercamiento las características de la función cuadrática que se resaltan son: el dominio de la variable independiente x, el codominio o conjunto de llegada y la regla de asignación de la forma x^2. La gráfica correspondiente es una parábola con vértice en el origen (ver Figura 2-8).

Figura 2-8 Características de la función cuadrática como relación especial de pares ordenados que obedecen a una regla de asignación

Definición $f(x)=x^2$

1. Dominio:	*Reales*
2. Codominio:	*Reales positivos* $\cup$ $\{0\}$
3. Regla de asignación:	$f: R \rightarrow R^{+}$, x^2
4. Gráfica:	*parábola con vértice en el origen*

Las situaciones que le dan sentido a este enfoque son estrictamente matemáticas, como por ejemplo identificar el dominio y el codominio, estudiar que tipo de función es, etc.

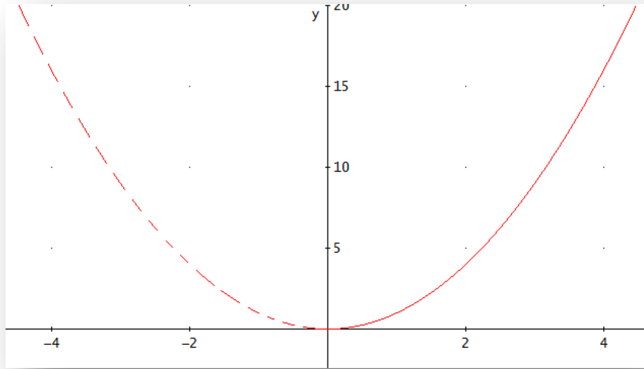
En este enfoque conjuntista la función cuadrática es estudiada como un ejemplo particular de función, pero no se aprovecha para estudiar el cambio de una variable con respecto a la otra, desaprovechando el aspecto dinámico, pues el énfasis se hace en la regla de asignación[17].

Situación de áreas: El área de un cuadrado de lado n unidades se puede expresar mediante la función $\mathrm{A(n)} = \mathrm{n}^2$.

- Elabora una tabla de valores teniendo en cuenta la función dada.
- Dibuja la gráfica correspondiente a la función $\mathrm{A(n)}$.

n	$\mathbf{A(n)}$
2	4
5	25
9	81
14	196
20	400

[17] La propuesta didáctica de Azcarate y Deulofeu, (1992) hace énfasis en la representación cartesiana del concepto y en especial en el dominio de los diferentes lenguajes de representación. Se enmarca dentro del enfoque en donde la función cuadrática se estudia como relación especial de pares ordenados que obedecen a una regla de asignación. Las gráficas cartesianas representan enunciados de las ciencias experimentales, en especial los correspondientes a la física. Se propone trabajar con relaciones funcionales presentes en la vida cotidiana como: gasolina-gasto mensual, cambios de temperatura-tiempo y a partir de estas situaciones, se guía al estudiante en la caracterización de modelos de graficas cartesianas de funciones cuadráticas.



- ¿Cuál es el dominio de la función? (teniendo en cuenta las restricciones de la situación). Reales positivos, puesto que se habla de longitud
- ¿Cuál es el codominio de la función? La función solo toma valores positivos

2.2.5 La función cuadrática estudiada a partir de la variación de parámetros[18]

La función cuadrática se estudia por medio de la ecuación $y=a(x-h)^2+k$, donde a,h y k son los parámetros que varían. Las representaciones de la función cuadrática que se privilegian bajo este tratamiento son la algebraica y gráfica que están estrechamente ligadas de acuerdo con la variación de los parámetros en la ecuación $y=a(x-h)^2+k$.

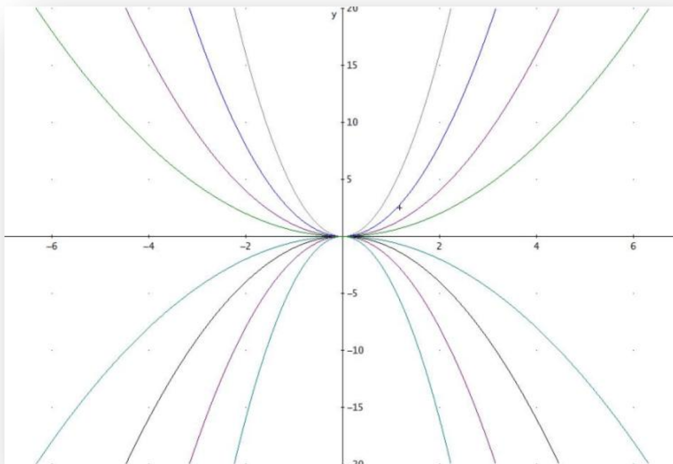
Cuando $h=0$ y $k=0$ en la ecuación general, se obtiene $y=ax^2$.Su gráfica es una curva simétrica respecto al eje y. Al variar el parámetro a de la ecuación $y=ax^2$ y construir las diferentes gráficas se aprecia que en comparación con la curva inicial, la de la función

[18] Propuesta de Vicent Font (2001): sugiere comenzar el estudio de la función cuadrática por medio de la gráfica para obtener la expresión simbólica; se propone utilizar dos estrategias que tienen en cuenta el hecho que la gráfica se encuentra sobre un plano de ejes graduados. La estrategia de *interpolación*, consiste en construir una tabla de valores a partir de la gráfica y encontrar una expresión simbólica, se basa en hacer una suposición implícita de fórmula de segundo grado a partir de unos pocos valores de la tabla para confirmarla o invalidarla con el resto de valores. Este procedimiento es poco consistente y solo da resultado con funciones de segundo grado muy sencillas, pero no con funciones más complicadas. La estrategia de la familia *de funciones y transformaciones*, consiste en reconocer la gráfica como familia de funciones de segundo grado y utilizar las transformaciones de las gráficas para hallar y justificar la fórmula.

$y = ax^2$ con a > 0, la parábola que se obtiene es más cerrada (se contrae) al aumentar el valor de a, y es más abierta (se dilata) al disminuir el valor de a.

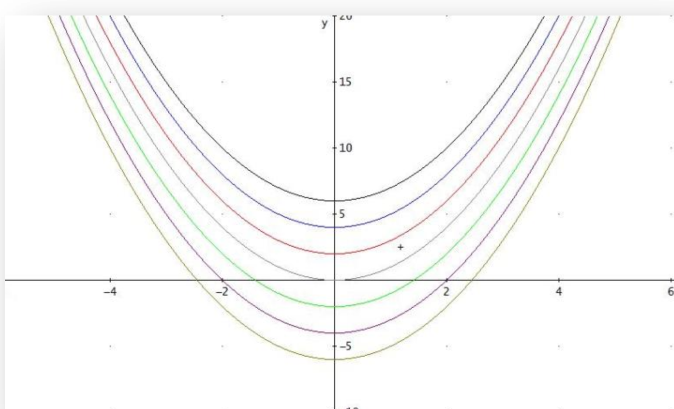
Para un valor de a < 0, se obtiene una parábola con la misma abertura que la de su respectivo opuesto pero invertida puesto que ahora los valores de y son negativos. Se mantiene el mismo vértice y el mismo eje de simetría (ver Figura 2-9).

Figura 2-9 Gráficas de la familia de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$



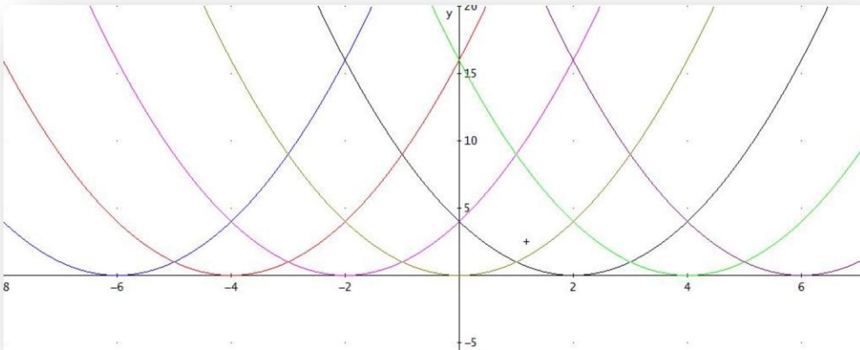
Cuando $h = 0$ y $a = 1$ en la ecuación general, se obtiene $y = x^2 + k$. Las gráficas de las ecuaciones de tipo $y = x^2 + k$ tienen la misma abertura y el mismo eje de simetría que $y = x^2$, pero el vértice se desplaza al punto $(0, k)$ por lo cual las parábolas se desplazan $|k|$ unidades del origen hacia arriba si $k > 0$ o hacia abajo si $k < 0$ (ver Figura 2-10).

Figura 2-10 Gráficas de la familia de funciones cuadráticas de la forma $y = x^2 + k$



Cuando $k=0$ y $a=1$ en la ecuación general se obtienen ecuaciones de tipo $y=(x-h)^2$ cuyas gráficas tienen la misma abertura que $y=x^2$; estas gráficas corresponden a parábolas trasladadas $|h|$ unidades hacia la derecha si $h<0$ o hacia la izquierda si $h>0$ el vértice es el punto $(h,0)$ y el eje de simetría es paralelo al eje y (ver Figura 2-11).

Figura 2-11 Gráficas de la familia de funciones cuadráticas de la forma $y=(x-h)^2$



Las características que se destacan tienen relación con los parámetros a, h y k para predecir ubicación en el plano cartesiano de la curva que representa la ecuación $y=a(x-h)^2+k$. Esta forma de expresar la ecuación cuadrática tiene la ventaja que cada uno de los parámetros que en ella aparecen tiene un significado gráfico concreto, lo cual no sucede con la expresión general de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Los parámetros h y k nos dan las coordenadas del vértice.

Las situaciones que le dan sentido a este enfoque son aquellas que utilizan herramientas tecnológicas[19] para analizar la variación de parámetros. Se desarrollará este enfoque en la propuesta didáctica.

[19] La propuesta del National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM) (1989) se caracteriza por tener un enfoque en que se estudia la función cuadrática teniendo en cuenta la variación de parámetros y enfatiza sobre el quehacer más que sobre el saber matemático, lo fundamental de la propuesta es la formulación de modelos funcionales utilizando herramientas tecnológicas y el estudio de la variación de parámetros, así como las múltiples interpretaciones a las que da lugar cada modelo.

Figura 2-12 Características de la función cuadrática a partir de la variación de parámetros

Definición $f(x) = ax^2 + bx + c$ **,** $a \neq 0$

Ecuación que se estudia: $y = a(x-h)^2 + k$

Variación del parámetro a **:**

Si $a > 0$ *la parábola abre hacia arriba*
Si $a < 0$ *la parábola abre hacia abajo*
Si $a > 1$ *la parábola se contrae*
Si $0 < a < 1$ *la parábola se dilata*
Si $a < -1$ *la parábola se contrae*
Si $0 > a > -1$ *la parábola se dilata*

Variación del parámetro k **:**

Si $k > 0$ *la parábola se desplaza* $|k|$ *unidades del origen hacia arriba*
Si $k < 0$ *la parábola se desplaza* $|k|$ *unidades del origen hacia abajo*

Variación del parámetro h **:**

Si $h > 0$ *la parábola se trasladada* $|h|$ *unidades hacia la izquierda*
Si $h < 0$ *la parábola se trasladada* $|h|$ *unidades hacia la derecha*

Coordenadas del vértice: (h, k)

3. Propuesta Didáctica

3.1 Instrumentos de mediación

Herramientas tecnológicas computacionales como***: Excel, Derive, Cabri, Emulador TI-92, Simulador Modellus 4,*** entre otras, están provistas de un sistema de álgebra simbólica ejecutable, permitiendo observar, explorar, conjeturar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio, a partir de la interacción entre diferentes sistemas de representación (3), constituyendo un poderoso recurso en el contexto escolar.

Estas herramientas incorporan además de los sistemas de representación numérico y gráfico, sistemas de manipulación algebraica y/o geométrica y de registro de datos experimentales, lo que permite que una situación matemática pueda ser estudiada desde varios puntos de vista como: el numérico, el gráfico o el simbólico; lo que resulta aún más importante, es que dicha situación pueda estudiarse desde los tres puntos de vista integrados en forma *dinámica*, abriendo así la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre las representaciones y una mejor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio. Las herramientas tecnológicas amplían las posibilidades de tratamiento didáctico y proporcionan una ventaja sobre los métodos tradicionales como el lápiz y el papel, ya que permiten la *modelación* y el estudio cuantitativo y cualitativo de fenómenos físicos o situaciones reales, integrando un *aspecto dinámico*[20].

La modelación favorece el aprendizaje, pues, conlleva a que los estudiantes descubran los conceptos matemáticos involucrados y simultáneamente aprendan la utilidad de los elementos matemáticos construidos, para lograr mayores beneficios se sugiere utilizar herramientas tecnológicas computacionales como instrumentos de mediación entre los objetos matemáticos estudiados, los diferentes sistemas de representación y las situaciones matemática que le dan sentido. Los instrumentos de mediación permiten lograr mayor fluidez representacional al permitir abordar una situación problema a través de diversos sistemas de representación (gráfico, simbólico, geométrico, numérico y verbal), en ese sentido favorecen la interpretación de resultados producto del tratamiento que se de a tales sistemas de representación, mediante el instrumento ejecutor del que se dispone.

[20] El movimiento de una variable dentro de cierto rango de valores se conoce como *aspecto dinámico*, el asignar valores a una de las variables se denomina *aspecto estático*.

3.2 Descripción general de la propuesta

3.2.1 Contexto

Los lineamientos curriculares (7), plantean como propósito fundamental de la educación matemática de los niveles de básica y media “*contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas*”. Señalan, además como procesos generales presentes en toda actividad matemática: *la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*; los cuales conducen al desarrollo de los diferentes pensamientos: *numérico, espacial, métrico, aleatorio, variacional.*

En particular, los lineamientos señalan que entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran: *la descripción verbal, la tabla de valores, la gráfica, la fórmula y las expresiones analíticas*, cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio o una dependencia entre variables. El conocimiento de cada uno de los lenguajes de representación se observa en la capacidad para *leer e interpretar* cada uno de ellos y hacer *traducciones* entre uno y otro.

La presente propuesta didáctica está dirigida a los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Distrital Nuevo San Andrés de los Altos, cuya planta física cuenta con una sala de informática dotada con herramientas tecnológicas computacionales como Excel, y Cabri, además del servicio de internet que permite la descarga de software gratuitos como Emulador TI 92 y simulador Modellus 4, que se utilizarán en el desarrollo de la propuesta.

3.2.2 Secuencia de actividades

Teniendo en cuenta las indicaciones de los lineamientos curriculares, algunas propuestas metodológicas, los diferentes enfoques del concepto de función cuadrática, los sistemas de representación y el uso de herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación, se hace una propuesta didáctica para el estudio de la función cuadrática y se plantean como metas de enseñanza:

- Aprovechar las herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación para favorecer la conceptualización de la función cuadrática a través de la modelación, generando un ambiente de aprendizaje con situaciones motivantes que reten al estudiante a resolverlas.
- Proporcionar experiencias significativas y estimular el uso y traducción de diferentes representaciones funcionales: (verbal, algebraica, grafica, visual, numérica) y la relación entre estas por medio de recursos tecnológicos.
- Encontrar un modelo matemático a partir de un fenómeno físico o situación real y caracterizar la función correspondiente a la experiencia realizada.

A continuación se describe brevemente la secuencia de actividades que permitirán desarrollar las metas de enseñanza de la propuesta didáctica.

La Actividad 1 “**Una situación embarazosa**”, es de ambientación y familiarización, pretende involucrar al estudiante en una problemática juvenil actual, promoviendo un razonamiento algebraico por medio de situaciones de variación, formulando un modelo matemático que conducirá a entender el concepto de función.

La Actividad 2 “**Jugando con parámetros”,** se utilizarán como instrumentos de mediación el *Emulador de la calculadora TI 92* y el *software Cabri*, para concluir el efecto que causa sobre la gráfica la variación de los valores de los parámetros a, h, k de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

En la Actividad 3 “**Uso de herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación para la modelación de la función cuadrática**”, se ejecutará el simulador *Modellus 4* para modelar diferentes situaciones relacionadas con la función cuadrática, haciendo énfasis en la variación e integrando los aspectos *estático* y *dinámico* del concepto.

Actividad 1. UNA SITUACIÓN EMBARAZOSA	
OBJETIVO GENERAL	Involucrar al estudiante en una problemática juvenil, promoviendo un razonamiento algebraico por medio de situaciones de variación, formulando un modelo matemático (denominado función) que conducirá a entender el concepto de función.
	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
TALLER 1-A1	Involucrar al estudiante en una problemática juvenil, promoviendo un razonamiento algebraico por medio de situaciones de variación, formalizando el uso de ecuaciones en la introducción de la noción de función.
TALLER 2-A1	Generar la identificación de variables dependientes e independientes, patrones y regularidades en un proceso de generalización de fenómenos de variación.
TALLER 3-A1	Promover la construcción de registros de representación (lenguaje natural, representación tabular, plano cartesiano, representación simbólica algebraica) respecto a la situación.
TALLER 4-A1	Generar la formulación de modelos matemáticos y establecer las características de la función cuadrática, su análisis e interpretación a partir de la situación propuesta.

Actividad 2. JUGANDO CON PARÁMETROS	
OBJETIVO GENERAL	Utilizar herramientas tecnológicas para relacionar el efecto sobre la gráfica al variar valores de los parámetros a, h, k de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ con el efecto que causa sobre la gráfica.
	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
TALLER 1-A2	**Familia de funciones.** Encontrar una expresión algebraica de la forma $\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$ que describa una familia de funciones cuadráticas dada.
TALLER 2-A2	**Programa par $(\boldsymbol{a, h, k})$.** Encontrar la expresión algebraica de la forma $\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$ correspondiente a la función cuadrática cuya gráfica coincide con la gráfica preestablecida por el programa par $(\boldsymbol{a, h, k})$, identificando el efecto que causa en la gráfica, la modificación de cada uno de los parámetros $\boldsymbol{a, h, k}$ en la expresión algebraica.
TALLER 3-A2	**¿La gráfica dada corresponde a una función cuadrática?.** Observar, indagar y concluir que las gráficas con forma aparente de parábola no necesariamente corresponden a funciones cuadráticas.
TALLER 4-A2	**La parábola como lugar geométrico** Construir el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo y una recta dada.

Actividad 3. USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS COMO INSTRUMENTOS DE MEDIACIÓN PARA LA MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA	
OBJETIVO GENERAL	Utilizar el simulador ***Modellus4*** para modelar diferentes situaciones relacionadas con la función cuadrática.
	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
TALLER 1-A3	**Simulación lanzamiento de un volador**. Identificar el efecto que causa en la gráfica, la modificación de cada uno de los parámetros a, b, c en la expresión algebraica de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
TALLER 2-A3	**Simulación encestar el balón**. Encestar el balón de basket y encontrar la expresión algebraica que describe un lanzamiento perfecto
TALLER 3-A3	**Simulación gravedad y caída libre de los cuerpos**. Reproducir el movimiento de un balón en caída libre y relacionar las leyes de este movimiento con una función cuadrática.

3.3 Actividades

A continuación se dan las indicaciones y/o sugerencias generales para la aplicación de la propuesta didáctica. Para un mejor entendimiento de las actividades, se recomienda que el lector tenga a la mano el "**libro de actividades del estudiante"** y un computador para ejecutar algunos programas que se necesitan. Para ello, se anexa un Cd, en el cual se encuentra el *Emulador de la calculadora TI 92* y el *simulador Modellus 4.*

3.3.1 Actividad 1. Una situación embarazosa

TALLER 1-A1

Objetivo General: Involucrar al estudiante en una problemática juvenil, promoviendo un razonamiento algebraico por medio de situaciones de variación, formalizando el uso de ecuaciones en la introducción de la noción de función.

PRIMER MOMENTO

Situación: Carolina, aunque considera la posibilidad de abortar, en ocasiones piensa en tener su bebé a pesar de las dificultades que esto le genere, una de sus preocupaciones es perder el año escolar debido a las fallas, aunque en el colegio la dejarían presentar trabajos. Carolina desea saber ¿En qué semana o día probablemente nacerá el bebé? Y si ésta coincide con el calendario escolar. ¿Cómo hallar la probable fecha de parto de Carolina?

Inicialmente se presenta una lectura acerca del embarazo de una mujer y el día probable del parto. Se utilizan la fórmula de Naegele y la de Pinard, identificando cuáles datos se tienen en cuenta para aplicarlas. Una vez hallada la fecha probable del parto de Carolina, se hace una comparación de ésta fecha con el calendario académico y se da respuesta a la situación.

SEGUNDO MOMENTO

Situación: Carolina mantiene una conversación con varias amigas que conoció en el curso profiláctico, ella les comenta la forma en la cual ella calculó su fecha probable de parto para que la apliquen según cada caso y determinen el día probable de nacimiento de cada bebé.

En la segunda página del taller, se desarrolla de manera individual, en el se presenta una tabla con los datos del último día de la menstruación de las 7 mamitas adolescentes, donde el estudiante debe completar las columnas acerca del día, mes y año probable de parto, al final debe explicar por cada columna cómo obtuvo esos resultados y utilizar una letra para nombrar los datos encontrados. (*Utilizando la regla de Naegele*).

TALLER 2-A1

Objetivo General: Generar la identificación de variables dependientes e independientes, patrones y regularidades en un proceso de generalización de fenómenos de variación. Identificación de variables dependientes e independientes.

PRIMER MOMENTO

Situación: Carolina quiere organizar la información del desarrollo de los embriones en un folleto para que todas las adolecentes del colegio que están embarazadas comprendan cómo es el desarrollo y crecimiento del bebé.

En el taller 2-A1 se pueden identificar diferentes aspectos sobre el desarrollo de un embrión, el cual inicia con una célula dividiéndose para originar nuevas células que darán inicio a la creación de tejidos y órganos del bebé a medida que va creciendo dentro del vientre de la madre. El docente hace énfasis en que después de fertilizado el óvulo, se forma una célula llamada embrión, la cual se divide constantemente en dos cada 12 horas, dando espacio para que determinen cómo está incrementando el número de células en cada división.

A partir de las interpretaciones que los estudiantes hacen de la situación se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Cómo puedes ayudar a Carolina para organizar la información en una tabla de datos?
- ¿Cuántas células desarrolla el embrión al transcurrir 24 horas?
- ¿Cuántas células desarrolla el embrión al pasar 3 días, 15 días, 65 días, n días, 3 meses, 5 meses?
- ¿Cómo obtuviste estos resultados?

Estas preguntas se plantean con el objetivo que el estudiante reconozca que el número de células depende del tiempo transcurrido.

SEGUNDO MOMENTO

Una vez el estudiante interpreta la situación debe completar la tabla en donde se pone en relación tiempo (horas) Vs número de células y responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas células aumentaron al cabo de 12 horas?
- ¿Cuántas células aumentaron entre 12 y 24 horas?
- Al considerar periodos de 12 horas, las células aumentan en la misma proporción?

Estas preguntas son base para interpretar la información de la tabla, lo que le permitirá reconocer relaciones de dependencia y regularidades frente al aumento de las células cada 12 horas.

TALLER 3-A1

Objetivo General: Promover la construcción de registros de representación (lenguaje natural, representación tabular, plano cartesiano, representación simbólica algebraica) respecto a la situación.

PRIMER MOMENTO

Situación: Carolina ya conoce como es el crecimiento del embrión y quiere complementar la información de su folleto presentando dibujos, diagramas, símbolos que le permitan dar a conocer de manera clara este comportamiento.

¿De qué otra manera Carolina podría mostrar la información a los interesados?

Se entrega un octavo de cartulina con el propósito de realizar la representación del incremento de células del embrión al transcurrir el tiempo, utilizando esquemas, dibujos, símbolos, etc. En este momento los estudiantes pueden utilizar la tabla realizada en la actividad anterior. El docente puede cuestionar sobre:

- ¿Qué información debe ser representada?
- ¿Cómo la representaríamos para que cualquier persona la comprenda?
- ¿Existiría otra forma de representarla?

Después de que cada estudiante tiene una representación que modela la situación anterior, se le hace entrega del taller 3-A1, en el cual se muestra tres tipos de representaciones, donde el estudiante debe identificar las características de cada una para que posteriormente decida cuál es la que más se ajusta a la situación.
Dicho trabajo se dirige hacia la reflexión sobre las representaciones, pues su interpretación permite evidenciar el comportamiento del aumento de células que se da como relación “uno a muchos”, donde la razón de crecimiento es “el doble de la cantidad anterior”, identificándolo a partir de los datos de la tabla y el aumento de células, evidenciado en cada una de las representaciones.

SEGUNDO MOMENTO

Situación: Carolina quiere completar su blog, mostrando lo que aprendió utilizando gráficas y tablas, pero le surge una pregunta ¿habrá una ecuación que permita hallar el crecimiento de cualquier bebé?

Se presenta la situación centrando la mirada en el proceso de crecimiento de las células del embrión durante los primeros meses, dando inicio a la generalización por parte del estudiante.

A partir de la exploración que está haciendo el estudiante, se propone una tabla para que se registre la información del crecimiento de las células en el tiempo transcurrido, lo que le permite identificar relaciones entre el tiempo (variable independiente) y la cantidad de células (variable dependiente).

Con el objetivo de involucrar al estudiante en un proceso de generalización se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Qué operación matemática permite expresar el producto repetido de una misma cantidad de manera más sencilla?
- ¿Qué expresión matemática indica la cantidad de células que hay cada doce horas?

Desarrollando la totalidad de la tabla propuesta, el docente propone formalizar la expresión de una potencia como 2^n donde n representa el número veces que se repite el número que se multiplica, en este caso el número 2. Se cuestiona a los estudiantes acerca de:

- ¿Qué relación hay entre los exponentes y el tiempo?
- ¿Cómo a partir de los datos del tiempo se pueden obtener los exponentes?

Se espera que el estudiante empiece a identificar el comportamiento de cada una de las variables, buscando que la generalización en función del tiempo sea la cantidad de células y obtengan la expresión $2^{\frac{t}{12}}$, donde t es el tiempo (medida en horas).

TERCER MOMENTO

Situación: Se tiene la función $f(t) = 2^{\frac{t}{12}}$, grafícala en un plano cartesiano para que Carolina lo pueda publicar en su folleto.

Se presenta la situación a los estudiantes, indicando que al tener la función que modela la situación $f(t) = 2^{\frac{t}{12}}$, se deben registrar los datos obtenidos a partir de la relación en un plano cartesiano. Se deben relacionar los datos obtenidos en la tabla con parejas ordenadas que representan puntos en el plano cartesiano. Luego de obtener la gráfica se pueden realizar las siguientes preguntas:

- ¿A partir de la gráfica se puede calcular la cantidad de células en los siguientes tiempos 6 horas, 18 horas, 42 horas?, ¿por qué?
- ¿Qué necesito conocer para obtener la cantidad de células?
- ¿Qué está aumentando al transcurrir el tiempo?
- ¿Puedo obtener la cantidad de células en determinado tiempo? ¿cómo?

TALLER 4-A1

Objetivo General: Generar la formulación de modelos matemáticos y establecer las características de la función cuadrática, su análisis e interpretación a partir de la situación propuesta.

PRIMER MOMENTO

Situación: Carolina ya tiene varios meses de embarazo y en uno de sus controles se identificó que el bebé no se está desarrollando plenamente. Por ello Carolina investiga como hacen los doctores para saber cuánto mide el bebé y si este crecimiento es normal, ¿Puedes ayudar a Carolina a estimar la talla del bebé, durante los siete meses restantes del embarazo?

Se presenta en el taller 4-A1, y se contextualiza al estudiante frente a cómo crece un bebé en el vientre de la madre, generando una explicación de la regla de Haese, la cual permite encontrar la talla a medida que transcurren las semanas de gestación.

- ¿Para qué sirve la regla de Haese?
- ¿Para qué tiempo se cumple la regla de Haese?
- ¿Por qué número se multiplica el mes de gestación para obtener la talla del feto?
- ¿La talla del bebé, se da en milímetros, centímetros o metros?

Posteriormente se aclara que la talla del bebé se determina desde el tercer mes de embarazo, pues antes de este mes se encuentra en su estado embrionario y aún no se considera feto y por ende no se puede determinar la talla.

- ¿Cómo aumenta la talla con relación al mes de gestación?
- Si expresamos los meses con la letra x, ¿Cómo se puede expresar las semanas y la talla del feto?

A partir de estas relaciones, el estudiante puede reconocer como está variando la talla de acuerdo a los meses, encontrando regularidades. Se invita al estudiante a expresar las semanas en términos de meses lunares, para que haga conversiones, haciendo uso de la resolución de ecuaciones.

- ¿Cómo se expresan las semanas en términos de meses?
- Si x representa los meses, puedo decir que $4x$ representan las semanas, dado que cada cuatro semanas se cumple un mes. ¿Cuántos meses equivalen a 17 semanas?

Con ayuda de la tabla, se pide al estudiante que establezca una función que modele la talla del feto en términos de meses y si es posible en términos de semanas.
Una vez encontradas las regularidades en la tabla, se le pide al estudiante que grafique en el plano cartesiano la relación semanas-talla y al mismo tiempo, relacionar los datos del mes lunar. Esta gráfica es un elemento que permite llevar al estudiante a hacer una comparación entre los datos, identificando el dominio (eje x), el codominio (eje y) y el rango (talla del bebé).

- ¿Qué relación hay entre el mes de gestación y las semanas?
- ¿Cómo está aumentando la talla por semanas?
- ¿Cuántos meses lunares son 21 semanas?

Al comparar las semanas y meses en la gráfica, se puede evidenciar la continuidad en la función, estableciendo el crecimiento en intervalos de meses. En este taller se orienta el trabajo a comprender la relación meses-talla que corresponde a la función cuadrática. Se puede orientar el proceso haciendo las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles valores toma y?
- ¿Cuáles valores toma el eje x?
- ¿Cuáles son las tallas del bebé en cada mes?
- ¿Cuál es la talla del bebé a la semana 13, 15 y 21?

Para generalizar se cuestiona sobre:

- ¿Cómo cambia el crecimiento del feto cada mes lunar?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Qué datos se van a relacionar?
- ¿Cómo son las escalas de los ejes?

Retomando aspectos como los datos de la tabla, la gráfica y la expresión matemática de la regla de Haese de 3 a 6 meses, se le pide al estudiante que establezca una regularidad que le permita encontrar una expresión simbólica para conocer la talla del bebé con relación a los meses lunares. Se pueden plantear las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué relación existe entre el mes y la talla?
- ¿Cómo se puede expresar la regla de Haese, en una función en términos de meses?
- ¿Cuál sería el dominio de la función?
- ¿Cómo identificas el dominio?
- ¿Cuál es el rango? ¿Cómo simbolizas el rango?

Para que el estudiante comprenda el comportamiento de la gráfica de una función cuadrática se hace una explicación de las características y cómo se interpretan los datos de esta en el plano. Se trabaja utilizando la función $f(x) = x^2$, para ello se presenta en la tabla los valores en *y* cuando *x* toma valores entre -4 y 4. Se presentan características de la gráfica de la función cuadrática denominada parábola. Se identifica el sentido de la parábola según el valor del coeficiente de x^2.

Luego de estos interrogantes se hace relación con lo hecho en el taller anterior, identificando que en los tres primeros meses, el crecimiento del embrión es de manera exponencial y desde los tres meses en adelante es de manera cuadrática. En esta parte se quiere llegar a que la función de la talla del bebé con respecto al mes se simboliza como $f(x) = x^2$ y por consiguiente se determina la expresión simbólica que permite encontrar la talla a partir de los meses lunares.

3.3.2 Actividad 2. Jugando con parámetros

TALLER 1-A2

Objetivo General: Encontrar una expresión algebraica de la forma $f(x) = a\,(x-h)^2 + k$ que describa una familia de funciones cuadráticas dada.

PRIMER MOMENTO

Situación: Utiliza el emulador de la calculadora gráfica TI 92 para modificar el valor de cada parámetro y observar los cambios que se producen en la gráfica al efectuar dicha variación en la expresión algebraica.

Se mostrará al estudiante que los cambios observados en cada familia están estrechamente ligados a la variación de los parámetros a, h *y* c en una ecuación cuadrática de la forma $y = a(x-h)^2 + k$. Para tal fin, el estudiante desarrollará tres experiencias utilizando el emulador de la calculadora TI 92, en las cuales manteniendo dos de los parámetros fijos y variando el otro, es posible, observar el comportamiento de la gráfica y concluir el efecto que causa la modificación de dicho parámetro en la ecuación cuadrática inicial.

SEGUNDO MOMENTO

Situación: Observa cuidadosamente cada familia de gráficas y establece las características que describen cada familia de curvas.

Tomando como referencia las gráficas de varias familias de curvas que representa funciones cuadráticas, el estudiante debe observar cuidadosamente y caracterizar cada familia, teniendo en cuenta los cambios que se observan en aspectos como: desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal, contracción o dilatación, concavidad (hacia arriba, hacia abajo).

TALLER 2-A2

Objetivo General: Encontrar la expresión algebraica de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ correspondiente a la función cuadrática cuya gráfica coincide con la gráfica preestablecida por el programa *par* (a, h, k)*)*, identificando el efecto que causa en la gráfica, la modificación de cada uno de los parámetros a, h, k en la expresión algebraica.

Programa *par* (a, h, k)

Situación: Encontrar la expresión algebraica de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ correspondiente a la función cuadrática cuya gráfica coincide con la gráfica preestablecida por el programa *par* (a, h, k) identificando el efecto que causa en la gráfica, la modificación de cada uno de los parámetros a, h, k en la expresión algebraica.

El docente debe escribir en el emulador de la calculadora TI 92 el programa ***par*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ (ver anexo A). Este programa proporciona la gráfica de una función cuadrática pero no la expresión algebraica correspondiente (la función cuadrática la elige el docente previamente).

Al ejecutar el programa ***par*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ la calculadora dibuja en el editor gráfico la gráfica escogida por el docente y permite modificar el valor de los parámetros a, h, k en la expresión general $f(x) = a(x-h)^2 + k$ utilizando la sintaxis ***par*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ dibujando la gráfica correspondiente a los parámetros dados, por ejemplo:

Si el estudiante introduce ***par* (1, 0, 4)**, en este caso $a = 1, h = 0, k = 4$, la calculadora graficará la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4$ simultáneamente con la función que el profesor ha escogido.

El estudiante ejecutará el programa cuantas veces lo necesite hasta encontrar la expresión algebraica de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ cuya gráfica coincida con la gráfica de la función cuadrática preestablecida por el profesor.

Se sugiere pedir a los estudiantes una descripción verbal de las gráficas que visualiza en la calculadora, insinuando observaciones como: en que cuadrante se encuentra la gráfica, si el vértice coincide con el origen, si la parábola se mueve a la derecha o a la izquierda.

En este momento el profesor puede pedir al estudiante escribir la expresión de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ obtenida y especificar el valor de cada uno de los parámetros a, h, k, además, que describa el efecto que causa cada parámetro sobre la gráfica base $f(x) = x^2$ cuestionando si la gráfica se desplaza vertical u horizontalmente, se dilata, se contrae, se refleja.

TALLER 3-A2

Objetivo General: Observar, indagar y concluir que las gráficas con forma aparente de parábola no necesariamente corresponden a funciones cuadráticas.

¿La gráfica dada corresponde a una función cuadrática?

Situación: Examine utilizando el programa *gra ( )* si la gráfica dada corresponde a una función cuadrática.

El propósito de esta actividad es brindar al estudiante la oportunidad de observar, indagar y concluir que las gráficas con forma aparente de parábola no necesariamente corresponden a funciones cuadráticas; para tales efectos se utilizarán como herramientas algunas ventanas de graficación de la calculadora y su correspondiente *zoom*.

Este taller utiliza el programa ***programa gra ( )*** (ver anexo B), en el emulador de la calculadora TI 92, hace uso del editor de ecuaciones “ $y =$” y la ventana de graficación *graph*. El programa **gra()** proporciona la gráfica de un trozo la función $\sin(x)+2$ pero no la expresión algebraica correspondiente. (ver anexo B)

Cuando el estudiante ejecuta el programa este proporcionará automáticamente la gráfica predeterminada con el *zoom* estándar. Se pide al estudiante graficar en la misma ventana funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ utilizando el editor de ecuaciones “ $y =$“ para introducir expresiones algebraicas modificando los valores de a, h y k hasta encontrar la gráfica que mejor coincida con la gráfica dada.

Estando en la ventana de graficación el estudiante utilizará la opción *zoom box* para observar con más detalle las dos gráficas. Las dos gráficas coincidirán en algunos puntos pero no en todos, el docente debe cuestionar este hecho y sugerir que se realicen nuevos intentos para optimizar la situación. Por último el profesor debe pedir a los estudiantes que grafiquen la función $y=\sin(x)+2$ y observen si la grafica dada inicialmente coincide o no con la función anterior, de esta manera los estudiantes concluirán si la gráfica dada inicialmente corresponde o no a una función cuadrática.

TALLER 4-A2

Objetivo General: Construir el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo y una recta dada.

PRIMER MOMENTO

Situación: Aprender a utilizar algunas herramientas básicas del programa Cabri para definir los elementos que permitirán hacer una construcción geométrica.

En el taller se darán indicaciones específicas para aprender a utilizar las herramientas básicas del programa Cabri, generando elementos geométricos que permitirán la representación de construcciones geométricas. Por ejemplo:

¿Cómo trazar una recta?
¿Cómo trazar un segmento?
¿Cómo dibujar un punto y etiquetarlo?
¿Cómo crear un punto sobre un objeto?
¿Cómo encontrar un punto de intersección?
¿Cómo trazar la mediatriz de un segmento?
¿Cómo trazar una recta perpendicular a un segmento?

SEGUNDO MOMENTO

Situación: Realizar una construcción geométrica utilizando el programa Cabri para encontrar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo y una recta dada.

Después que el estudiante practique y explore otras herramientas del programa Cabri, se realizará, en una nueva ventana, la construcción del lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y una recta dada.

3.3.3 Actividad 3. Uso de herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación

TALLER 1-A3

Objetivo: Identificar el efecto que causa en la gráfica, la modificación de cada uno de los parámetros a, b, c en la expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Al comenzar el taller el estudiante encontrará la siguiente situación:

Situación: Un volador es lanzado verticalmente hacia arriba, al alcanzar el punto máximo de su trayectoria explota en el aire. Si una expresión para la altura del volador es $h(x) = -5x^2 + 39x + 2$

Se cuestiona al estudiante sobre lo siguiente:

a) ¿Cuál es la altura máxima de la trayectoria del volador?_______________
b) ¿Después de cuánto tiempo explota el volador? ______________________
c) ¿Después de cuánto tiempo el volador cae y toca el piso? ______________

Para tal fin el estudiante ejecutará el simulador ***Modellus4,*** abrirá una simulación preestablecida llamada ***simulaciónvolador***. Siguiendo las instrucciones: *Modellus4,* selecciona la carpeta *Modellus files*, *examples*, *simulaciónvolador, Abrir* Inicialmente el estudiante corroborará las respuestas que dio a las preguntas anteriores. A continuación podrá variar los parámetros a, b, c para observar las gráficas y determinar si puede concluir que efecto causa tal variación de parámetros.

TALLER 2-A3

Objetivo: Encestar el balón de basket y encontrar la expresión algebraica que describe un lanzamiento perfecto.

Situación: Modifica los parámetros vx y vy para la velocidad con respecto al eje x y la velocidad con respecto al eje y, respectivamente, para encestar el balón.

El estudiante ejecutará el simulador siguiendo siguientes indicaciones: ejecuta el simulador *Modellus4,* selecciona la carpeta *Modellus files, examples, basket*, *Abrir.*

Luego de encestar el balón, el estudiante debe perfeccionar su lanzamiento logrando que el balón caiga justo en el centro de la cesta en el tiempo establecido.

Después de perfeccionar el lanzamiento el estudiante debe realizar una regresión cuadrática para obtener la expresión algebraica del lanzamiento perfecto, utilizando el programa Excel.

TALLER 3-A3

Objetivo General: Encontrar una expresión algebraica de la forma $f(x)=a\,(x-h)^2+k$ que describa una familia de funciones cuadráticas dada.

PRIMER MOMENTO

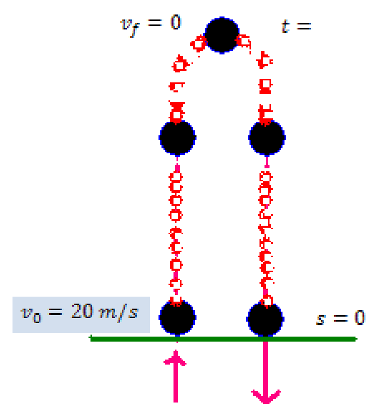
Se realiza una breve ambientación con respecto a la ley gravitacional, haciendo un reconocimiento de las leyes que rigen el movimiento uniformemente acelerado identificando las variables dependientes, independientes y las constantes en cada ecuación.

SEGUNDO MOMENTO

Situación: Un balón de fútbol es pateado hacia arriba, con una velocidad inicial de 20 m/s.

Escogiendo la dirección hacia arriba como positiva, en el punto más alto, la velocidad final de la pelota será igual a cero.

VALORES DADOS	
Velocidad inicial	$v_0 = 20\ m/s$
Velocidad final	$v_f = 0$
Gravedad	$g = -9{,}8\ m/s^2$



Con respecto a la situación se plantean las siguientes preguntas:

a) Calcule el tiempo requerido para alcanzar su altura máxima
b) Encuentre la altura máxima
c) Determine su posición y velocidad después de 1,5 s

4. Conclusiones

- Al realizar un estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función, se hace evidente el largo recorrido histórico por el que atravesó dicho concepto, así como las diferentes mutaciones que se dieron dependiendo de los autores, las circunstancias y necesidades de cada época y las herramientas de las que se disponía. Por lo anterior, es claro que es bastante ambicioso pretender que un estudiante de básica secundaria se apropie del concepto de función y lo aprehenda a profundidad en la etapa escolar, por lo cual resulta conveniente utilizar instrumentos de mediación que articulen entre los diferentes sistemas de representación, permitiendo la modelación de situaciones de la vida real relacionadas con el concepto, dando un sentido más tangible para el estudiante.

- El uso de diferentes representaciones de un concepto favorece el aprendizaje de este; cada registro enfatiza en diferentes características del concepto, si a un concepto matemático solo se accede por medio de una representación se tendrá una imagen muy limitada de este, entre más representaciones se articulen, el concepto generado será más rico e incluyente.

- Las nuevas tecnologías favorecen la enseñanza de algunos conceptos, ya que permiten reducir el tiempo que se dedica al desarrollo destrezas tradicionales, para dedicarse más profundamente al avance de conceptos e ideas sobre cómo resolver problemas; los beneficios que provoquen las herramientas tecnológicas dependerán del uso que se haga de ellas, por lo que es preciso su integración en un proyecto docente y en el diseño de la metodología aplicada. En la actualidad se tienen a la mano herramientas tecnológicas computacionales como *Microsoft Excel, y Cabri*, además del servicio de internet que permite la descarga de software gratuitos como el *Emulador TI 92* y el *simulador Modellus 4,* entre otros, provistos de un sistema de álgebra simbólica ejecutable, permitiendo observar, explorar, conjeturar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio, constituyendo un poderoso recurso en el contexto escolar.

Anexo A. Programa par (a, h, k)

```
:par(aa,hh,kk)
:Prgm
:aa→a
:hh→h
:kk→k
:ClrGraph
:2→a1
:2.5→h1
:3.5→k1
:ZoomStd
:Graph a1*(x-h1)^2+k1,x
:Graph a*(x-h)^2+k,x
:Pause
:If a=a1 and h=h1 and k=k1 then
:ClrIO
:Disp “Felicitaciones, ha encontrado la función”
:Else
:ClrIO
:Disp “Lo siento, aun no ha encontrado la función”
:EndIf
:EndPrgm
```

Anexo B. Programa gra ( )

```
:gra()
:Prgm
:Local x,y
:ClrGraph
:-.5→x1
:3.5→x2
:For x,x1,x2,.07
:Sin(x)+2→y
:PtOn x,y
:EndFor
:EndPrg
```

Anexo C. Libro de actividades para el estudiante

Este anexo se presenta como una cartilla aparte, por su extensión y facilidad al manipularla.

Anexo D. Emulador TI 92 y Simulador Modellus 4

Los software utilizados en la propuesta se proporcionan en un Cd, para ser ejecutados directamente.

Bibliografía

1. **Trejo, Cesar A.** *El concepto de número.* Washington D.C : Unión Panamericana, 1968.

2. **Azcárate, Carmen y Deulofeu, Jordi.** *Funciones y gráficas.* s.l. : Síntesis, 1996.

3. **MEN.** *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales.* Bogotá : Enlace editores Ltda, 2004.

4. **Sánchez, Carlos y Valdés, Concepción.** *Las funciones un paseo por su historia.* Madrid : Nivola, 2007.

5. **Janvier, C.** *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations, studies and teaching experiments.* Londres : Lea.Publ, 1978.

6. **Kruglak, Haym y Moore, Johnt.** *Matemática Aplicadas a la ciencia y tecnología.* México : Mac Graw Hill, 1981.

7. **MEN Ministerio de Educación Nacional.** *Estándares Básicos de competencias en matemáticas.* 2003.

8. *Elementos para construir una didáctica de la función.* **García, Gloria, y otros.** 1995, Cuadernos de investigación.

9. **Barnett, Raymond A. y Uribe Calad, Julio A.** *Algebra y geometría 2.* Bogotá : Mc Graw Hill, 1988.

10. **Lehmann, Charles H.** *Geometría analítica.* México : Limusa, 1990.

11. **Boyer, Carl B.** *Historia de la matemática.* s.l. : Alianza Universidad, 1992.

12. **Kline, Morris.** *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días.* Madrid : Alianza, 1994.

13. **Tippens, Paul E.** *Fisica I.* México : Mc Graw Hill, 1992.

14. Interactive modelling with Mathematics. [En línea] Universidad Nova de Lisboa. http:// modellus .fct.unl.pt.