

- 4 -Velocidad irreversible de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la disipación viscosa. Este término siempre es positivo.

Observando las ecuaciones (3.29) y (3.30) se nota que sólo los términos $p(\text{div} \cdot \mathbf{v})$ y $(\boldsymbol{\tau} : \text{div} \mathbf{v})$ son comunes a ambas ecuaciones, y que además intervienen con signos opuestos. Estos términos describen la interconversión de energía mecánica y calorífica. El término $p(\text{div} \cdot \mathbf{v})$ puede ser positivo o negativo, según que el fluido se expanda o se comprima; por lo tanto, representa una forma reversible de intercambio. En cambio el término $(-\boldsymbol{\tau} : \text{div} \mathbf{v})$, es siempre positivo ya que puede expresarse como una suma de términos elevados al cuadrado y representa por consiguiente una forma irreversible de degradación de energía mecánica a energía calorífica.

También la ecuación (3.28) puede modificarse si la fuerza externa gravitacional se expresa en función del gradiente de una función escalar $\Phi = -\text{div} \mathbf{Q}$:

$$\int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) = - \int (\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{Q}) = - \int \frac{D\Phi}{Dt} + \int \frac{\delta\Phi}{\delta t}$$

Si Φ es independiente del tiempo el último término desaparece y la ecuación (3.28) se transforma en:

$$\int \frac{D}{Dt} (U + \Phi + \frac{1}{2}v^2) = - (\text{div} \cdot \mathbf{q}) - (\text{div} \cdot p\mathbf{v}) - (\text{div} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \quad (3.31)$$

Esta es una ecuación de variación para $E = U + \Phi + \frac{1}{2}v^2$ que denominamos energía total. Para problemas terrestres en los que no intervengan más fuerzas que la gravedad, Φ es independiente del tiempo y la ecuación (3.31) es válida.

Para la mayor parte de las aplicaciones es conveniente expresar la ecuación de la energía calorífica (3.30) en función de la temperatura y del calor específico del fluido en vez de la energía interna.

Teniendo en cuenta que U puede considerarse una función de T y V (volumen específico),

$$dU = \left[\frac{\delta U}{\delta V} \right]_T dV + \left[\frac{\delta U}{\delta T} \right]_V dT \quad (3.31a)$$

pero $dU = TdS - pdV$, entonces :

$$dS = \frac{(dU + pdV)}{T} = \frac{1}{T} \left[\left[\frac{\delta U}{\delta V} \right]_T dV + \left[\frac{\delta U}{\delta T} \right]_V dT + pdV \right]$$

$$\left[\frac{\delta U}{\delta T} \right]_V = C_v, \text{ entonces :}$$

$$dS = \frac{1}{T} C_v dT + \frac{1}{T} \left[\left[\frac{\delta U}{\delta V} \right]_T dV + p dV \right] \quad (3.32)$$

de otra parte $S = S(V, T)$, entonces :

$$dS = \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_V dT + \left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T dV \quad (3.33)$$

Comparando (3.32) y (3.33) término a término:

$$\frac{C_v}{T} dT = \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_V dT$$

y: de donde $C_v = \left[\frac{\delta U}{\delta T} \right]_V = T \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_V$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta T \delta V} = T \left[\frac{\delta^2 S}{\delta T \delta V} \right] \quad (3.32a)$$

Por otra parte:

$$\left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T dV = \frac{1}{T} \left[\left[\frac{\delta U}{\delta V} \right]_T + p \right] dV$$

Entonces :

$$\left[\frac{\delta U}{\delta V} \right]_T = T \left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T - p \quad (3.33a)$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta V \delta T} = T \left[\frac{\delta^2 S}{\delta V \delta T} \right] + \left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T - \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_V \quad (3.33b)$$

De (3.32a) y (3.33b) se concluye que $(\delta S / \delta V)_T = (\delta p) / (\delta T)_V$.

Reemplazando en (3.33a) se obtiene de (3.31a):

$$dU = \left[-p + T \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_V \right] dV + C_v dT$$

Entonces el producto de \int por la derivada substancial de U es:

$$\int \frac{DU}{Dt} = \left[-p + T \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_v \right] \int \frac{DV}{Dt} + \int C_v \frac{DT}{Dt} \quad (3.34)$$

Ahora...

$$\int V = 1; \int dV + V d\int = 0; \text{ entonces } dV/V = -d\int/\int :$$

$$\int \frac{DV}{Dt} = - \frac{1}{\int} \frac{D\int}{Dt} = (\text{div.} \mathbf{v}) \quad (3.35)$$

pues la ecuación de continuidad dice:

$$\frac{\delta \int}{\delta t} + (\text{div.} \int \mathbf{v}) = \frac{\delta \int}{\delta t} + \int (\text{div.} \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \text{div} \int) = 0$$

o sea :

$$(\text{div.} \mathbf{v}) = - \frac{1}{\int} \frac{\delta \int}{\delta t} - \frac{1}{\int} \mathbf{v} \cdot \text{div} \int = - \frac{1}{\int} \frac{D\int}{Dt}$$

Reemplazando (3.35) en (3.34) y la expresión que resulta en la ecuación de energía calorífica (3.30) obtenemos (3.36)

$$\int C_v \frac{DT}{Dt} = -(\text{div.} \mathbf{q}) - T \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_v (\text{div.} \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \text{div} \mathbf{v}) \quad (3.36)$$

que es la ecuación de energía en función de la temperatura T del fluido. Esta ecuación es tan general como (3.30) pero es más útil para calcular los perfiles de temperatura.

SIMPLIFICACIONES PRACTICAS.

i) Introduciendo la ley de Fourier para q, y la de Newton para τ, suponiendo comportamiento newtoniano y k constante:

$$\int C_v \frac{DT}{Dt} = k \text{div}^2 T - T \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_v (\text{div.} \mathbf{v}) + \Phi_\mu \quad (3.37)$$

Aquí Φ_μ es la función de disipación viscosa, ecuación (3.7), y corresponde al término de manantial.

De esta ecuación se deduce que la temperatura de un elemento móvil de fluido varía debido a conducción de calor, efectos de expansión y calentamiento viscoso, manantial químico, nuclear, eléctrico, etc.

ii) Para gas ideal (δp/δT)_v = (p/T) :

$$\int C_v \frac{DT}{Dt} = k \text{div}^2 T - p (\text{div.} \mathbf{v}) + \Phi_H \quad (3.38)$$

Φ_H es la intensidad de manatial calorífico.

iii) Fluido a presión constante.

$$dU = \left[-p + T \left[\frac{\delta p}{\delta T} \right]_v \right] dV + C_v dT$$

A presión constante $C_v = C_p$ por tanto (tal como se obtuvo (3.38))

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \text{div}^2 T + \Phi_H \quad (3.39)$$

iv) Fluidos incompresibles (ρ constante), $C_p = C_v$, $\text{div} \cdot v = 0$.

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \text{div}^2 T + \Phi_H \quad (3.40)$$

Las ecuaciones (3.39) y (3.40) son iguales pero describen situaciones físicas totalmente diferentes.

v) Para sólidos, la densidad puede considerarse constante y $v=0$

$$\rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \text{div}^2 T + \Phi_H \quad (3.41)$$

Estas ecuaciones se toman como punto de partida para la mayor parte de los tratamientos de transmisión de calor.

ECUACIONES DE CONTINUIDAD PARA UNA MEZCLA BINARIA.

Apliquemos la ley de la conservación de la materia de la especie A a un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ fijo en el espacio, a través del cual fluye una mezcla binaria de A y B. Dentro de este elemento se puede producir A por reacción química con una velocidad r_A (masa/tiempo*volumen). Las distintas contribuciones al balance de materia son:

Velocidad de variación de la masa de A con el tiempo en el elemento de volumen:

$$\frac{\delta \int_A}{\delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Entrada de A a través de la cara situada en x:

$$n_{Ax} \Big|_x \Delta y \Delta z$$

Salida de A a través de la cara situada en $x + \Delta x$:

$$n_{Ax} \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$$

Velocidad de producción de A por reacción química homogénea:

$$r_A \Delta x \Delta y \Delta z$$

También existen términos de entrada y salida en las direcciones y e z. Escribiendo el balance completo de materia y dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y haciendo tender a cero el elemento de volumen, se obtiene:

$$\frac{\delta f}{\delta t} + \left[\frac{\delta n_{Ax}}{\delta x} + \frac{\delta n_{Ay}}{\delta y} + \frac{\delta n_{Az}}{\delta z} \right] = r_A \quad (3.42)$$

Esta es la ecuación de continuidad para el componente A de una mezcla binaria, que describe la variación de la concentración de A con respecto al tiempo para un punto fijo en el espacio. Esta variación resulta del movimiento de A y de las reacciones químicas que dan lugar a A. Las magnitudes n_{Ax} , n_{Ay} , n_{Az} son los componentes rectangulares del vector densidad de flujo de materia $n_A = \{v_A$, ya definido. En notación vectorial:

$$\frac{\delta f_A}{\delta t} + (\text{div. } n_A) = r_A \quad (3.43a)$$

Para el componente B:

$$\frac{\delta f_B}{\delta t} + (\text{div. } n_B) = r_B \quad (3.43b)$$

La suma de estas dos ecuaciones conduce a:

$$\frac{\delta f}{\delta t} + (\text{div. } \{v) = \theta$$

que es la ecuación de continuidad para la mezcla, idéntica a la que se obtuvo para un fluido puro. Para obtenerla aplicamos $n_A + n_B = \{v$ así como la ley de la conservación de la materia expresada como $r_A + r_B = \theta$.

Un desarrollo similar puede hacerse en función de unidades molares:

$$\frac{\delta c_A}{\delta t} + \text{div. } N_A = R_A ; \quad \frac{\delta c_B}{\delta t} + \text{div. } N_B = R_B \quad (3.44)$$

$$\frac{\delta c}{\delta t} + (\text{div } cv^*) = (R_A + R_B)$$

donde $N_A + N_B = cv^*$. Sin embargo, como en general el número de moles no se conserva, no podemos tomar $R_A + R_B = 0$.

Las ecuaciones (3.43) y (3.44) pueden pasarse fácilmente a coordenadas esféricas o cilíndricas utilizando la expresión correspondiente para el operador div:

Coordenadas Cilíndricas:

$$\text{div } N_A = \left[\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r N_{Ar}) + \frac{1}{r} \frac{\delta N_{A\theta}}{\delta \theta} + \frac{\delta N_{Az}}{\delta z} \right] \quad (3.45)$$

Coordenadas Esféricas:

$$\text{div } N_A = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 N_{Ar}) + \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\delta}{\delta \theta} (N_A \text{ sen } \theta) + \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\delta N_{A\phi}}{\delta \phi} \right] \quad (3.46)$$

Esto es posible ya que una ecuación vectorial escrita en notación vectorial se aplica a todos los sistemas coordenados. O sea que una ecuación escrita en notación vectorial puede transformarse a cualquier sistema coordenado.

Para obtener los perfiles de concentración es necesario reemplazar la primera ley de Fick en cualquiera de las expresiones anteriores:

$$n_A = J_A + w_A(n_A + n_B) \quad (3.47)$$

$$N_A = J_A + x_A(N_A + N_B) \quad (3.48)$$

$$J_{Ax} = - \left(D_{AB} \frac{\delta w_A}{\delta x} \right) ; \quad J_{Ax} = - c D_{AB} \frac{\delta y_A}{\delta x}$$

Es conveniente antes de proseguir más adelante en cualquier problema, hacer las simplificaciones del caso y conocer la relación existente entre n_A y n_B o N_A y N_B respectivamente.

4. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE VARIACION.

4.1 CONDUCCION DE CALOR EN ESTADO ESTABLE-UNIDIMENSIONAL

Podemos examinar en primera instancia las aplicaciones de la ley de Fourier para conducción de calor, calculando el flujo de calor en algunos sistemas unidimensionales sencillos. Varias formas físicas diferentes pueden caer en la categoría de sistemas unidimensionales: los sistemas cilíndricos y esféricos son unidimensionales cuando la temperatura en el cuerpo es una función únicamente de la distancia radial y es independiente del ángulo azimutal o de la distancia axial.

En algunos problemas bidimensionales, el efecto de una segunda coordenada en el espacio puede ser tan pequeña que se justifique despreciarlo, y el problema de flujo de calor multidimensional puede aproximarse con un análisis unidimensional.

En estos casos, las ecuaciones diferenciales se simplifican y se obtiene una solución fácil como resultado de la simplificación.

LA PARED PLANA.

Para una placa de conductividad térmica constante y espesor b , (Fig.1.1.a) extendida al infinito en las otras dimensiones de tal manera que el flujo de calor en la región considerada es efectivamente unidimensional, es conveniente tratar el problema en el sistema de coordenadas rectangulares. Si no hay fuentes de calor dentro de la placa y el flujo de calor es estable y unidimensional, la ecuación (3.3) se convierte en $(\delta^2 T) / (\delta z^2)$, la cuál fácilmente se resuelve para dar: $T = C_1 z + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 pueden evaluarse a partir de las condiciones límite que nos indican las temperaturas de las superficies en $z=0$ y $z=b$. Aplicando estas condiciones se obtiene una expresión para la distribución de temperaturas en la placa:

$$\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = \frac{z}{b} \quad (4.1)$$

El flujo de calor a través de la placa se obtiene por la ley de Fourier de la conducción:

$$Q = -kS \frac{dT}{dz} = -kS \frac{T_2 - T_1}{b} = \frac{T_2 - T_1}{b/kS}$$

Es interesante resaltar la similitud entre esta ecuación y la que normalmente establece la ley de Ohm. El término b/kS es equivalente a la resistencia eléctrica y se denomina adecuadamente la resistencia térmica. Si la conductividad térmica varía con la temperatura de

acuerdo con alguna relación lineal $k = k_0(1 + aT)$, (ver fig.1.2), la ecuación resultante para el flujo de calor es:

$$Q = - \frac{k_0 S}{b} \left[(T_2 - T_1) + \frac{a}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right]$$

PARED CON CAPAS MÚLTIPLES.

La analogía con la ley de Ohm y el concepto de la resistencia térmica provee un medio de tratar el problema de flujo de calor a través de una placa hecha de materiales de diferentes espesores y propiedades termofísicas. Esta placa se representa esquemáticamente en la figura. 4.1. El tratamiento es el de resistencias en serie, tal que si T_5 y T_2 , las temperaturas de cada una de las superficies exteriores de la pared, las dimensiones físicas, y las propiedades térmicas de la misma son conocidas, el flujo de calor puede escribirse inmediatamente como:

$$Q = \frac{T_5 - T_2}{b_1/k_1S + b_2/k_2S + b_3/k_3S}$$

Si lo que conocemos es la temperatura del fluido adyacente a la pared y no las temperaturas de las superficies, deben incluirse las resistencias térmicas debidas al fluido:

$$Q = \frac{T_{r6} - T_{r1}}{1/h_{r6}S + b_1/k_1S + b_2/k_2S + b_3/k_3S + 1/h_{r1}S} \quad (4.2)$$

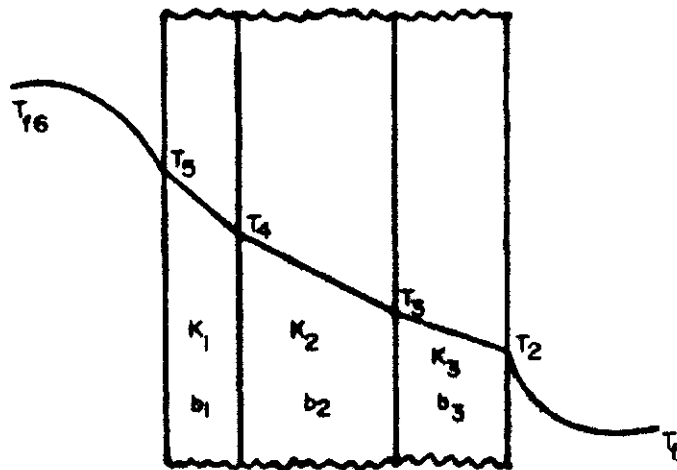


FIGURA 4.1.

Las temperaturas intermedias pueden determinarse por la inclusión de las resistencias entre una temperatura conocida y aquella a determinarse. Nótese que el flujo de calor debe ser el mismo a través de todas las secciones. → No hay acumulaciones.

La analogía eléctrica puede usarse para resolver problemas mas complejos que involucren tanto resistencias térmicas en serie como en paralelo. En la figura 4.2 se muestra un problema típico y su circuito eléctrico análogo. La ecuación de flujo de calor unidimensional para este tipo de problema puede escribirse como:

$$Q = \frac{\Delta T \text{ total}}{\text{Resistencia Equivalente}}$$

Conviene mencionar que en sistemas como el de la fig. 4.2 puede presentarse flujo de calor bidimensional si las conductividades térmicas de los materiales difieren en gran medida.

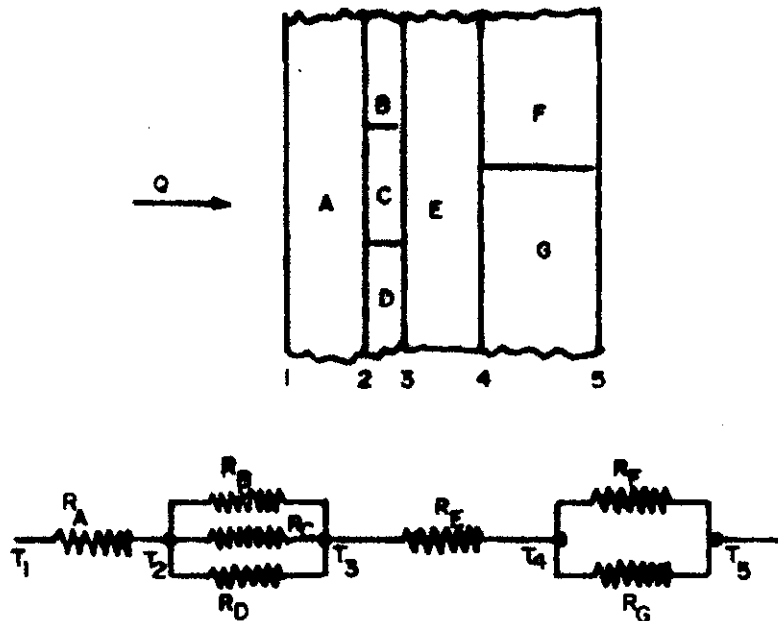


FIGURA 4.2. Pared compuesta con resistencias en serie y en paralelo y su analogía eléctrica.

SISTEMAS RADIALES. EL TUBO.

El tubo o cilindro hueco (fig. 4.3) se trata más convenientement usando el sistema de coordenadas cilindricas. El caso presente es el de estado estable, propiedades constantes, no hay manantiales térmicos y el gradiente de temperaturas es radial (o sea el tubo es muy largo).

La ecuación (3.3a) con $\text{div}^2 T$ como en (3.4) se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left[r \frac{\delta T}{\delta r} \right] = \frac{\delta^2 T}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta T}{\delta r} = 0$$

La solución de la cual es $T = C_1 \ln r + C_2$ y las condiciones límite son las que especifican las temperaturas T_1 y T_0 en los radios R_1 y R_0 a partir de las cuales se obtienen las constantes de integración C_1 y C_2 , permitiendo obtener la expresión para la distribución radial de temperatura en el tubo:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{\ln(r/R_0)}{\ln(R_1/R_0)} \quad (4.3)$$

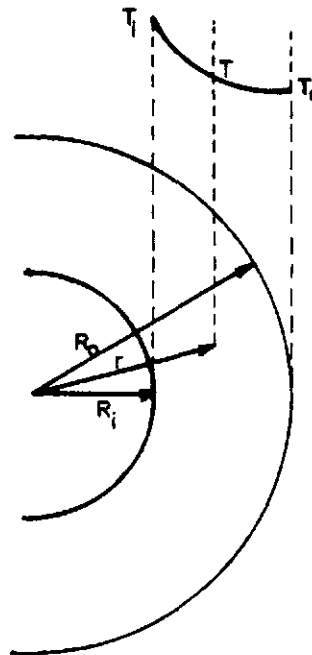


FIGURA 4.3.

El flujo de calor a través de la pared del tubo se determina a partir de la ley de Fourier. Sin embargo, el área normal al vector flujo de calor cambia con el radio:

$$Q = -kS(r) \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr}$$

donde L es la longitud axial del tubo. Diferenciando el perfil de temperatura y usando el resultado en la expresión para Q , obtenemos:

$$Q = \frac{2\pi k L (T_1 - T_0)}{\ln(R_0/R_1)} \quad (4.4)$$

Aquí la resistencia térmica es $(1/2\pi kL) \ln(R_0/R_1)$

EL TUBO COMPUESTO.

Asi como en la pared compuesta es posible tener tubos compuestos (figura 4.4). Físicamente puede corresponder a un tubo recubierto de diferentes tipos de aislante o a un intercambiador tubular. El tratamiento es el mismo de las resistencias en serie:

$$Q = \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{1}{2\pi k_1 L} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi k_2 L} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\pi k_3 L} \ln \frac{R_4}{R_3}}$$

para incluir resistencias debidas a efectos convectivos ocasionados por fluidos, en las superficies interior y exterior del tubo, es necesario incluir las areas barridas por el flujo:

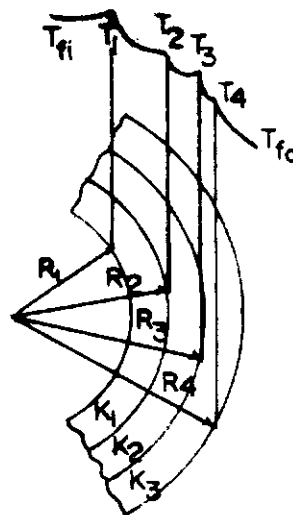


FIGURA 4.4

$$Q = \frac{(T_{fi} - T_{fo})}{\frac{1}{2\pi R_1 L h_i} + \frac{1}{2\pi k_1 L} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi k_2 L} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{2\pi k_3 L} \ln \frac{R_4}{R_3} + \frac{1}{2\pi R_4 L h_o}}$$

ECUACION (4.5)

hi y ho son coeficientes convectivos del fluido interno y externo respectivamente.

COEFICIENTES GLOBALES.

La ecuación (4.5) puede escribirse en la forma de un coeficiente por un área y una fuerza guía:

$$Q = U_i S_i (T_{fi} - T_{fo}) = U_o S_o (T_{fi} - T_{fo}) \tag{4.6}$$

donde S_1 y S_0 son, respectivamente, el área interior del conducto y el área exterior del aislamiento (o sea, $S_1 = 2\pi R_1 L$ y $S_0 = 2\pi R_4 L$) y U_1 y U_0 se denominan los coeficientes globales de transferencia de calor basados en las áreas interna y externa respectivamente. Se observa que aunque Q es constante para cualquier valor de r , la densidad de flujo de calor $q_r = Q/S$ no lo es pues S varía con la posición radial r .

Reorganizando (4.6):

$$\frac{1}{U_1} = \frac{S_1 (T_{f1} - T_{f0})}{Q}$$

$$\frac{1}{U_1} = \frac{1}{h_1} + \frac{R_1 \ln(R_2/R_1)}{k_1} + \frac{R_1 \ln(R_3/R_2)}{k_2} + \frac{R_1 \ln(R_4/R_3)}{k_3} + \frac{R_1}{R_4 h_0}$$

Ahora, si buscáramos el coeficiente global basado en el área externa S_0 , obtendríamos:

$$\frac{1}{U_0} = \frac{S_0 (T_{f1} - T_{f0})}{Q}$$

$$\frac{1}{U_0} = \frac{R_4}{R_1 h_1} + \frac{R_4 \ln(R_2/R_1)}{k_1} + \frac{R_4 \ln(R_3/R_2)}{k_2} + \frac{R_4 \ln(R_4/R_3)}{k_3} + \frac{1}{h_0}$$

Obsérvese que:

$$U_0 S_0 = U_1 S_1 = \frac{Q}{T_{f1} - T_{f0}} = (R_t)^{-1}$$

donde R_t es la resistencia total a la transferencia de calor en el sistema compuesto.

LA ESFERA.

La distribución de temperaturas y el flujo de calor a través de las paredes de una esfera hueca pueden calcularse a partir de las ecuaciones (3.3) y (3.5), y la ley de Fourier, usando las mismas suposiciones simplificadoras que usamos anteriormente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left[r^2 \frac{\delta T}{\delta r} \right] = 0$$

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{1/r - 1/R_0}{1/R_1 - 1/R_0}$$

$$Q = \frac{T_i - T_o}{(1/4\pi k)(1/R_i - 1/R_o)}$$

El caso de la esfera compuesta se obtiene análogamente.

ESPESOR CRITICO DE AISLAMIENTO.

No siempre el aislamiento colocado a un conducto cilindrico disminuye las pérdidas de calor de la superficie. De hecho en los conductores eléctricos facilita la refrigeración de los mismos. Las pérdidas de calor desde un tubo con aislamiento hacia el fluido de los alrededores está dado por:

$$Q = \frac{2\pi L (T_i - T_f)}{(1/k) \ln(R_o/R_i) + 1/h_o R_o}$$

El flujo de calor será un máximo cuando el denominador sea mínimo. Tomando la derivada del denominador con respecto a R_o manteniendo R_i como parámetro constante e igualando el resultado a cero obtenemos:

$$\frac{1}{k R_o} - \frac{1}{h_o R_o^2} = 0 \quad (4.7)$$

o sea: $R_o \text{ crit} = k/h_o$

Este resultado es independiente de R_i y considera que h_o no cambia con R_o , lo que puede ser aceptable en muchos casos prácticos. La conclusión es que en tubos cuyo radio exterior (en este caso R_i) sea menor que el radio crítico R_o, crit , puede ver sus pérdidas aumentadas por i aislamientos que lleguen hasta el tamaño crítico. Tomando en cuenta los efectos del cambio de curvatura en h_o , se pueden obtener radios críticos del orden del 60 % del obtenido por la ecuación (4.7). Para esferas, por un método similar se halla:

$$R_o, \text{crit} = \frac{2k}{h}$$

SISTEMAS DE CONDUCCION-CONVECCION.

LA VARILLA DELGADA:

Otra aplicación simple pero importante de la ecuación (3.3) es la solución del caso en el que una barra delgada, unida por su base a una superficie caliente, disipa calor por convección a los alrededores a través de su superficie. El sistema se esquematiza en la figura 4.5. La temperatura de la pared en la base de la varilla es T_s , y la del fluido circundante T_f , el área transversal de la varilla es S , su perímetro es P y su altura es b . El diámetro de la varilla

es constante y pequeño, comparado con su altura lo que permite asumir que no hay distribución radial de temperaturas pero si axial. Se configura así una conducción unidimensional estable a lo largo de la

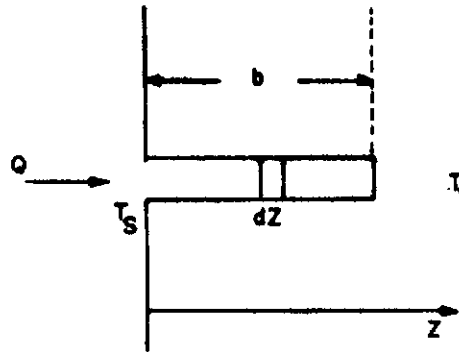


FIGURA 4.5.

barra. El hecho de que el calor conducido desde la base de la varilla y a su largo se pierda hacia los alrededores por convección sugiere simplificar (3.3) describiendo conducción axial y manantial (negativo o sumidero) de calor uniformemente distribuido que iguala las pérdidas por convección. En términos de coordenadas rectangulares (la conducción es lineal a lo largo de la barra, no radial) la ecuación (3.3a) coincide con (3.3) que se reduciría, en condiciones de estado estable a:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = - \frac{\Phi_H}{k}$$

Recurriendo a un balance térmico en el elemento de volumen (Sdz), donde se disipa por convección $Q = hPdZ (T - Tf)$ podemos decir que

$$\Phi_H = - \frac{hP(T - Tf) dz}{S dz}$$

La ecuación que describe el fenómeno físico es pues:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{hP(T - Tf)}{k S} \quad (4.8)$$

Esta expresión también podría mirarse como el balance entre el calor conducido y el calor disipado en un elemento de volumen:

$$\begin{aligned} \text{velocidad de salida} \quad Q|_{z+\Delta z} + Q_c &= Q_z + (dQ_z/dz)dz + Q_c \\ \text{velocidad de entrada} \quad Q|_z &= - kS(dT/dz) \end{aligned}$$

En estado estable y sin generación el balance se reduce entonces:

Haciendo $\theta = T_s - T_z$ (T es la temperatura de la barra que cambia constantemente con la posición z) y notando que si T_f es constante

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{d^2\theta}{dz^2}$$

La expresión (4.8) se modifica a:

$$\frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} - \frac{hP}{kS} \theta = 0 \quad (4.9)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que puede resolverse por métodos rutinarios (Mickley, Sherwood y Reid) haciendo $m^2 = hP/kS$ y en términos del operador $D = d/dz$:

$$(D + m)(D - m)\theta = 0$$

de tal forma que :

$$\frac{d\theta}{dz} = -m\theta \quad : \quad \theta = C_1 \exp(-mz)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = m\theta \quad : \quad \theta = C_2 \exp(mz)$$

Son soluciones particulares y la solución general es:

$$\theta = C_1 \exp(mz) + C_2 \exp(-mz) \quad (4.10)$$

También $\theta = C_3 \cosh(mz) + C_4 \sinh(mz)$. (ver apéndice A 4.1)

Las constantes C_1 y C_2 (o C_3 y C_4) deben calcularse con la ayuda de condiciones límites aceptables.

La condición límite de la base no tiene discusión y puede considerarse que para:

$$z = 0 \quad T = T_s \quad \theta = T_s - T_f = \theta_s$$

El otro extremo puede considerarse en una de las condiciones siguientes:

1) Está transfiriendo calor por convección al fluido de los alrededores. Es decir:

$$-kS(d\theta/dz)|_{z=b} = hS\theta_b; \quad \theta_b = T_b - T_f \quad (4.11)$$

ii) Si la varilla es larga y delgada podríamos despreciar las pérdidas en su extremo; es decir:

$$\left(\frac{d\theta}{dz} \right) \Big|_{z=b} = 0 \quad (4.12)$$

Esta condición sería equivalente a aislar térmicamente el extremo de la varilla o a que éste estuviera en equilibrio térmico con los alrededores. Este caso puede llevarnos a una aplicación inmediata.

EJEMPLO 5.1.

Se mide la temperatura de un fluido que avanza en el interior de un conducto circular por medio de un termómetro (o una termocupla) colocado dentro de una cavidad o receptáculo cilíndrico soldado en el interior de la pared del tubo como se muestra en la figura (5.5). Si la temperatura del fluido es alta y difiere bastante de la temperatura externa, la pared del conducto puede estar a una temperatura inferior a la del fluido interno y fluirá calor por conducción desde el receptáculo del termómetro hacia la pared del conducto. El extremo del mismo, donde el bulbo del termómetro (o la unión de la termocupla) está colocado, podría entonces estar más frío que el fluido y la temperatura indicada no sería la verdadera temperatura. Este error puede calcularse resolviendo la ecuación (4.9) con la condición límite (4.12) y manejando los resultados adecuadamente

$$\theta_s = C_1 + C_2 \quad \theta = mC_1 \exp(mb) - mC_2 \exp(-mb)$$

Resolviendo y reemplazando en (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\exp(mz)}{1 + \exp(2mb)} + \frac{\exp(-mz)}{1 + \exp(-2mb)} &= \frac{\theta}{\theta_s} \\ &= \frac{\exp m(b-z) + \exp -m(b-z)}{\exp(mb) + \exp(-mb)} = \frac{\cosh m(b-z)}{\cosh (mb)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(ver apéndice A.4.1).

La diferencia de temperatura en el extremo de la varilla ($z=b$) es:

$$\theta_b = T_b - T_f = \frac{T_s - T_f}{\cosh(mb)} \quad (4.14)$$

El flujo de calor a través de la base de la barra ($z=0$) es:

$$Q_s = -kS \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \Big|_{z=0} = mkS\theta_s \left[\frac{\sinh m(b-z)}{\cosh(mb)} \right]_{z=0}$$

$$Q_s = \left[h P k S \right]^{\frac{1}{2}} \theta_m \tanh(mb)$$

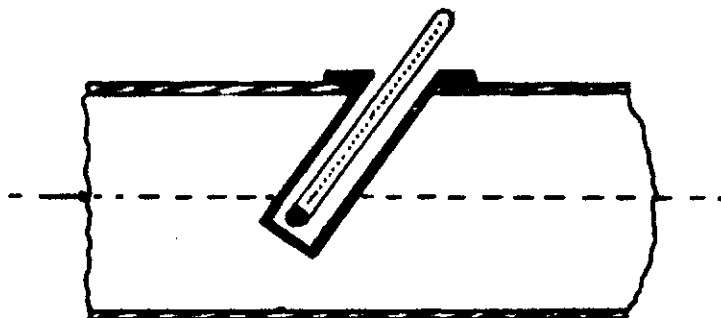


FIGURA 4.6.

Para ilustrar el caso que nos ocupa demos las siguientes dimensiones al conducto y al receptáculo. El tubo tiene 10 cm de diámetro y por él fluye vapor de agua sobrecalentado; el receptáculo para el termómetro es de hierro y tiene diámetro de 1.50 cm. El vapor está a presión de 1 Kg/cm² y su temperatura es de 315 °C.

La velocidad de flujo es 20 m/s. Determinar la longitud del receptáculo que se necesitaría para producir un error en la medida de la temperatura que sea inferior al 0.5% de la diferencia entre la temperatura del vapor y la temperatura de la pared del conducto. Calculando el coeficiente convectivo entre el vapor y el conducto es de $h = 105 \text{ W/m}^2\text{K}$. La conductividad térmica del hierro es $k=55 \text{ W/m.K}$ (Perry). Si la pared del receptorio tiene espesor $e = 0.1, \text{ cm}$ el área transversal para el flujo de calor por conducción en el mismo será: $S = \pi de = (\pi)(1,5)(0.1) \text{ cm}^2$. El perímetro es sólo $\pi d = P$.

$$m = (hP/kS)^{\frac{1}{2}} = (h/ke)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(105)(100)}{(55)(0.1)} \right]^{\frac{1}{2}} = 4.57 \text{ m}^{-1}$$

se requiere que :

$$\frac{\theta_b}{\theta_m} = \frac{T_b - T_f}{T_m - T_f} = 0.005$$

o sea, ecuación (4.10):

$$\frac{1}{\cosh (mb)} = 0.005$$

$\cosh (mb) = 200 \quad \text{arcosh } 200 = \ln(200 + (200^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) = 5.99 = mb$
 o sea que la longitud del receptorio para el termómetro será:
 $b=5.99/0.457 = 13.11 \text{ cm}$.

Como esta longitud es mayor que el diámetro del tubo, será necesario colocarlo oblicuamente con respecto al eje del conducto.

La radiación térmica entre la pared del conducto y el tubo receptor o portatermómetro puede inducir un error adicional en la medición de la temperatura. También debe cuestionarse el valor de h empleado. Por qué ?.

SUPERFICIES ALABRADAS O CON ALETAS.

Como se puede deducir de la ecuación (4.2), la resistencia a la transferencia de calor desde una pared puede ser influida por la resistencia convectiva en una o ambas de sus superficies. Si este es el caso, el flujo a través de la pared puede aumentarse colocando aletas en la superficie donde ésta mayor resistencia ocurre. Estas superficies alabeadas se usan ampliamente en los economizadores de calor, en las plantas de vapor, en sistemas de calentamiento, en los transformadores eléctricos, los motores, etc.

ALETA RECTANGULAR.

Es el caso más simple de una aleta. Es una placa delgada soldada a la superficie, con altura b , espesor e y longitud L (ver figura 4.7)

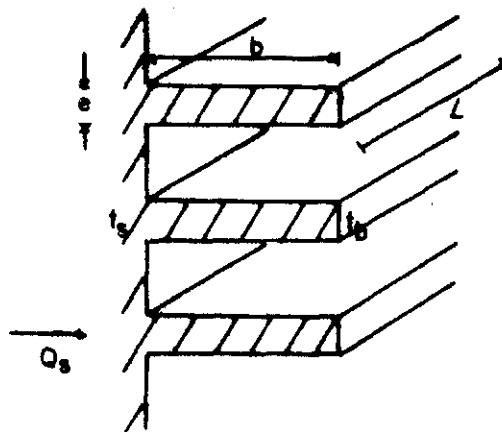


FIGURA 4.7.

De acuerdo con la figura 4.7 el área transversal del álabe es $eL=S$ y el perímetro $(2L + 2e) \approx 2L = P$ pues e es pequeño.

$$m = (hP/kS)^{1/2} = (2h/ke)^{1/2}$$

Al hacer el análisis se observa que son válidas las mismas expresiones desarrolladas para la barra delgada.

La condición límite dada por la ecuación (4.12) parece irrealista pues correspondería a extremos aislados lo que no es lógico si lo que se quiere es disipar calor. Sin embargo, se acepta tomando la altura

efectiva como $b + e/2$. Para el caso expresado por la condición límite ecuación (4.11):

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - m^2\theta = 0 \quad \theta \leq z \leq b$$

$$\theta = \theta_s \quad z = 0 \quad ; \quad k \frac{d\theta}{dz} + h_b\theta = 0 \quad z = b$$

k es la conductividad térmica de la aleta y h_b es el coeficiente convectivo de transferencia de calor entre el extremo de la aleta y el fluido circundante.

Solución general: $\theta = C_1 \cosh m(b-z) + C_2 \sinh m(b-z)$

Aplicando condiciones límite

$$\theta_b = C_1 \cosh (mb) + C_2 \sinh (mb) \quad ; \quad -kC_2m + h_bC_1 = 0$$

(ver apendice A.4.1)

pues

$$\left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} = \left[-C_1 m \sinh m(b-z) - C_2 m \cosh m(b-z) \right]_{z=b} = -C_2 m$$

determinando C_1 y C_2 se obtiene:

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \frac{T - T_f}{T_s - T_f} = \frac{\cosh m(b-z) + (h_b/mk) \sinh m(b-z)}{\cosh (mb) + (h_b/mk) \sinh (mb)} \quad (4.15)$$

Si la transferencia de calor en el extremo de la aleta es despreciable, se tiene $h_b = 0$ y la ecuación (4.15) se reduce a la (4.13) como debe esperarse. Nótese también que el coeficiente de transferencia de la superficie lateral, h , contenido en el parámetro m , no necesariamente es el mismo que el coeficiente h_b del borde de la aleta.

Para $z = b$, la temperatura exceso del borde es:

$$\frac{\theta_b}{\theta_s} = \frac{1}{\cosh (mb) + (h_b/mk) \sinh (mb)} \quad (4.16)$$

El calor que fluye a través de la base en $z = 0$

$$Q_s = mkS\theta_s \frac{h_b/mk + \tanh (mb)}{1 + (h_b/mk)\tanh (mb)} \quad (4.17)$$

$$\text{Nótese que} \quad Q_B = -kS \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \quad (4.18)$$

Podría usarse un método alternativo para determinar el calor perdido por la aleta, integrando el calor disipado por convección en toda la aleta:

$$Q = \int_0^b hP(T - T_f)dz = \int_0^b hP\theta dz \quad (4.19)$$

Generalmente es más fácil aplicar el primer método.

Es muy importante poder reconocer las condiciones para las cuales es ventajoso colocar álabes en una superficie. Aunque son varios los puntos de vista que se podrían tener en cuenta, el primero es determinar cuando se incrementaría el flujo de calor utilizando aletas. El límite está dado por la relación $(dQ_B/db) = 0$.

Usando la expresión (4.17) y considerando que los factores k , S , m y θ_0 son constantes, basta con diferenciar la parte fraccionaria de la ecuación. El resultado de la diferenciación se hace cero cuando el numerador es cero ó el denominador se hace infinito. Esta última condición es satisfecha trivialmente para $k = 0$. Considerando el numerador:

$$[1+h_b/km \tanh(mb)][m/\cosh^2(mb)] - [h^2/km + \tanh(mb)][h_b/k\cosh^2(mb)]=0$$

que se simplifica a $[m - (h_b^2/k^2m)] = 0$. Reemplazando m y haciendo $h=h_b$:

$$2k/he \geq 1 \quad \text{ó} \quad 1/h \geq (e/2)/k$$

El término izquierdo corresponde a la resistencia convectiva y el de la derecha a la resistencia térmica por conducción de una pared plana de espesor igual a la mitad del espesor de la aleta. Cuando ambas resistencias son iguales se alcanza el límite más allá del cual las aletas son inútiles.

En la práctica se pueden utilizar superficies alabeadas siempre y cuando se cumpla que $2k/he > 5$

También se puede demostrar (Eckert) que el flujo máximo de calor a través de una aleta rectangular de un peso dado se obtiene cuando:

$$\frac{1}{e/2} = 1.419 \left[\frac{2k}{he} \right]$$

y el exceso de temperatura en el extremo es $\theta_b = 0.457 \theta_0$, lo que nos da una manera de probar si la altura óptima se ha obtenido.

EFICIENCIA DE ALETAS.

Se pueden definir dos maneras de calcular la eficiencia de una aleta:

1) Eficiencia con respecto al área de la base sin aleta y

2) Eficiencia relativa a una aleta similar de conductividad térmica infinita.

Para el caso (1) el área de la base transmitiría sin la aleta $Q_0 = hS\theta_0$, y la eficiencia sería:

$$\eta = \frac{(hPkS)^{1/2} \theta_0 \tanh(mb)}{hS \theta_0} = \left[\frac{kP}{hS} \right]^{1/2} \tanh(mb)$$

En el caso (2):

$$m = \frac{(hPkS)^{1/2} \theta_0 \tanh(mb)}{hPb\theta_0} = \frac{\tanh(mb)}{mb}$$

ALETAS RECTAS DE PERFIL TRIANGULAR.

Al tratar de encontrar la aleta óptima se puede preguntar si se gana algo cambiando el área seccional de la aleta, de rectangular, a otra forma. Vamos a considerar aletas rectas de perfil triangular (figura 4.8).

El tratamiento matemático es similar al de las aletas rectangulares excepto en que el área perpendicular al flujo de calor es función de la distancia a lo largo de la aleta, decreciendo a medida que la longitud aumenta. Considerando conductividad y coeficiente convectivo constantes:

$$\frac{d}{dz} \left[S \frac{dT}{dz} \right] = \frac{hP}{k} (T - T_f) \quad (4.21)$$

El área puede expresarse directamente en términos de la relación z/b del álabo $S = eL(z/b)$; y para $L \gg e$, $P = 2L$. Reemplazando en (4.21):

$$\left[\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - a \frac{\theta}{z} = 0 \right] \quad (4.22)$$

donde $a = 2hb/ke$. y $\theta = (T - T_f)$

La ecuación (4.22) es una ecuación de Bessel modificada cuya solución es:

$$\theta = A I_0[(2(az)^{1/2}] + B K_0[(2(az)^{1/2}] \quad (4.23)$$

Las funciones I_0 y K_0 se hallan graficadas y tabuladas (Mickey, Eckert, etc.).

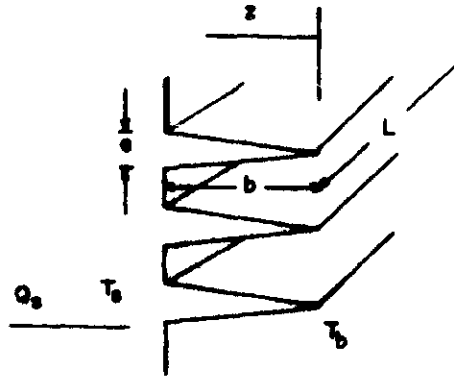


FIGURA 4.8. Aletas de perfil triangular.

Para $z = 0$, $K_0[2(az)^{3/2}]$ nos da un valor infinito y θ no es infinito en el extremo de la aleta. Por tanto B debe ser cero y las otras condiciones límite se refieren a la temperatura en la base de la aleta: $\theta = \theta_b$ para $z = b$. Introduciendo en la ecuación (4.23) podemos determinar la otra constante:

$$A = \frac{\theta_b}{I_0[2(ab)^{3/2}]}$$

La expresión final para la distribución de temperaturas se convierte en:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0 [2(az)^{3/2}]}{I_0 [2(ab)^{3/2}]} \quad (4.24)$$

El flujo de calor se determina de la ley de conducción de Fourier y la primera derivada de la ecuación (4.24), recordando que:

$$\frac{dI_0(\alpha)}{d\alpha} = I_1(\alpha) \quad (4.25)$$

$$Q_s = L\theta_b (2hke)^{3/2} \frac{I_1[2(ab)^{3/2}]}{I_0[2(ab)^{3/2}]}$$

La máxima transferencia se obtiene cuando:

$$\frac{1}{e/2} = 1.309 \left[\frac{2k}{he} \right]$$

la temperatura de exceso en el borde del álabe es $\theta_b = 0.277 \theta_a$.

El peso ahorrado usando aletas triangulares es del 44 %.

Se encuentra en la literatura que las aletas de mínimo peso deben tener perfiles construidos con arcos de circunferencia. Sin embargo, la diferencia en peso con respecto a los álabes de perfil triangular es muy pequeña y como la forma triangular es más sencilla de manufacturar, se puede considerar la mejor forma.

Se hallan otras formas de aletas, pero en general el calor transferido se puede calcular usando diagramas de eficiencias comunes en los libros de transferencia de calor y en manuales.

SISTEMAS CON FUENTES DE CALOR.

PARED PLANA.

Considerese una pared plana con fuentes de calor uniformemente distribuidas como se muestra en la figura 4.9.

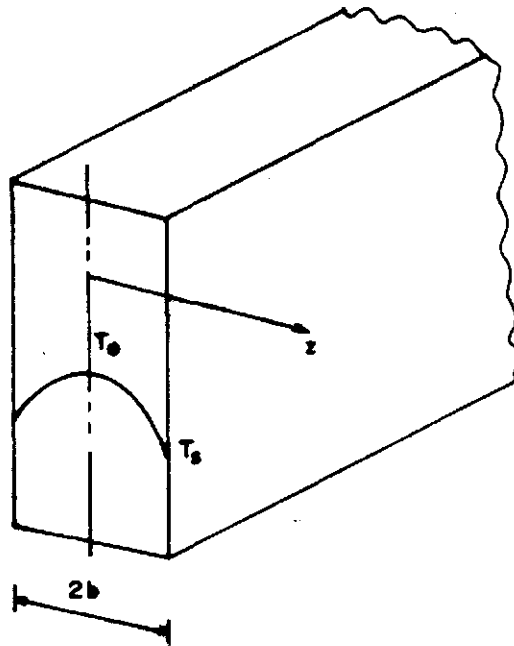


FIGURA 4.9.

El espesor de la pared en la dirección z es 2b y se supone que las dimensiones en las otras direcciones son bastante grandes para que el flujo de calor pueda considerarse como unidimensional.

El calor generado por unidad de volumen es \dot{Q}_H y se supone que la conductividad térmica no varía con la temperatura.

Solución:

Como la geometría es rectangular usamos directamente la ecuación (3.41) o (3.3) con las simplificaciones de estado estacionario ($\delta T/\delta t = 0$) y flujo unidimensional ($\delta^2 T/\delta x^2 = \delta^2 T/\delta y^2 = 0$) para obtener

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{\dot{Q}_H}{k} = 0$$

Para las condiciones de frontera se especifican las temperaturas en cada pared $T = T_s$ en $z = \pm b$.

La solución general es entonces:

$$T = -\frac{\dot{Q}_H}{2k} z^2 + C_1 z + C_2$$

Como en este caso la temperatura es igual a cada lado de la pared C_1 debe ser cero. La temperatura en el plano medio $T_o = C_2$. La distribución de temperaturas es por lo tanto:

$$T - T_o = -\frac{\dot{Q}_H}{2k} z^2; \quad T_s - T_o = -\frac{\dot{Q}_H}{2k} b^2$$

$$\frac{T - T_o}{T_s - T_o} = (z/b)^2 \quad (4.26)$$

También podríamos usar para $z = 0$, $dT/dz = 0$; ya que se espera un máximo de temperatura en el plano central (o no flujo a través de él).

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\dot{Q}_H z}{k} + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$T_s = -\frac{\dot{Q}_H b^2}{2k} + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{Q}_H b^2}{2k} \quad (4.27)$$

$$T = -\frac{\dot{Q}_H}{2k} (z^2 - b^2) + T_s$$

Para $z = 0$

$$T_{max} = T_0 = \frac{\Phi_H b^2}{2k} + T_s$$

Observamos que la distribución de temperaturas es parabólica.

El gradiente de temperatura en la superficie puede hallarse directamente como:

$$- (dT/dz)|_{z=b} = - (\Phi_H b/k)$$

El flujo en una de las superficies es

$$Q = - kS \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=b} = \Phi_H (bS)$$

que es la mitad del calor generado en el volumen.

Para el caso convectivo, gráficamente puede hallarse como en la figura 4.10 donde T_f es la temperatura del fluido y h el coeficiente convectivo del mismo.

Puesto que, si hay pérdidas por convección en la pared, y $\theta = (T - T_f)$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{\Phi_H}{k} = 0 ; \quad \left[\frac{d\theta}{dz} \right]_{z=0} = 0$$

$$- k \left[\frac{d\theta}{dz} \right]_{z=b} = h\theta_s ; \quad \theta_s = (T_s - T_f)$$

La solución es:

$$\theta = - \frac{\Phi_H}{2k} z^2 + C_1 z + C_2$$

Evaluando las constantes:

$$\theta = \frac{\Phi_H}{2k} (b^2 - z^2) + \frac{\Phi_H b}{h} \quad (4.28)$$

para $z = 0$:

$$\theta_{max} = \frac{\Phi_H}{2k} b^2 + \frac{\Phi_H b}{h}$$

La razón del método gráfico se encuentra en que:

$$- \left[\frac{d\theta}{dz} \right]_{z=b} = \frac{\theta_0}{k/h} \quad (4.29)$$

donde $\theta_0 = (T_s - T_f)$.

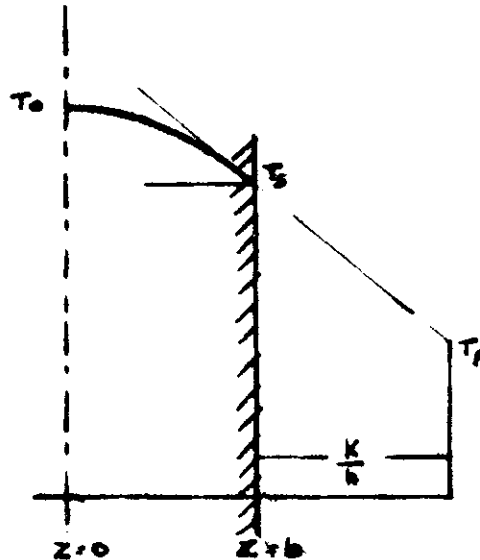


FIGURA 4.10.

4.2 TRANSFERENCIA DE MASA POR DIFUSION UNIDIRECCIONAL ESTACIONARIA.

PELICULA PLANA ESTANCADA.

Retornando a las figuras 1.7 a y 1.7 b, encontramos una situación en la cual hay flujo sin difusión molecular, de la especie A, entre los planos ubicados en $z = 0$ y $z = b$. La geometría corresponde claramente a la de la figura 1.7a en transferencia de calor. Si ha transcurrido suficiente tiempo, las concentraciones entre los dos planos opuestos no cambiarán más con el tiempo. El análisis de este sistema puede hacerse retomando la ecuación de continuidad para la especie A, ecuación (3.44) en términos de densidades de flujo molares por tratarse de una mezcla gaseosa a presión y temperatura constantes:

$$\text{div.} \frac{N_A}{A} + \frac{\delta c_A}{\delta t} = R_A$$

Dado que la geometría es plana, conviene usar el operador divergencia en coordenadas rectangulares. Haciendo cero los términos que no intervienen de acuerdo con las condiciones del sistema (estado estable $\delta c_A / \delta t = 0$; no hay reacción química homogénea: $R_A = 0$; solo hay gradientes de concentración en la dirección z). Se reduce a:

$$\frac{\delta N_{Az}}{\delta z} = 0 \quad (4.31)$$

o sea N_{Az} es constante.

Recordando que la densidad de flujo de la especie A en un medio donde hay gradientes de concentración consta de dos términos:

$$N_{Az} = J_{Az} + c v_z \quad (4.32)$$

donde el primero representa la cantidad de A que se desplaza por unidad de área y unidad de tiempo en la dirección que decrece la concentración y el segundo término indica la cantidad de A desplazado por unidad de área y unidad de tiempo gracias al movimiento general del fluido.

Sabemos que, según la primera ley de Fick :

$$J_{Az} = - D_{AB} \frac{\delta c_A}{\delta z}$$

(c es constante) o, en forma más general:

$$J_{Az} = - D_{AB} c \frac{\delta y_A}{\delta z} \quad (4.33)$$

(Ecuación de Groot)

En el segundo, podemos reconocer (capítulo 3):

$$c v_z = y_A (N_{Az} + N_{Bz}) \quad (4.34)$$

Reemplazando (4.33) y (4.34) en (4.26) obtenemos:

$$N_{Az} = - c D_{AB} \frac{dy_A}{dz} + y_A (N_{Az} + N_{Bz}) \quad (4.35)$$

Necesitamos información adicional sobre la relación entre N_A y N_B (podemos suprimir el subíndice z sabiendo que sólo hay transporte en esta dirección). Analizando el modelo físico que estamos estudiando observamos que B no puede cruzar a través del plano ubicado en $z = 0$. En este caso, aunque existe gradiente de concentración de B (porque si $y_A|_{z=0} > y_A|_{z=b}$, entonces $y_B|_{z=0} < y_B|_{z=b}$ dado que $y_A + y_B = 1$ para cualquier valor de z), $N_B = 0$, o sea que la velocidad con que es transportado por arrastre global en la dirección z positiva iguala la velocidad de difusión en sentido contrario, o dicho de otra manera, su gradiente de concentración se mantiene por la fricción intermolecular entre A y B.

Reemplazando esta condición de no difusión de B en la ecuación (4.35), y despejando N_A obtenemos:

$$N_A = -cD_{AB} \frac{1}{(1-y_A)} \frac{dy}{dz} \quad (4.36)$$

Para determinar el perfil de concentración a través de la película estancada, reemplazamos (4.36) en (4.31) obteniendo:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{c D_{AB}}{1-y_A} \frac{dy_A}{dz} \right] = 0$$

para gases ideales c es constante a P_t y T dadas y D_{AB} puede considerarse independiente de la concentración

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1-y_A} \frac{dy_A}{dz} \right] = 0$$

Las condiciones límite son:

$$\text{Para } z = 0 : \quad y_A = y_{Ae} ; \quad y_{Bz} = (1 - y_{Ae})$$

$$\text{Para } z = b : \quad y_A = y_{Ag} ; \quad y_{Bz} = (1 - y_{Ag})$$

Ahora:

$$\frac{1}{(1-y_A)} \frac{dy_A}{dz} = C_1 ; \quad -\ln(1-y_A) = C_1 z + C_2$$

Para evaluar C_1 y C_2 con las condiciones límite:

$$-\ln(1-y_{Ae}) = C_1(0) + C_2 \quad -\ln(1-y_{Ag}) = C_1 b + C_2$$

Realizando las transformaciones necesarias hallamos que

$$C_1 = \left[\ln \frac{y_{Bz}}{y_{Bz}} \right] \left[\frac{1}{b} \right] ; \quad C_2 = -\ln y_{Bz}$$

De lo anterior :

$$\frac{1-y_A}{1-y_{Ae}} = \left[\frac{1-y_{Ag}}{1-y_{Ae}} \right]^{(z/b)} \quad (4.37)$$

También :

$$\frac{y_B}{y_{Bs}} = \left[\frac{y_{B0}}{y_{Bs}} \right]^{(z/b)} \quad (4.38)$$

A través de (4.37) o de (4.38) podemos hallar la concentración media de A o de B entre θ y b .

Por ejemplo la concentración media de B será:

$$(CA_{medio} / c) = y_{A,med} = \frac{\text{Cantidad de B entre } z=0 \text{ y } z=b}{\text{Cantidad de materia total entre los planos.}}$$

Cantidad de B entre θ y b :

$$\int_0^b cS y_B dz$$

Cantidad de materia total:

$$\int_0^b cS dz$$

Por lo tanto:

$$y_{B,med} = \frac{\int_0^b y_B dz}{\int_0^b dz} \quad (4.39)$$

Reemplazando (4.32) en (4.33) nos da:

$$y_{B,med} = (y_{Bs}/b) \int_0^b \left(\frac{y_{B0}}{y_{Bs}} \right)^{(z/b)} dz = \frac{(y_{B0} - y_{Bs})}{\ln [y_{B0}/y_{Bs}]} = y_{BML}$$

puesto que $\int a^x dx = [a^x / \ln a] + C_1; \quad da^x/dx = a^x \ln a$

Ahora para saber la velocidad a la que la especie A es transferida a través de un plano dado perpendicular a z basta con calcular la ecuación (4.36) en un plano cualquiera. Para $z = \theta$:

$$N_A \Big|_{z=0} = N_{As} = \frac{-c D_{AB}}{1 - y_{As}} \left[\frac{dy_A}{dz} \right]_{z=0} = \frac{c D_{AB}}{y_{Bs}} \left[\frac{dy_B}{dz} \right]_{z=0}$$

$$N_{As} = \frac{D_{AB} c}{b} \ln \frac{y_{B0}}{y_{Bs}} \quad (4.40)$$

Esta expresión hubiera podido obtenerse sin determinar el perfil de concentraciones si en la ecuación (4.36), aprovechando que N_A es constante, separamos variables e integramos entre los límites.

Esta misma situación física se puede obtener con un modelo denominado "La Celda de Arnold", consistente en un tubo estrecho lleno parcialmente con un líquido puro A, y mantenido a presión y temperaturas constantes. Por el extremo superior del tubo se hace fluir un gas B, prácticamente insoluble en el líquido A e inerte químicamente con respecto a los vapores de A.

El nivel del líquido A dentro de la celda se mantiene artificialmente constante.

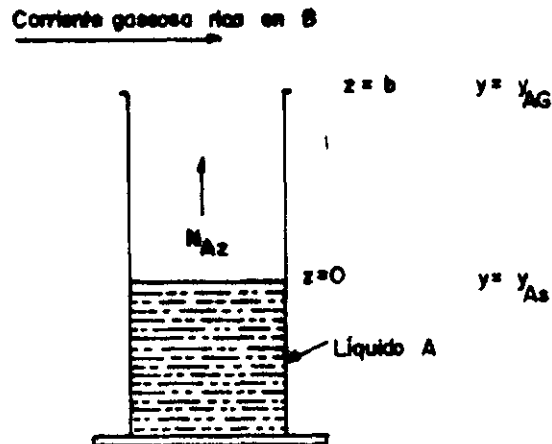


FIGURA 4.11. Diagrama esquemático de una celda de Arnold.

El líquido A pasa a la fase vapor y difunde a través de la columna de B que permanece estancado por no ser soluble en A.

El sistema a considerar es la película gaseosa comprendida entre la superficie del líquido y la boca del tubo. Inmediatamente sobre la superficie líquida se puede tomar la concentración de la especie A en la fase gaseosa, y_{A0} , como la de equilibrio con el líquido de la interfase, es decir, que es la relación entre la presión de vapor de A a la temperatura del sistema y la presión total, suponiendo que A y B forman una mezcla gaseosa ideal.

Para $z = b$ la composición de la corriente gaseosa se mantiene constante para que y_{AG} se mantenga constante y conocida, e igual a la presión parcial de la sustancia A en dicha corriente, sobre la presión total de sistema, que ya dijimos es constante. Con el tiempo se alcanza un perfil de concentraciones constante y la situación es en todo concordante con la contemplada en las figuras 1.7a y 1.7b, y el tratamiento matemático será el mismo.

Los resultados anteriores se han utilizado para la determinación experimental de difusividades gaseosas. De otra parte estos resultados

se aplican también en la "teoría de película" para la transferencia de materia. En la figura 4.12 se presenta un gas fluyendo a lo largo de la superficie de un sólido o de un líquido. En las proximidades de la superficie existe una capa que se mueve lentamente (efecto de frenado) a través de la cual difunde A; en esta teoría o modelo se supone que existe una transición brusca entre una película estancada y un fluido totalmente mezclado en el que los gradientes de concentración son despreciables. Por lo tanto toda la resistencia a la difusión desde la superficie hasta la corriente principal de gas se asume que está en una película estancada de espesor constante, z_f , ficticio. Aunque este modelo no es real desde el punto de vista físico, ha resultado, sin embargo, muy útil como base de correlación de los coeficientes de transferencia de materia convectivos a partir de una representación física sencilla.

De hecho, si por analogía con la llamada ley del enfriamiento de Newton, según la cual, la transferencia de calor por convección desde una superficie caliente a temperatura T_s hacia sus alrededores a temperatura T_f se puede expresar como $q = h(T_s - T_f)$ podríamos reescribir la ecuación (4.40) en términos de una fuerza motriz característica de concentración $(y_{As} - y_{AG})$ multiplicándola y dividiéndola por $[(1 - y_{AG}) - (1 - y_{As})] = (y_{As} - y_{AG})$ y reconociendo que :

$$\frac{\ln \left[\frac{y_{BG} / y_{As}}{1 - y_{As}} \right]}{(1 - y_{As}) - (1 - y_{AG})} = \frac{1}{y_{BLM}}$$

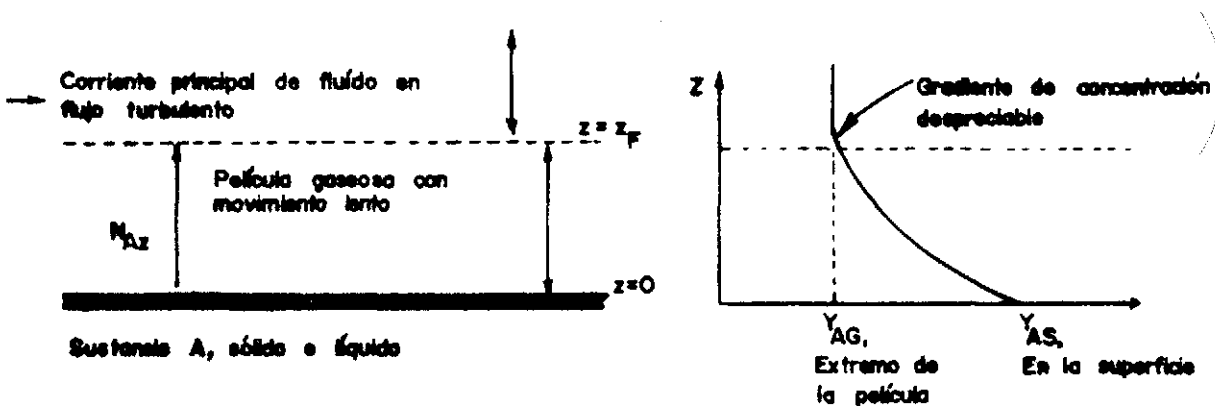


FIGURA 4.12.

Obtenemos entonces :

$$N_A = \frac{D_{AB} c}{z_f y_{BLM}} [y_{As} - y_{AG}] \quad (4.41)$$

Obsérvese que hemos reemplazado $b = z_f$, la longitud del camino de difusión.

La ecuación (4.41) tiene la forma característica :

$$N_A = k_y (y_{Ae} - y_{Ag}) \quad (4.42)$$

Donde k_y sería el coeficiente convectivo de transferencia de masa y $(y_{Ae} - y_{Ag})$ la fuerza guía (obsérvese la similitud con la ley de Newton)

TRANSPORTE DE MASA CON GENERACION INTERNA.

EJEMPLO 4.2.1.

Una corriente gaseosa compuesta de un reactivo A y un producto B fluye a través de esferas de catalizador en un reactor químico. La concentración c_{Ae} de A en la superficie de una partícula de catalizador se asume constante.

El reactivo A difunde desde la superficie a través de los poros del catalizador y reacciona dentro de la esfera. El producto B se forma y contra difunde hasta la superficie externa del catalizador y desde allí hacia la corriente gaseosa. Hallar la distribución de concentraciones en la partícula y la transferencia total de A en la superficie.

Solución.

La simetría es esférica. Usando la expresión (3.44) con el operador divergencia escrito en coordenadas esféricas y teniendo presente que N_A no es función de θ ni ϕ y que c_A no varía con el tiempo obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left[r^2 \frac{N_A}{A} \right] = R_A \quad (4.43)$$

donde R_A será en este caso la velocidad molar de producción de la especie A por unidad de volumen del catalizador. Como A es el reactivo, R_A será negativo y puede estar dado por una expresión como $R_A = -k_R c_A$ donde k_R es la constante específica de velocidad con dimensiones de $[t^{-1}]$. La ecuación (4.43) queda:

$$D_{Ae} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dc_A}{dr}) = k_R c_A \quad (4.44)$$

donde D_{Ae} es la "Difusividad Efectiva" de A a través de los poros del catalizador.

La solución se puede simplificar haciendo $c_A = f(r)/r$:

$$\frac{dc_A}{dr} = - \frac{f(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr}$$

y :

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dc_A}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left[-f + r \frac{df}{dr} \right] = r \frac{d^2f}{dr^2}$$

Con esto la ecuación (4.44) se convierte en :

$$\frac{D_{Ac}}{r} \frac{d^2f}{dr^2} - \frac{k}{R} \frac{f}{r} = 0$$

ó

$$D_{Ac} \frac{d^2f}{dr^2} - \frac{k}{R} f = 0$$

Ecuación que es de la misma forma que la ecuación (4.9) cuya solución ya conocemos :

$$r_{cA} = f = C_1 \cosh(mr) + C_2 \sinh(mr)$$

donde $m^2 = k_R / D_{Ac}$.

Las condiciones límite son :

$$f = 0 \quad c_A = \text{finito} \quad \text{en} \quad r = 0$$

$$f = R_s c_{As} \quad c_A = c_{As} \quad \text{en} \quad r = R_s$$

donde R_s es el radio de la partícula esférica de catalizador. La primera hace que $C_1 = 0$. La segunda condición nos da :

$$C_2 = \frac{R_s c_{As}}{\sinh(mR_s)}$$

o sea :

$$c_A = \frac{c_{As} R_s \sinh(mr)}{r \sinh(mR_s)} \quad (4.45)$$

El transporte total en la superficie es :

$$m_{As} = N_A S \left|_{r=R_s} = -4\pi R_s^2 D_{Ac} \frac{dc_A}{dr} \right|_{r=R_s}$$

Diferenciando (4.45) y sustituyendo :

$$m_{As} = 4\pi R_s D_{Ac} c_{As} \left[1 - \left(\frac{k}{D_{Ac}} \right)^{1/2} R_s \coth \left[\left(\frac{k}{D_{Ac}} \right)^{1/2} R_s \right] \right] \quad (4.46)$$

Imaginémonos un catalizador perfectamente efectivo en el cual todos sus poros interiores alcanzan c_{As} . El transporte total en la superficie sería igual entonces a la producción total en el interior, o sea :

$$m_{Ap} = \left[\frac{4}{3} \pi R_s^3 \right] \left[-k \frac{c}{R_{As}} \right]$$

La relación entre la velocidad de transporte de un catalizador real y de uno perfecto es el llamado factor de eficiencia. Para una esfera viene dado por :

$$\eta = \frac{m_{As}}{m_{Ap}} = \frac{3}{m^2 R_s^2} [m R_s \coth(m R_s) - 1] \quad (4.47)$$

$(kR/D_{Ao})^2 R_s = m R_s$ es un grupo adimensional llamado número de Thiele.

Para partículas no esféricas, se puede usar un radio equivalente definido por $R_{s,eq} = 3V_p/A_p$ donde V_p y A_p son el volumen y la superficie de la partícula respectivamente.

La eficiencia tiene en cuenta la resistencia difusional del proceso global de conversión.

DIFUSION CON GENERACION INTERNA. (REACCION QUIMICA HOMOGENEA).

Consideremos una película líquida de espesor z_f a través de la cual difunde un gas A disuelto en la interfase gas - líquido donde $z = 0$. Allí la concentración es la de equilibrio c_{As} . Supongamos que la concentración en el límite de la película, en la corriente principal de fluido es c_{Am} . Dentro de la película líquida A desaparece por reacción química homogénea. El sistema es claramente unidimensional. Aplicando el balance de materia para condiciones de estado estable obtenemos $(dn_A/dz) = R_A$. Al aplicar la ley de Fick considerando despreciable el término de arrastre c_{AV_z} , obtenemos

$$D_{AB} \frac{d^2 c_A}{dz^2} + R_A = 0$$

Si la reacción es de primer orden e irreversible :

$$R_A = -k_R c_A ; \quad \frac{d^2 c_A}{dz^2} - (k_R/D_{AB}) c_A = 0$$

Definimos los siguientes grupos adimensionales :

$$\eta = z/z_f ; \quad C^* = c_A/c_{As} ; \quad k_R z_f^2 / D_{AB} = B^2$$

obtenemos :

$$\frac{d^2C^*}{dn^2} - B^2C^* = 0$$

Con las condiciones límite $n=0 : C^*=1$; $n=1 : C^*=C_{Am}/C_{As} = C_m^*$.

Como ya se observó al resolver la ecuación (4.9), la solución de esta ecuación es :

$$C^* = C_1 \sinh(Bn) + C_2 \cosh(Bn)$$

De la primera condición límite $C_2 = 1$, y de la segunda :

$$C_m^* = C_1 \sinh(B) + \cosh(B)$$

resolviendo para C_1 y reemplazando obtenemos :

$$C^* = \frac{C_m^* \sinh(Bn) + \sinh[B(1-n)]}{\sinh(B)}$$

Donde aplicamos :

$$\cosh(x) \sinh(y) - \cosh(y) \sinh(x) = \sinh(y-x)$$

con $x = Bn$ e $y = B$.

Hatta demostró que para $B > 0.3$, $C_m^* \approx 0$; entonces

$$C^* = \frac{\sinh(B(1-n))}{\sinh(B)}$$

El flujo molar en la interfase :

$$N_{As} = -D_{AB} \frac{\delta c_A}{\delta z} \Big|_{z=0}$$

$$N_{As} = (D_{AB} c_{As} / z) \frac{B \cosh(B)}{\sinh(B)} = (D_{AB} c_{As} / z) B \coth(B)$$

Observemos que el coeficiente de masa convectivo se asimila a :

$$K_{oR} = N_{As} / c_{As} = (D_{AB} / z) B \coth(B)$$

Si no hubiera reacción química se encontraría :

$$N_{As} = (D_{AB} c_{As} / z)$$

O sea :

$$K_{oR} = \left(\frac{D_{AB}}{z} \right) / F$$

Danckwartz definió el "Factor de ensanchamiento", E, como el factor por el cual la reacción química incrementa la velocidad de absorción, en comparación con la absorción física cuando $C_{Am} = 0$. O sea :

$$E = \left(\frac{N_{AsR}}{N_{As}} \right) / K_{oR} = K_{oR} / K_{oR} = B \coth(B)$$

De acá se puede obtener K_{oR} si D_{AB} , K_R y K_c se conocen.

Para reacción rápida con difusividad pequeña, B es grande y $\coth(B)$ tiende a la unidad. Aquí $E = B$, y :

$$N_{As} = \left(\frac{c_{As} D_{AB}}{z} \right) \left(\frac{k z^2}{R r} \right)^{1/2}$$

$$N_{As} = c_{As} \left(\frac{k D_{AB}}{R} \right)^{1/2}$$

Independiente de z_F puesto que la molécula reacciona antes de alcanzar z_F . El coeficiente de transferencia de masa es entonces :

$$K_{oR} = \left(\frac{k D_{AB}}{R} \right)^{1/2}$$

La cantidad adimensional B es llamada número de Hatta.

4.3. TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO UNIDIRECCIONAL ESTACIONARIO. FLUJO DE COUETTE.

Este es el caso que se presenta en la sección 1.4 y al cual hacen alusión las figuras 1.4 a y 1.4 b. En este caso no hay flujo neto de cantidad de movimiento en la dirección x debido a que v_x no depende de x. La acción de los esfuerzos cortantes en un elemento de volumen de altura dz puede incluirse tanto como fuerzas en un balance de fuerzas como un flujo de cantidad de movimiento en un balance de cantidad de movimiento. Nótese que no existen otras fuerzas netas actuando en la dirección x pues la presión no varía con x y la gravedad no varía en esta dirección.

Aplicando la ecuación generalizada, (3.22) para el caso de fluidos newtonianos de densidad y viscosidad constantes, teniendo presente que se supone alcanzado el estado estacionario y que v_x es sólo función de y, además de las anteriores consideraciones sobre presión y fuerza obtenemos:

$$\mu \frac{\delta^2 v_x}{\delta z^2} = 0 = - \frac{d\tau_{zx}}{dz} \quad (4.49)$$

Es decir, $\tau_{zx} = \tau_z$ es una constante. O sea hay distribución de flujo de cantidad de movimiento constante.

$$\tau_{zx} = - \mu \frac{dv_x}{dz} = \text{constante}$$

Separando variables e integrando entre los límites dados por las condiciones límite:

$$\tau_{zx} \int_0^z dz = - \mu \int_V^{v_x} dv_x$$

$$\tau_{zx} = \frac{\mu (V - v_x)}{z} = f \frac{V}{b}$$

De acá el perfil de velocidad es $v_x = V(1 - z/b)$. Este perfil lineal es análogo al obtenido para el transporte de calor en una pared plana.

COORDENADAS CURVILINEAS.

Hemos hecho énfasis en que la analogía entre el transporte de calor y cantidad de movimiento no es completa o general, puesto que la cantidad de movimiento es un vector y la temperatura un escalar. Esta diferencia generalmente se evidencia en el flujo bidimensional, y aún en sistemas monodimensionales cuando se usan sistemas coordenados diferentes al cartesiano. Sin embargo, si, hablando de simetría cilíndrica, $v_z = f(r)$ y $v_r = v_\theta = 0$, el transporte de cantidad de movimiento en la dirección r está descrito por :

$$\tau_{rz} = - \mu \frac{\delta v_z}{\delta r}$$

que es similar a la ecuación para τ_{zx} para transporte de la cantidad de movimiento x en la dirección z (Apéndice A.4.2)

EJEMPLO 4.3.

TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN UN ANILLO.

Consideremos un pistón metálico horizontal de radio R_1 y longitud L, moviéndose axialmente a través de un aceite lubricante contenido en el espacio anular comprendido entre el pistón y un cilindro concéntrico de radio R_2 . (ver figura 4.13).

Se desea hallar la fuerza F_z requerida para mover el pistón a través del aceite con velocidad constante V, no habiendo diferencias de presión o fuerzas gravitacionales. Desprecie los efectos de borde.

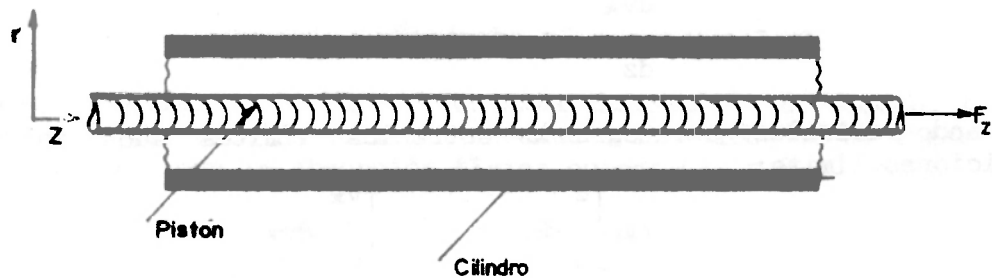


FIGURA 4.13.

Solución:

Sea r la distancia desde el centro del pistón y z la distancia a lo largo del eje del mismo. Como el pistón se mueve en la dirección z el fluido tendrá una componente de velocidad v_z .

Ahora, la velocidad en la superficie del pistón ($r = R_1$) debe ser igual a V puesto que el fluido se adhiere a la superficie del pistón. Por igual razón, la velocidad del fluido en la superficie del cilindro externo debe ser cero ya que el cilindro externo está fijo. De esta manera la velocidad del fluido variará con la posición radial desde $v_z = V$ hasta $v_z = 0$.

Esta variación radial significa que el pistón está impartiendo cantidad de movimiento z al fluido y esta cantidad de movimiento se transporta radialmente a través de capas sucesivas de fluido hasta el cilindro exterior. Así en el estado estable, tenemos una situación similar al ejemplo de las placas paralelas excepto que debemos trabajar en coordenadas cilíndricas.

En este momento, el problema es análogo al problema de transferencia de calor a través de la pared de un tubo ya discutido.

Las condiciones físicas simplificantes de la ecuación general son: La presión es constante, el pistón es horizontal y no habrá fuerzas gravitacionales ni de presión en la dirección z .

La expresión resultante es (ver apéndice A.4.2)

$$-\frac{d(\tau_{rz} r)}{r dr} = 0$$

Integrando $\tau_{rz} r = C_1$; la distribución de flujo es:

$$\tau_{rz} = C_1/r = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (4.50)$$

Las condiciones límite $v_z = V$ en $r = R_1$; $v_z = 0$ en $r = R_2$.

Para encontrar la distribución de velocidades se separan variables en (4.50) e integramos entre las condiciones límite. Si observamos sin embargo, que las ecuaciones diferenciales, leyes de flujo y condiciones límite son análogas al caso de transporte de calor en la pared de un tubo siempre que $T_0 = \theta$, podemos aplicar las ecuaciones obtenidas reemplazando T por v_z , T_i por V y T_0 por θ . La distribución de velocidades es entonces:

$$\frac{V - v_z}{V} = \frac{\ln (r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \quad (4.51)$$

(por analogía con la ecuación (4.0a))

La velocidad de flujo de cantidad de movimiento se obtiene multiplicando el flujo de cantidad de movimiento por el área de flujo, ambos evaluados en $r = R_1$. Es similar al flujo de calor Q calculado en $r = R_1$ y podría obtenerse por similitud con la ecuación (4.1). Sin embargo, lo realizaremos para enfatizar el procedimiento:

Como el flujo de cantidad de movimiento es constante puede evaluarse en $r = R_1$, $r = R_2$ o cualquier r arbitrario. Seleccionando $r = R_1$ y usando la ley de Newton de la viscosidad,

$$\begin{aligned} \tau_{rz} S_r \Big|_{r=R_1} &= \left[- \mu \frac{dv_z}{dr} \Big|_{r=R_1} \right] (2\pi R_1 L) \\ &= \mu \left[\frac{V}{r \ln(R_2/R_1)} \right]_{r=R_1} (2\pi R_1 L) \end{aligned}$$

entonces

$$F_1 = \tau_{rz} S_r \Big|_{r=R_1} = \frac{\mu V}{R_1 \ln(R_2/R_1)} (2\pi R_1 L) = \frac{2\pi L V \mu}{\ln (R_2/R_1)}$$

(compárese con la ecuación (4.1))

TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO CON GENERACION INTERNA.

Recordemos que en el balance de cantidad de movimiento el término de generación ha sido cambiado por la suma de fuerzas que actúan en el sistema. Para ilustrar esta idea consideremos un líquido fluyendo en un tubo bajo una diferencia de presión :

Un fluido newtoniano fluye hacia arriba en estado estable en el interior de un conducto circular largo de longitud L . Consideremos una sección del tubo alejada de los extremos del mismo (figura 4.14).

Tomemos como z la dirección hacia arriba, y r la distancia desde el centro. La velocidad en la dirección z positiva es v_z , la que depende de la posición radial. En $z = 0$ la presión que actúa uniformemente sobre el área transversal πR^2 es p_0 ; en $z = L$ es p_L .

La densidad ρ del fluido se asume constante, o sea que hablamos de un fluido incompresible. En estas condiciones se dice que el flujo está completamente desarrollado, indicando que la velocidad v_z es sólo función de r , no cambiando con z . Adicionalmente suponemos que el fluido está en flujo laminar. Esto significa que una partícula trazadora colocada en una posición cualquiera, radial y angularmente hablando, permanece en la misma posición radial y angular a medida que avanza axialmente con el fluido. Para un fluido newtoniano fluyendo en un conducto circular el flujo laminar existe, para valores del número de Reynolds inferiores a 2100. El número de Reynolds es una cantidad adimensional definida, para el caso de conductos circulares por la expresión

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

donde

- ρ : Densidad del fluido.
- v : Velocidad promedio del fluido.
- d : Diámetro interno del conducto.
- μ : Viscosidad del fluido.

(ver apéndice A.4.3)

Como problema de diseño podríamos pensar en la necesidad de determinar la diferencia de presiones $p_0 - p_L$ requerida para bombear un fluido con determinada viscosidad a través de un conducto de radio R y longitud L a una velocidad promedio V , con el fin de determinar el tamaño de la bomba necesaria.

VELOCIDAD PROMEDIO.

Si la densidad es constante, la velocidad promedio v_{med} se define en términos del caudal volumétrico Q [m^3/s] por: $Q = A_z v_{med}$. en la que A_z es el área transversal (πr^2 para el tubo). Para hallar v_{med} a partir de la distribución de velocidad para tubos $v_z(r)$, se debe encontrar primero una ecuación para Q en términos de v_z . Para hacerlo, consideremos un elemento de área $A_z = 2\pi r \Delta r$, como se indica en la figura 4.13 b y c. El caudal volumétrico para este elemento de área para cualquier z es:

$$\Delta Q = v_z(2\pi r \Delta r)$$

o haciendo tender Δr a cero:

$$dQ = v_z 2\pi r dr$$

Para hallar el caudal volumétrico para el tubo completo integramos sobre el área transversal :