Capítulo 4
Análisis dinámico elástico

4.1. Análisis modal cronológico. Resumen del método

El análisis modal cronológico permite determinar la respuesta en cada instante de tiempo de una estructura que está sometida a un movimiento acelerado en la base (Chopra, 2001), siempre y cuando haya linealidad entre acciones y desplazamientos en cada instante de tiempo y se considere amortiguamiento clásico o desacoplable.

El sistema de ecuaciones modales desacopladas en coordenadas generalizadas de la Ecuación (3.82) mencionado en el Capítulo 3, se plantea también de la siguiente manera:

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = [\alpha]\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{4.1}$$

Como solución del sistema de ecuaciones modales se obtiene el vector de desplazamientos generalizados $\{\eta(t)\}$ en cada instante de tiempo. Cada desplazamiento generalizado $\eta_i(t)$ es la respuesta de un sistema equivalente de un solo grado de libertad dinámico de masa M_i, rigidez K_i y amortiguamiento C_i, sometido a la acción de una fuerza externa variable en el tiempo, denominada fuerza externa modal, dada por la siguiente expresión (m *corresponde al número de modos de vibración del sistema*):

$$\bar{F}_{ext-i}(t) = -\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} * \ddot{u}_{gj}(t) \tag{4.2}$$

Cada ecuación modal se soluciona de forma práctica utilizando procedimientos numéricos. Suelen utilizarse métodos explícitos como el de la aceleración lineal o el método basado en la linealización de la excitación externa, aunque también pueden utilizarse métodos iterativos como el de Newmark (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Paz, 1992).

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Teniendo en cuenta que los modos de vibración dan solo una idea de la forma en que la estructura se deformaría en condiciones de vibración libre, cada desplazamiento generalizado $\eta_i(t)$ equivale a la amplitud del modo de vibración correspondiente $\{\phi_i\}$ en cada instante de tiempo y por lo tanto, el producto $\{\phi_i\}\eta_i(t)$ da como resultado el aporte del modo de vibración $\{\phi_i\}$ a los desplazamientos de los centros de masa, cuando actúa la aceleración en la base de la estructura $\{\ddot{u}_g(t)\}$.

Dado que los modos de vibración $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, ..., \{\phi_n\}$ son vectores linealmente independientes (Chopra, 2001) y constituyen una base ortogonal en donde ningún modo se obtiene combinando linealmente los demás modos, los desplazamientos de los centros de masa en cada instante de tiempo $\{u_\phi(t)\}$ se obtienen como una combinación lineal de los modos de vibración natural de la estructura, como lo muestra la siguiente expresión:

$$\{u_\phi\} = \{\phi_1\}\{\eta_1(t)\} + \{\phi_2\}\{\eta_2(t)\} + \cdots + \{\phi_i\}\{\eta_i(t)\} + \cdots + \{\phi_n\}\{\eta_n(t)\} \qquad (4.3)$$

La anterior expresión equivale al producto de la matriz de modos de vibración $[\Phi]$ y al vector de desplazamientos generalizados $\{\eta(t)\}$:

$$\{u_\phi(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \qquad (4.4)$$

De igual forma, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base y en coordenadas globales de los centros de masa $\{\dot{u}_\phi(t)\}$ y $\{\ddot{u}_\phi(t)\}$, considerando el aporte de todos los modos de vibración natural, se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \{\dot{u}_\phi(t)\} &= [\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} \\ \{\ddot{u}_\phi(t)\} &= [\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Conocido $\{u_\phi(t)\}$ es posible calcular cualquier cantidad que represente la respuesta de la estructura (*derivas, cortantes de piso, acciones internas, etc*) en cualquier instante de tiempo. Utilizando operaciones matriciales básicas se calcula la variación en el tiempo de cantidades como los desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos $\{u(t)\}$, las derivas de los centros de masa $\{\Delta_{cm}(t)\}$, las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa $\{F_{s\phi}(t)\}$, los cortantes de piso $\{V_x(t)\}, \{V_y(t)\}$ o las acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento estructural $\{\bar{f}_e(t)\}$. Con estas últimas es posible construir los diagramas de acciones internas en los elementos en cada instante de tiempo o las envolventes de acciones internas, información importante para el diseño de la estructura.

A continuación se describen algunos de los métodos disponibles en la bibliografía para obtener los desplazamientos generalizados $\{\eta(t)\}$, con los que también se obtiene como resultado las velocidades generalizadas $\{\dot{\eta}(t)\}$ y las aceleraciones generalizadas $\{\ddot{\eta}(t)\}$ en cada instante de tiempo. Luego se describe el procedimiento mediante el cual se obtienen los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones absolutas y relativas a la base de

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

los centros de masa de los diafragmas rígidos, es decir, de los grados de libertad dinámicos de la estructura. Al final se mencionan algunos procedimientos que permiten obtener la variación en el tiempo de las cantidades de interés que representan la respuesta de la estructura al movimiento de la base.

4.2. Métodos para calcular los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas en cada instante de tiempo

Las ecuaciones modales desacopladas a resolver tienen siguiente forma:

$$\ddot{\eta}(t) + 2\xi\omega\dot{\eta}(t) + \omega^2\eta(t) = R(t) \tag{4.6}$$

Donde $\eta(t), \dot{\eta}(t) y\ \ddot{\eta}(t)$ son los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones en coordenadas generalizadas respectivamente y $R(t)$ es la excitación modal externa o el término independiente de la ecuación modal.

Los desplazamientos generalizados corresponden a los vectores $\{\eta\}$ solución de las ecuaciones modales desacopladas, a partir de los cuales se calculan los desplazamientos de los centros de masa y la respuesta de la estructura.

A continuación se describen tres métodos numéricos utilizados para resolver las euaciones modales desacopladas de la forma indicada en la Ecuación (4.6). Haciendo un ajuste adecuado de la nomenclatura, estos métodos se utilizan para encontrar los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas $\eta(t), \dot{\eta}(t) y\ \ddot{\eta}(t)$ en los mismos instantes de tiempo en que está registrada la aceleración de la base.

4.2.1. Método de la aceleración lineal

Este método supone que la aceleración relativa a la base que experimenta la masa varía de forma lineal para un intervalo de tiempo Δt definido (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; Paz, 1992).

A continuación se describe un algoritmo en el que, a partir de los valores conocidos de desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante $t = t_i$ al comienzo del intervalo, se calculan los valores de desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante $t = t_{i+1}$ al final del intervalo.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

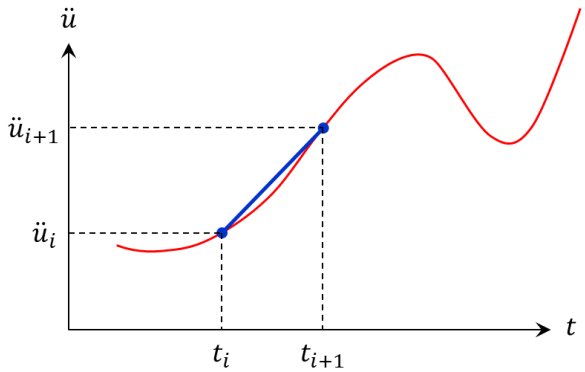


Figura 4.1. Aceleración lineal asumida de la masa en cada intervalo

Partiendo de suponer que la aceleración sigue una variación lineal en un intervalo de tiempo definido de t_i a t_{i+1}, se establece que:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t}\right)(t - t_i) \tag{4.7}$$

Al integrar la anterior expresión respecto a *t* se obtiene la siguiente ecuación para la velocidad en función del tiempo:

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t}\right)(t - t_i)^2 + \ddot{u}_i(t - t_i) \tag{4.8}$$

Nuevamente al integrar la anterior expresión respecto a *t* se obtiene la siguiente ecuación de desplazamiento en función del tiempo:

$$u(t) = u_i + \dot{u}_i(t - t_i) + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t}\right)(t - t_i)^3 + \frac{\ddot{u}_i(t - t_i)^2}{2} \tag{4.9}$$

Al remplazar t por t_{i+1} en la Ecuación (4.9) se obtiene:

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i(t_{i+1} - t_i) + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t}\right)(t_{i+1} - t_i)^3 + \frac{\ddot{u}_i(t_{i+1} - t_i)^2}{2}$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t}\right)\Delta t^3 + \frac{\ddot{u}_i\Delta t^2}{2} \tag{4.10}$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \frac{\ddot{u}_i\Delta t^2}{3} + \frac{\ddot{u}_{i+1}\Delta t^2}{6}$$

De igual forma, al remplazar t por t_{i+1}en la expresión (4.8) para la velocidad:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\ddot{u}_i\Delta t}{2} + \frac{\ddot{u}_{i+1}\Delta t}{2} \tag{4.11}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las dos últimas ecuaciones permiten encontrar el desplazamiento y la velocidad en el instante t_{i+1} a partir del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el instante t_i y de la aceleración en el instante t_{i+1}. La aceleración $\ddot{u}_{i+1}$ se despeja de la ecuación de movimiento como se muestra a continuación, para el instante $t = t_{i+1}$.

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = F_{ext}(t_{i+1})$$
$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{F_{ext}(t_{i+1})}{m} - \frac{c\dot{u}_{i+1}}{m} - \frac{ku_{i+1}}{m} \tag{4.12}$$

Al remplazar las expresiones (4.10) y (4.11) obtenidas para $\dot{u}_{i+1}\ y\ u_{i+1}$ en la Ecuación (4.12) y simplificar, se llega a la aceleración en el instante $t = t_{i+1}$:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{F_{ext}(t_{i+1})/m - \omega^2 u_i - (2\xi\omega + \omega^2\Delta t)\dot{u}_i - \omega^2\Delta t(\xi + \omega\Delta t/3)\ddot{u}_i}{1 - \xi\omega\Delta t + (\omega\Delta t)^2/6} \tag{4.13}$$

Con el desplazamiento, la velocidad y la aceleración al comienzo del intervalo ($t = t_i$) y la fuerza externa al final del intervalo ($t = t_{i+1}$), se calcula la aceleración al final del intervalo ($t = t_{i+1}$), para posteriormente calcular la velocidad y el desplazamiento al final del intervalo ($t = t_{i+1}$). La aceleración, la velocidad y el desplazamiento calculados para el instante final t_{i+1} en el siguiente intervalo de tiempo pasan a ser los valores del instante inicial t_i.

Realizando una sustitución adecuada de la nomenclatura, como se muestra a continuación, este método se usa para obtener los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas asociadas a cada modo y en cada instante de tiempo.

Cálculos iniciales:

- Definir ξ, ω y Δt
- Definir los valores iniciales de $\eta_0\ y\ \dot{\eta}_0$. Generalmente se asumen como cero.
- Calcular la aceleración en $t = 0$ usando la siguiente expresión:

$$\ddot{\eta}_0 = R_0 - 2\xi\omega\dot{\eta}_0 - \omega^2\eta_0 \tag{4.14}$$

Para cada instante de tiempo:

- Calcular la aceleración $\ddot{\eta}_{i+1}$ con la siguiente expresión:

$$\ddot{\eta}_{i+1} = \frac{R(t_{i+1}) - \omega^2\eta_i - (2\xi\omega + \omega^2\Delta t)\dot{\eta}_i - \omega^2\Delta t(\xi + \omega\Delta t/3)\ddot{\eta}_i}{1 - \xi\omega\Delta t + (\omega\Delta t)^2/6} \tag{4.15}$$

- Calcular el desplazamiento y la velocidad $\eta_{i+1}\ y\ \dot{\eta}_{i+1}$ respectivamente, con las siguientes expresiones:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \dot{\eta}_i \Delta t + \frac{\ddot{\eta}_i \Delta t^2}{3} + \frac{\ddot{\eta}_{i+1} \Delta t^2}{6}$$
$$\dot{\eta}_{i+1} = \dot{\eta}_i + \frac{\ddot{\eta}_i \Delta t}{2} + \frac{\ddot{\eta}_{i+1} \Delta t}{2} \tag{4.16}$$

- Pasar al siguiente intervalo de tiempo, i cambia a $i + 1$.

El diagrama de flujo de la Figura 4.2 resume el anterior procedimiento.

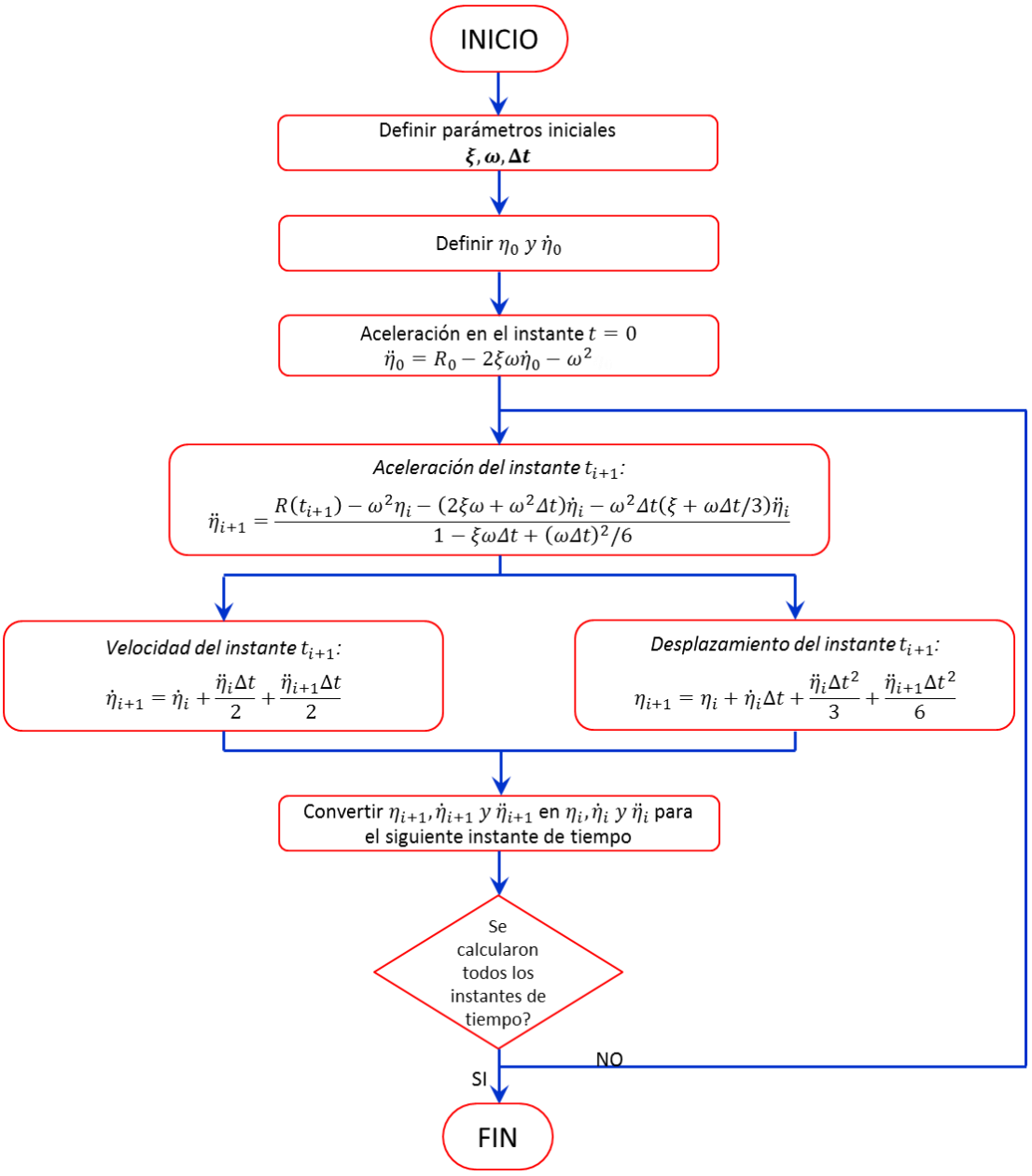


Figura 4.2. Diagrama de flujo del método de la aceleración lineal

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Se llega a una precisión suficiente en los resultados si el intervalo de tiempo Δt se toma inferior a 1/10 del periodo natural de la estructura (Paz, 1992). Otras referencias (Chopra, 2001) recomiendan que el intervalo de tiempo Δt sea inferior a $1/20$ del periodo natural.

Generalmente el intervalo de tiempo se supone igual al espaciamiento de datos de la aceleración de la base, el cual es generalmente de $0.01s$ o $0.02s$ por lo que, para estructuras con un periodo de vibración natural entre 0.5 y 1.0s, el intervalo de tiempo Δt máximo a considerar sería de 0.025 a 0.05s, siendo el valor de $\Delta t = 0.02s$ adecuado.

4.2.2. Método basado en la linealización de la excitación

Este método supone que la excitación externa se expresa como una función definida por trozos de variación lineal, en intervalos de tiempo Δt lo suficientemente cortos (Wilson, 2002).

La solución exacta para una fuerza externa con variación lineal se obtiene superponiendo tres soluciones diferentes: la solución para vibración libre debida a las condiciones iniciales η_o y $\dot{\eta}_o$, la solución para una carga escalón y la solución para una carga rampa (Chopra, 2001).

Si se asume que la excitación externa tiene una variación lineal en el intervalo de tiempo Δt definido de t_{i-1} a t_i de la siguiente forma.

$$R(t) = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) R_{i-1} + \frac{t}{\Delta t} R_i \tag{4.17}$$

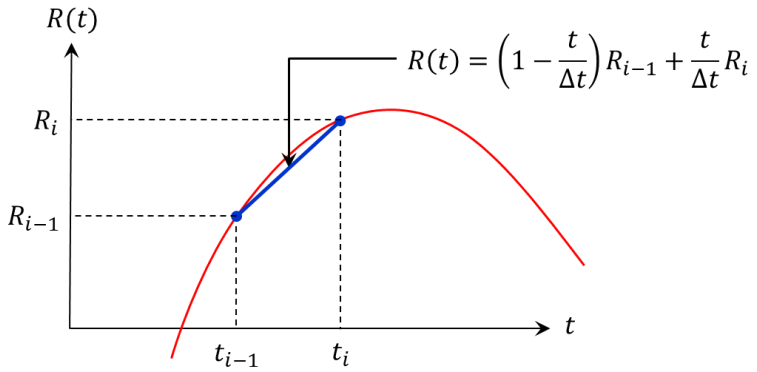


Figura 4.3. Variación asumida de la excitación externa en cada intervalo de tiempo (Wilson, 2002)

Donde t tiene como origen el instante t_{i-1}. La solución exacta de la ecuación diferencial y su primera y segunda derivada se muestran a continuación:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= A_1(t)\eta_{i-1} + A_2(t)\dot{\eta}_{i-1} + A_3(t)R_{i-1} + A_4(t)R_i \\
\dot{\eta}(t) &= \dot{A}_1(t)\eta_{i-1} + \dot{A}_2(t)\dot{\eta}_{i-1} + \dot{A}_3(t)R_{i-1} + \dot{A}_4(t)R_i \\
\ddot{\eta}(t) &= \ddot{A}_1(t)\eta_{i-1} + \ddot{A}_2(t)\dot{\eta}_{i-1} + \ddot{A}_3(t)R_{i-1} + \ddot{A}_4(t)R_i
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Si las anteriores ecuaciones se evalúan al final del intervalo, es decir cuando $t = \Delta t$, toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\eta_i &= A_1\eta_{i-1} + A_2\dot{\eta}_{i-1} + A_3R_{i-1} + A_4R_i \\
\dot{\eta}_i &= A_5\eta_{i-1} + A_6\dot{\eta}_{i-1} + A_7R_{i-1} + A_8R_i \\
\ddot{\eta}_i &= A_9\eta_{i-1} + A_{10}\dot{\eta}_{i-1} + A_{11}R_{i-1} + A_{12}R_i
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Donde las constantes A_1 a A_{12} son las siguientes:

$$\begin{aligned}
A_1 &= c(\Delta t) + \bar{\xi}s(\Delta t) & A_3 &= \frac{1}{\omega^2}[a_1 + a_2\Delta t + a_3 s(\Delta t) + a_4 c(\Delta t)] \\
A_2 &= \frac{1}{\omega_D}s(\Delta t) & A_4 &= \frac{1}{\omega^2}[a_5 + a_6\Delta t + a_7 s(\Delta t) + a_8 c(\Delta t)] \\
A_5 &= \dot{c}(\Delta t) + \bar{\xi}\dot{s}(\Delta t) & A_7 &= \frac{1}{\omega^2}[a_2 + a_3\dot{s}(\Delta t) + a_4\dot{c}(\Delta t)] \\
A_6 &= \frac{1}{\omega_D}\dot{s}(\Delta t) & A_8 &= \frac{1}{\omega^2}[a_6 + a_7\dot{s}(\Delta t) + a_8\dot{c}(\Delta t)] \\
A_9 &= \ddot{c}(\Delta t) + \bar{\xi}\ddot{s}(\Delta t) & A_{11} &= \frac{1}{\omega^2}[a_3\ddot{s}(\Delta t) + a_4\ddot{c}(\Delta t)] \\
A_{10} &= \frac{1}{\omega_D}\ddot{s}(\Delta t) & A_{12} &= \frac{1}{\omega^2}[a_7\ddot{s}(\Delta t) + a_8\ddot{c}(\Delta t)]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Las funciones y constantes de las que dependen A_1 a A_{12} se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
\omega_D &= \omega\sqrt{1-\xi^2} & a_1 &= 1 + a_0 & a_6 &= -a_2 \\
\bar{\omega} &= \omega\xi & a_2 &= -\frac{1}{\Delta t} & a_7 &= -\bar{\xi}a_5 - \frac{a_6}{\omega_D} \\
\bar{\xi} &= \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} & a_3 &= \xi a_1 - \frac{a_2}{\omega_D} & a_8 &= -a_5 \\
a_0 &= \frac{2\xi}{\omega\Delta t} & a_4 &= -a_1 & a_9 &= \omega_D^2 - \bar{\omega}^2 \\
 & & a_5 &= -a_0 & a_{10} &= 2\bar{\omega}\omega_D
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Adicionalmente, las funciones $s(t)$ y $c(t)$ y sus dos primeras derivadas, evaluadas en $t = \Delta t$, se calculan de la siguiente forma.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$
\begin{aligned}
s(\Delta t) &= e^{-\xi\omega\Delta t}\,\mathrm{sen}(\omega_D\Delta t) & c(\Delta t) &= e^{-\xi\omega\Delta t}\cos(\omega_D\Delta t) \\
\dot{s}(\Delta t) &= -\bar{\omega}s(\Delta t) + \omega_D c(\Delta t) & \dot{s}(\Delta t) &= -\bar{\omega}c(\Delta t) - \omega_D s(\Delta t) \\
\ddot{s}(\Delta t) &= -a_9 s(\Delta t) - a_{10}\,c(\Delta t) & \ddot{s}(\Delta t) &= -a_9 c(\Delta t) + a_{10}\,s(\Delta t)
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

El método consiste en determinar $\eta_i, \dot{\eta}_i$ y $\ddot{\eta}_i$ a partir de los valores de η_{i-1} y $\dot{\eta}_{i-1}$ calculados en el paso anterior, de R_i y R_{i-1} siempre conocidos y de las constantes A_1 a A_{12}. El diagrama de flujo de la Figura 4.4 resume el procedimiento indicado anteriormente para resolver cada ecuación modal por este método.

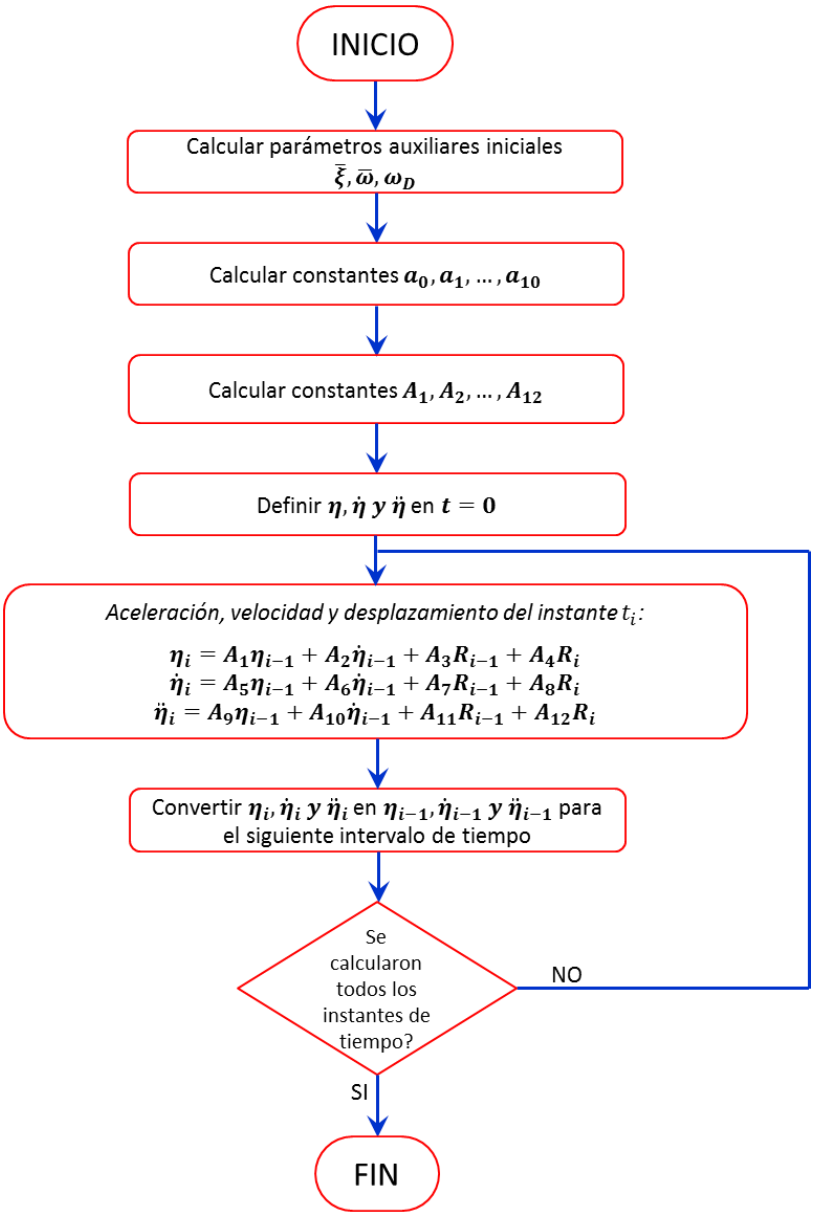


Figura 4.4. Diagrama de flujo del método basado en la interpolación de la excitación

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Del anterior diagrama se observa que el procedimiento se resume en los siguientes pasos:

Al inicio del proceso:

- Calcular $\omega_D, \bar{\omega}\ y\ \bar{\xi}$ las constantes a_0 a a_{10}
- Calcular las constantes A_1 a A_{12}
- Asignar valores iniciales para $\eta, \dot{\eta}\ y\ \ddot{\eta}$ en $t = 0$. Estos serán los valores de $\eta_{i-1}, \dot{\eta}_{i-1}\ y\ \ddot{\eta}_{i-1}$ en el primer intervalo de tiempo Δt.

Para cada intervalo de tiempo Δt:

- Calcular $\eta_i, \dot{\eta}_i\ y\ \ddot{\eta}_i$ a partir de $\eta_{i-1}, \dot{\eta}_{i-1}, R_i, R_{i-1}\ y\ A_1$ a A_{12}.
- El desplazamiento, la velocidad y la aceleración generalizadas, calculados para el instante i pasan a ser los valores conocidos del instante $i - 1$ del siguiente intervalo de tiempo.

Este método es el utilizado en programas comerciales como SAP2000© y ETABS©. Se obtiene una solución exacta si la carga externa se conoce a intervalos de tiempo de 0.005s. Adicionalmente el método no presenta problemas de convergencia, es incondicionalmente estable (Wilson, 2002).

4.2.3. Método β de Newmark

El método de Newmark se basa en las dos ecuaciones indicadas en (4.23), con las cuales se determinan el desplazamiento y la velocidad en el instante t_{i+1} a partir del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el instante t_i y de la aceleración en el instante t_{i+1}.

$$\begin{gathered} \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \end{gathered} \tag{4.23}$$

Los coeficientes $\beta\ y\ \gamma$ definen la variación de la aceleración $\ddot{u}(t)$ en el intervalo de tiempo considerado (Chopra, 2001; García, 1998). Si se adoptan $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$ la aceleración se asume constante y si se adoptan $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/6$ se asume una variación lineal de la aceleración en el intervalo de tiempo Δt.

La aceleración denominada $\ddot{u}_{i+1}$ se calcula despejándola de la ecuación de movimiento en el instante t_{i+1} como se muestra a continuación.

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{P_{i+1}}{m} - 2\xi\omega\dot{u}_{i+1} - \omega^2 u_{i+1} \tag{4.24}$$

El método es iterativo porque se debe suponer la aceleración $\ddot{u}_{i+1}$, con la cual se calculan el desplazamiento u_{i+1} y la velocidad $\dot{u}_{i+1}$, para finalmente recalcular la aceleración

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$\ddot{u}_{i+1}$. Generalmente se comienza suponiendo $\ddot{u}_{i+1}$ igual a $\ddot{u}_i$, la aceleración al comienzo del intervalo.

Si la diferencia entre la aceleración supuesta y la aceleración recalculada es mayor a una tolerancia, entonces se realiza una nueva iteración tomando como aceleración supuesta a la aceleración recalculada que se acaba de encontrar, recalculando nuevamente la aceleración. El proceso se repite hasta que la diferencia entre aceleraciones sea inferior a la tolerancia.

Modificando adecuadamente la nomenclatura, el método de Newmark permite calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración generalizada en cada instante de tiempo asociadas a cada modo de vibración, utilizando el siguiente procedimiento:

Al inicio del proceso:

- Seleccionar los coeficientes $\beta\ y\ \gamma$ y adoptar un valor para el error máximo ε.
- Asignar valores iniciales para $\eta_i, \dot{\eta}_i\ y\ \ddot{\eta}_i$ en $t = 0$. Generalmente se asumen todos iguales a cero.

En cada instante de tiempo Δt:

- Iniciar la primera iteración asumiendo $\ddot{\eta}_{i+1}$ igual a $\ddot{\eta}_i$.
- Calcular $\eta_{i+1}\ y\ \dot{\eta}_{i+1}$ con las siguientes expresiones:

$$\begin{gathered}\dot{\eta}_{i+1} = \dot{\eta}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{\eta}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\eta}_{i+1} \\ \eta_{i+1} = \eta_i + (\Delta t)\dot{\eta}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\eta}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{\eta}_{i+1}\end{gathered} \tag{4.25}$$

- Calcular $\ddot{\eta}_{i+1}{}^*$ con las siguiente expresión:

$$\ddot{\eta}_{i+1}{}^* = R_{i+1} - 2\xi\omega\dot{\eta}_{i+1} - \omega^2\eta_{i+1} \tag{4.26}$$

- Comparar la diferencia entre $\ddot{\eta}_{i+1}$ y $\ddot{\eta}_{i+1}{}^*$ con el error fijado.
  - Si $|\ddot{\eta}_{i+1}{}^* - \ddot{\eta}_{i+1}| \leq \varepsilon$, $\ddot{\eta}_{i+1}$ calculado es adecuado. Se pasa al siguiente intervalo de tiempo haciendo $i \rightarrow i+1$.
  - Si $|\ddot{\eta}_{i+1}{}^* - \ddot{\eta}_{i+1}| > \varepsilon$, $\ddot{\eta}_{i+1}$ calculado no es adecuado. Se toma $\ddot{\eta}_{i+1} = \ddot{\eta}_{i+1}{}^*$ y se realiza otra iteración.

El diagrama de flujo de la Figura 4.5 resume el método de Newmark utilizado para encontrar la solución las ecuaciones modales.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

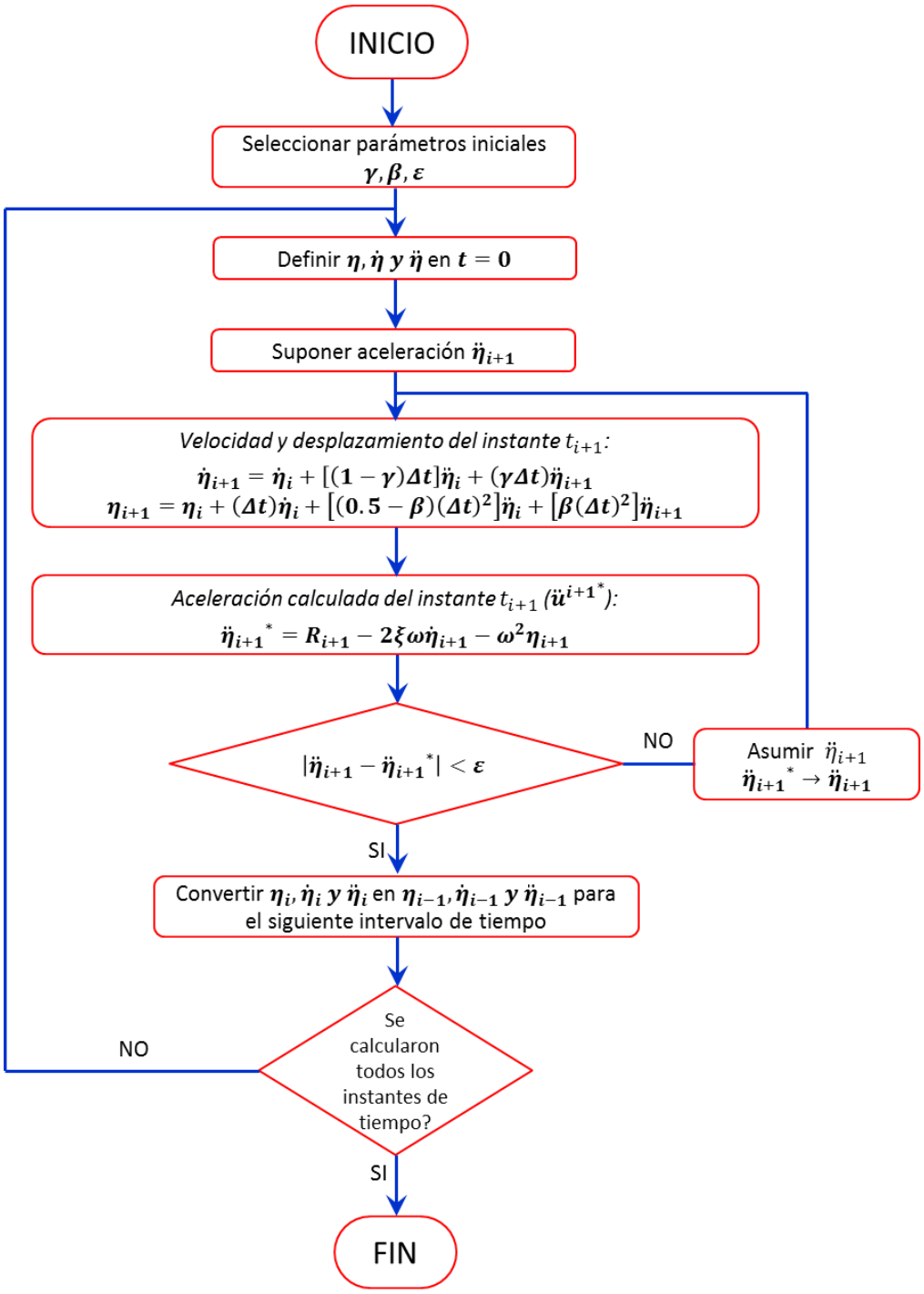


Figura 4.5. Diagrama de flujo del método de Newmark

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

4.3. Respuesta de la estructura en el análisis modal cronológico

A continuación se describe la forma de obtener algunas cantidades de interés que representan la respuesta de la estructura al movimiento de la base. Se describe como a partir de las coordenadas generalizadas en cada instante de tiempo se calcula cantidades como desplazamientos de centros de masa, desplazamientos de nudos o acciones internas en los elementos.

4.3.1. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa

Los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base de los centros de masa de la estructura, $\{u_\phi(t)\}, \{\dot{u}_\phi(t)\}\ y\ \{\ddot{u}_\phi(t)\}$ respectivamente, se obtienen con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\{u_\phi(t)\} &= [\Phi]\{\eta(t)\} = \{\phi_1\}\eta_1(t) + \cdots + \{\phi_i\}\eta_i(t) + \cdots + \{\phi_n\}\eta_n(t) \\
\{\dot{u}_\phi(t)\} &= [\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} = \{\phi_1\}\dot{\eta}_1(t) + \cdots + \{\phi_i\}\dot{\eta}_i(t) + \cdots + \{\phi_n\}\dot{\eta}_n(t) \\
\{\ddot{u}_\phi(t)\} &= [\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} = \{\phi_1\}\ddot{\eta}_1(t) + \cdots + \{\phi_i\}\ddot{\eta}_i(t) + \cdots + \{\phi_n\}\ddot{\eta}_n(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Las anteriores expresiones indican que cada cantidad que describe el movimiento de los centros de masa se obtiene superponiendo la contribución individual de cada modo de vibración $\{\phi_i\}$ la cual por ejemplo, para el caso de los desplazamientos, corresponde al producto $\{\phi_i\}\eta_i(t)$.

Los desplazamientos, velocidades y aceleraciones totales en cada instante de tiempo, $\{u_\phi^t(t)\}, \{\dot{u}_\phi^t(t)\}\ y\ \{\ddot{u}_\phi^t(t)\}$ respectivamente, medidas por un observador localizado en un sistema de referencia inercial o fijo, se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\{u_\phi^t(t)\} &= \{u_\phi(t)\} + \{u_g(t)\} \\
\{\dot{u}_\phi^t(t)\} &= \{\dot{u}_\phi(t)\} + \{\dot{u}_g(t)\} \\
\{\ddot{u}_\phi^t(t)\} &= \{\ddot{u}_\phi(t)\} + \{\ddot{u}_g(t)\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Donde $\{u_g(t)\}, \{\dot{u}_g(t)\}\ y\ \{\ddot{u}_g(t)\}$ son respectivamente los vectores de desplazamiento, la velocidad y la aceleración absoluta de la base en cada instante de tiempo.

4.3.2. Desplazamientos de nudos

Los desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos de la estructura en cada instante de tiempo $\{u(t)\}$ se obtienen a partir de los desplazamientos rela-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

tivos a la base de los centros de masa $\{u_\phi(t)\}$, de la matriz geométrica $[A]$ y de las submatrices $[K_{\gamma\alpha}]$ y $[K_{\gamma\gamma}]$ de $[K]$, llevando a cabo el siguiente procedimiento:

- *Desplazamientos desconocidos de interés*

Los desplazamientos desconocidos de interés en coordenadas globales $\{u_\alpha(t)\}$ se calculan con la siguiente expresión, a partir de los desplazamientos de los centros de masa $\{u_\phi(t)\}$ y de la matriz de asociación de desplazamientos $[A]$:

$$\{u_\alpha(t)\} = [A]\{u_\phi(t)\} \tag{4.29}$$

El anterior producto matricial da como resultado un vector columna de tamaño igual al número de grados de libertad desconocidos de interés.

- *Desplazamientos desconocidos condensados*

Los desplazamientos desconocidos condensados en coordenadas globales $\{u_\gamma(t)\}$ se calculan con la siguiente expresión:

$$\{u_\gamma(t)\} = -[K_{\gamma\gamma}]^{-1}[K_{\gamma\alpha}]\{u_\alpha(t)\} \tag{4.30}$$

Donde $[K_{\gamma\gamma}]$ y $[K_{\gamma\alpha}]$ son submatrices de la matriz de rigidez que considera todos los grados de libertad estáticos, y se conocen desde la etapa en que se construye la matriz de rigidez condensada a los grados de libertad de interés $[\tilde{k}_{\alpha\alpha}]$. El resultado es un vector columna de tamaño igual al número de grados de libertad desconocidos condensados.

- *Desplazamientos conocidos*

Los desplazamientos conocidos en coordenadas globales $\{u_\beta(t)\}$ son datos iniciales del problema. Estos se organizan en un vector columna en el mismo orden en el que se numeraron los grados de libertad conocidos.

- *Vector de desplazamientos de nudos*

El vector de desplazamientos de los nudos en coordenadas globales $\{u(t)\}$ tiene la siguiente forma:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} u_\alpha(t) \\ u_\gamma(t) \\ u_\beta(t) \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

Se obtiene al adjuntar los subvectores $\{u_\alpha(t)\}, \{u_\gamma(t)\}$ y $\{u_\beta(t)\}$ previamente mencionados. El resultado es un vector columna cuyo tamaño coincide con el número de grados de libertad estáticos de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

4.3.3. Derivas de centros de masa y por ejes de columnas

La deriva corresponde al desplazamiento horizontal relativo entre dos puntos localizados en la misma línea vertical, entre dos pisos o niveles consecutivos de una edificación. El control de la deriva es importante dado que el nivel de daño de los elementos no estructurales y la estabilidad global de la estructura, entre otros parámetros, están asociados con este parámetro (AIS, 2010).

En NSR-10 se plantean dos formas de evaluar las derivas para una estructura que hace parte de una edificación, dependiendo del grado de irregularidad de la estructura. A continuación se transcriben las dos formas mencionadas, tomadas de los numerales A.6.3.1.1 y A.6.3.1.2 del Capítulo A.6 – Requisitos de la Deriva:

A.6.3.1.1 - Para estructuras regulares e irregulares que no tengan irregularidades en planta tipo 1aP o 1bP, o edificaciones con diafragma flexible, la deriva máxima para el piso $\boldsymbol{i}$, $\Delta^{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{máx}}$, *corresponde a la mayor deriva de las dos direcciones principales en planta* $\boldsymbol{j}$, *calculada como el valor absoluto de la diferencia algebraica de los desplazamientos horizontales del centro de masa del diafragma del piso* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\delta_{cm,i}}$, *en la dirección principal en planta bajo estudio con respecto a los del diafragma del piso inmediatamente inferior* $(\boldsymbol{i-1})$ *en la misma direccion, incluyendo los efectos P-Delta.*

A.6.3.1.2 – en edificaciones que tengan irregularidades en planta de los tipos 1aP ó 1bP la deriva máxima en cualquier punto del piso $\boldsymbol{i}$, *se puede obtener como la diferencia entre los desplazamientos totales máximos, de acuerdo con A.6.2.4, del punto en el piso* $\boldsymbol{i}$ *y los desplazamientos horizontales totales máximos de un punto localizado en el mismo eje vertical en el piso inmediatamente inferior* $(\boldsymbol{i-1})$, *por medio de la siguiente ecuación:*

$$\Delta^{i}_{máx} = \sqrt{\sum_{j=1}^{2}\left(\delta^{i}_{tot,j} - \delta^{i-1}_{tot,j}\right)^2} \tag{4.32}$$

El cumplimiento del cálculo de la deriva para cualquier punto del piso se puede realizar verificándola solamente en todos los ejes verticales de columna y en los puntos localizados en los bordes de los muros estructurales. La máxima deriva del piso i, $\Delta^{i}_{máx}$, *corresponde a la máxima deriva que se obtenga de todos los puntos así estudiados dentro del mismo piso* i.

De los anteriores numerales se observa que cuando la estructura se clasifica como regular, el chequeo de este parámetro se realiza con las derivas de los centros de masa en direcciones x e y, pero si la estructura posee irregularidad de tipo 1aP (*irregularidad torsional*) ó 1bP (*irregularidad torsional extrema*) es necesario calcular el desplazamiento horizontal total de los extremos de cada columna o de cada muro estructural, y con base en ellos calcular las derivas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

4.3.4. Acciones inerciales, acciones de amortiguamiento y acciones equivalentes

El vector de acciones inerciales aplicadas en los centros de masa de los diafragmas en cada instante de tiempo $\{F_{I\phi}(t)\}$ se calcula a partir de la matriz de masa concentrada $[m]$ y del vector de aceleraciones relativas a la base de los centros de masa $\{\ddot{u}_{\phi}(t)\}$ en el mismo instante de tiempo, mediante la siguiente expresión:

$$\{F_{I\phi}(t)\} = [m]\{\ddot{u}_{\phi}(t)\} \tag{4.33}$$

Por otro lado el vector de acciones de amortiguamiento trasladadas a los centros de masa en cada instante de tiempo $\{F_{a\phi}(t)\}$ se calcula a partir de la matriz de amortiguamiento $[c]$ y del vector de velocidades relativas a la base de los centros de masa $\{\dot{u}_{\phi}(t)\}$ en el mismo instante de tiempo, mediante la siguiente expresión:

$$\{F_{a\phi}(t)\} = [c]\{\dot{u}_{\phi}(t)\} \tag{4.34}$$

De forma similar el vector de acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa en cada instante de tiempo $\{F_{s\phi}(t)\}$, se calcula a partir de la matriz de rigidez $[k_{\phi}]$ y del vector de desplazamientos relativos a la base de los centros de masa $\{u_{\phi}(t)\}$ en el mismo instante de tiempo, mediante la siguiente expresión:

$$\{F_{s\phi}(t)\} = [k_{\phi}]\{u_{\phi}(t)\} \tag{4.35}$$

Si la solución obtenida de la ecución (2.61) en cada instante de tiempo para los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base es correcta, se deb cumplir la siguiente ecuación de movimiento del sistema:

$$\{F_{I\phi}(t)\} + \{F_{a\phi}(t)\} + \{F_{s\phi}(t)\} = \{F_{ext}(t)\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_{g}(t)\} \tag{4.36}$$

4.3.5. Balance de energía

Partiendo de la Ecuación (3.76), sí en el instante t la estructura experimenta unos desplazamientos diferenciales en los centros de masa dados por el vector $\{du_{\phi}\}$, una cantidad diferencial del trabajo realizado por cada una de las acciones resultantes que actúan sobre los diafragmas se calculan con la siguiente expresión:

$$\{F_{I\phi}(t)\}^{T}\{du_{\phi}\} + \{F_{a\phi}(t)\}^{T}\{du_{\phi}\} + \{F_{s\phi}(t)\}^{T}\{du_{\phi}\} = \{F_{ext}(t)\}^{T}\{du_{\phi}\} \tag{4.37}$$

Al integrar cada uno de los términos entre el instante $t = 0$ y otro instante t diferente, la expresión anterior se convierte en la ecuación de balance de energía:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$E_c(t) + E_a(t) + E_s(t) = E_e(t) \tag{4.38}$$

Donde $E_c(t)$ y $E_s(t)$ corresponden respectivamente a la energía cinética de la estructura y a la energía potencial elástica o de deformación almacenada (*en la estructura*) en el instante t, mientras que $E_a(t)$ y $E_e(t)$ corresponden respectivamente a la energía disipada por el amortiguamiento natural y a la energía inducida por las acciones externas, desde $t = 0$ hasta el instante t. Por lo tanto se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \int_0^t \{F_{I\phi}(t)\}^T \{du_\phi\} \\ E_a(t) &= \int_0^t \{F_{a\phi}(t)\}^T \{du_\phi\} \\ E_s(t) &= \int_0^t \{F_{s\phi}(t)\}^T \{du_\phi\} \\ E_e(t) &= \int_0^t \{F_{ext}(t)\}^T \{du_\phi\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

A continuación se describe la forma de calcular cada una de las anteriores integrales para un sistema elástico de varios grados de libertad dinámicos.

- *Energía cinética*

La Ecuación (4.39a) que corresponde a la energía cinética de la estructura en el instante t, se escribe de la siguiente forma, teniendo en cuenta la Ecuación (4.33) y que $\{du_\phi\} = \{\dot{u}_\phi(t)\}dt$:

$$E_c(t) = \int_0^t \{F_{I\phi}(t)\}^T \{du_\phi\} = \int_0^t \left\{[m]\{\ddot{u}_\phi(t)\}\right\}^T \{\dot{u}_\phi(t)\}\, dt \tag{4.40}$$

Dado que $\{\ddot{u}_\phi(t)\} = \{d\dot{u}_\phi\}/dt$ entonces:

$$E_c(t) = \int_0^t \left\{[m]\{d\dot{u}_\phi\}\right\}^T \{\dot{u}_\phi(t)\} \tag{4.41}$$

Si la matriz de masa $[m]$ es diagonal, la energía cinética en el instante t se calcula con la siguiente expresión:

$$E_c(t) = \int_0^t \left(m_1 \cdot \dot{u}_{\phi 1} \cdot (t) d\dot{u}_{\phi 1} + m_2 \cdot \dot{u}_{\phi 2}(t) \cdot d\dot{u}_{\phi 2} + \cdots + m_n \cdot \dot{u}_{\phi n}(t) \cdot d\dot{u}_{\phi n}\right) \tag{4.42}$$

La solución de la anterior integral es directa y da como resultado:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{u}_{\phi 1}(t)\right)^2 + m_2\left(\dot{u}_{\phi 2}(t)\right)^2 + \cdots + m_n\left(\dot{u}_{\phi n}(t)\right)^2\right] \tag{4.43}$$

Donde m_i es cada una de las masas o momentos de inercia del sistema y $\dot{u}_{\phi i}$ es cada una de las velocidades (*traslacionales o angulares*) de los grados de libertad dinámicos en el instante t. La anterior ecuación escrita en forma matricial toma la siguiente forma:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\{\dot{u}_\phi(t)\}^T[m]\{\dot{u}_\phi(t)\} \tag{4.44}$$

Finalmente para un sistema de un grado de libertad dinámico:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{u}_\phi(t)\right)^2 \tag{4.45}$$

Donde m es la masa del sistema y $\dot{u}_\phi(t)$ es la velocidad relativa a la base de la masa en el instante t.

- *Energía potencial elástica*

La Ecuación (4.39c) que corresponde a la energía potencial elástica o a la energía de deformación almacenada en la estructura en el instante t, se escribe también de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} E_s(t) = \int_0^t \{F_{s\phi}(t)\}^T\{du_\phi\} \\ E_s(t) = \int_0^t \left(F_{s\phi 1}(t)\cdot du_{\phi 1} + F_{s\phi 2}(t)\cdot du_{\phi 2} + \cdots + F_{s\phi n}(t)\cdot du_{\phi n}\right) \end{gathered} \tag{4.46}$$

Dado que se supone que existe linealidad entre las acciones equivalentes actuando en los centros de masa y los desplazamientos correspondientes, cada una de las integrales que se forman de la Ecuación (4.46) equivalen al área bajo la curva fuerza vs desplazamiento, como se indica en la Figura 4.6 para el grado de libertad i.

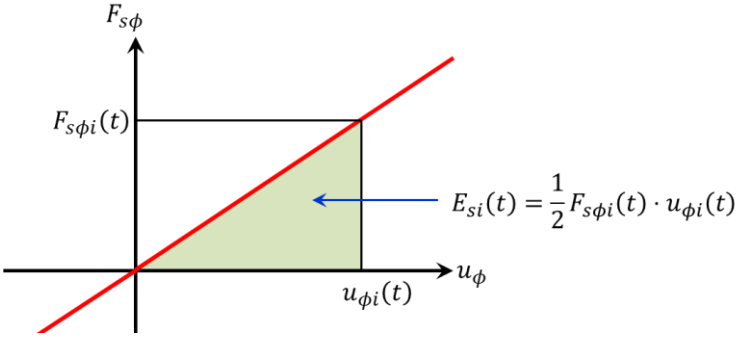


Figura 4.6. Energía de deformación almacenada en cada grado de libertad y en cada instante de tiempo

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Por lo tanto el aporte del grado de libertad i a la energía potencial elástica almacenada en la estructura en el instante t, estará dado por la siguiente expresión:

$$E_{si}(t) = \frac{1}{2}(F_s)_{\phi i} \cdot u_{\phi i}(t) = \frac{1}{2}\Big(k_{i1}u_{\phi 1}(t) + k_{i2}u_{\phi 2}(t) + \cdots + k_{in}u_{\phi n}(t)\Big)u_{\phi i}(t)$$
$$E_{si}(t) = \frac{1}{2}u_{\phi i}(t) \cdot \{k\}_i \cdot \{u_\phi(t)\} \tag{4.47}$$

Donde $u_{\phi i}(t)$ es el desplazamiento del grado de libertad i en el instante t, $\{k\}_i$ es la fila i de la matriz de rigidez $[k]$ y $\{u_\phi(t)\}$ es el vector de desplazamientos relativos a la base en el instante t. Al considerar el aporte de todos los grados de libertad dinámicos de la estructura y factorizando el término $(1/2)\{u_\phi(t)\}$, la energía potencial elástica $E_s(t)$ se escribe de la siguiente forma:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}\big(u_{\phi 1}(t) \cdot \{k\}_1 + u_{\phi 2}(t) \cdot \{k\}_2 + \cdots + u_{\phi n}(t) \cdot \{k\}_n\big)\{u_\phi(t)\} \tag{4.48}$$

Dado que la matriz de rigidez es simétrica, se cumple la siguiente igualdad:

$$u_{\phi 1}(t)\{k\}_1 + u_{\phi 2}(t)\{k\}_2 + \cdots + u_{\phi n}(t)\{k\}_n = \{u_\phi(t)\}^T[k] \tag{4.49}$$

Por lo tanto, la ecuación para calcular $E_s(t)$ se escribe en una forma más compacta como se muestra a continuación:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}\{u_\phi(t)\}^T[k]\{u_\phi(t)\} \tag{4.50}$$

Finalmente, para un sistema de un grado de libertad dinámico:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k\big(u_\phi(t)\big)^2 \tag{4.51}$$

Donde k es la rigidez del sistema y $u_\phi(t)$ es el desplazamiento relativo a la base de la masa en el instante t.

- *Energía disipada por amortiguamiento natural*

La Ecuación (4.39b) que corresponde a la energía disipada por amortiguamiento natural desde $t = 0$ hasta el instante t, se escribe de la siguiente forma:

$$E_a(t) = \int_0^t \{F_{a\phi}(t)\}^T\{du_\phi\} = \int_0^t \big([c]\{\dot{u}_\phi(t)\}\big)^T\{\dot{u}_\phi\}dt \tag{4.52}$$

Esta ecuación no se puede evaluar de forma directa como se hizo en los casos anteriores con las energías cinética y potencial, por lo que su cálculo se realiza utilizando algún méto-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

do de integración numérica, como por ejemplo la regla del trapecio. Por lo tanto al replantear la ecuación anterior, partiendo de $\{du_\phi\} = \{\dot{u}_\phi(t)\}dt$:

$$E_a(t) = \int_0^t \{F_{a\phi}(t)\}^T \{\dot{u}_\phi(t)\}dt \tag{4.53}$$

Adoptando un enfoque incremental por intervalos de tiempo definidos del instante $t - \Delta t$ al instante t y suponiendo que se conoce la energía disipada al comienzo el intervalo $E_a(t - \Delta t)$, la energía disipada al final del intervalo $E_a(t)$ se calcula con la siguiente expresión:

$$E_a(t) = E_a(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t \{F_{a\phi}(t)\}^T \{\dot{u}_\phi(t)\}dt \tag{4.54}$$

La integral que aparece en la Ecuación (4.54) equivale a la suma de los incrementos de energía disipada en el intervalo aportados por cada grado de libertad, como lo indica en siguiente expresión:

$$\int_{t-\Delta t}^t \{F_{a\phi}(t)\}^T \{\dot{u}_\phi(t)\}dt = \sum_{i=1}^n \int_{t-\Delta t}^t F_{a\phi i}(t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t) \cdot dt \tag{4.55}$$

Donde $F_{a\phi i}$ es la fuerza de amortiguamiento que actúa en el grado de libertad i y $\dot{u}_{\phi i}(t)$ es la velocidad del mismo grado de libertad, ambas en el instante t, y n es el número total de grados de libertad dinámicos del sistema.

Cada integral de la Ecuación (4.55) se calcula como el área bajo la curva de la función $f(t) = F_{a\phi i}(t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t)$ evaluada entre $t - \Delta t$ y t. Esta área se asemeja al área de un trapecio de base Δt y alturas $[F_{a\phi i(t-\Delta t)} \cdot \dot{u}_{\phi i(t-\Delta t)}]$ y $[F_{a\phi i(t)} \cdot \dot{u}_{\phi i(t)}]$ como se indica en la Figura 4.7.

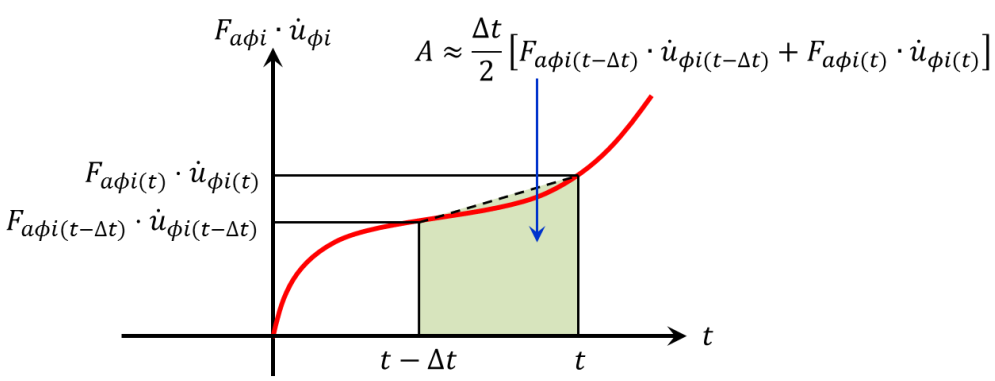


Figura 4.7. Incremento en la energía disipada aportado por cada grado de libertad al sistema

Por lo tanto:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\int_{t-\Delta t}^{t} F_{a\phi i}(t)\cdot \dot{u}_{\phi i}(t)dt \approx \frac{\Delta t}{2}\left[F_{a\phi i}(t-\Delta t)\cdot \dot{u}_{\phi i}(t-\Delta t)+F_{a\phi i}(t)\cdot \dot{u}_{\phi i}(t)\right] \qquad (4.56)$$

Finalmente, para un sistema de un grado de libertad dinámico la energía amortiguada hasta el instante t se aproxima con la siguiente expresión, en función de las fuerzas de amortiguamiento y las velocidades al comienzo y al final del intervalo y de la energía disipada hasta el instante $t-\Delta t$.

$$E_a(t) \approx E_a(t-\Delta t)+\frac{\Delta t}{2}\left[F_{a\phi}(t-\Delta t)\cdot \dot{u}_{\phi}(t-\Delta t)+F_{a\phi}(t)\cdot \dot{u}_{\phi}(t)\right] \qquad (4.57)$$

- *Energía de entrada*

La Ecuación (4.39d) que corresponde a la energía de entrada o a la energía inducida por las acciones externas equivalentes a la aceleración de la base (*no por la aceleración de la base*) desde $t=0$ hasta el instante t se escribe también de la siguiente forma:

$$E_e(t)=\int_0^t \{F_{ext}(t)\}^T\{du_{\phi}\}=\int_0^t \{F_{ext}(t)\}^T\{\dot{u}_{\phi}(t)\}dt \qquad (4.58)$$

Esta ecuación tampoco se puede evaluar de forma directa como se hizo con las energías cinética y potencial. Su cálculo se realiza de forma numérica, similar a como se presentó para la energía disipada por amortiguamiento natural.

Adoptando un enfoque incremental y suponiendo que se conoce la energía de entrada al comienzo el intervalo $E_e(t-\Delta t)$, la energía de entrada al final del intervalo $E_e(t)$ se calcula con la siguiente expresión:

$$E_e(t)=E_e(t-\Delta t)+\int_{t-\Delta t}^{t} \{F_{ext}(t)\}^T\{\dot{u}_{\phi}(t)\}dt \qquad (4.59)$$

La integral que aparece en la expresión anterior equivale a la suma de los incrementos de energía de entrada aportados por cada grado de libertad en el intervalo Δt, como lo indica la siguiente expresión:

$$\int_{t-\Delta t}^{t} \{F_{ext}(t)\}^T\{\dot{u}_{\phi}(t)\}dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\Delta t}^{t} F_{ext-i}(t)\cdot \dot{u}_{\phi i}(t)\cdot dt \qquad (4.60)$$

Donde $F_{ext-i}(t)$ es la fuerza externa que actúa en el grado de libertad i y $\dot{u}_{\phi i}(t)$ es la velocidad del mismo grado de libertad, ambas e el instante de tiempo t, y n es el número total de grados de libertad del sistema.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Cada integral de la Ecuación (4.60) se calcula como el área bajo la curva de la función $f(t) = F_{ext-i}(t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t)$ evaluada entre $t - \Delta t$ y t, similar a como se hizo con la energía disipada por amortiguamiento. Por lo tanto:

$$\int_{t-\Delta t}^{t} F_{ext-i}(t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t) \cdot dt \approx \frac{\Delta t}{2}\left[F_{ext-i}(t-\Delta t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t-\Delta t) + F_{ext-i}(t) \cdot \dot{u}_{\phi i}(t)\right] \qquad (4.61)$$

Finalmente, para un sistema de un grado de libertad dinámico la energía de entrada hasta el instante t se aproxima con la siguiente expresión, en función de las fuerzas externas y las velocidades de la masa al comienzo y al final del intervalo y de la energía de entrada hasta el instante $t - \Delta t$.

$$E_e(t) \approx E_e(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\left[F_{ext}(t-\Delta t) \cdot \dot{u}_{\phi}(t-\Delta t) + F_{ext}(t) \cdot \dot{u}_{\phi}(t)\right] \qquad (4.62)$$

La precisión alcanzada en la evaluación de las integrales numéricas depende básicamente del tamaño del intervalo de tiempo Δt utilizado en el análisis.

Es importante aclarar que los términos de la ecuación de balance de energía cuya forma de calcular se acaba de describir, corresponden al movimiento relativo a la base de la estructura y no al movimiento absoluto, puesto que para su planteamiento se utilizó la Ecuación (4.37) que relaciona acciones debidas a la deformación de la estructura, la cual a su vez depende del movimiento relativo a la base y no del movimiento absoluto de esta.

4.3.6. Cortantes de piso y cortante basal

Los cortantes de piso corresponden a las fuerzas cortantes en direcciones x e y globales acumuladas internamente en cada piso de la estructura. El cortante basal coincide con la suma de las fuerzas equivalentes aplicadas en los centros de masa en cada dirección global x e y.

A modo de ejemplo la Figura 4.8 muestra el significado de los cortantes de piso y del cortante basal, tomando como ejemplo una estructura plana de tres niveles. En este caso las acciones $V_1, V_2\ y\ V_3$ representan los cortantes de piso y V_b representa el cortante basal, el cual coincide con el cortante del piso más bajo de la estructura, o con la suma algebraica de todas las acciones equivalentes aplicadas en los centros de masa, que para este caso son $F_{\phi 1}, F_{\phi 2}\ y\ F_{\phi 3}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

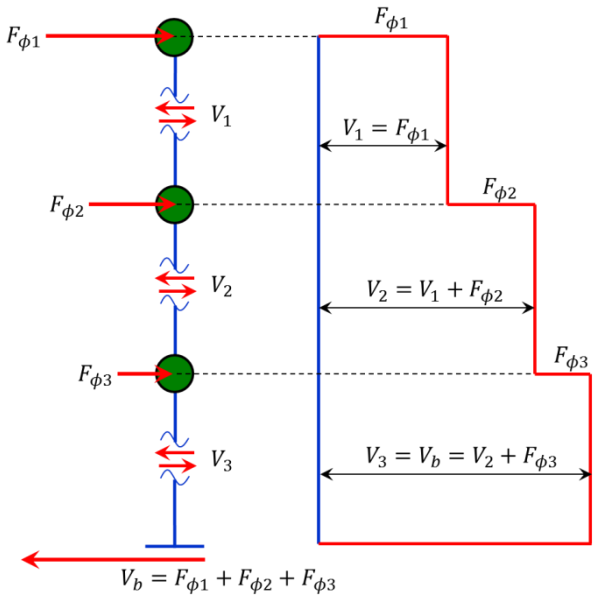


Figura 4.8. Cortantes de piso y del cortante basal en función de acciones elásticas

4.3.7. Acciones en los extremos de los elementos

El vector de acciones en coordenadas locales que actúan en los extremos de cada elemento estructural y en cada instante de tiempo $\{\bar{f}_e(t)\}$ y que corresponden al efecto del resto de la estructura sobre tal elemento (Azar, 1972; McGuire et al., 2000) se calculan a partir de la matriz rigidez del elemento en coordenadas locales $[\bar{k}_e]$ y del vector de desplazamientos relativos a la base y en coordenadas locales de los nudos del elemento $\{\bar{u}_e(t)\}$ en el mismo instante de tiempo. Estas tres variables se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\{\bar{f}_e(t)\} = [\bar{k}_e]\{\bar{u}_e(t)\} \tag{4.63}$$

En la anterior expresión se asume que no hay cargas externas puntuales o distribuidas aplicadas en la luz del elemento, por lo que tampoco existen acciones fijas en los extremos. Generalmente las acciones de este tipo son estáticas y su efecto sobre la estructura se tiene en cuenta en un caso de carga diferente.

La matriz de rigidez $[\bar{k}_e]$ se obtiene de la misma forma en que se indicó para construir la matriz de rigidez general de la estructura. El vector $\{\bar{u}_e(t)\}$ se obtiene al transformar los desplazamientos de los nudos del elemento en coordenadas globales $\{u_e(t)\}$ a coordenadas locales. Para ello se usa el siguiente producto matricial:

$$\{\bar{u}_e(t)\} = [T_e]\{u_e(t)\} \tag{4.64}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

donde $[T_e]$ es la matriz de transformación de coordenadas del elemento. El vector $\{u_e(t)\}$ se obtiene extrayendo los desplazamientos de los nudos del elemento del vector de desplazamientos de los nudos de la estructura en coordenadas globales $\{u(t)\}$.

El anterior procedimiento debe realizarse para cada elemento estructural y para cada instante de tiempo considerado en el análisis.

4.3.8. Acciones internas en los elementos

Para cada elemento estructural las acciones internas debidas solo a la aceleración de la base, sin considerar cargas estáticas aplicadas en la luz, se construyen por estática a partir de las acciones en coordenadas locales aplicadas en uno de los extremos.

La Figura 4.9 muestra el diagrama de cuerpo libre del tramo inicial de un elemento estructural arbitrariamente orientado. Sobre el elemento actúan las seis acciones aplicadas en el extremo inicial i y las seis acciones internas actuantes en una sección s localizada a una distancia x del extremo inicial que mantienen el equilibrio. Todas las acciones están planteadas en dirección positiva.

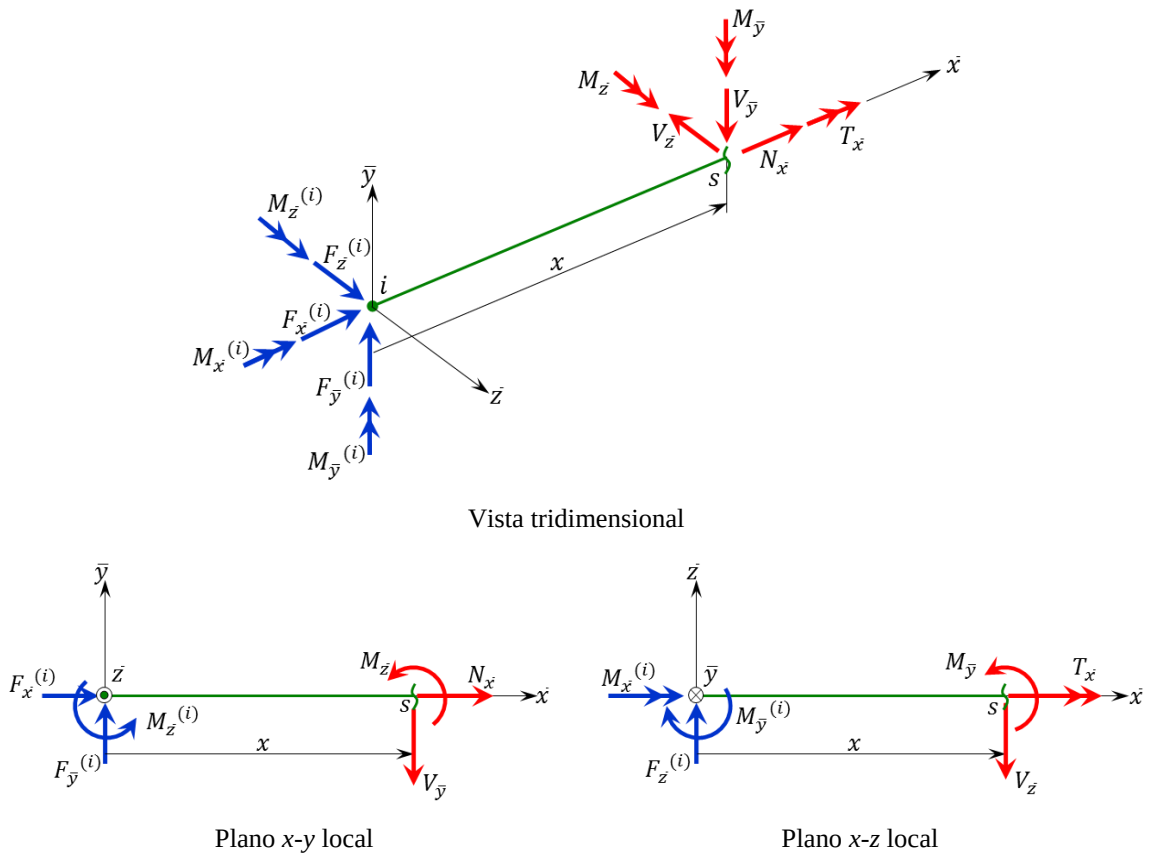


Figura 4.9. Diagrama de cuerpo libre para el cálculo de las acciones internas

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Al aplicar las seis ecuaciones de equilibrio al tramo indicado del elemento, se llega a las siguientes expresiones mediante las cuales es posible calcular las acciones internas en cualquier sección, en función de la distancia de la sección desde el extremo inicial y de las acciones en coordenadas locales actuantes en el mismo extremo.

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_{\bar{x}} &= 0 \qquad & N_{\bar{x}} &= -F_{\bar{x}}^{(i)} \\
\Sigma F_{\bar{y}} &= 0 \qquad & V_{\bar{y}} &= F_{\bar{y}}^{(i)} \\
\Sigma F_{\bar{z}} &= 0 \qquad & V_{\bar{z}} &= F_{\bar{z}}^{(i)} \\
\Sigma M_{s,\bar{x}} &= 0 \qquad & T_{\bar{x}} &= -M_{\bar{x}}^{(i)} \\
\Sigma M_{s,\bar{y}} &= 0 \qquad & M_{\bar{y}} &= F_{\bar{z}}^{(i)} x + M_{\bar{y}}^{(i)} \\
\Sigma M_{s,\bar{z}} &= 0 \qquad & M_{\bar{z}} &= F_{\bar{y}}^{(i)} x - M_{\bar{z}}^{(i)}
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

Como en el cálculo de las acciones en los extremos de los elementos, el anterior procedimiento debe realizarse para cada elemento estructural y para cada instante de tiempo considerado en el análisis.

4.4. Análisis modal espectral. Resumen del método

El análisis modal espectral permite estimar la respuesta máxima probable de la estructura a partir de un espectro elástico, sin necesidad de realizar análisis dinámico cronológico (Chopra, 2001). Generalmente la respuesta se calcula a partir del *espectro de pseudo-aceleraciones* de respuesta o de diseño.

Similar al método de análisis modal cronológico, el análisis modal espectral es aplicable solamente a estructuras que se mantienen en el rango elástico de deformaciones y con amortiguamiento clásico. No es aplicable a sistemas no lineales.

El procedimiento que se describe a continuación permite calcular la máxima respuesta de una estructura sometida a la acción de una o más componentes de aceleración en la base de forma simultánea. En forma simplificada y siendo consistentes con la idealización analítica de las estructuras tipo descrita en el Capítulo 2, se considera que sobre la estructura actúan solamente dos componentes horizontales mutuamente ortogonales de aceleración en la base en direcciones x e y. No se considera la componente del movimiento sísmico en dirección z.

Dado que el análisis espectral, basado en la utilización de un espectro de respuesta o de diseño, permite obtener la respuesta máxima de la estructura se somete a una sola compo-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

nente de aceleración en la base, es necesario dividir el problema en dos etapas: una primera etapa en la que se obtiene la respuesta máxima probable de la estructura cuando sobre ella actúa cada componente de aceleración de la base de forma individual, y una segunda etapa que consiste en la combinación de la respuesta máxima probable producida por cada componente del sismo utilizando métodos probabilísticos (Wilson, 2002).

Para calcular la respuesta máxima probable producida por cada componente de aceleración de la base, es necesario calcular inicialmente los desplazamientos generalizados máximos por modo i y por componente de aceleración de la base j denominados $(\eta_{ij})_o$, que corresponden al máximo valor positivo o negativo de la solución de cada ecuación diferencial desacoplada (4.6). Los desplazamientos generalizados máximos se calculan a partir de las pseudo – aceleraciones espectrales S_{ai}, que son función del periodo de vibración de cada modo y que se leen del espectro de pseudo-aceleraciones, asi como de los factores de participación modal α_{ij}.

Los desplazamientos generalizados máximos se requieren para calcular los desplazamientos máximos por modo de los centros de masa, a partir de los cuales se obtienen los demás parámetros de respuesta máxima aportada por cada modo de vibración a la estructura, de forma similar a como se describió en el método de análisis modal cronológico para cada instante de tiempo.

Para cada parámetro que represente la respuesta de la estructura (*desplazamientos, derivas, acciones internas, etc.)*, se lleva a cabo el siguiente procedimiento para estimar su valor máximo probable producido por la aplicación simultánea de todas las componentes de aceleración de la base consideradas (*los pasos a y b corresponden a la primera etapa y el paso c corresponde a la segunda etapa*):

a) El aporte máximo de cada modo de vibración a la respuesta total, cuando actúa cada componente de aceleración de la base individualmente sobre la estructura, se evalúa utilizando las mismas expresiones mencionadas en la sección de análisis modal cronológico.

Por ejemplo, para estimar el aporte máximo de un modo de vibración a los desplazamientos de los centros de masa, en función de la matriz de modos de vibración y de los desplazamientos generalizados máximos, se utiliza la siguiente expresión:

$$\left\{\left(u_{\phi i}\right)_o^j\right\} = \{\phi_i\}\left(\eta_{ij}\right)_o \tag{4.66}$$

O para estimar el aporte máximo del mismo modo a las acciones equivalentes aplicadas en los centros de masa $\{(F_{s\phi i})_o^j\}$, a partir de la matriz de rigidez lateral $[k_\phi]$ y de los desplazamientos máximos de los centros de masa $\{(u_{\phi i})_o^j\}$, se utiliza la siguiente expresión:

$$\left\{\left(F_{s\phi i}\right)_o^j\right\} = \left[k_\phi\right]\left\{\left(u_{\phi i}\right)_o^j\right\} \tag{4.67}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En las anteriores expresiones *i* corresponde a cada modo de vibración y *j* corresponde a cada componente de aceleración de la base, lo que significa que cada cantidad se evalúa por modo y por cada dirección de aplicación de los movimientos sísmicos. De igual forma el aporte se evalúa separadamente para cada modo, es decir, sin sobreponerlos o sumarlos.

b) Las respuestas por modo y por componente de aceleración de la base se deben combinar utilizando métodos probabilísticos denominados *métodos de combinación modal espectral*. La razón para combinarlos está en que los máximos aportes por modo no suceden en el mismo instante de tiempo ni tienen el mismo signo (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Wilson, 1985). Como resultado se obtiene la respuesta máxima probable de la estructura r_o^j, producida por cada componente de aceleración de la base *j* actuando individualmente.

c) Las respuestas máximas probables por modo y por componente de aceleración, r_o^j, se combinan utilizando métodos de combinación direccional para tener en cuenta efectos ortogonales, es decir, cuando las componentes del movimiento sísmico actúan de forma simultánea sobre la estructura (García, 1998). La razón para combinar probabilísticamente las respuestas máximas producidas por cada componente de aceleración radica en que en realidad el 100% de los movimientos sísmicos en cada dirección no se presentan en el mismo instante de tiempo, dada la baja correlación entre componentes (Clough & Penzien, 1995), por lo que la máxima respuesta estructural producida por cada componente tampoco se presenta de forma simultánea.

4.5. Espectros elásticos de respuesta

4.5.1. Concepto de espectro elástico de respuesta

Un espectro de respuesta es una representación del valor máximo en valor absoluto de cualquier respuesta estructural (*desplazamientos, aceleraciones, fuerzas internas, etc.*) en función del periodo de vibración natural T_i de cada sistema elástico de un grado de libertad. En el espectro se resume la máxima respuesta de todos los posibles sistemas elásticos de un grado de libertad que poseen el mismo amortiguamiento.

La respuesta máxima de cada sistema de un grado de libertad se representa también en función de la frecuencia de vibración natural ω_i, pero para los ingenieros es más familiar relacionar cada cantidad con el periodo de vibración.

Dada la variabilidad de la aceleración en la base $\ddot{u}_g(t)$ a partir de la cual se debe encontrar la respuesta en el tiempo de cada sistema de un grado de libertad, para la construcción de un espectro elástico es necesario utilizar métodos numéricos como los descritos en la

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

sección de análisis modal cronológico para resolver las ecuaciones modales desacopladas, como por ejemplo los métodos de aceleración lineal o de la excitación lineal.

El espectro de respuesta es una manera práctica de caracterizar los movimientos en la base y su efecto en las estructuras. Provee una forma conveniente de resumir la respuesta máxima de todos los posibles sistemas lineales de un grado de libertad, sometidos a una misma componente de un movimiento sísmico. Adicionalmente constituye un procedimiento práctico de aplicar el conocimiento de la dinámica estructural al diseño de estructuras y al desarrollo de los requisitos de fuerzas laterales en los códigos de diseño y construcción (Chopra, 2001).

Cabe anotar que al construir un espectro, el signo de la respuesta máxima y el instante de tiempo donde esta se presenta se pierden completamente, por lo que la respuesta espectral es siempre positiva.

4.5.2. Espectros de respuesta de desplazamiento, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración

Los espectros de respuesta de desplazamiento, pseudo-velocidad relativa o simplemente *pseudo-velocidad*, y de pseudo-aceleración total o simplemente *pseudo-aceleración*, son de gran importancia en el estudio de las características de los espectros de respuesta, para construir espectros de diseño y para establecer una conexión entre los resultados de la dinámica estructural y los códigos de diseño y construcción.

- *Espectro de desplazamiento*

La ecuación que gobierna el movimiento del sistema elástico de un grado de libertad *i* sujeto a una aceleración en la base $\ddot{u}_g(t)$ se muestra a continuación:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_i\dot{u} + \omega_i^2 u = -u_g(t) \tag{4.68}$$

De ella se deduce que, para la misma aceleración en la base, el desplazamiento relativo de la masa solo es función del tiempo t, de la frecuencia de vibración natural ω_i, o lo que es equivalente, del periodo de vibración natural T_i, así como del amortiguamiento ξ del sistema:

$$u \equiv u(t, T_i, \xi) \tag{4.69}$$

El espectro de respuesta de desplazamiento resume el desplazamiento relativo a la base máximo de todos los posibles sistemas elásticos de un grado de libertad con el mismo amortiguamiento. La cantidad u_o es por definición:

$$u_o = D \equiv u_o(T_i, \xi) \equiv máx|u(t, T_i, \xi)| \tag{4.70}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La construcción de este espectro consiste en obtener para cada sistema el máximo desplazamiento en valor absoluto de la masa respecto a la base, denominado u_o ó D, para posteriormente representarlo en función del periodo de vibración natural correspondiente.

La pareja de valores T, D representa un punto en el espectro. El anterior procedimiento debe hacerse para un número importante de sistemas de un grado de libertad, manteniendo constante la fracción de amortiguamiento ξ de forma que se abarque un rango de periodos de vibración suficiente.

A modo de ejemplo la Figura 4.10 tomada de (Chopra, 2001) muestra el espectro de respuesta de desplazamientos de la componente N-S del sismo de El Centro, construido para una fracción de amortiguamiento del 2% ($\xi = 0.02$). En la figura se observa cómo se obtiene el desplazamiento máximo para diferentes sistemas elásticos de un grado de libertad con diferente periodo de vibración e igual fracción de amortiguamiento, y se observa cómo cada pareja de datos T, D representa solamente un punto en el espectro.

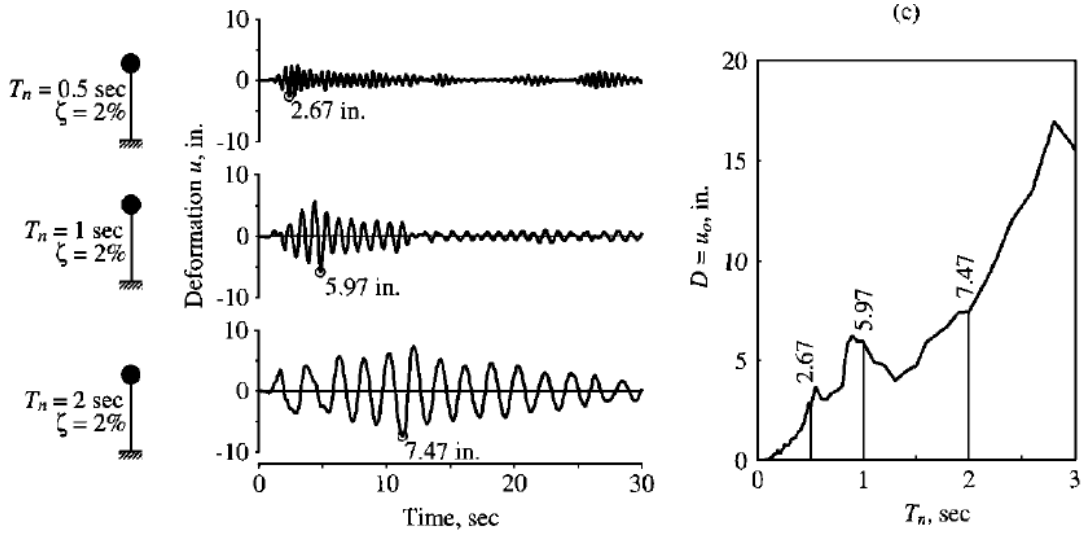


Figura 4.10. Construcción del espectro de deformación para el sismo de El Centro (Chopra, 2001)

Para encontrar la respuesta máxima de cualquier sistema de un grado de libertad en términos de deformaciones o acciones internas, solo se requiere conocer el correspondiente espectro de respuesta de desplazamiento, ya que conociendo u_0, el valor máximo del desplazamiento de la masa respecto a la base, la fuerza estática equivalente F_{so} que produce el mismo desplazamiento u_o, se evalúa con la siguiente expresión:

$$F_{so} = ku_o \tag{4.71}$$

Con F_{so} conocida, mediante un análisis estático es posible evaluar las deformaciones y las acciones internas en los elementos que componen el sistema.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Espectro de pseudo-velocidad*

La máxima pseudo – velocidad V del sistema elástico de un grado de libertad i con frecuencia de vibración ω_i y desplazamiento relativo máximo D, está dada por la siguiente expresión:

$$V = \omega_i D \tag{4.72}$$

La máxima pseudo-velocidad no coincide con la máxima velocidad relativa a la base de la masa $\dot{u}_o$, aunque las unidades de estas dos cantidades son las mismas. La pseudo-velocidad está asociada con la máxima energía de deformación almacenada en el sistema durante el movimiento sísmico, como se muestra con la siguiente expresión:

$$E_{so} = \frac{ku_o^2}{2} = \frac{(m\omega_i^2)(V/\omega_i)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} \tag{4.73}$$

- *Espectro de pseudo-aceleración*

La máxima pseudo-aceleración A delsistema elástico de un grado de libertad i con frecuencia de vibración ω_i y desplazamiento relativo máximo D, está dada por la siguiente expresión:

$$A = \omega_i^2 D \tag{4.74}$$

La máxima pseudo-aceleración no equivale a la máxima aceleración total $\ddot{u}_o^t$ que experimenta la masa durante el sismo, aunque las unidades de estas dos cantidades son las mismas. La pseudo-aceleración A está asociada con el máximo cortante basal inducido por el sismo al sistema, el cual equivale a la máxima fuerza estática equivalente F_{so} actuando sobre la masa:

$$V_{bo} = F_{so} = kD = \left(m\omega_i^2\right)D = mA \tag{4.75}$$

Otra forma de entender la diferencia entre los espectros de pseudo – aceleración y aceleración total es observando que el producto mA corresponde solo a la máxima fuerza resistente F_{so}, mientras que $m\ddot{u}_o^t$ corresponde la máxima suma de las fuerzas resistente y de amortiguamiento $(F_s + F_a)_o$, de donde se deduce que $\ddot{u}_o^t$ es siempre mayor que A, aunque numéricamente son muy similares dado el rango de periodos y amortiguamientos en que se encuentran las estructuras de ingeniería, por lo que A es una buena estimación de $\ddot{u}_o^t$.

La relación entre cortante basal máximo y pseudo-aceleración máxima se escribe también de la siguiente forma:

$$V_{bo} = S_a W \tag{4.76}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Donde $W\ y\ S_a$ son respectivamente el peso de la estructura y el coeficiente de cortante basal (Chopra, 2001), también conocido la máxima aceleración horizontal de diseño (AIS, 2010) o simplemente *aceleración espectral*. En este caso S_a corresponde a la máxima pseudo – aceleración expresada como fracción de la aceleración de la gravedad g.

4.6. Desplazamientos generalizados máximos

El espectro de pseudo aceleraciones de respuesta o de diseño, independientemente de las diferencias conceptuales existentes en cuanto a su procedencia y utilización, es por lo general la base para calcular la respuesta máxima de una estructura idealizada como un sistema elástico de varios grados de libertad, sometida a la acción de una sola componente de aceleración en la base (Wilson, 2002).

A partir de la aceleración espectral correspondiente a cada periodo de vibración y por lo tanto a cada modo de vibración natural de la estructura, se evalúa el máximo desplazamiento generalizado $(\eta_i)_o$ asociado a cada modo, y por ende el aporte máximo de cada modo a los desplazamientos totales de la estructura.

A continuación se describe la forma de obtener los desplazamientos generalizados máximos asociados a cada modo y a cada componente de aceleración en la base, los cuales se pueden organizar en una matriz denominada $[\eta_o]$ en la que cada fila corresponde a un modo de vibración y cada columna corresponde a una componente de aceleración en la base.

Recordando que la Ecuación (4.68) describe el movimiento de un sistema elástico de un grado de libertad sometido a una componente de aceleración en la base, y que su solución corresponde a la función $u(t)$, que tiene como valor máximo a $u_o = D$. De las relaciones existentes entre u_o y A y entre A y S_a mostradas en la sección anterior, se plantea una relación directa entre el desplazamiento relativo máximo de la masa u_o y la correspondiente aceleración espectral como fracción de la aceleración de la gravedad S_a:

$$u_o \equiv D = \frac{A}{\omega^2} = \frac{S_a \cdot g}{\omega^2} \tag{4.77}$$

Por otro lado la ecuación modal desacoplada, asociada al modo de vibración i $(con\ i = 1,2, \dots, n)$, cuando actúa el sismo únicamente en la dirección j $(con\ j = 1\ y\ 2)$ es:

$$\ddot{\eta}_{ij} + 2\xi\omega_i\dot{\eta}_{ij} + \omega_i^2\eta_{ij} = -\alpha_{ij}\ddot{u}_{gj}(t) \tag{4.78}$$

Si se definen las siguientes cantidades, siendo α_{ij} constante:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$D_i = \frac{\eta_{ij}}{\alpha_{ij}} \qquad \dot{D}_i = \frac{\dot{\eta}_{ij}}{\alpha_{ij}} \qquad \ddot{D}_i = \frac{\ddot{\eta}_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{4.79}$$

Al remplazar las anteriores expresiones en la Ecuación (4.78) el coeficiente de participación α_{ij} desaparece y la ecuación se transforma en lo siguiente:

$$\ddot{D}_i + 2\xi\omega_i\dot{D}_i + \omega_i^2 D_i = -\ddot{u}_{gj}(t) \tag{4.80}$$

La anterior expresión es similar a la Ecuación (4.68). La solución de la Ecuación (4.80) da como resultado la función $D_i(t)$. Por lo tanto, el desplazamiento generalizado $\eta_{ij}(t)$ se obtiene con la siguiente expresión:

$$\eta_{ij}(t) = \alpha_{ij} D_i(t) \tag{4.81}$$

Entonces el valor máximo absoluto de $\eta_{ij}(t)$ se obtiene a partir del coeficiente de participación α_{ij} y del desplazamiento máximo $(D_i)_o$ con la siguiente expresión:

$$\left(\eta_{ij}\right)_o = \left|\alpha_{ij}\right|(D_i)_o \tag{4.82}$$

Como el desplazamiento máximo $(D_i)_o$ se relaciona con la pseudo – aceleración espectral $(S_a)_i$ a través de la siguiente expresión:

$$(D_i)_o \frac{\left(\eta_{ij}\right)_o}{\left|\alpha_{ij}\right|} = \frac{A_i}{\omega_i^2} = \frac{(S_a)_i \cdot g}{\omega_i^2} \tag{4.83}$$

Entonces el desplazamiento generalizado máximo correspondiente al modo i, cuando actúa el sismo solamente en dirección j, denominado $(\eta_{ij})_o$, se calcula como:

$$\left(\eta_{ij}\right)_o = \frac{\left|\alpha_{ij}\right| \cdot (S_a)_i \cdot g}{\omega_i^2} = \frac{\left|\alpha_{ij}\right| \cdot (S_a)_i \cdot g \cdot T_i^2}{4\pi^2} \tag{4.84}$$

Los desplazamientos generalizados máximos calculados mediante la Ecuación (4.84) se almacenan en la matriz $[\eta_o]$ de forma que a cada fila le corresponda un modo de vibración y a cada columna le corresponda una componente de aceleración de la base, que para este caso serían x e y solamente. La forma de la matriz $[\eta_o]$ es la siguiente (*n corresponde al número de modos de vibración natural considerados en el análisis*):

$$[\eta_o] = \begin{bmatrix} (\eta_{1x})_0 & \left(\eta_{1y}\right)_0 \\ (\eta_{2x})_0 & \left(\eta_{2y}\right)_0 \\ \vdots & \vdots \\ (\eta_{nx})_0 & \left(\eta_{ny}\right)_0 \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

4.7. Respuesta máxima por modo y por componente de aceleración de la base en el análisis modal espectral

A continuación se describe la forma en que se calcula el aporte máximo de cada modo de vibración natural a la respuesta máxima probable de la estructura, cuando sobre esta actúa cada una de las componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis de forma individual.

4.7.1. Desplazamientos de centros de masa

El aporte máximo de cada modo de vibración a los desplazamientos relativos a la base de los centros de masa, producidos por las componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t)$ y $\ddot{u}_{gy}(t)$ actuando de forma individual, se calcula a partir de la matriz de modos de vibración natural $[\Phi]$ y de la matriz de desplazamientos generalizados máximos $[\eta_o]$.

Si a partir de la matriz $[\eta_o]$ se construyen dos matrices auxiliares y diagonales, que tengan la siguiente forma:

$$[(\eta_x)_o] = \begin{bmatrix} (\eta_{1x})_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\eta_{2x})_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\eta_{nx})_0 \end{bmatrix} \quad \left[(\eta_y)_o\right] = \begin{bmatrix} (\eta_{1y})_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\eta_{2y})_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\eta_{ny})_0 \end{bmatrix} \tag{4.86}$$

Con los siguientes productos se construyen las matrices $[(u_\phi)^x]$ y $[(u_\phi)^y]$ en las que en cada columna se almacena la contribución máxima de cada modo de vibración natural a los desplazamientos de los centros de masa. En este caso n es el número de modos de vibración considerados en el análisis:

$$\begin{aligned} \left[(u_\phi)^x\right] &= \left[\left\{(u_{\phi 1})_o^x\right\} \quad \left\{(u_{\phi 2})_o^x\right\} \quad \cdots \quad \left\{(u_{\phi n})_o^x\right\}\right] = [\Phi][(\eta_x)_o] \\ \left[(u_\phi)^y\right] &= \left[\left\{(u_{\phi 1})_o^y\right\} \quad \left\{(u_{\phi 2})_o^y\right\} \quad \cdots \quad \left\{(u_{\phi n})_o^y\right\}\right] = [\Phi]\left[(\eta_y)_o\right] \end{aligned} \tag{4.87}$$

4.7.2. Desplazamientos de nudos

El aporte máximo de cada modo de vibración a los desplazamientos *relativos a la base y en coordenadas globales* de los nudos de la estructura, producidos por las componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t)$ *y* $\ddot{u}_{gy}(t)$ actuando de forma individual, se calcula con un procedimiento similar al usado en el método de análisis modal cronológico para calcular el vector $\{u(t)\}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Con la matriz de asociación de desplazamientos $[A]$ y las matrices de desplazamientos máximos de centros de masa por modo $[(u_\phi)^x]\ y\ [(u_\phi)^y]$ se construyen las matrices $[(u_\alpha)^x]\ y\ [(u_\alpha)^y]$ que almacenen el máximo aporte de cada modo de vibración a los desplazamientos desconocidos de interés con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}[(u_\alpha)^x] &= [\{(u_{\alpha1})_o^x\} \quad \{(u_{\alpha2})_o^x\} \quad \dots \quad \{(u_{\alpha n})_o^x\}] = [A]\left[(u_\phi)^x\right] \\ [(u_\alpha)^y] &= \left[\{(u_{\alpha1})_o^y\} \quad \{(u_{\alpha2})_o^y\} \quad \dots \quad \{(u_{\alpha n})_o^y\}\right] = [A]\left[(u_\phi)^y\right]\end{aligned} \tag{4.88}$$

Con las matrices de desplazamientos de interés por modo $[(u_\alpha)^x]\ y\ [(u_\alpha)^y]$ y las submatrices $[K_{\gamma\gamma}]\ y\ [K_{\gamma\alpha}]$ se construyen dos matrices que almacenen el máximo aporte de cada modo de vibración a los desplazamientos condensados:

$$\begin{aligned}\left[(u_\gamma)^x\right] &= \left[\left\{(u_{\gamma1})_o^x\right\} \quad \left\{(u_{\gamma2})_o^x\right\} \quad \dots \quad \left\{(u_{\gamma n})_o^x\right\}\right] = -\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left[K_{\gamma\alpha}\right][(u_\alpha)^x] \\ \left[(u_\gamma)^y\right] &= \left[\left\{(u_{\gamma1})_o^y\right\} \quad \left\{(u_{\gamma2})_o^y\right\} \quad \dots \quad \left\{(u_{\gamma n})_o^y\right\}\right] = -\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left[K_{\gamma\alpha}\right][(u_\alpha)^y]\end{aligned} \tag{4.89}$$

Finalmente con el vector de desplazamientos conocidos $\{u_\beta\}$, que fácilmente se extiende a las matrices $[(u_\beta)^x]\ y\ [(u_\beta)^y]$ en las que todas las columnas son iguales, se construyen dos matrices $[(u)^x]\ y\ [(u)^y]$ que almacenen el máximo aporte de cada modo de vibración a los desplazamientos relativos de los nudos, adjuntando las submatrices de desplazamientos de interés, condensados y conocidos:

$$\begin{aligned}[(u)^x] &= [\{(u_1)_o^x\} \quad \{(u_2)_o^x\} \quad \dots \quad \{(u_n)_o^x\}] = [[(u_\alpha)^x] \quad [(u_\gamma)^x] \quad [(u_\beta)^x]]^T \\ [(u)^y] &= \left[\{(u_1)_o^y\} \quad \{(u_2)_o^y\} \quad \dots \quad \{(u_n)_o^y\}\right] = [[(u_\alpha)^y] \quad [(u_\gamma)^y] \quad [(u_\beta)^y]]^T\end{aligned} \tag{4.90}$$

Cada una de las matrices anteriores posee un número de filas igual al número total de grados de libertad estáticos, y un número de columnas igual al número de modos de vibración considerados.

4.7.3. Derivas de centros de masa y por ejes de columnas

El aporte máximo de cada modo a las derivas de los centros de masa se calcula a partir del aporte máximo por modo a los desplazamientos de los centros de masa, el cual se encuentra almacenado en las matrices $[(u_\phi)^x]\ y\ [(u_\phi)^y]$ según se indicó previamente.

De igual forma el aporte máximo de cada modo a las derivas evaluadas en un eje de columnas debe calcularse a partir del aporte máximo de cada modo a los desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos asociados al mismo eje. Estos aportes fueron almacenados previamente en las matrices $[(u)^x]\ y\ [(u)^y]$.

El cálculo del aporte de cada modo a las derivas correspondientes se realiza de la misma forma en que se indicó en el método de análisis modal cronológico para cada instante de tiempo.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Al calcular las derivas de los centros de masa por modo se tienen como resultado cuatro matrices $[(\Delta_x)^x], [(\Delta_x)^y], [(\Delta_y)^x]\ y\ [(\Delta_y)^y]$, las dos primeras almacenan el aporte de cada modo las derivas de los centros de masa en dirección x global y las dos últimas almacenan el aporte de cada modo a las derivas en dirección y global. En el caso de las derivas evaluadas a partir de los desplazamientos de los nudos asociados a un mismo eje de columnas, se tienen dos matrices $[(\Delta_i)^x]\ y\ [(\Delta_i)^y]$, cada una correspondiente a las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$.

Las matrices de derivas de centros de masa o de columnas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [(\Delta)^x] &= [\{(\Delta_1)_o^x\} \quad \{(\Delta_2)_o^x\} \quad \dots \quad \{(\Delta_n)_o^x\}] \\ [(\Delta)^y] &= [\{(\Delta_1)_o^y\} \quad \{(\Delta_2)_o^y\} \quad \dots \quad \{(\Delta_n)_o^y\}] \end{aligned} \tag{4.91}$$

4.7.4. Acciones equivalentes

El aporte máximo de cada modo de vibración a las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa de los diafragmas, producido por las componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t)$ y $\ddot{u}_{gy}(t)$ actuando de forma individual, denominados aquí $[(F_{s\phi})^x]$ y $[(F_{s\phi})^y]$ se calcula utilizando un procedimiento similar al descrito en el método de análisis modal cronológico para calcular el vector $\{F_{s\phi}(t)\}$.

$$\begin{aligned} \left[(F_{s\phi})^x\right] &= \left[\left\{(F_{s\phi 1})_o^x\right\} \quad \left\{(F_{s\phi 2})_o^x\right\} \quad \dots \quad \left\{(F_{s\phi n})_o^x\right\}\right] = [k_\phi]\left[(u_\phi)^x\right] \\ \left[(F_{s\phi})^y\right] &= \left[\left\{(F_{s\phi 1})_o^y\right\} \quad \left\{(F_{s\phi 2})_o^y\right\} \quad \dots \quad \left\{(F_{s\phi n})_o^y\right\}\right] = [k_\phi]\left[(u_\phi)^y\right] \end{aligned} \tag{4.92}$$

Los aportes modales máximos a las acciones inerciales y de amortiguamiento son desconocidos dado que no se tiene información de los espectros de velocidad y aceleración relativa a la base. De igual forma no se puede verificar la ecuación de movimiento ni la ecuación de balance de energía.

4.7.5. Cortantes de piso y cortante basal

El aporte máximo de cada modo los cortantes de piso y al cortante basal debe calcularse a partir del aporte máximo de cada modo de vibración a las acciones elásticas trasladadas a los centros de masa, el cual se encuentra almacenado en las matrices $[(F_{s\phi})^y]\ y\ [(F_{s\phi})^x]$ de acuerdo a como se mostró previamente.

El cálculo del aporte de cada modo a los cortantes de piso y al cortante basal se realiza de la misma forma en que se mostró en el caso de análisis modal cronológico para cada instante de tiempo.

Los cortantes de piso por modo y por componente de aceleración de la base se agrupan en cuatro matrices $[(V_x)^x], [(V_x)^y], [(V_y)^x]\ y\ [(V_y)^y]$, las dos primeras almacenan el aporte

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

de cada modo a los cortantes en dirección x global y las dos últimas almacenan el aporte de cada modo a los cortantes en dirección y global. Cada pareja de matrices de cortantes de piso tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}[(V)^x] &= [\{(V_1)_o^x\} \quad \{(V_2)_o^x\} \quad \dots \quad \{(V_n)_o^x\}] \\ [(V)^y] &= [\{(V_1)_o^y\} \quad \{(V_2)_o^y\} \quad \dots \quad \{(V_n)_o^y\}]\end{aligned} \tag{4.93}$$

4.7.6. Acciones en los extremos de los elementos

El aporte máximo de cada modo de vibración a las acciones en coordenadas locales que actúan en los extremos de un elemento estructural, producidas por las componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t)$ y $\ddot{u}_{gy}(t)$ actuando de forma individual, denominadas aquí $[(\bar{f}_e)^x]$ y $[(\bar{f}_e)^y]$, se calcula utilizando un procedimiento similar al descrito en la parte de análisis modal cronológico para calcular el vector $\{\bar{f}_e(t)\}$ de cada elemento.

De las matrices de desplazamientos en coordenadas globales de los nudos por modo $[(u)^x]$ y $[(u)^y]$ se extraen dos submatrices de desplazamientos por modo de los nudos del elemento denominadas $[(u)_e^x]$ y $[(u)_e^y]$, las cuales se convierten a coordenadas locales con la matriz de transformación de coordenadas utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}[\bar{u}_e^x] &= [\{(\bar{u}_{e1})_o^x\} \quad \{(\bar{u}_{e2})_o^x\} \quad \dots \quad \{(\bar{u}_{en})_o^x\}] = [T_e][u_e^x] \\ [\bar{u}_e^y] &= [\{(\bar{u}_{e1})_o^y\} \quad \{(\bar{u}_{e2})_o^y\} \quad \dots \quad \{(\bar{u}_{en})_o^y\}] = [T_e][u_e^y]\end{aligned} \tag{4.94}$$

Finalmente con la matriz rigidez del elemento en coordenadas locales $[\bar{k}_e]$ y con las matrices $[(\bar{u})_e^x]$ y $[(\bar{u})_e^y]$ se construyen dos matrices que almacenen el máximo aporte de cada modo de vibración a las acciones en los extremos del elemento, realizando los siguientes productos matriciales:

$$\begin{aligned}\left[(\bar{f}_e)^x\right] &= \left[\left\{(\bar{f}_{e1})_o^x\right\} \quad \left\{(\bar{f}_{e2})_o^x\right\} \quad \dots \quad \left\{(\bar{f}_{en})_o^x\right\}\right] = [\bar{k}_e][(\bar{u})_e^x] \\ \left[(\bar{f}_e)^y\right] &= \left[\left\{(\bar{f}_{e1})_o^y\right\} \quad \left\{(\bar{f}_{e2})_o^y\right\} \quad \dots \quad \left\{(\bar{f}_{en})_o^y\right\}\right] = [\bar{k}_e][(\bar{u})_e^y]\end{aligned} \tag{4.95}$$

4.7.7. Acciones internas en los elementos

Para un elemento estructural, las matrices $[(\bar{f}_e)^x]$ y $[(\bar{f}_e)^y]$ de acciones máximas en los extremos por modo y por componente de aceleración de la base almacenan las acciones en el extremo inicial i y en el extremo final j como lo muestran las siguientes expresiones:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\left[\left(\bar{f}_e\right)^x\right] = \begin{bmatrix} \left[\left(\bar{f}_e^{(i)}\right)^x\right] \\ \hline \left[\left(\bar{f}_e^{(j)}\right)^x\right] \end{bmatrix} \qquad \left[\left(\bar{f}_e\right)^y\right] = \begin{bmatrix} \left[\left(\bar{f}_e^{(i)}\right)^y\right] \\ \hline \left[\left(\bar{f}_e^{(j)}\right)^y\right] \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

Las seis acciones en el extremo inicial extraídas de cada matriz general se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \left[\left(\bar{f}_e^{(i)}\right)^x\right] &= \left[\left\{\left(F_{\bar{x}}^{(i)}\right)^x\right\} \quad \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^x\right\} \quad \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^x\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{x}}^{(i)}\right)^x\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{y}}^{(i)}\right)^x\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{z}}^{(i)}\right)^x\right\}\right]^T \\ \left[\left(\bar{f}_e^{(i)}\right)^y\right] &= \left[\left\{\left(F_{\bar{x}}^{(i)}\right)^y\right\} \quad \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^y\right\} \quad \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^y\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{x}}^{(i)}\right)^y\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{y}}^{(i)}\right)^y\right\} \quad \left\{\left(M_{\bar{z}}^{(i)}\right)^y\right\}\right]^T \end{aligned} \tag{4.97}$$

Con las anteriores acciones es posible, siguiendo un procedimiento similar al mostrado en el método de análisis modal cronológico, calcular las acciones internas en cualquier sección del elemento localizada a una distancia x del extremo inicial, como se indicó con la Figura 4.9 y como lo señalan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \{(N_{\bar{x}})^x\} &= -\left\{\left(F_{\bar{x}}^{(i)}\right)^x\right\} & \{(N_{\bar{x}})^y\} &= -\left\{\left(F_{\bar{x}}^{(i)}\right)^y\right\} \\ \left\{\left(V_{\bar{y}}\right)^x\right\} &= \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^x\right\} & \left\{\left(V_{\bar{y}}\right)^y\right\} &= \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^y\right\} \\ \{(V_{\bar{z}})^x\} &= \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^x\right\} & \{(V_{\bar{z}})^y\} &= \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^y\right\} \\ \{(T_{\bar{x}})^x\} &= -\left\{\left(M_{\bar{x}}^{(i)}\right)^x\right\} & \{(T_{\bar{x}})^y\} &= -\left\{\left(M_{\bar{x}}^{(i)}\right)^y\right\} \\ \left\{\left(M_{\bar{y}}\right)^x\right\} &= \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^x\right\}x + \left\{\left(M_{\bar{y}}^{(i)}\right)^x\right\} & \left\{\left(M_{\bar{y}}\right)^y\right\} &= \left\{\left(F_{\bar{z}}^{(i)}\right)^y\right\}x + \left\{\left(M_{\bar{y}}^{(i)}\right)^y\right\} \\ \{(M_{\bar{z}})^x\} &= \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^x\right\}x - \left\{\left(M_{\bar{z}}^{(i)}\right)^x\right\} & \{(M_{\bar{z}})^y\} &= \left\{\left(F_{\bar{y}}^{(i)}\right)^y\right\}x - \left\{\left(M_{\bar{z}}^{(i)}\right)^y\right\} \end{aligned} \tag{4.98}$$

4.8. Métodos de combinación modal

Por lo general para cualquier parámetro de respuesta estructural (*desplazamientos, acciones internas, etc.*) producido por la componente de aceleración de la base en dirección j, el aporte máximo de un modo de vibración a la respuesta total no se presenta en el mismo instante de tiempo en el que se presenta en los demás modos. Además la respuesta máxima puede tener un signo diferente en cada modo, teniendo en cuenta la compleja naturaleza vibratoria que presenta un movimiento sísmico real.

Por lo tanto es incorrecto superponer o sumar algebraicamente el aporte máximo de cada modo de vibración para obtener la respuesta máxima de la estructura cuando sobre esta

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

actúa una componente de aceleración en la base. De igual forma, resulta bastante conservador sumar los valores absolutos de las contribuciones modales máximas puesto que para todos los modos la respuesta máxima no tiene el mismo signo.

Con los métodos de combinación modal que se describen a continuación se calcula r_o^j, la respuesta máxima probable de la estructura producida solamente por la componente de aceleración de la base j, a partir de los aportes máximos de todos los modos a la respuesta total producidos por la misma componente de aceleración de la base.

Los métodos de combinación modal de la *Raíz Cuadrada de la Suma de Cuadrados (RCSC)* y de la *Combinación Cuadrática Completa (CCC)* sirven para combinar la máxima respuesta modal producida por una sola componente del movimiento sísmico. Estos métodos son probabilísticos, se basan en la teoría de vibraciones aleatorias y dan como resultado una estimación razonable de la respuesta estructural máxima (Cheng, 2001).

Independientemente del método de combinación modal que se utilice, la respuesta máxima probable se debe calcular una vez por cada componente de aceleración de la base considerada en el análisis. Teniendo en cuenta las simplificaciones introducidas a las estructuras que se estudian en el presente trabajo, j es gual a x o y. Por lo tanto el método de combinación modal se debe aplicar dos veces para así obtener r_o^x y r_o^y de forma separada.

La Tabla 4.1resume las cantidades de respuesta máxima por modo y las cantidades de respuesta máxima probable de la estructura por componente de aceleración en la base, estas últimas obtenidas utilizando métodos de combinación modal.

Parámetro de respuesta de la estructura	Respuesta máxima por modo		Respuesta máxima probable	
	Si actúa $\ddot{u}_{gx}$	Si actúa $\ddot{u}_{gy}$	Si actúa $\ddot{u}_{gx}$	Si actúa $\ddot{u}_{gy}$
Desplazamientos de centros de masa	$[(u_\phi)^x]$	$[(u_\phi)^y]$	$\{(u_\phi)_o^x\}$	$\{(u_\phi)_o^y\}$
Desplazamientos de nudos	$[(u)^x]$	$[(u)^y]$	$\{(u)_o^x\}$	$\{(u)_o^y\}$
Derivas de centros de masa	$[(\Delta_x)^x]$	$[(\Delta_x)^y]$	$\{(\Delta_x)_o^x\}$	$\{(\Delta_x)_o^y\}$
	$[(\Delta_y)^x]$	$[(\Delta_y)^y]$	$\{(\Delta_y)_o^x\}$	$\{(\Delta_y)_o^y\}$
Derivas por ejes de columnas	$[(\Delta_i)^x]$	$[(\Delta_i)^y]$	$\{(\Delta_i)_o^x\}$	$\{(\Delta_i)_o^y\}$
Acciones equivalentes	$[(F_{s\phi})^x]$	$[(F_{s\phi})^y]$	$\{(F_{s\phi})_o^x\}$	$\{(F_{s\phi})_o^y\}$
Cortantes de piso	$[(V_x)^x]$	$[(V_x)^y]$	$\{(V_x)_o^x\}$	$\{(V_x)_o^y\}$
	$[(V_y)^x]$	$[(V_y)^y]$	$\{(V_y)_o^x\}$	$\{(V_y)_o^y\}$

Tabla 4.1. Respuesta máxima por modo y respuesta máxima probable obtenida por combinación modal

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Parámetro de respuesta de la estructura	Respuesta máxima por modo		Respuesta máxima probable	
	Si actúa $\ddot{u}_{gx}$	Si actúa $\ddot{u}_{gy}$	Si actúa $\ddot{u}_{gx}$	Si actúa $\ddot{u}_{gy}$
Acciones internas en los elementos	$[(\bar{f}_e)^x]$	$[(\bar{f}_e)^y]$	$\{(\bar{f}_e)_o^x\}$	$\{(\bar{f}_e)_o^y\}$
	$\{(N_{\bar{x}})^x\}$	$\{(N_{\bar{x}})^y\}$	$(N_{\bar{x}})_o^x$	$(N_{\bar{x}})_o^y$
	$\{(V_{\bar{y}})^x\}$	$\{(V_{\bar{y}})^y\}$	$(V_{\bar{y}})_o^x$	$(V_{\bar{y}})_o^y$
	$\{(V_{\bar{z}})^x\}$	$\{(V_{\bar{z}})^y\}$	$(V_{\bar{z}})_o^x$	$(V_{\bar{z}})_o^y$
	$\{(T_{\bar{x}})^x\}$	$\{(T_{\bar{x}})^y\}$	$(T_{\bar{x}})_o^x$	$(T_{\bar{x}})_o^y$
	$\{(M_{\bar{y}})^x\}$	$\{(M_{\bar{y}})^y\}$	$(M_{\bar{y}})_o^x$	$(M_{\bar{y}})_o^y$
	$\{(M_{\bar{z}})^x\}$	$\{(M_{\bar{z}})^y\}$	$(M_{\bar{z}})_o^x$	$(M_{\bar{z}})_o^y$

Tabla 4.1. Respuesta máxima por modo y respuesta máxima probable obtenida por combinación modal (*cont.*)

4.8.1. Raíz cuadrada de la suma de cuadrados

El valor máximo probable de cualquier parámetro de respuesta estructural denominado r_o^j, donde j corresponde a cada componente de aceleración de la base considerada en el análisis, se obtiene a partir de la respuesta máxima r_i^j aportada por cada modo de vibración, $(i = 1,2, \dots, n)$, siendo n el número de modos, utilizando la siguiente expresión:

$$r_o^j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(r_i^j\right)^2} \cong \sqrt{\left(r_1^j\right)^2 + \left(r_2^j\right)^2 + \cdots + \left(r_i^j\right)^2 + \cdots + \left(r_n^j\right)^2} \tag{4.99}$$

Siendo i un modo de vibración cualquiera, n el número de modos de vibración considerados y m la componente de aceleración que actúa en la base.

Este método fue desarrollado por E. Rosenblueth en 1951 como parte de su tesis doctoral (Chopra, 2001; García, 1998) y se recomienda en el análisis de estructuras planas o de estructuras espaciales de configuración regular, en las que por lo general las frecuencias de vibración asociadas a los modos de mayor participación están relativamente espaciadas.

4.8.2. Combinación cuadrática completa

Este método es más general que el anterior y se recomienda en el análisis de estructuras espaciales de configuración irregular, cuyas frecuencias de vibración están poco espaciadas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Cuando se utiliza en el análisis de una estructura plana, los resultados obtenidos son similares a los obtenidos con el método *RCSC*.

El valor máximo probable de cualquier parámetro de respuesta de la estructura, producido al aplicar la componente *m* del movimiento en la base, se estima a partir de las respuestas máximas modales r_i^j y r_k^j , con i y k variando entre 1 y n, utilizando la siguiente expresión:

$$r_o^j \cong \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{ik} r_i^j r_k^j} \tag{4.100}$$

Donde ρ_{ik} es un coeficiente de correlación entre los modos i y k. Para estructuras con igual fracción de amortiguamiento en todos los modos, ρ_{ik} se evalúa con la siguiente expresión propuesta por A. Der Kiureghian (García, 1998):

$$\rho_{ik} = \frac{8\xi^2(1+\beta_{ik})\beta_{ik}^{3/2}}{(1-\beta_{ik})^2 + 4\xi^2\beta_{ik}(1+\beta_{ik})^2} \tag{4.101}$$

Aquí β_{ik} es la relación de frecuencias de vibración natural de los modos i y k:

$$\beta_{ik} = \frac{\omega_i}{\omega_k} \tag{4.102}$$

Si los valores de respuesta modal por sismo en dirección x (r_i^x) se organizan en un vector fila $\{r_j^x\}$, los valores de respuesta modal por sismo en dirección y (r_i^y) se organizan en un vector fila $\{r_j^y\}$ y se crea la matriz $[\rho]$ que almacene los coeficientes de correlación ρ_{ik}, el cálculo de r_o^x y r_o^y se realiza con los siguientes triples productos matriciales:

$$\begin{aligned} r_o^x &= \{r_m^x\}[\rho]\{r_m^x\}^T \\ r_o^y &= \{r_m^y\}[\rho]\{r_m^y\}^T \end{aligned} \tag{4.103}$$

4.9. Métodos de combinación direccional

Aunque se supone que los movimientos sísmicos esperados sobre una estructura tienen una dirección predominante en el instante en que se presenta la máxima respuesta, esta dirección es desconocida dada la incertidumbre propia del movimiento sísmico, por lo que en este aspecto, el único criterio razonable es el de diseñar la estructura para que resista un sismo de una magnitud definida actuando en cualquier dirección posible (Wilson, 2002).

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Es posible que sobre la estructura actúe de forma simultánea, en dirección ortogonal al movimiento principal, un movimiento sísmico de menor magnitud. Este fenómeno se denomina *efectos ortogonales* (García, 1998). En este aspecto el criterio de diseño completo, adaptado de Wilson (2002) sería el siguiente:

"*una estructura debe ser capaz de resistir un movimiento sísmico principal de magnitud S_1 aplicado en cualquier dirección θ, y simultáneamente debe resistir un movimiento sísmico de magnitud S_2 (menor a S_1) actuando en dirección ortogonal*"

La Figura 4.11 muestra las direcciones x e y del sistema global de coordenadas de una estructura cualquiera, a partir del cual se define la dirección θ en la que pueden actuar dos componentes de aceleración en la base mutuamente ortogonales y de magnitud S_1 y S_2.

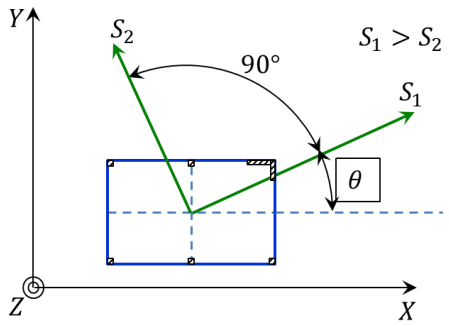


Figura 4.11. Posibles direcciones de aplicación de los movimientos sísmicos (Wilson, 2002)

Para obtener la respuesta máxima de la estructura debida a la aplicación simultanea de todas las componentes de aceleración de la base previstas, sería necesario realizar varios análisis considerando diferentes direcciones de aplicación de los movimientos sísmicos.

Sin embargo, con los métodos de combinación direccional que se describen a continuación es posible obtener una estimación razonable del valor máximo de cualquier parámetro de respuesta estructural r_o (*desplazamientos, fuerzas internas, etc*) realizando un solo análisis de la estructura.

La respuesta máxima probable de la estructura r_o producida por la aplicación simultánea de todas las componentes ortogonales de aceleración en la base consideradas en el análisis, se hace en función de las respuestas máximas probables obtenidas al aplicar de forma individual cada componente de aceleración de la base r_o^j. Cuando se consideran dos componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$, la respuesta maxima probable r_o se estima en función de r_o^x y r_o^y.

La Tabla 4.2 resume las cantidades de respuesta máxima probable de la estructura cuando actúan las componentes de aceleración en la base de forma individual y de forma simultánea, estas últimas obtenidas utilizando métodos de combinación direccional.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Respuesta de la estructura	Respuesta máxima probable		Respuesta máxima probable si actúan $\ddot{u}_{gx}\ y\ \ddot{u}_{gy}$
	Si actúa $\ddot{u}_{gx}$	Si actúa $\ddot{u}_{gy}$	
Desplazamientos de centros de masa	$\left\{\left(u_\phi\right)_o^x\right\}$	$\left\{\left(u_\phi\right)_o^y\right\}$	$\left\{\left(u_\phi\right)_o\right\}$
Desplazamientos de nudos	$\{(u)_o^x\}$	$\{(u)_o^y\}$	$\{(u)_o\}$
Derivas de centros de masa	$\{(\Delta_x)_o^x\}$	$\{(\Delta_x)_o^y\}$	$\{(\Delta_x)_o\}$
	$\left\{\left(\Delta_y\right)_o^x\right\}$	$\left\{\left(\Delta_y\right)_o^y\right\}$	$\left\{\left(\Delta_y\right)_o\right\}$
Derivas por ejes de columnas	$\{(\Delta_i)_o^x\}$	$\{(\Delta_i)_o^y\}$	$\{(\Delta_i)_o\}$
Acciones elásticas	$\left\{\left(F_{s\phi}\right)_o^x\right\}$	$\left\{\left(F_{s\phi}\right)_o^y\right\}$	$\left\{\left(F_{s\phi}\right)_o\right\}$
Cortantes de piso	$\{(V_x)_o^x\}$	$\{(V_x)_o^y\}$	$\{(V_x)_o\}$
	$\left\{\left(V_y\right)_o^x\right\}$	$\left\{\left(V_y\right)_o^y\right\}$	$\left\{\left(V_y\right)_o\right\}$
Acciones en los extremos (en un elemento cualquiera)	$\left\{\left(\bar{f}_e\right)_o^x\right\}$	$\left\{\left(\bar{f}_e\right)_o^y\right\}$	$\left\{\left(\bar{f}_e\right)_o\right\}$
Acciones internas (en una sección cualquiera de un elemento)	$(N_{\bar{x}})_o^x$	$(N_{\bar{x}})_o^y$	$(N_{\bar{x}})_o$
	$\left(V_{\bar{y}}\right)_o^x$	$\left(V_{\bar{y}}\right)_o^y$	$\left(V_{\bar{y}}\right)_o$
	$(V_{\bar{z}})_o^x$	$(V_{\bar{z}})_o^y$	$(V_{\bar{z}})_o$
	$(T_{\bar{x}})_o^x$	$(T_{\bar{x}})_o^y$	$(T_{\bar{x}})_o$
	$\left(M_{\bar{y}}\right)_o^x$	$\left(M_{\bar{y}}\right)_o^y$	$\left(M_{\bar{y}}\right)_o$
	$(M_{\bar{z}})_o^x$	$(M_{\bar{z}})_o^y$	$(M_{\bar{z}})_o$

Tabla 4.2. Respuesta máxima probable por combinación direccional

Los métodos de combinación direccional más utilizados en la práctica y cuyo uso se permite en NSR-10 (*ver numeral A.3.6.3-Dirección de aplicación de las fuerzas sísmicas*) son la *regla 100/30* y el método de la *Raíz cuadrada de la suma de cuadrados*. Estos dos métodos se describen a continuación.

4.9.1. Regla 100/30

Este método consiste en sumar el 100% de la respuesta máxima probable obtenida cuando el sismo actúa en una dirección, más el 30% de la respuesta máxima probable obtenida cuando el sismo actúa en dirección ortogonal. Se deben evaluar dos posibilidades para obtener la respuesta máxima probable como se muestra en la siguiente expresión, pues depende de las magnitudes de $r_o^x\ y\ r_o^y$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$r_o \cong máx\left(1.0(r_o^x) + 0.3(r_o^y)\ ;\ 0.3(r_o^x) + 1.0(r_o^y)\right) \tag{4.104}$$

Esta metodología está relacionada con el criterio de NSR-10 que indica que se permite tener en cuenta los efectos ortogonales aplicando de forma simultánea el 100% de las fuerzas sísmicas en una dirección y el 30% de las fuerzas sísmicas en la dirección ortogonal.

Este criterio es empírico y la respuesta calculada depende del sistema de referencia que se escoja para idealizar la estructura (Clough & Penzien, 1995; Wilson, 2002), por lo que es recomendable solamente para estructuras regulares cuyas direcciones principales estén claramente definidas y donde los resultados obtenidos son muy similares a los obtenidos con el método de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados, método que posee un mejor fundamento teórico y que se describe a continuación.

4.9.2. Raíz cuadrada de la suma de cuadrados

Este método es el mismo que se utiliza en la combinación de la respuesta modal. La respuesta máxima probable r_o se obtiene a partir de las respuestas máximas individuales $r_o^x\ y\ r_o^y$ utilizando la siguiente expresión:

$$r_o \cong \sqrt{(r_o^x)^2 + \left(r_o^y\right)^2} \tag{4.105}$$

Su uso se justifica en la baja correlación que presentan las dos componentes horizontales mutuamente ortogonales del movimiento sísmico (Clough & Penzien, 1995). El método es una forma particular del método *CQC3* planteado por C. Menun y A. Der Kiureghian en 1998 y corresponde al caso en el que las dos componentes horizontales del movimiento sísmico tienen la misma magnitud, es decir, cuando $S_2 = S_1$.

En este caso r_o deja de ser función del ángulo θ_{cr}, dirección en la que actúa la componente principal del movimiento sísmico que produce la mayor respuesta en la estructura (Wilson, 2002). Esto indica que la respuesta máxima probable que se obtiene es independiente del sistema de referencia escogido para idealizar la estructura, por lo que su uso en estructuras irregulares, donde es difícil definir claramente las direcciones principales, resulta más adecuado que el de la regla $100/30$.

De igual forma el método resulta conservador frente al método *CQC3* puesto que no se hace ninguna reducción a la componente ortogonal a la principal, es decir, en el método se considera que actúa simultáneamente el 100% de las dos componentes ortogonales del movimiento sísmico, aunque la recomendación general es tomar el 85% de la componente principal como componente secundaria (Clough & Penzien, 1995; García, 1998; Wilson, 2002).

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Capítulo 5
Análisis dinámico inelástico

5.1. Resumen del método

El análisis dinámico inelástico permite conocer la respuesta de una estructura sometida a un movimiento acelerado en la base cuando no hay linealidad entre acciones y desplazamientos y/o cuando no se considera amortiguamiento clásico.

Al tratarse de un método de análisis no lineal, no es apicable el principio de superposición para considerar el efecto de las cargas iniciales aplicadas en la estructura, presentes antes de iniciar el análisis sísmico. Por lo tanto se debe realizar un análisis de la estructura, previo al análisis sísmico, para conocer el estado de esfuerzos y deformaciones que inducen las cargas iniciales.

En forma simplificada el efecto de las cargas iniciales sobre la estructura se tiene en cuenta a través de un análisis estático lineal utilizando la ecuación de equilibrio $\{F\} = \{F^F\} + [k]\{u\}$, en combinación con los procedimientos de condensación y asociación de grados de libertad puesto que se mantiene la suposición de diafragmas rígidos en cada nivel. Se adopta este criterio porque se supone que con la aplicación de las cargas iniciales, las rótulas plásticas no entran en fluencia. Para tal fin en la formulación del elemento tipo pórtico espacial se consideran conexiones parcialmente rígidas en los extremos, de forma que la rigidez de las conexiones pueda ser variable.

La no linealidad material considerada se representa mediante rótulas plásticas a flexión en los extremos de los elementos. Las rótulas plásticas se han idealizado como resortes rotacionales no lineales cuya relación momento – rotación se basa en la formulación del modelo de Bouc – Wen, utilizado para representar otros tipos de elementos no lineales como aisladores sísmicos y amortiguadores viscoelásticos (Saavedra, 2005).

No se considera la no linealidad geométrica ya que todas las ecuaciones de equilibrio se plantean con base en la geometría no deformada de la estructura. Por lo tanto no es posible

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

considerar efectos $P - \Delta$ y $P - \delta$ que tienden a incrementar los desplazamientos y las acciones internas en los elementos.

La ecuación matricial que rige el movimiento de la estructura sometida a una aceleración en la base se plantea en forma incremental en un intervalo de tiempo que va del instante t al instante $t + \Delta t$, como se indicó con la Ecuación (2.66). Para su solución se plantea como posible alternativa el uso de la familia de métodos de Newmark en conjunto con el método de Newton – Raphson modificado. Este último método se usa para reducir los errores acumulativos que se inducen en la respuesta, al aproximar el incremento en las acciones equivalentes en función de la rigidez tangente de la estructura en el instante t (*al comienzo del intervalo*) y del incremento de desplazamientos en el intervalo.

En uno de los pasos del método de Newton – Raphson modificado se requiere el cálculo del incremento de las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa en el intervalo y en la iteración actual del método. Para tal fin se adapta un procedimiento descrito en una de las referencias para realizar el análisis estático no lineal de cerchas planas con no linealidad material. Como resultado del procedimiento también se calculan los incrementos en los desplazamientos de los nudos y las acciones en los extremos de los elementos en cada intervalo de tiempo.

Finalmente se describe como se obtienen para cada instante de tiempo las mismas cantidades de respuesta estructural que se describieron en el método de análisis modal cronológico (*desplazamientos de los nudos, las acciones internas en los elementos, las derivas, los cortantes de piso, balance de energía, etc*). Para el balance de energía, se describe la forma de calcular la energía disipada por histéresis a partir de las relaciones momento - rotación de las rótulas plásticas.

5.2. Análisis elástico para cargas iniciales

Generalmente en el instante en que comienzan a actuar los movimientos sísmicos sobre una estructura, esta se encuentra sometida a un conjunto de acciones externas, por lo general gravitacionales. Estas acciones representan el efecto de la carga muerta, de la carga viva y de cualquier otra carga de servicio que actúe sobre la estructura, y por simplicidad se asumen distribuidas en la luz de los elementos.

Las cargas iniciales inducen esfuerzos y deformaciones que se calculan a partir de los desplazamientos de los nudos y de las acciones que actúan en los extremos de los elementos, y que deben tenerse en cuenta como condiciones iniciales para el análisis dinámico inelástico.

El efecto de las cargas iniciales sobre la estructura no debe tenerse en cuenta de forma separada como se hace cuando se realiza un análisis elástico, dado que al no existir lineali-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

dad entre acciones y desplazamientos por la formación de rótulas plásticas, deja de ser aplicable el principio de superposición. El análisis de la estructura debe hacerse en forma secuencial, comenzando por el análisis para las cargas iniciales y siguiendo con el análisis dinámico inelástico.

Generalmente es suficiente con realizar un análisis estático lineal en el que se aplica la totalidad de las cargas iniciales debidamente mayoradas, suponiendo que tales cargas no producen rótulas plásticas en la estructura. En caso contrario, si se esperan rótulas por cargas iniciales, se requiere de un análisis estático inelástico en el que las cargas se aplican de forma gradual y se verifica el equilibrio de fuerzas, la compatibilidad de deformaciones y el cumplimiento de las relaciones fuerza – desplazamiento (*o momento – rotación*) de las rótulas al final de cada incremento de carga aplicado.

En el presente trabajo se asume que las cargas iniciales no producen rótulas plásticas, por lo que su efecto sobre la estructura se evalúa con un análisis estático lineal. Se aclara que esta suposición debe verificarse para que sea válida.

La ecuación matricial de equilibrio utilizada para realizar el análisis de la estructura para las cargas iniciales se indica a continuación (McGuire et al., 2000):

$$\{F\} = \left\{F^{(F)}\right\} + [K]\{u\} \tag{5.1}$$

Donde $\{F\}$ es el vector de acciones externas (*fuerzas y momentos*) aplicadas en los nudos, $\left\{F^{(F)}\right\}$ es el vector general de acciones fijas en coordenadas globales, $[K]$ es la matriz de rigidez general, que considera todos los grados de libertad estáticos de la estructura y $\{u\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos.

La formulación utilizada para construir $[K]$ se describió en el Capítulo 3. A continuación se describe la formulación matemática utilizada para construir el vector general de acciones fijas en coordenadas globales $\{F^{(F)}\}$ a partir de cada vector de acciones fijas en coordenadas locales $\{\bar{f}_e^{(F)}\}$ de cada elemento de la estructura.

Adicionalmente se describe la forma de calcular los desplazamientos de los nudos debidos a las cargas iniciales y las acciones en los extremos de los elementos en coordenadas locales. Se mantiene el enfoque de agrupar los grados de libertad en tres tipos, de forma que sean aplicables los procedimientos de condensación y asociación de grados de libertad descritos también en el Capítulo 3.

5.2.1. Vector elemental de acciones fijas en coordenadas locales

El vector elemental de acciones fijas $\{\bar{f}_e^{(F)}\}$ almacena las acciones en coordenadas locales aplicadas en los extremos del elemento, necesarias para mantenerlo en equilibrio de forma que en los nudos no se produzca ningún desplazamiento o giro.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

A continuación se describe la formulación matemática con la que se construye el vector elemental de acciones fijas en coordenadas locales del elemento tipo pórtico espacial, considerando simultáneamente deformaciones por cortante y conexiones parcialmente rígidas a flexión en los extremos, elemento descrito en el Capítulo 3. La Figura 5.1 muestra la nomenclatura utilizada para cada acción fija. Todas las acciones se indican siguiendo la dirección positiva de los ejes locales.

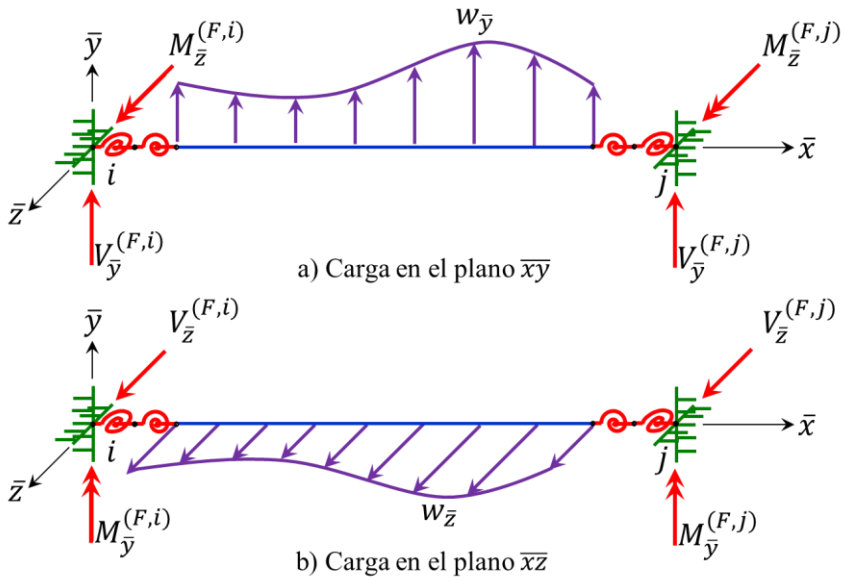


Figura 5.1. Acciones fijas en los extremos del elemento pórtico espacial

El vector de acciones fijas contiene las fuerzas y los momentos fijos de acuerdo a la numeración de los grados de libertad del elemento:

$$\left\{\bar{f}_e^{(F)}\right\} = \begin{Bmatrix} N_{\bar{x}}^{(F,i)} \\ V_{\bar{y}}^{(F,i)} \\ V_{\bar{z}}^{(F,i)} \\ Y_{\bar{x}}^{(F,i)} \\ M_{\bar{y}}^{(F,i)} \\ M_{\bar{z}}^{(F,i)} \\ N_{\bar{x}}^{(F,j)} \\ V_{\bar{y}}^{(F,j)} \\ V_{\bar{z}}^{(F,j)} \\ T_{\bar{x}}^{(F,j)} \\ M_{\bar{y}}^{(F,j)} \\ M_{\bar{z}}^{(F,j)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_{\bar{x}}^{(i)} \\ u_{\bar{y}}^{(i)} \\ u_{\bar{z}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{x}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{y}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{z}}^{(i)} \\ u_{\bar{x}}^{(j)} \\ u_{\bar{y}}^{(j)} \\ u_{\bar{z}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{x}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{y}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{z}}^{(j)} \end{matrix} \tag{5.2}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Cuando las cargas distribuidas se aplican solamente en dirección de los ejes locales $\bar{y}$ y $\bar{z}$, las acciones fijas $N_{\bar{x}}^{(F,i)}, T_{\bar{x}}^{(F,i)}, N_{\bar{x}}^{(F,j)}$ y $T_{\bar{x}}^{(F,j)}$ valen cero.

Los momentos de fijación $M_{\bar{y}}^{(F,i)}\ y\ M_{\bar{y}}^{(F,j)}$ en los extremos inicial y final del elemento, cuando la flexión se produce en el plano $\overline{xz}$ local se calculan con las siguientes expresiones, deducidas a partir de la formulación mostrada en Linero (2012) para el elemento estructural utilizado:

$$M_{\bar{y}}^{(F,i)} = \frac{M'^{(F,i)}_{\bar{y}}\left(1 + 4j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}\left(1 + j_{\bar{y}j}\right)\right) - 2M'^{(F,j)}_{\bar{y}} j_{\bar{y}j}\left(1 - \beta_{s\bar{y}}\right)}{1 + 4j_{\bar{y}i} + 4j_{\bar{y}j} + 12j_{\bar{y}i}j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}\left(1 + j_{\bar{y}i} + j_{\bar{y}j}\right)}$$
$$M_{\bar{y}}^{(F,j)} = \frac{M'^{(F,j)}_{\bar{y}}\left(1 + 4j_{\bar{y}i} + 2\beta_{s\bar{y}}\left(1 + j_{\bar{y}i}\right)\right) - 2M'^{(F,i)}_{\bar{y}} j_{\bar{y}i}\left(1 - \beta_{s\bar{y}}\right)}{1 + 4j_{\bar{y}i} + 4j_{\bar{y}j} + 12j_{\bar{y}i}j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}\left(1 + j_{\bar{y}i} + j_{\bar{y}j}\right)} \tag{5.3}$$

Si la flexión del elemento se produce en el plano $\overline{xy}$ local, los momentos fijos $M_{\bar{z}}^{(F,i)}$ y $M_{\bar{z}}^{(F,j)}$ se calculan con las siguientes expresiones:

$$M_{\bar{z}}^{(F,i)} = \frac{M'^{(F,i)}_{\bar{z}}\left(1 + 4j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}\left(1 + j_{\bar{z}j}\right)\right) - 2M'^{(F,j)}_{\bar{z}} j_{\bar{z}j}(1 - \beta_{s\bar{z}})}{1 + 4j_{\bar{z}i} + 4j_{\bar{z}j} + 12j_{\bar{z}i}j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}\left(1 + j_{\bar{z}i} + j_{\bar{z}j}\right)}$$
$$M_{\bar{z}}^{(j,F)} = \frac{M'^{(F,j)}_{\bar{z}}\left(1 + 4j_{\bar{z}i} + 2\beta_{s\bar{z}}(1 + j_{\bar{z}i})\right) - 2M'^{(F,i)}_{\bar{z}} j_{\bar{z}i}(1 - \beta_{s\bar{z}})}{1 + 4j_{\bar{z}i} + 4j_{\bar{z}j} + 12j_{\bar{z}i}j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}\left(1 + j_{\bar{z}i} + j_{\bar{z}j}\right)} \tag{5.4}$$

Las expresiones (5.3) y (5.4) son función de los momentos de fijación en los extremos sin considerar la rigidez de las conexiones, denominados aquí $M'^{(F,i)}_{\bar{y}}, M'^{(F,j)}_{\bar{y}}, M'^{(F,i)}_{\bar{z}}$ y $M'^{(F,j)}_{\bar{z}}$. Estos dependen del tipo de carga aplicada en la luz del elemento, como se muestra en la Figura 5.2 para cargas uniforme y triangular actuando en las direcciones $\bar{y}$ e $\bar{z}$ locales.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

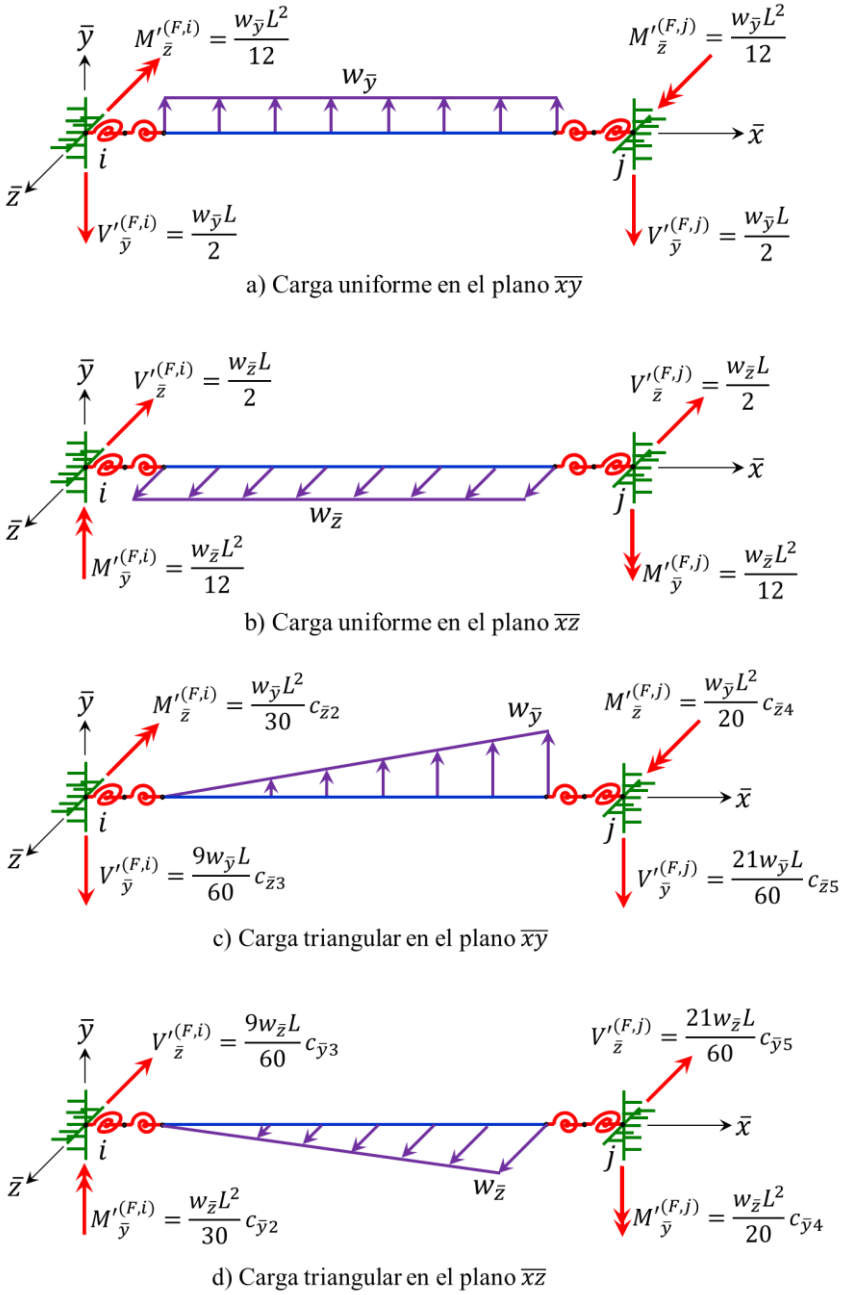


Figura 5.2. Acciones fijas sin considerar conexiones parcialmente rígidas, para diferentes tipos de carga distribuida en el elemento. Adaptada de Linero (2012)

La formulación de la Figura 5.2 indica que para la carga triangular las acciones fijas dependen de las deformaciones por cortante. Los coeficientes reducción de rigidez por deformaciones por cortante $c_{\bar{y}2}, c_{\bar{y}3}, c_{\bar{y}4}$ y $c_{\bar{y}5}$ para flexión en el plano $\overline{xz}$ y $c_{\bar{z}2}, c_{\bar{z}3}, c_{\bar{z}4}$ y $c_{\bar{z}5}$ para flexión en el plano $\overline{xz}$ se indican a continuación:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$
\begin{aligned}
c_{\bar{y}1} &= 1 + 2\beta_{s\bar{y}} & c_{\bar{z}1} &= 1 + 2\beta_{s\bar{z}} \\
c_{\bar{y}2} &= \left(1 + \frac{5}{2}\beta_{s\bar{y}}\right)c_{\bar{y}1} & c_{\bar{z}2} &= \left(1 + \frac{5}{2}\beta_{s\bar{z}}\right)c_{\bar{z}1} \\
c_{\bar{y}3} &= \left(1 + \frac{20}{9}\beta_{s\bar{y}}\right)c_{\bar{y}1} & c_{\bar{z}3} &= \left(1 + \frac{20}{9}\beta_{s\bar{z}}\right)c_{\bar{z}1} \\
c_{\bar{y}4} &= \left(1 + \frac{5}{3}\beta_{s\bar{y}}\right)c_{\bar{y}1} & c_{\bar{z}4} &= \left(1 + \frac{5}{3}\beta_{s\bar{z}}\right)c_{\bar{z}1} \\
c_{\bar{y}5} &= \left(1 + \frac{40}{21}\beta_{s\bar{y}}\right)c_{\bar{y}1} & c_{\bar{z}5} &= \left(1 + \frac{40}{21}\beta_{s\bar{z}}\right)c_{\bar{z}1}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Las ecuaciones (5.3) y (5.4) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
M_{\bar{y}}^{(F,i)} &= M'^{(F,i)}_{\bar{y}} e_{\bar{y}2} + M'^{(F,j)}_{\bar{y}} e_{\bar{y}3} \\
M_{\bar{y}}^{(F,j)} &= M'^{(F,j)}_{\bar{y}} e_{\bar{y}4} + M'^{(F,i)}_{\bar{y}} e_{\bar{y}5} \\
M_{\bar{z}}^{(F,i)} &= M'^{(F,i)}_{\bar{z}} e_{\bar{z}2} + M'^{(F,j)}_{\bar{z}} e_{\bar{z}3} \\
M_{\bar{z}}^{(F,j)} &= M'^{(F,j)}_{\bar{z}} e_{\bar{z}4} + M'^{(F,i)}_{\bar{z}} e_{\bar{z}5}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Donde las respectivas constantes de reducción de rigidez para flexión en el plano $\overline{xz}$ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
e_{\bar{y}1} &= \frac{1}{1 + 4j_{\bar{y}i} + 4j_{\bar{y}j} + 12j_{\bar{y}i}j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}(1 + j_{\bar{y}i} + j_{\bar{y}j})} \\
e_{\bar{y}2} &= \left(1 + 4j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}(1 + j_{\bar{y}j})\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}3} &= 2j_{\bar{y}j}\left(\beta_{s\bar{y}} - 1\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}4} &= \left(1 + 4j_{\bar{y}i} + 2\beta_{s\bar{y}}(1 + j_{\bar{y}i})\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}5} &= 2j_{\bar{y}i}\left(\beta_{s\bar{y}} - 1\right)e_{\bar{y}1}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Y las constantes de reducción de rigidez para flexión en el plano $\overline{xy}$ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
e_{\bar{z}1} &= \frac{1}{1 + 4j_{\bar{z}i} + 4j_{\bar{z}j} + 12j_{\bar{z}i}j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}(1 + j_{\bar{z}i} + j_{\bar{z}j})} \\
e_{\bar{z}2} &= \left(1 + 4j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}(1 + j_{\bar{z}j})\right)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}3} &= 2j_{\bar{z}j}(\beta_{s\bar{z}} - 1)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}4} &= (1 + 4j_{\bar{z}i} + 2\beta_{s\bar{z}}(1 + j_{\bar{z}i}))e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}5} &= 2j_{\bar{z}i}(\beta_{s\bar{z}} - 1)e_{\bar{z}1}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las constantes $j_{\bar{y}i}, j_{\bar{y}j}, \beta_{s\bar{y}}, j_{\bar{z}i}, j_{\bar{z}j}$ y $\beta_{s\bar{z}}$ se mostraron en el Capítulo 3 al describir la formulación de la matriz de rigidez en coordenadas locales del elemento pórtico espacial.

La formulación mostrada para los momentos fijos es general y permite considerar casos en los cuales se forman articulaciones perfectas en alguno o en los dos extremos del elemento simultáneamente, modificando el valor de las constantes de reducción de rigidez e_{ij} cuando $J_{\bar{y}i} \to 0$ y/o cuando $J_{\bar{y}j} \to 0$. Las siguientes son las constantes de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\,\bar{z}$ cuando las rigideces $J_{\bar{y}i}$ y $J_{\bar{y}j}$ son cero de forma independiente y de forma simultánea:

$si\ J_{\bar{y}i} \to 0\ y\ J_{\bar{y}j} \neq 0$	$si\ J_{\bar{y}i} \neq 0\ \ y\ J_{\bar{y}j} \to 0$	$si\ J_{\bar{y}i} \to 0\ y\ J_{\bar{y}j} \to 0$	
$e_{\bar{y}1} = \dfrac{1}{2 + 6j_{\bar{y}j} + \beta_{s\bar{y}}}$	$e_{\bar{y}1} = \dfrac{1}{2 + 6j_{\bar{y}i} + \beta_{s\bar{y}}}$	$e_{\bar{y}1} = \dfrac{1}{12}$	
$e_{\bar{y}2} = 0$	$e_{\bar{y}2} = \left(2 + \beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}2} = 0$	
$e_{\bar{y}3} = 0$	$e_{\bar{y}3} = \left(2 + \beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}3} = 0$	(5.9)
$e_{\bar{y}4} = \left(2 + \beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}4} = 0$	$e_{\bar{y}4} = 0$	
$e_{\bar{y}5} = \left(\beta_{s\bar{y}} - 1\right)e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}5} = 0$	$e_{\bar{y}5} = 0$	

Las constantes de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\,\bar{y}$ cuando las rigideces $J_{\bar{z}i}$ y $J_{\bar{z}j}$ son cero de forma independiente y de forma simultánea son:

$si\ J_{\bar{z}i} \to 0\ y\ J_{\bar{z}j} \neq 0$	$si\ J_{\bar{z}i} \neq 0\ y\ J_{\bar{z}j} \to 0$	$si\ J_{\bar{z}i} \to 0\ y\ J_{\bar{z}j} \to 0$	
$e_{\bar{z}1} = \dfrac{1}{2 + 6j_{\bar{z}j} + \beta_{s\bar{z}}}$	$e_{\bar{z}1} = \dfrac{1}{2 + 6j_{\bar{z}i} + \beta_{s\bar{z}}}$	$e_{\bar{z}1} = \dfrac{1}{12}$	
$e_{\bar{z}2} = 0$	$e_{\bar{z}2} = (2 + \beta_{s\bar{z}})e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}2} = 0$	
$e_{\bar{z}3} = 0$	$e_{\bar{z}3} = (2 + \beta_{s\bar{z}})e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}3} = 0$	(5.10)
$e_{\bar{z}4} = (2 + \beta_{s\bar{z}})e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}4} = 0$	$e_{\bar{z}4} = 0$	
$e_{\bar{z}5} = (\beta_{s\bar{z}} - 1)e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}5} = 0$	$e_{\bar{z}5} = 0$	

Finalmente las fuerzas cortantes fijas se determinan por estática, considerando los momentos fijos en los extremos y las cargas distribuidas en la luz. La Figura 5.3 muestra las fuerzas cortantes fijas para los dos tipos de carga distribuida de la Figura 5.2.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

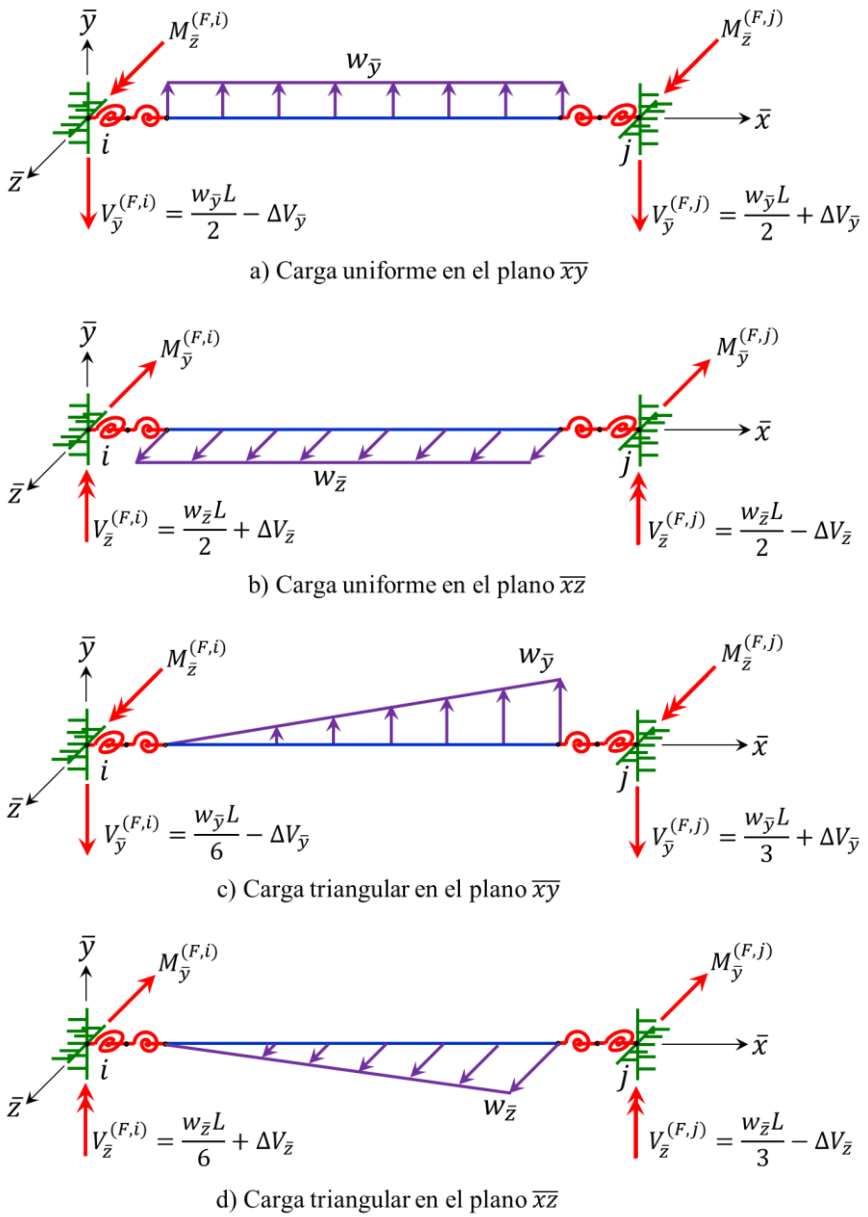


Figura 5.3. Fuerzas cortantes fijas en los extremos del elemento tipo pórtico espacial para diferentes tipos de carga distribuida. Adaptada de Linero (2012)

En cada caso las fuerzas cortantes adicionales por flexión en cada plano serán:

$$\Delta V_{\bar{y}} = \frac{M_{\bar{z}}^{(F,i)} + M_{\bar{z}}^{(F,j)}}{L}$$
$$\Delta V_{\bar{z}} = \frac{M_{\bar{y}}^{(F,i)} + M_{\bar{y}}^{(F,j)}}{L} \tag{5.11}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La relación entre acciones aplicadas en los extremos del elemento en coordenadas locales y globales $\{\overline{f}_e\} = [T]\{f_e\}$ se utiliza para calcular las acciones fijas del elemento en coordenadas globales $\{f_e^{(F)}\}$, utilizando la siguiente expresión:

$$\left\{f_e^{(F)}\right\} = [T]^T \left\{\bar{f}_e^{(F)}\right\} \tag{5.12}$$

5.2.2. Vector general de acciones fijas en coordenadas globales

El vector de acciones fijas de la estructura $\{F^{(F)}\}$ se obtiene sumando adecuadamente los coeficientes de los vectores elementales de acciones fijas en coordenadas globales $\{f_e^{(F)}\}$ asociados a cada grado de libertad de la estructura, en un proceso denominado *ensamblaje*, similar a como se construye la matriz de rigidez general de la estructura:

$$\left\{F^{(F)}\right\} = \sum_{e=1}^{ne} \left\{f_e^{(F)}\right\} \tag{5.13}$$

5.2.3. Desplazamientos iniciales de centros de masa y de nudos utilizando condensación y asociación de grados de libertad

Partiendo de la ecuación matricial de equilibrio (5.1) que se repite a continuación:

$$\{F\} = \left\{F^{(F)}\right\} + [K]\{u\}$$

Utilizando la clasificación de grados de libertad estáticos de la estructura descrita en el Capítulo 3 se realiza la siguiente partición matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{F_\alpha\} \\ \{F_\gamma\} \\ \{F_\beta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_\alpha^{(F)}\} \\ \{F_\gamma^{(F)}\} \\ \{F_\beta^{(F)}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{\propto\propto}] & [K_{\propto\gamma}] & [K_{\propto\beta}] \\ [K_{\gamma\propto}] & [K_{\gamma\gamma}] & [K_{\gamma\beta}] \\ [K_{\beta\propto}] & [K_{\beta\gamma}] & [K_{\beta\beta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_\alpha\} \\ \{u_\gamma\} \\ \{u_\beta\} \end{Bmatrix} \tag{5.14}$$

Al suponer nuevamente que los subvectores $\{u_\beta\}$ y $\{F_\gamma\}$ son cero, a partir de la Ecuación (5.14) se plantea una expresión en la que los desplazamientos desconocidos condensados $\{u_\gamma\}$ son función de los desplazamientos desconocidos de interés $\{u_\alpha\}$:

$$\begin{aligned} \{0\} &= \left\{F_\gamma^{(F)}\right\} + [K_{\gamma\propto}]\{u_\alpha\} + [K_{\gamma\gamma}]\{u_\gamma\} \\ \{u_\gamma\} &= -[K_{\gamma\gamma}]^{-1}\left(\left\{F_\gamma^{(F)}\right\} + [K_{\gamma\propto}]\{u_\alpha\}\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Si a partir de la Ecuación (5.14) se plantea ahora la siguiente ecuación matricial:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{F_\alpha\} = \left\{F_\alpha^{(F)}\right\} + [K_{\propto\propto}]\{u_\alpha\} + \left[K_{\propto\gamma}\right]\{u_\gamma\} \tag{5.16}$$

Y se remplaza en ella la expresión obtenida para $\{u_\gamma\}$ en la Ecuación (5.15), se llega a la siguiente expresión que relaciona las acciones externas aplicadas en los grados de libertad de interés $\{F_\alpha\}$ con sus desplazamientos correspondientes $\{u_\alpha\}$:

$$\begin{gathered}\{F_\alpha\} = \left\{F_\alpha^{(F)}\right\} + [K_{\propto\propto}]\{u_\alpha\} - \left[K_{\propto\gamma}\right]\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left(\left\{F_\gamma^{(F)}\right\} + \left[K_{\gamma\propto}\right]\{u_\alpha\}\right) \\ \{F_\alpha\} = \left(\left\{F_\alpha^{(F)}\right\} - \left[K_{\propto\gamma}\right]\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left\{F_\gamma^{(F)}\right\}\right) + \left([K_{\propto\propto}] - \left[K_{\propto\gamma}\right]\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left[K_{\gamma\propto}\right]\right)\{u_\alpha\}\end{gathered} \tag{5.17}$$

La Ecuación (5.17) se escribe en forma compacta como se muestra a continuación:

$$\{F_\alpha\} = \left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\} + \left[\widetilde{K}_{\propto\propto}\right]\{u_\alpha\} \tag{5.18}$$

En donde $\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\}$ y $\left[\widetilde{K}_{\propto\propto}\right]$ son respectivamente el vector de acciones fijas y la matriz de rigidez condensados a los grados de libertad desconocidos de interés. El vector $\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\}$ se evalúa con la siguiente expresión:

$$\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\} = \left\{F_\alpha^{(F)}\right\} - \left[K_{\propto\gamma}\right]\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left\{F_\gamma^{(F)}\right\} \tag{5.19}$$

Dado que la suposición de diafragma rígido al nivel de cada piso se mantiene, a continuación se utiliza el procedimiento de asociación de grados de libertad para relacionar las acciones y los desplazamientos de los grados de libertad de interés con los grados de libertad de los diafragmas.

En el Capítulo 3 se describió la procedencia de las siguientes expresiones, que relacionan acciones y desplazamientos en los grados de libertad de interés con acciones y desplazamientos en los grados de libertad de diafragmas ($[A]$ es la *matriz geomérica*):

$$\begin{gathered}\{F_\phi\} = [A]^T\{F_\alpha\} \\ \{u_\alpha\} = [A]\{u_\phi\}\end{gathered} \tag{5.20}$$

Haciendo un remplazo adecuado de las ecuaciones (5.18) y (5.20b) se llega a una expresión que relaciona las acciones aplicadas en los grados de libertad de los diafragmas con sus desplazamientos correspondientes:

$$\begin{gathered}\{F_\phi\} = [A]^T\left(\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\} + \left[\widetilde{K}_{\propto\propto}\right]\{u_\alpha\}\right) \\ \{F_\phi\} = [A]^T\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\} + [A]^T\left[\widetilde{K}_{\propto\propto}\right][A]\{u_\phi\}\end{gathered} \tag{5.21}$$

La Ecuación (5.21b) se escribe en forma compacta como se muestra a continuación:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{F_\phi\} = \left\{\tilde{F}_\phi^{(F)}\right\} + [K_\phi]\{u_\phi\} \tag{5.22}$$

donde $[K_\phi]$ es la matriz de rigidez lateral y $\{\tilde{F}_\phi^{(F)}\} = [A]^T\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\}$ es el vector de acciones fijas efectivas.

A continuación se resume el procedimiento para calcular los desplazamientos de los centros de masa y los desplazamientos de los nudos producidos por las cargas iniciales, utilizando la formulación presentada previamente:

a) Calcular el vector de acciones trasladadas a centros de masa:

$$\{F_\phi\} = [A]^T\{F_\alpha\}$$

b) Calcular el vector de acciones fijas efectivas (La matriz $\left[K_\phi\right]$ es conocida):

$$\left\{\tilde{F}_\phi^{(F)}\right\} = [A]^T\left\{\tilde{F}_\alpha^{(F)}\right\} = [A]^T\left(\left\{F_\alpha^{(F)}\right\} - \left[K_{\propto\gamma}\right]\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left\{F_\gamma^{(F)}\right\}\right)$$

c) Calcular los desplazamientos de los centros de masa (Ecuación (5.22)):

$$\left\{u_\phi\right\} = \left[K_\phi\right]^{-1}\left(\{F_\phi\} - \left\{\tilde{F}_\phi^{(F)}\right\}\right)$$

d) Calcular el vector de desplazamientos de interés:

$$\{u_\alpha\} = [A]\left\{u_\phi\right\}$$

e) Calcular el vector de desplazamientos condensados (Ecuación (5.15b)):

$$\left\{u_\gamma\right\} = -\left[K_{\gamma\gamma}\right]^{-1}\left(\left\{F_\gamma^{(F)}\right\} + \left[K_{\gamma\propto}\right]\{u_\alpha\}\right)$$

f) Conformar el vector de desplazamientos de los nudos:

$$\{u\} = \left\{\{u_\alpha\} \quad \{u_\gamma\} \quad \{u_\beta\}\right\}^T$$

5.2.4. Acciones en los extremos de los elementos

El vector de acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento estructural se calcula a partir del vector de acciones fijas, la matriz de rigidez y el vector de desplazamientos, todos en coordenadas globales, con la siguiente expresión:

$$\left\{\bar{f}_e\right\} = \{\bar{f}_e^{(F)}\} + \left[\bar{k}_e\right]\{\bar{u}_e\} \tag{5.23}$$

Los desplazamientos en coordenadas locales $\{\bar{u}_e\}$ se calculan nuevamente a partir de los desplazamientos en coordenadas globales y de la matriz de transformación de coordenadas del elemento con la siguiente expresión:

$$\{\bar{u}_e\} = [T]\{u_e\} \tag{5.24}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

5.3. Relación momento - rotación de los resortes rotacionales

A continuación se describe el modelo de Bouc – Wen, utilizado para representar la relación momento – rotación de las rótulas plásticas por flexión, mediante las cuales se induce la no linealidad en la estructura. Las rótulas plásticas se introducen en la estructura mediante resortes rotacionales no lineales localizados en los extremos de los elementos tipo pórtico espacial, en los dos planos principales de flexión.

5.3.1. Modelo de Bouc – Wen

La formulación que se presenta a continuación se basa en el modelo propuesto por Bouc en 1971 y posteriormente generalizado por Wen en 1976 (Ismail, Ikhouane, & Rodellar, 2009). Este modelo se ha utilizado en el área de las estructuras para representar el comportamiento cíclico o histerético de cualquier dispositivo con comportamiento no lineal. Ismail y otros (Ismail et al., 2009) mencionan varios casos en los que la formulación se ha aplicado al estudio del comportamiento no lineal de elementos estructurales y conexiones de madera, acero o concreto, así como al estudio de aisladores sísmicos y amortiguadores no lineales.

La relación fuerza restauradora vs desplazamiento representada es la siguiente:

$$f = \alpha k_i u + (1 - \alpha) k_i z \tag{5.25}$$

Donde a es un parámetro que indica el grado de no linealidad del sistema ($\alpha = 1$ *indica un sistema elástico*), k_i es la rigidez inicial elástica del sistema, u es el desplazamiento total y z es un *parámetro histerético* que satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden (Saavedra, 2005):

$$\dot{z} = A\dot{u} - \beta|\dot{u}||z|^{(n-1)}z - \gamma\dot{u}|z|^n \tag{5.26}$$

Los coeficientes A, β, γ y n son cantidades adimensionales que definen el modelo y representan los diferentes tipos de relaciones no lineales. A es un factor de escala general, β y γ determinan la forma de la curva y n regula la transición entre la región lineal y la no lineal. La Figura 5.4 (Saavedra, 2005), muestra una relación fuerza – desplazamiento típica de un dispositivo no lineal que obedece a la formulación anterior, en este caso con $A = 1$ y $\beta = \gamma = 0.5$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

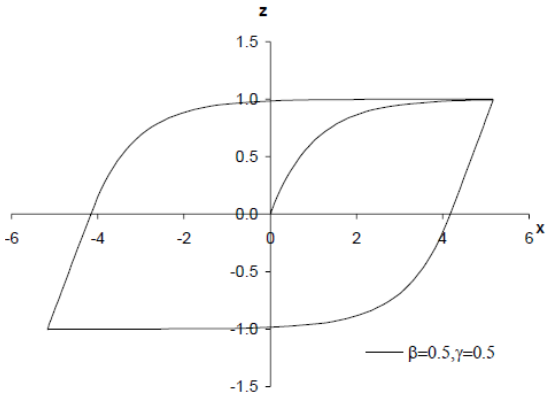


Figura 5.4. Relación fuerza – desplazamiento utilizando el modelo de Bouc – Wen (Saavedra, 2005)

Respecto al parámetro n, entre más alto sea su valor, más fuerte es la transición entre la parte elástica y la inelástica y viceversa, de forma que $n = \propto$ representa una curva bilineal, tal como se muestra en la Figura 5.5.

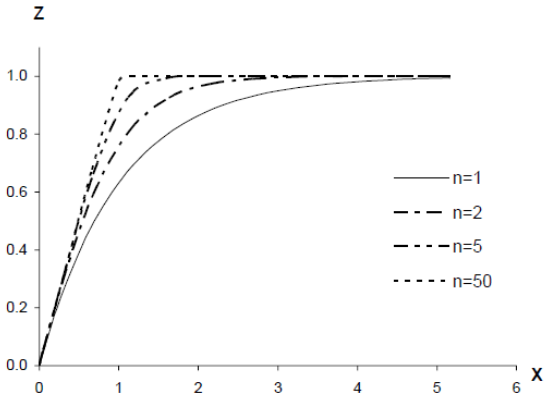


Figura 5.5. Influencia del parámetro *n* en la forma de la curva (Saavedra, 2005)

La Ecuación (5.26) se escribe en forma compacta así:

$$\dot{z} = \dot{u}(A - (\beta sign(\dot{u}z) + \gamma)|z|^n) \tag{5.27}$$

Generalmente se asume $A = 1$ y $\beta = \gamma = 0.5$, por lo que la anterior Ecuación queda:

$$\dot{z} = \dot{u}(1 - (0.5 sign(\dot{u}z) + 0.5)|z|^n) \tag{5.28}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \dot{u}z \geq 0 \qquad && \dot{z} = \dot{u}(1 - |z|^n) \\ &\text{Si } \dot{u}z < 0 \qquad && \dot{z} = \dot{u} \end{aligned} \tag{5.29}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

5.3.2. Resortes rotacionales con rotaciones de fluencia iguales

Por el carácter cíclico del movimiento de la base y de la respuesta de la estructura, las rótulas plásticas están sometidas a ciclos de carga y descarga que deben ser considerados para conocer la rigidez de la estructura y las acciones internas en los elementos en cada instante de tiempo, para evaluar las demandas de rotación inelástica en las rótulas o para calcular la cantidad de energía que la estructura disipa por histéresis.

En la presente tesis las rótulas plásticas a flexión se idealizan mediante resortes rotacionales no lineales como elementos de longitud cero. Se utiliza el modelo de Bouc – Wen para representar las relaciones $M - \theta$ de estos elementos, las cuales coinciden con los ciclos de histéresis de las rótulas plásticas. La formulación que se presenta a continuación ha sido tomada de los trabajos de Wilson (Wilson, 2002) y la nomenclatura se ha modificado para referirse específicamente a momentos y rotaciones.

Los parámetros del resorte rotacional no lineal utilizado para representar una rótula plástica por flexión se indican en la Figura 5.6, cuando las rotaciones de fluencia positiva y negativa son iguales.

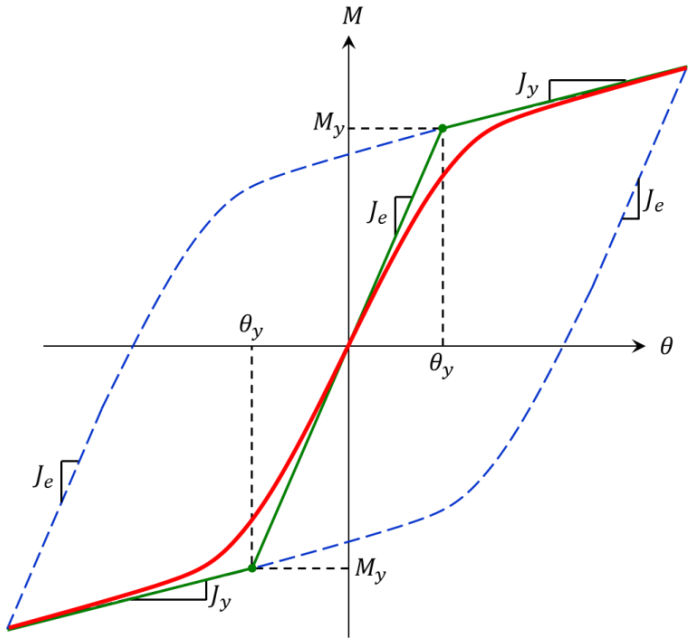


Figura 5.6. Relación $M - \theta$ de un resorte rotacional con rotaciones de fluencia iguales en cada dirección. Adaptada de Wilson (2002)

En este caso J_e es la rigidez inicial, J_y es la rigidez de fluencia, θ_y es la rotación de fluencia, que se relaciona con el momento de fluencia M_y y la rigidez inicial J_e mediante la siguiente expresión:

$$M_y = J_e \theta_y \tag{5.30}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En la Figura 5.6 se observa que la rigidez del resorte es variable, dependiendo de su nivel de rotación y si está en carga o descarga. De igual forma la rigidez varía entre J_y y J_e, siendo siempre positiva.

La relación general momento – rotación es la siguiente:

$$M = J_y\theta + \left(J_e - J_y\right)e \tag{5.31}$$

Donde θ es la rotación total del resorte y e es un parámetro de rotación elástica que varía en el rango $\left(-\theta_y, \theta_y\right)$ siempre y cuando θ_y o M_y sean iguales en las dos direcciones. Este parámetro se calcula en cada instante de tiempo o paso de carga mediante la integración numérica de una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \dot{\theta}e \geq 0 \qquad && \dot{e} = \left(1 - \left|\frac{e}{\theta_y}\right|^n\right)\dot{\theta} \\ &\text{Si } \dot{\theta}e < 0 \qquad && \dot{e} = \dot{\theta} \end{aligned} \tag{5.32}$$

El parámetro n regula la transición entre la región lineal y la no lineal de la relación $M - \theta$. Según Wilson (2002) un valor de $n = 20$ produce un comportamiento bilineal.

La rigidez tangente J, que equivale a la primera derivada del momento respecto a la rotación, es decir $dM/d\theta$, se calcula para cada instante de tiempo o paso de carga con la siguiente expresión:

$$J = \frac{dM}{d\theta} = J_y + \left(J_e - J_y\right)\frac{de}{d\theta} \tag{5.33}$$

donde $de/d\theta$ es la derivada del parámetro de rotación elástica respecto a la rotación total del resorte. Esta derivada se expresa como:

$$\frac{de}{d\theta} = \left(\frac{de}{dt}\right)\Big/\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{\dot{e}}{\dot{\theta}} \tag{5.34}$$

Por lo tanto, con base en las ecuaciones (5.32), el término $de/d\theta$ se calcula con alguna de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \dot{\theta}e \geq 0 \qquad && \frac{de}{d\theta} = \frac{\dot{e}}{\dot{\theta}} = 1 - \left|\frac{e}{\theta_y}\right|^n \\ &\text{Si } \dot{\theta}e < 0 \qquad && \frac{de}{d\theta} = \frac{\dot{e}}{\dot{\theta}} = 1 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Para el cálculo numérico de los parámetros e y $de/d\theta$ se utilizan las siguientes aproximaciones por diferencias finitas en cada instante de tiempo:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\dot{\theta} \cong \frac{\theta_{(t+\Delta t)} - \theta_{(t)}}{\Delta t} \qquad \dot{e} \cong \frac{e_{(t+\Delta t)} - e_{(t)}}{\Delta t} \tag{5.36}$$

Que planteadas en forma iterativa ($i = 1,2, ...$) quedarían:

$$\dot{\theta} \cong \frac{\theta^{(i)}_{(t+\Delta t)} - \theta_{(t)}}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} \qquad \dot{e} \cong \frac{e^{(i)}_{(t+\Delta t)} - e_{(t)}}{\Delta t} \tag{5.37}$$

Donde v es el cambio en la rotación del resorte en todo el intervalo Δt y en la iteración i. Al rescribir las ecuaciones (5.32), estas toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Si } ve^{(i)}_{(t+\Delta t)} \geq 0 \qquad && e^{(i)}_{(t+\Delta t)} = e_{(t)} + \left(1 - \left|\frac{e^{(i)}_{(t+\Delta t)}}{\theta_y}\right|^n\right) v \\ &\text{Si } ve^{(i)}_{(t+\Delta t)} < 0 \qquad && e^{(i)}_{(t+\Delta t)} = e_{(t)} + v \end{aligned} \tag{5.38}$$

Las anteriores ecuaciones implican un proceso iterativo puesto que $e^{(i)}_{(t+\Delta t)}$ es desconocido. Para evitar este inconveniente se asume que el signo del producto $ve^{(i)}_{(t+\Delta t)}$ es igual al signo del producto $ve^{(i-1)}_{(t+\Delta t)}$ y que el cociente $e^{(i)}_{(t+\Delta t)}/\theta_y$ es aproximadamente igual a $e_{(t)}/\theta_y$. Por lo tanto, las ecuaciones (5.38) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Si } ve^{(i-1)}_{(t+\Delta t)} \geq 0 \qquad && e^{(i)}_{(t+\Delta t)} = e_{(t)} + \left(1 - \left|\frac{e_{(t)}}{\theta_y}\right|^n\right) v \\ &\text{Si } ve^{(i-1)}_{(t+\Delta t)} < 0 \qquad && e^{(i)}_{(t+\Delta t)} = e_{(t)} + v \end{aligned} \tag{5.39}$$

Sin embargo para el cálculo de la rigidez tangente, que involucra la determinación de la derivada $de/d\theta$ no es adecuado realizar la aproximación anterior en la Ecuación (5.35a). La rigidez tangente debe evaluarse de una forma más exacta puesto que de ella depende principalmente la matriz de rigidez tangente de la estructura. En este caso, las ecuaciones (5.35) en forma iterativa serían las siguientes:

$$\begin{aligned} &\text{Si } ve^{(i-1)}_{(t+\Delta t)} \geq 0 \qquad && \frac{de}{d\theta} = 1 - \left|\frac{e^{(i)}_{(t+\Delta t)}}{\theta_y}\right|^n \\ &\text{Si } ve^{(i-1)}_{(t+\Delta t)} < 0 \qquad && \frac{de}{d\theta} = 1 \end{aligned} \tag{5.40}$$

El cálculo del momento real y de la rigidez tangente en el resorte rotacional para cierto nivel de rotación utilizando este modelo se resume en los siguientes pasos, los cuales deben realizarse para cada iteración i:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

a) Incremento total en la rotación del resorte en el intervalo:

$$v = \theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} - \theta_{(t)}$$

b) Parámetro de rotación elástica al final del intervalo:

$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \leq 0$: $\quad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = e_{(t)} + v$

$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} > 0$: $\quad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = e_{(t)} + v\left(1 - \left|\frac{e_{(t)}}{\theta_y}\right|^n\right)$

$Si\ e_{(t+\Delta t)}^{(i)} > \theta_y$: $\quad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \theta_y$

$Si\ e_{(t+\Delta t)}^{(i)} < -\theta_y$: $\quad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = -\theta_y$

c) Derivada del parámetro de rotación elástica al final del intervalo:

$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \geq 0$: $\quad \left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1 - \left|\frac{e_{(t+\Delta t)}^{(i)}}{\theta_y}\right|^n$

$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} < 0$: $\quad \left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1$

d) Momento en el resorte al final del intervalo:

$$M_{(t+\Delta t)}^{(i)} = J_y \theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} + (J_e - J_y) e_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

e) Rigidez tangente del resorte al final del intervalo:

$$J_{(t+\Delta t)}^{(i)} = J_y + (J_e - J_y)\left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

5.3.1. Resortes rotacionales con rotaciones de fluencia diferentes

La formulación matemática y el procedimiento mostrado para un resorte rotacional no lineal con propiedades positivas y negativas iguales puede extenderse para un resorte en el que las rotaciones o los momentos de fluencia son diferentes en cada dirección, cuyos parámetros se muestran en la Figura 5.7. Este caso es más general y se presenta en elementos de concreto reforzado o de acero en los que el momento de fluencia negativo es diferente al momento de fluencia positivo, y por lo tanto la rotación de fluencia a momento positivo $\theta_y^{(+)}$ es diferente a la rotación de fluencia a momento negativo $\theta_y^{(-)}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

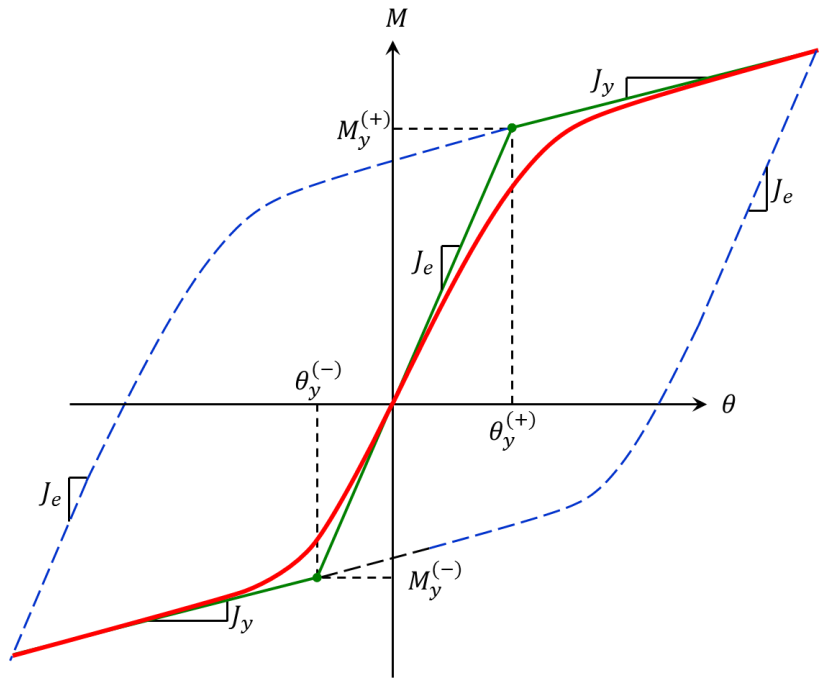


Figura 5.7. Relación $M - \theta$ de un resorte rotacional con rotaciones de fluencia diferentes en cada dirección. Adaptada de Wilson (2002)

Utilizando este modelo, el cálculo del momento y de la rigidez tangente en el resorte para cierto nivel de rotación se resume en los siguientes pasos, los cuales también deben realizarse para cada iteración i:

a) Incremento total en la rotación del resorte en el intervalo:

$$v = \theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} - \theta_{(t)}$$

b) Parámetro de rotación elástica al final del intervalo:

$$Si\ v e_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \geq 0\ y\ e_{(t)} > 0: \qquad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = e_{(t)} + v\left(1 - \left|\frac{e_{(t)}}{\theta_y^{(+)}}\right|^n\right)$$

$$Si\ v e_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \geq 0\ y\ e_{(t)} < 0: \qquad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = e_{(t)} + v\left(1 - \left|\frac{e_{(t)}}{\theta_y^{(-)}}\right|^n\right)$$

$$Si\ v e_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} < 0: \qquad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = e_{(t)} + v$$

$$Si\ e_{(t+\Delta t)}^{(i)} > \theta_y^{(+)}: \qquad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \theta_y^{(+)}$$

$$Si\ e_{(t+\Delta t)}^{(i)} < -\theta_y^{(-)}: \qquad e_{(t+\Delta t)}^{(i)} = -\theta_y^{(-)}$$

c) Derivada del parámetro de rotación elástica al final del intervalo:

$$Si\ v e_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \leq 0: \qquad \left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} > 0\ y\ e_{(t)} > 0: \qquad \left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1 - \left|\frac{e_{(t+\Delta t)}^{(i)}}{\theta_y^{(+)}}\right|^n$$

$$Si\ ve_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} > 0\ y\ e_{(t)} < 0: \qquad \left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1 - \left|\frac{e_{(t+\Delta t)}^{(i)}}{\theta_y^{(-)}}\right|^n$$

d) Momento en el resorte al final del intervalo:

$$M_{(t+\Delta t)}^{(i)} = J_y\theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} + \left(J_e - J_y\right)e_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

e) Rigidez tangente del resorte al final del intervalo:

$$J_{(t+\Delta t)}^{(i)} = J_y + \left(J_e - J_y\right)\left(\frac{de}{d\theta}\right)_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

5.4. Métodos de Newmark y de Newton – Raphson modificado

5.4.1. Ecuación de movimiento en forma incremental

En general la ecuación matricial de movimiento que relaciona todas las acciones que actúan sobre los diafragmas rígidos en el instante de tiempo *t* es la siguiente (Chopra, 2001):

$$[m]\{\ddot{u}_\phi(t)\} + \{F_{a\phi}(t)\} + \{F_{s\phi}(t)\} = \{F_{ext}(t)\} \tag{5.41}$$

La anterior ecuación evaluada en el instante de tiempo $t + \Delta t$ es la siguiente:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} + \{F_{a\phi}(t+\Delta t)\} + \{F_{s\phi}(t+\Delta t)\} = \{F_{ext}(t+\Delta t)\} \tag{5.42}$$

Para el caso de movimiento de la base las acciones externas $\{F_{ext}(t)\}$ y $\{F_{ext}(t+\Delta t)\}$ equivalen respectivamente a $-[m][\gamma]\{\ddot{u}_g(t)\}$ y $-[m][\gamma]\{\ddot{u}_g(t+\Delta t)\}$. Entre los dos instantes de tiempo existe un intervalo de tiempo Δt, que por lo general es constante y coincide con la separación entre lecturas registradas en los acelerogramas.

De la resta de las ecuaciones (5.41) y (5.42) se obtienen como resultado la ecuación matricial de movimiento en forma incremental, como se muestra a continuación:

$$[m]\{\Delta\ddot{u}_\phi\} + \{\Delta F_{a\phi}\} + \{\Delta F_{s\phi}\} = \{\Delta F_{ext}\} \tag{5.43}$$

donde $\{\Delta\ddot{u}_\phi\}$ corresponde al incremento de las aceleraciones relativas a la base de centros de masa y $\{\Delta F_{a\phi}\}$, $\{\Delta F_{s\phi}\}$ y $\{\Delta F_{ext}\}$ equivalen respectivamente a los incrementos en las acciones de amortiguamiento natural, equivalentes y externas, trasladadas a los centros de masa y en el intervalo actual. Las anteriores cantidades se evalúan con las siguientes expresiones:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\begin{aligned}\{\Delta\ddot{u}_\phi\} &= \{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} - \{\ddot{u}_\phi(t)\}\\ \{\Delta F_{a\phi}\} &= \{F_{a\phi}(t+\Delta t)\} - \{F_{a\phi}(t)\}\\ \{\Delta F_{s\phi}\} &= \{F_{s\phi}(t+\Delta t)\} - \{F_{s\phi}(t)\}\\ \{\Delta F_{ext}\} &= \{F_{ext}(t+\Delta t)\} - \{F_{ext}(t)\}\end{aligned} \tag{5.44}$$

Asumiendo que el intervalo de tiempo es lo suficientemente pequeño, los incrementos en las acciones de amortiguamiento y en las acciones equivalentes de la Ecuación (5.43) se aproximan en función de los incrementos de los desplazamientos y las velocidades relativas a la base de los centros de masa $\{\Delta u_\phi\}$ y $\{\Delta\dot{u}_\phi\}$, y de las matrices tangentes de rigidez lateral y amortiguamiento $[k_\phi(t)]$ y $[c(t)]$, esta última cuando el amortiguamiento se asume variable:

$$\begin{aligned}\{\Delta F_{a\phi}\} &\cong [c(t)]\{\Delta\dot{u}_\phi\}\\ \{\Delta F_{s\phi}\} &\cong [k_\phi(t)]\{\Delta u_\phi\}\end{aligned} \tag{5.45}$$

Las matrices $[k_\phi(t)]$ y $[c(t)]$ se denominan *matrices tangentes* porque están evaluadas con los parámetros de rigidez y amortiguamiento en el instante t, al comienzo del intervalo:

Las anteriores aproximaciones inducen un grado de error que se corrige, en un gran porcentaje, mediante un proceso iterativo que se describe más adelante. Reemplazando la Ecuación (5.45) en la Ecuación (5.43), esta última toma la siguiente forma:

$$[m]\{\Delta\ddot{u}_\phi\} + [c(t)]\{\Delta\dot{u}_\phi\} + [k_\phi(t)]\{\Delta u_\phi\} = \{\Delta F_{ext}\} \tag{5.46}$$

De forma simplificada la matriz $[\mathrm{c}(t)]$ se construye utilizando el criterio de Rayleigh en el que el amortiguamiento se supone proporcional a la masa y a la rigidez, en este caso a la rigidez tangente al comienzo del intervalo $[k_\phi(t)]$. La siguiente expresión, adaptada de la metodología expuesta en el Capítulo 3, permite evaluar la matriz $[\mathrm{c}(t)]$.

$$[c(t)] = a_0[m] + a_1[k_\phi(t)] \tag{5.47}$$

Donde los coeficientes a_0 y a_1 se evalúan con las expresiones (3.105). Finalmente los vectores de incrementos de los desplazamientos y de las velocidades de los centros de masa, relativos a la base y en el intervalo actual, $\{\Delta\dot{u}_\phi\}$ y $\{\Delta u_\phi\}$ respectivamente, se evalúan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\{\Delta u_\phi\} &= \{u_\phi(t+\Delta t)\} - \{u_\phi(t)\}\\ \{\Delta\dot{u}_\phi\} &= \{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\} - \{\dot{u}_\phi(t)\}\end{aligned} \tag{5.48}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

5.4.2. Forma implícita del método de Newmark

Las dos ecuaciones básicas del método de Newmark, planteadas en forma matricial y en términos de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones relativas a la base de los centros de masa son las siguientes (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998):

$$\begin{gathered}\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}_\phi(t)\} + (1-\gamma)\Delta t\{\ddot{u}_\phi(t)\} + \gamma\Delta t\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} \\ \{u_\phi(t+\Delta t)\} = \{u_\phi(t)\} + \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\{\ddot{u}_\phi(t)\} + (\beta(\Delta t)^2)\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\}\end{gathered} \tag{5.49}$$

Donde los coeficientes γ y β definen la variación supuesta de las aceleraciones en el intervalo de t a $t+\Delta t$. Cuando $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$ el método asume una aceleración constante con un valor promedio entre las aceleraciones al comienzo y al final del intervalo. Las siguientes ecuaciones corresponden a la forma de aceleración promedio.

$$\begin{gathered}\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}_\phi(t)\} + \frac{\Delta t}{2}\left(\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} + \{\ddot{u}_\phi(t)\}\right) \\ \{u_\phi(t+\Delta t)\} = \{u_\phi(t)\} + \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} + \{\ddot{u}_\phi(t)\}\right)\end{gathered} \tag{5.50}$$

Cuando $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/6$ el método asume una variación lineal de la aceleración entre los instantes inicial y final del intervalo. Las siguientes ecuaciones corresponden a la forma de aceleración lineal.

$$\begin{gathered}\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}_\phi(t)\} + \frac{\Delta t}{2}\left(\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} + \{\ddot{u}_\phi(t)\}\right) \\ \{u_\phi(t+\Delta t)\} = \{u_\phi(t)\} + \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} + \frac{1}{3}\{\ddot{u}_\phi(t)\}\right)\end{gathered} \tag{5.51}$$

En cualquiera de los casos esta forma del método es iterativa dado que siempre aparece el término $\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\}$ en el lado derecho de las ecuaciones (Chopra, 2001). La respuesta en el instante $t+\Delta t$ no depende solo de la respuesta en el instante t, como ocurre en los métodos explícitos utilizados en análisis lineal. A continuación se describe una forma no iterativa del método.

Al despejar $\{\Delta\ddot{u}_\phi\}$ de la Ecuación (5.49a), esta toma la siguiente forma:

$$\begin{gathered}\{u_\phi(t+\Delta t)\} = \{u_\phi(t)\} + \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\{\ddot{u}_\phi(t)\} + (\beta(\Delta t)^2)\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} \\ \beta(\Delta t)^2\left(\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} - \{\ddot{u}_\phi(t)\}\right) = \{u_\phi(t+\Delta t)\} - \{u_\phi(t)\} - \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} - \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{u}_\phi(t)\} \\ \beta(\Delta t)^2\{\Delta\ddot{u}_\phi\} = \{\Delta u_\phi\} - \Delta t\{\dot{u}_\phi(t)\} - \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{u}_\phi\ (t)\}\end{gathered} \tag{5.52}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{\Delta\ddot{u}_\phi\} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\{\Delta u_\phi\} - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_\phi(t)\} - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{u}_\phi(t)\}$$

Al remplazar esta última expresión en la Ecuación (5.50a), esta toma la siguiente forma:

$$\begin{gathered}
\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}_\phi(t)\} + (1-\gamma)\Delta t\{\ddot{u}_\phi(t)\} + \gamma\Delta t\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\} \\
\{\Delta\dot{u}_\phi\} = \Delta t\{\ddot{u}_\phi(t)\} + \gamma\Delta t\{\Delta\ddot{u}_\phi\} \\
\{\Delta\dot{u}_\phi\} = \Delta t\{\ddot{u}_{\phi(t)}\} + \gamma\Delta t\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\{\Delta u_\phi\} - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_\phi(t)\} - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{u}_\phi(t)\}\right) \\
\{\Delta\dot{u}_\phi\} = +\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u_\phi\} - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{u}_\phi(t)\} + \Delta t\{\ddot{u}_\phi(t)\} - \frac{\gamma\Delta t}{2\beta}\{\ddot{u}_\phi(t)\} \\
\{\Delta\dot{u}_\phi\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u_\phi\} - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{u}_\phi(t)\} + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{u}_\phi(t)\}
\end{gathered} \tag{5.53}$$

Al remplazar las expresiones (5.52d) y (5.53e) de $\{\Delta\dot{u}_\phi\}$ y $\{\Delta\ddot{u}_\phi\}$ en la Ecuación (5.46) y simplificar se llega a la siguiente expresión:

$$[\hat{k}_\phi(t)]\{\Delta u_\phi\} = \{\Delta\hat{F}_{ext}\} \tag{5.54}$$

En la que $[\hat{k}_\phi(t)]$ es la *matriz de rigidez tangente efectiva* evaluada al comienzo del intervalo, y $\{\Delta\hat{F}_{ext}\}$ es el *vector de incremento efectivo de las acciones externas*. Estas cantidades incluyen en efecto de la masa y el amortiguamiento y se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{gathered}
[\hat{k}_\phi(t)] = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}[m] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[c(t)] + [k_\phi(t)] \\
\{\Delta\hat{F}_{ext}\} = \{\Delta F_{ext}\} + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}[m] + \frac{\gamma}{\beta}[c(t)]\right)\{\dot{u}_\phi(t)\} + \left(\frac{1}{2\beta}[m] - \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)[c(t)]\right)\{\ddot{u}_\phi(t)\}
\end{gathered} \tag{5.55}$$

El vector $\{\Delta\hat{F}_{ext}\}$ se escribe de una forma mas compacta utilizando dos matrices auxiliares $[a(t)]$ y $[b(t)]$, de forma que:

$$\{\Delta\hat{F}_{ext}\} = \{\Delta F_{ext}\} + [a(t)]\{\dot{u}_\phi(t)\} + [b(t)]\{\ddot{u}_\phi(t)\} \tag{5.56}$$

Las matrices auxiliares $[a(t)]$ y $[b(t)]$ se evalúan con las siguientes expresiones:

$$\begin{gathered}
[a(t)] = \frac{1}{\beta\Delta t}[m] + \frac{\gamma}{\beta}[c(t)] \\
[b(t)] = \frac{1}{2\beta}[m] - \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)[c(t)]
\end{gathered} \tag{5.57}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Ecuación (5.54) indica que el análisis dinámico de una estructura equivale al análisis estático de la misma, sometida a acciones externas, inerciales y de amortiguamiento, de forma que los vectores $\left[\hat{k}_{\phi}(t)\right]$ y $\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\}$ contienen la contribución de las fuerzas de inercia y amortiguamiento al sistema (Bathe, 1996a, 1996b; Chopra, 2001).

5.4.3. Procedimiento general de solución de las ecuaciones de movimiento en forma incremental

A continuación se muestra un procedimiento general para calcular los desplazamientos, las velocidades y las aceraciones relativas a la base de los centros de masa al final del intervalo de tiempo con base en los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base al comienzo del intervalo y las matrices de masa, amortiguamiento tangente y rigidez lateral tangente, utilizando la formulación presentada previamente.

El procedimiento divide los pasos en dos conjuntos, un primer conjunto de pasos que deben realizarse antes de comenzar propiamente el análisis dinámico y un segundo conjunto de pasos que se realizan para cada intervalo de tiempo.

a) Cálculos previos:

   i. Construir la matriz de masa concentrada $[m]$

   ii. Construir el vector de acciones externas en cada instante de tiempo $\{F_{ext}(t)\}$

   iii. Seleccionar la forma del método a partir de los coeficientes $\gamma\ y\ \beta$:

   Aceleración promedio: $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$

   Aceleración lineal: $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$

   iv. Calcular el vector de aceleraciones de los centros de masa en $t = 0$:

$$\left\{\ddot{u}_{\phi(0)}\right\} = [m]^{-1}\left(\left\{F_{ext(0)}\right\} - \left\{(F_a)_{\phi(0)}\right\} - \left\{(F_s)_{\phi(0)}\right\}\right)$$

   v. Calcular las constantes iniciales:

$$c_1 = \frac{1}{\beta\Delta t} \qquad c_2 = \frac{\gamma}{\beta} \qquad c_3 = \frac{1}{2\beta} \qquad c_4 = \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)$$

$$c_5 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \qquad c_6 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \qquad c_7 = \gamma\Delta t \qquad c_8 = \frac{(\Delta t)^2}{2} \qquad c_9 = \beta(\Delta t)^2$$

b) Cálculos para cada intervalo de tiempo:

   i. Matriz de rigidez tangente $[k_{\phi}(t)]$

   ii. Matriz de amortiguamiento tangente $[c(t)]$ utilizando amortiguamiento de Rayleigh, proporcional a la masa y a la rigidez tangente:

$$[c(t)] = a_0[m] + a_1\left[k_{\phi}(t)\right]$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

iii. Matrices auxiliares $[a(t)]\ y\ [b(t)]$:

$$[a(t)] = c_1[m] + c_2[c(t)] \qquad [b(t)] = c_3[m] + c_4[c(t)]$$

iv. Matriz de rigidez tangente efectiva $\left[\hat{k}_\phi(t)\right]$:

$$\left[\hat{k}_\phi(t)\right] = c_6[m] + c_5[c(t)] + \left[k_\phi(t)\right]$$

v. Vector de incremento efectivo de acciones externas $\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\}$:

$$\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\} = [a(t)]\left\{\dot{u}_{\phi(t)}\right\} + [b(t)]\left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\}$$

vi. Vector de incremento de desplazamientos de centros de masa $\left\{\Delta u_\phi\right\}$:

$$\left\{\Delta u_\phi\right\} = \left[\hat{k}_\phi(t)\right]^{-1}\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\}$$

vii. Vectores de incremento de velocidades y aceleraciones de centros de masa $\left\{\Delta\dot{u}_\phi\right\}\ y\ \left\{\Delta\ddot{u}_\phi\right\}$:

$$\left\{\Delta\dot{u}_\phi\right\} = c_5\left\{\Delta u_\phi\right\} - c_2\left\{\dot{u}_\phi(t)\right\} - c_4\left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\}$$

$$\left\{\Delta\ddot{u}_\phi\right\} = c_6\left\{\Delta u_\phi\right\} - c_1\left\{\dot{u}_\phi(t)\right\} - c_3\left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\}$$

viii. Vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa al final del intervalo $\left\{u_\phi(t+\Delta t)\right\}, \left\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\right\}\ y\ \left\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\right\}$:

$$\left\{u_\phi(t+\Delta t)\right\} = \left\{u_\phi(t)\right\} + \left\{\Delta u_\phi\right\}$$

$$\left\{\dot{u}_\phi(t+\Delta t)\right\} = \left\{\dot{u}_\phi(t)\right\} + \left\{\Delta\dot{u}_\phi\right\}$$

$$\left\{\ddot{u}_\phi(t+\Delta t)\right\} = \left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\} + \left\{\Delta\ddot{u}_\phi\right\}$$

En el procedimiento anterior se tiene un enfoque más general donde el amortiguamiento natural es variable. Si se utiliza amortiguamiento de Rayleigh proporcional a la masa y a la rigidez inicial, la matriz de amortiguamiento pasa a ser constante y se calcula solamente al comienzo del procedimiento, sin necesidad de calcularla en cada intervalo de tiempo.

5.4.4. Método de Newton Raphson modificado

En el procedimiento general mostrado anteriormente, el paso donde se calcula el vector de incremento de desplazamientos $\left\{\Delta u_\phi\right\}$ mediante la Ecuación (5.54) debe realizarse de forma iterativa, dado que en la ecuación de movimiento en forma incremental se han aproximado los incrementos en las acciones equivalentes y de amortiguamiento mediante las expresiones (5.45). La anterior es una importante fuente de error, teniendo en cuenta que la respuesta dinámica no lineal es altamente dependiente de la historia de cálculo (Bathe, 1996a; Chopra, 2001; Wilson, 2002).

Lo anterior indica que la exactitud de la respuesta obtenida para el instante $t + \Delta t$ depende de la calidad de la respuesta obtenida en el instante t. Por lo tanto para la solución

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

de un problema dinámico no lineal se requiere un esquema iterativo más exigente que para la solución de un problema estático no lineal (Bathe, 1996a).

El término $\{\Delta F_{s\phi}\}$ equivale exactamente al producto $[k_s]\{\Delta u_\phi\}$, donde $[k_s]$ es la matriz de rigidez secante del intervalo, la cual es desconocida dado que $\{u_\phi(t)\}$ es desconocido (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001). De igual forma el incremento en las acciones de amortiguamiento $\{\Delta F_{a\phi}\}$ equivale al producto $[c_s]\{\Delta \dot{u}_\phi\}$ donde $[c_s]$ es la matriz de amortiguamiento secante del intervalo. Si se aplica el criterio de Rayleigh, esta matriz sería función de la matriz $[k_s]$ que también es desconocida. La Figura 5.8 muestra la diferencia entre la rigidez secante y la rigidez tangente al comienzo del intervalo de un sistema de un grado de libertad.

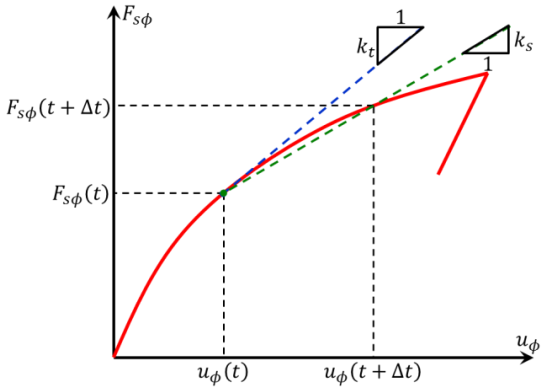


Figura 5.8. Rigidez secante y rigidez tangente en un sistema de 1GLD (Chopra, 2001)

Otra fuente de error está en el uso de un intervalo de tiempo Δt constante, dado que se retrasa la detección de las transiciones en las relaciones fuerza – desplazamiento de las rótulas plásticas (Chopra, 2001).

La Figura 5.9 muestra el error en el que se incurre al utilizar la rigidez tangente al comienzo del intervalo para calcular el incremento en el desplazamiento en un sistema de un grado de libertad. Con el procedimiento numérico se estima el punto b aproximado, mientras la solución real corresponde al punto b'. Este método subestima los desplazamientos.

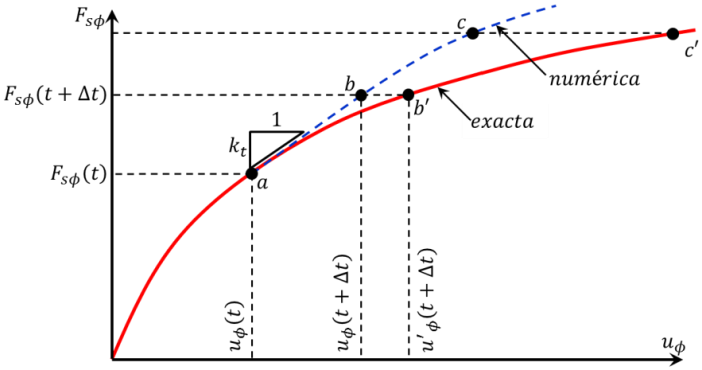


Figura 5.9. Error por el uso de la rigidez tangente al comienzo del intervalo (Chopra, 2001)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Figura 5.10 muestra el error en el que se incurre al no detectar adecuadamente el punto en el que la velocidad es cero y el desplazamiento cambia de signo, es decir cuando se inicia la descarga. La localización del punto b' se retrasa, asumiendo un punto b de velocidad cero aproximado, ya que en realidad su velocidad es diferente de cero. En este caso el método sobrestima los desplazamientos.

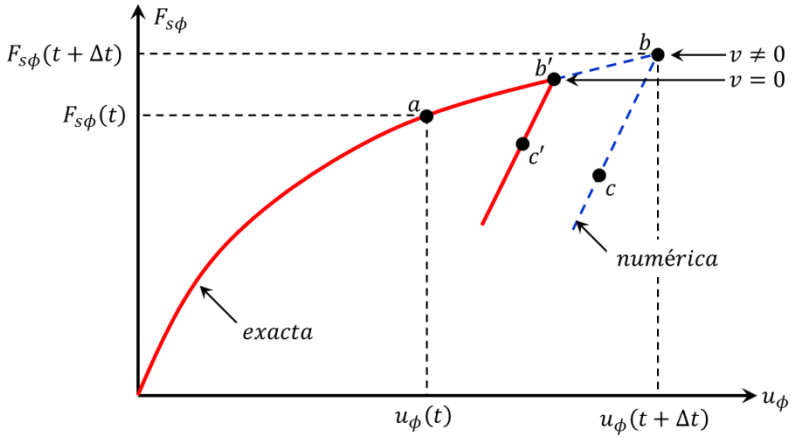


Figura 5.10. Error en detección de punto de velocidad cero (Chopra, 2001)

En todos los casos la localización del punto c se hace a partir del punto b aproximado, volviéndose acumulativas las dos fuentes de error descritas previamente.

El *método de Newton-Raphson modificado* es un proceso iterativo que sirve para minimizar los errores acumulativos debidos a la aproximación del incremento de las acciones equivalentes mediante la rigidez tangente al comienzo del intervalo. A continuación se presenta la formulación matemática del método.

Para un sistema dinámico que posee una matriz de rigidez efectiva al comienzo del intervalo $\left[\hat{k}_\phi(t)\right]$ y al cual se le aplica un incremento efectivo de acciones externas $\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\}$, la primera aproximación al incremento correcto de los desplazamientos en el intervalo $\left\{\Delta u_\phi^{(1)}\right\}$ se evalúa con la siguiente expresión derivada del método de Newmark:

$$\left\{\Delta u_\phi^{(1)}\right\} = \left[\hat{k}_\phi(t)\right]^{-1}\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\} = \left[\hat{k}_\phi(t)\right]^{-1}\left\{\Delta R^{(1)}\right\} \tag{5.58}$$

El vector $\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\}$ corresponde a las acciones residuales para la primera iteración $\left\{\Delta R^{(1)}\right\}$, acciones que están en desequilibrio y que cuando se aplican a la estructura generan el incremento de desplazamientos $\left\{\Delta u_\phi^{(1)}\right\}$, entonces $\left\{\Delta\hat{F}_{ext}\right\} = \left\{\Delta R^{(1)}\right\}$.

Los desplazamientos al final del intervalo y de la primera iteración $\left\{u_\phi^{(1)}(t+\Delta t)\right\}$ serán la suma de los desplazamientos al comienzo del intervalo $\left\{u_\phi(t)\right\}$ y del primer incremento de desplazamientos $\left\{\Delta u_\phi^{(1)}\right\}$. De igual forma los desplazamientos al comienzo del intervalo $\left\{u_\phi(t)\right\}$ equivalen los desplazamientos al final del intervalo en la iteración cero (*anterior a la primera*) por lo que $\left\{u_\phi^{(0)}(t+\Delta t)\right\} = \left\{u_\phi(t)\right\}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\left\{u_{\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\right\} = \{u_{\phi}(t)\} + \left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} = \left\{u_{\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\} + \left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} \tag{5.59}$$

De acuerdo con las expresiones básicas del método de Newmark, $\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\}$ produce incrementos en las velocidades y en las aceleraciones $\left\{\Delta \dot{u}_{\phi}^{(1)}\right\}$ y $\left\{\Delta \ddot{u}_{\phi}^{(1)}\right\}$ que se evalúan con las siguientes expresiones:

$$\begin{gathered}\left\{\Delta \dot{u}_{\phi}^{(1)}\right\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{u}_{\phi}(t)\} + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{u}_{\phi}(t)\} \\ \left\{\Delta \ddot{u}_{\phi}^{(1)}\right\} = \frac{1}{\beta(\Delta t^2)}\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_{\phi}(t)\} - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{u}_{\phi}(t)\}\end{gathered} \tag{5.60}$$

Los correspondientes incrementos en las acciones inerciales, de amortiguamiento y equivalentes serán entonces $\{\Delta F_{I\phi}^{(1)}\}$, $\{\Delta F_{a\phi}^{(1)}\}$ y $\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\}$. El primero equivale al producto $[m]\{\Delta \ddot{u}^{(1)}\}$, el segundo equivale aproximadamente al producto $[c(t)]\{\Delta \dot{u}^{(1)}\}$ dado que no hay una ley que rige la variación el amortiguamiento con la velocidad (Wilson, 2002), y el tercero es exactamente igual a la diferencia $\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\} - \{F_{s\phi}(t)\}$, como se indica a continuación:

$$\begin{gathered}\left\{\Delta F_{I\phi}^{(1)}\right\} = [m]\{\Delta \ddot{u}^{(1)}\} = \frac{1}{\beta(\Delta t^2)}[m]\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} - \frac{1}{\beta\Delta t}[m]\{\dot{u}_{\phi(t)}\} - \frac{1}{2\beta}[m]\{\ddot{u}_{\phi(t)}\} \\ \left\{\Delta F_{a\phi}^{(1)}\right\} \approx [c(t)]\{\Delta \dot{u}^{(1)}\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[c_t]\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} - \frac{\gamma}{\beta}[c_t]\{\dot{u}_{\phi(t)}\} + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)[c_t]\{\ddot{u}_{\phi(t)}\} \\ \left\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\right\} = \left\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\} = \left\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\right\} - \{F_{s\phi}(t)\}\end{gathered} \tag{5.61}$$

La suma de los términos $\{\Delta F_{I\phi}^{(1)}\}$, $\{\Delta F_{a\phi}^{(1)}\}$ y $\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\}$ no es exactamente igual a $\{\Delta F_{ext}\}$, en realidad es menor dado que $\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\}$ real es menor que $[k_{\phi}(t)]\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\}$. Para que la igualdad se cumpla hay que adicionar a la izquierda del igual un término denominado $\{\Delta R^{(2)}\}$ que corresponde a un nuevo vector de acciones externas equivalentes, que en este caso van a ser las acciones residuales para la segunda iteración.

El vector $\left\{\Delta R^{(2)}\right\}$ equilibra el incremento de las acciones externas $\{\Delta F_{ext}\}$ pero físicamente no existe y por lo tanto hay que aplicárselo posteriormente a la estructura en una segunda iteración para que esta nuevamente se deforme y aparezcan acciones que lo equilibren.

Por lo tanto la ecuación matricial de movimiento en forma incremental, adicionando el vector de acciones residuales es la siguiente:

$$\left\{\Delta F_{I\phi}^{(1)}\right\} + \left\{\Delta F_{a\phi}^{(1)}\right\} + \left\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\right\} + \left\{\Delta R^{(2)}\right\} = \{\Delta F_{ext}\} \tag{5.62}$$

Al despejar $\{\Delta R^{(2)}\}$:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\left\{\Delta R^{(2)}\right\} = \{\Delta F_{ext}\} - \left\{\Delta F_I^{(1)}\right\} - \left\{\Delta F_a^{(1)}\right\} - \left\{\Delta F_s^{(1)}\right\} \tag{5.63}$$

Al remplazar las ecuaciones (5.61) en la anterior ecuación, reorganizar y simplificar:

$$\begin{aligned}\{\Delta R^{(2)}\} = \left(\{\Delta F_{ext}\} + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}[m] + \frac{\gamma}{\beta}[c(t)]\right)\{\dot{u}_\phi(t)\} + \left(\frac{1}{2\beta}[m] + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)[c(t)]\right)\{\ddot{u}_\phi(t)\}\right) \\ - \left(\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\} - \{F_{s\phi}(t)\}\right) - \left(\frac{1}{\beta(\Delta t^2)}[m] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[c(t)]\right)\{\Delta u_\phi^{(1)}\}\end{aligned} \tag{5.64}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\{\Delta\hat{F}_{ext}\} = \{\Delta R^{(1)}\} = \{\Delta F_{ext}\} + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}[m] + \frac{\gamma}{\beta}[c(t)]\right)\{\dot{u}_\phi(t)\} + \left(\frac{1}{2\beta}[m] + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)[c(t)]\right)\{\ddot{u}_\phi(t)\} \\ [\hat{k}_\phi(t)] - [k_\phi(t)] = \frac{1}{\beta(\Delta t^2)}[m] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[c(t)]\end{aligned} \tag{5.65}$$

El vector de acciones residuales para la segunda iteración $\{\Delta R^{(2)}\}$ se escribe en forma mas compacta de la siguiente manera:

$$\left\{\Delta R^{(2)}\right\} = \left\{\Delta R^{(1)}\right\} - \left(\left\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\}\right) - \left([\hat{k}_\phi(t)] - [k_\phi(t)]\right)\left\{\Delta u_\phi^{(1)}\right\} \tag{5.66}$$

Y en términos generales, para cualquier iteración ($j = 1, 2, \ldots$) el vector de acciones residuales para la siguiente iteración $\left\{\Delta R^{(j+1)}\right\}$ se calcula a partir del vector de acciones residuales de la iteración actual $\left\{\Delta R^{(j)}\right\}$, de los vectores de acciones equivalentes $\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\}$ y $\{F_{s\phi}^{(j-1)}(t + \Delta t)\}$, del vector $\{\Delta u_\phi^{(j)}\}$ y de las matrices $[\hat{k}_\phi(t)]$ y $[k_\phi(t)]$.

$$\left\{\Delta R^{(j+1)}\right\} = \left\{\Delta R^{(j)}\right\} - \left(\left\{F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\}\right) - \left([\hat{k}_\phi(t)] - [k_\phi(t)]\right)\left\{\Delta u_\phi^{(j)}\right\} \tag{5.67}$$

Nuevamente la anterior ecuación se escribe en forma más compacta así:

$$\left\{\Delta R^{(j+1)}\right\} = \left\{\Delta R^{(j)}\right\} - \left\{(\Delta F)_\phi^{(j)}\right\} \tag{5.68}$$

Donde $\{\Delta F_\phi^{(j)}\}$ es el incremento efectivo de las acciones equivalentes en el intervalo y en la iteración j, considerando el aporte de las acciones inerciales y del amortiguamiento debidas al efecto dinámico de la carga externa:

$$\left\{\Delta F_\phi^{(j)}\right\} = \left(\left\{F_{s\phi}^{(j)}(t+\Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(j-1)}(t+\Delta t)\right\}\right) + \left([\hat{k}_\phi(t)] - [k_\phi(t)]\right)\left\{\Delta u_\phi^{(j)}\right\} \tag{5.69}$$

La Figura 5.11 muestra el método de Newton – Raphson modificado aplicado a un sistema de un grado de libertad dinámico para determinar $u_\phi(t + \Delta t)$. Con la rigidez tangente efectiva al comienzo del intervalo $\hat{k}_\phi(t)$ y el incremento efectivo en la acción externa $\Delta\hat{F}_{ext}$ que equivale a la acción residual $\Delta R^{(1)}$ se calcula un primer incremento en el despla-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

zamiento $\Delta u_\phi^{(1)}$, que sumado a $u_\phi(t)$ o lo que es igual, a $u_\phi^{(0)}(t+\Delta t)$, da como resultado una primera estimación del desplazamiento al final del intervalo $u_\phi^{(1)}(t+\Delta t)$.

Para el desplazamiento $u_\phi^{(1)}(t+\Delta t)$, en el sistema actúa una fuerza equivalente $F_{s\phi}^{(1)}(t+\Delta t)$, que al aplicar la Ecuación (5.69) con $F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t) = F_{s\phi}(t)$, $\hat{k}_\phi(t)$, $k_\phi(t)$ y $\Delta u_\phi^{(1)}$ conocidos, se obtiene como resultado el primer incremento efectivo en la fuerza equivalente $\Delta F_\phi^{(1)}$ que restado a $\Delta R^{(1)}$ da como resultado $\Delta R^{(2)}$, la fuerza residual para la segunda iteración.

El anterior procedimiento se repite hasta que se cumpla alguno de los criterios de convergencia que se describen más adelante. La rigidez tangente efectiva al comienzo del intervalo se utiliza en todas las iteraciones, siendo esta la única diferencia con el método de Newton – Raphson original en el que la rigidez tangente se recalcula en cada iteración.

En la figura se muestra solamente las tres primeras iteraciones.

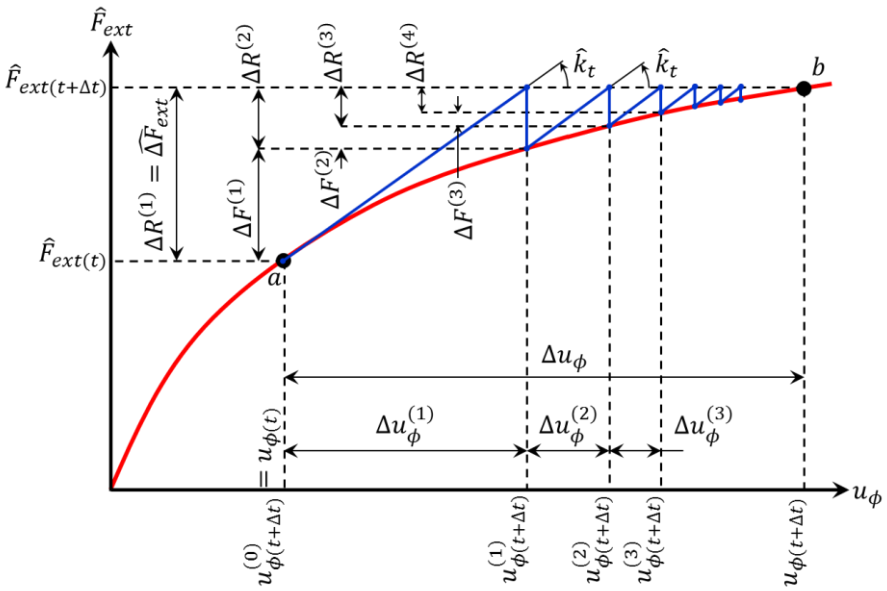


Figura 5.11. Método de Newton-Raphson aplicado a un sistema de 1GLD (Chopra, 2001)

El método de Newton – Raphson se resume en el siguiente procedimiento.

a) Cálculos antes de cada iteración:

i. Desplazamientos iniciales para la primera iteración, $\left\{u_\phi^{(0)}(t+\Delta t)\right\}$

$$\left\{u_\phi^{(0)}(t+\Delta t)\right\} = \{u_\phi(t)\}$$

ii. Acciones equivalentes iniciales para la primera iteración, $\left\{F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\}$

$$\left\{F_{s\phi}^{(0)}(t+\Delta t)\right\} = \{F_{s\phi}(t)\}$$

iii. Residuo para la primera iteración, $\left\{\Delta \mathrm{R}^{(1)}\right\}$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{\Delta R^{(1)}\} = \{\Delta \hat{F}_{ext}\}$$

b) Cálculos para cada iteración ($j = 1, 2, 3, ...$) :

i. Incremento en los desplazamientos en la iteración j, $\left\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\right\}$:

$$\left\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\right\} = \left[\hat{k}_{\phi}(t)\right]^{-1}\{\Delta R^{(j)}\}$$

ii. Desplazamientos al final del intervalo y en la iteración j, $\left\{u_{\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\}$:

$$\left\{u_{\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\} = \left\{u_{\phi}^{(j-1)}(t + \Delta t)\right\} + \left\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\right\}$$

iii. Acciones equivalentes al final del intervalo y en iteración j, $\left\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\}$:

$$\left\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\} = f\left(\left\{u_{\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\}\right)$$

iv. Incremento efectivo en las acciones equivalentes en la iteración j, $\left\{\Delta F_{\phi}^{(\mathrm{j})}\right\}$:

$$\left\{\Delta F_{\phi}^{(j)}\right\} = \left\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(j-1)}(t + \Delta t)\right\} + \left(\left[\hat{k}_{\phi}(t)\right] - \left[k_{\phi}(t)\right]\right)\left\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\right\}$$

v. Residuo para la iteración $j + 1$, $\left\{\Delta R^{(j+1)}\right\}$:

$$\left\{\Delta R^{(j+1)}\right\} = \left\{\Delta R^{(j+1)}\right\} - \left\{\Delta F_{\phi}^{(j)}\right\}$$

La aplicación de este método permite llegar a una mejor aproximación de los desplazamientos al final del intervalo $\left\{u_{\phi}(t + \Delta t)\right\}$ respecto a la que se llegaría aproximando el incremento en los desplazamientos con la expresión $\left\{\Delta u_{\phi}\right\} = \left[\hat{k}_{\phi}(t)\right]^{-1}\left\{\Delta \hat{F}_{ext}\right\}$, reduciendo de forma importante las formas acumulativas de error previamente descritas.

El anterior procedimiento implica el cálculo de las acciones equivalentes al final del intervalo y de cada iteración $\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\}$, trasladadas a los centros de masa de los diafragmas (*numeral b, paso iii*). Estas acciones son función de los desplazamientos al final del intervalo y de cada iteración $\{u_{\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\}$ y de las relaciones momento – rotación de los resortes rotacionales no lineales.

El cálculo del vector $\{F_{s\phi}^{(j)}(t + \Delta t)\}$ se describe de forma detallada más adelante dado que este paso constituye una etapa de cálculo de gran importancia para el análisis dinámico no lineal de estructuras típicas estudiadas en este trabajo.

5.4.5. Convergencia y estabilidad

En el método de Newton – Raphson las iteraciones terminan cuando el vector de incremento en los desplazamientos $\{\Delta u_{\phi}^{j}\}$ se hace lo suficientemente pequeño, momento en el que la solución ha convergido.

El primer criterio comúnmente utilizado para verificar la convergencia de la solución es mediante la comparación de las *normas Euclidianas* de los vectores $\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\}$ y $\{\Delta u_{\phi}\}$, de forma que el cociente de estas dos normas sea menor a una tolerancia ϵ especificada:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\frac{\left\|\left\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\right\}\right\|_2}{\left\|\left\{\Delta u_{\phi}\right\}\right\|_2} < \epsilon \tag{5.70}$$

En este caso $\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\}$ es el vector de incremento en los desplazamientos en la última iteración (*iteración l)* y $\{\Delta u_{\phi}\}$ es el vector de incremento total de desplazamientos acumulados en el intervalo hasta la iteración l, es decir:

$$\left\{\Delta u_{\phi}\right\} = \sum_{j=1}^{l} \left\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\right\} \tag{5.71}$$

El anterior criterio no es adecuado cuando los vectores $\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\}$ y $\{\Delta u_{\phi}\}$ contienen valores medidos en diferentes unidades, por ejemplo desplazamientos y rotaciones, de forma que los valores numéricos difieran notablemente (*generalmente los desplazamientos son más grandes que las rotaciones*).

En este caso se recomienda utilizar un criterio basado en comparación del trabajo realizado por el último vector de acciones residuales $\{\Delta R^{(l)}\}$ respecto al trabajo realizado por el incremento efectivo de acciones externas en todo el intervalo $\{\Delta \hat{F}_{ext}\}$. La expresión para verificar la convergencia por este criterio es la siguiente:

$$\frac{\left\{\Delta R^{(l)}\right\}^T \left\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\right\}}{\left\{\Delta \hat{F}_{ext}\right\}^T \left\{\Delta u_{\phi}\right\}} < \epsilon \tag{5.72}$$

donde $\{\Delta u_{\phi}^{(l)}\}$, $\{\Delta u_{\phi}\}$ y ϵ ya están dados.

Respecto a la estabilidad de la solución, la forma del método de Newmark que asume una aceleración promedio en el intervalo (*cuando* $\beta = 1/4$) es en teoría incondicionalmente estable, mientras que la forma del método que asume una variación lineal de la aceleración en el intervalo (*cuando* $\beta = 1/6$) es condicionalmente estable, dado que para intervalos de tiempo Δt mayores a $0.551T_n$ siendo T_n el periodo de vibración natural mas pequeño considerado en el análisis, el aporte de los modos mayores desborda la solución impidiendo su convergencia.

Lo anterior no quiere decir que el método de la aceleración lineal no pueda usarse para análisis dinámico inelástico, sino que se debe verificar que el intervalo de tiempo adoptado en el análisis cumpla con el criterio de estabilidad, lo cual en algunos casos demanda un gran esfuerzo computacional dado el tamaño necesario de Δt.

Independientemente del método seleccionado, el intervalo de tiempo Δt también debe escogerse de forma que la solución sea lo suficientemente precisa, dado que el error en la solución obtenida es función de este importante parámetro.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

De forma alternativa a la familia de métodos de Newmark se pueden utilizar otros métodos incondicionalmente estables como el método θ de Wilson (Wilson, Farhoomand, & Bathe, 1973) o el método α de Hilbert, Hughes y Taylor (Chung & Hulbert, 1993) que proveen amortiguamiento numérico a los modos de vibración de periodo mayor o igual a T_n de forma que el aporte de estos modos no desborde la solución (Chopra, 2001).

Otra alternativa es realizar una transformación a coordenadas generalizadas y considerar en la solución solamente los modos de vibración que cumplan con el criterio de estabilidad. Las métodologías basadas en este principio se denominan *Análisis Modal no Lineal* y en ocasiones se encuentran en la bibliografía como FNA – *Fast nonlinear Analysis* (Bathe, 1996a; Wilson, 2002).

5.5. Incremento de las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa

5.5.1. Consideraciones para el cálculo del incremento de acciones equivalentes en el intervalo y en la iteración actual

El procedimiento utilizado para la solución de las ecuaciones de movimiento en forma incremental utilizando el método de Newmark en conjunto con el método de Newton – Raphson modificado, requiere en uno de sus pasos el cálculo del vector $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ que corresponde al incremento de las acciones equivalentes (*que equilibran a las acciones internas de los elementos estructurales*) trasladadas a los centros de masa de los diafragmas rígidos en el intervalo actual y en la iteración j, que está dado por la siguiente ecuación:

$$\left\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\right\} = \left\{F_{s\phi}^{(j)}(t+\Delta t)\right\} - \left\{F_{s\phi}^{(j-1)}(t+\Delta t)\right\} \tag{5.73}$$

El vector $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ es función de la matriz de asociación de desplazamientos (*o matriz geométrica*) $[A]$ y del incremento en las acciones equivalentes que actúan en los grados de libertad de interés $\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\}$, como lo muestra la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\right\} = [A]^T \left\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\right\} \tag{5.74}$$

donde $\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\}$ corresponde al primer subvector del vector completo de incremento de acciones equivalentes $\left\{\Delta F_s{}^{(j)}\right\}$ el cual, para el tipo de estructuras y el tipo de movimientos sísmicos considerados que se trata en esta tesis, tiene la siguiente forma:

$$\left\{\Delta F_s{}^{(j)}\right\} = \left\{\left\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\right\} \quad \left\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\right\} = 0 \quad \left\{\Delta F_{s\beta}^{(j)}\right\}\right\}^T \tag{5.75}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Su construcción consiste en el ensamblaje de los vectores $\{\Delta f_e^{(j)}\}$ que contienen el incremento en las acciones en coordenadas globales en los extremos de cada elemento, en el intervalo y en la iteración actual:

$$\{\Delta F_s{}^{(j)}\} = \sum_{e=1}^{ne} \left\{\Delta f_e^{(j)}\right\} \tag{5.76}$$

El vector $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$ depende del incremento en los desplazamientos de los nudos $\{\Delta u^{(j)}\}$ en el intervalo y en la iteración actual y de las relaciones momento – rotación de los resortes rotacionales no lineales. El vector $\left\{\Delta u^{(j)}\right\}$ está dado por la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta u^{(j)}\right\} = \left\{u^{(j)}(t + \Delta t)\right\} - \left\{u^{(j-1)}(t + \Delta t)\right\} \tag{5.77}$$

En el análisis estático y dinámico de estructuras con comportamiento elástico o inelástico se debe garantizar que se cumplan las tres siguientes condiciones:

- Debe existir equilibrio de fuerzas y de momentos en toda la estructura y en cada elemento que la compone.
- Debe existir compatibilidad de desplazamientos y rotaciones en los nudos.
- Se deben cumplir las relaciones fuerza – desplazamiento y/o momento – rotación de las zonas donde se presentan las rótulas plásticas.

De forma alternativa se puede utilizar la siguiente ecuación de equilibrio para aproximar $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ a partir de la rigidez tangente evaluada al comienzo del intervalo $[k_\phi(t)]$ y del incremento de desplazamientos de los centros de masa $\{(\Delta u)_\phi^{(j)}\}$, como se ha mencionado previamente:

$$\left\{(\Delta F_s)_\phi^{(j)}\right\} \approx \left[k_\phi(t)\right]\left\{(\Delta u)_\phi^{(j)}\right\} \tag{5.78}$$

Sin embargo, esta aproximación es inadecuada puesto que, aunque siempre se cumplen las condiciones de equilibrio de fuerzas y compatibilidad de desplazamientos, no siempre se cumplen las relaciones fuerza – desplazamiento o momento – rotación de los resortes rotacionales, sobre todo cuando hay cambios de rigidez muy marcados como en las relaciones bilineales o muy frecuentes como en el modelo de Bouc – Wen.

La Figura 5.12 muestra el error en el que se incurre cuando se utiliza la rigidez tangente para calcular el incremento en los momentos en los resortes rotacionales. Con la rigidez tangente $J(t)$ y el incremento en la rotación $\Delta\theta^{(j)}$ del resorte se calcula el incremento $\Delta M'^{(j)}$ que en la figura corresponde a la distancia vertical entre los puntos a y b'. Sin embargo, para el mismo incremento en la rotación $\Delta\theta^{(j)}$, el incremento real del momento es $\Delta M^{(j)}$, es decir, la distancia vertical entre los puntos a y b, más pequeña que $\Delta M'^{(j)}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

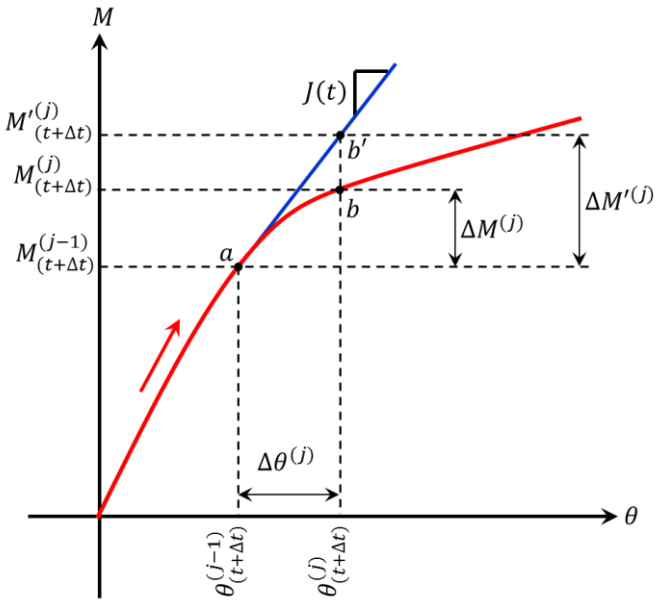


Figura 5.12. Error al estimar los momentos en los resortes rotacionales utilizando la rigidez tangente

Por otro lado el uso de la Ecuación (5.78) no permite calcular un residuo diferente a cero para la siguiente iteración. Si se ha realizado una primera iteración, el residuo para la segunda iteración es:

$$\{\Delta R^{(2)}\} = \{\Delta R^{(1)}\} - \left\{\Delta F_{\phi}^{(1)}\right\} \tag{5.79}$$

donde el incremento efectivo en las acciones equivalentes es:

$$\left\{\Delta F_{\phi}^{(1)}\right\} = \left\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\right\} + \left([\hat{k}_{\phi}(t)] - [k_{\phi}(t)]\right)\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} \tag{5.80}$$

Si se utiliza directamente la Ecuación (5.78) para calcular $\left\{\Delta F_{s\phi}^{(1)}\right\}$ entonces:

$$\left\{\Delta F_{\phi}^{(1)}\right\} = [\hat{k}_{\phi}(t)]\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} + \left([\hat{k}_{\phi}(t)] - [k_{\phi}(t)]\right)\left\{\Delta u_{\phi}^{(1)}\right\} = \{\Delta R^{(1)}\} \tag{5.81}$$

Y por lo tanto:

$$\{\Delta R^{(2)}\} = \{\Delta R^{(1)}\} - \left\{\Delta F_{\phi}^{(1)}\right\} = 0 \tag{5.82}$$

Lo que implica que $\{\Delta u_{\phi}^{(2)}\}$ es cero y por ende no habría un proceso iterativo. Entonces la primera estimación de los incrementos en los desplazamientos y en las acciones internas se tendría que asumir como correcta, lo cual no es adecuado por el carácter acumulativo del error en el que se incurre y por su gran influencia en la respuesta de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Sin embargo la matriz de rigidez tangente al comienzo del intervalo sirve para calcular una mejor aproximación al incremento correcto de las acciones equivalentes $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$, mediante un procedimiento que verifique el cumplimiento, en forma simultánea, de las condiciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones $f\ vs\ d$ ó $M-\theta$ de los resortes rotacionales. El procedimiento de tipo iterativo que se utiliza para tal fin se describe a continuación.

5.5.2. Descripción del procedimiento iterativo

El procedimiento iterativo que se describe a continuación es adaptado del procedimiento descrito en (Azar, 1972) para realizar el análisis estático no lineal de cerchas planas con elementos que presentan no linealidad física o material. Constituye un proceso iterativo secundario, adicional al proceso iterativo principal propio del método de Newmark.

El procedimiento trabaja de forma similar al método de Newton – Raphson modificado, dado que se utiliza la matriz de rigidez tangente al comienzo del intervalo de forma recurrente para estimar el incremento real de los desplazamientos de los nudos y las rotaciones de los resortes rotacionales, así como para estimar los incrementos en las acciones en coordenadas locales en los extremos de los elementos y en las acciones equivalentes aplicadas en los nudos. A partir de estos últimos se calcula el vector $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ requerido en el proceso iterativo principal.

Al final del procedimiento se llega a resultados que cumplen con las condiciones de equilibrio de fuerzas, compatibilidad de desplazamientos y cumplimiento de las relaciones $f\ vs\ d$ o $M-\theta$ de los resortes rotacionales, lo que garantiza que los resultados obtenidos son adecuados dado que la solución correcta es única.

Cuando a la estructura se le impone un incremento conocido en los desplazamientos de los diafragmas $\{\Delta u_{\phi}^{(j)}\}$, esta experimenta un incremento de desplazamientos en los nudos $\{\Delta u^{(j)}\} = \{\{\Delta u_{\alpha}^{(j)}\}\ \{\Delta u_{\gamma}^{(j)}\}\ \ \{\Delta u_{\beta}^{(j)}\}\}^T$ de forma que los incrementos en los desplazamientos de los grados de libertad de interés $\{\Delta u_{\alpha}^{(j)}\}$ son conocidos porque están relacionados con la geometría y con los desplazamientos de los diafragmas a traves de la matriz de asociación de desplazamientos $[A]$, y además $\{\Delta u_{\beta}^{(j)}\}$ es cero porque los apoyos están unidos a la base y no se desplazan en relación a ella. Sin embargo los desplazamientos condensados $\{\Delta u_{\gamma}^{(j)}\}$ son totalmente desconocidos y solamente se obtiene una estimación de ellos a través de la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta u_{\gamma}^{(j)}\right\} = -\left[k_{\gamma\gamma}(t)\right]^{-1}\left[k_{\gamma\alpha}(t)\right]\left\{\Delta u_{\alpha}^{(j)}\right\} \tag{5.83}$$

donde $\left[k_{\gamma\gamma}(t)\right]$ y $\left[k_{\gamma\alpha}(t)\right]$ son submatrices de la matriz de rigidez general de la estructura que considera todos los grados de libertad, y que está evaluada con la rigidez de los elementos y de los resortes rotacionales en el instante t, al comienzo del intervalo.

Si se asume que la estimación de $\{\Delta u_{\gamma}^{(j)}\}$ obtenida con la Ecuación (5.83) es correcta, se tiene una primera estimación completa del vector de incremento en los desplazamientos de

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

los nudos $\left\{\Delta u^{(1,j)}\right\}$, a partir de la cual se puede calcular una primera estimación del incremento en las acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento estructural $\{\Delta \bar{f}_e^{(1,j)}\}$ utilizando la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta \bar{f}'^{(1,j)}_e\right\} = [T_e]\left\{\Delta f_e^{(1,j)}\right\} = [T_e][k_e(t)]\left\{\Delta u_e^{(1,j)}\right\} \tag{5.84}$$

Donde $[T_e]$ es la matriz de transformación de coordenadas y $[k_e(t)]$ es la matriz de rigidez en coordenadas locales del elemento, también calculada en el instante t.

Si el elemento es elástico, es decir, no posee resortes rotacionales, los incrementos en las acciones en los extremos son correctos porque se ha supuesto que $\{\Delta u_e^{(1,j)}\}$ es correcto. Por lo tanto $\{\Delta \bar{f}_e^{(1,j)}\} = \{\Delta \bar{f}'^{(1,j)}_e\}$ y en este caso no hay que realizar ninguna corrección.

Si en un elemento inelástico en el que se espera que se presenten rótulas plásticas alguno de los resortes rotacionales no lineales está en fluencia, los incrementos en las acciones que se calculan con la Ecuación (5.84) sirven solamente para calcular los incrementos en las rotaciones $\Delta\theta^{(1,j)}$, utilizando la siguiente ecuación para cada resorte rotacional no lineal:

$$\Delta\theta^{(1,j)} = \frac{\Delta M^{(1,j)}}{J(t)} \tag{5.85}$$

Siendo $\Delta M^{(1,j)}$ el primer incremento estimado o supuesto del momento en el resorte y $J(t)$ la rigidez tangente del resorte evaluada en el instante t. El término $\Delta\theta^{(1,j)}$ se calcula de esta forma porque se mantiene la suposición que los desplazamientos estimados con la rigidez tangente son correctos.

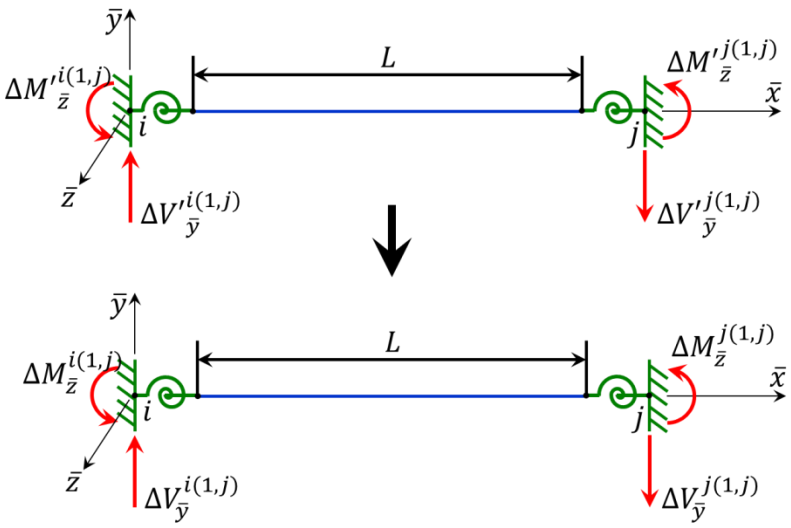
En cada resorte de un elemento inelástico se presenta el error que se describió en la Figura 5.12 al utilizar la rigidez tangente. Como se ha supuesto que el incremento en la rotación $\Delta\theta^{(1,j)}$ es correcto, el incremento en el momento en cada resorte estimado con la Ecuación (5.84) corresponde a la distancia vertical entre los puntos a y b', el cual es incorrecto ya que para la rotación $\theta^{(1,j)}_{(t+\Delta t)}$ el momento correspondiente es $M^{(1,j)}_{(t+\Delta t)}$ y no $M'^{(1,j)}_{(t+\Delta t)}$.

Como el incremento real del momento en cada resorte del elemento inelástico es $\Delta M^{(1,j)}$ y no $\Delta M'^{(1,j)}$ y el elemento debe seguir en equilibrio de fuerzas y de momentos, los demás incrementos en las acciones que dependan de las acciones en los resortes deber recalcularse por estática para mantener el equilibrio del elemento.

En la Figura 5.13 se muestra un elemento con posibilidad de deformarse solamente en el plano $\overline{xy}$ local, que posee resortes rotacionales en cada extremo para representar las posibles rótulas plásticas por flexión. Si los incrementos reales en los momentos en los resortes son conocidos, entonces los incrementos en los momentos flectores de los extremos $\Delta M_{\bar{z}}^{i(1,j)}$ y $\Delta M_{\bar{z}}^{j(1,j)}$también son conocidos. Para mantener el equilibrio de momentos en el elemento, los incrementos en las fuerzas cortantes $\Delta V_{\bar{y}}^{i(1,j)}$ y $\Delta V_{\bar{y}}^{j(1,j)}$ deben recalcularse a

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

partir de $\Delta M_{\bar{z}}^{i(1,j)}$ y $\Delta M_{\bar{z}}^{j(1,j)}$ como se indica en la misma figura (*en todos los casos, los superíndices i y j fuera del paréntesis indican los nudos inicial y final del elemento*).



$$\Delta V_{\bar{y}}^{i(1,j)} = \Delta V_{\bar{y}}^{j(1,j)} = \frac{\Delta M_{\bar{z}}^{i(1,j)} + \Delta M_{\bar{z}}^{j(1,j)}}{L}$$

Figura 5.13. Corrección de los incrementos en las acciones en los extremos de un elemento

Cabe anotar que en la corrección de $\Delta V_{\bar{y}}^{i(1,j)}$ y $\Delta V_{\bar{y}}^{j(1,j)}$ no se debe considerar el efecto de las cargas iniciales aplicadas en la luz del elemento puesto que su efecto se tuvo en cuenta antes de iniciar el análisis dinámico. Además se asume que las cargas iniciales permanecen invariables mientras se realiza el análisis dinámico, por lo tanto, su variación en cualquier intervalo de tiempo es nula.

El primer incremento en las acciones en coordenadas globales en los extremos de cada elemento $\{\Delta f_e^{(1,j)}\}$ se calcula a partir del primer incremento en las acciones reales (*no estimadas con la rigidez tangente*) en coordenadas locales $\{\Delta \bar{f}_e^{(1,j)}\}$ utilizando la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta f_e^{(1,j)}\right\} = [T_e]^T \left\{\Delta \bar{f}_e^{(1,j)}\right\} \tag{5.86}$$

Donde $[T_e]^T$ es la transpuesta de la matriz de transformación de coordenadas del elemento. Como se mencionó anteriormente, el vector $\{\Delta F_s{}^{(1,j)}\}$ se construye ensamblando los vectores elementales $\{\Delta f_e^{(1,j)}\}$:

$$\left\{\Delta F_s{}^{(1,j)}\right\} = \sum_{e=1}^{ne} \left\{\Delta f_e^{(1,j)}\right\} \tag{5.87}$$

El vector $\left\{\Delta F_s{}^{(1,j)}\right\}$ así construido tiene la siguiente forma:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\left\{\Delta F_s^{(1,j)}\right\} = \left\{\left\{\Delta F_{s\alpha}^{(1,j)}\right\} \quad \left\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\right\} \neq 0 \quad \left\{\Delta F_{s\beta}^{(1,j)}\right\}\right\}^T \tag{5.88}$$

La ecuación anterior indica que para que en la estructura haya equilibrio entre las acciones equivalentes y las acciones internas, es necesario aplicar unas acciones iguales a $\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\} \neq 0$ en los grados de libertad condensados.

Sin embargo la sumatoria de acciones equivalentes en los grados de libertad condensados debe ser cero dado que estos grados de libertad no tienen masas traslacionales o rotacionales asociadas, ni acciones de amortiguamiento ni acciones externas equivalentes a la aceleración de la base, como se mencionó en el Capítulo 2.

Para que la sumatoria de acciones equivalentes en los grados de libertad condensados sea cero, se deben aplicar a la estructura unas *acciones residuales* denominadas $\{\Delta F'^{(1,j)}_{s\gamma}\}$, iguales a $\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\}$ pero en sentido contrario. Estas acciones producirán un segundo incremento en los desplazamientos en los nudos, pero solamente en los grados de libertad condensados puesto que los incrementos en los desplazamientos de los grados de libertad de interés ya se aplicaron en su totalidad y por lo tanto un segundo incremento debe ser igual a cero. El siguiente incremento en los desplazamientos de los apoyos también debe ser cero.

La forma del siguiente incremento en los desplazamientos de los nudos, producido por el vector $\{\Delta F'^{(1,j)}_{s\gamma}\} = -\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\}$ será la siguiente:

$$\left\{\Delta u^{(2,j)}\right\} = \left\{\{0\} \quad \left\{\Delta u_\gamma^{(2,j)}\right\} \quad \{0\}\right\}^T \tag{5.89}$$

Al plantear nuevamente la ecuación de equilibrio en forma incremental, considerando el segundo incremento de desplazamientos de nudos:

$$\text{f)} \quad \begin{Bmatrix} \{\Delta F_{s\alpha}^{(1,j)}\} \\ \{\Delta F'^{(1,j)}_{s\gamma}\} \\ \{\Delta F_{s\beta}^{(1,j)}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{\alpha\alpha}(t)] & [k_{\alpha\gamma}(t)] & [k_{\beta\alpha}(t)] \\ [k_{\gamma\alpha}(t)] & [k_{\gamma\gamma}(t)] & [k_{\gamma\beta}(t)] \\ [k_{\beta\alpha}(t)] & [k_{\beta\gamma}(t)] & [k_{\beta\beta}(t)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u_\alpha^{(2,j)}\} = 0 \\ \{\Delta u_\gamma^{(2,j)}\} \neq 0 \\ \{\Delta u_\beta^{(2,j)}\} = 0 \end{Bmatrix} \tag{5.90}$$

Al extraer la ecuación correspondiente a la segunda fila, se llega a una ecuación que permite calcular el término $\{\Delta u_\gamma^{(2,j)}\}$, completando el vector $\left\{\Delta u^{(2,j)}\right\}$:

$$\{\Delta u_\gamma^{(2,j)}\} = \left[k_{\gamma\gamma}(t)\right]^{-1}\{\Delta F'^{(1,j)}_{s\gamma}\} = -\left[k_{\gamma\gamma}(t)\right]^{-1}\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\} \tag{5.91}$$

Este segundo incremento de desplazamientos de nudos $\left\{\Delta u^{(2,j)}\right\}$ producirá un segundo incremento de acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento $\{\Delta \bar{f}_e^{(2,j)}\}$ y por lo tanto un segundo incremento de acciones equivalentes en coordenadas globales actuando en los nudos $\left\{\Delta F_s^{(2,j)}\right\}$. Para tal fin se utiliza nuevamente la matriz de rigidez tangente al comienzo del intervalo $[k(t)]$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las cantidades $\{\Delta u^{(2,j)}\}$, $\{\Delta \bar{f}_e^{(2,j)}\}$ y $\{\Delta F_s{}^{(2,j)}\}$ deben acumularse con $\{\Delta u^{(1,j)}\}$, $\{\Delta \bar{f}_e^{(1,j)}\}$ y $\{\Delta F_s{}^{(1,j)}\}$ para conocer los incrementos totales en los desplazamientos en los nudos, las acciones en los extremos de los elementos y las acciones equivalentes actuando en los nudos, en el intervalo y en la iteración j denominados $\{\Delta u^{(j)}\}$, $\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\}$ y $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$ respectivamente.

El vector $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$ tendrá un subvector $\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\}$ con términos diferentes de cero porque nuevamente, en los elementos con resortes rotacionales no lineales, no hay linealidad entre acciones y desplazamientos. Seguramente los términos del vector $\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\}$ son de menor magnitud que los del vector $\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\}$ puesto que los incrementos en las acciones equivalentes reales debidos a $\{\Delta F'^{(1,j)}_{s\gamma}\}$ tienden a equilibrar a $\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,j)}\}$.

De igual forma el vector $\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\}$ implica que a la estructura se deben aplicar unas nuevas acciones residuales $\{\Delta u_\gamma^{(3,j)}\} = -\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\}$, repitiendo nuevamente todo el proceso.

Lo anterior sugiere que se requiere un procedimiento cíclico en el que se calcula un incremento adicional de desplazamientos para la iteración $i+1$, $\{\Delta u^{(i+1,j)}\}$, a partir de unas acciones residuales encontradas al final de la iteración i, $\{\Delta F'^{(i,j)}_{s\gamma}\}$ las cuales se toman del vector $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$. Este proceso se detiene cuando el vector $\{\Delta u^{(i+1,j)}\}$ es lo suficientemente pequeño respecto al vector $\{\Delta u^{(j)}\}$ que acumula los incrementos calculados en todas las iteraciones realizadas del ciclo interno.

El procedimiento anterior se detiene cuando el error en desplazamientos sea menor o igual a un error máximo o tolerancia especificada:

$$\epsilon = \frac{\left\|\{\Delta u^{(i+1,j)}\}\right\|_2}{\|\{\Delta u^{(j)}\}\|_2} \leq \epsilon_{máx} \tag{5.92}$$

Cuando se alcance la convergencia el subvector $\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\}$ tendrá coeficientes iguales o muy cercanos a cero, cumpliendo simultáneamente las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos, de compatibilidad de desplazamientos en la estructura y en cada elemento, y de las relaciones fuerza – desplazamiento o momento – rotación en las rótulas plásticas, las cuales se han cumplido en cada iteración i. Al final del proceso el vector $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$ tendrá la siguiente forma:

$$\{\Delta F_s{}^{(j)}\} = \left\{\left\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\right\} \quad \left\{\Delta F_{s\gamma}^{(j)}\right\} \approx 0 \quad \left\{\Delta F_{s\beta}^{(j)}\right\}\right\}^T \tag{5.93}$$

Cuando se alcanza la convergencia se tienen como resultados adicionales el incremento en los desplazamientos de los nudos en coordenadas globales $\{\Delta u^{(j)}\}$ y el incremento en las acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento $\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\}$.

Los vectores $\{\Delta u^{(j)}\}$ y $\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\}$ se calculan con las siguientes expresiones (*l es la última iteración realizada dentro del ciclo interno*):

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{\Delta u^{(j)}\} = \sum_{i=1}^{l} \{\Delta u^{(i,j)}\}$$
$$\left\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\right\} = \sum_{i=1}^{l} \left\{\Delta \bar{f}_e^{(i,j)}\right\} \tag{5.94}$$

Finalmente el vector $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ buscado se calcula con la siguiente expresión:

$$\left\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\right\} = [A]^T \left\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\right\} \tag{5.95}$$

5.5.3. Resumen del procedimiento iterativo

El procedimiento iterativo descrito previamente para calcular $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ se resume en los siguientes pasos:

a) Cálculos antes de cada iteración:

   i. Desplazamientos iniciales de los nudos para la primera iteración, $\left\{\Delta u^{(1,j)}\right\}$

$$\{\Delta u^{(1,j)}\} = \left\{\left\{\Delta u_\alpha^{(1,j)}\right\} \quad \left\{\Delta u_\gamma^{(1,j)}\right\} \quad \left(\left\{\Delta u_\beta^{(1,j)}\right\} = 0\right)\right\}^T$$

b) Cálculos para cada iteración (*ciclo interno*, $i = 1, 2, 3, \ldots m$, *para la iteración* j *del ciclo externo*):

   i. Incremento supuesto en acciones en los extremos en coordenadas locales de cada elemento $\left\{\Delta \bar{f}'^{(i,j)}_e\right\}$

$$\left\{\Delta \bar{f}'^{(i,j)}_e\right\} = [T_e][k_e(t)]\left\{\Delta u_e^{(i,j)}\right\}$$

   ii. Incremento en acciones en los extremos en coordenadas locales de cada elemento $\left\{\Delta \bar{f}_e^{(i,j)}\right\}$, corregido por estática a partir del incremento real en los momentos en los resortes rotacionales, siguiendo la relacion $M - \theta$ de cada resorte rotacional no lineal.

   iii. Incremento de acciones en los extremos en coordenadas globales de cada elemento $\left\{\Delta f_e^{(i,j)}\right\}$

$$\left\{\Delta f_e^{(i,j)}\right\} = [T_e]^T \left\{\Delta \bar{f}_e^{(i,j)}\right\}$$

   iv. Ensamblaje del incremento en las acciones equivalentes actuando en los nudos de la estructura $\left\{\Delta F_s^{(i,j)}\right\}$:

$$\left\{\Delta F_s^{(i,j)}\right\} = \left\{\left\{\Delta F_{s\alpha}^{(i,j)}\right\} \quad \left\{\Delta F_{s\gamma}^{(i,j)}\right\} \quad \left\{\Delta F_{s\beta}^{(i,j)}\right\}\right\}^T = \sum_{e=1}^{ne} \left\{\Delta f_e^{(i,j)}\right\}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

v. Incremento acumulado de acciones equivalentes actuando en los nudos de la estructura $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$:

$$\{\Delta F_s{}^{(j)}\} = \sum_i \{\Delta F_s{}^{(i,j)}\}$$

vi. Incremento en los desplazamientos de los nudos para la siguiente iteración $\{\Delta u^{(i+1,j)}\}$:

$$\left\{\Delta u_\gamma^{(i+1,j)}\right\} = -\left[k_{\gamma\gamma}(t)\right]^{-1}\left\{(\Delta F_s)_\gamma^{(j)}\right\}$$

$$\{\Delta u^{(i+1,j)}\} = \left\{\{0\} \quad \left\{\Delta u_\gamma^{(i+1,j)}\right\} \quad \{0\}\right\}^T$$

vii. Verificar la convergencia de resultados comparando $\epsilon\ vs\ \epsilon_{\text{máx}}$:

$$\epsilon = \frac{\left\|\{\Delta u^{(i+1,j)}\}\right\|_2}{\|\{\Delta u^{(j)}\}\|_2} \leq \epsilon_{máx}$$

c) Cálculos posteriores al ciclo iterativo:

i. Incrementos totales en el intervalo y en la iteración j de desplazamientos de nudos y acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento, $\{\Delta u^{(j)}\}, \left\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\right\}$:

$$\{\Delta u^{(j)}\} = \sum_{i=1}^{l} \{\Delta u^{(i,j)}\}$$

$$\left\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\right\} = \sum_{i=1}^{l} \left\{\Delta \bar{f}_e^{(i,j)}\right\}$$

ii. Incremento real en el intervalo y en la iteración j de las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa, $\left\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\right\}$:

$$\left\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\right\} = [A]^T \left\{\Delta F_{s\alpha}^{(j)}\right\}$$

Cabe anotar que, desde el punto de vista computacional, las sumatorias que implican el cálculo de los vectores $\{\Delta u^{(j)}\}$ y $\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\}$ se realizan más fácilmente dentro del proceso iterativo.

5.5.4. Ejemplo numérico

A modo de ejemplo se muestra el cálculo del vector $\{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\}$ para el pórtico plano que se muestra en la Figura 5.14. El pórtico consta de dos elementos de concreto reforzado ($E = 20X10^7\ kN/m^2$) de sección rectangular de 40X60cm, orientados de forma que el plano del pórtico coincide con el plano de mayor rigidez de cada elemento.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La viga posee un resorte rotacional en el extremo izquierdo y la columna posee un resorte rotacional en la base. Toda la masa se supone concentrada en el centro de masa de la viga. Se supone que los dos nudos superiores se trasladan horizontalmente como cuerpo rígido (*es decir, tienen el mismo desplazamiento horizontal*).

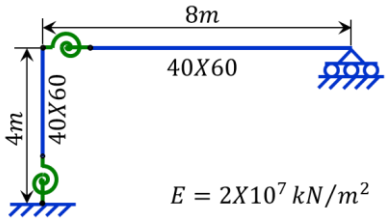


Figura 5.14. Pórtico plano tomado como ejemplo para calcular el incremento en las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa

La Figura 5.15 muestra la numeración de los nudos, de los elementos y de los grados de libertad estáticos del pórtico. La numeración de los grados de libertad estáticos se realizó agrupándolos en grados de libertad desconocidos de interés, desconocidos condensados y conocidos.

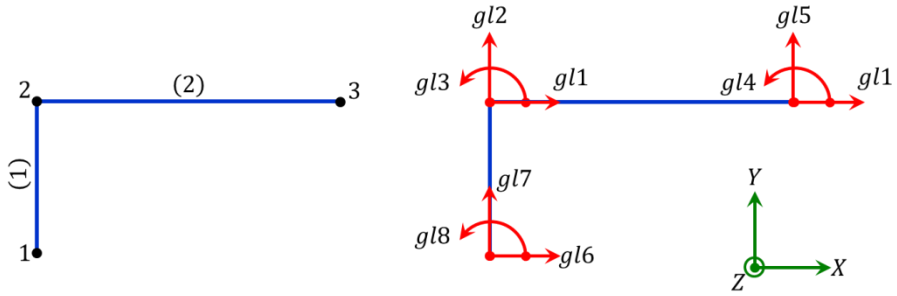


Figura 5.15. Numeración de nudos, elementos y grados de libertad estáticos

El grado de libertad *gl1* es el único desconocido de interés para el análisis dinámico. Los grados de libertad *gl2, gl3* y *gl4* son desconocidos condensados y los grados de libertad *gl5, gl6, gl7* y *gl8* son conocidos. Dado que se supone que la viga es infinitamente rígida a fuerza axial, el desplazamiento en dirección x de los nudos 2 y 3 es el mismo, por lo que a los dos se les ha denominado *gl1*.

La relación momento – rotación de los dos resortes rotacionales es la misma, como se muestra en la Figura 5.16. Está construida para un momento de fluencia $M_y = 250kN * m$, un coeficiente $n = 5$, una rigidez inicial elástica $J_e = 5X10^4\ kN * m/rad$ y una rigidez de fluencia $J_y = 1X10^3\ kN * m/rad$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

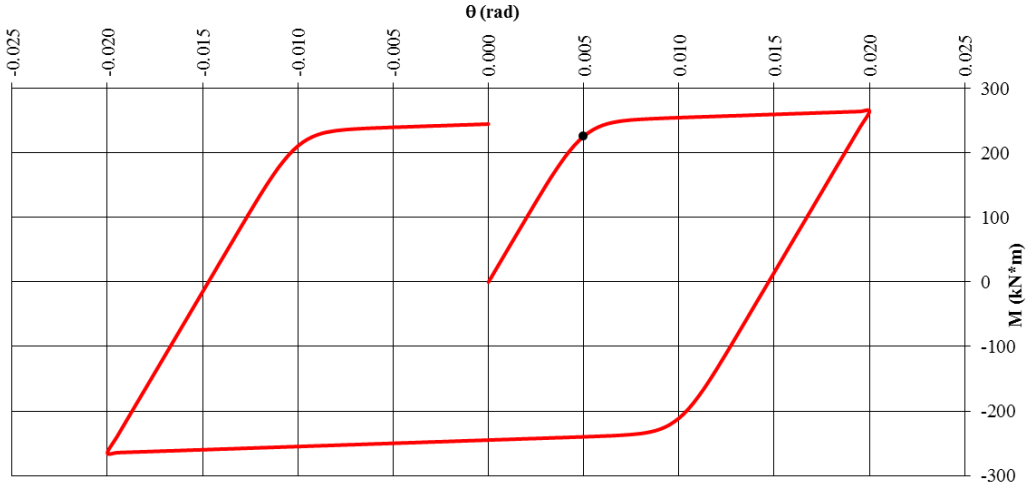


Figura 5.16. Relación momento – rotación de los resortes rotacionales de la estructura tomada como ejemplo

Al pórtico se le impone un incremento en el desplazamiento horizontal de 1cm en el grado de libertad *gl1*, por lo que el incremento en el desplazamiento de interés es conocido, $\Delta u_1 = 0.01m$. El objetivo es calcular el incremento real en las acciones equivalentes que actúan en los nudos y que equilibran las acciones internas $\{\Delta F_s{}^{(j)}\}$, el incremento real de los desplazamientos condensados $\{\Delta u_r^j\}$ y el incremento en las acciones en coordenadas locales en los extremos de los dos elementos $\left\{\Delta f_1^{(j)}\right\}$ y $\left\{\Delta f_2^{(j)}\right\}$.

Antes de comenzar el análisis se requiere conocer el momento y la rotación que alcanzó cada resorte rotacional al final de la iteración anterior $j-1$, así como la rotación total y la rigidez tangente al comienzo del intervalo. Para este ejemplo se supone que el momento y la rotación de cada resorte al comienzo del intervalo son $M(t) = 226kN \cdot m$ y $\theta(t) = 0.0050rad$ respectivamente, la rigidez tangente al comienzo del intervalo es $J(t) = 20738\, kN * m/rad$. Suponiendo que se va a realizar la primera iteración ($j = 1$) entonces $M^{(j-1)}(t+\Delta t) = M(t) = 226kN \cdot m$ y $\theta^{(j-1)}(t+\Delta t) = \theta(t) = 0.0050rad$.

Para resolver el problema se requieren las matrices de rigidez en coordenadas locales calculadas con la rigidez tangente al comienzo del intervalo y las matrices de transformación de coordenadas de cada elemento. También se requiere la matriz de rigidez general de la estructura considerando todos los grados de libertad estáticos. Esta se muestra a continuación:

$$[k(t)] = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{cccc|cccc} 9299 & 0 & 30399 & 0 & 0 & -9299 & 0 & 6798 \\ \hline 0 & 1201410 & 3019 & 8259 & -1410 & 0 & -1200000 & 0 \\ 30399 & 3019 & 128633 & 8050 & -3019 & -30399 & 0 & 9064 \\ 0 & 8259 & 8050 & 58025 & -8259 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1410 & -3019 & -8259 & 1410 & 0 & 0 & 0 \\ -9299 & 0 & -30399 & 0 & 0 & 9299 & 0 & -6798 \\ 0 & -1200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1200000 & 0 \\ 6798 & 0 & 9064 & 0 & 0 & -6798 & 0 & 18127 \end{array}\right| \begin{array}{l} gl1 \\ gl2 \\ gl3 \\ gl4 \\ gl5 \\ gl6 \\ gl7 \\ gl8 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} gl1 & gl2 & gl3 & gl4 & gl5 & gl6 & gl7 & gl8 \end{array} \end{array}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

El primer incremento en los desplazamientos condensados $\{\Delta u_\gamma^{(1,1)}\}$ se calcula a partir del incremento en los desplazamientos de interés $\{\Delta u_\alpha^{(1,1)}\}$ y de las submatrices $[k_{\gamma\alpha}(t)]$ y $[k_{\gamma\gamma}(t)]$ con la expresión $\{\Delta u_\gamma^{(1,1)}\} = -[k_{\gamma\gamma}(t)]^{-1}[k_{\gamma\alpha}(t)]\{\Delta u_\alpha^{(1,1)}\}$. Se puede verificar que:

$$\left\{\Delta u_\gamma^{(1,1)}\right\} = \{3.72X10^{-6} \quad -2.38X10^{-3} \quad 3.30X10^{-4}\}^T$$

Por lo tanto, el primer incremento en los desplazamientos de los nudos es:

$$\left\{\Delta u^{(1,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 1.00X10^{-2} \\ 3.72X10^{-6} \\ -2.38X10^{-3} \\ 3.30X10^{-4} \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Con $\left\{\Delta u^{(1,1)}\right\}$ se calculan los incrementos estimados en las acciones en los extremos de la columna $\{\Delta f'^{(1,1)}_1\}$ y de la viga $\{\Delta f'^{(1,1)}_2\}$. Los resultados son los siguientes:

$$\left\{\Delta f'^{(1,1)}_1\right\} = [T_1]\left[\bar{k}_1(t)\right]\left\{\Delta u_1^{(1,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -4.46 \\ -35.71 \\ 0.00 \\ 4.46 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\Delta f'^{(1,1)}_2\right\} = [T_2]\left[\bar{k}_2(t)\right]\left\{\Delta u_2^{(1,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} -4.46 \\ 20.52 \\ 46.37 \\ 4.46 \\ -20.52 \\ 35.71 \end{Bmatrix}$$

Los incrementos en las acciones que actuarían en los extremos de cada elemento se muestran en la siguiente figura:

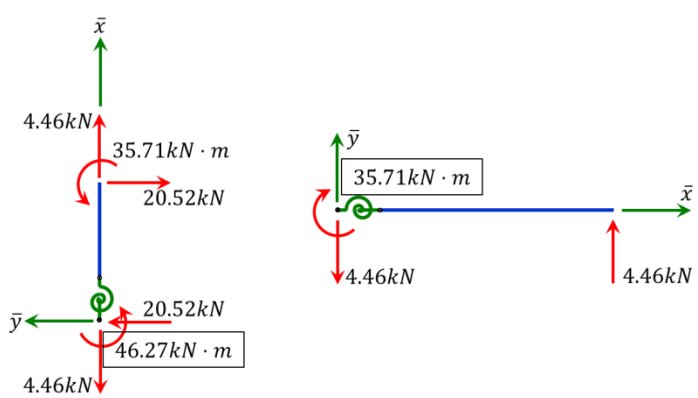


Figura 5.17. Incremento supuesto de las acciones en los extremos para la primera iteración interna

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En la Figura 5.17 se observa que los incrementos estimados en los momentos en los resortes rotacionales de la columna y de la viga son $\Delta M'^{(1,1)}_1 = 43.27kN \cdot m$ y $\Delta M'^{(1,1)}_2 = 35.71kN \cdot m$ respectivamente. Los incrementos en las rotaciones de cada resorte serían:

$$\Delta\theta_1^{(1,1)} = \frac{\Delta M'^{(1,1)}_1}{J_{1(t)}} = \frac{43.27kN \cdot m}{20378\,kN \cdot m/rad} = 0.002236\,rad$$

$$\Delta\theta_2^{(1,1)} = \frac{\Delta M'^{(1,1)}_2}{J_{2(t)}} = \frac{35.71kN \cdot m}{20378\,kN \cdot m/rad} = 0.001722\,rad$$

Las rotaciones de los resortes al final del intervalo y de la primera iteración son:

$$\theta_1^{(1,1)}(t+\Delta t) = \theta_1^{(0,1)}(t+\Delta t) + \Delta\theta_1^{(1,1)} = 0.0050 + 0.002236 = 0.007236\,rad$$

$$\theta_2^{(1,1)}(t+\Delta t) = \theta_2^{(0,1)}(t+\Delta t) + \Delta\theta_2^{(1,1)} = 0.0050 + 0.001722 = 0.006722\,rad$$

De acuerdo con la rotación final en cada resorte, los momentos reales corespondientes, calculados siguiendo la relación $M - \theta$ indicada en la Figura 5.16 son los siguientes:

$$M_1^{(1,1)}(t+\Delta t) = 252.24\,kN \cdot m$$

$$M_2^{(1,1)}(t+\Delta t) = 251.72\,kN \cdot m$$

Entonces los incrementos reales en los momentos en los resortes son los siguientes:

$$\Delta M_1^{(1,1)} = M_1^{(1,1)}(t+\Delta t) - M_1^{(0,1)}(t+\Delta t) = 252.24 - 226.00 = 26.24\,kN \cdot m$$

$$\Delta M_2^{(1,1)} = M_2^{(1,1)}(t+\Delta t) - M_2^{(0,1)}(t+\Delta t) = 251.72 - 226.00 = 25.72\,kN \cdot m$$

Estos incrementos son más pequeños que los que se habían estimado anteriormente y que se indicaron en la Figura 5.17 dado que la rigidez decrece al incrementarse la rotación.

Los incrementos en los momentos de los resortes, y por lo tanto en los extremos de los elementos, asi como los incrementos en los cortantes recalculados para mantener el equilibrio en cada elemento se muestran en la Figura 5.18.

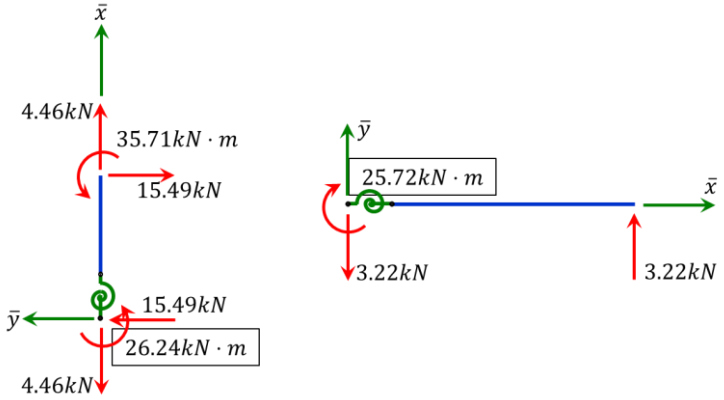
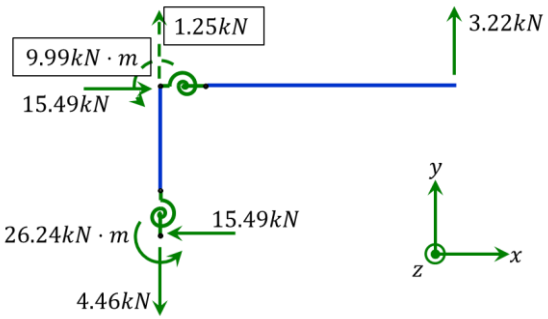


Figura 5.18. Incremento real de las acciones en los extremos para la primera iteración interna

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

El incremento en las acciones equivalentes aplicadas en los nudos en coordenadas globales, que inducen los mismos desplazamientos en los nudos $\{\Delta u^{1,1}\}$ y que equilibran las acciones en los extremos mostradas en la Figura 5.18 son las siguientes:



$$\{\Delta F_s^{(1,1)}\} = \begin{Bmatrix} 15.49 \\ 1.25 \\ 9.99 \\ 0.00 \\ 3.22 \\ -15.49 \\ -4.46 \\ 26.24 \end{Bmatrix}$$

Figura 5.19. Incremento real de acciones equivalentes en los nudos para la primera iteración interna

Aunque las anteriores acciones equivalentes mantienen a la estructura en equilibrio con las acciones internas, la fuerza vertical y el momento en el nudo 2 (*correspondientes a grados de libertad desconocidos condensados*) no existen y por lo tanto deben anularse. Para ello se aplican las mismas acciones a la estructura pero en sentido contrario, de forma que la sumatoria de acciones en el nudo sea cero. Entonces el vector de acciones residuales al final de la primera iteración, con las que se anula $\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,1)}\}$ es el siguiente:

$$\left\{\Delta F'^{(1,1)}_{s\gamma}\right\} = -\left\{\Delta F_{s\gamma}^{(1,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1.25 \\ -9.99 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Las acciones $\{\Delta F'^{(1,1)}_{s\gamma}\}$ generarán un incremento de desplazamientos adicional en los grados de libertad condensados denominado $\{\Delta u_\gamma^{(2,1)}\}$, teniendo en cuenta que el incremento adicional en los desplazamientos de los grados de libertad de interés es cero puesto que este ya se impuso a la estructura en su totalidad en la primera iteración.

El segundo incremento en los desplazamientos condensados $\{\Delta u_\gamma^{(2,1)}\}$ se calcula a partir de las acciones residuales al final de la primera iteración $\{\Delta F'^{(1,1)}_{s\gamma}\}$ y de la submatriz $[k_{\gamma\gamma}(t)]$ con la expresión $\{\Delta u_\gamma^{(2,1)}\} = [k_{\gamma\gamma}(t)]^{-1}\{\Delta F'^{(1,1)}_{s\gamma}\}$:

$$\left\{\Delta u_\gamma^{(2,1)}\right\} = \{-9.18X10^{-7} \quad -7.83X10^{-5} \quad 1.10X10^{-5}\}^T$$

Por lo tanto, el segundo incremento en los desplazamientos de los nudos es:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{\Delta u^{(2,1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -9.18X10^{-7} \\ -7.83X10^{-5} \\ 1.10X10^{-5} \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Con $\{\Delta u^{(2,1)}\}$ conocido y utilizando nuevamente las matrices de rigidez elemental al comienzo del intervalo, se calculan unos nuevos incrementos estimados en las acciones en los extremos de la columna $\{\Delta f'^{(2,1)}_1\}$ y de la viga $\{\Delta f'^{(2,1)}_2\}$:

$$\{\Delta f'^{(2,1)}_1\} = [T_1]^T[\bar{k}_{1(t)}]\{\Delta u^{(2,1)}_1\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -0.15 \\ -1.18 \\ 0.00 \\ 0.15 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta f'^{(2,1)}_2\} = [T_2]^T[\bar{k}_{2(t)}]\{\Delta u^{(2,1)}_2\} = \begin{Bmatrix} 1.10 \\ -2.38 \\ -0.71 \\ -1.10 \\ 2.38 \\ 8.81 \end{Bmatrix}$$

Los incrementos en las acciones que actuarían en los extremos de cada elemento se muestran en la siguiente figura:

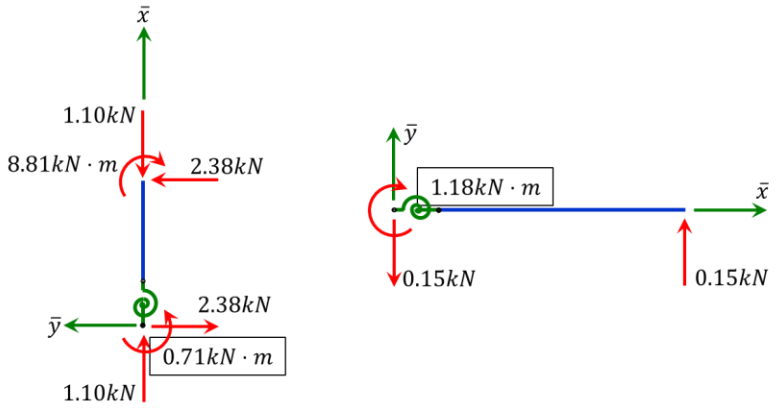


Figura 5.20. Incremento supuesto de las acciones en los extremos para la segunda iteración interna

Ahora los incrementos estimados en los momentos en los resortes rotacionales de la columna y de la viga son $\Delta M'^{(2,1)}_1 = -0.71kN \cdot m$ (*decrece*) y $\Delta M'^{(1,1)}_2 = 1.18kN \cdot m$ (*aumenta*) respectivamente. Entonces los incrementos en las rotaciones de cada resorte serían:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\Delta\theta_1^{(2,1)} = \frac{\Delta M'^{(2,1)}_1}{J_{1(t)}} = \frac{0.71kN \cdot m}{20378\, kN \cdot m/rad} = -0.000034\, rad$$

$$\Delta\theta_2^{(2,1)} = \frac{\Delta M'^{(2,1)}_2}{J_{2(t)}} = \frac{1.18kN \cdot m}{20378\, kN \cdot m/rad} = 0.000057\, rad$$

Las rotaciones de los resortes al final del intervalo y de la segunda iteración son:

$$\theta_1^{(2,1)}(t+\Delta t) = \theta_1^{(1,1)}(t+\Delta t) + \Delta\theta_1^{(2,1)} = 0.007236 - 0.000034 = 0.007202\, rad$$

$$\theta_2^{(2,1)}(t+\Delta t) = \theta_2^{(1,1)}(t+\Delta t) + \Delta\theta_2^{(2,1)} = 0.006722 + 0.000057 = 0.006779\, rad$$

Nuevamente siguiendo la relación $M - \theta$ de la Figura 5.16, los momentos reales en los resortes al final de la segunda iteración son los siguientes:

$$M_1^{(2,1)}(t+\Delta t) = 252.20\, kN \cdot m$$

$$M_2^{(2,1)}(t+\Delta t) = 251.78\, kN \cdot m$$

Por lo que los incrementos reales en los momentos de los resortes y por lo tanto, de los extremos iniciales de la viga y la columna, son los siguientes:

$$\Delta M_1^{(2,1)} = M_1^{(2,1)}(t+\Delta t) - M_1^{(1,1)}(t+\Delta t) = 252.20 - 252.24 = -0.04\, kN \cdot m$$

$$\Delta M_2^{(1,1)} = M_2^{(1,1)}(t+\Delta t) - M_2^{(0,1)}(t+\Delta t) = 251.78 - 251.72 = 0.06\, kN \cdot m$$

Los incrementos reales de acciones en los extremos de los elementos para la segunda iteración se muestran en la Figura 5.21.

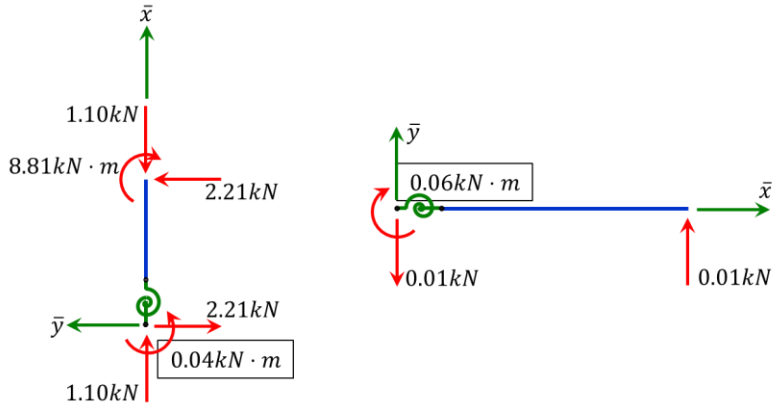
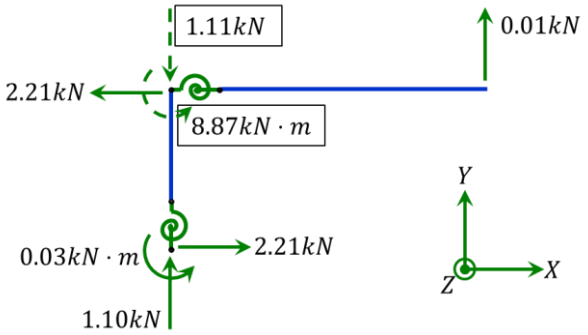


Figura 5.21. Incremento real de las acciones en los extremos para la segunda iteración interna

El incremento en las acciones equivalentes aplicadas en los nudos en coordenadas globales, que inducen los mismos desplazamientos en los nudos $\{\Delta u^{(2,1)}\}$ y que equilibran las acciones en los extremos mostradas en la Figura 5.21 son las siguientes:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



$$\{\Delta F_s{}^{(2,1)}\} = \begin{Bmatrix} -2.21 \\ -1.11 \\ -8.87 \\ 0.00 \\ 0.01 \\ 2.21 \\ 1.10 \\ -0.03 \end{Bmatrix}$$

Figura 5.22. Incremento real de acciones equivalentes en los nudos para la segunda iteración interna

La suma de los vectores $\{\Delta F_s{}^{(2,1)}\}$ y $\{\Delta F_s{}^{(1,1)}\}$ da como resultado $\{\Delta F_s{}^{(1)}\}$, es decir el incremento en las acciones equivalentes buscado, aunque calculado hasta la segunda iteración interna ($i = 2$).

Aunque a la estructura se le aplicó unas acciones residuales $\{\Delta F'^{(1,1)}_{s\gamma}\}$ para anular a $\{\Delta F^{(1,1)}_{s\gamma}\}$, en $\{\Delta F_s{}^{(1)}\}$ aún aparecen acciones en los grados de libertad condensados diferentes a cero porque nuevamente no hay linealidad entre momentos y rotaciones en los resortes. Aunque estas acciones son ahora de menor magnitud que en la primera iteración, de todas formas deben anularse porque físicamente no existen:

$$\{\Delta F_s{}^{(1)}\} = \{\Delta F_s{}^{(1,1)}\} + \{\Delta F_s{}^{(2,1)}\} = \begin{Bmatrix} 15.49 \\ 1.25 \\ 9.99 \\ 0.00 \\ 3.22 \\ -15.49 \\ -4.46 \\ 26.24 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2.21 \\ -1.11 \\ -8.87 \\ 0.00 \\ 0.01 \\ 2.21 \\ 1.10 \\ -0.03 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.28 \\ \mathbf{0.14} \\ \mathbf{1.12} \\ \mathbf{0.00} \\ 3.22 \\ -13.28 \\ -3.36 \\ 26.20 \end{Bmatrix}$$

El vector de acciones residuales para la siguiente iteración $\{(\Delta F'_s)^{(2,1)}_{\gamma}\}$, es el siguiente:

$$\{\Delta F'_s{}^{(2,1)}\} = \begin{Bmatrix} -0.14 \\ -1.12 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Nuevamente con $\{\Delta F'_s{}^{(2,1)}\}$ se estimarán unos incrementos adicionales en los desplazamientos de los nudos $\{\Delta u^{(3,1)}\}$, unos incrementos adicionales en las acciones en los extremos de los elementos $\{\Delta f'^{(3,1)}_1\}$ y $\{\Delta f'^{(3,1)}_2\}$ y un incremento adicional en las acciones equivalentes aplicadas en los nudos $\{\Delta F_s{}^{(3,1)}\}$, que sumado a los dos anteriores nuevamente tendrá acciones diferentes de cero en los grados de libertad condensados.

Como se indicó en la descripción del método, el proceso se repite hasta que el error evaluado con la norma del desplazamiento sea menor a la tolerancia especificada. Cuando se alcanza la convergencia en los resultados, se espera que las acciones correspondientes a los grados de libertad condensados sean cero. En este caso se especificó una tolerancia

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$\epsilon_{máx} = 1X10^{-5}$, la cual se alcanza en la 5ª iteración. Los resultados se resumen en la tabla Tabla 5.1:

Incrementos en desplazamientos de nudos en el intervalo y en la iteración actual:						
Iteración (i)	1	2	3	4	5	6
$\Delta u_1^{(i,j)}$	0.010000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\Delta u_2^{(i,j)}$	0.000004	-0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\Delta u_3^{(i,j)}$	-0.002384	-0.000078	-0.000009	-0.000001	0.000000	0.000000
$\Delta u_4^{(i,j)}$	0.000330	0.000011	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000
$\|\|\mathbf{\Delta u^{(i,j)}}\|\|_2$	**0.010286**	**0.000079**	**0.000009**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000000**
Incrementos en desplazamientos de nudos en el intervalo y acumulados hasta la iteración actual:						
Iteración (i)	1	2	3	4	5	6
$\Delta u_1^{(i)}$	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000
$\Delta u_2^{(i)}$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\Delta u_3^{(i)}$	-0.00238	-0.00246	-0.00247	-0.00247	-0.00247	-0.00247
$\Delta u_4^{(i)}$	0.00033	0.00034	0.00034	0.00034	0.00034	0.00034
$\|\|\mathbf{\Delta u^{(i)}}\|\|_2$	**0.01029**	**0.01030**	**0.01031**	**0.01031**	**0.01031**	**0.01031**
Error en desplazamientos						
Iteración (i)	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon = \frac{\|\{\Delta u^{(i+1,j)}\}\|_2}{\|\{\Delta u^{(j)}\}\|_2}$	1.00E+00	7.68E-03	8.59E-04	9.62E-05	1.08E-05	**1.21E-06**

Tabla 5.1. Resumen de cálculo de desplazamientos de nudos

La tabla Tabla 5.2 muestra la variación del vector de acciones equivalentes aplicadas en los nudos al final de cada iteración. Se observa que las fuerzas y los momentos correspondientes a los grados de libertad condensados tienden a cero a medida que los resultados convergen.

Incrementos de acciones equivalentes en los nudos acumulados hasta la iteración actual					
Iteración (i)	1	2	3	4	5
$\Delta F_x^{2(i,j)}$	15.49	13.28	13.03	13.00	13.00
$\Delta F_y^{2(i,j)}$	**1.25**	**0.14**	**0.02**	**0.00**	**0.00**
$\Delta M_z^{2(i,j)}$	**9.99**	**1.12**	**0.13**	**0.01**	**0.00**
$\Delta M_z^{3(i,j)}$	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
$\Delta F_y^{3(i,j)}$	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22
$\Delta F_x^{1(i,j)}$	-15.49	-13.28	-13.03	-13.00	-13.00
$\Delta F_y^{1(i,j)}$	-4.46	-3.36	-3.24	-3.23	-3.22
$\Delta M_z^{1(i,j)}$	26.24	26.20	26.20	26.20	26.20

Tabla 5.2. Resumen de cálculo de acciones equivalentes aplicadas en los nudos

Para la última iteración los vectores $\{\Delta F_s^{(1)}\}$ y $\{\Delta u^{(1)}\}$ valen:

$$\{\Delta F_s^{(1)}\} = \sum_{i=1}^{5}\{\Delta F_s^{(i,1)}\} = \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 3.22 \\ -13.00 \\ -3.22 \\ 26.20 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta u^{(1)}\} = \sum_{i=1}^{6}\{\Delta u^{(i.1)}\} = \begin{Bmatrix} 1.00X10^{-2} \\ 2.69X10^{-6} \\ -2.47X10^{-3} \\ 3.43X10^{-4} \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Se observa que el incremento en las acciones equivalentes (*fuerzas y momentos*) correspondientes a los grados de libertad condensados es cero. Finalmente el pórtico posee un solo grado de libertad dinámico, entonces $\{\Delta F_{s_\phi}^{(1)}\} = 13.0kN$.

La siguiente tabla resume el cálculo del incremento real de las acciones en coordenadas locales en los extremos de los elementos.

Incrementos de acciones en coordenadas locales en los extremos de la columna					
Iteración (i)	1	2	3	4	5
$\Delta N_x^{1(i)}$	-4.46	1.10	0.12	0.01	0.00
$\Delta V_y^{1(i)}$	15.49	-2.21	-0.25	-0.03	0.00
$\Delta M_z^{1(i)}$	26.24	-0.03	0.00	0.00	0.00
$\Delta N_x^{2(i)}$	4.46	-1.10	-0.12	-0.01	0.00
$\Delta V_y^{2(i)}$	-15.49	2.21	0.25	0.03	0.00
$\Delta M_z^{2(i)}$	35.71	-8.81	-0.99	-0.11	-0.01
Incrementos acumulados de acciones en coordenadas locales en los extremos de la columna					
Iteración (i)	1	2	3	4	5
$\Delta N_x^{1(i)}$	-4.46	-3.36	-3.24	-3.23	-3.22
$\Delta V_y^{1(i)}$	15.49	13.28	13.03	13.00	13.00
$\Delta M_z^{1(i)}$	26.24	26.20	26.20	26.20	26.20
$\Delta N_x^{2(i)}$	4.46	3.36	3.24	3.23	3.22
$\Delta V_y^{2(i)}$	-15.49	-13.28	-13.03	-13.00	-13.00
$\Delta M_z^{2(i)}$	35.71	26.90	25.91	25.80	25.79
Incrementos de acciones en coordenadas locales en los extremos de la viga					
Iteración (i)	1	2	3	4	5
$\Delta N_x^{2(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\Delta V_y^{2(i)}$	-3.22	-0.01	0.00	0.00	0.00
$\Delta M_z^{2(i)}$	-25.72	-0.06	-0.01	0.00	0.00
$\Delta N_x^{3(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\Delta V_y^{3(i)}$	3.22	0.01	0.00	0.00	0.00
$\Delta M_z^{3(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Incrementos acumulados de acciones en coordenadas locales en los extremos de la viga					
Iteración (i)	1	2	3	4	5
$\Delta N_x^{1(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\Delta V_y^{1(i)}$	-3.22	-3.22	-3.22	-3.22	-3.22
$\Delta M_z^{1(i)}$	-25.72	-25.78	-25.79	-25.79	-25.79
$\Delta N_x^{2(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\Delta V_y^{2(i)}$	3.22	3.22	3.22	3.22	3.22
$\Delta M_z^{2(i)}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 5.3. Resumen de cálculo de acciones en los extremos de los elemento

Para la última iteración los vectores $\{\Delta f_1^{(1)}\}$ y $\{\Delta f_2^{(1)}\}$ valen:

$$\left\{\Delta f_1^{(1)}\right\} = \sum_{i=1}^{5}\left\{\Delta f_1^{(i,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} -3.22 \\ 13.00 \\ 26.20 \\ 3.22 \\ -13.00 \\ 25.79 \end{Bmatrix} \quad \left\{\Delta f_2^{(1)}\right\} = \sum_{i=1}^{5}\left\{\Delta f_2^{(i,1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -3.22 \\ -25.79 \\ 0.00 \\ 3.22 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Al final los incrementos en las acciones equivalentes están en equilibrio con los incrementos en las acciones en los extremos de los elementos como lo muestra la Figura 5.23:

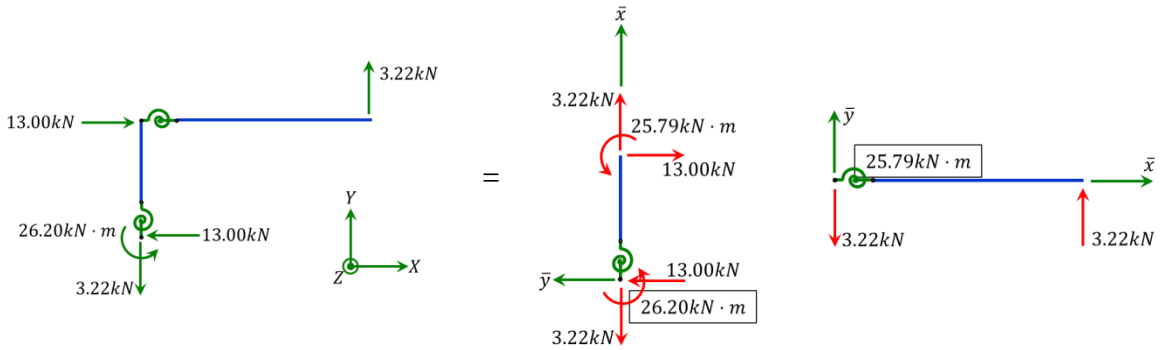


Figura 5.23. Verificación del equilibrio entre acciones equivalentes externas e internas

5.6. Respuesta de la estructura en cada instante de tiempo

A continuación se muestra la forma como se calculan las cantidades que representan la respuesta de la estructura en cada instante de tiempo, cuando esta incursiona en el rango inelástico de deformaciones.

Primero se describe la forma en que se calculan los desplazamientos de los nudos, las acciones de amortiguamiento, las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa y las acciones en los extremos de cada elemento estructural al final del intervalo (*en el instante* $t + \Delta t$) a partir de estas mismas cantidades al comienzo del intervalo (*en el instante* t) y de los resultados convergidos del procedimiento iterativo principal en el que se estiman los incrementos en los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base de los centros de masa.

Posteriormente se describe la forma como se verifica la ecuación de balance de energía, incluyendo la energía disipada por histéresis en las rótulas plásticas (*resortes rotacionales no lineales*). También se describe la forma como se obtienen las derivas de los centros de masa y por los ejes de columnas y la forma de construir los diagramas de acciones internas de los elementos, teniendo en cuenta las acciones internas producidas por las cargas iniciales, que actúan antes al movimiento de la base.

En cada caso se describen las diferencias existentes entre la forma de calcular la respuesta para el caso elástico y para el caso inelástico, y se describen las consideraciones especiales a tener en cuenta en el caso inelástico.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

5.6.1. Respuesta principal de la estructura

Las cantidades que representan la respuesta principal de la estructura al movimiento acelerado de la base son las siguientes:

- Desplazamientos de los nudos
- Acciones inerciales, acciones de amortiguamiento y acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa
- Acciones en coordenadas locales en los extremos de cada elemento

Los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base de los centros de masa en el instante $t + \Delta t$ se obtuvieron como solución de las ecuaciones de movimiento en forma incremental, utilizando el método de Newmark en conjunto con el método de Newton Raphson modificado.

Para obtener una buena aproximación del vector de incremento de desplazamientos de centros de masa $\{\Delta u_\phi\}$ utilizando el método de Newton – Raphson modificado, se planteó un procedimiento que tuvo como fin el cálculo del vector $\{\Delta \mathrm{F}_{s\phi}^{(j)}\}$, procedimiento con el cual se obtienen también los vectores $\{\Delta u^{(j)}\}$ y $\{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\}$, este último para cada elemento.

Los vectores $\{\Delta u\}$, $\{\Delta \bar{f}_e\}$ y $\{\Delta \mathrm{F}_{s\phi}\}$ de incrementos reales en el intervalo de estas tres cantidades se obtienen entonces sumando los resultados obtenidos en cada iteración j (l es la última iteración realizada):

$$\begin{aligned} \{\Delta u\} &= \sum_{j=1}^{l} \{\Delta u^{(j)}\} \\ \{\Delta \bar{f}_e\} &= \sum_{j=1}^{l} \{\Delta \bar{f}_e^{(j)}\} \\ \{\Delta F_{s\phi}\} &= \sum_{j=1}^{l} \{\Delta F_{s\phi}^{(j)}\} \end{aligned} \tag{5.96}$$

Como se conocen $\{u_{(t)}\}$, $\{\bar{f}_{e(t)}\}$ y $\{F_{s\phi}(t)\}$ (*al comienzo del intervalo*), entonces $\{u_{(t+\Delta t)}\}$, $\{\bar{f}_{e(t+\Delta t)}\}$ y $\{(F_s)_{\phi(t+\Delta t)}\}$ serían:

$$\begin{aligned} \{u(t+\Delta t)\} &= \{u(t)\} + \{\Delta u\} \\ \{\bar{f}_e(t+\Delta t)\} &= \{\bar{f}_e(t)\} + \{\Delta \bar{f}_e\} \\ \{F_{s\phi}(t+\Delta t)\} &= \{F_{s\phi}(t)\} + \{(\Delta F_s)_\phi\} \end{aligned} \tag{5.97}$$

Las acciones inerciales se calculan con $\{F_{I\phi}(t)\} = [m]\{\ddot{u}_\phi(t)\}$, como se describió en el Capítulo 4 para el método de análisis modal cronológico.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En cuanto a las acciones de amortiguamiento en el instante $t + \Delta t$, su incremento en el intervalo se aproxima con la matriz de rigidez tangente de amortiguamiento $[c(t)]$ y el incremento en las velocidades de los centros de masa $\{\Delta \dot{u}_\phi\}$:

$$\{\dot{u}(t + \Delta t)\} \approx \{\dot{u}(t)\} + [c(t)]\{\Delta \dot{u}_\phi\} \tag{5.98}$$

En este último caso habrá un error implícito dado que no hay una ley que rija la variación de las acciones de amortiguamiento en el tiempo, y por lo tanto no se cumplirá exactamente la ecuación de movimiento, como si sucede en el caso elástico. Sin embargo, este error se minimiza escogiendo intervalos de tiempo Δt lo suficientemente pequeños.

5.6.2. Balance de energía

De la Ecuación (4.38) de balance de energía mencionada en la parte de análisis dinámico elástico, cuando la estructura entra en el rango inelástico los términos $E_c(t)$, $E_a(t)$ y $E_e(t)$ se calculan de la misma forma en que se describió para el caso de análisis lineal elástico.

El término $E_s(t)$ se debe calcular de una forma similar a como se obtiene $E_a(t)$ o $E_e(t)$, es decir, resolviendo la siguiente integral de forma numérica:

$$E_s(t) = \int_0^t \{(F_s)_\phi\}^T \{\dot{u}_\phi\} dt \tag{5.99}$$

La energía de deformación $E_s(t)$ calculada con la anterior expresión incluye la energía que la estructura almacena cuando está en rango elástico e inelástico de deformaciones, por lo que se debe distinguir la participación de la estructura dentro del rango elástico e inelástico (Oviedo & Duque, 2006). Por lo tanto la energía de deformación en cada instante de tiempo $E_s(t)$ será igual a la suma de la energía de deformación elástica $E_{ss}(t)$ y de la energía de deformación inelástica, esta última también llamada energía de fluencia o energía disipada por histéresis $E_{sy}(t)$:

$$E_s(t) = E_{ss}(t) + E_{sy}(t) \tag{5.100}$$

Para sistemas inelásticos la ecuación de balance de energía se transforma en:

$$E_c(t) + E_a(t) + E_{ss}(t) + E_{sy}(t) = E_e(t) \tag{5.101}$$

La energía de deformación elástica $E_{ss}(t)$ es aquella parte de la energía de deformación que no se disipa y que recupera la estructura cuando se retira la carga (Chopra, 2001), mientras que la energía de deformación inelástica $E_{sy}(t)$ es la parte de la energía que se disipa por amortiguamiento histerético en las zonas donde se presentan rótulas plásticas, las cuales continuamente entran en el rango no lineal de deformaciones y experimentan algún tipo de degradación en cada ciclo de carga y descarga.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Figura 5.24 adaptada de García (1998) muestra las energías de deformación elástica e inelástica que se acumulan en una rótula plástica por flexión, sometida a un ciclo de carga y descarga. El área bajo la curva $M\ vs\ \theta$ en cada ciclo de carga y de descarga equivale a la energía de deformación inelástica disipada por histéresis en la rótula, es decir a $(E_{sy})_i$.

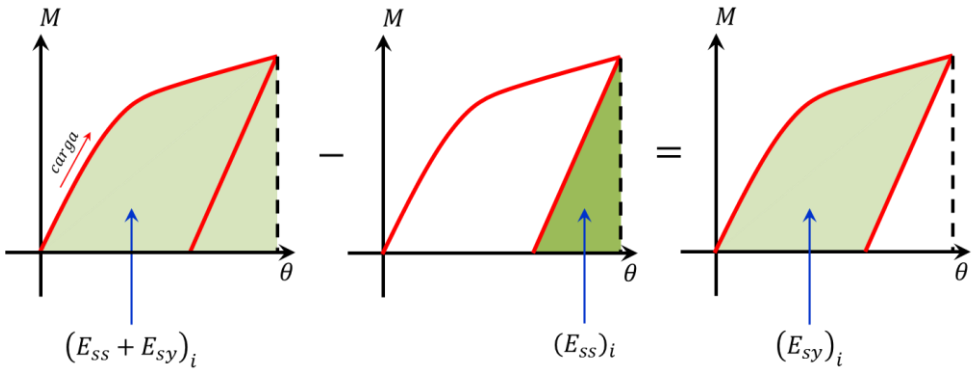


Figura 5.24. Disipación de energía en una rótula plástica a partir de la relación $M-\theta$ del resorte rotacional no lineal correspondiente. Adaptada de García (1998)

La energía disipada por histéresis en la rótula plástica por flexión i, desde $t=0$ hasta t se calcula con la siguiente expresión:

$$(E_{sy})_{i(t)} = \int_0^{\theta_i(t)} M_i d\theta_i - \frac{(M_i(t))^2}{2J_e} \tag{5.102}$$

Donde $M_i(t)$ y J_e son respectivamente el momento en el instante t y la rigidez inicial en el resorte rotacional correspondiente. La integral $\int_0^{\theta_i} M_i d\theta_i$ corresponde al area bajo la relación $M-\theta$ del resorte rotacional, acumulada desde $\theta=0$ hasta $\theta_i(t)$. Esta integral se evalúa en forma incremental con base en el área bajo la curva hasta el instante $t-\Delta t$ denominada aquí $A_{i(t-\Delta t)}$ y aproximando el incremento del área en el intervalo a un trapecio, como se indica en la Figura 5.25:

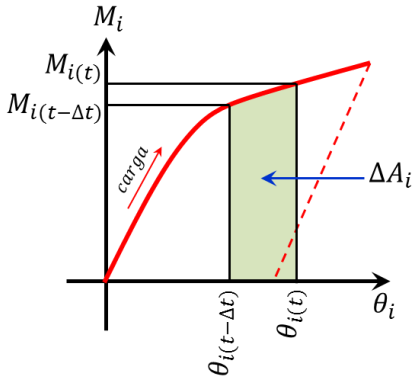


Figura 5.25. Incremento aproximado del área bajo la curva $M-\theta$ de un resorte rotacional

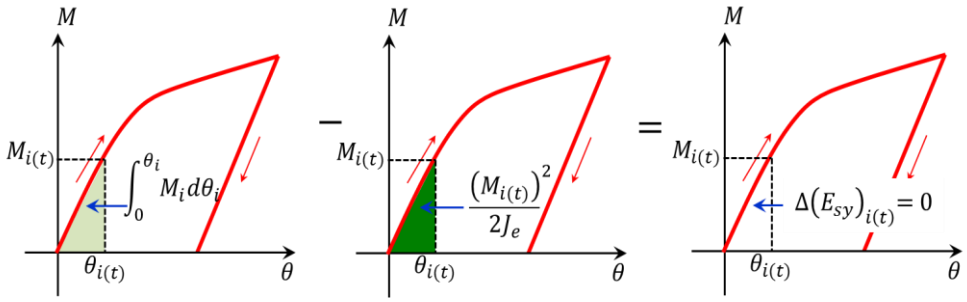
© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Por lo tanto, $\int_0^{\theta_i(t)} M_i d\theta_i$ se aproxima como sigue:

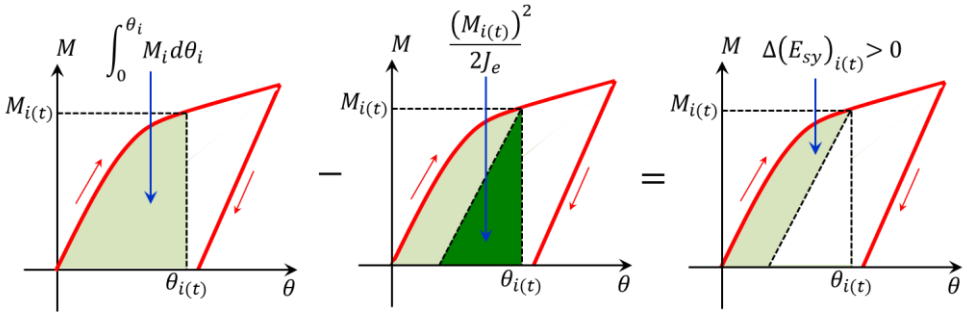
$$\int_0^{\theta_i(t)} M_i d\theta_i \approx A_i(t-\Delta t) + \frac{\big(\theta_i(t)-\theta_i(t-\Delta t)\big)\big(M_i(t-\Delta t)+M_i(t)\big)}{2} \tag{5.103}$$

En este caso $\theta_i(t-\Delta t)$ y $\theta_i(t)$ son las rotaciones al comienzo y al final del intervalo y $M_i(t-\Delta t)$ y $M_i(t)$ son los momentos en el resorte rotacional no lineal al comienzo y al final del intervalo respectivamente.

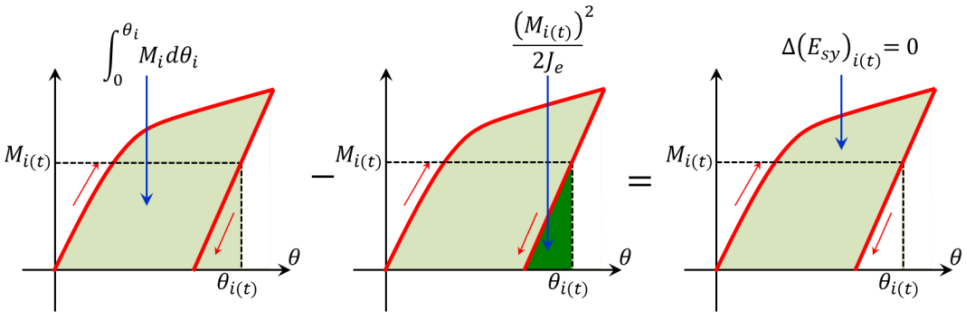
Una interpretación geométrica de la Ecuación (5.103) se da en la Figura 5.26 para los casos en que aumenta el momento en rango elástico, cuando aumenta el momento en el rango inelástico y cuando hay descarga en cada rótula o resorte rotacional.



a) Carga en rango elástico



b) Carga en rango inelástico



c) Descarga

Figura 5.26. Disipación de energía por histéresis

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En la figura anterior se observa que solamente hay un aumento en la energía disipada por histéresis cuando el resorte rotacional está en rango inelástico, mientras que en los casos en que el resorte es elástico no hay aumento en la energía disipada por histéresis.

Como $(E_{sy})_i$ es el aporte de uno de los resortes rotacionales no lineales a la energía disipada por histéresis, entonces si la cantidad de resortes rotacionales es nr, la energía de deformación inelástica de la estructura es:

$$E_{sy}(t) = \sum_{i=1}^{nr} \left(E_{sy}\right)_i \tag{5.104}$$

Finalmente la energía de deformación elástica de la estructura $E_{ss}(t)$ se calcula con la siguiente expresión:

$$E_{ss}(t) = E_s(t) - E_{sy}(t) \tag{5.105}$$

5.6.3. Derivas, cortantes de piso y cortante basal

Las derivas de los centros de masa y por los ejes de columnas, los cortantes de piso y el cortante basal en cada instante de tiempo se calculan de la misma forma como se describió en el capítulo de análisis dinámico elástico por el método del análisis modal cronológico.

En esa sección se indicó que las derivas se evalúan a partir de los desplazamientos de los centros de masa o de los nudos asociados a cada eje de columnas dependiendo el criterio que se siga para su evaluación, y los cortantes de piso se evalúan a partir de las fuerzas equivalentes a las fuerzas internas trasladadas a los centros de masa, por lo que se remite al lector a consultar las secciones correspondientes.

5.6.4. Acciones internas en los elementos

El cálculo de las acciones internas en la longitud de cada elemento estructural y en cada instante de tiempo se realiza de una forma similar a como se describió en la sección de análisis modal cronológico.

La única diferencia cuando la estructura es inelástica radica en que ahora deben incluirse las cargas iniciales distribuidas en la luz de cada elemento para que por estática se puedan calcular las acciones internas. A diferencia del caso inelástico, en el caso elástico las cargas iniciales se tienen en cuenta en un caso de carga estático diferente al dinámico, puesto que es aplicable el principio de superposición.

La Figura 5.27 muestra esquemáticamente las seis acciones internas que actúan en una sección s localizada a una distancia x del extremo inicial de un elemento tipo pórtico espa-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

cial. En la misma figura se indican las acciones que ejerce el resto de la estructura sobre el elemento en el extremo inicial, las cuales equilibran el tramo del elemento mostrado.

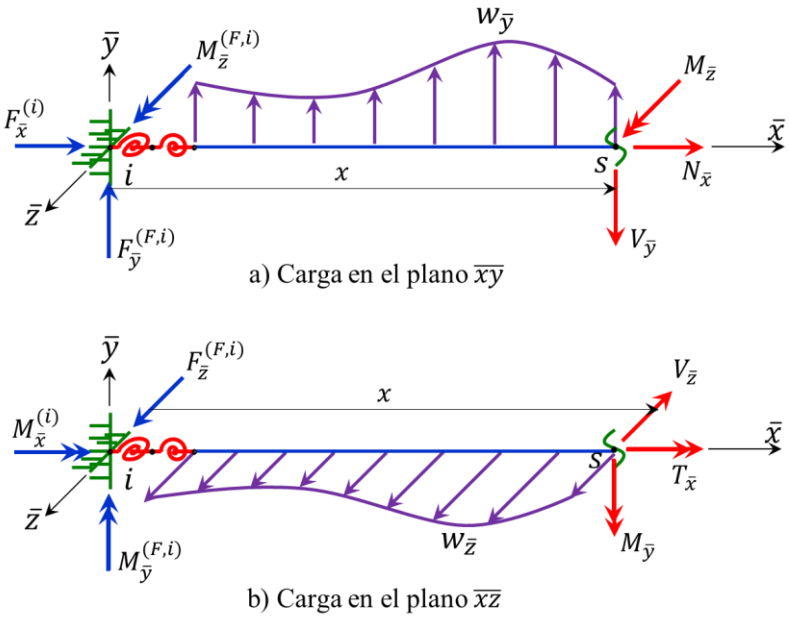


Figura 5.27. Acciones internas en una sección de un elemento tipo pórtico espacial considerando las cargas distribuidas iniciales

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, provenientes de la estática, al tramo del elemento indicado en la Figura 5.27, se plantean seis ecuaciones independientes para calcular las acciones internas en la seccion s. Estas ecuaciones son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_{\bar{x}} &= 0 & N_{\bar{x}} &= -F_{\bar{x}}^{(i)} + N'_{\bar{x}} \\
\Sigma F_{\bar{y}} &= 0 & V_{\bar{y}} &= F_{\bar{y}}^{(i)} + V'_{\bar{y}} \\
\Sigma F_{\bar{z}} &= 0 & V_{\bar{z}} &= F_{\bar{z}}^{(i)} + V'_{\bar{z}} \\
\Sigma M_{s,\bar{x}} &= 0 & T_{\bar{x}} &= -M_{\bar{x}}^{(i)} + T'_{\bar{x}} \\
\Sigma M_{s,\bar{y}} &= 0 & M_{\bar{y}} &= F_{\bar{z}}^{(i)} x + M_{\bar{y}}^{(i)} + M'_{\bar{y}} \\
\Sigma M_{s,\bar{z}} &= 0 & M_{\bar{z}} &= F_{\bar{y}}^{(i)} x - M_{\bar{z}}^{(i)} + M'_{\bar{z}}
\end{aligned}
\tag{5.106}
$$

Donde $N'_{\bar{x}}, V'_{\bar{y}}, V'_{\bar{z}}, T'_{\bar{x}}, M'_{\bar{y}}$ y $M'_{\bar{z}}$ son las acciones internas producidas en la sección s solamente por las cargas distribuidas iniciales. Estas acciones dependen del tipo de carga distribuida y de la dirección en la que actúe sobre el elemento.

Como las cargas iniciales se aplican a la estructura antes que la aceleración de la base, estas no varían durante el análisis dinámico y por lo tanto las acciones que producen en los elementos estructurales solo deben calcularse una vez antes de calcular las acciones internas reales en cada sección y en cada instante de tiempo.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las constantes $N'_{\bar{x}}, V'_{\bar{y}}, V'_{\bar{z}}, T'_{\bar{x}}, M'_{\bar{y}}$ y $M'_{\bar{z}}$ se muestran en la Figura 5.28 para algunos tipos de carga distribuidas de tipo rectangular y triangular. Estas se obtuvieron asumiendo que cada carga actúa individualmente sobre el elemento.

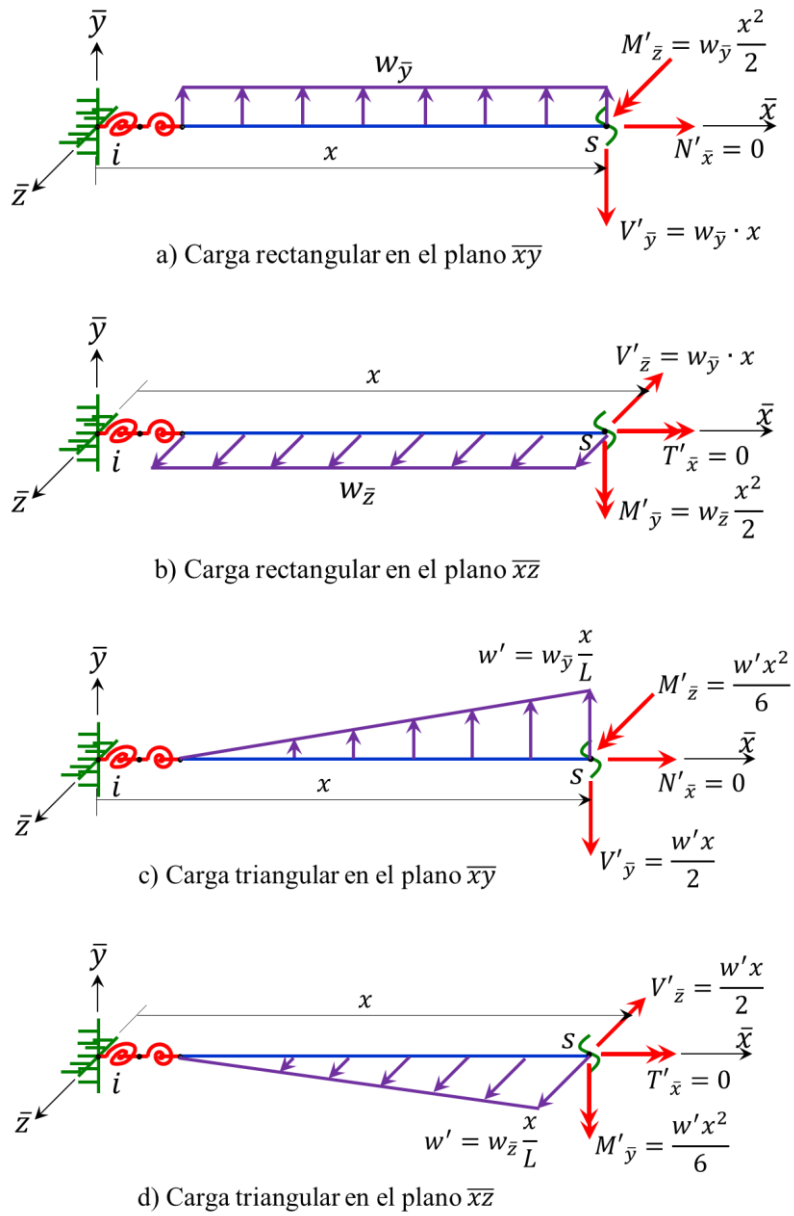


Figura 5.28. Acciones internas en una sección de un elemento pórtico espacial para diferentes tipos de carga distribuida

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013