Introducción al Análisis Real
Guía actualizada de clase

Sergio A. Carrillo Torres
Leonardo F. Chacón Cortés

Facultad de Ciencias
Sede Medellín

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Introducción al análisis real
Guía actualizada de clase

Introducción al análisis real
Guía actualizada de clase

Sergio A. Carrillo Torres
Profesor Asistente Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Leonardo F. Chacón Cortés
Profesor Asociado Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana, Sede Bogotá

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Medellín, Colombia, 2023

515
C17 Carrillo Torres, Sergio Alejandro
Introducción al análisis real : guía actualizada de clase / Sergio A. Carrillo Torres, Leonardo F. Chacón Cortés. – Primera edición. – Medellín, Colombia : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2023.
463 páginas : ilustraciones

ISBN: 978-958-505-394-6

1. ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2. ESPACIOS MÉTRICOS. 3. SUCESIONES (MATEMÁTICAS). 4. SERIES (MATEMÁTICAS). 5. FUNCIONES. 6. CONVERGENCIA. 7. NÚMEROS COMPLEJOS. 8. FUNCIONES DIFERENCIABLES. I. Chacón Cortés, Leonardo F. II. Título

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín

Introducción al análisis real. Guía actualizada de clase.
© Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
Centro Editorial de la Facultad de Ciencias

© Sergio A. Carrillo Torres
© Leonardo F. Chacón Cortés

ISBN impreso: 978-958-505-393-9
ISBN digital: 978-958-505-394-6
Medellín, Colombia
Primera edición: Octubre de 2023
Medellín, Colombia, 2023

Diseño de portada: Sebastián Acevedo
Oficina de Comunicaciones de la Facultad de Ciencias
Diagramación: Sergio A. Carrillo Torres

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia.

Índice general

Índice general I

Índice de figuras VI

Prefacio 1

Introducción 5

I La teoría básica 9

1. Los números reales 11
1.1. Preliminares: Números naturales y el principio de inducción 11
1.2. Conjuntos numerables y no numerables 14
1.3. Cuerpos y conjuntos ordenados 22
1.4. Los números reales 28
1.5. El principio de intervalos encajados 36

2. Espacios métricos y espacios normados 41
2.1. Métricas y normas 41
2.2. Conjuntos abiertos y cerrados 46
2.3. Interior y clausura 52

3. Compacidad y conexidad 61
3.1. Conjuntos compactos 61
3.2. El Teorema de Heine-Borel 66
3.3. Conjuntos conexos 69
3.4. El conjunto de Cantor 71

4. Sucesiones 75
4.1. Sucesiones en espacios métricos 75
4.2. Cálculo de sucesiones en $\mathbb{R}$ 78
4.3. Sucesiones de Cauchy 88

4.4. Subsucesiones 92
4.5. Límites superior e inferior 95

5. Series **101**
5.1. Series numéricas 101
5.2. Criterios de convergencia 106
5.3. El número de Euler 111
5.4. Criterios de la raíz y del cociente 114
5.5. Criterios de Dirichlet y Leibniz 122
5.6. Reordenación de series y series múltiples 126
5.7. El Teorema de Tannery 136

6. Aplicaciones continuas **141**
6.1. Límites de aplicaciones 141
6.2. Aplicaciones Continuas 146
6.3. Aplicaciones continuas definidas en compactos y en conexos 151
6.4. Aplicaciones uniformemente continuas 156
6.5. Límites laterales y discontinuidades de funciones reales 162

7. Funciones diferenciables **173**
7.1. Derivada de funciones reales 173
7.2. Valores extremos y el Teorema del valor medio 183
7.3. Comportamiento local y derivadas 190
7.4. El Teorema de Darboux 197
7.5. La regla de L'Hôpital 199
7.6. El Teorema de Taylor 203

8. La integral de Riemann **211**
8.1. La definición de integral (Riemann y Darboux) 212
8.2. Propiedades generales de la integral 220
8.3. Teoremas Fundamentales del Cálculo 225
8.4. Derivación bajo el signo de integración 232
8.5. Caracterización de integrabilidad 235
8.6. Algunas aplicaciones de la integral 240
8.7. Integrales impropias 253

9. Sucesiones y series de funciones **265**
9.1. Convergencia uniforme 265
9.2. Convergencia uniforme, continuidad y el M-test de Weierstrass . . . 271
9.3. Convergencia uniforme, diferenciación e integración 276
9.4. El Teorema de aproximación de Weierstrass 286
9.5. Regla de Leibniz para integrales impropias 292
9.6. Algunas funciones extrañas 297

II Proyectos **307**

10. Números reales y complejos **309**
10.1. Algunos números irracionales 309
10.2. Fracciones continuas simples 317
10.3. Extensión de algunos resultados al caso complejo 324

11. Criterios de convergencia de series **337**
11.1. El segundo criterio del cociente 337
11.2. Los criterios de Kummer, Raabe y Jamet 342
11.3. El Teorema de continuidad de Abel 350

12. Otros resultados sobre diferenciabilidad **357**
12.1. Funciones convexas 357
12.2. La fórmula de Faà di Bruno 365
12.3. Sobre funciones suaves y el Teorema de Borel-Peano 373
12.4. Diferenciabilidad del resto en la fórmula de Taylor 378

13. Resultados sobre teoría de funciones **387**
13.1. Algunas identidades trigonométricas 388
13.2. Productos infinitos 402
13.3. La función Gamma 409

14. Sobre espacios de funciones **419**
14.1. Espacios con producto interno 419
14.2. Longitud de curvas y funciones de variación acotada 424
14.3. El Teorema de Stone-Weierstrass 435

Bibliografía **454**

Índice alfabético **460**

Índice onomástico **463**

Índice de figuras

1.1. Una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. 16
1.2. El camino de la serpiente. 18
1.3. Otro camino posible. 18
1.4. El árbol de Calkin-Wilf. 21
1.5. La función parte entera $\lfloor \cdot \rfloor$. 31
1.6. Una biyección explícita entre $(0, 1]$ y $(0, 1)$. 38

2.1. El borde de la bola $B_{\|\cdot\|_p}((0, 0), 1)$ para $p = 1, \frac{3}{2}, 2$ y $p = \infty$. 47
2.2. Un semicírculo como conjunto abierto en el semiplano superior. . . 50
2.3. K_t es cerrado, convexo y simétrico. Además $0 \leq t \leq 1$ y $\|\boldsymbol{x}\|_K = r$. . 59

3.1. Construcción del conjunto de Cantor C. 73

5.1. Otro argumento para sumar la serie geométrica. 104
5.2. La suma de la serie geométrica derivada. 105
5.3. Algunas particiones de $\mathbb{N}^2$. 131
5.4. Los conjuntos A_N, B_N y su unión dada por C_N. 133

6.1. El camino γ conecta a $\boldsymbol{x}_0$ con $\boldsymbol{x}$. También es válida una curva formada por unión finita de segmentos paralelos a los ejes. 154
6.2. La gráfica de f soporta un cuadrado. 155
6.3. Algunas discontinuidades para funciones reales. 164
6.4. Gráfica de la función de Thomae. 165
6.5. Recíproca de la función de Thomae. 171

7.1. La gráfica de la función φ. 180
7.2. Interpretación geométrica del Teorema de Lagrange. 185
7.3. Interpretación geométrica del Teorema de Rolle. 185
7.4. Interpretación geométrica del Teorema de Cauchy. 186
7.5. El signo de la derivada y el comportamiento local de f. 193
7.6. La gráfica del Ejemplo 7.3.6 en una vecindad de 0. 194
7.7. Interpretación geométrica del Teorema de Flett. 196

8.1. Interpretación geométrica de la desigualdad de Young. 242
8.2. La constante de Euler-Mascheroni. 245
8.3. El triángulo Δ_n y la región R_n. 247
8.4. El triángulo τ_n. 247
8.5. Áreas bajo las curvas de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ y $\frac{1}{x}$. 261

9.1. Los primeros pasos para generar la curva de Hilbert. 299
9.2. La función Φ no es analítica en ningún punto. 302
9.3. La gráfica de la función p, de periodo 2. 304

11.1. Regiones de convergencia de la serie bi-geométrica aplicando el segundo criterio del cociente I y II. 341

12.1. La gráfica de una función convexa. 358
12.2. Convexidad, continuidad y diferenciación. 360
12.3. La función g_0. Su integral produce la función φ. 375

13.1. La función Gamma. 410

14.1. Rotar uno de los ejes para emplear el caso planar. 424
14.2. Aproximación poligonal de una curva. 425
14.3. La curva de Koch es el límite γ. 433
14.4. La construcción de la lemniscata. 434

Prefacio

Este libro surge del desarrollo de los cursos de Análisis Matemático sobre la recta real impartido por los autores durante los años 2018 a 2022. Su objetivo principal es ofrecer al lector una exposición actualizada de temas clásicos de una forma autocontenida, asumiendo requisitos básicos en fundamentos de matemáticas y cálculo en una variable.

El texto se ha inspirado y guiado en la exposición del ya clásico libro *Principles of Mathematical Analysis* de Walter Rudin [113], además de su contraparte latinoamericana *Curso de Análisis Matemático vol. 1* del autor brasilero Elon Lages Lima [87]. Estos textos han sido utilizados por generaciones de matemáticos, y en particular por los autores, para impartir esta asignatura. Sin embargo, el presente texto propone ahondar en ideas básicas a través de resolución de problemas en temas relacionados con la materia. Estos incluyen sumas de series, valores particulares de funciones especiales, integrales y desigualdades notables, además de teoremas olvidados en la literatura actual. De esta forma, nos enfocamos en detalles y aplicaciones dentro del propio Análisis Real clásico en una variable, mas no en la búsqueda de generalidad. Esto por ejemplo se ve reflejado en solo estudiar la integral de Riemann mas no las integrales de Riemann-Stieltjes, de Lebesgue o de Henstock-Kurzweil.

Respecto al término *actual*, es natural que el lector cuestione su validez... ¿Acaso una demostración en matemáticas pierde veracidad con el tiempo? Por supuesto que no. Al referirnos a una exposición actualizada queremos enfatizar en el trabajo de recopilación de pequeños detalles dispersos en artículos y en la web que complementan los argumentos usuales bien expuestos en las referencias clásicas. Por ejemplo, ¿existe una demostración más sencilla y directa que el argumento de Euclides para comprobar que hay infinitos números primos? ¿Es posible dar una biyección explícita entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}^+$, o entre $[0,1)$ y $(0,1)$? ¿$1/4$ es un punto del conjunto de Cantor? ¿Cuál es la regla de L'Hôpital para límites de sucesiones? ¿Por qué los Teoremas del valor medio de Lagrange y Cauchy y el Teorema de Rolle son equivalentes? El lector encontrará las respuestas más adelante y en el desarrollo de los ejercicios planteados.

Este libro incorpora en su exposición de manera natural más de cien artículos de las revistas *The American Mathematical Monthly, Mathematics Magazine, The Mathematical Gazette*, entre otras, especializadas en publicar material inédito sobre temas elementales. Ellas han sido la fuente de muchos argumentos novedosos que enriquecen al texto. Por otra parte, el lector encontrará numerosos resultados que han

sido tomado de estos artículos y propuestos como ejercicios guiados. La invitación es siempre intentar resolver los problemas por cuenta propia, y luego consultar los artículos citados. De esta manera se da un paso más en la formación adentrándose en la literatura científica y contrastando los razonamientos propios con los explicados en cada referencia.

Un objeción posible a desarrollar un texto con muchos detalles o aplicaciones es la imposibilidad de usarlo como texto guía, por limitaciones de tiempo versus la extensión del material. No somos ajenos a esta opinión y para balancear esta situación hemos dividido al libro en dos partes. La primera expone la teoría básica desde los axiomas de los números reales hasta sucesiones de series y funciones, pasando por la topología básica de los espacios métricos y los procesos del análisis como límites, derivadas e integrales. Algunas secciones dentro de esta parte se plantean como material opcional —series múltiples, el Teorema de Tannery, aplicaciones de la integral—, pero siguen haciendo parte del cuerpo del texto. La segunda parte profundiza en temas paralelos que se pueden desarrollar con las herramientas de la primera parte y en aplicaciones, pero que no constituyen un vacío en la formación si no son explicados en clase. De hecho, el material de esta parte del libro se generó a partir de exposiciones asignadas a nuestros estudiantes como parte de su evaluación. La idea era la misma que defendemos en los párrafos anteriores: evidenciar el análisis real en la práctica a través de literatura actual. Esta metodología logró inculcar en muchos de ellos una premisa fundamental: la matemática es una ciencia activa y cambiante que se beneficia de investigación e ideas novedosas en todos los niveles. Por estos motivos esta segunda parte la hemos denominado como *Proyectos*.

Cada sección posee una lista de ejercicios, de manera que las técnicas desarrolladas en ella sean suficientes para resolverlos. Esto también incluye a los proyectos, donde se ha hecho un esfuerzo por recopilar y proponer ejercicios en cada tema. El libro ofrece un total de 500 problemas, 390 en la primera parte y 110 en la segunda. Algunos son ejercicios clásicos y como mencionábamos antes, otros corresponden a resultados de artículos que encajan perfectamente con los temarios de la sección. Es importante mencionar que esta lista se logró consultando diversos libros de distintas nacionalidades (España, Francia, Estados Unidos, Austria) que han impactado a los autores a lo largo de sus carreras. Además de los libros de W. Rudin y E. L. Lima señalamos las siguientes referencias, donde los lectores también encontrarán más ejercicios y diferentes planteamientos de la asignatura:

- [10] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison Wesley series in mathematics. 2nd ed. Addison-Wesley, 1974.

- [42] P. N. de Souza and J. N. Silva. *Berkeley Problems in Mathematics*. Problem Books in Mathematics. Springer New York, 2004.

- [55] F. Galindo Soto, J. Sanz Gil, and L. A. Tristan Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real*. Editorial Paraninfo, S.A., 2003.

- [84] A. Kriegl. *Analysis 1*. Skriptum von Vorlesung über Analysis 1. Wintersemester 2003/2004, Universität Wien.
- [90] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, and U. M. J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman. 1993.
- [109] J. P. Ramis, A. Warusfel, X. Buff, J. Garnier, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, and et al. *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*. 4e édition. Dunod, Paris. 2022.

Este libro fue escrito en TeXstudio (`https://texstudio.org/`), versión 4.3.0 para Windows y las gráficas fueron generadas a través del paquete TikZ de Latex. Como cualquier texto, este libro no estará libre de erratas, que por supuesto son nuestra responsabilidad. Si el lector encuentra alguna, tiene sugerencias o comentarios, por favor déjanoslo saber.

Para concluir señalamos que este libro es adecuado para un primer curso de Análisis Real a desarrollarse en uno o dos semestres académicos. Puede servir como texto guía para docentes que busquen una opción alternativa y compartan la visión que hemos adoptado aquí. Por otra parte, puede servir como libro de consulta y fuente de ejercicios y proyectos para asignar a estudiantes o para profundizar en aplicaciones. Finalmente, puede servir como herramienta de diversión para personas apasionadas por las matemáticas con gusto por resolver problemas. Esperamos que nuestros lectores puedan disfrutar y aprender del texto como lo hicimos los autores al escribirlo.

Antes de terminar, queremos agradecer a las distintas instituciones y personas que nos ayudaron a desarrollar este proyecto. Primero a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, por su interés y apoyo en la publicación del libro, así como al Centro Editorial y la Oficina de Comunicaciones de esta dependencia. A los jurados por su cuidadosa lectura, correcciones y sugerencias que sin duda ayudaron a mejorar el texto. También a los departamentos de matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda y Pontificia Universidad Javeriana en Bogotá por darnos el tiempo para trabajar en este libro y la oportunidad para impartir la asignatura de Análisis Real durante estos años. Por último, a nuestros estudiantes, quienes sin duda fueron la motivación para empezar este proyecto. Por su dedicación, preguntas y curiosidad matemática: ¡Muchas gracias!

Octubre de 2023.

Sergio A. Carrillo
Leonardo F. Chacón.

Introducción

Este libro está dirigido a estudiantes de una carrera de matemáticas con una base sólida en Fundamentos de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral. De esta forma, asumimos que el lector está familiarizado con el manejo de sistemas numéricos, inducción matemática y el lenguaje de conjuntos, funciones y relaciones. Algunos apartados se benefician de ideas de Álgebra Lineal, en particular sobre la noción de espacios vectoriales y determinantes, pero este tema no es un verdadero requisito.

El texto se ha intentado desarrollar de forma autocontenida. La primera parte del libro, sobre la teoría básica y procesos del análisis, está dividida en nueve capítulos. Estos abarcan los axiomas de los números reales, las nociones de espacios métricos, compacidad y conexidad, además del cálculo de sucesiones y series de números reales. Por supuesto, se incluye el concepto de límite, derivada e integral de Riemann en una variable real y el caso de espacios de funciones acotadas, convergencia uniforme y el comportamiento de las construcciones analíticas respecto a ella. Por otro lado, la segunda parte sobre proyectos se divide en cuatro capítulos que incluyen más detalles sobre números irracionales y una introducción a los números complejos, criterios novedosos de convergencia de series, resultados específicos sobre diferenciabilidad y ejemplos de espacios de funciones. El lector podrá encontrar el contenido detallado de cada sección al comienzo de las mismas. Al final de cada una de ellas se incluye una lista de ejercicios de distintos niveles que se espera puedan ser resueltos con el material específico de cada sección. Ejercicios de dificultad considerable o que requieran conocimiento de otras áreas están marcados con un asterisco ($*$).

Antes de entrar en materia, encontramos útil recordar algunas nociones de Teoría de Conjuntos de manera informal. De esta forma aprovechamos para fijar la notación que será usada de manera sistemática a lo largo del texto. Emplearemos letras mayúsculas para denotar conjuntos, como A, B, C, E, F, X o Y y letras minúsculas como a, b, c, x o y para denotar elementos de un conjunto. La relación de *pertenencia* se escribe como $a \in A$ y su negación como $a \notin A$. El símbolo

$$A \subseteq B$$

indica *contenencia* de conjuntos, es decir, que para todo $x \in A$ se verifica que $x \in B$. Dos conjuntos son *iguales* si tienen los mismos elementos, es decir, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. El conjunto vacío se denota por $\emptyset$.

Las operaciones usuales entre conjuntos se denotarán como es habitual. De esta forma, dados $A, B \subseteq X$ escribiremos

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}, \qquad A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \in B\},$$

para la *unión* e *intersección* entre A y B, respectivamente. Además, escribiremos

$$X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

para denotar al *complemento de A en X*. Por otra parte, dada una familia de subconjuntos $A_\alpha \subseteq X$, con $\alpha \in J$, donde $J \neq \emptyset$ es un conjunto que sirve como conjunto de índices, escribiremos

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \in X : \text{existe } \alpha \in J \text{ con } x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \in X : \text{ para todo } \alpha \in J, x \in A_\alpha\},$$

para su *unión* e *intersección*, respectivamente. En este caso, las leyes de De Morgan aseguran que

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha), \qquad X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha).$$

Otra operación entre conjuntos que requeriremos es el *producto cartesiano* $A \times B$. Este consiste en todas las parejas ordenadas (a, b), tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Una *aplicación* $f : A \to B$ es una regla que a cada elemento de a le asigna un único elemento $f(a)$ de B. En este caso, A se conoce como el *dominio* de f y B como el *codominio* de f. Una formalización de esta idea es definir a f como un subconjunto de $A \times B$ que satisface que para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En otras palabras, f está definida para todo elemento de A y además si $(a, b), (a, b') \in f$, entonces $b = b'$. Este valor se denota por $b = f(a)$ y es la asignación que hace f al elemento a. Dos ejemplos de aplicaciones generales son: la aplicación identidad dada por

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \qquad \mathrm{id}_X(x) = x.$$

Además, una inclusión $C \subseteq A$ induce la aplicación

$$\iota_C : C \to A, \qquad \iota(x) = x,$$

para todo $x \in C$.

Dada una aplicación $f : A \to B$ podemos calcular dos tipos de conjuntos: imágenes directas e imágenes inversas. Más específicamente, si $C \subseteq A$, escribimos

$$f(C) = \{b \in B : \text{ existe } c \in C \text{ con } f(c) = b\}$$

para denotar la *imagen directa de C por f*. Análogamente, si $D \subseteq B$,

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$$

es la *imagen inversa de D por f*. El comportamiento de estas imágenes bajo las operaciones de conjuntos se puede resumir de la siguiente forma:

- Si $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A$, entonces $f(A_0) \subseteq f(A_1)$. Además, si $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B$, entonces $f^{-1}(B_0) \subseteq f^{-1}(B_1)$.
- $f\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$, para cualquier familia de subconjuntos A_α de B. Además $f\left(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.
- $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$ y $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$, para cualquier familia de subconjuntos B_α de B.
- Si $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B$, entonces $f^{-1}(B_1 \setminus B_0) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_0)$.

Una aplicación $f : A \to B$ se dice *inyectiva* o $1-1$ (uno a uno) si dados $a_0, a_1 \in A$ con $a_0 \neq a_1$, entonces $f(a_0) \neq f(a_1)$. De forma equivalente, si $f(a_0) = f(a_1)$, entonces $a_0 = a_1$. Por otra parte, si $f(A) = B$, se dice que f es *sobreyectiva* o simplemente *sobre*. Una aplicación *biyectiva* es aquella que sea inyectiva y sobre.

Recordamos que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son aplicaciones, su *composición* $g \circ f : A \to C$ se define a través de la regla

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

y consiste en primero aplicar f al punto a y luego aplicar g al resultado $f(a)$. Note que la aplicación identidad actúa como neutro para esta operación de composición, es decir,

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Si $C \subseteq A$ podemos considerar la restricción $f|_C : C \to B$ dada simplemente por la misma regla, es decir, $f|_C(x) = f(x)$, si $x \in C$. En términos de la inclusión y la composición, tenemos que

$$f|_C = f \circ \iota_C.$$

Finalmente, una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si y solo si existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_B$ y $h \circ f = \mathrm{id}_A$. La aplicación h se conoce como la *inversa composicional* de f y se denota por $h = f^{-1}$. También se dice en esta situación que f es invertible. Note que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son invertibles, también lo es $g \circ f$ y

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

El lector encontrará útil comprobar por cuenta propia las afirmaciones resumidas en esta introducción y regresar a ellas cuando sea necesario.

Parte I

La teoría básica

Capítulo 1

Los números reales

El objetivo de este capítulo es introducir de manera axiomática el cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ de los números reales y explorar algunas de las consecuencias del axioma de completitud. Por ejemplo, la propiedad arquimediana de los números racionales, la existencia de raíces n-ésimas, o el principio de intervalos encajados. Incluimos también algunas preliminares sobre inducción matemática y sobre conjuntos contables y no contables.

1.1. Preliminares: Números naturales y el principio de inducción

Asumimos que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de los números naturales, enteros y racionales. Para diferentes aproximaciones de la fundamentación de los números naturales, por ejemplo vía los axiomas de Peano, consultar [18].

En este curso emplearemos las notaciones

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

para los conjuntos de los *números naturales* y de los números naturales sin el cero, respectivamente. El conjunto $\mathbb{N}$ está dotado de una suma y un producto además de un orden. Sin embargo, sus elementos no poseen inversos aditivos (salvo el 0). Al extender $\mathbb{N}$ agregando dichos inversos obtenemos el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

de *números enteros* (la letra Z proviene de la palabra alemana para número: der Zahl). Por otra parte, los elementos no nulos de este conjunto no poseen recíprocos o inversos multiplicativos (salvo ± 1). Entonces, al extender $\mathbb{Z}$ añadiendo estos inversos llegamos al conjunto

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^+\}$$

de los *números racionales*. Como veremos más adelante, este es un ejemplo de un cuerpo ordenado, en el sentido en que posee una suma y producto compatibles entre sí, además de un orden que también es compatible con estas operaciones.

Una de las principales herramientas al trabajar en $\mathbb{N}$ es el principio de inducción matemática. Este presenta diversas formas equivalentes, entre ellas destacamos la siguiente.

(**Principio de inducción matemática**) Sea $C \subseteq \mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Suponga que $n_0 \in C$ y es el mínimo elemento de C. Si además dado cualquier $n \in C$, esto implica que $n+1 \in C$, entonces se concluye que $C = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$. En particular, si $n_0 = 0$, entonces $C = \mathbb{N}$.

Por otra parte, el conjunto C puede estar definido a través de alguna propiedad o enunciado P, digamos $C = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es válida}\}$. En esta situación el principio de inducción asegura que si $P(0)$ es válida y que dado cualquier n, si $P(n)$ es válida, esto implica que $P(n+1)$ también lo es, entonces se concluye que $P(k)$ es válida para todo $k \in \mathbb{N}$.

Otra versión del principio de inducción es la llamada *inducción fuerte*, donde se asume en el paso inductivo que dado n, si $P(j)$ es válida para todo $j = n_0, \dots, n$, entonces $P(n+1)$ es válida.

Ejemplo 1.1.1. Recordemos que $p \geq 2$ es primo si sus únicos divisores son 1 y p. Denotaremos por

$$\mathcal{P} := \{2, 3, 5, 7, \dots\} \subset \mathbb{N},$$

al conjunto formado por estos números.

Un caso fundamental de como aplicar inducción fuerte es demostrar que todo natural $n > 1$ se puede escribir como producto de potencias de primos. Si $n = 2$, el resultado es válido. Supongamos ahora que el enunciado es válido para todo $2 \leq j \leq n$, para algún n. Entonces $n+1$ tiene dos opciones. Si es primo, hemos terminado. De lo contrario, podemos escribir $n+1 = mk$, con $1 < m, k \leq n$. Por hipótesis de inducción, m y k son productos de potencias de primos, y así $n+1$ también lo será. Por el principio de inducción fuerte, concluimos que el enunciado es válido para todo $n \geq 2$.

Es posible comprobar que dicha escritura es única, y así se obtiene el siguiente resultado clásico.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo número natural $n > 1$ se puede representar de manera única como producto de potencias de números primos*

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{m_j},$$

donde $p_1 < \cdots < p_k$ son primos y cada m_j es un natural positivo.

Terminamos esta sección con el principio de buena ordenación, que asegura que todo subconjunto de números naturales tiene un elemento mínimo.

(**Principio de buena ordenación**) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$, para todo $n \in A$.

El principio de inducción es, de hecho, equivalente al principio de buena ordenación. Veamos aquí una de las implicaciones. Asuma que el principio de inducción es válido y sea $A \subseteq \mathbb{N}$ no vacío. Si $0 \in A$, entonces 0 es el menor elemento de A. Si $0 \notin A$, considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{N} : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N} \setminus A\}$. Entonces, por hipótesis $0 \in C$. Como $A \neq \emptyset$, vemos que $C \neq \mathbb{N}$. Por tanto, el principio de inducción no puede ser válido para C, es decir, debe existir $n \in C$ tal que $n + 1 \notin C$. Esto significa precisamente que $n_0 = n + 1 \in A$ y que este es el mínimo elemento de A. La afirmación recíproca se propone en el Ejercicio 1.1.8.

Ejercicios

Demostrar los siguientes enunciados empleando alguna forma del principio de inducción matemática.

1.1.1 *a*) Si $n \in \mathbb{N}^+$, entonces $n < 2^n$. Más aún, $n < (3/2)^n$.

b) Si $n \geq 3$, entonces $2n + 1 \leq 2^n$. Además $n^2 \leq 2^n$, si $n \geq 4$.

1.1.2 Si $n \in \mathbb{N}^+$, entonces

$$\left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}.$$

1.1.3 Determinar desde qué valor de $n \in \mathbb{N}$ las siguientes igualdades son válidas y demostrarlas por inducción:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1},$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

1.1.4 Si $N \in \mathbb{N}^+$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+N}$.

1.1.5 Los *números de Fibonacci* se definen recursivamente por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Comprobar que

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \qquad F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

1.1.6 Demostrar la *fórmula de Binet*

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \geq 0,$$

donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1/\varphi$ son las soluciones de $x^2 = x + 1$. Mostrar además que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n + \psi^n$ siempre es un número entero.

1.1.7 Si X es un conjunto con n elementos, entonces el conjunto de sus partes $\wp(X)$ (el conjunto formado por todos los subconjuntos de X) tiene 2^n elementos.

1.1.8 Muestre que el principio de buena ordenación implica el principio de inducción matemática.

Indicación: Sea P una propiedad tal que $P(0)$ es válida, y si $P(n)$ es válida para algún n, entonces $P(n+1)$ es válida. Defina $A = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ no es válida}\}$, y compruebe que suponer $A \neq \emptyset$ conlleva a una contradicción.

1.2. Conjuntos numerables y no numerables

En esta sección recordamos las nociones de conjuntos finitos, numerables y no numerables. En particular, mostramos que $\mathbb{Q}$ es numerable. Además incluimos el famoso método de la diagonal de Cantor para construir un conjunto no numerable.

La primera aplicación de $\mathbb{N}$ es que este conjunto nos permite contar o numerar los elementos de conjuntos finitos. Más específicamente, consideramos la siguiente definición.

Definición 1.1. Dados dos conjuntos A y B decimos que son *equipotentes* si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$. Con esta terminología decimos además que un conjunto A es:

- *Finito* si es vacío o existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que A es equipotente con $\{1, 2, \ldots, n\}$. El número n se conoce como el cardinal de A y se escribe $n = |A| = \#A$. Si A no es finito, decimos que es *infinito*.
- *Numerable* o *contable* si A es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$. De lo contrario, decimos que A *no es numerable* o *no es contable*.

Siguiendo esta definición, la idea de que un conjunto A sea infinito numerable nos dice que podemos indexar sus elementos a través de $\mathbb{N}$. Dada $f : \mathbb{N} \to A$ biyectiva y escribiendo $f(n) = a_n$, esto significa que

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\},$$

donde cada elemento de la lista solo aparece una vez. Antes de proseguir incluimos la siguiente noción.

Definición 1.2. Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, diremos que una aplicación $x : \mathbb{N} \to X$ es una *sucesión de elementos de X*. Dicha x se suele denotar también por $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a través de la lista que define. En este caso, la lista puede repetir elementos.

La idea del cardinal de un conjunto es una noción intuitivamente clara cuando dicha colección es finita. Determinar el valor exacto se puede hacer mediante técnicas combinatorias y de conteo. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.2.1. Sea S_n el conjunto de aplicaciones biyectivas de $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo. Una tal aplicación f está determinada por los elementos $f(1), f(2), \dots f(n)$. El primer término $f(1)$ puede tomar cualquier valor en $\{1, \dots, n\}$, luego tiene n posibilidades. Al ser f biyectiva, $f(2)$ tomará valores en $\{1, \dots, n\} \setminus \{f(1)\}$, es decir, tiene $n-1$ posibilidades. Prosiguiendo de esta manera, vemos que el total de posibilidades es

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,$$

es decir, $|S_n| = n!$. Este valor se conoce como el *factorial de n*. Por otra parte, el número de formas de elegir k elementos de un conjunto dado de n elementos es

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Este valor se conoce como un *coeficiente binomial* y se suele leer como *n combinado k*. La igualdad anterior se debe a que tanto $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ como $\binom{n}{k}k!$ cuentan el número de formas de posicionar n objetos distintos en una fila formada por k espacios.

Ejemplo 1.2.2. Dado $m \in \mathbb{N}$ y $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{N}$ tales que $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_j$, se define el *coeficiente multinomial*

$$\binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_j}$$

como el número de formas posibles de depositar m objetos en j urnas, de forma que en la primera urna se coloquen k_1 objetos, en la segunda k_2, y así sucesivamente. Note que este proceso se puede realizar primero eligiendo k_1 objetos entre los m posibles y depositándolos en la primera urna. Luego elegir k_2 de los $m - k_1$ restantes y depositarlos en la segunda urna y así sucesivamente. En el último paso quedarán $m - k_1 - \cdots - k_{j-1} = k_j$ objetos que se depositarán en la última urna. Este argumento demuestra que

$$\binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_j} = \binom{m}{k_1}\binom{m-k_1}{k_2}\cdots\binom{m-k_1-k_2-\cdots-k_{j-1}}{k_j} = \frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_j!}.$$

En particular, este cociente siempre es entero.

Para conjuntos que no son finitos la intuición sobre la cantidad de elementos puede fallar. Tenemos los siguientes ejemplos clásicos.

Ejemplo 1.2.3. Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^+$ son equipotentes, por ejemplo, empleando la biyección $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ dada por $f_0(n) = n + 1$. Más generalmente, dado $k_0 \in \mathbb{N}$, la aplicación $f_{k_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, k_0\}$, definida por $f_{k_0}(n) = n + k_0 + 1$ establece una biyección entre estos conjuntos.

Ejemplo 1.2.4. Los conjuntos de números pares e impares

$$2\mathbb{N} := \{0, 2, 4, \dots\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad 2\mathbb{N} + 1 := \{1, 3, 5, \dots\} = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

son contables, propiedad que se obtiene empleando las biyecciones

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N},\ f(n) = 2n, \qquad g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1,\ g(n) = 2n + 1,$$

respectivamente.

Ejemplo 1.2.5. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es numerable como se puede corroborar mediante el siguiente diagrama:

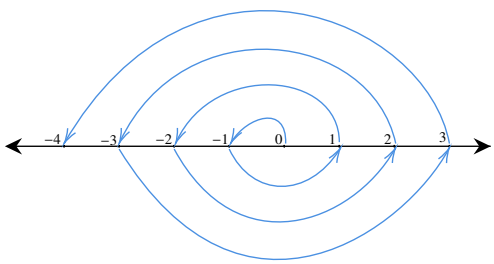

Figura 1.1: Una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

La idea intuitiva es emplear la representación geométrica de $\mathbb{Z}$ y trazar un camino que conecte todos sus puntos en un orden determinado, pasando por cada uno de ellos precisamente una vez. Es posible especificar esta biyección a través de las fórmulas

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = -\frac{n+1}{2}, \text{si } n \text{ es impar, y} \quad f(n) = \frac{n}{2}, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Sin embargo, para ejemplos concretos será suficiente dar un diagrama que evidencie una biyección.

Proposición 1.1. *Sea A un conjunto contable y $E \subseteq A$ infinito. Entonces E es contable.*

Demostración. Enumeremos A a través de una biyección, digamos $A = \{a_0, a_1, \dots\}$. Sea n_1 el mínimo número natural n tal que $a_n \in E$ (que existe por el principio de buena ordenación). Luego, sea n_2 el mínimo número natural n tal que $a_n \in E \setminus \{a_{n_1}\}$. Procediendo de manera inductiva, si $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ han sido definidos, sea n_{k+1} el mínimo número natural n tal que $a_n \in E \setminus \{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\}$. Como E tiene infinitos elementos, $E \setminus \{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\} \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}^+$. Se sigue que la aplicación $f(k) = a_{n_k}$ es una biyección entre $\mathbb{N}$ y E como era requerido. □

Ejemplo 1.2.6. Para demostrar que el conjunto de números primos $\mathcal{P}$ es contable, por la proposición anterior basta demostrar que no es finito. Tal vez la prueba más antigua de este hecho se deba a Euclides y procede por contradicción. Si existieran solo finitos números primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_N$, considere $q = (p_1 p_2 \cdots p_N) + 1 \in \mathbb{N}$ que satisface $q > p_j$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Pero q no es divisible por ningún p_j, de lo contrario, p_j dividiría a $1 = q - (p_1 p_2 \cdots p_N)$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética 1.1, q debería ser divisible por algún número primo, pero hemos visto que esto es imposible. Esta contradicción permite concluir la demostración.

Existe una prueba aún más simple y menos conocida dada en [115] que presentamos a continuación. Sea $n \geq 2$ arbitrario. Como n y $n + 1$ son primos relativos entre sí, el número $N_2 = n(n + 1)$ debe tener al menos dos factores primos. Análogamente N_2 y $N_2 + 1$ son primos relativos entre sí, y por tanto

$$N_3 = N_2(N_2 + 1) = n(n + 1)(n(n + 1) + 1)$$

debe tener al menos tres factores primos distintos. Como este proceso se puede continuar indefinidamente, deben existir infinitos números primos. En conclusión, podemos numerar $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, donde $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots$.

Nota 1.2.1. Existen más demostraciones de la infinitud de $\mathcal{P}$, varias de ellas empleando Análisis Matemático. Una de ellas, debida a Euler consiste en mostrar la divergencia de la serie de los recíprocos

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = +\infty,$$

ver Ejercicios 5.4.7, 8.6.12 y 13.2.4. Si $\mathcal{P}$ fuese finito, dicha serie sería una suma finita y por tanto convergente.

Para unión de conjuntos contables tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ es una sucesión de conjuntos numerables, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable.*

Demostración. Numerando cada conjunto $A_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots\} = \{x_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$, podemos disponerlos en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \ldots \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & \ldots \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

De esta forma podemos numerarlos siguiendo algún camino que pase exactamente una vez por cada uno de ellos. Un ejemplo clásico es

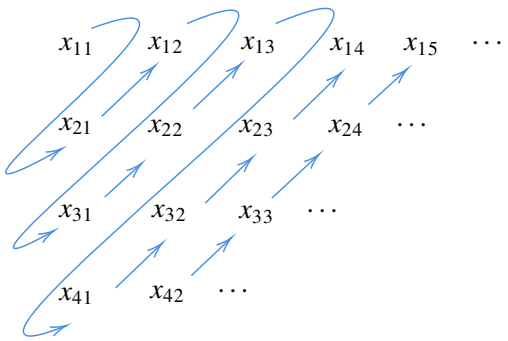

Figura 1.2: El camino de la serpiente.

La fórmula exacta para describirlo, cuando los conjuntos son disjuntos dos a dos, se establece en el Ejercicio 1.2.6. Otra manera posible puede ser la mostrada en la Figura 1.3.

En el caso que los conjuntos no sean disjuntos, los caminos planteados deben omitir los elementos repetidos. Invitamos al lector a proponer otros diagramas que induzcan una biyección entre A y $\mathbb{N}^+$. □

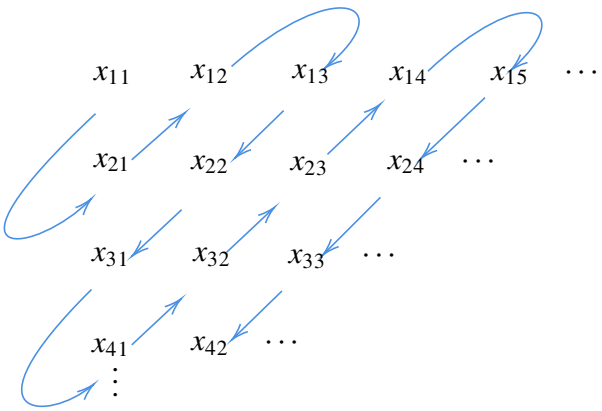

Figura 1.3: Otro camino posible.

Tenemos varias consecuencias interesantes de este resultado.

Corolario 1.1. *Si A es contable, entonces sus productos cartesianos $A^n = A \times \cdots \times A$ (n veces) son contables.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, esta es la hipótesis del enunciado. Ahora, suponiendo que para algún n, A^n es contable, basta observar que

$$A^{n+1} = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times A^n.$$

En efecto, cada $\{a\} \times A^n$ es equipotente a A^n vía la aplicación $(a, x) \in \{a\} \times A^n \mapsto x \in A^n$. Por tanto, estamos expresando a A^{n+1} como unión contable de conjuntos contables. El resultado se sigue de la Proposición 1.2. Finalmente, por el principio de inducción la afirmación es válida para todo $n \geq 1$. □

Ejemplo 1.2.7. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. Para ello consideremos los subconjuntos

$$\mathbb{Q}^+ := \{a/b \in \mathbb{Q} : a/b > 0\}, \qquad \mathbb{Q}^- := \{a/b \in \mathbb{Q} : a/b < 0\},$$

y escriba $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Note que $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{Q}^-$ son equipotentes vía la función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, $f(x) = -x$. Por tanto, basta mostrar que $\mathbb{Q}^+$ es enumerable. Para ello escribimos

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \text{donde } A_k = \{n/k \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Como cada A_k es contable, también lo es $\mathbb{Q}^+$ por la Proposición 1.2.

Concluimos esta sección con el ejemplo cumbre del *método de la diagonal* debido a Georg Cantor. Esta idea nos será útil para demostrar más adelante que los números reales $\mathbb{R}$ no son contables.

Ejemplo 1.2.8 (Un conjunto no contable)**.** Sea

$$E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} := \{x : \mathbb{N} \to \{0, 1\} : x \text{ es una aplicación}\}$$

el conjunto de sucesiones de 0's y 1's. La idea de la demostración es por contradicción suponiendo que es posible listar todos los elementos de E, digamos

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 = & (x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \dots) \\ x_2 = & (x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & \dots) \\ x_3 = & (x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34}, & \dots) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array},$$

donde cada $x_{nk} \in \{0, 1\}$, $n, k \geq 1$. A partir de esta lista construimos la nueva sucesión

$$x^* := (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

definida por las siguientes condiciones: para cada $n \geq 1$, $x_n = 1$ si $x_{nn} = 0$ o $x_n = 0$ si $x_{nn} = 1$. El método consiste en fijarnos en los elementos de la diagonal en el anterior arreglo y elegir cada entrada de x^* de forma que su entrada n-ésima difiera de la entrada n-ésima de x_n. Por tanto, $x^* \neq x_n$, para todo $n \geq 1$. Esto contradice que $x^* \in E$ porque no puede aparecer en dicha lista. En conclusión, E no es contable.

Ejercicios

1.2.1 (El triángulo de Blaise Pascal) Comprobar que para $1 \leq k \leq n$, se verifica que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

1.2.2 Probar que el número de soluciones de la ecuación

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = m,$$

donde $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ es $\binom{m+k-1}{k-1}$. Además, el número de soluciones de la misma ecuación tales que $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}^+$ es $\binom{m-1}{k-1}$.
Indicación: interprete una solución como la elección de $k-1$ casillas de un arreglo horizontal de $m+k-1$ casillas. Para el caso $l_j \geq 1$, restar k a ambos lados de la ecuación y aplicar el caso anterior.

1.2.3 Mostrar que el producto cartesiano $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es un conjunto numerable empleando:

a) Un diagrama de caminos.

b) La aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, $f(m,n) = 2^m(2n+1)$.

c) La aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, $f(m,n) = 2^m 3^n$.

1.2.4 Determine qué conjuntos son finitos, contables o no contables:

a) $\mathbb{Q}^{m\times n}$, el conjunto de matrices de tamaño $m\times n$ con coeficientes racionales.

b) El conjunto $\mathbb{Q}[t] := \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$ de polinomios en la variable t con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

c) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) := \{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$, el *grupo general lineal*, de matrices cuadradas de tamaño n con coeficientes racionales que son invertibles.

d) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}) := \{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$, el *grupo especial lineal* sobre $\mathbb{Q}$.

e) Y^X, el conjunto de aplicaciones de X a Y, donde X y Y son conjuntos finitos no vacíos.

f) El conjunto $\{x : \mathbb{N} \to \{0,1,2\} : x \text{ es una aplicación}\}$.

g) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n$, donde $B_n = \{f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{N} : f \text{ es una aplicación}\}$.

1.2.5 [28] El objetivo de este ejercicio es describir una biyección explícita entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ a través del *árbol de Calkin-Wilf*. Este grafo también se conoce como el *árbol de Stern-Brocot* gracias a trabajos de M. Stern en 1858 y A. Brocot en 1861.

Este grafo tiene como vértice superior a $1/1$. Luego, a partir de cada vértice n/m se crean dos más: a izquierda $n/(n+m)$ y a derecha $(n+m)/m$. Los primeros pasos lucen como sigue:

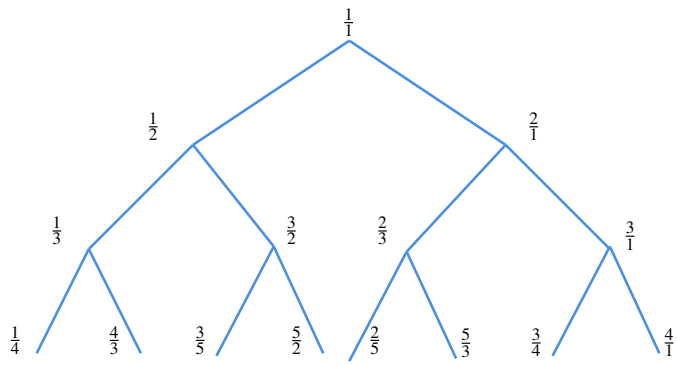

Figura 1.4: El árbol de Calkin-Wilf.

Comprobar las siguientes propiedades de esta construcción:

a) El numerador y denominador de cada vértice son primos relativos entre sí.

b) Cada $n/m \in \mathbb{Q}^+$ aparece en algún vértice.

c) Cada $n/m \in \mathbb{Q}^+$ aparece exactamente una vez como vértice del árbol.

Indicación: (b) por contradicción, si existen elementos de $\mathbb{Q}^+$ que no aparecen como vértices, escoja entre ellos aquellos con denominador mínimo s, y dentro de estos aquel con numerador mínimo r. Considere los casos $r > s$ y $r < s$ para llegar a una contradicción. Aplique un argumento similar para (c).

Ahora, si listamos los racionales en los vértices de izquierda a derecha, pasando por cada fila obtenemos

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, \dots. \tag{1.1}$$

Comprobar que el denominador de una fracción de la lista coincide con el numerador del siguiente término. De esta forma obtenemos la aplicación biyectiva

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto \frac{f(n)}{f(n+1)} \in \mathbb{Q}^+,$$

donde $\{f(n)\}_{n\geq 0} = \{1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, \dots\}$.

Finalmente, analizar el árbol para comprobar que los hijos de $f(n)/f(n+1)$ son $f(2n+1)/f(2n+2)$ y $f(2n+2)/f(2n+3)$. Por las reglas de construcción, concluir que $f(0) = 1$ y

$$f(2n+1) = f(n), \qquad f(2n+2) = f(n) + f(n+1), \qquad n \geq 0.$$

Es posible demostrar que la lista (1.1) se puede generar iterando la función

$$g(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}},$$

empezando con $x = 1$, ver [6, pp. 104-107]. Aquí $\lfloor\cdot\rfloor$ denota la función parte entera y $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$ denota la parte fraccionaria de x, ver Sección 1.4.

1.2.6 $(*)$ La aplicación

$$\pi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \pi(n,k) = \frac{1}{2}(n+k+1)(n+k)+k$$

se conoce como la *función de emparejamiento de Cantor* quien la introdujo en 1877 [29] como ejemplo explícito de una función cuadrática que establece una biyección entre dichos conjuntos. Completar las siguientes indicaciones para demostrar que π es biyectiva.

a) Si $n < n'$, entonces $\pi(n,k) < \pi(n',k)$ y si $k < k'$, entonces $\pi(n,k) < \pi(n,k')$. Emplear esto para mostrar que π es inyectiva.

b) Dado $m \in \mathbb{N}$, para resolver $\pi(n,k) = m$, considere las variables $s = n+k$, $t = \frac{s(s+1)}{2}$ y $m = t+k$. Para $t > 0$, considere la solución $s > 0$ de la ecuación $s^2 + s - 2t = 0$, dada por

$$s = \frac{\sqrt{8t+1}-1}{2},$$

que es una función estrictamente creciente en t. Empleando las desigualdades $t \le m = t+k < t+(s+1) = \frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$, muestre que

$$s \le \frac{\sqrt{8m+1}-1}{2} < s+1, \qquad \text{es decir, } s = \left\lfloor \frac{\sqrt{8m+1}-1}{2} \right\rfloor.$$

Por tanto, para calcular n y k a partir de m basta calcular s como antes y

$$t = \frac{s(s+1)}{2}, \quad k = m-t, \quad n = s-k.$$

Esto demuestra que π es biyectiva.

1.3. Cuerpos y conjuntos ordenados

En esta sección nos ocuparemos de definir las nociones de cuerpos y conjuntos ordenados, así como sus propiedades básicas. Nuestro objetivo será introducir los números reales de manera axiomática a través de las propiedades que exploraremos a continuación.

Definición 1.3. Un *cuerpo* es una tripla $(K,+,\cdot)$ donde $K \neq \emptyset$ es un conjunto con dos operaciones binarias

$$\begin{aligned} + \ &: K\times K \to K, & \cdot \ &: K\times K \to K \\ &(x,y) \mapsto x+y, & &(x,y) \mapsto x\cdot y = xy, \end{aligned}$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

i) **Axiomas para la suma**

- $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in K$.
- $x + y = y + x$, para todo $x, y \in K$.
- Existe un elemento de K, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in K$.
- Para cada $x \in K$ existe un $y \in K$ tal que $x + y = 0$. Este elemento se denota por $-x$ y se llama el *inverso aditivo de x*.

ii) **Axiomas para el producto**

- $(xy)z = x(yz)$, para todo $x, y, z \in K$.
- $xy = yx$, para todo $x, y \in K$.
- Existe un elemento de K, distinto de 0, que denotaremos por 1, tal que $1x = x1 = x$, para todo $x \in K$.
- Para cada $x \in K$ distinto de cero, existe un $y \in K$ tal que $xy = 1$. Este elemento se denota por $1/x$ y se llama el *recíproco de x*.

iii) **Axioma de distributividad**

- $(x + y)z = xz + yz$, para todo $x, y, z \in K$.

Nota 1.3.1. Aunque en nuestro lenguaje es costumbre llamar a una aplicación entre conjuntos $f : A \to B$, como una función, este adjetivo lo emplearemos solo en el caso en que el conjunto de llegada sea un cuerpo.

El ejemplo más familiar de cuerpo es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con su suma y producto usuales. Por otra parte, dado un cuerpo K, considere la función

$$\iota : \mathbb{N} \to K, \qquad \iota(n) = n \cdot 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}.$$

En general, esta función no es inyectiva (por ejemplo, en los enteros módulo p con p primo). Cuando lo es, estamos afirmando que K contiene una copia de $\mathbb{N}$, a saber, $\iota(\mathbb{N})$. Para simplificar notación, escribimos simplemente $n = n \cdot 1$. En estas condiciones, vemos que K también contiene una copia de $\mathbb{Z}$, al admitir inversos aditivos. Además, K contiene una copia de $\mathbb{Q}$ porque también contiene los inversos multiplicativos de sus elementos no nulos.

En el contexto de cuerpos son válidas todas manipulaciones algebraicas básicas que estamos acostumbrados a utilizar de manera inconsciente. Entre dichas propiedades básicas destacamos las siguientes.

Ejemplo 1.3.1. Si K es un cuerpo, $x, y \in K$ y $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$. En efecto, si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $1/x, 1/y \in K$. Sin embargo

$$(xy)\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right) = \left(x\frac{1}{x}\right)\left(y\frac{1}{y}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Luego xy tendría recíproco y por tanto $xy \neq 0$.

Ejemplo 1.3.2. Si K es un cuerpo, $x, y, z \in K$, $z \neq 0$ y $xz = yz$, entonces $x = y$. Esto se sigue del ejemplo anterior porque estamos suponiendo que $(x - y)z = 0$ pero $z \neq 0$.

La segunda noción que requerimos es la de conjunto ordenado. Nos restringiremos al caso de órdenes totales, es decir, que cualquier par de elementos se puedan comparar entre sí.

Definición 1.4. Una pareja $(X, <)$ es un *conjunto ordenado* si $X \neq \emptyset$ y $<$ es una relación binaria que satisface:

- (orden total) Si $x, y \in X$, entonces $x < y$, $x = y$ o $y < x$.
- (transitividad) Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$.

Emplearemos también las notaciones usuales $y > x$ si $x < y$; $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$. Análogamente para $y \geq x$.

Ejemplo 1.3.3. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con el orden usual son conjuntos totalmente ordenados. Sin embargo, con otros tipos de orden esta propiedad puede cambiar. Solo por mencionar un ejemplo considere $\mathbb{N}$ con la relación de divisibilidad: $n \mid m$ si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = nk$. Esta relación es transitiva, pero no un orden total. Por ejemplo, los elementos 2 y 3 no son comparables, es decir, ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$ son válidas.

En este contexto adjetivos como máximo, mínimo, cotas superiores e inferiores tienen sentido. Precisamos dichos conceptos en la siguiente definición.

Definición 1.5. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$, distinto de vacío. Si existe $x_0 \in X$ tal que

$$a \leq x_0, \text{ para todo } a \in A,$$

decimos que A está *acotado superiormente* y que x_0 es una *cota superior* de A. Si además $x_0 \in A$ decimos que x_0 es el *máximo* de A.

Al intercambiar $\leq$ por $\geq$, x_0 es una *cota inferior* de A y A se dice *acotado inferiormente*. Si $x_0 \in A$, este se llama el *mínimo* de A.

Las nociones base para el desarrollo del Análisis Matemático sobre los números reales son la de supremo e ínfimo.

Definición 1.6. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$ acotado superiormente. Si el conjunto de cotas superiores de A tiene un mínimo $\alpha \in X$, este se llama el *supremo* de A y lo denotaremos por

$$\alpha = \sup A.$$

De la misma manera, si el conjunto A es acotado inferiormente y su conjunto de cotas inferiores tiene máximo $\beta \in X$, este se conoce como el *ínfimo* de A y se denota por $\beta = \operatorname{ínf} A$.

Nota 1.3.2. Por definición, si existe $\alpha = \sup A$ este satisface que:

1. $a \leq \alpha$, para todo $a \in A$.
2. Si $b < \sup A$, existe $a \in A$ tal que $b < a \leq \sup A$. De lo contrario, b sería una cota superior de A menor que su supremo.

Condiciones similares son válidas para el ínfimo de un conjunto.

Definición 1.7 (Axioma del supremo)**.** Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Si todo subconjunto $\emptyset \neq A \subseteq X$ que es acotado superiormente posee supremo en X, decimos que $(X, <)$ tiene *la propiedad del supremo* o que satisface el *axioma de completitud*.

De la misma forma se puede plantear el axioma del ínfimo, pero de hecho ambos son equivalentes, como lo demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Si $(X, <)$ satisface el axioma del supremo, entonces todo $B \subseteq X$ acotado inferiormente posee ínfimo. En efecto, si $L = \{a \in X : a \text{ es cota inferior de } B\}$, entonces*

$$\sup L = \text{ínf}\, B.$$

Demostración. Por hipótesis, $L \neq \emptyset$. Además

$$a \leq b, \qquad \text{para todo } a \in L,\ b \in B. \tag{1.2}$$

Luego todo elemento de B es cota superior de L. Por hipótesis, como L resulta ser acotado superiormente, entonces $\alpha = \sup L \in X$ existe. Como α es la mínima cota superior de L, por (1.2) concluimos que

$$\alpha \leq b, \qquad \text{para todo } b \in B.$$

Por tanto, α es cota inferior de B. Para terminar, observe que por definición de L, si $\alpha < \beta$, entonces β no puede ser una cota inferior de B, es decir, $\beta \notin L$. En otras palabras, esto significa que si $\beta \in L$, entonces $\beta \leq \alpha$. Por definición de ínfimo, concluimos que $\alpha = \text{ínf}\, B$. □

Ejemplo 1.3.4. El conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente porque dado $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $n < n + 1$.

El conjunto $E = \{1/n \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}^+\}$ en $\mathbb{Q}$ es acotado superiormente y $\sup E = 1$. Por otra parte, es acotado inferiormente por 0. Además, si $a/b \in \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{N}^+$, y tomamos $N \in \mathbb{N}$ con $b/a < N$, entonces $0 < 1/N < a/b$ y por tanto ningún racional positivo es cota inferior de E. En conclusión, $\text{ínf}\, E = 0$.

La estructura que se obtiene al fundir la noción de cuerpo con la de orden es la de cuerpo ordenado. En este caso las reglas básicas de manipulación de desigualdades son la base de la siguiente definición.

Definición 1.8. Un *cuerpo ordenado* es una cuádrupla $(K, +, \cdot, <)$ donde $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, $(K, <)$ es un conjunto ordenado y además

- Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$, para todo $z \in K$.
- Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$.

Entre las propiedades generales de desigualdades destacamos las siguientes.

Proposición 1.4. *Sea $(K, +, \cdot, <)$ un cuerpo ordenado. Entonces:*

1. *Si $x > 0$, entonces $-x < 0$.*
2. *Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.*
3. *Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.*
4. *Si $x > 0$, entonces $1/x > 0$.*
5. *Si $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.*

Demostración. Para (3) destacamos dos casos. Si $x > 0$, por (2) tenemos que $x^2 = x \cdot x > 0$. Si $x < 0$, por (1) $-x > 0$ y por tanto $x^2 = (-x)(-x) > 0$. Para (4), si por el contrario $1/x < 0$, por el segundo axioma de la definición anterior tendríamos $1 = (1/x)x < 0$, que es absurdo. Finalmente, si $0 < x < y$, por (4) $1/x, 1/y > 0$ y por (2), $1/(xy) > 0$. Así multiplicando la desigualdad $0 < x < y$ por $1/(xy)$ se obtiene el resultado. □

Ejercicios

1.3.1 (Sumas geométricas finitas) Si $a \neq 1$ es un elemento de un cuerpo K, entonces

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$
$$1 + 2a + 3a^2 + \cdots + na^{n-1} = \frac{1 - a^n(n + 1 - na)}{(1 - a)^2}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+.$$

1.3.2 (Teorema del Binomio) Mostrar que para elementos x e y en un cuerpo K y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1.3.3 (Teorema multinomial) Si $x_1, x_2, \ldots, x_j \in K$ son elementos de un cuerpo, entonces

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_j)^m = \sum_{l_1 + l_2 + \cdots + l_j = m} \binom{m}{l_1, l_2, \ldots, l_j} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_j^{l_j}.$$

donde la suma se toma sobre todas las posibles soluciones $l_1, \ldots, l_j \in \mathbb{N}$ de $l_1 + l_2 + \cdots + l_j = m$. Indicación: inducción en j.

1.3.4 Sea K un cuerpo ordenado y asuma que cada $x \in K$ con $x > 0$ tiene una raíz cuadrada, es decir, existe $\xi \in K$ con $\xi > 0$ tal que $\xi^2 = x$ (se denotará $\xi = \sqrt{x}$). Mostrar que dicha raíz es única. Demostrar además que si $x, y \in K$ y $x \geq y$, entonces

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{2}}.$$

Por ejemplo, comprobar que $\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

1.3.5 El orden de Sharkovsky $\lhd$ sobre $\mathbb{N}^+$ está definido por

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd \cdots \lhd 2^2{\cdot}7 \lhd 2^2{\cdot}5 \lhd 2^2{\cdot}3 \lhd \cdots \lhd 2{\cdot}7 \lhd 2{\cdot}5 \lhd 2{\cdot}3 \lhd \cdots \lhd 5 \lhd 3.$$

Note que primero se listan los números impares de forma decreciente, luego los impares por dos, luego por 2^2 y así sucesivamente. Esto incluye a todo $\mathbb{N}^+$ salvo por las potencias de 2 que se listan al final.

a) Calcular las cotas inferiores del conjunto de números primos $\mathcal{P}$ en este orden. ¿Tiene mínimo o ínfimo?

b) Determine si $A = \{6^n : n \in \mathbb{N}^+\}$ tiene máximo, mínimo, cotas inferiores e ínfimo en este orden.

c) Comprobar que $l \lhd k$ si y solo si $2l \lhd 2k$.

Nota 1.3.3. Este orden fue descubierto en 1964 por el matemático ucraniano O. Sharkovsky (1936-2022) en relación con los periodos de sistemas dinámicos discretos inducidos por aplicaciones continuas $f : I \to I$, donde I es un intervalo de la recta real. Para más información y una demostración de este resultado, ver [26].

1.3.6 Considere la función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por

$$f(p) = p - \frac{p^2-2}{p+2}.$$

Mostrar que si $p^2 < 2$, entonces $p < f(p)$ y $f(p)^2 < 2$. De la misma forma, si $p^2 > 2$, entonces $f(p) < p$ y $f(p)^2 > 2$. Concluir que

a) $A = \left\{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\right\}$ es acotado superiormente y no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

b) $B = \left\{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 > 2\right\}$, aunque acotado inferiormente, no tiene ínfimo en $\mathbb{Q}$.

1.3.7 Argumentar por qué un cuerpo finito K no puede ser un cuerpo ordenado. Por ejemplo, los enteros módulo p, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p primo.

1.3.8 Un subconjunto $P \subset K$ de un cuerpo K es un *cono positivo* si satisface que:

- Es cerrado para la suma y para el producto, es decir, si $x, y \in P$, entonces $x + y, xy \in P$,
- $P \cap (-P) = \emptyset$, donde $-P = \{-x \in K : x \in P\}$,
- $K = P \cup \{0\} \cup (-P)$.

Demostrar que K es un cuerpo ordenado si y solo si existe un cono positivo $P \subset K$. Indicación: $P = \{x \in K : x > 0\}$ o $x > y$ si $x - y \in P$.

1.3.9 Dado un cuerpo K, denotaremos por

$$K[t] := \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in K\}$$

al *anillo de polinomios* en la variable t con coeficientes en K. Con las operaciones usuales de suma y producto este conjunto falla en ser un cuerpo a falta de recíprocos. Sin embargo, es posible construir el *cuerpo de funciones racionales en una variable t*, con coeficientes en K. Este cuerpo se denota por $K(t)$ y se identifica con

$$K(t) := \{p(t)/q(t) \ : \ p, q \text{ son polinomios con coeficietes en } K \text{ y } q \neq 0\}.$$

Comprobar que $K(t)$ es un cuerpo con las operaciones usuales. Además, para el caso $K = \mathbb{Q}$, comprobar que

$$P := \{p(t)/q(t) \in \mathbb{Q}(t) : \text{el coeficiente del mayor grado de } p(t)q(t) \text{ es positivo}\}$$

es un cono positivo en el sentido del Ejercicio 1.3.8.

1.4. Los números reales

El punto de partida de este curso es el siguiente teorema que admitimos sin demostración.

Teorema 1.2. *Existe un único cuerpo ordenado y completo* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Existen varias construcciones de $\mathbb{R}$, por ejemplo a través de las cortaduras de R. Dedekind [113, Appendix] o como el completado $\mathbb{Q}$ con su distancia usual.

Este teorema enuncia la existencia del cuerpo de los números reales como el único cuerpo ordenado y que además satisface la propiedad del supremo (Definición 1.7). A lo largo de la sección veremos algunas de las consecuencias fundamentales de este axioma.

Los elementos de $\mathbb{R}$ se conocen como *números reales*. Como discutimos en la sección anterior, $\mathbb{R}$ contiene a una copia de $\mathbb{Q}$. Por simplicidad escribimos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ los llamaremos *números irracionales*. De forma gráfica, al ser $\mathbb{R}$ totalmente ordenado podemos representarlo como una recta donde una vez señalado el punto 0 y a su derecha el punto 1, todos los demás elementos de $\mathbb{Q}$ se pueden

ubicar sobre la recta empleando argumentos geométricos elementales. Los puntos de la recta que no son racionales representarán entonces a los números irracionales.

La recta real $\mathbb{R}$ es el espacio natural donde habitan constantes famosas definidas a través de procesos del Análisis (límites, series, integrales) tales como

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &:= \sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\} \approx 1.414213,\\
e &:= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281 \text{ (número de Euler)},\\
\pi &:= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx 3.1415926 \text{ (pi)},\\
\zeta(3) &:= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx 1.2020569 \text{ (constante de Apéry)},\\
\varpi &:= 2\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{2\sqrt{2\pi}} \approx 2.622057 \text{ (constante de la lemniscata)},\\
\gamma &:= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0.57721 \text{ (constante de Euler-Mascheroni)},\\
G &:= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \approx 0.915965 \text{ (constante de Catalan)}.
\end{aligned}$$

De manera intuitiva al interpretar los números reales como expansiones decimales infinitas, ver Proyecto 10.1, el axioma del supremo garantiza que valores como

$$\sqrt{2} = \sup\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \dots\},$$

existan en $\mathbb{R}$.

Nota 1.4.1. Un problema importante en Teoría de Números es determinar si un número real es irracional o no. El Análisis Matemático es una herramienta para tal fin, sobretodo con números definidos a través de sus procesos fundamentales. En el Capítulo 5 (Teorema 5.4) veremos que e es irracional. También lo son π y $\zeta(3)$, ver el Proyecto 10.1. La irracionalidad (y trascendencia) de ϖ también es conocida y fue obtenida por T. Schneider en 1937, ver [132]. Estudiaremos esta constante en el Ejercicio 14.2.5 del Proyecto 14.2. Sin embargo, es un problema abierto determinar la irracionalidad de γ y G. Para una recopilación de constantes relevantes el lector puede consultar el libro [52].

A lo largo del texto emplearemos la notación habitual para intervalos:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}.
\end{aligned}$$

De la misma forma consideraremos los intervalos $[a, b), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$. En particular, escribiremos

$$\mathbb{R}^+ := (0, +\infty), \qquad \mathbb{R}^- := (-\infty, 0).$$

En general, decimos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un *intervalo* si dados $x, y \in I$, para todo z tal que $x < z < y$ se cumple que $z \in I$.

La primera consecuencia fundamental, que recupera el Ejemplo 1.3.4 en $\mathbb{R}$, es la llamada propiedad arquimediana.

Teorema 1.3 (Propiedad arquimediana)**.** *Si $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx > y$.*

Demostración. Basta demostrar que el conjunto

$$A = \{mx \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{N}\}$$

no es acotado superiormente. En efecto, si lo fuese, entonces y no sería cota superior de A, de donde se sigue la existencia de dicho n.

Si suponemos que A es acotado superiormente, por el axioma del supremo existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$, entonces $\alpha - x < \alpha$. Recordando la Nota 1.3.2 (2), existe $mx \in A$ tal que $\alpha - x < mx \leq \alpha$. Luego $\alpha < (m+1)x$, pero $(m+1)x \in A$, contradiciendo que α era dicho supremo. En conclusión, A no puede ser acotado superiormente. □

Nota 1.4.2. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, la propiedad arquimediana implica que el conjunto

$$\{m \in \mathbb{N} : y < mx\}$$

es no vacío, y por el principio de buena ordenación, este conjunto debe tener un mínimo n. Por tanto,

$$(n-1)x \leq y < nx.$$

Esto muestra que dicho natural dado por el teorema anterior se puede tomar de forma óptima.

Note que tomando $x = 1$ en la demostración anterior, vemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente. Es inmediato comprobar también que $\inf E = 0$, donde $E = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. De hecho, estas afirmaciones son equivalentes entre si, ver Ejercicio 1.4.5.

Ejemplo 1.4.1. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}$ (independientes de ϵ). Entonces:

1. Si $0 \leq x < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, entonces $x = 0$. De lo contrario, $x > 0$ y por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $0 < 1/n < x$, en contradicción con la hipótesis (para $\epsilon = 1/n$).

2. Si $x \leq y + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, entonces $x \leq y$. De lo contrario, $y < x$ y por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $0 < 1/n < x - y$, es decir, $y + 1/n < x$, contradiciendo la hipótesis.

3. Si $x + \epsilon \leq y$, para todo $\epsilon > 0$, entonces $x \leq y$.

Antes de proseguir con más consecuencias del axioma del supremo necesitamos una herramienta, la llamada función *parte entera*. Dado $r \in \mathbb{R}^+$, consideremos los intervalos disjuntos $[nr, (n+1)r)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. La Nota 1.4.2 implica que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nr, (n+1)r).$$

En particular, si $r = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \leq x < n + 1. \qquad \text{Este se denotará por } \lfloor x \rfloor := n.$$

Este valor se conoce como la parte entera de x. Note además que $\lfloor x \rfloor = x$ si y solo si $x \in \mathbb{Z}$. En algunas ocasiones también usaremos la función *parte fraccionaria* de x, denotada por $\{x\}$ y definida como

$$\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1), \qquad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

La gráfica de la función parte entera se ilustra en la Figura 1.5. Invitamos al lector a esbozar la gráfica de la función parte fraccionaria.

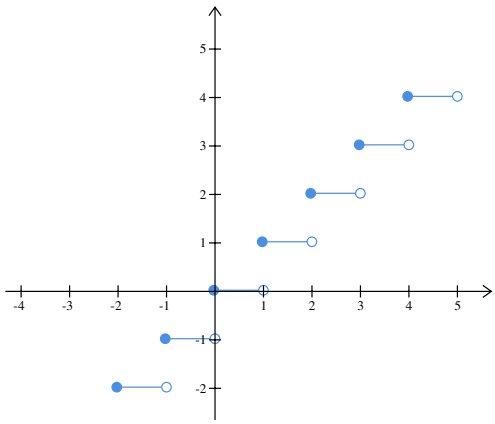

Figura 1.5: La función parte entera $\lfloor \cdot \rfloor$.

Teorema 1.4 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.*

Demostración. Como $y - x > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}^+$ con $(y - x)n > 1$. Así

$$nx < nx + 1 < ny. \tag{1.3}$$

Sean $m = \lfloor nx + 1 \rfloor \in \mathbb{Z}$ y $q = m/n$. Veamos que q satisface las desigualdades requeridas. Por su definición, $m \leq nx+1 < m+1$ y por tanto $nx < m$, es decir, $x < q$. Además, por la segunda desigualdad en (1.3), $m \leq nx + 1 < ny$, así $m < ny$ y $q < y$. □

Teorema 1.5 (Existencia de raíces)**.** *Para todo número real $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}^+$, existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$. Este valor se denota por $y = x^{1/n}$.*

Demostración. La unicidad se sigue de la desigualdad $0 < y_1^n < y_2^n$, válida siempre que $0 < y_1 < y_2$ (aplicar inducción en n para demostrarla). Para demostrar la existencia considere el conjunto

$$E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^n < x\}.$$

El valor y buscado será precisamente $\sup E$. Para ver que este elemento existe debemos comprobar que:

1. E no es vacío. Considere $s = \frac{x}{x+1}$ que satisface $0 < s < 1$. Por tanto
$$s^n < \cdots < s^2 < s < x, \text{ es decir, } s \in E.$$

2. E está acotado superiormente. Si $k \geq x + 1 > 1$, entonces $k^n > \cdots > k^2 > k > x + 1 > x$, y por tanto $k \notin E$. En otras palabras, $E \subseteq [0, x + 1)$ y así es acotado.

Por el axioma del supremo, $y = \sup E$ existe. Veamos ahora que $y^n = x$ descartando los demás casos:

1. Si $y^n < x$, entonces existe $0 < h_0 < 1$ tal que $(y + h_0)^n < x$, que contradice la naturaleza de supremo de y porque $y + h_0 \in E$ pero $y + h_0 > y$. En efecto, empleando la desigualdad (1.5) del Ejercicio 1.4.6 vemos que para todo $0 < h < 1$,
$$(y + h)^n - y^n < nh(y + h)^{n-1} < nh(y + 1)^{n-1},$$
y además
$$nh(y + 1)^{n-1} < x - y^n \quad \text{ si y solo si } \quad 0 < h < \frac{x - y^n}{n(y + 1)^{n-1}}.$$
Es suficiente tomar h_0 con esta restricción para concluir que $(y + h_0)^{n-1} - y^n < x - y^n$, esto es, $(y + h_0)^n < x$, como requeríamos.

2. Si $y^n > x$, considere el número $k_0 = (y^n - x)/ny^{n-1}$ que satisface $0 < k_0 < y$. Veamos que esto implica que $y - k_0$ es cota superior de E, hecho que contradeciría que y es dicho supremo. Para ello, si $t \geq y - k_0$, por la desigualdad (1.5) vemos que
$$y^n - t^n \leq y^n - (y - k_0)^n \leq nk_0y^{n-1} = y^n - x, \quad \text{ es decir } x \leq t^n.$$
La forma contrarecíproca de esta afirmación indica que si $t^n < x$, entonces $t < y - k_0$, demostrando lo requerido.

□

Nota 1.4.3. Aunque es posible definir también a^x para $a, x > 0$ a través de supremos, esperaremos a estudiar esta operación en el Capítulo 8, Ejemplo 8.6.2 como aplicación del logaritmo natural definido como una integral. Mientras tanto, se asumirán las propiedades básicas de operaciones con exponentes cuando sea necesario.

Ejemplo 1.4.2. [19] La raíz $\sqrt{2}$ es un número real. Veamos que no es racional. De lo contrario, escriba $\sqrt{2} = a/b$ con $a, b \in \mathbb{N}^+$ mínimos satisfaciendo esta relación. Además, como $a^2 = 2b^2$, esto implica que también

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b}.$$

De la desigualdad $1 < \sqrt{2} < 2$ vemos que $b < a < 2b$, y por tanto $0 < 2b - a < a$ y $0 < a - b < b$ contradiciendo la minimalidad de a y b.

Terminamos esta sección recordando la función *valor absoluto* y algunas de sus propiedades. El valor absoluto de un número real a se define como

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0 \qquad |a| = -a, \text{ si } a < 0.$$

En otras palabras, $|a| := \text{máx}\{a, -a\}$. En particular, $|\pm a| = |a|$ y también $\pm a \leq |a|$. A partir de aquí es fácil comprobar que para $b > 0$,

$$|x| \leq b \quad \text{ si y solo si } \quad -b \leq x \leq b. \tag{1.4}$$

Una aplicación sencilla de esta condición está dada por la siguiente desigualdad fundamental.

Proposición 1.5 (Desigualdad triangular)**.** $|x + y| \leq |x| + |y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, basta con sumar estas desigualdades y aplicar (1.4). □

Ejemplo 1.4.3 (Desigualdad triangular invertida)**.** Otra forma útil de la desigualdad anterior es

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \qquad \text{válida para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Para demostrarla, note que por desigualdad triangular, $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ y por tanto $|x| - |y| \leq |x - y|$. Intercambiando los papeles de x e y concluimos la desigualdad restante.

Ejercicios

1.4.1 [21] Si $n, k > 1$ son enteros tales que n no es la potencia k-ésima de un entero, entonces $n^{1/k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Indicación: Si $n^{1/k} \in \mathbb{Q}$, mostrar que $b = \min A$ existe, donde $A = \{l \in \mathbb{N}^+ : ln^{j/k} \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k-1\}$. Si $m = \lfloor n^{1/k} \rfloor$, sea $c = bn^{1/k} - bm$. Comprobar que $c \in \mathbb{N}^+$, $c < b$ y $c \in A$. Esto contradice la minimalidad de b.

1.4.2 *a*) Sea $r \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demostrar que $r + x, r \cdot x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Además $x^{1/n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $n \in \mathbb{N}^+$.

b) ¿Existen números irracionales x, y tales que $x^y \in \mathbb{Q}$? Indicación: La solución usual es $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (la *constante de Gelfond–Schneider*) que se sabe que es irracional. ¿Quién debería ser y?

c) Considere ahora $x = \log_{10}(4)$ e $y = \sqrt{10}$. Mostrar que son irracionales y calcular x^y.

Para más información sobre este problema ver la Proposición 10.2, Proyecto 10.1

1.4.3 Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Determinar condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ para que $\frac{ax+b}{cx+d}$ sea irracional.

1.4.4 Encontrar el sup e ínf de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < x + 1\}$. *b*) $\{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$.

1.4.5 Comprobar que las siguientes afirmaciones son equivalentes entre si: a) el enunciado de la propiedad arquimediana, b) $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente, c) $\inf\{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\} = 0$.

1.4.6 Factorizando la expresión dada, demostrar que para números reales $0 < a < b$ y $n \in \mathbb{N}^+$, es válida la desigualdad

$$b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}. \tag{1.5}$$

1.4.7 (Desigualdad de Bernoulli) Demostrar que

$$(1+a)^n > 1 + na, \qquad \text{para un número real } a > -1, a \neq 0 \text{ y } n \geq 2 \text{ entero.}$$

¿Qué pasa si $a = 0$ ó $n = 1$?

1.4.8 Sean $a_0, b_0, a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ y $\epsilon > 0$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $0 < a < b$, entonces $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

b) $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|b-a|}{2}$ y $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|b-a|}{2}$.

c) Si

$$|a - a_0| < \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{2(|b_0| + 1)}, 1\right\}, \quad y \quad |b - b_0| < \frac{\epsilon}{2(|a_0| + 1)},$$

entonces $|a \cdot b - a_0 \cdot b_0| < \epsilon$.

d) [15] Si

$$0 < |a - a_0| < \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{n(1 + |a|)^n}, 1\right\}.$$

entonces $|a^n - a_0^n| < \epsilon$.

e) Si $b_0 \neq 0$ y $|b - b_0| < \text{mín}\left\{\frac{|b_0|}{2}, \frac{\epsilon|b_0|^2}{2}\right\}$, entonces $\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_0}\right| < \epsilon$.

1.4.9 *a*) Sean $b_1, \ldots, b_n, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$. Si $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n \in [a, b]$, demostrar que

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \in [a, b], \quad \text{y} \quad \frac{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n}{t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n} \in [a, b].$$

b) Mostrar que

$$\text{mín}_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{b_j} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \leq \text{máx}_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{b_j}.$$

c) Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio de grado n, con los $a_j > 0$. Si $0 < x < y$, demostrar que $(x/y)^n \leq p(x)/p(y) \leq 1$.

1.4.10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces:

a) $\text{mín}\{a, b\} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq \text{máx}\{a, b\}$.

b) Si $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq b$, entonces $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ si y solo si $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \mathbb{Q}$.

c) (Densidad de los números irracionales) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$.

1.4.11 Comprobar las siguientes propiedades de la función parte entera, válidas para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, si $m \in \mathbb{Z}$.

b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

1.4.12 Demostrar que

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Indicación: basta hacerlo para $0 \leq x < 1$. Luego considere cada caso $\frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n}$, con $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

1.5. El principio de intervalos encajados

Esta sección incluye algunas propiedades del supremo e ínfimo así como la demostración de que toda cadena decreciente de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ tiene intersección no vacía. Como aplicación mostraremos que $\mathbb{R}$ no es contable.

Teorema 1.6 (Principio de intervalos encajados)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un intervalo $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ con $a_n < b_n$. Suponga que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Demostración. Considere los conjuntos

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\}, \qquad B = \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\}$$

de extremos inferiores y superiores de los intervalos dados. La hipótesis sobre las contenencias de los intervalos equivale a que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Estas desigualdades implican que $a_j \leq b_k$, para todo $j, k \in \mathbb{N}$, es decir, A está acotado superiormente por cada elemento de B. Por el axioma de completitud existen $a = \sup A$ y $b = \inf B$. Además

$$a \leq b_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ y por tanto} \quad a \leq b.$$

Finalmente, como $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, para todo n, concluimos que $[a, b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. □

Corolario 1.2. $\mathbb{R}$ *es no numerable.*

Demostración. Si $\mathbb{R}$ fuese numerable sería posible escribir $\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Fije un intervalo cerrado y acotado I_1 tal que $r_1 \notin I_1$ y a partir de él construya un intervalo cerrado y acotado I_2 tal que $I_2 \subseteq I_1$ y $r_2 \notin I_2$. Procediendo por inducción, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ hallamos un intervalo cerrado y acotado $I_n \subseteq I_{n-1}$ tal que $r_n \notin I_n$. Por el principio de los intervalos encajados, existe $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Pero $c \neq r_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Esto contradice que todos los números reales estaban en la lista inicial. Así, $\mathbb{R}$ no puede ser numerable. □

Señalamos que una demostración alternativa del corolario anterior se puede lograr empleando la expansión decimal de los números reales y el método de la diagonal de Cantor. Note que como $(0, 1)$ es equipotente con $\mathbb{R}$, ver Ejercicio 1.5.2, basta con trabajar con este intervalo.

Terminamos esta sección con algunas propiedades extra del supremo y el ínfimo que serán útiles en el estudio de la integral de Riemann, Capítulo 8.

Proposición 1.6. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos acotados. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Si $A + B := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A, y \in B\}$, entonces $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.*

2. *Si $A' \subseteq A$ y para cada $a \in A$ existe $a' \in A'$ con $a \leq a'$, entonces $\sup A = \sup A'$.*

3. *Si $B' \subseteq B$ y para cada $b \in B$ existe $b' \in B'$ con $b' \leq b$, entonces $\inf B = \inf B'$.*

Demostración. (1) Sean $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Entonces para todo $a \in A$, $b \in B$ tenemos que $a + b \leq \alpha + \beta$. Por tanto, $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$. Por otra parte, $a + b \leq \sup(A + B)$, así que fijado b, $a \leq \sup(A + B) - b$, es decir $\sup(A + B) - b$ es cota superior de A y así $\alpha \leq \sup(A + B) - b$. Entonces $b \leq \sup(A + B) - \alpha$, para todo $b \in B$ de donde concluimos que $\beta \leq \sup(A + B) - \alpha$, es decir $\alpha + \beta \leq \sup(A + B)$. De ambas desigualdades se concluye la igualdad requerida. El caso del ínfimo se demuestra de la misma forma.

(2) Como $A' \subseteq A$, entonces $\sup(A') \leq \sup(A)$. Ahora, si $a \in A$, por hipótesis $a \leq a' \leq \sup(A')$, para algún $a' \in A'$. Por tanto, $\sup(A')$ es cota superior de A y así $\sup(A) \leq \sup(A')$ de donde se concluye la igualdad. (3) se demuestra de la misma forma. □

Ejercicios

1.5.1 ¿Es válida la propiedad de los intervalos encajados para $I_n = (a_n, b_n)$ o $I_n = [a_n, +\infty)$?

1.5.2 Demostrar que la función

$$\varphi : \mathbb{R} \to (-1, 1), \qquad \text{definida por} \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

es biyectiva. Concluir que $(-1, 1)$ no es contable. Construya una biyección entre $(-1, 1)$ y (a, b), donde $a < b$, para concluir que (a, b) no es contable. Misma pregunta para $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$.

1.5.3 Mostrar que $(0, 1)$ y $(0, 1]$ son equipotentes empleando los siguientes métodos:

a) Escoja un conjunto contable $\{a_1, a_2, \dots\} \subset (0, 1)$ y use la función $f : (0, 1) \to (0, 1]$ que envía $\{a_1, a_2, \dots\}$ en $\{1, a_1, a_2, \dots\}$ y los demás puntos los deja fijos.

b) [144] Escriba $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ y $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ y considere la función biyectiva (lineal) más simple $f_n : \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ dada por

$f_n(x) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - x$. Compruebe que estas funciones se pueden escribir bajo una sola fórmula dada por

$$f : (0, 1] \to (0, 1), \qquad f(x) = \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor + 1} + \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} - x,$$

y que f es biyectiva. El hecho sorprendente de este resultado es que exista una fórmula cerrada para esta biyección.

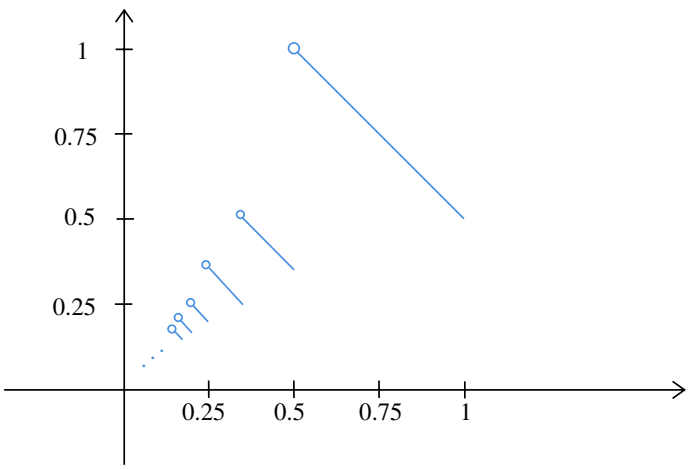

Figura 1.6: Una biyección explícita entre $(0, 1]$ y $(0, 1)$.

Emplear el ejercicio anterior para concluir que cualquier intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ (que no se reduzca a un punto) es un conjunto no numerable.

1.5.4 Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice *algebraico* si existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ tales que $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$. Denotemos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números reales algebraicos.

a) Comprobar que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$. Además, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{A}$, donde p es primo y $n \in \mathbb{N}^+$.

b) Demostrar que $\mathbb{A}$ es contable. Indicación: si z_0 es algebraico, sea $h(z_0)$ el mínimo de los enteros $n + \sum_{j=0}^{n} |a_j|$, tomado sobre todas las ecuaciones $[a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0]$ de las que z_0 es solución. Mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$, la ecuación $h(x) = k$ tiene solo un número finito de soluciones.

c) Concluir que existen números reales que no son algebraicos. Tales números se denominan *trascendentes*. Concluir también que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ no es contable. Para ejemplos explícitos de números trascendentes ver el Ejemplo 10.1.1, Proyecto 10.1.

1.5.5 (∗) [56] Es posible demostrar que $\mathbb{A}$ es un cuerpo con las operaciones de $\mathbb{R}$. Además F. von Lindermann demostró en 1882 que $\pi \notin \mathbb{A}$. Empleando estas

observaciones se puede demostrar directamente que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ no es contable. Para ello considere la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{si } \pi + x \notin \mathbb{A}, \\ \pi - x, & \text{si } \pi + x \in \mathbb{A}. \end{cases}$$

Demostrar que f está bien definida. Además es inyectiva: si $f(x) = f(y)$, entonces

$$x = |f(x) - \pi| = |f(y) - \pi| = y.$$

Por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ contiene un conjunto no contable, concluyendo así el resultado. Para una demostración de la trascendencia de π el lector puede consultar [62].

1.5.6 Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Mostrar que $c = \sup C$ si y solo si c es cota superior de C y para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in C$ tal que $c - \epsilon < x$. Formular y demostrar la afirmación análoga para el caso del ínfimo.

1.5.7 Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ acotado inferiormente. Si $-A := \{-a \in \mathbb{R} : a \in A\}$, comprobar que

$$\text{ínf}\, A = -\sup(-A).$$

1.5.8 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos acotados superiormente. Entonces

a) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}$.

b) Si $A \subseteq B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.

Formular y demostrar enunciados similares para el caso del ínfimo.

1.5.9 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos acotados superiormente. Se definen los conjuntos

$$A \cdot B := \{a \cdot b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}, \qquad r \cdot A := \{r\} \cdot A = \{ra \in \mathbb{R} : a \in A\}.$$

Si $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A, B \subseteq [0, +\infty)$, entonces $\sup(A \cdot B) = \alpha \cdot \beta$.

b) Si $r \geq 0$, entonces $\sup(r \cdot A) = r\alpha$.

Formular y demostrar enunciados análogos para el inf y para $r \leq 0$.

1.5.10 Considere dos subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos.

a) Si $x \leq y$, para todo $x \in A$ e $y \in B$, entonces $\sup A \leq \text{ínf}\, B$.

b) Suponiendo *a*), mostrar que $\sup A = \text{ínf}\, B$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $y - x < \epsilon$.

Capítulo 2

Espacios métricos y espacios normados

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos de espacio métrico y espacio vectorial normado como modelos abstractos donde es posible trabajar con la noción de distancia. Esto incluye como casos particulares a los números reales y más generalmente al espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$. Estudiaremos las definiciones de conjuntos abiertos y cerrados, las operaciones de interior y clausura así como las nociones de puntos interiores y de acumulación. Estas herramientas sentarán las bases para estudiar en capítulos posteriores el concepto de límite, pilar fundamental del Cálculo.

2.1. Métricas y normas

Los espacios métricos son aquellos donde existe una noción de distancia, es decir, podemos medir o cuantificar cuando un par de puntos están cerca o lejos. La manera de axiomatizar este concepto se explica a continuación.

Definición 2.1. Un espacio métrico es una pareja (X, d), donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función —llamada *métrica* o distancia— que satisface las siguientes propiedades:

- (Positividad) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.
- (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

La tercera propiedad abstrae la condición, de la geometría euclidiana, de poder construir un triángulo a partir de tres segmentos dados.

Ejemplo 2.1.1 (Métrica discreta)**.** Todo conjunto $X \neq \emptyset$ se puede dotar de estructura de espacio métrico a través de la función

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{si} \quad x = y, \end{cases}$$

conocida como la *métrica discreta*.

Ejemplo 2.1.2 (Métrica usual de $\mathbb{R}$)**.** El valor absoluto en $\mathbb{R}$ permite de manera natural definir la distancia entre puntos de la recta real a través de la fórmula

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Las propiedades discutidas al final de la Sección 1.4, en particular la Proposición 1.5, implican que d es una función de distancia.

Una clase fundamental de espacios métricos, muy empleados en Análisis, son los llamados espacios de Banach, en honor al matemático polaco Stefan Banach. En este punto del curso introducimos su estructura base, generalizando las propiedades del valor absoluto en $\mathbb{R}$ a normas sobre espacios vectoriales.

Definición 2.2 (Espacios vectoriales normados)**.** Sea E un espacio vectorial real. Una norma sobre E es una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades:

- (Positividad) $\|v\| \geq 0$, y $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$.
- (Homogeneidad) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \, \|v\|$, para todo $v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (Desigualdad triangular) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, para todo $v, w \in E$.

En este caso la pareja $(E, \|\cdot\|)$ se conoce como un *espacio vectorial normado*. Note que la homogeneidad y la desigualdad triangular expresan la compatibilidad de la norma con las operaciones de producto por escalar y suma en E, respectivamente.

Todo espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$ también es un espacio métrico porque toda norma induce una métrica a través de la función

$$d_{\|\cdot\|}(v, w) = \|v - w\|, \qquad v, w \in E. \tag{2.1}$$

Es inmediato comprobar que esta función es en efecto una métrica a partir de las propiedades de la Definición 2.2.

Ejemplo 2.1.3 (El espacio euclídeo)**.** Para cada entero $d \geq 1$ consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^d$ cuyos puntos serán denotados por d-tuplas

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d),$$

donde las operaciones son las usuales, operando por componentes.

Este espacio está dotado del producto interno (o producto punto) dado por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d).$$

Esta aplicación es bilineal, simétrica (es decir $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$) y está definida positivamente, esto es, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$. Además este valor es nulo si y solo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$. Este producto induce la *norma euclídea* dada por

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

El espacio normado $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ será llamado el *espacio euclídeo*. La razón de su nombre es que esta norma mide la distancia clásica de un punto al origen, vía el Teorema de Pitágoras. Es claro que esta aplicación es positiva y homogénea. Como es habitual, la demostración de la desigualdad triangular representa una mayor dificultad. En este caso, esta es una consecuencia de la famosa desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.2) que demostraremos en un momento. A partir de ella vemos que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + 2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + 2 |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 = (\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2)^2,
\end{aligned}$$

y así la norma euclídea satisface la desigualdad triangular. La forma general de estos resultados se puede consultar en el Proyecto 14.1.

Proposición 2.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *El producto interno de $\mathbb{R}^d$ satisface que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|_2, \quad \textit{para todo } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

La igualdad se tiene si y solo si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son linealmente dependientes, es decir, uno es múltiplo escalar del otro.

Demostración. Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, el resultado es claro. Ahora, si asumimos que $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ y note que

$$0 \leq \|\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \alpha^2 \|\boldsymbol{y}\|_2^2. \tag{2.3}$$

El término de la derecha es un polinomio cuadrático en α que alcanza su mínimo en $\alpha_0 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle / \|\boldsymbol{y}\|_2^2$. Así, (2.2) se sigue de evaluar (2.3) en α_0. Finalmente, si en (2.2) se tiene la igualdad, también se tendría en (2.3) de donde $\boldsymbol{x} - \alpha_0 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. □

Finalizamos esta sección con una familia de normas sobre $\mathbb{R}^d$ que incluyen de manera natural a la euclídea. Para la demostración de la desigualdad triangular emplearemos una herramienta que será justificada en el Proyecto 12.1 sobre funciones convexas y diferenciabilidad.

Ejemplo 2.1.4 (Las normas $\|\cdot\|_p$)**.** Sea $p \geq 1$. La p-norma en $\mathbb{R}^d$ se define por la fórmula

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad \text{para } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Note que para $p = 2$ esta norma corresponde al caso euclídeo. El caso límite $p = +\infty$ también tiene sentido, ver el Ejercicio 2.1.5, y está dado por

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \operatorname*{máx}_{1 \leq j \leq d} |x_j|.$$

La desigualdad triangular para los casos $p = 1$ y $p = +\infty$ es fácil de demostrar y la omitimos. Para los demás valores, la desigualdad correspondiente lleva su nombre en honor al matemático alemán Hermann Minkowski (1864-1909).

Proposición 2.2 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Dados $p \geq 1$ y $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, d$, se tiene que*

$$\left(\sum_{j=1}^{d} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{d} |y_j|^p\right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

Demostración. Considere $p > 1$ y la función $h(t) = t^p$. Como $h''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ para $t > 0$, vemos que la función es convexa, es decir,

$$h(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda h(t) + (1-\lambda)h(s), \qquad \text{para todo } t, s > 0, \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{2.5}$$

Considere $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ y sean $A = \|\boldsymbol{x}\|_p$, $B = \|\boldsymbol{y}\|_p$. Como (2.4) es válida si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ó $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, basta considerar el caso en que $A > 0$ y $B > 0$. Si ponemos

$$t = \frac{|x_j|}{A}, \quad s = \frac{|y_j|}{B}, \quad \lambda = \frac{A}{A+B}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

en la desigualdad (2.5), y luego sumamos las d desigualdades obtenidas llegamos a

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(|x_j| + |y_j|)^p}{(A+B)^p} \leq \sum_{j=1}^{d} \frac{A}{A+B} \frac{|x_j|^p}{A^p} + \sum_{j=1}^{d} \frac{B}{A+B} \frac{|y_j|^p}{B^p} = 1.$$

A partir de aquí y de la desigualdad $|x_j + y_j|^p \leq (|x_j| + |y_j|)^p$, podemos concluir (2.4). □

Ejercicios

2.1.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$, para todo $x, y, z, w \in X$.

b) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

2.1.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Imitando el Ejemplo 1.4.3, demostrar que

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v - w\|, \qquad \text{para todo } v, w \in E.$$

2.1.3 Sea d una métrica sobre X, $p \in X$ y $r, M > 0$ fijos. Demostrar que las siguientes aplicaciones también son métricas sobre X:

a) $d''(x, y) = \text{mín}\{M, d(x, y)\}$.

b) $d_r(x, y) = r \cdot d(x, y)$.

c) $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

d) $d_p(x, y) = d(x, p) + d(p, y)$ si $x \neq y$, y $d_p(x, x) = 0$.

2.1.4 Sea E un espacio vectorial real con una métrica d. Demostrar que d proviene de una norma si y solo si satisface

a) (Homogeneidad) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$, para todo $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) (Invarianza por traslaciones) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, para todo $x, y, z \in E$.

¿La métrica $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ sobre $\mathbb{R}$ proviene de una norma?

2.1.5 Sea $p \geq 1$. Demostrar que la p-norma en $\mathbb{R}^d$ satisface

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \leq d^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

En particular, de aquí se deduce que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Para desigualdades que relacionen los valores $\|\boldsymbol{x}\|_p$ para distintos p, ver el Ejercicio 8.6.1.

2.1.6 Para $0 < p < 1$ también es posible definir $\|\boldsymbol{x}\|_p := (\sum_{j=1}^d |x_j|^p)^{1/p}$, para $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. En este caso, demostrar que la desigualdad triangular no es válida, pero si la desigualdad invertida

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \geq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p.$$

Indicación: imite la prueba de la desigualdad de Minkowski, pero usando ahora que la función $h(t) = t^p$ es cóncava hacia abajo.

2.1.7 Sea (X, d) un espacio métrico, $Y \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y $f : Y \to X$ una aplicación inyectiva. Demostrar que (Y, d_f) es un espacio métrico, donde

$$d_f(y_0, y_1) := d(f(y_0), f(y_1)).$$

Por ejemplo, $d_\varphi(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ define una métrica sobre $\mathbb{R}$, ver Ejercicio 1.5.2.

2.1.8 $(*)$ Sea (X_n, d_n) un espacio métrico, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Demostrar que:

a) Para cada $p \geq 1$ y $n \in \mathbb{N}^+$, el producto cartesiano $\prod_{j=1}^n X_j = X_1 \times \cdots \times X_n$ es un espacio métrico con cada una de las funciones

$$d^p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{j=1}^n d_j(x_j, y_j)^p\right)^{1/p}, \qquad d^\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \leq j \leq n} d_j(x_j, y_j),$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{j=1}^n X_j$.

b) (Requiere series, ver Capítulo 5) Considere el conjunto $X = \prod_{n=1}^\infty X_n = \{\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} : x_n \in X_n, \text{ para } n \geq 1\}$. Mostrar que la función

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

define una métrica sobre X.

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Introduciremos aquí dos nociones topológicas básicas para subconjuntos de espacios métricos: los conjuntos abiertos y sus complementos, los conjuntos cerrados. Discutiremos sus propiedades básicas así como algunos ejemplos.

Sea (X, d) un espacio métrico. Dado $x_0 \in X$ y $r > 0$, definimos

$$B_d(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \tag{2.6}$$

como la *bola abierta con centro en x_0 y radio r*. Insistimos en la notación donde el subíndice d indica la métrica que estamos empleando. Para el caso de espacios normados $(E, \|\cdot\|)$ escribiremos simplemente $B_{\|\cdot\|}(x_0, r)$. De la misma forma, definimos la *bola cerrada con centro en x_0 y radio r* por

$$\overline{B}_d(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Ejemplo 2.2.1. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ las bolas abiertas coinciden con los intervalos abiertos porque

$$B_{|\cdot|}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Recíprocamente (a, b) es la bola con centro $(b + a)/2$ y radio $(b - a)/2$.

Ejemplo 2.2.2. Para la métrica discreta (X, d_D) las bolas abiertas se reducen a dos conjuntos:

$$B_{d_D}(x_0, r) = \{x_0\}, \text{ si } 0 < r \leq 1, \quad \text{y} \quad B_{d_D}(x_0, r) = X, \text{ si } r > 1.$$

Esto se debe a que d_D solo asume los valores 0 y 1.

Ejemplo 2.2.3. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ las bolas abiertas corresponden a nuestra intuición de bolas como discos ($d = 2$) e interiores de esferas sólidas ($d = 3$). Sin embargo, si cambiamos esta norma por $\|\cdot\|_p$, para $1 \leq p \leq +\infty$ las bolas van a cambiar de apariencia. Por ejemplo, para $d = \infty$, obtenemos

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0), 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ y } |x_2| < 1\},$$

es decir, la bola es el interior de un cuadrado. Para otros valores de p obtenemos las gráficas de la Figura 2.1, donde se indican solos los bordes en cada caso. El lector no tendrá problema en identificar cada caso según el valor de p.

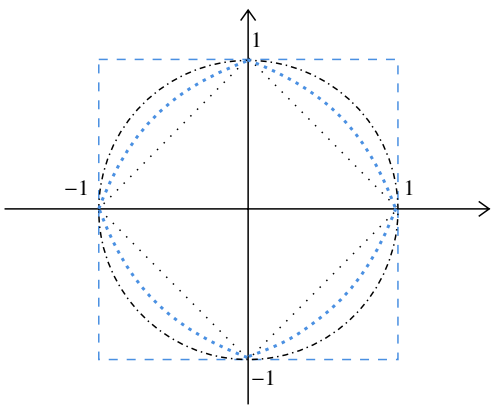

Figura 2.1: El borde de la bola $B_{\|\cdot\|_p}((0,0), 1)$ para $p = 1, \frac{3}{2}, 2$ y $p = \infty$.

En general, en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ la bola cerrada $\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{a}, r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times \cdots \times [a_d - r, a_d + r]$ con centro en $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ es un ejemplo de una *d-celda*. Por definición una d-celda es el producto cartesiano de intervalos cerrados, es decir,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Nota 2.2.1. En todo espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$ las bolas abiertas son *conjuntos convexos*. Recordemos que $C \subseteq E$ es convexo si

$$\text{dados } v, w \in C \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \text{entonces } \lambda w + (1 - \lambda)v \in C.$$

Geométricamente $\{\lambda w + (1 - \lambda)v \in E : \lambda \in [0, 1]\}$ representa el segmento de recta que une a v con w.

Para comprobar que $B_{\|\cdot\|}(v_0, r)$ es convexo tome $v, w \in B_{\|\cdot\|}(v_0, r)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(\lambda w + (1-\lambda)v, v_0) =& \|\lambda w + (1-\lambda)v - v_0\| \\ =& \|\lambda(w - v_0) + (1-\lambda)(v - v_0)\| \\ \leq& \lambda\|w - v_0\| + (1-\lambda)\|v - v_0\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, como era requerido. Otra propiedad interesante es que las bolas $B = B_{\|\cdot\|}(0, r)$ centradas en $0 \in E$ satisfacen $-B = B$, donde $-B := \{-v \in E : v \in B\}$. En efecto, $\|v\| < 1$ si y solo si $\|-v\| < 1$. Se suele decir que B es *simétrico respecto a* 0. Para normas en $\mathbb{R}^d$ que realicen una forma predeterminada con estas propiedades como bola unitaria cerrada, ver el Ejercicio 2.3.10.

Definición 2.3 (Conjuntos abiertos)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que

- Un conjunto $U \subseteq X$ es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r = r(x) > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq U$. Si U es abierto y $x_0 \in U$ se dice que U es una *vecindad* de x_0.
- Un conjunto $C \subseteq X$ es *cerrado* si su complemento $X \setminus C$ es abierto.

Note que por definición estas son nociones complementarias: $A \subseteq X$ es abierto si y solo si $X \setminus A$ es cerrado.

Antes de dar algunos ejemplos incluimos las siguientes propiedades básicas de estos conjuntos. Cabe recalcar que la siguiente proposición es el punto de partida para definir la noción más general de espacio topológico. Aunque no estudiaremos estos espacios en este libro, insistimos en que todas las nociones que se puedan definir en términos de conjuntos abiertos o cerrados, más no en términos de métricas, se pueden extender al contexto de espacios topológicos.

Proposición 2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces*

1. *$\emptyset$ y X son abiertos.*
2. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos abiertos, entonces la unión $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es abierta.*
3. *Si $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos, entonces la intersección $\bigcap_{j=1}^n U_j$ es abierta.*

De la misma forma, tenemos que

1. *$\emptyset$ y X son cerrados.*
2. *Si $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces la intersección $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es cerrada.*
3. *Si $C_1, \ldots, C_n$ son conjuntos cerrados, entonces la unión $\bigcup_{j=1}^n C_j$ es cerrada.*

Demostración. Demostramos solo las afirmaciones sobre conjuntos abiertos, dado que los enunciados sobre conjuntos cerrados son equivalentes a estas vía tomar complementos y las leyes de De Morgan.

Para (2) sea $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Luego $x \in U_\beta$ para algún $\beta \in I$. Al ser U_β abierto, existe $r_\beta > 0$ tal que $B_d(x, r_\beta) \subseteq U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, y así esta unión es abierta. Para (3), si $x \in \bigcap_{j=1}^n U_j$ y cada U_j es abierto, existe $r_j > 0$ con $B_d(x, r_j) \subseteq U_j$, $j = 1, \ldots, n$. Si tomamos $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}$, es inmediato verificar que $B_d(x, r) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j$. Por tanto, esta intersección es abierta. □

Presentamos ahora algunos ejemplos para clarificar estas nociones.

Ejemplo 2.2.4 (Las bolas abiertas son conjuntos abiertos)**.** En cualquier espacio métrico (X, d) los conjuntos $B_d(x_0, r)$ son abiertos. En efecto, si $x \in B_d(x_0, r)$, tome $0 < \rho \leq r - d(x, x_0)$. Entonces, si $y \in X$ satisface $d(y, x) < \rho$, por la desigualdad triangular, vemos que

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) < r.$$

Así comprobamos que $B_d(y, \rho) \subseteq B_d(x_0, r)$.

Ejemplo 2.2.5. En un espacio con la métrica discreta (X, d_D), todo conjunto es abierto y cerrado a la vez. En efecto, si $A \subseteq X$, como

$$A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$$

y cada $\{a\} = B_{d_D}(a, 1)$ es abierto, entonces A es abierto. Otro ejemplo de esta situación es $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ con el valor absoluto usual. En este espacio tenemos que

$$B_{|\cdot|}(n, 1) = \{m \in \mathbb{Z} : |m - n| < 1\} = \{n\}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

y por tanto los conjuntos de un elemento son bolas abiertas.

Ejemplo 2.2.6. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ por los Ejemplos 2.2.1 y 2.2.4 los intervalos (a, b) son conjuntos abiertos. Por otra parte $(a, +\infty)$ y $(-\infty, a)$ son abiertos al ser unión de abiertos, por ejemplo

$$(a, +\infty) = \bigcup_{b>a} (a, b) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}, k>a} (a, k) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a, a + j).$$

Ahora, los intervalos cerrados $[a, b]$ son conjuntos cerrados porque $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ son abiertos. Si $a = b$, vemos los conjuntos puntuales $\{a\}$ también son cerrados. Los intervalos $(a, b]$ no son ni abiertos ni cerrados. Finalmente, a partir de la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Teorema 1.4 y Ejercicio 1.4.10, vemos que $\mathbb{Q}$ ni es abierto ni es cerrado.

Las condiciones sobre intersecciones finitas de abiertos y uniones arbitrarias de cerrados en la Proposición 2.3 son necesarias, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.7. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ considere los intervalos abiertos $U_n = (-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} U_n$, esto significa que $|x| < 1/n$, para todo $n \geq 1$, que a su vez implica que $x = 0$. Por tanto,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} U_n = \{0\},$$

que no es abierto. De la misma forma, si $C_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ para $n \geq 2$, se sigue que

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} C_n = (0, 1) \quad \text{no es cerrado.}$$

En este punto podemos señalar que cada conjunto abierto $U \subseteq X$ en un espacio métrico (X, d) es, por definición, la unión de bolas abiertas. Esto se debe a que

$$U = \bigcup_{x\in U} B_d(x, r(x)), \tag{2.7}$$

donde $r(x) > 0$ es como en la Definición 2.3.

Ejemplo 2.2.8 (Abiertos en subespacios)**.** Si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subseteq X$, entonces Y adquiere de manera natural estructura de espacio métrico restringiendo d a $Y \times Y$. Denotaremos este espacio por (Y, d_Y). En este caso las bolas en Y se obtienen a partir de la igualdad

$$B_{d_Y}(y_0, r) = B_d(y_0, r) \cap Y.$$

Esta propiedad junto con la igualdad (2.7) demuestra que un conjunto $V \subseteq Y$ es abierto en (Y, d_Y) si y solo si

$$V = U \cap Y, \qquad \text{donde } U \subseteq X \text{ es abierto en } (X, d).$$

De hecho ya hemos visto esta situación en el Ejemplo 2.2.5 con $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Otro ejemplo es el semiplano superior cerrado $\overline{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. El conjunto $A = \{(x, y) \in \overline{H} : x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto en $\overline{H}$ porque $A = B_{\|\cdot\|_2}((0, 0), 1) \cap \overline{H}$, pero no lo es como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, ver Figura 2.2.

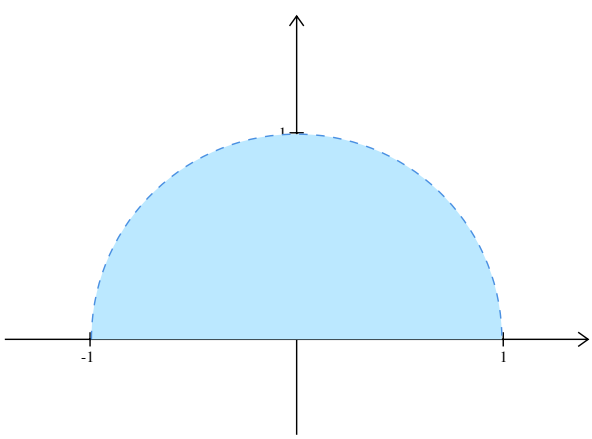

Figura 2.2: Un semicírculo como conjunto abierto en el semiplano superior.

Finalmente, en el caso de un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$ estas afirmaciones son aplicables a cualquier subconjunto $E_0 \subseteq E$. Sin embargo, $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ solo será un espacio vectorial normado si E_0 es un subespacio vectorial de E.

Ejercicios

2.2.1 Mostrar que en un espacio métrico (X, d), si $U \subseteq X$ es abierto y $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $U \setminus F$ es abierto y $F \setminus U$ es cerrado.

2.2.2 Comprobar a partir de las definiciones, las siguientes afirmaciones sobre subconjuntos del espacio euclídeo:

a) $H_d = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ es abierto.

b) $\overline{H_d} = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d \geq 0\}$ es cerrado.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < 1/x\}$ es abierto.

d) $[0, 1] \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ no es abierto.

2.2.3 Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}_d(x_0, r)$ en efecto es un conjunto cerrado de X. Además, para espacios vectoriales normados $(E, \|\cdot\|)$, estos conjuntos son convexos. Si $x_0 = 0$, también son simétricos respecto a $0 \in E$.

2.2.4 Comprobar que toda d-celda $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ en $\mathbb{R}^d$ es convexa.

2.2.5 *a*) Mostrar que la función

$$\|(x, y)\|_{hex} = \text{máx}\left\{|x|, |y| + \frac{|x|}{2}\right\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^2$. Graficar la bola $B_{\|\cdot\|_{hex}}((0, 0), 1)$.

b) Grafique las bolas $B_{\|\cdot\|_p}((0, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ para varios valores de $p \in (0, 1)$. ¿Son conjuntos convexos?

2.2.6 Mostrar que si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ o $B \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto en el espacio euclídeo, lo mismo es válido para $A + B := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}$.

2.2.7 *a*) Sean d_1 y d_2 métricas sobre un conjunto X. Mostrar que si existe $\alpha > 0$ tal que

$$d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y), \qquad \text{para todo } x, y \in X,$$

entonces $B_{d_2}(x_0, r) \subseteq B_{d_1}(x_0, \alpha r)$. Concluir que si U es abierto en (X, d_1), entonces es abierto en (X, d_2).

b) Si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\beta\, d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \alpha d_2(x,y), \qquad \text{para todo } x, y \in X,$$

entonces U es abierto en (X, d_1) si y solo si es abierto en (X, d_2). En este caso decimos que las métricas d_1 y d_2 son *equivalentes*. Para el caso de un espacio vectorial E, dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\beta\, \|v\| \le \|v\|' \le \alpha \|v\|, \qquad \text{para todo } v \in E.$$

c) Aplicar estos resultados y el Ejercicio 2.1.5 para mostrar que un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si lo es respecto a alguna de las normas $\|\cdot\|_p$, con $p \ge 1$.

2.2.8 (∗) Demostrar que cualquier conjunto abierto U de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia contable de intervalos abiertos disjuntos.
Indicación: si $x \in U$, sean $a_x = \inf\{a < x : (a, x) \subseteq U\}$, $b_x = \sup\{x < b : (x, b) \subseteq U\}$ y $I_x = (a_x, b_x)$. Mostrar que $U = \bigcup_{x \in U} I_x$, donde cada dos de estos intervalos, si son distintos, son disjuntos.

2.3. Interior y clausura

A todo subconjunto de un espacio métrico es posible calcularle dos conjuntos asociados: su interior (el abierto más grande contenido en él) y su clausura (el cerrado más pequeño que lo contiene). En esta sección estudiamos estas construcciones y las nociones asociadas de puntos interiores y puntos de acumulación o límite.

Definición 2.4. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que $a \in A$ es un *punto interior* de A si existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $a \in U$ y $U \subseteq A$. El conjunto $\mathrm{Int}(A)$ de puntos interiores de A se conoce como el *interior* de A.

Se sigue de la definición anterior que $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$. Además, por definición de conjunto abierto tenemos que $a \in \mathrm{Int}(A)$ si y solo si existe $r > 0$ tal que $B_d(a, r) \subseteq A$. Además tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si $U \subseteq A$ es abierto, entonces $U \subseteq \mathrm{Int}(A)$. En otras palabras,*

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ es abierto}}} U. \tag{2.8}$$

En particular, A es abierto si y solo si $\mathrm{Int}(A) = A$.

Demostración. La primera afirmación se deduce de la igualdad (2.8). Para demostrarla, note si x pertenece a dicha unión, existe un abierto $V \subseteq A$ con $x \in V$. Así x es punto interior de A. La contenencia restante se justifica de la misma forma.

Para la última afirmación note que $\mathrm{Int}(A)$ es abierto al ser unión de abiertos. Entonces si $A = \mathrm{Int}(A)$, A es abierto. Por otra parte, si A es abierto, A hace parte de la unión (2.8) y así $A = \mathrm{Int}(A)$ como requeríamos. □

Los conjuntos cerrados también admiten caracterizaciones similares.

Definición 2.5. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* (o también *punto límite*) de A si para todo $\epsilon > 0$ tenemos que

$$B_d(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

El conjunto de puntos de acumulación de A se denotará por A' y recibe el nombre de *conjunto derivado* de A.

En esta definición podemos reemplazar las bolas abiertas por conjuntos abiertos $U \subseteq X$ tales que $x \in U$, y requerir que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, para todos estos conjuntos. Otra observación que usaremos sistemáticamente es la siguiente: si (2.9) no es válida y $x \notin A$, entonces $B_d(x, \epsilon) \subseteq X \setminus A$.

Proposición 2.5. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si y solo si $A' \subseteq A$.*

Demostración. Por definición de conjunto cerrado debemos demostrar que $X \setminus A$ es abierto si y solo si $A' \subseteq A$. Primero supongamos que $X \setminus A$ es abierto y sea $x \in A'$. Si fuese válido que $x \in X \setminus A$, al ser abierto existiría $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq X \setminus A$, contradiciendo la condición (2.9) (para $\epsilon = r$). Por tanto $x \in A$.

Recíprocamente, suponga que $A' \subseteq A$. Si $x \in X \setminus A$, entonces $x \notin A'$, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que la condición (2.9) no es válida. Pero $B_d(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ implica que $B_d(x, \epsilon) \subseteq X \setminus A$ porque $x \notin A$. Este razonamiento muestra que todo punto de $X \setminus A$ es un punto interior, es decir, este conjunto es abierto, como debíamos demostrar. □

Definición 2.6. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La *clausura* de A se define como $\overline{A} = A \cup A'$.

La clausura también se puede caracterizar a través de una propiedad sobre sus puntos. En efecto, $x \in \overline{A}$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ tenemos que

$$B_d(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset. \tag{2.10}$$

En efecto, si $x \in A$, la intersección (2.10) contiene a x y por tanto no es vacía, mientras que si $x \in A' \setminus A$, por (2.9), la intersección (2.10) tampoco es vacía.

De esta caracterización es inmediato verificar que

$$\text{si } A \subseteq B, \quad \text{entonces } \overline{A} \subseteq \overline{B}. \tag{2.11}$$

Note además que en general $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$.

Con estas observaciones podemos demostrar las siguientes caracterizaciones de la clausura, análogas a las del interior de un conjunto. En particular, veremos que la clausura de un conjunto es el conjunto cerrado más pequeño que lo contiene.

Proposición 2.6. *Para todo $A \subseteq X$ en un espacio métrico (X, d), se verifica que:*

1. *$\overline{A}$ es cerrado.*
2. *A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$.*
3. $$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ es cerrado}}} F. \tag{2.12}$$

Demostración. (1) Debemos ver que $X \setminus \overline{A}$ es abierto. Si $x \in X \setminus \overline{A} = (X \setminus A) \cap (X \setminus A')$, entonces $x \notin A$ y $x \notin A'$. Por tanto, existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq X \setminus A$. Para concluir basta ver que $B_d(x, r) \subseteq X \setminus A'$ porque así $B_d(x, r) \subseteq (X \setminus A) \cap (X \setminus A')$. Tome entonces $y \in X$ con $d(y, x) < r$. Recordando el Ejemplo 2.2.4, si $0 < \rho \leq r - d(y, x)$ entonces $B_d(y, \rho) \subseteq B_d(x, r) \subseteq X \setminus A$, es decir, $B_d(y, \rho) \cap A = \emptyset$. Por definición de punto límite concluimos que $y \notin A'$.

(2) Si A es cerrado, por la Proposición 2.5, $A' \subseteq A$ y así $\overline{A} = A$. La recíproca se sigue de (1).

(3) Como $A \subseteq \overline{A}$ y por (1), $\overline{A}$ es cerrado, dicha intersección está contenida en $\overline{A}$. Recíprocamente, si $A \subseteq F$ y F es cerrado, por (2.11) obtenemos que $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$, y así $\overline{A}$ está contenido en la intersección requerida. □

Así como las nociones de conjunto abierto y cerrado son complementarias entre si, el interior y la clausura de un conjunto se pueden obtener uno del otro a través de complementos. Más precisamente,

$$\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}, \qquad \overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A). \tag{2.13}$$

Estas afirmaciones se pueden demostrar directamente a partir de las caracterizaciones (2.8) y (2.12). Por ejemplo, para la primera igualdad, note que $U \subseteq A$ es abierto si y solo si $X \setminus A \subseteq X \setminus U = F$ es cerrado. De esta forma podemos reindexar y escribir

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{es abierto}}} U = \bigcup_{\substack{X \setminus A \subseteq F \\ F \text{es cerrado}}} X \setminus F = X \setminus \bigcap_{\substack{X \setminus A \subseteq F \\ F \text{es cerrado}}} F = X \setminus \overline{X \setminus A},$$

donde aplicamos las leyes de De Morgan. La segunda propiedad se demuestra de la misma manera.

Veamos ahora algunos ejemplos de como aplicar estas propiedades.

Ejemplo 2.3.1. En cualquier espacio métrico (X, d) se verifica que

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A) \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$

porque $\mathrm{Int}(A)$ es abierto y $\overline{A}$ es cerrado.

Ejemplo 2.3.2. Si $a \in A'$, entonces cada bola con centro en a contiene infinitos puntos de A. En caso contrario, si existiera $\epsilon > 0$ tal que $B_d(a, \epsilon) \cap (A \setminus \{a\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$, tome $r = \min_{1 \le j \le n} d(a, x_j) > 0$. Esto muestra que $B_d(a, r) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$, contradiciendo que $a \in A'$. En conclusión, si un conjunto tiene puntos límite, entonces debe ser infinito.

Ejemplo 2.3.3. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X y A no tiene puntos límite, entonces A es automáticamente cerrado porque $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset = A$. Esta situación se da por ejemplo cuando A es finito, como lo muestra el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.3.4. En un espacio (X, d_D) con la métrica discreta, como todo subconjunto es abierto y cerrado a la vez, entonces $\mathrm{Int}(A) = A = \overline{A}$ para todo $A \subseteq X$.

Ejemplo 2.3.5 (Conjuntos con un único punto de acumulación)**.** Suponga que en (X, d) existen $x \in X$ y una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ tales que

$$0 < d(x_n, x) \le \frac{1}{n}, \qquad \text{para todo } n \ge 1. \tag{2.14}$$

En este caso $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es un conjunto con infinitos puntos y $E' = \{x\}$. Esta situación la estudiaremos en detalle en el Capítulo 4 cuando precisemos la noción de límite de una sucesión.

Comenzamos por demostrar que E es infinito. Si no lo fuera, como $x \notin E$, tenemos que $\rho = \min\{d(x, x_n) : n \in \mathbb{N}^+\} > 0$. Si $N \in \mathbb{N}^+$ es tal que $1/N < \rho$, la condición (2.14) no sería válida para x_N. Esta contradicción muestra que E debe tener infinitos elementos.

Veamos ahora que $x \in E'$. Dado $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana podemos tomar $N \in \mathbb{N}^+$ con $1/N < \epsilon$. Luego (2.14) muestra que $x_N \in B_d(x, \epsilon) \cap (E \setminus \{x\})$.

Para terminar, mostramos que si $y \neq x$, entonces y no es punto de acumulación de E. En efecto, como $d(x, y) > 0$ podemos elegir $N \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/N < d(x, y)/2$. Si $n \ge N$ la desigualdad triangular muestra que

$$d(y, x_n) \ge d(x, y) - d(x, x_n) > d(x, y) - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} d(x, y).$$

Para encargarnos de los puntos restantes $x_1, \dots, x_{N-1} \in E$ sea $r' = \min\{d(y, x_n)/2 : n = 1, \dots, N-1, x_n \neq y\} > 0$ y $r = \min\{r', d(x, y)/2\} > 0$. Esta elección demuestra que $B_d(y, r) \cap (E \setminus \{y\}) = \emptyset$ y por tanto $y \notin E'$.

En conclusión, E es infinito y E' tiene un único elemento.

Ejemplo 2.3.6. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tenemos que

$$\mathrm{Int}(a,b) = (a,b), \qquad (a,b)' = [a,b], \qquad \overline{(a,b)} = [a,b].$$

Para ello basta con justificar la igualdad intermedia. Si $x \in (a,b)$ tome $\epsilon > 0$ con $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq (a,b)$, de donde la condición (2.9) se verifica y así x es punto límite de este conjunto. Si $x = a$ ó $x = b$ tomando $0 < \epsilon < (b-a)/2$ es claro que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset$, así que los extremos del intervalo también son puntos límite del mismo. De la misma forma se puede justificar que

$$\mathrm{Int}[a,b] = (a,b), \qquad \mathrm{Int}[a,b) = (a,b), \qquad \overline{(a,b]} = [a,b],$$

así como calcular el interior y la clausura de otro tipo de intervalos. Consideremos ahora el conjunto

$$A = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\} \quad \text{que satisface} \quad \mathrm{Int}(A) = \emptyset, \quad A' = \{0\}, \quad \overline{A} = A \cup \{0\}.$$

La igualdad $A' = \{0\}$ es un caso particular del Ejemplo 2.3.5 con $x_n = 1/n$. Siguiendo la misma idea es posible construir un conjunto B con exactamente dos puntos de acumulación, por ejemplo, trasladando A. En efecto,

$$B = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{2 + 1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\}, \quad \text{cumple que } B' = \{0,2\}.$$

Por otra parte, el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ ofrece un ejemplo más interesante donde se tiene que

$$\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \qquad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}, \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Todas estas igualdades se deducen de la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, ningún número real puede ser un punto interior a $\mathbb{Q}$ porque todo intervalo abierto contiene números irracionales y así $\mathbb{Q}$ no contiene intervalos.

En general, se emplea el mismo lenguaje sobre densidad para conjuntos cuya clausura sea todo el espacio.

Definición 2.7 (Conjuntos densos)**.** Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $D \subseteq X$ es *denso en* X si $\overline{D} = X$.

Continuando en el contexto de los números reales tenemos la siguiente propiedad que relaciona la clausura de un conjunto con su supremo o ínfimo.

Proposición 2.7. *Sea $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente (resp. inferiormente). Entonces* $\sup E \in \overline{E}$ *(resp.* $\inf E \in \overline{E}$*).*

Demostración. Establecemos el enunciado para el supremo $y = \sup(E)$. Si $y \in E \subseteq \overline{E}$, hemos terminado. Si $y \notin E$, dado $\epsilon > 0$, el número $y - \epsilon < y$ no puede ser cota superior de E, y por tanto existe $h \in E$ tal que

$$y - \epsilon < h < y. \quad \text{Así } h \in (y-\epsilon, y+\epsilon) \cap E \setminus \{y\},$$

es decir $y \in E'$ como queríamos probar. □

Ejercicios

2.3.1 (Problema de la clausura-complemento de Kuratowski) Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. ¿Cuál es el número máximo de conjuntos distintos que se puede obtener aplicando repetidamente las operaciones de clausura y complemento a A? La respuesta es 14. Este resultado se debe a Kazimierz Kuratowski quien lo demostró en [85] (1922). Encontrar un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que resuelva el problema de Kuratowski.

2.3.2 Construir un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ que tenga exactamente $N \geq 3$ puntos de acumulación. Misma cuestión para una cantidad contable de puntos.

2.3.3 *a*) En un espacio métrico (X, d) considere el conjunto $\overline{B}_d(x_0, r)$ como en el Ejercicio 2.2.3. Demostrar que la clausura de $B_d(x_0, r)$ está contenida en este conjunto. ¿Son iguales?

b) Demostrar que en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$,

$$\overline{B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}_0, r)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_2 \leq r\}.$$

Mostrar la misma afirmación para bolas en espacios normados $(E, \|\cdot\|)$. Indicación: considere puntos de la forma $\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, $0 < \lambda < 1$.

2.3.4 Sea (X, d) un espacio métrico, $E \subseteq X$ y E' su conjunto derivado. Mostrar que E' es cerrado. Además E y $\overline{E}$ tienen los mismos puntos límite. ¿Tienen E y E' los mismos puntos límite?

2.3.5 Sean (X, d) un espacio métrico. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones demostrándolas o dando un contraejemplo.

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$.

c) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cup B)$ e $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$.

d) A e $\mathrm{Int}(A)$ tienen la misma clausura.

e) A y $\overline{A}$ tienen el mismo interior.

f) D es denso en X (es decir $\overline{D} = X$) si y solo si $\mathrm{Int}(X \setminus D) = \emptyset$.

2.3.6 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La *frontera* de A se define por

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Demostrar las siguientes propiedades:

a) $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

b) ∂A es cerrado y $\partial A \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

c) $\partial A = \emptyset$ si y solo si A es abierto y cerrado.

d) $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$.

e) A es abierto si y solo si $\partial A = \overline{A} \setminus A$ si y solo si $\partial A \subseteq X \setminus A$.

f) A es cerrado si y solo si $\partial A \subseteq A$.

2.3.7 Considere los conjuntos de números algebraicos $\mathbb{A}$ y números trascendentes $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, ver el Ejercicio 1.5.4. Comprobar que son ambos densos en $\mathbb{R}$.

2.3.8 Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \subset [0, 1]$ unión contable tal que para cada $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $r \in (a_n, b_n)$. Mostrar que $\overline{A} = [0, 1]$ y $\partial A = [0, 1] \setminus A$. Indicación: recuerde (2.13).

2.3.9 ($*$) Sea $\{0\} \neq G \subseteq \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo, es decir, G es cerrado bajo sumas e inversos aditivos. Demostrar que G es de la forma $G = \mathbb{Z}\cdot\tau = \{n\cdot\tau \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$, para algún $\tau > 0$, o que G es denso en $\mathbb{R}$.
Indicación: Sea $\tau = \text{ínf}(G \cap \mathbb{R}^+) \geq 0$ y analice los posibles casos: $\tau > 0$ y $\tau = 0$.

2.3.10 ($*$) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^d$ cerrado, convexo y simétrico respecto a 0. Suponga que K contiene una bola euclídea centrada en el origen. Bajo estas condiciones defina

$$\|\boldsymbol{x}\|_K := \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda^{-1} \cdot \boldsymbol{x} \in K\},$$

ver Figura 2.3 para un ejemplo particular de K en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_K)$ es un espacio normado para el cual $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\|_K \leq 1\}$. Esta norma se conoce como el *funcional de Minkowski* y resuelve el problema de encontrar una norma en $\mathbb{R}^d$ para la cual K es la bola unitaria cerrada.

Indicación: la simetría de K demuestra que $\|-\boldsymbol{x}\|_B = \|\boldsymbol{x}\|_B$. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ no son cero, entonces $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|_K, \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|_K \in K$. Por convexidad,

$$\boldsymbol{z} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|_K}{\|\boldsymbol{x}\|_K + \|\boldsymbol{y}\|_K}\boldsymbol{x}' + \frac{\|\boldsymbol{y}\|_K}{\|\boldsymbol{x}\|_K + \|\boldsymbol{y}\|_K}\boldsymbol{y}' = (\|\boldsymbol{x}\|_K + \|\boldsymbol{y}\|_K)^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \in K,$$

es decir, $\|\boldsymbol{z}\|_K \leq 1$. ¿Cómo implica esto la desigualdad triangular?

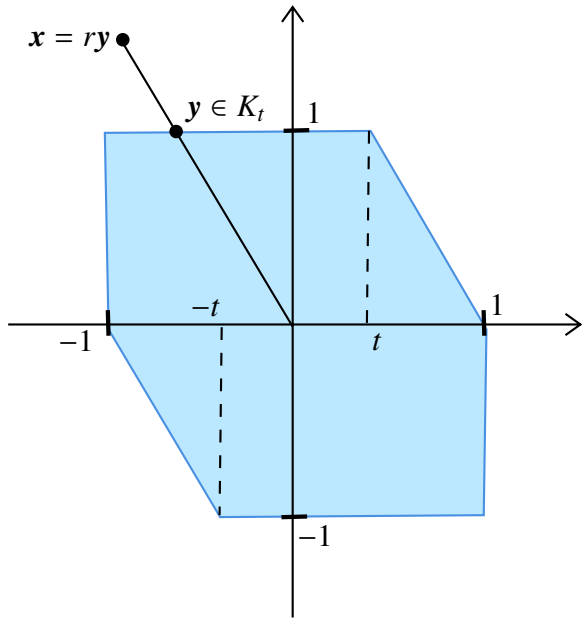

Figura 2.3: K_t es cerrado, convexo y simétrico. Además $0 \leq t \leq 1$ y $\|\boldsymbol{x}\|_K = r$.

Capítulo 3

Compacidad y conexidad

En los cursos de Cálculo existen dos teoremas fundamentales sobre funciones continuas $f : I \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Estos son los *Teorema del valor intermedio* y el *Teorema del valor extremo* (válido para $I = [a, b]$), que serán tratados en el Capítulo 6. El presente capítulo estudia las propiedades intrínsecas del conjunto I que hacen que estos teoremas sean válidos. En el primer caso, I es conexo, mientras que en el segundo caso $I = [a, b]$ es compacto. Estudiaremos las principales propiedades de estas nociones, incluyendo los Teoremas de Cantor, Heine-Borel y Bolzano-Weierstrass. Además, se incluye una breve sección sobre el conjunto de Cantor como ejemplo de un conjunto no vacío, compacto, no numerable y sin puntos aislados.

Es importante recalcar que históricamente la propiedad de compacidad se vislumbra por primera vez con el Teorema de Bolzano de 1817 (todo conjunto infinito en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación) y más adelante con el mismo resultado para conjuntos acotados de $\mathbb{R}^d$, Teorema de Weierstrass 3.1. Luego, M. Fréchet (1906) es quien extrae la esencia de la propiedad de Bolzano-Weierstrass definiendo la noción que hoy en día se conoce como ser *secuencialmente compacto*, ver Proposición 3.4. Sin embargo, la noción moderna empleando cubrimientos por abiertos (1929) emergió de la escuela rusa de Topología liderada por P. Alexandrov y P. Urysohn. Esta es una propiedad en general más fuerte que ser secuencialmente compacto. Afortunadamente, en el caso del espacio euclídeo, todas ellas son equivalentes, Teorema 3.4.

3.1. Conjuntos compactos

Como explicábamos en el Capítulo 2 las nociones que se pueden expresar en términos de conjuntos abiertos, o cerrados, se extienden de manera inmediata a espacios topológicos. Este capítulo será desarrollado desde esta perspectiva donde daremos las definiciones de compacidad y conexidad sin emplear la métrica del espacio, en aras de que el lector se pueda beneficiar de esta abstracción en cursos futuros.

Comenzamos incluyendo la siguiente propiedad de los espacios métricos que en lenguaje topológico, se expresa diciendo que estos espacio son T_2 o de Hausdorff. Como su demostración emplea la métrica, esto no es algo válido en contextos más generales.

Proposición 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x, y \in X$, $x \neq y$, existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos ($U \cap V = \emptyset$) tales que $x \in U$ e $y \in V$.*

Demostración. Si $x \neq y$, entonces $r = d(x, y) > 0$. Tome $U = B_d(x, \rho)$ y $V = B_d(y, \rho)$, con $0 < \rho \leq r/2$. Si estos abiertos se intersecaran existiría $z \in X$ con $d(x, z) < \rho$ y $d(y, z) < \rho$. Pero la desigualdad triangular implica que

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2\rho,$$

contradiciendo la elección de ρ. Así $U \cap V = \emptyset$. □

Otra propiedad de naturaleza métrica es la de ser acotado y por supuesto dependerá también de la métrica que se emplee.

Definición 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $E \subseteq X$ es *acotado* si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$, para todo $x, y \in E$.

Otra forma equivalente de expresar el hecho de ser acotado es requerir que exista una bola $B_d(x_0, r)$ tal que

$$E \subseteq B_d(x_0, r).$$

En efecto, si E es acotado y fijamos algún $x_0 \in E$, entonces para todo $x \in E$, $d(x, x_0) \leq M < 2M$ y por tanto $x \in B_d(x_0, 2M)$. Así $E \subseteq B_d(x_0, 2M)$. Recíprocamente, si $E \subseteq B_d(x_0, r)$, entonces $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2r$, para todo $x, y \in E$ y así es acotado según la definición anterior.

Ejemplo 3.1.1. Un intervalo de la forma (a, b) o $[a, b]$ es acotado en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ mientras que $\mathbb{R}$ no lo es. Sin embargo, si cambiamos de métrica, por ejemplo, $(\mathbb{R}, d')$ donde

$$d'(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|},$$

ver Ejercicio 2.1.3, entonces todo subconjunto de $\mathbb{R}$ sería acotado porque este caso $0 \leq d'(x, y) < 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Una familia de conjuntos $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, es un *cubrimiento por abiertos* para A si cada U_α es abierto en X y $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Note que si $A = X$, esta contenencia es de hecho una igualdad.

Definición 3.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Decimos que K es *compacto* en X si para todo cubrimiento por abiertos $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de K, existen finitos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}.$$

Vale la pena anotar que si X es compacto, este requerimiento nos dice que $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$, porque la unión es un subconjunto de X.

En términos prácticos la definición de compacidad nos dice que todo cubrimiento por abiertos de K posee un subcubrimiento finito. Esta no es una noción intuitiva, pero es muy adecuada para codificar las propiedades intrínsecas que estudiaremos de estos espacios. Para familiarizarnos con ella presentamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.1.2. En cualquier espacio métrico, todo conjunto finito es compacto. Por otra parte, considere un espacio (X, d_D) con la métrica discreta y $K \subseteq X$ un subconjunto compacto. Entonces K debe ser finito. Esto se debe a que, en este caso, $\mathfrak{U} = \{\{x\} : x \in K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K. De la definición anterior vemos que es posible extraer un subcubrimiento finito de $\mathfrak{U}$, es decir, K solo tiene finitos puntos.

Ejemplo 3.1.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Existen dos formas naturales de construir cubrimientos de K:

1. (Todo compacto es acotado) $\mathfrak{U} = \{B_d(x_0, r) : r > 0\}$, donde $x_0 \in X$ es fijo y el radio varía arbitrariamente. Si $x \in K$ y $r > d(x, x_0)$, entonces $x \in B_d(x_0, r)$, y así $\mathfrak{U}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Por compacidad existen $0 < r_1 < \cdots < r_n$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(x_0, r_j) = B_d(x_0, r_n),$$
y así K es siempre acotado.

2. $\mathfrak{U} = \{B_d(x, \epsilon) : x \in K\}$, donde ahora el radio $\epsilon > 0$ es fijo. Por compacidad existen finitos $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(x_j, \epsilon).$$
Por tanto K se puede cubrir por finitas bolas de radio constante.

Ejemplo 3.1.4. Un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ no puede ser compacto en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, para $(-1, 1)$ considere el cubrimiento por abiertos $\mathfrak{U} = \{U_n\}_{n \geq 2}$, donde $U_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$. Como $U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$, ningún subcubrimiento finito de $\mathfrak{U}$ cubre al intervalo porque dados enteros $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ tenemos que $\bigcup_{j=1}^{m} U_{n_j} = U_{n_m} \subsetneq (-1, 1)$.

Nota 3.1.1. En un espacio métrico (X, d), dado $K \subseteq X$ recordemos que (K, d_K) es un espacio métrico en si, Ejemplo 2.2.8. La noción de compacidad de hecho no distingue el espacio ambiente. Esto significa que K es compacto como subconjunto de X si y solo si (K, d_K) es compacto.

Supongamos que K es compacto relativo a X. Para mostrar que el espacio (K, d_k) es compacto, tome un cubrimiento por abiertos $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de K, es decir $K = \bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha$. Como $V_\alpha \subseteq K$ es abierto relativo a K, $V_\alpha = U_\alpha \cap K$, donde $U_\alpha \subseteq X$ es abierto relativo a X. De esta forma vemos que $K \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ y al ser compacto en X, podemos encontrar finitos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in J$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$. Esto implica que $K = \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$ como queríamos demostrar. La recíproca es igual.

Estudiamos a continuación la relación entre conjuntos compactos y cerrados.

Proposición 3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Entonces*

1. *K es un conjunto cerrado.*
2. *Si $F \subseteq K$ es cerrado en X, entonces F es compacto.*
3. *Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto en X.*

Demostración. Para (1) es suficiente ver que $X \setminus K$ es abierto, es decir, que todos sus puntos son interiores. Sea $p \in X \setminus K$. Dado $q \in K$, como $p \neq q$, por la Proposición 3.1, existen abiertos $V_q, W_q \subseteq X$ disjuntos tales que $p \in V_q$ y $q \in W_q$. Por tanto, la familia $\mathfrak{U} = \{W_q\}_{q\in K}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Al ser compacto, existen finitos puntos $q_1, \dots, q_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_{q_j}$. Si consideramos el conjunto $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$, este conjunto es abierto al ser intersección finita de conjuntos abiertos y además $p \in V$. Note además que $V \cap K = \emptyset$, hecho que se deduce de $V_{q_j} \cap W_{q_j} = \emptyset$, para todo j. En conclusión $V \subseteq X \setminus K$ es la vecindad de p requerida.

Para (2), por la Nota 3.1.1 basta demostrar que F es compacto como subconjunto de (K, d_K). Sea $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento de F por abiertos de K. Por hipótesis, $X \setminus F$ es abierto en X, y por tanto $K \setminus F = (X \setminus F) \cap K$ es abierto en K. Así $K = (K \setminus F) \cup \bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha$ y $\mathfrak{V} \cup \{K \setminus F\}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Al ser (K, d_K) compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito, digamos $K = (K\setminus F) \cup \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$. Esto implica que $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ es un subcubrimiento finito de F, y por tanto F es compacto en K. Finalmente, (3) se deduce de (1) y (2). □

Pasamos ahora a revisar la definición de compacidad pero empleando conjuntos cerrados. Supongamos directamente que (X, d) es compacto. Si $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento por abiertos de X, tomando complementos esto significa que los conjuntos cerrados $F_\alpha = X \setminus U_\alpha$ satisfacen $\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha = \emptyset$. Por compacidad existen finitos índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in J$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$, o tomando complementos, $\bigcap_{j=1}^n F_{\alpha_j} = \emptyset$. Entonces, ser compacto significa que dada cualquier familia de conjuntos cerrados $\{F_\alpha\}_{\alpha\in J}$ con intersección vacía, podemos seleccionar de esta, finitos conjuntos con intersección también vacía.

Una forma equivalente de expresar esta implicación es su forma contrarrecíproca: Si $\{F_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia de cerrados de X, tales que

$$\text{si para todo } \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq J, \quad \bigcap_{j=1}^n F_{\alpha_j} \neq \emptyset, \qquad \text{entonces } \bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Una familia de cerrados que satisface la premisa en (3.1) se dice que tiene la *propiedad de intersección finita*. En estos términos hemos demostrado la siguiente afirmación.

Proposición 3.3. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto y $\{F_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia de conjuntos cerrados no vacíos con la propiedad de intersección finita, entonces* $\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \neq \emptyset$.

Teorema 3.1 (Cantor)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos compactos, no vacíos de X. Si $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$, entonces* $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Demostración. El resultado se sigue de la proposición anterior aplicada al espacio $(K_0, d|_{K_0})$. En efecto, la familia de compactos dada está en K_0 y satisface la propiedad de intersección finita: dados enteros $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, por hipótesis $\bigcap_{j=1}^{m} K_{n_j} = K_{n_m} \neq \emptyset$. □

Proposición 3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Si $E \subseteq K$ es un conjunto infinito, entonces E tiene al menos un punto de acumulación en K.*

Demostración. Por contradicción suponga que E no tiene puntos de acumulación en K, es decir, si $q \in K$, entonces $q \notin E'$. Veremos que esta hipótesis implica la existencia de un cubrimiento por abiertos de K que no admite subcubrimientos finitos.

Como $q \in K$ no es punto de acumulación de E, esto significa que existe un abierto $V_q \subseteq X$ tal que $q \in V_q$ pero $V_q \cap (E \setminus \{q\}) = \emptyset$, en otras palabras $V_q \cap E \subseteq \{q\}$. En particular,

$$\text{si } q \in E, \qquad \text{entonces } V_q \cap E = \{q\}. \tag{3.2}$$

Por construcción $\mathfrak{V} = \{V_q\}_{q\in K}$ es un cubrimiento por abiertos de K. Pero la condición (3.2) nos dice que para cubrir a un punto $q_0 \in E$ es necesario emplear el abierto V_{q_0} de $\mathfrak{V}$. Como E es infinito, no es posible prescindir de ningún miembro la familia $\{V_{q_0}\}_{q_0\in E}$ para cubrir a K, hecho que contradice su compacidad. □

Ejercicios

3.1.1 *a*) Sea $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. Demostrar directamente de la definición que K es compacto.

b) Comprobar que la colección de abiertos $\mathfrak{U} = \{(1/2n, 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2}$ cubre $(0, 1/2)$, pero ninguna subcolección finita cumple la misma propiedad.

c) Argumentar por qué la familia de discos con centro en $(r, 0)$ y radio $r > 0$ es un cubrimiento por abiertos del semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

d) Mostrar que la colección de discos con centro (r, r) y radio $r > 0, r \in \mathbb{Q}$, es un cubrimiento por abiertos contable de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$.

3.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que la intersección arbitraria de subconjuntos compactos de X es compacta. Muestre también que la unión finita de conjuntos compactos es compacta.

3.1.3 Trabajando en los espacios euclídeos, determinar por qué ninguno de los siguientes conjuntos es compacto:

a) $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$,

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$.

3.2. El Teorema de Heine-Borel

El siguiente teorema provee los primeros ejemplos no triviales de conjuntos compactos de la recta real, a saber, los intervalos cerrados y acotados. Su demostración se hace a través del método de bisección y emplea el principio de intervalos encajados, Teorema 1.6.

Teorema 3.2 (Borel-Lebesgue)**.** *Todo intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$ *en* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *es compacto.*

Demostración. Por contradicción, si $I_0 = [a, b]$ no fuera compacto existiría un cubrimiento por abiertos $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ que no admite un subcubrimiento finito.

Dividamos a I_0 en los dos intervalos $[a, \frac{b+a}{2}]$ y $[\frac{b+a}{2}, b]$, que también son cerrados y acotados. Por tanto, alguno de ellos no admite un subcubrimiento finito de $\mathfrak{U}$, porque de lo contrario ambos lo harían y $[a, b]$ también. Llamemos a este intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$.

Iterando este proceso podemos construir inductivamente una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$ que satisfacen:

1. $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$,

2. La longitud de I_n es $b_n - a_n = (b - a)/2^n$.

3. I_n no admite un subcubrimiento finito de $\mathfrak{U}$.

Por el Teorema 1.6 de los intervalos encajados, existe $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Como $c \in [a, b]$, existe un índice $\beta \in J$ tal que $c \in U_\beta$, que al ser abierto debe contener un intervalo de la forma $(c - \epsilon/2, c + \epsilon/2)$, para algún $\epsilon > 0$. Si elegimos un entero positivo N con $(b - a)/2^N < \epsilon$, se sigue que $I_N \subset U_\beta$, contradiciendo la condición (3) arriba. □

El mismo resultado es válido en más dimensiones. Trabajando en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, la geometría de una d-celda $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ permite repetir la demostración anterior. En este caso el papel de la longitud lo juega el diámetro de la d-celda,

$$\delta = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_2,$$

que geométricamente corresponde a la máxima longitud que alcanzan un par de puntos dentro de este conjunto, compare con la Definición 4.5 y el Ejercicio 4.3.7. Esta vez la bisección se realiza dividiendo cada intervalo $[a_j, b_j]$ es dos partes iguales, de donde resultarán 2^d d-celdas, cada una con diámetro $\delta/2$. Además, el principio de intervalos encajados se emplea en cada una de las componentes para conseguir un punto en la intersección de todas las d-celdas elegidas. De esta forma obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Toda d-celda $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ es compacta.*

Este teorema abre paso a la famosa caracterización de conjuntos compactos del espacio euclídeo: los conjuntos cerrados y acotados. Cabe recalcar que aunque todo espacio compacto es cerrado y acotado (Proposición 3.2 y Ejemplo 3.1.2), la afirmación recíproca no es cierta en general, como lo muestra la métrica discreta, Ejemplo 3.1.2.

Teorema 3.4 (Heine-Borel)**.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ del espacio euclídeo:*

1. *K es compacto.*
2. *K es cerrado y acotado.*
3. *Cada subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K.*

Demostración. Note que (1) implica (2) y (1) implica (3), son válidas en cualquier espacio métrico, ver las proposiciones 3.2 y 3.4. Para mostrar que (2) implica (1) basta tomar una d-celda $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $K \subseteq \boldsymbol{I}$. Por el Teorema 3.3, $\boldsymbol{I}$ es compacta y por la Proposición 3.2, K también lo es.

Para finalizar demostraremos que (3) implica (2). Si K no fuese acotado, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ podemos encontrar $\boldsymbol{x}_n \in K$ con $\|\boldsymbol{x}_n\|_2 > n$. Entonces el subconjunto $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subseteq K$ es necesariamente infinito. Veamos que E no tiene puntos de acumulación. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, tome $N \in \mathbb{N}$ con $N > \|\boldsymbol{x}\|_2$. Si $m \geq N + 1$, recordando el Ejercicio 2.1.2 vemos que

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}\|_2 \geq \|\boldsymbol{x}_m\|_2 - \|\boldsymbol{x}\|_2 > m - N \geq 1.$$

Si $r' = \text{mín}\{\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}\|_2 : m = 1, \dots, N, \boldsymbol{x}_m \neq \boldsymbol{x}\} > 0$ y $r = \text{mín}\{1, r'\}$ vemos que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}\}) = \emptyset$. Por tanto $E' = \emptyset$ contradiciendo la hipótesis sobre K.

Si K no fuese cerrado, existiría $\boldsymbol{x} \in K' \setminus K$. Empleando la definición de punto de acumulación (para $\epsilon = 1/m$, $m \in \mathbb{N}^+$) existe $\boldsymbol{x}_m \in K$ tal que

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_m\|_2 < \frac{1}{m}.$$

En esta situación el Ejemplo 2.3.5 muestra que el conjunto $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subseteq K$ es infinito y satisface $E' = \{\boldsymbol{x}\}$, contradiciendo nuestra hipótesis. En conclusión, K debe ser cerrado y acotado, lo que termina la demostración. □

Con estas herramientas concluimos de manera inmediata el siguiente resultado, que para el caso $d = 1$ coincide con el Teorema de Bolzano.

Corolario 3.1 (Weierstrass)**.** *Todo subconjunto infinito acotado E en $\mathbb{R}^d$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Tome una d-celda $\boldsymbol{I}$ tal que $E \subseteq \boldsymbol{I}$. Gracias al Teorema 3.3, $\boldsymbol{I}$ es compacto. Por tanto, el resultado se sigue del Teorema de Heine-Borel 3.4. □

Nota 3.2.1. El lector atento se preguntará por qué usamos la norma euclídea y no otra p-norma en las demostraciones anteriores. La respuesta es que las pruebas seguirían siendo válidas. Usar $p = 2$ simplemente corresponde a nuestra intuición geométrica.

Por otra parte, el Ejercicio 2.2.7 demuestra que ser abierto en $\mathbb{R}^d$ no depende de la p-norma empleada. Como la noción de compacidad depende solo de los conjuntos abiertos, vemos que ser compacto en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ es lo mismo que serlo en cualquier $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, con $1 \leq p \leq +\infty$. Más generalmente, el Ejercicio 6.3.12 demuestra que todas las normas sobre $\mathbb{R}^d$ son equivalentes. Por tanto las nociones de abierto, cerrado y compacto tampoco dependen de la norma en $\mathbb{R}^d$.

Ejercicios

3.2.1 Determinar si los siguientes conjuntos son compactos:

a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$.

c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\|_p = 2\}$, $p \geq 1$.

d) La frontera de $A \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado.

3.2.2 Sean $K_1 \subset \mathbb{R}^n$, $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ compactos. Mostrar que $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ es compacto. Si $n = m$, $K_1 + K_2 = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \in K_1, \boldsymbol{y} \in K_2\}$ es compacto.

3.2.3 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$ no contable. Entonces C tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}^d$. Más aún, todos los puntos de C, excepto tal vez un número contable de ellos, son puntos límite de C. Indicación: $C \cap \overline{B_{\|\cdot\|_2}(0, N)}$ debe ser infinito, para algún $N \in \mathbb{N}^+$. Además, si $\boldsymbol{x} \in C \setminus C'$, tome $r_{\boldsymbol{x}} > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r_{\boldsymbol{x}}) \cap C = \{\boldsymbol{x}\}$. Luego elija $q_{\boldsymbol{x}} \in B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r_{\boldsymbol{x}}/2) \cap \mathbb{Q}^d$.

3.2.4 Sea $V_n \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto no vacío tal que $\overline{V_n}$ es acotado, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Demostrar que si $\overline{V_n} \subseteq V_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$.

3.3. Conjuntos conexos

Continuamos este capítulo con la noción de separación y de conexidad. El objetivo de esta sección es demostrar que los conjuntos conexos de la recta real son exactamente los intervalos. Para dimensiones superiores, existe una caracterización de conexidad en el caso de conjuntos abiertos que será tratada en el Ejemplo 6.3.3 del Capítulo 6.

Definición 3.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que dos subconjuntos no vacíos $A, B \subseteq X$ *están separados* si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Además, la pareja (A, B) es una *separación* de un conjunto $C \subseteq X$ si $C = A \cup B$ y A, B están separados.

Un conjunto $C \subseteq X$ es *conexo* si no admite separaciones, es decir, no se puede descomponer como la unión de dos conjuntos no vacíos que estén separados. Un conjunto $C \subseteq X$ es *disconexo* si no es conexo.

Ejemplo 3.3.1. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ los intervalos $A = (-1, 0)$ y $B = (0, 1)$ están separados y por tanto el conjunto $C = (-1, 0) \cup (0, 1)$ no es conexo. Por otra parte, $C = \mathbb{Q}$ tampoco es conexo porque los conjuntos

$$A = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, \qquad B = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q},$$

forman una separación de $\mathbb{Q}$ dado que $\overline{A} = (-\infty, \sqrt{2}]$ y $\overline{B} = [\sqrt{2}, +\infty)$.

Ejemplo 3.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico, $C \subseteq X$ y (A, B) una separación de C. Si $D \subseteq C$ es conexo, entonces $D \subseteq A$ ó $D \subseteq B$.

Podemos demostrar esto por contradicción. De ser falso, existirían $x \in D \cap A$ y $y \in D \cap B$. Considere la pareja $(D \cap A, D \cap B)$, formada así por conjuntos no vacíos. Como $\overline{D \cap A} \cap (D \cap B) \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$, tenemos que $\overline{D \cap A} \cap (D \cap B) = \emptyset$. De la misma forma, $\overline{D \cap B} \cap (D \cap A) = \emptyset$. Por tanto, $(D \cap A, D \cap B)$ sería una separación de D, contradiciendo que D es conexo.

Ejemplo 3.3.3. Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y que existen conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que

$$X = U \cup V.$$

Como $U = X \setminus V$ y $V = X \setminus U$, entonces U y V también son cerrados en X, es decir $\overline{U} = U$ y $\overline{V} = V$. Por tanto (U, V) forma una separación de X y X no puede ser conexo. Recíprocamente, si X no es conexo, existe $U \subseteq X$ no vacío tal que U es abierto y cerrado a la vez. En efecto, por hipótesis existe una separación de X, digamos (U, V). Esta pareja satisface que $X = U \cup V$ y $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$. En particular, $U \cap V = \emptyset$, condición que muestra que $\overline{U} \subseteq X \setminus V = U$ y $\overline{V} \subseteq X \setminus U = V$. Por tanto U y V son cerrados en X y así U es un conjunto no vacío, abierto y cerrado a la vez.

En conclusión, empleando los enunciados contrarecíprocos obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *(X, d) es un espacio métrico conexo si y solo si sus únicos abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y X.*

Ejemplo 3.3.4. El ejemplo anterior se ilustra bien en espacios (X, d_D) con la métrica discreta. Si tomamos $\emptyset \neq U \subseteq X$, sabemos que U es abierto y cerrado a la vez, Ejemplo 2.2.5. Como $X = U \cup (X \setminus U)$, $(U, X \setminus U)$ es una separación de X cuando $U \neq \emptyset$ y $X \setminus U \neq \emptyset$. Así X debe tener al menos dos puntos y en este caso X no es conexo. De esta forma, si (X, d_D) es conexo, entonces X tiene un solo elemento.

Nuestro objetivo aquí es caracterizar los conjuntos conexos de la recta real. Gracias al axioma del supremo, estos conjuntos admiten una representación sencilla.

Teorema 3.5. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo, es decir, para todo $x, y \in E$, si $x < z < y$, entonces $z \in E$.*

Demostración. Vamos a demostrar el siguiente enunciado equivalente: E no es conexo si y solo si existen $x, y \in E$ y $z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z < y$ y $z \notin E$.

Si existen tales elementos, considere los conjuntos

$$A = (-\infty, z) \cap E, \qquad B = (z, +\infty) \cap E.$$

Entonces (A, B) es una separación de E porque los conjuntos son disjuntos, $x \in A$, $y \in B$, y además están separados —note que $\overline{A} \subseteq (-\infty, z]$ y $\overline{B} \subseteq [z, +\infty)$—.

Recíprocamente, asuma que E no es conexo y que (A, B) es una separación de él. Tome $x \in A$, $y \in B$ e intercambiando el papel de los conjuntos si es necesario, suponga que $x \leq y$. Como $A \cap B = \emptyset$, necesariamente $x < y$. Consideremos el valor

$$z := \sup(A \cap [x, y]). \tag{3.3}$$

Por la Proposición 2.7, $z \in \overline{A \cap [x, y]}$. Así , $z \in [x, y]$ y $z \in \overline{A}$. Pero $\overline{A} \cap B = \emptyset$, por tanto $z \notin B$ y obtenemos que

$$x \leq z < y.$$

Tenemos dos casos. Si $z \notin A$, entonce $x \neq z$, luego $x < z < y$ y hemos terminado porque $z \notin A \cup B = E$. Por el contrario, si $z \in A$, como $A \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces $z \notin \overline{B}$. En particular, z no es punto de acumulación de B, es decir, existe $z' \in \mathbb{R}$ con $z < z' < y$ pero $z' \notin B$. Recordando (3.3) vemos que $z' \notin A$ y así $z' \notin E$. Por tanto, z' era el número requerido. □

Este teorema y el Ejemplo 3.3.3 implican además la siguiente afirmación.

Corolario 3.2. *Los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos y cerrados a la vez son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.*

Ejercicios

3.3.1 Determinar todos los subconjuntos compactos y conexos en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3.3.2 Comprobar que en un espacio métrico (X, d) los conjuntos

$$B_d(x_0, r) \qquad \text{y} \qquad \{y \in X : d(x_0, y) > r\}$$

están separados, ver Ejercicio 2.3.3.

3.3.3 Un espacio métrico (X, d) se dice *totalmente disconexo* si sus únicos subconjuntos conexos no vacíos son de la forma $\{x\}$, con $x \in X$. Demostrar que $X \subseteq \mathbb{R}$ es un espacio totalmente disconexo si y solo si no contiene intervalos. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son totalmente disconexos.

3.4. El conjunto de Cantor

En esta sección estudiaremos un subconjunto de la recta real con propiedades que a primera vista contradicen nuestra intuición. Se trata del conjunto ternario de Cantor, descubierto por Henry John Stephen Smith en 1875 y socializado a la comunidad matemática por Georg Cantor en 1883. En general, los conjuntos de Cantor aparecen de manera natural en varias áreas como el análisis en cuerpos p-ádicos, la teoría de sistemas dinámicos caóticos y la teoría de fractales.

Comenzamos con la noción de puntos aislados.

Definición 3.5. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in A$ es un *punto aislado de* A si $x \notin A'$. Esto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \cap A = \{x\}$. Un conjunto A se dice *discreto* si todos sus puntos son aislados.

Ejemplo 3.4.1. Para la métrica discreta (X, d_D) todos los puntos de cualquier conjunto $A \subseteq X$ son aislados, dado que $B_{d_D}(x, 1/2) \cap A = \{x\}$, para todo $x \in A$. Esto reconcilia el adjetivo de espacio discreto con la definición anterior porque todo $A \subseteq X$ es un conjunto discreto.

Ejemplo 3.4.2. Un conjunto finito $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es discreto porque si elegimos $\epsilon = \min_{1 \le j < l \le n} d(x_j, x_l)$, entonces $B_d(x_j, \epsilon) \cap A = \{x_j\}$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Más aún, ya sabíamos del Ejemplo 2.3.2 que A no puede tener puntos de acumulación.

Ejemplo 3.4.3. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, el intervalo $[a, b]$ y el conjunto $A = \mathbb{Q}$ no tienen puntos aislados. Además, todos los puntos de $A = \mathbb{Z}$ y de $B = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\}$ son aislados, mientras que el único punto de acumulación de $\overline{B} = \{0\} \cup B$ es 0.

Los conjuntos cerrados sin puntos aislados reciben una denominación especial.

Definición 3.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $P \subseteq X$ es *perfecto* si es cerrado y cada uno de sus puntos es un punto de acumulación de P.

En otras palabras, si P es perfecto, no tiene puntos aislados y $P' = P$. En la recta real vemos entonces que $[a, b]$ es perfecto, mientras que $\mathbb{Q}$ no lo es, al no ser cerrado.

La pregunta que motiva la construcción que veremos sobre el conjunto de Cantor es encontrar un subconjunto A de $\mathbb{R}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

1. Ser compacto,
2. Tener interior vacío,
3. No contener puntos aislados,
4. No ser numerable.

En general, dicho conjunto se conoce como un *conjunto de Cantor*. Las propiedades (1) y (3) nos dicen que dicho conjunto es perfecto. Más aún, el Ejercicio 3.4.4 muestra que en general un conjunto perfecto del espacio euclídeo no puede ser numerable. Entonces nuestra tarea se centra en encontrar un conjunto de la recta real que sea perfecto, acotado y con interior vacío.

La construcción clásica de un conjunto con estas características se describe a través de los siguientes pasos:

- **Paso 1**: Considere el intervalo cerrado $I_0 = [0, 1]$. Al dividirlo en los tres intervalos de la misma longitud $[0, 1] = [0, 1/3] \cup (1/3, 2/3) \cup [2/3, 1]$, y retirando $J_2 = (1/3, 2/3)$, obtenemos el conjunto cerrado

$$I_1 = I_0 \setminus J_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

- **Paso 2**: Iteramos el paso 1 en cada intervalo cerrado que conforma a I_1, es decir, retirando los intervalos intermedios abiertos $J_3 := (1/9, 2/9)$ y $J_4 := (7/9, 8/9)$, se obtiene

$$I_2 = I_1 \setminus (J_3 \cup J_4) = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

- **Paso $n + 1$**: Si se ha obtenido I_n como unión de intervalos cerrados, trisecamos cada uno de ellos y removemos el intervalo intermedio abierto, para obtener I_{n+1}. Se sigue por inducción que I_n consiste en 2^n intervalos cerrados disjuntos, cada uno de ellos de longitud $1/3^n$. Además

$$I_{n+1} = I_n \setminus (J_{2^n+1} \cup J_{2^n+2} \cdots \cup J_{2^{n+1}}).$$

El *conjunto ternario de Cantor* se define como el conjunto que resulta de repetir este algoritmo indefinidamente, es decir,

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = [0, 1] \setminus \bigcup_{l=2}^{\infty} J_l, \tag{3.4}$$

y está conformado por los puntos que restan una vez se remueven todos los medios tercios J_l. Un esquema de este proceso se explica en la Figura 3.1.

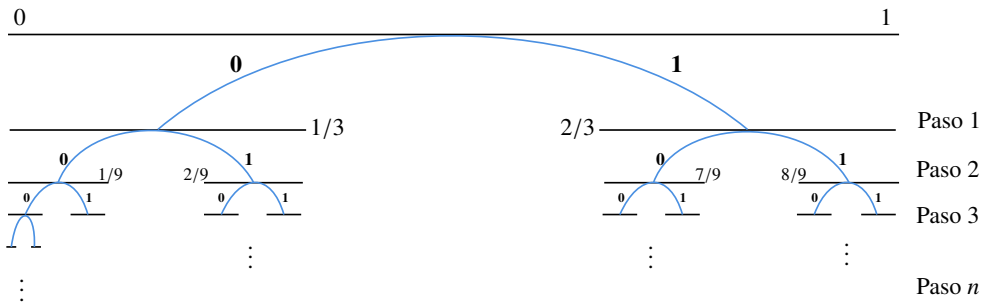

Figura 3.1: Construcción del conjunto de Cantor C.

Es inmediato verificar que los extremos de los intervalos cerrados que conforman a los conjuntos I_n, pertenecen a C. Pero este conjunto contiene más elementos, ver Ejercicios 3.4.2 y 4.3.8. De hecho este es un conjunto no contable. Más precisamente, tenemos el resultado anunciado anteriormente.

Teorema 3.6. *El conjunto C es un conjunto de Cantor.*

Demostración. El conjunto C es cerrado al ser la intersección de los conjuntos cerrados I_n, y es acotado porque $C \subseteq [0, 1]$. Por el Teorema de Heine-Borel 3.4, C es compacto.

Para demostrar que C tiene interior vacío, basta ver que este no contiene ningún intervalo abierto $L \subseteq [0, 1]$. Si $\ell > 0$ es su longitud, gracias a la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/3^N < \ell$. Si $L \subseteq C$, entonces $L \subseteq I_N$, y al ser un intervalo, L debería estar contenido en alguno de los intervalos $I_{N,k}$ que conforman a I_N. Pero esto es imposible porque la longitud de L es mayor que la de $I_{N,k}$. En conclusión, $\mathrm{Int}(C) = \emptyset$.

Veamos ahora que todos los puntos de C son de acumulación. Sea $x \in C$ y U cualquier intervalo abierto tal que $x \in U$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $I_{n,k}$ el intervalo cerrado que hace parte de I_n y tal que $x \in I_{n,k}$. Si tomamos n suficientemente grande, podemos concluir que $I_{n,k} \subseteq U$. Si $x_n \in I_{n,k}$ es un extremo de este intervalo tal que $x_n \neq x$, entonces $x_n \in C$. Esto demuestra que cualquier vecindad de x contiene puntos de C, y así $x \in C'$.

Finalmente, C no es numerable porque la Figura 3.1 establece una correspondencia biyectiva entre C y el conjunto de las sucesiones con valores en $\{0, 1\}$ del Ejemplo 1.2.8, que sabemos es no numerable. □

Nota 3.4.1. Otra de las propiedades sorprendentes de C es que tiene *medida* (longitud) nula, a pesar de ser no contable. Esta propiedad será explorada más adelante al estudiar la integral de Riemann, ver Ejemplo 8.5.2 en el Capítulo 8.

Ejercicios

3.4.1 Mostrar que si K es un conjunto compacto y discreto, entonces K es finito.

3.4.2 [14] Considere los números $c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Mostrar que $c_n \in C$, interpretando geométricamente. Ahora, empleando la serie geométrica, ver Sección 4.3 más adelante, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{3^j} = \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \qquad \text{y por tanto } \left| c_n - \frac{1}{4} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Esta desigualdad demuestra que $1/4$ es un punto límite de C y así $1/4 \in C$.

3.4.3 Demostrar que C es totalmente disconexo, es decir, que si $\emptyset \neq A \subseteq C$ es conexo, entonces A se reduce a un punto, ver Ejercicio 3.3.3.

3.4.4 Completar los argumentos para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.7. *Si $P \subseteq \mathbb{R}^d$ es perfecto, entonces no es numerable.*

a) Como P tiene puntos límite, debe ser infinito. Por contradicción, supongamos que P es contable, digamos $P = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\}$.

b) Fije $r > 0$ y sea $V_1 = B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}_1, r)$. Como $\boldsymbol{x}_1 \in P'$, es posible elegir $\boldsymbol{x}_{n_1} \in P \cap V_1$ con $\boldsymbol{x}_{n_1} \neq \boldsymbol{x}_2$. Considere una segunda bola $V_2 = B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}_{n_1}, r')$ tal que

$$\overline{V}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{n_1}\|_2 \leq r'\} \subseteq V_1, \qquad x_1 \notin \overline{V}_2,$$

ver Ejercicio 2.3.3. Argumente porqué esto es posible.

c) Iterando el numeral anterior, suponiendo que hemos construido V_n, se sigue la existencia de una bola V_{n+1} tal que

$$\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n, \quad x_n \notin \overline{V}_{n+1}, \quad V_{n+1} \cap P \neq \emptyset.$$

d) Si $K_n = \overline{V_n} \cap P$, entonces $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$ es una cadena decreciente de compactos no vacíos. Obtenga una contradicción analizando el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Como $[a, b]$, C y $\mathbb{R}$ son conjuntos perfectos, concluya que no son numerables.

3.4.5 (*) Empleando el Ejercicio 2.2.8 mostrar que $F \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{m \in M} (a_m, b_m)$ es unión disjunta de intervalo abiertos, donde $M \subseteq \mathbb{N}$. Bajo estas condiciones, demostrar que F es perfecto si y solo si $b_m \neq a_{m'}$, para todo $m \neq m'$, $m, m' \in M$. Emplear este resultado para concluir nuevamente que el conjunto ternario de Cantor C es perfecto.

Capítulo 4

Sucesiones

El objetivo de este capítulo es sentar las bases del Cálculo a través de la noción de límite de una sucesión. Este concepto cobra sentido en cualquier espacio métrico y se puede emplear para caracterizar los puntos límites de un conjunto. Además de sus propiedades fundamentales incluimos una sección con el cálculo de límites en $\mathbb{R}$, el criterio de Stolz-Cesàro y la fórmula de Stirling. Se discutirá el concepto de sucesión de Cauchy para así definir la noción de espacio métrico completo y su relación con compacidad. El objetivo principal de estas nociones es demostrar la completitud de $\mathbb{R}^d$, Teorema 4.6. Este resultado en el fondo es consecuencia del axioma del supremo vía el principio de los intervalos encajados y el Teorema de Heine-Borel. Finalmente, trabajamos con subsucesiones para así enunciar el Teorema de Bolzano-Weierstrass en estos términos. Para el caso real trataremos además las nociones de límite superior e inferior, que serán de vital importancia a la hora de estudiar la convergencia de series en el siguiente capítulo.

4.1. Sucesiones en espacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos de la Definición 1.2 del Capítulo 1 que una sucesión en X es una aplicación $\boldsymbol{x} : \mathbb{N} \to X$ que representaremos por $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El valor x_n se denomina el n-ésimo término de la sucesión $\boldsymbol{x}$. En ocasiones escribiremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ para denotar que la sucesión toma valores en X.

Definición 4.1. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (el cual sólo depende de ϵ) tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \qquad \text{para todo } n \geq N. \tag{4.1}$$

En este caso emplearemos la notación $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ o $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$. También decimos que x es el *límite* de los x_n cuando n tiende a infinito.

Note que la condición (4.1) nos dice que $x_n \in B_d(x, \epsilon)$, si $n \geq N$. Este requerimiento es equivalente a que dada cualquier vecindad de x, esta contenga a todos los puntos de la sucesión, salvo un número finito de ellos.

Ejemplo 4.1.1. Toda sucesión constante $x_n = x$ converge a dicho valor. En este caso, dado $\epsilon > 0$, cualquier $N \in \mathbb{N}$ es válido para concluir el resultado. Por otra parte, en un espacio discreto (X, d_D) si $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$, entonces la sucesión es eventualmente constante. En efecto, si escogemos $0 < \epsilon < 1$, digamos $\epsilon = 1/2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que (4.1) es válida si $n \geq N$. En la métrica discreta esto implica que $x_n = x$, como habíamos afirmado.

Ejemplo 4.1.2. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Para ello necesitamos demostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|1/n - 0| = 1/n < \epsilon$. Este valor N siempre existe como lo demuestra la propiedad arquimediana: basta tomarlo de manera que $1 < N\epsilon$. Así, si $n \geq N$ entonces $1/n \leq 1/N < \epsilon$. De la misma forma,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0, \qquad \text{para todo } p > 0.$$

En este caso, dado $\epsilon > 0$ tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 < N\epsilon^{1/p}$.

Es importante notar que la convergencia de una sucesión a un punto es equivalente a la convergencia de sus distancias a 0 (en $\mathbb{R}$), esto es,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \quad \text{en } (X, d) \qquad \text{si y solo si} \qquad \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0, \quad \text{en } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Finalizamos esta sección con algunas propiedades de carácter general sobre límites de sucesiones.

Teorema 4.1. *Sea* $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en un espacio métrico* (X, d).

1. *Si* $\boldsymbol{x}$ *converge, entonces su límite es único.*

2. *Si* $\boldsymbol{x}$ *converge, entonces es acotada (el conjunto* $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ *es acotado).*

Demostración. (1) Si $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$ y $x' \neq x$, tome $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \cap B_d(x', r) = \emptyset$. Eligiendo $\epsilon = r$ en la definición de límite, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x, r)$ si $n \geq N$. Por tanto $x_n \notin B_d(x', r)$ y así $x_n \not\to x'$ cuando $n \to +\infty$.

(2) Fije $\epsilon_0 > 0$ de su predilección. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon_0$ para todo $n \geq N$. Si $R = \text{máx}\{\epsilon_0, d(x_0, x), \ldots, d(x_{N-1}, x)\} > 0$, se sigue que $d(x_n, x) \leq R$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_d(x, R)$.

□

Además, la noción de límite permite dar otra caracterización de puntos de acumulación de un conjunto, que naturalmente depende de la métrica. En la siguiente demostración encontraremos enunciados que ya se han mencionado en el texto, ver Ejemplos 2.3.2 y 2.3.5.

Teorema 4.2 (Caracterización de puntos de acumulación)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $a \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$a \in A'$.*
2. *Cada vecindad de a contiene infinitos puntos de A.*
3. *El punto a es el límite de una sucesión en $A \setminus \{a\}$.*

Demostración. (1) implica (2). Esto fue demostrado en el Ejemplo 2.3.2: si existiera $\epsilon > 0$ tal que $B_d(a, \epsilon) \cap (A \setminus \{a\}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, bastaba tomar $r = \min_{1 \leq j \leq n} d(a, x_j) > 0$ para concluir que $B_d(a, r) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$, y llegar a una contradicción.

(2) implica (3). Elija $a_1 \in B_d(a, 1) \setminus \{a\}$. Suponiendo que se ha escogido $a_n \in A$ con $a_n \in B_d(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, como cada vecindad de a tiene infinitos puntos de A, el conjunto $B_d(a, \frac{1}{n+1}) \setminus \{a, a_1, \ldots, a_n\}$ debe contener elementos de A, así que podemos elegir $a_{n+1} \in A$ allí. De esta manera hemos construido una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{a\}$ con $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$ y que satisface

$$0 < d(a_n, a) < \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Así $a_n \to a$ si $n \to +\infty$, compare con la Proposición 4.3 más adelante.

(3) implica (1). Asuma que existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{a\}$, con $a_n \to a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B_d(a, \epsilon)$, si $n \geq N$. En particular, $a_N \in B_d(a, \epsilon) \cap (A \setminus \{a\})$ y así $a \in A'$. □

Ejercicios

Para los siguientes ejercicios suponga que (X, d) es un espacio métrico y que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$.

4.1.1 Suponga que $\lim_{n \to +\infty} x_{2n} = \lim_{n \to +\infty} x_{2n+1} = x$. Mostrar que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$. Misma pregunta, ahora suponiendo que $\lim_{n \to +\infty} x_{pn+j} = x$, para todo $j = 0, 1, \ldots, p-1$, donde $p \in \mathbb{N}^+$ es fijo.

4.1.2 Suponga que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es periódica de periodo p, es decir, $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión converge, ¿qué podemos concluir sobre ella?

4.1.3 Demostrar que si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ cuando $n \to +\infty$, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Indicación: Recuerde el Ejercicio 2.1.1.

4.1.4 Demostrar que una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ si y solo si $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$. Generalice esta propiedad para sucesiones en un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$.

4.1.5 Sea X un conjunto no vacío y d_1, d_2 dos métricas equivalentes (en el sentido del Ejercicio 2.2.7) definidas en él. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, demostrar que $x_n \to x$ en (X, d_1) si y solo si $x_n \to x$ en (X, d_2). En particular,

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \text{ en } (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \quad \text{ si y solo si } \quad \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \text{ en } (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty),$$

para todo $p \geq 1$, ver Ejercicio 2.1.5.

4.2. Cálculo de sucesiones en $\mathbb{R}$

En esta sección desarrollamos las propiedades básicas para calcular límites en $\mathbb{R}$, incluyendo la compatibilidad con las operaciones elementales y el orden, algunos límites especiales y el criterio de Stolz-Cesàro. Antes de comenzar señalamos que el cálculo de sucesiones en el espacio euclideo $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ se reduce al cálculo en $\mathbb{R}$ porque es suficiente trabajar componente a componente.

Proposición 4.1. *Considere una sucesión $\{\boldsymbol{x}_n = (a_{1,n}, \ldots, a_{d,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Entonces $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} = (a_1, \ldots, a_d)$ si y solo si $a_{j,n} \to a_j$, para todo $j = 1, \ldots, d$, cuando $n \to +\infty$. En símbolos,*

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{1,n}, \ldots, a_{d,n}) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_{1,n}, \ldots, \lim_{n\to+\infty} a_{d,n} \right) \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Si $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ cuando $n \to +\infty$, como $|a_{j,n} - a_j| \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2$, se sigue que $a_{j,n} \to a_j$ para cada $j = 1, \ldots, d$. Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, elija $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{j,n} - a_j| < \epsilon/\sqrt{d}$, si $n \geq N$ y $j = 1, \ldots, d$. Por tanto,

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{d} |a_{j,n} - a_j|^2 \right)^{1/2} < \epsilon,$$

de donde se deduce el límite requerido. □

La siguiente proposición contiene la compatibilidad de los límites con las operaciones de cuerpo de $\mathbb{R}$.

Proposición 4.2. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Entonces:*

1. $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = ab$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = a/b$, *siempre que* $b_n \neq 0$ *para todo* n *y* $b \neq 0$.

Demostración. (1) se sigue de la desigualdad triangular invertida, Ejemplo 1.4.3. Para (2), dado $\epsilon > 0$, tome $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_1$, $|a_n - a| < \epsilon/2$ y si $n \geq N_2$, $|b_n - b| < \epsilon/2$. Por tanto, si $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$, obtenemos

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon,$$

como se requería. Para (3), como $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tomemos una constante $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$, para todo n. Dado $\epsilon > 0$, escoja $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon/(2M)$, si $n \geq N_1$ y elija $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \epsilon/(2(|a|+1))$ si $n \geq N_2$. Para $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$ vemos que

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\
&\leq M|a_n - a| + (|a| + 1)|b_n - b| \\
&< M\frac{\epsilon}{2M} + (|a| + 1)\frac{\epsilon}{2(|a| + 1)} = \epsilon,
\end{aligned}$$

como se deseaba. Finalmente, para (4) es suficiente mostrar que $1/b_n \to 1/b$ cuando $n \to +\infty$. Para el valor $|b|/2 > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < |b|/2$, si $n \geq N_1$. Luego,

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}, \qquad \text{y así} \qquad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}, \text{ si } n \geq N_1.$$

Para terminar, como

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n\, b}\right| < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|,$$

dado $\epsilon > 0$, elegimos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < |b|^2\epsilon/2$, si $n \geq N_2$. La desigualdad requerida será válida entonces para todo $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$. □

Presentamos ahora propiedades útiles entre límites y la relación de orden en $\mathbb{R}$.

Proposición 4.3. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de números reales. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Si* $0 \leq a_n \leq b_n$, *para todo* $n \geq N_0$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2. *(Límites encajados) Si* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq N_0$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

3. *(Límites y desigualdades) Si* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq N_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *entonces* $a \leq b$.

Demostración. Para (1), dado $\epsilon > 0$, elija $N \in \mathbb{N}$ con $N \geq N_0$ y tal que $0 < b_n = |b_n - 0| < \epsilon$, si $n \geq N$. Por tanto, $|a_n - 0| = a_n \leq b_n < \epsilon$, para estos valores de n. Para (2), note que de (1) aplicado a $0 \leq x_n - a_n \leq b_n - a_n$, obtenemos que $x_n - a_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Así,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (x_n - a_n) + a_n = 0 + a = a.$$

Finalmente, para demostrar (3) asuma por contradicción que $b - a < 0$. Tomando $\epsilon_0 = (a-b)/2 > 0$, debería existir $N \geq N_0$ tal que si $n \geq N$, entonces $|b_n - a_n - (b-a)| < (a-b)/2$. Esto implicaría que $b_n - a_n < (b-a)/2 < 0$, contradiciendo la hipótesis. □

A continuación incluimos algunos límites básicos. Vale la pena anotar que aunque en un curso de Cálculo estos valores se hallan a través de propiedades de las funciones básicas, ellos se pueden deducir también con métodos elementales, en particular, empleando límites encajados.

Proposición 4.4. *Sea $p > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces los siguientes límites son válidos:*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p^{1/n} = 1.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1.$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{(1+p)^n} = 0.$

Demostración. (1) Supongamos primero que $p \geq 1$ y considere $x_n = p^{1/n} - 1 \geq 0$. Entonces $p = (1 + x_n)^n$ y por la desigualdad de Bernoulli, Ejercicio 1.4.7, obtenemos

$$p \geq 1 + nx_n, \qquad \text{es decir} \quad 0 \leq x_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Tomando $n \to +\infty$, por límites encajados concluimos que $x_n \to 0$, que es equivalente al límite deseado. Si $0 < p < 1$, el resultado se sigue del límite $\lim_{n\to+\infty}(1/p)^{1/n} = 1$.

(2) Sea $x_n = n^{1/n} - 1 \geq 0$, es decir, $n = (x_n + 1)^n$. En este caso la desigualdad anterior no es suficiente y es necesario emplear el siguiente término de la expansión binomial, Ejercicio 1.3.2, es decir,

$$n = (x_n + 1)^n \geq 1 + nx_n + \binom{n}{2}x_n^2 \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2, \qquad \text{y por tanto} \quad 0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}},$$

de donde se sigue el límite requerido.

(3) Fije un entero $k > a$ y tome $n > 2k$. Empleando la expansión binomial obtenemos

$$(1+p)^n > \binom{n}{k}p^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{p^k}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{p^k}{k!}.$$

Para la última desigualdad tuvimos en cuenta los k factores de la forma $n - j$, con $0 \leq j \leq k-1$: como $n > 2k > 2j$, se tiene que $n - j > n/2$. De esta forma obtenemos la desigualdad

$$0 \leq \frac{n^a}{(1+p)^n} \leq \frac{2^k k!}{p^k}\frac{1}{n^{k-a}},$$

de donde se sigue el resultado. □

Ejemplo 4.2.1. El último límite de la proposición anterior nos indica en particular que el crecimiento exponencial es mayor que el crecimiento polinomial. Por ejemplo, de (3) se deducen límites como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1000} + 5n^{25}}{(3/2)^n} = 0.$$

También, si tomamos $0 < x < 1$, y escribiendo $x = 1/(1+p)$ (donde $p = (1/x)-1 > 0$) obtenemos límites de la forma

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0, \tag{4.2}$$

o también $\lim_{n\to+\infty} n^{2022}x^n = 0$.

Existe una relación importante entre sucesiones monótonas y su supremo o ínfimo, según sea el caso. El siguiente resultado es una herramienta útil para determinar la existencia de límites, por ejemplo para sucesiones definidas de manera recursiva.

Definición 4.2. Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es:

- *Monótona creciente* (resp. *estrictamente creciente*) si $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$), para todo n.
- *Monótona decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si $a_{n+1} \leq a_n$ (resp. $a_{n+1} < a_n$), para todo n.

Así, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente si y solo si $\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente.

Teorema 4.3. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente. Entonces la sucesión converge si y solo si es acotada superiormente. En este caso*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{N}\}.$$

Para sucesiones monótonas decrecientes el límite existe si y solo si es acotada inferiormente y se calcula a través del ínfimo.

Demostración. Consideramos solo el caso de sucesiones monótonas crecientes. En este caso hace falta mostrar que si la sucesión es acotada, entonces converge a dicho límite. Por hipótesis, $a = \sup E$ existe, con $E = \{a_m \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{N}\}$. Dado $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, debe existir $a_N \in E$ tal que $a - \epsilon < a_N \leq a$. Al ser creciente la sucesión, si $n \geq N$, entonces

$$a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a, \qquad \text{es decir} \quad |a_n - a| < \epsilon,$$

como se requería. □

Este resultado ayuda a garantizar la existencia de un límite, mas no da información sobre su valor. Para hallarlo es necesario analizar más detalladamente la sucesión a tratar.

Ejemplo 4.2.2. Considere la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 4 + \frac{a_n}{3}. \tag{4.3}$$

Para demostrar su convergencia veremos que es acotada y creciente. Para la primera afirmación usamos inducción para comprobar que $a_n < 6$. El caso $n = 1$ es claro, y si suponemos que la desigualdad es válida para algún n, entonces también se verifica que $a_{n+1} = 4 + a_n/3 < 4 + 6/3 = 4 + 2 = 6$. Para mostrar que es creciente también procedemos por inducción. Como $a_1 = 1 \leq 13/3 = a_2$ el caso base es válido. Al suponer que $a_n < a_{n+1}$, para cierto n, vemos que

$$a_{n+2} = 4 + \frac{a_{n+1}}{3} > 4 + \frac{a_n}{3} = a_{n+1}.$$

Así, por el Teorema 4.3, $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ existe. Para hallarlo tomamos $n \to +\infty$ en (4.3) para concluir que $a = 4 + a/3$ y así $a = 6$. Note que implícitamente usamos el siguiente hecho: si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a$.

Definición 4.3. Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ *tiende a infinito* $(+\infty)$ si para cada $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$, para todo $n \geq N$. De manera similar, decimos que la sucesión *tiende a menos infinito* $(-\infty)$ si para cada $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < -M$, para todo $n \geq N$. Es usual emplear la notación

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty,$$

según sea el caso.

En realidad esta nueva definición se puede reducir a casos ya conocidos. En efecto, es inmediato comprobar que:

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si y solo si $\lim_{n\to+\infty} -a_n = -\infty$.
2. Si $a_n > 0$ para todo n, salvo finitos índices, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si y solo si $\lim_{n\to+\infty} 1/a_n = 0$.

Ejemplo 4.2.3. Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ polinomios de la forma $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, con $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$. Entonces tenemos los límites:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} a_k/b_m, & \text{si } k = m, \\ 0, & \text{si } m > k, \\ +\infty, & \text{si } k > m, a_k b_m > 0, \\ -\infty, & \text{si } k > m, a_k b_m < 0. \end{cases}$$

Estos valores se comprueban multiplicando el numerador y denominador por un factor de la forma $1/n^N$, con N elegido según sea el caso.

Proseguimos con una regla de cálculo que se puede interpretar como una versión de la regla de L'Hôpital para sucesiones, debida al matemático austriaco O. Stolz (1842-1905) y al matemático italiano E. Cesàro (1859-1906).

Teorema 4.4 (Stolz–Cesàro)**.** *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales donde $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y $b_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Entonces la existencia del límite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L, \qquad \textit{implica que} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, escoja $N \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < L + \epsilon$, para todo $n \geq N$. Multiplicando estas desigualdades por $b_{n+1} - b_n > 0$ y sumándolas desde N a algún $k - 1 \geq N$ obtenemos

$$(L - \epsilon)(b_k - b_N) < a_k - a_N < (L + \epsilon)(b_k - b_N).$$

Podemos tomar k suficientemente grande para que $b_k > 0$ y $\frac{|a_N|+|L\cdot b_N|}{b_k} < \epsilon$. Al dividir por b_k y reagrupar los términos encontramos que

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - L - \frac{a_N}{b_k} + L\frac{b_N}{b_k}\right| < \epsilon\left(1 - \frac{b_N}{b_k}\right),$$

y por tanto

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - L\right| < \epsilon\left(1 - \frac{b_N}{b_k}\right) + \frac{|a_N| + |L \cdot b_N|}{b_k} < 2\epsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = L$, como era requerido. □

Ejemplo 4.2.4. Para mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1,$$

aplicamos el criterio de Stolz-Cesàro a las sucesiones $a_n = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ y $b_n = n$ (creciente y que tiende a $+\infty$). Como

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt[n+1]{n+1}, \quad b_{n+1} - b_n = 1 \quad \text{y} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

se verifica el valor inicial.

Terminamos esta sección de cálculo con la famosa fórmula de Stirling descubierta por el matemático escocés J. Stirling (1692–1770). Ella determina el comportamiento asintótico en infinito de la función factorial. Aunque en este punto no tenemos desarrolladas las herramientas necesarias para demostrarla, consideramos importante que el estudiante esté familiarizado con ella y en cómo aplicarla. La demostración será dada en el Ejemplo 8.6.5.

Ejemplo 4.2.5 (La fórmula de Stirling)**.** Esta fórmula afirma que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1,$$

y permite estimar expresiones que contengan a la función factorial. Aquí e denota al número de Euler, Sección 5.3. Por ejemplo, para los coeficientes binomiales centrados $\binom{2n}{n}$, si escribimos $A_n = n!/(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n)$, tenemos que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{A_{2n}}{A_n^2}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \qquad \text{y por tanto} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n/\sqrt{\pi n}} = 1. \tag{4.4}$$

Una consecuencia inmediata de la fórmula de Stirling es la *fórmula de Wallis*

$$\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdots = \frac{\pi}{2}, \tag{4.5}$$

que expresa a π como dicho producto infinito. En efecto, podemos escribir este producto como

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1} &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{4^{2N}N!^4}{(2N)!^2(2N+1)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{4^{2N}}{\pi N\binom{2N}{N}^2}\frac{\pi N}{2N+1} = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

donde el último paso se justifica empleando (4.4). Algunas propiedades sobre productos infinitos serán tratadas en el Proyecto 13.2.

Ejercicios

En estos ejercicios se pueden asumir las propiedades de las funciones elementales, como trigonométricas, exponenciales y logaritmo, cuando sea necesario.

4.2.1 Sean $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ tales que $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ cuando $n \to +\infty$. Comprobar que

$$\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad < \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n > \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle, \qquad \|\boldsymbol{x}_n\|_p \to \|\boldsymbol{x}\|_p,\ 1 \le p \le +\infty,$$

si $n \to +\infty$. Además si $a_n \to a$ en $\mathbb{R}$, mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\boldsymbol{x}_n = a\boldsymbol{x}.$$

4.2.2 Determinar los siguientes límites justificando cada caso:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \sqrt{n+a}\,\sqrt{n+b}$, $a, b > 0$,

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$,

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{(2n+2)^p}{(2n+1)^p} - 1\right)$, $p \in \mathbb{N}$.

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+j}}$,

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+4^n\right)^{1/n}$.

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+2^n+2^{-n}\right)^{1/n}$.

k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$.

4.2.3 Sean $x, a_1, \ldots, a_k > 0$ y $0 < a < b$. Determinar los siguientes límites, justificando cada caso:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n} = 1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^{1/n} = 1$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+x} = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = b$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a_1^n+\cdots+a_k^n\right)^{1/n} = \max\limits_{1\le j\le k} a_j$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x^n-1|^{1/n} = \max\{x, 1\}$, $x \neq 1$.

Indicación: (c) $(1+1/n)^n < 3$, ver Teorema 5.4.

4.2.4 Utilice el criterio de Stolz-Cesàro para determinar los siguientes límites, donde $p \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a+a^{1/2}+\cdots+a^{1/n}}{n\sqrt{n}}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{2n}{n}^{1/n}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\ln(n)}{\ln(2)+\ln(3)+\cdots+\ln(n)}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\binom{n}{0}+\ln\binom{n}{1}\cdots+\ln\binom{n}{n}}{n^2}$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(1)+\sin(1/\sqrt[3]{4})+\cdots+\sin(1/\sqrt[3]{n^2})}{\sqrt[3]{n}}$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\alpha)+2^2\sin(\alpha/2)+\cdots+n^2\sin(\alpha/n)}{n^2}$.

4.2.5 Se consideran las siguientes sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por recurrencia. Demostrar las desigualdades propuestas, decidir si las sucesiones son crecientes o decrecientes, y estudiar la existencia de su límite. En caso de ser posible, determinar dicho valor.

a) $a_n < 3$, donde $a_1 = \sqrt{3}$ y $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$. En este caso el límite a da sentido a la expresión

$$a = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \cdots}}}.$$

b) $a_n < 2$, donde $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$.

c) $a_n < 2$, donde $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$.

d) $a_1 = \alpha > 0$ y $a_{n+1} = \dfrac{4a_n^2}{1 + 4a_n^2}$. Indicación: $4x^2/(1 + 4x^2) \leq x$, si $x \geq 0$.

4.2.6 Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

con x_0, x_1 prefijados. Demostrar que la sucesión es convergente y hallar su límite en términos de α, x_0 y x_1. Indicación: ¿qué recurrencia satisface $y_n = x_n - x_{n-1}$? Tener en cuenta la serie geométrica (4.6). Respuesta: $x_n \to x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2-\alpha}$.

4.2.7 Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{R}$ definida recursivamente por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$. Su límite da sentido a la *fracción continua infinita*

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

Indicación: el Ejercicio 1.1.5 puede ser útil. Para más información sobre fracciones continuas ver el Proyecto 10.2.

4.2.8 (Algunos límites con logaritmos) Asumiendo la existencia del logaritmo natural $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y las siguientes propiedades: ln estrictamente creciente, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ y $\ln(1 + x) < x$ si $x > 0$, comprobar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^p} = 0$, $p > 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} = 1$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

Indicaciones: (a) $\ln(2^n) = n \cdot \ln 2$. (b) Si $0 < q < p$, entonces $\ln(n^q) < n^q$. (d) $\ln(1 + 1/n) < 1/n$. La función logaritmo será construida en el Ejemplo 8.6.1 empleando integrales.

4.2.9 Demostrar las siguientes afirmaciones sobre sucesiones de números reales:

a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = a$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} t_1 + \cdots + t_n = +\infty$, donde cada $t_n > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a$. Deduzca en particular que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

c) Usar el logaritmo y (b) para mostrar que si además $a_n > 0$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a.$$

4.2.10 (*) Emplear la fórmula de Stirling y el logaritmo natural para justificar los siguientes límites, donde $p \geq 1$ es un entero fijo:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n!^{1/n} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!^3}{(3n)!} = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{3n}{n} \Big/ \left[\dfrac{(27/4)^n \sqrt{3}}{2\sqrt{\pi n}}\right] = 1$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n! n^p}{(n+p)!} = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!^p p^{pn}}{n^{\frac{p-1}{2}}(pn)!} = \dfrac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} n!^{1/n\ln(n)} = e$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n n!)^{1/n^2} = 1$.

4.2.11 (Media aritmético-geométrica) Sean a_0, b_0 números reales positivos. Definimos recursivamente

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Suponga que $0 < b_0 < a_0$. Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, y que $0 < a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluir que ambas sucesiones convergen al mismo límite $M(a_0, b_0)$. Este valor se conoce como la *media aritmético-geométrica* entre a_0 y b_0. Demuestre que:

a) $M(a_0, b_0) = M(a_N, b_N)$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

b) $M(\lambda a_0, \lambda b_0) = \lambda M(a_0, b_0)$, para todo $\lambda > 0$.

c) ¿Cuál es el valor de $M(a, a)$?

Nota 4.2.1. Gauss descubrió la media aritmético-geométrica en relación con su estudio de funciones elípticas. En efecto, se verifica que

$$\frac{\pi/2}{M(a,b)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}},$$

ver el Ejemplo 8.7.4 y el Ejercicio 8.7.10.

4.3. Sucesiones de Cauchy

Comenzamos esta sección con un límite especial y piedra angular de la teoría de funciones analíticas: la *serie geométrica* de razón a, con $|a| < 1$ dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a}. \tag{4.6}$$

Este límite se deduce fácilmente de la fórmula $1 + a + \cdots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$, Ejercicio 1.3.1, del límite (4.2) y del Ejercicio 4.1.4 para el caso en que $-1 < a < 0$.

Las sucesiones de Cauchy permiten trabajar con sucesiones convergentes sin hacer referencia a su límite. Para motivar la definición consideremos la expansión decimal de un número real $x > 0$. Se define la sucesión

$$x_0 = a_0, \qquad x_n = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} \in \mathbb{Q}, \qquad a_0 \in \mathbb{N},\ a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ j \geq 1, \tag{4.7}$$

donde los coeficientes se elijen recursivamente por

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, \qquad a_1 = \lfloor 10(x - a_0) \rfloor, \qquad a_n = \lfloor 10^n (x - x_{n-1}) \rfloor.$$

De esta forma, la desigualdad que define a la parte entera implica que

$$x_n = \frac{a_n}{10^n} + x_{n-1} \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}, \qquad \text{es decir} \quad 0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}.$$

Por tanto $x_n \to x$ si $n \to +\infty$. Esta es una manera alternativa de mostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Para más información sobre estas expansiones, ver el Proyecto 10.1. El punto que queremos destacar aquí es que las diferencias de la sucesión (4.7) satisfacen

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{9}{10^j} < \frac{9}{10^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{10^n}, \qquad m > n.$$

Esto implica que estas diferencias son tan pequeñas como se requiera, cuando los índices son suficientemente grandes. Esta es una condición que se puede verificar en $\mathbb{Q}$ sin hacer referencia alguna al punto x. Abstrayendo esta situación tenemos la siguiente definición.

Definición 4.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X es de *Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Diremos que un espacio (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy con valores en X converge a algún punto de X.

En esta terminología nuestro objetivo es demostrar que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio completo. En este sentido, los números irracionales llenan los espacios de la recta que le hacen falta a $\mathbb{Q}$ para ser completo.

Proposición 4.5. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces es de Cauchy.*

Demostración. Dado $\epsilon/2 > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ como en la definición de convergencia. Si $n, m \geq N$, entonces por la desigualdad triangular obtenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como era requerido. □

Al igual que las sucesiones convergentes, las sucesiones de Cauchy son acotadas. En este caso necesitamos explorar un poco más esta condición. Para ello emplearemos la siguiente herramienta.

Definición 4.5. Sea (X, d) un espacio métrico. El *diámetro* de un conjunto $E \subseteq X$ se define por

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y\in E} d(x, y).$$

En estos términos un conjunto es acotado si y solo si su diámetro es finito.

Ejemplo 4.3.1. Note que esta definición coincide con la intuición geométrica de diámetro para un círculo en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, para un rectángulo su diámetro es la longitud de sus diagonales y lo mismo es válido para d-celdas en $\mathbb{R}^d$. Para $d = 1$ vemos que el diámetro de los intervalos $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ y (a, b) es $b - a$.

Otra observación inmediata es que

$$\text{si } A \subseteq B, \qquad \text{entonces} \quad \operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B.$$

La noción de diámetro permite rescribir la propiedad de Cauchy como sigue.

Lema 4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si diam $E_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, donde $E_n = \{x_k \in X : k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$.*

Demostración. Ser de Cauchy significa que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que ϵ es cota superior del conjunto $\{d(x_n, x_m) : n, m \geq N\}$. Por tanto, si $n \geq N$, vemos que $\operatorname{diam} E_n \leq \operatorname{diam} E_N \leq \epsilon$. El recíproco es idéntico. □

Teorema 4.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $E \subseteq X$, entonces diam E = diam $\overline{E}$.*
2. *Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos compactos, no vacíos de X tales que $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$. Si*
$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$
entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ consiste en un único punto.
3. *En particular, si en $\mathbb{R}$ tenemos intervalos encajados $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n = [a_n, b_n] \supseteq \cdots$, tales que $b_n - a_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ se reduce a un único punto.*

Demostración. (1) Como $E \subseteq \overline{E}$, entonces diam $E \leq$ diam $\overline{E}$. Para la desigualdad restante, sea $\epsilon > 0$ y tome $p, q \in \overline{E}$. Empleando la caracterización (2.10) sobre la clausura de un conjunto, obtenemos $p', q' \in E$ tales que $d(p, p') < \epsilon$ y $d(q, q') < \epsilon$. Por la desigualdad triangular tenemos que
$$d(p, q) \leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) < 2\epsilon + \operatorname{diam} E.$$
Como los puntos p y q fueron arbitrarios se sigue que diam $\overline{E} \leq 2\epsilon +$ diam E y como ϵ fue arbitrario, concluimos que diam $\overline{E} \leq$ diam E, como se requería.

(2) Por el Teorema de Cantor 3.1, $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Si x, y son elementos de esta intersección vemos que
$$0 \leq d(x, y) \leq \operatorname{diam} K_n \qquad \text{si } n \geq 0.$$
Si $n \to +\infty$, la hipótesis implica que $d(x, y) = 0$ y así $x = y$. (3) se sigue de (2). □

Teorema 4.6. 1. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

2. *$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ es un espacio completo.*

Demostración. (1) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $E_n = \{x_k \in X : k \geq n\}$. Por el Lema 4.1 sabemos que diam $E_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Entonces $E_n = E_{n+1} \cup \{x_n\}$, $E_{n+1} \subseteq E_n$ y tomando clausuras, $\overline{E_{n+1}} \subseteq \overline{E_n}$. Si ponemos $K_n = \overline{E_n}$, como todo cerrado de un compacto es compacto, Proposición 3.2 (2), cada K_n es compacto y así obtenemos una familia encajada de conjuntos compactos. Por el teorema anterior vemos que diam $K_n \to 0$ si $n \to +\infty$ y por tanto $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = \{x\}$, para cierto $x \in X$. Finalmente, como $x_n \in E_n \subseteq K_n$, obtenemos
$$0 \leq d(x_n, x) \leq \operatorname{diam} K_n.$$
Así, si $n \to +\infty$, $d(x_n, x) \to 0$, es decir, $x_n \to x$ en X y por tanto la sucesión dada es convergente.

(2) Dada una sucesión de Cauchy $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$, como es acotada, existe una bola cerrada $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ que la contiene. Por el Teorema de Heine-Borel 3.4, $\overline{B}$ es compacta. Por tanto, $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio compacto y por (1), la sucesión debe ser convergente. □

Ejercicios

4.3.1 Demostrar o dar un contraejemplo a las siguientes afirmaciones, donde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$:

a) Si $|x_{n+1} - x_n| \leq 1/2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Si $x_{n+1} - x_n \leq 1/2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Si $x_{n+1} - x_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy.

4.3.2 Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) que satisface que

$$d(x_m, x_n) \leq 1/n + 1/m, \qquad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}^+.$$

Comprobar que la sucesión es de Cauchy.

4.3.3 Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Sea $0 < \lambda < 1$ de forma que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Demostrar que la sucesión dada es de Cauchy.

4.3.4 Suponga que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Demostrar que la sucesión de números reales $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4.3.5 Sea X un conjunto y d_1, d_2 métricas definidas sobre él, satisfaciendo las condiciones del Ejercicio 4.1.5. Demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d_1) si y solo si lo es en (X, d_2). Emplear esto para comprobar que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ es completo, para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

4.3.6 Mostrar que en un espacio métrico (X, d), si $E \subseteq X$ y $\operatorname{diam}(E) < \delta$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $E \subseteq B_d(x_0, \delta)$.

4.3.7 Comprobar que el diámetro de la d-celda $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ en el espacio $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ es $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_p$, donde $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ y $p \geq 1$. Interprete geométricamente.

4.3.8 *a*) Siguiendo el mismo algoritmo de la expansión decimal de un número real, demostrar que todo $x > 0$ admite también una expansión en base 3, es decir,

$$x = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^n}, \qquad a_0 \in \mathbb{N},\ a_j \in \{0, 1, 2\},\ j \geq 1.$$

b) A partir de esta expansión probar que $x \in C$ (el conjunto ternario de Cantor) si y solo si $a_0 = 0$ y $a_j \in \{0, 2\}$, $j \geq 1$.

c) Comprobar nuevamente que $1/4 \in C$, Ejercicio 3.4.2. Además mostrar que $1/10, 1/12, 1/13 \in C$.

4.3.9 Sea $E \subset [0, 1]$ el conjunto de números reales cuya expansión decimal solo contiene los dígitos 1 y 2. ¿E es contable? ¿es denso en $[0, 1]$? ¿es perfecto?

4.4. Subsucesiones

Las subsucesiones son sucesiones que se obtienen extrayendo valores de una sucesión dada. Como veremos, ellas juegan un papel fundamental en espacios compactos, y resultan útiles para calcular límites. El objetivo principal de esta sección es demostrar el Teorema de Bolzano-Weierstrass sobre sucesiones acotadas en el espacio euclídeo.

Definición 4.6. Sea $\boldsymbol{x} : \mathbb{N} \to X$ una sucesión con valores en X. Una *subsucesión* de $\boldsymbol{x}$ es una aplicación de la forma $x \circ \sigma = \{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

La función σ simplemente está seleccionando un subconjunto infinito $\sigma(\mathbb{N}) = \{\sigma(n) : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$, ordenado de manera natural. Una notación más habitual para denotar la subsucesión correspondiente es poner $\sigma(k) = n_k$ con $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ y escribir $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposición 4.6. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente. Entonces toda subsucesión de $\boldsymbol{x}$ converge al mismo valor*

Demostración. Si $x_n \to x$, considere la subsucesión $\boldsymbol{x} \circ \sigma$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, si $n \geq N$. Como σ es estrictamente creciente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(k_0) \geq N$, y por tanto $\sigma(k) \geq N$, si $k \geq k_0$. En particular, $d(x_{\sigma(k)}, x) < \epsilon$, para $k \geq k_0$. □

Ejemplo 4.4.1. Algunas aplicaciones $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes son

$$\sigma(n) = n+1, \quad \sigma(n) = 2n, \quad \sigma(n) = n^2, \quad \sigma(n) = n(n+1), \quad \sigma(n) = n!, \quad \sigma(n) = n^n.$$

Las dos últimas se toman desde $n \geq 1$. Por la proposición anterior observe que como $1/n \to 0$, lo mismo es válido para $1/\sigma(n)$, cuando $n \to +\infty$.

Ejemplo 4.4.2. Una sucesión puede tener subsucesiones que converjan a límites distintos. Por ejemplo, $x_n = (-1)^n$ no converge, pero $x_{2n} = 1$ y $x_{2n+1} = -1$. Un ejemplo más interesante es considerar la sucesión $r_n = \tau(n)$, donde $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ es alguna aplicación biyectiva, esto es, r_n es una numeración de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $r_{n_k} \to x_0$ cuando $k \to +\infty$.

Ejemplo 4.4.3. Las subsucesiones se pueden aplicar de manera práctica para determinar el límite de una sucesión convergente. Fije $0 < s < 1$ y considere

$$x_n = s^n, \qquad \text{que satisface } 0 < s^{n+1} < s^n < \cdots < s < 1.$$

Así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente. Por el Teorema 4.3, $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ existe. Considerando la subsucesión $x_{2n} = s^{2n}$ vemos que

$$x = \lim_{n\to+\infty} s^{2n} = x^2.$$

Por la desigualdad anterior $0 \leq x \leq s$, luego la única solución compatible con esta condición es $x = 0$. De la misma forma, fijado $a > 0$, considere

$$y_n = n^a s^n,$$

que satisface $y_{n+1} < y_n$ siempre que $1/n < (1/s)^{1/a} - 1$. Por tanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualemente decreciente y acotada inferiormente, y así $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$ existe. Considerando y_{2n} obtenemos que

$$y = \lim_{n\to+\infty} (2n)^a s^{2n} = \lim_{n\to+\infty} 2^a \cdot y_n \cdot s^n = 2^a \cdot y \cdot 0 = 0,$$

en concordancia con la Proposición 4.4 (3).

En este punto estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección, que relaciona la noción de compacidad empleando conjuntos infinitos con puntos de acumulación y la idea de subsucesiones convergentes.

Teorema 4.7. *1. Sea (X, d) compacto. Entonces toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

2. (Bolzano-Weierstrass) En $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración. (1) Sea $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Considere el conjunto $E = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos dos opciones. Si E es finito, digamos $E = \{p_1 \ldots, p_m\}$, como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m \boldsymbol{x}^{-1}(p_j)$, al menos alguno de los $\boldsymbol{x}^{-1}(p_j)$ debe ser infinito (unión finita de conjuntos finitos es finita). Esto significa que existen infinitos naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tales que x_{n_k} es constante, para todo $k \in \mathbb{N}^+$, y por tanto esta subsucesión es convergente.

La segunda opción es que E sea infinito. Por la Proposición 3.4, este conjunto tiene un punto de acumulación $x \in X$. Pero por el Teorema 4.2 sobre caracterización de puntos de acumulación, x es el límite de una sucesión en $E \setminus \{x\}$, es decir, x es el límite de una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Si la sucesión es acotada, existe una bola cerrada en $\mathbb{R}^d$, y por tanto compacta, que la contiene. El resultado se sigue de (1).

□

Ejemplo 4.4.4. Un ejemplo interesante para reflexionar sobre el Teorema de Bolzano-Weierstrass es la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la función coseno evaluada en los naturales. Como $|\cos(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, esta sucesión debe tener una subsucesión convergente. Sin embargo, resulta difícil construirla explícitamente.

Un ejercicio más asequible en este punto del texto es comprobar que ninguna de las sucesiones $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\sin(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes. Por contradicción, asuma que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = a$. Entonces

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) - \cos(n) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) - \cos(n).$$

Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = b$, donde $b = a(\cos(1) - 1)/\sin(1)$. Como $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$, tomando límite en esta igualdad vemos que

$$b = b\cos(1) + a\sin(1).$$

Un cálculo directo implica que $a = 0$. En conclusión,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n) = 0,$$

contradiciendo la identidad $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, en el Ejemplo 10.1.2 del Proyecto 10.1 veremos que los conjuntos $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$ son densos en $[-1, 1]$. El desarrollo de las funciones trigonométricas se hará en el Proyecto 13.1.

Terminamos esta sección con una construcción que será útil más adelante. Dada $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d), denotaremos por $E_{\boldsymbol{x}}$ el conjunto de límites de subsucesiones convergentes de $\boldsymbol{x}$, es decir,

$$E_{\boldsymbol{x}} = \{x \in X : \text{ existe } \boldsymbol{x} \circ \sigma = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \text{ tal que } x_{n_k} \to x \text{ si } k \to +\infty\}. \tag{4.8}$$

Este conjunto resulta ser siempre cerrado en X, ver Ejercicio 4.4.7. Para ilustrar este hecho incluimos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.5. Si $\boldsymbol{x}$ es una sucesión que converge a x, por la Proposición 4.6 obtenemos que $E_{\boldsymbol{x}} = \{x\}$. En el caso de $\mathbb{R}$, tenemos los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}, && E_{\boldsymbol{x}} = \emptyset,\\
&\boldsymbol{x} = \{1 + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}, && E_{\boldsymbol{x}} = \{0, 2\},\\
&\boldsymbol{x} = \{(-1)^n/(1 + 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}, && E_{\boldsymbol{x}} = \{-1, 1\},\\
&\boldsymbol{x} = \{\tau(n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ biyectiva}, && E_{\boldsymbol{x}} = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Como vemos, el conjunto $E_{\boldsymbol{x}}$ siempre es cerrado en $\mathbb{R}$.

Ejercicios

4.4.1 Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Demostrar que $\sigma(n) \geq n$, para todo n.

4.4.2 Emplee subsucesiones para recuperar los límites en $\mathbb{R}$:

a) $p^{1/n} \to 1$, con $p > 0$. Indicación: $\sigma(n) = n(n+1)$.

b) $n^{1/n} \to 1$. Indicación: $(1 + 1/n)^n < 3$ puede ser útil para mostrar que la sucesión es eventualmente decreciente.

4.4.3 Suponga que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$, demostrar que toda la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

4.4.4 Emplear el principio de los intervalos encajados para dar una demostración directa del Teorema de Bolzano-Weierstrass en el caso de $\mathbb{R}$. Indicación: Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I_0 = [a, b]$ asume infinitos valores, bisecar I_0 y escoger la parte I_1 de I_0 que contenga infinitos valores de la sucesión.

4.4.5 Comprobar que en un espacio métrico (X, d) una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en X (la clausura del conjunto $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ es X) si y solo si para cada $y \in X$ existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to y$ si $k \to +\infty$.

4.4.6 Hallar el conjunto $E_{\boldsymbol{x}}$ para las sucesiones:

a) $x_n = \frac{a}{2}(1+(-1)^n) + \frac{b}{2}(1-(-1)^n)$,

b) $x_n = \sin(n\pi/k)$, $k \in \mathbb{N}^+$ fijo.

c) $x_n = \tau(n)$, con $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ una biyección.

4.4.7 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con valores en X. Mostrar que $E_{\boldsymbol{x}}$ dado por (4.8) es un conjunto cerrado. Indicación: si $y \in E'_{\boldsymbol{x}}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \neq y$. Elegidos $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, tome $x \in E_{\boldsymbol{x}}$ con $d(x, y) < 2^{-k}\delta$ y $n_k > n_{k-1}$ con $d(x_{n_k}, x) < 2^{-k}\delta$, donde $\delta = d(x_{n_1}, y) > 0$. Así $d(x_{n_k}, y) \leq 2^{1-k}\delta$ y $x_{n_k} \to y$.

4.5. Límites superior e inferior

A diferencia del límite usual que puede no existir, toda sucesión de números reales posee límite superior y límite inferior, si agregamos los valores $\pm\infty$ a la recta real. Estos límites poseen varias caracterizaciones que estudiaremos a continuación. Además, son fundamentales al trabajar con criterios de convergencia de series, como lo veremos en el siguiente capítulo.

Definición 4.7. Sea $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Considere el conjunto $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}$ de límites de subsucesiones convergentes (a valores en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) de $\boldsymbol{x}$. Los *límites superiores e inferiores* de $\boldsymbol{x}$ se definen por

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n := \sup \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}, \qquad \liminf_{n\to+\infty} x_n := \inf \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}, \tag{4.9}$$

respectivamente. Otra notación usual es $\overline{\lim}\, x_n$ y $\underline{\lim}\, x_n$, respectivamente.

Note que $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}$ consiste de $E_{\boldsymbol{x}}$ como en (4.8) añadiendo si es necesario $\pm\infty$. De la misma forma, el supremo e ínfimo se toman en la *recta real extendida*

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

De esta manera dichos valores siempre existen y se calculan como el máximo y mínimo valor de todos los límites de subsucesiones convergentes de $\boldsymbol{x}$.

Nota 4.5.1. Si $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, digamos $x_n \in [a, b]$, para todo n, como $E_{\boldsymbol{x}}$ es un conjunto cerrado, Ejercicio 4.4.7, se sigue que $E_{\boldsymbol{x}} \subseteq [a, b]$. Note también que $\lim\sup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ significa que existe una subsucesión de $\boldsymbol{x}$ que no es acotada superiormente. De la misma forma, afirmar que $\lim\inf_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ equivale a que $\boldsymbol{x}$ tenga una subsucesión que no es acotada inferiormente.

En el caso convergente, los nuevos valores (4.9) se reducen al límite usual.

Proposición 4.7. *Una sucesión $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ converge al valor x si y solo si* $\lim\sup_{n\to+\infty} x_n = \lim\inf_{n\to+\infty} x_n = x$.

Demostración. Si la sucesión converge a x, entonces $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} = \{x\}$, de donde $\sup \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} = \inf \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} = \{x\}$. Recíprocamente, si estos valores coinciden es porque $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} = \{x\}$ de donde $x_n \to x$ si $n \to +\infty$. □

Ejemplo 4.5.1. Para las sucesiones del Ejemplo 4.4.5 obtenemos los valores

$$\begin{array}{lll}
x_n = n, & \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty, & \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \\
x_n = 1 + (-1)^n, & \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 2, & \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, \\
x_n = \dfrac{(-1)^n}{1 + 1/n}, & \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 1, & \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -1, \\
x_n = \tau(n), \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ biyectiva}, & \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty, & \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty.
\end{array}$$

Ejemplo 4.5.2. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la sucesión de números primos $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$. Como existen intervalos de tamaño arbitrario que no contienen números primos se verifica que

$$\limsup_{n\to+\infty} (p_{n+1} - p_n) = +\infty.$$

En efecto, dado $k \in \mathbb{N}^+$, ninguno de los k enteros consecutivos $(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, \ldots, (k + 1)! + k$ es primo.

Por otra parte, la *conjetura de los números primos gemelos* asegura que

$$H_1 := \liminf_{n\to+\infty} (p_{n+1} - p_n) = 2.$$

Esto equivale a asegurar que existen infinitas parejas de primos de la forma $(p, p+2)$. Aunque la difícil conjetura sigue abierta, el trabajo revolucionario de Yitang Zhang (2013) [147] mostró que $H_1 \leq 70000000$. La cota fue mejorada posteriormente. El lector puede encontrar más información en [105].

En lo que sigue demostraremos solo las propiedades del límite superior, dado que el límite inferior se puede recuperar de este a partir de la fórmula

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\limsup_{n\to+\infty}(-x_n).$$

Esta relación se sigue de manera inmediata del Ejercicio 1.5.7.

Teorema 4.8. *Sea $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $x^* = \lim\sup_{n\to+\infty} x_n$ es el único elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ que satisface:*

1. *$x^* \in \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}$,*
2. *Si $x^* < y$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y$, para todo $n \geq N$.*

De la misma forma, $x_* = \lim\inf_{n\to+\infty} x_n$ es el único elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ que satisface:

1. *$x_* \in \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}$,*
2. *Si $y < x_*$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y < x_n$, para todo $n \geq N$.*

Demostración. Primero verifiquemos que x^* satisface (1) y (2). Para (1) tenemos tres opciones. Si $x^* = +\infty$, $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado superiormente y por tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k} \to +\infty$. Si $x^* \in \mathbb{R}$, como $E_{\boldsymbol{x}}$ es cerrado, por la Proposición 2.7 $x^* \in E_{\boldsymbol{x}}$. Finalmente, si $x^* = -\infty$, esto significa que $x_n \to -\infty$ si $n \to +\infty$, de donde $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} = \{-\infty\} = \{x^*\}$.

Para (2), en el caso $x^* = +\infty$ no hay nada que verificar. Supongamos que $x^* \in \mathbb{R}$, en cuyo caso $\boldsymbol{x}$ es acotada superiormente, digamos $x_n \leq M$. Si (2) no se verificara, para cada $N \in \mathbb{N}$ existiría $n_N \geq N$ tal que $y \leq x_{n_N}$. Así, para $N = 1$, podemos elegir $n_1 \geq 1$ con $y \leq x_{n_1}$. Si $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ han sido elegidos, para $N = n_{k-1} + 1$, existe $n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ con $y \leq x_{n_k}$. Por tanto la subsucesión $\boldsymbol{x} \circ \sigma = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en el intervalo $[y, M]$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass 4.7, $\boldsymbol{x} \circ \sigma$ debe tener una subsucesión convergente, que a su vez es subsucesión de $\boldsymbol{x}$. Si su límite es x', entonces $x' \in [y, M]$ y así $x^* < x'$. Esto contradice la naturaleza de supremo de x^*. Finalmente, si $x^* = -\infty$, (2) es precisamente la definición de que $x_n \to -\infty$ si $n \to +\infty$.

Para verificar la unicidad, sean x', x'' dos valores que verifican (1) y (2). Si $x' \neq x''$, digamos $x' < x''$, escoja $x' < t < x''$. Como x' satisface (2), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < t$, para todo $n \geq N$. Esto implicaría que $\widetilde{E}_{\boldsymbol{x}} \subseteq [-\infty, t]$, contradiciendo que $x'' \in \widetilde{E}_{\boldsymbol{x}}$. □

Dada una sucesión $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$, consideramos los conjuntos $E_k := \{x_n \in \mathbb{R} : n \geq k\} = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, \}$ que satisfacen

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supseteq \cdots .$$

Al tomar supremo e ínfimo a esta cadena de conjuntos obtenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} \sup E_0 \geq \sup E_1 \geq \cdots \geq \sup E_k \geq \sup E_{k+1} \geq \cdots , \\ \text{ínf}\, E_0 \leq \text{ínf}\, E_1 \leq \cdots \leq \text{ínf}\, E_k \leq \text{ínf}\, E_{k+1} \leq \cdots . \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión $\{\sup E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y $\{\text{ínf}\, E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

Analicemos qué puede suceder con la sucesión de supremos:

1. Si existiera $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup E_k = +\infty$, es porque E_k no es acotado. Como $E_{k+1} = E_k \setminus \{x_k\}$, E_{k+1} tampoco es acotado y así $\sup E_{k+1} = +\infty$. Se sigue que $\sup E_n = +\infty$, para todo $n \geq k$. En este caso se verifica que $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

2. Si cada E_k es acotado superiormente, $\sup E_k \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 4.3, la sucesión $\{\sup E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge (en $\mathbb{R}$) si y solo si es acotada inferiormente y su límite se calcula a través del ínfimo de dicha sucesión. En caso contrario $\sup E_k \to -\infty$ si $k \to +\infty$, que a su vez implica que $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Por tanto, en los casos en que $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$, vemos que este valor coincide con el límite de la sucesión $\{\sup E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Para el caso en que el límite superior sea un número real este resultado también es válido, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{x_n\}_{n\geq k} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k}\{x_n\}$$
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty} \inf\{x_n\}_{n\geq k} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k}\{x_n\}.$$

Demostración. Demostraremos la primera igualdad en el caso del límite superior, cuando $x^* = \limsup_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$. La segunda igualdad es inmediata porque la sucesión de supremos es decreciente (Teorema 4.3). Si $x^* \in \mathbb{R}$, la sucesión dada es acotada, cada $\sup E_k \in \mathbb{R}$ y $\alpha := \lim_{k\to+\infty} \sup E_k \in \mathbb{R}$, como se discutió en el párrafo que precede esta demostración. Para probar que $\alpha = x^*$, es suficiente mostrar que α satisface las propiedades (1) y (2) del Teorema 4.8:

(1) Por definición de límite, para $\epsilon = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \sup E_l - \alpha = |\sup E_l - \alpha| < 1, \qquad \text{si } l \geq N_1.$$

Como $\alpha - 1 < \alpha \leq \sup E_{N_1}$, por la Nota 1.3.2 (2) debe existir $n_1 \geq N_1$ tal que $\alpha - 1 < x_{n_1} \leq \sup E_{N_1}$. Estas desigualdades muestran que $|x_{n_1} - \alpha| < 1$. Inductivamente, suponga que escogimos $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ tales que $|x_{n_j} - \alpha| < 1/j$, $j = 1, \ldots, k-1$. Para $\epsilon = 1/k$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \sup E_l - \alpha < 1/k$, si $l \geq N_k$. Como $\alpha - 1/k < \alpha \leq \sup E_{k'}$, con $k' = \text{máx}\{N_k, n_{k-1} + 1\}$, debe existir $n_k \geq k' > n_{k-1}$ con $\alpha - 1/k < x_{n_k} \leq \sup E_{k'}$. Por tanto

$$|x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k},$$

y de esta manera la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ construida inductivamente satisface que $x_{n_k} \to \alpha$ si $k \to +\infty$.

(2) Si $\alpha < y$, digamos $y = \alpha + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, por definición de límite sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup E_k - \alpha = |\sup E_k - \alpha| < \epsilon$, si $k \geq N$. En particular,

$$\sup E_N < \alpha + \epsilon = y, \qquad \text{y así } x_n < y, \text{ para todo } n \geq N,$$

como era requerido. □

La caracterización dada en este teorema permite establecer propiedades de los límites superior e inferior de forma alternativa, y en ocasiones, más sencillamente que a partir de la definición original.

Ejemplo 4.5.3. Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$, entonces

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} b_n, \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n.$$

Note que esta propiedad no es aplicable a límites, sin antes garantizar que los límites de ambas sucesiones existen, ver la Proposición 4.3(3).

Para demostrar la primera desigualdad, si $n \geq k \geq N$, entonces $a_n \leq b_n \leq \sup_{l\geq k} b_l$. Por tanto, este supremo es cota superior para el conjunto $\{a_n \in \mathbb{R} : n \geq k\}$ y por tanto $\sup_{l\geq k} a_l \leq \sup_{l\geq k} b_l$. El resultado se sigue al tomar $k \to +\infty$.

Ejercicios

4.5.1 Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Demostrar que

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n,$$
$$\liminf_n a_n + \liminf_n b_n \leq \liminf_n (a_n + b_n),$$

siempre que la suma de los límites no sea de la forma $+\infty - \infty$ ó $-\infty + \infty$. Además si $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ converge, entonces

$$\limsup_n (a_n + b_n) = b + \limsup_n a_n, \quad \liminf_n (a_n + b_n) = b + \liminf_n a_n.$$

4.5.2 Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.

a) Si $a_n, b_n \geq 0$, mostrar que

$$\limsup_n (a_n b_n) \leq \limsup_n a_n \cdot \limsup_n b_n, \quad \liminf_n a_n \cdot \liminf_n b_n \leq \liminf_n (a_n b_n),$$

siempre que el producto de los límites no sea de la forma $(+\infty) \cdot 0$.

b) Si $\lim_{n\to+\infty} b_n = b > 0$, entonces

$$\limsup_n (a_n b_n) = b \cdot \limsup_n a_n, \quad \liminf_n (a_n b_n) = b \cdot \liminf_n a_n.$$

Indicación: $\sup_{n,m\geq k} a_n b_m \geq \sup_{n\geq k} a_n b_n$ e $\inf_{n,m\geq k} a_n b_m \leq \inf_{n\geq k} a_n b_n$.

4.5.3 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de números positivos. Mostrar que

$$\limsup_n a_n = \frac{1}{\liminf_n (1/a_n)},$$

(interpretando a $1/0 = +\infty$ y $1/(+\infty) = 0$, según sea el caso).

4.5.4 Considere la *sucesión de Farey* dada por

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{1}{4}, x_5 = \frac{2}{4}, x_6 = \frac{3}{4}, x_7 = \frac{1}{5}, x_8 = \frac{2}{5}, x_9 = \frac{3}{5}, \ldots.$$

Hallar el conjunto $E_{\boldsymbol{x}}$, así como los valores $\limsup_n x_n$ e $\liminf_n x_n$.

4.5.5 Calcular el límite superior e inferior de las siguientes sucesiones:

a) $x_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$.

b) $x_n = \frac{n}{3} - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

c) $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

d) $x_n = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\right)$.

e) $x_n = 1 + n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

f) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$.

4.5.6 (Regla general de Stolz–Cesàro) Demostrar las siguientes propiedades:

a) Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de números positivos tal que $y_1+\cdots+y_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Entonces, para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

Concluir que si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n$ existe, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n$.

b) Sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión creciente en $\mathbb{R}$ tal que $b_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Entonces, para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Concluir el Teorema 4.4 como caso particular de esta desigualad.

c) Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{R}$ se verifica que

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \le \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Indicación: (a) Sean $s_n = x_1+\cdots+x_n$ y $t_n = y_1+\cdots+y_n$. Si $\limsup_{n\to+\infty} x_n/y_n = \alpha$ y $\alpha \neq +\infty$, para $\alpha < a$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n/y_n \le a$ para $n \ge N$. Sume estas desigualdades y opere para concluir que $s_n - s_{N-1} < a(t_n - t_{N-1})$. Luego, divida por t_n y tome límite superior en esta desigualdad. (b) y (c) son casos particulares de (a).

Capítulo 5

Series

En este capítulo estudiaremos un tipo especial de sucesiones en $\mathbb{R}$ dadas por las sumas parciales de una sucesión dada. Estos objetos se conocen como series numéricas. Presentaremos sus propiedades generales así como algunos criterios para determinar la convergencia o divergencia de las mismas. Entre ellos destacamos el criterio de comparación, de la raíz y el cociente, así como el de Dirichlet y Leibniz. Otros criterios de convergencia serán incluidos en los Proyectos 11.1 y 11.2. Además discutiremos el proceso de reordenación de series, incluyendo el Teorema de Riemann y su aplicación a series indexadas por conjuntos contables. Como aplicaciones incluimos una sección sobre el número e de Euler así como un estudio preliminar de series de potencias, de fundamental importancia en la teoría de funciones analíticas. En efecto, muchas de las funciones básicas del Cálculo se definen a través de series, ver el Capítulo 9. Finalmente, y como contenido opcional, incluimos el Teorema de Tannery sobre el intercambio de límites y series y su aplicación a series dobles.

5.1. Series numéricas

Definición 5.1 (Series numéricas)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Consideramos la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de *sumas parciales* definida por $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Decimos que la *serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge a* s si

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s.$$

En dado caso escribiremos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. También es común referirse a s como la *suma* de la serie dada.

Nota 5.1.1. Recalcamos que la noción de serie también es válida en espacios vectoriales normados $(E, \|\cdot\|)$, porque allí tenemos la suma de vectores y la norma. Sin embargo, nos centraremos solo en el caso real.

Nota 5.1.2. Esta definición de suma satisface la propiedad de traslación

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \cdots = s_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Por tanto, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s, entonces la *sucesión de colas* $\{\sum_{n=m}^{\infty} a_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiende a cero. En símbolos,

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_n = 0.$$

Nota 5.1.3. En muchos casos, los términos a_n de la serie bajo estudio no están definidos para todo $n \in \mathbb{N}$, sino a partir de un valor natural n_0. En este caso escribiremos la serie como $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Las sumas parciales de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están definidas recursivamente por

$$s_n = a_n + s_{n-1}. \tag{5.1}$$

Por tanto, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s, entonces $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$. Así tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 5.1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sin embargo, esta condición dista de ser suficiente para concluir convergencia.

Ejemplo 5.1.1 (Serie armónica)**.** Los *números armónicos* se definen como $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ y su límite recibe el nombre de la *serie armónica*, dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Su divergencia fue demostrada por Nicolas Oresme en su libro *Quaestonies super Euclidis Geometriam*, (1348) [27]. Esta conclusión se sigue de la desigualdad

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{2^m+k} > \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}, \quad m \geq 1.$$

En efecto, si $N > 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{2^j+k} > 1 + \frac{N}{2},$$

y por tanto las sumas parciales de la serie armónica no son acotadas.

Ejemplo 5.1.2 (Serie geométrica)**.** Recordando la Sección 4.3, la serie geométrica de razón a converge si y solo si $|a| < 1$. A partir de ella es inmediato verificar que

$$\sum_{n=m}^{\infty} ca^n = \sum_{j=0}^{\infty} ca^{m+j} = \frac{ca^m}{1-a}, \qquad \text{para } |a| < 1, c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 5.1.3 (Series telescópicas)**.** Toda sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede ver como la sucesión de sumas parciales de alguna serie, poniendo $a_0 = b_0$ y $a_n = b_n - b_{n-1}$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$$

es llamada una *serie telescópica*. Ella converge si y solo si $\lim_{n\to+\infty} b_n$ existe, y este límite es la suma de la serie.

Ejemplo 5.1.4 (Series de términos positivos)**.** Si $a_n \geq 0$ para todo n, entonces, por la ecuación (5.1), la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de términos no-negativos y es monótona creciente. Por el Teorema 4.3 la serie converge si y solo si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente. Note también que en este caso, para que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea acotada basta que lo sea una subsucesión de la misma.

Aplicando el criterio de sucesiones de Cauchy obtenemos el siguiente resultado que será útil en demostraciones posteriores.

Proposición 5.2. *Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\mathbb{R}$ converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \epsilon, \qquad \textit{para todo } m \geq n \geq N.$$

Un ejemplo de cómo aplicar este criterio es en la relación entre convergencia usual y absoluta. Para ello recordamos la siguiente definición.

Definición 5.2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Proposición 5.3. *Si una serie converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Basta aplicar la desigualdad triangular,

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j|,$$

para verificar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ satisface la condición de Cauchy de la Proposición 5.2. □

En la Sección 5.5 veremos ejemplos donde el recíproco de esta proposición es falso.

Ejercicios

5.1.1 Mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = \frac{1}{F_1 F_2} = 1,$$

donde $k \in \mathbb{N}^+$ y F_n denota el n-ésimo número de Fibonacci, Ejercicio 1.1.5. Indicación: son series telescópicas.

5.1.2 Demostrar que

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}} \qquad \text{converge si } |a| \neq 1,$$

y que su suma es $a/(1-a)$ si $|a| < 1$ y $1/(1-a)$ si $|a| > 1$. Indicación: recordar la identidad $\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$, donde $x \neq \pm 1$.

5.1.3 Justifique geométricamente a través de la Figura 5.1 (semejanza de triángulos) la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, para $0 < r < 1$.

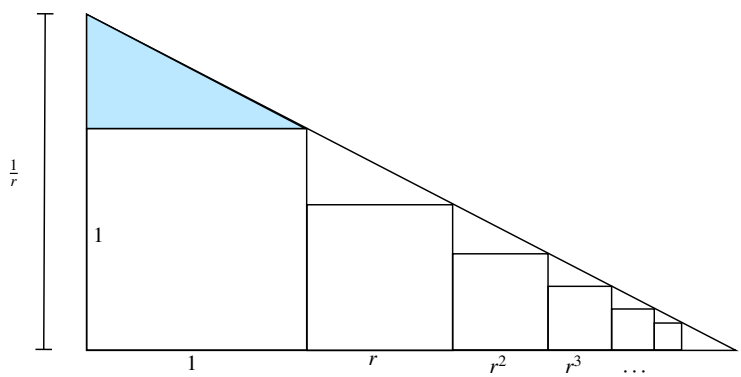

Figura 5.1: Otro argumento para sumar la serie geométrica.

5.1.4 Usar el Ejercicio 1.3.1 para comprobar la suma de la serie geométrica derivada

$$1 + 2r + 3r^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}, \qquad |r| < 1.$$

Compruebe también esta identidad recurriendo a la Figura 5.2. Una fórmula más general se dará en (9.7) del Ejemplo 9.3.3.

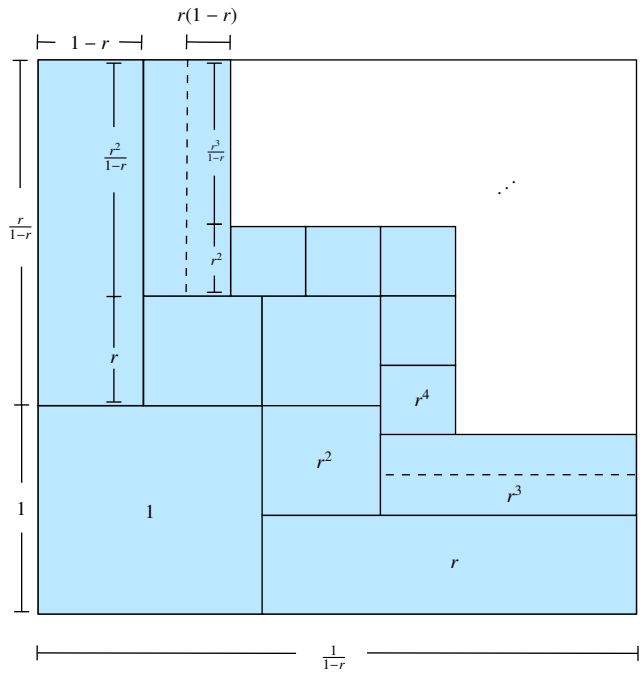

Figura 5.2: La suma de la serie geométrica derivada.

5.1.5 Considere una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ que se obtiene a partir de otra $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, agregando ceros entre a_{n_k} y $a_{n_{k+1}}$ para una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Comprobar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ también converge a s.

5.1.6 (Abel-Pringsheim) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos positivos y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.$$

Demostrar este enunciado primero empleando la condición de Cauchy con $m = 2n$ para mostrar que $na_{2n} \to 0$ y luego acotar por $(2n+1)a_{2n+1} \leq 4na_{2n}$ para tratar el caso de índices impares. Utilizar esta propiedad para comprobar nuevamente la divergencia de la serie armónica.

5.1.7 Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_n$ de vectores $\{\boldsymbol{x}_n = (a_{1,n}, \ldots, a_{d,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ si y solo si cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}$, $j = 1, \ldots, d$ converge en $\mathbb{R}$. En este caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{1,n}, \ldots, a_{d,n}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}, \ldots, \sum_{n=0}^{\infty} a_{d,n} \right) \in \mathbb{R}^d.$$

5.1.8 Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ es una serie convergente de términos positivos. Demostrar que si

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^+,$$

entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. ¿Por qué esto generaliza el Ejercicio 4.3.3?

5.1.9 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y completo respecto a la métrica inducida por dicha norma. Si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E y la sucesión de números reales definida por

$$s_n = \|v_0\| + \|v_1\| + \cdots + \|v_n\|$$

converge, demostrar que la sucesión de vectores $w_n := v_0+v_1+\cdots+v_n$ converge en E. En particular, esta propiedad es válida en $\mathbb{R}^d$. También en $(C_b(Y, X), \|\cdot\|_Y)$, ver Teorema 9.3. Indicación: Imitar la demostración de las Proposiciones 5.2 y 5.3.

5.2. Criterios de convergencia

En general, determinar el valor de la suma de una serie convergente es un problema difícil. Sin embargo, decidir sobre su convergencia es una tarea razonable que se puede llevar a cabo a través de distintos criterios que se han desarrollado a lo largo del tiempo. En este capítulo y en los Proyectos 11.1 y 11.2 estudiaremos varios de ellos, siendo su base el criterio de comparación.

Teorema 5.1 (Comparación)**.** *Asuma que* $0 \le a_n \le b_n$*, para todo* $n \ge N_0$.

1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Demostración. Sean $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, dado $\epsilon > 0$, por el criterio de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|t_m - t_n| < \epsilon$, $m \ge n \ge N$. Por tanto, si $m \ge n \ge \text{máx}\{N, N_0\}$, entonces

$$|s_m - s_n| \le t_m - t_n < \epsilon,$$

y así $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. (2) es equivalente a (1). □

Corolario 5.1 (Paso al límite)**.** *Suponga que* $a_n, b_n > 0$ *para todo* $n \ge N_0$*. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge.*
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverge, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración. (1) Por definición de límite, para $\epsilon = c/2 > 0$, existe $N \geq N_0$ tal que

$$|a_n/b_n - c| < c/2, \qquad \text{es decir} \quad c/2 < a_n/b_n < 3c/2, \quad n \geq N.$$

El resultado se sigue del criterio de comparación.

(2) Si dicho límite es cero, para $\epsilon = 1$, existe $N \geq N_0$ tal que $a_n/b_n < 1$, es decir, $0 < a_n < b_n$. De nuevo, la conclusión se sigue del criterio de comparación. (3) En este caso $b_n/a_n \to 0$ y el mismo razonamiento concluye el resultado. □

Ejemplo 5.2.1. Sea $0 < s < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha s^n$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha s^n}{s_0^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(s_0/s)^n} = 0, \qquad \text{para todo } 0 < s < s_0 < 1,$$

y $\sum_{n=0}^{\infty} s_0^n$ converge, lo mismo es válido para la serie original.

El argumento usado en el análisis de la serie armónica, Ejemplo 5.1.1, se puede generalizar en el siguiente criterio de condensación debido también a Cauchy.

Teorema 5.2 (Condensación)**.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge. Además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demostración. Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$, ambas monótonas crecientes de términos positivos.

Si $n < 2^k$, dividiendo el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$ en bloques de longitud 2^j, $j = 0, 1, \ldots, k$, obtenemos la desigualdad

$$0 \leq s_n \leq s_{2^k} \leq s_{2^{k+1}-1} = \sum_{j=0}^{k} (a_{2^j} + a_{2^j+1} + \cdots + a_{2^{j+1}-1}) \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = t_k. \tag{5.2}$$

Entonces, si $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si $n > 2^k$, dividiendo en bloques de tamaño 2^j, obtenemos que

$$s_n \geq s_{2^k} = a_1 + \sum_{j=0}^{k-1} (a_{2^j+1} + \cdots + a_{2^{j+1}}) \geq a_1 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^{j+1}} = \frac{a_1}{2} + \frac{t_k}{2} \geq \frac{t_k}{2} \geq 0, \tag{5.3}$$

y el resultado se sigue de nuevo del criterio de comparación. Finalmente, las desigualdades requeridas se siguen de (5.2) y (5.3) al hacer $n, k \to +\infty$. □

Ejemplo 5.2.2 (La función zeta de Riemann)**.** Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Por la Proposición 5.1 basta estudiar el caso $p > 0$. Como la sucesión $\{1/n^p\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente y positiva, el criterio de condensación de Cauchy indica que esta serie converge si y solo si la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} \text{ converge.}$$

Como esta es una serie geométrica de razón 2^{1-p}, esta converge si y solo si $p > 1$. Por tanto, la fórmula

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

define una función para $s > 1$. Esta es la famosa función *zeta* de Riemann.

Nota 5.2.1. Determinar el valor de la suma para el caso $p = 2$ se conoce como el *problema de Basilea* y fue resuelto por L. Euler en 1734 quien demostró que

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.4}$$

En el Ejemplo 5.7.2 veremos una manera de deducir esta sorprendente fórmula. Para $\zeta(4)$ vea el Ejercicio 5.6.6. En general, los valores $\zeta(2k)$, para $k \in \mathbb{N}^+$ se pueden expresar explícitamente en términos de los números de Bernoulli, como lo veremos en el Teorema 13.2 del Proyecto 13.1. Note que el caso $p = 3$ fue mencionado en la Nota 1.4.1 del Capítulo 1.

Ejemplo 5.2.3. Consideremos la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Note que la sucesión $\{\alpha_n = H_n/n^2\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente porque la desigualdad $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ equivale a $n^2 H_{n+1} < (n+1)^2 H_n$, es decir, a $1 < \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) H_n$, que claramente es válida. Por el criterio de condensación de Cauchy basta estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \alpha_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2^n}}{2^n}.$$

Ella converge porque $H_{2^n} \le t_n = n+1$ ((5.2) para $a_l = 1/l$) y $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)/2^n$ converge gracias al Ejemplo 5.2.1. Del Ejemplo 5.6.6 más adelante podemos deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1} + \frac{1}{n}}{n^2} = 1 + \zeta(2,1) + (\zeta(3) - 1) = 2\zeta(3),$$

relación debida a Euler.

Otra consecuencia interesante del criterio de comparación es la extensión de la desigualdad de Cauchy–Schwarz para series.

Teorema 5.3 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Asuma que las series de números reales* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ *convergen. Entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge absolutamente y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}.$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas finitas, Proposición 2.1, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} b_n^2\right)^{1/2} \leq A^{1/2} B^{1/2},$$

donde $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$. Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|$ converge al ser de términos positivos. La desigualdad se sigue de tomar $N \to +\infty$. □

Nota 5.2.2. Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos, siempre es posible construir otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, también convergente cuyos términos crecen a mayor velocidad que a_n, en el siguiente sentido:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{a_n} = +\infty.$$

Por ejemplo, sea $A_n = a_n/\sqrt{r_n}$, donde $r_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$ es la cola de la serie inicial. Note que $r_n \to 0$, y por tanto $A_n/a_n = 1/\sqrt{r_n} \to +\infty$. Observe además que $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente y así

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}) = a_n\left(1 + \frac{\sqrt{r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}}\right) \leq 2a_n = 2(r_n - r_{n+1}).$$

Al dividir por $\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}$ concluimos que $A_n \leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$. El criterio de comparación indica entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converge porque $\sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = 2\sqrt{r_1}$.

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es una serie divergente de términos positivos, es posible construir otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$, también divergente cuyos términos crecen a menor velocidad que d_n de forma que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{d_n} = 0.$$

En este caso basta tomar $D_n = d_n/s_n$, donde $s_n = d_1 + \cdots + d_n$. Como $s_n \to +\infty$, vemos que $D_n/d_n = 1/s_n \to 0$. Además, al ser $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ creciente, tenemos que

$$\frac{d_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{d_{N+k}}{s_{N+k}} \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{d_{N+j}}{s_{N+k}} = \frac{s_{N+k} - s_N}{s_{N+k}} = 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}.$$

Esto en particular demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ no satisface la condición de Cauchy, Proposición 5.2, y por tanto diverge.

La construcción de $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ se debe a du Bois Reymond y la de $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ fue hecha por N. Abel, ver [11]. Para un argumento geométrico sobre el comportamiento de estas series ver el Ejercicio 8.7.3.

Ejercicios

5.2.1 Aplicar el criterio de comparación para dar una demostración alternativa de la Proposición 5.3. Indicación: $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$.

5.2.2 Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_n$, donde:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

b) $a_n = \dfrac{\ln n}{n^p}$, $p > 0$.

c) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+\sqrt{n}}$.

d) $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$.

e) $a_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

f) $a_n = 1/n^{\frac{n}{\ln n}}$.

Indicación: (b) Ejercicio 4.2.8(b). Las series en (e) y (f) se pueden sumar explícitamente de forma sencilla.

5.2.3 Determinar para qué valores del parámetro $\alpha > 0$ las siguientes series convergen o divergen:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{\alpha}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^{-\alpha})$.

c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{\alpha}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\ln(n)}$.

Nota 5.2.3. En cursos de Cálculo las series (a) y (b) suelen tratarse con el criterio de la integral, ver Proposición 8.6. Sin embargo, el criterio de condensación de naturaleza más elemental también sirve para este propósito.

5.2.4 Emplear las desigualdades del Teorema 5.2 para mostrar que

$$1 < \zeta(p) < \frac{1}{1 - 2^{1-p}}, \text{ si } p > 1 \quad \text{ y en particular que } \quad \lim_{p \to +\infty} \zeta(p) = 1.$$

5.2.5 Imitar la demostración del criterio de condensación para obtener el siguiente enunciado más general: Fije un entero $q \geq 2$ y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ monótona decreciente de términos positivos. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_{q^n}$ converge.

Además
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq (q-1)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_{q^n} \leq q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

5.2.6 (Criterio de comparación de cocientes) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales positivos y asuma que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \text{para } n \geq N.$$
Mostrar que si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge. Indicación: emplee el producto telescópico
$$a_{N+m} = \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N.$$

5.2.7 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ una serie divergente de términos positivos.

a) Demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+d_n} \text{ diverge}, \qquad \text{pero que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+n^2 d_n} \text{ converge.}$$

b) ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$?

Indicación: $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si $n = m^2$ y $d_n = \frac{1}{n^2}$ en los demás casos.

c) Si $s_n = d_1 + \cdots + d_n$, entonces $\displaystyle\frac{d_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$. Concluya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{s_n^2}$ converge.

5.2.8 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de números reales.

a) Si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ también convergen.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ converge, para todo $p \geq 1$.

5.3. El número de Euler

Como aplicación de la teoría desarrollada hasta este punto del texto estudiaremos en esta sección una de las constantes fundamentales del Análisis. Se trata del *número de Euler* que se define como la suma de la serie
$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Esta serie converge porque sus sumas parciales se pueden acotar por

$$s_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} < 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} < 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + 2 = 3.$$

Además la serie converge rápidamente y podemos estimar su valor observando que

$$0 < e - s_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+j)!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{j-1}} = \frac{1}{n \cdot n!}. \tag{5.5}$$

Existen formas equivalentes de calcular e, como el siguiente límite fundamental.

Teorema 5.4. $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Además e es un número irracional.*

Demostración. Considere $s_n = \sum_{j=0}^{n} 1/j!$ y $t_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Por el Teorema del Binomio, Ejercicio 1.3.2, podemos escribir

$$t_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}, \qquad \text{donde } \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j j!} \leq \frac{1}{j!}, \tag{5.6}$$

porque $n - l \leq n$ si $l \geq 1$. Por tanto $t_n \leq s_n$, para todo $n \geq 1$. Tomando límite superior obtenemos que

$$\limsup_{n\to+\infty} t_n \leq e. \tag{5.7}$$

Por otro lado, fijando m y dado $n \geq m$, tenemos que

$$t_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \geq 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right).$$

Tomando límite inferior (en n) vemos que

$$\liminf_{n\to+\infty} t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m, \qquad \text{para todo } m \geq 1.$$

Finalmente, haciendo $m \to +\infty$ (note que esto es posible porque ya sabemos que estos límites existen), concluimos que

$$e \leq \liminf_{n\to+\infty} t_n. \tag{5.8}$$

Las desigualdades (5.7) y (5.8) demuestran el límite requerido.

Para mostrar que e es irracional procedemos por contradicción. Si $e = p/q$, con $p, q \in \mathbb{N}^+$, aplicando la desigualdad (5.5) para $n = q$ obtenemos que

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Pero de sus definiciones deducimos que $q!e, q!s_q \in \mathbb{N}$. Por tanto, la desigualdad anterior indicaría la existencia de un entero en el intervalo $(0, 1)$, hecho que es falso. Por tanto, e no puede ser racional. □

Nota 5.3.1. Es posible también demostrar que e es trascendente. El lector puede consultar [62] para una prueba de este hecho.

Ejercicios

5.3.1 Mostrar que $(1-\frac{1}{n})^n \to 1/e$ y (empleando subsucesiones) que $(1+\frac{2}{n})^n \to e^2$, cuando $n \to +\infty$.

5.3.2 Empleando la expansión binomial, mostrar que la sucesión $t_n = (1+\frac{1}{n})^n$ es estrictamente creciente.

5.3.3 [143] Sea $u_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Mostrar que

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1},$$

y emplear la desigualdad de Bernoulli, Ejercicio 1.4.7, para concluir la desigualdad $u_{n-1}/u_n > 1$, es decir, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente. Como $u_n \to e$ si $n \to +\infty$, y recordando que $t_n \le s_n = \sum_{j=0}^{n} 1/j!$, deduzca las desigualdades

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \ge 1.$$

Es posible mejorar la segunda desigualdad cambiando el exponente $n+1$ por $n+\frac{1}{2}$, ver el Ejercicio 12.1.10.

5.3.4 Demostrar que

$$(n+1)^n < e^n n!, \qquad n \ge 1,$$

usando inducción y la primera desigualdad del Ejercicio 5.3.3.

5.3.5 Demostrar que

$$e\left(\frac{k}{e}\right)^k \le k! \le ek\left(\frac{k}{e}\right)^k, \quad k \ge 1.$$

Indicación: multiplicar las desigualdades del Ejercicio 5.3.3 para $n=1,\dots,k-1$.

5.3.6 [44] La siguiente es una demostración alternativa (2018) de la irracionalidad de e basada en la igualdad $e = 1+\frac{1}{1}\left(1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}(1+\cdots)\right)\right)$ y en propiedades de la sucesión

$$x_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) x_n es una serie convergente y $x_n = \frac{1}{n}(1+x_{n+1})$.

b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es estrictamente decreciente y positiva.

c) $e = 1+x_1 = 1+\frac{1}{1}(1+x_2) = 1+\frac{1}{1}(1+\frac{1}{2}(1+x_3)) = \cdots$.

Si e fuera racional, por (c) cada x_n lo sería, digamos $x_n = p_n/q_n$ con p_n, q_n enteros positivos, primos relativos entre si. Por (a), $p_{n+1}/q_{n+1} = (np_n - q_n)/q_n$ y como la primera fracción es irreducible, $q_n \geq q_{n+1}$. Empleando (b) concluya que $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > 0$ llegando a una contradicción.

5.4. Criterios de la raíz y del cociente

Los criterios que presentamos en esta sección son de gran utilidad para determinar la convergencia absoluta de una serie. En realidad, tanto el criterio de la raíz como el del cociente (también conocido como criterio de la razón de D'Alembert) consisten en comparar la serie dada con una serie geométrica. Ambos criterios se expresan en términos de límites superiores e inferiores y por tanto son versiones más precisas que las estudiadas usualmente en cursos de Cálculo.

Teorema 5.5 (Criterio de la raíz)**.** *Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, considere $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

1. *Si $\alpha < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*
2. *Si $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*
3. *Si $\alpha = 1$, el criterio no da información sobre la convergencia.*

Demostración. (1) Si $\alpha < \beta < 1$, por el Teorema 4.8 (2), existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$. Por tanto,

$$|a_n| \leq \beta^n, \quad n \geq N.$$

Por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ converge.

(2) Por el Teorema 4.8 (1), existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha$, si $k \to +\infty$. Como $\alpha > 1$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$, si $k \geq K$, esto es $|a_{n_k}| > 1$. En particular, $|a_n| \not\to 0$ si $n \to +\infty$ y dicha serie no puede converger.

(3) Las series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, $s = 1, 2$, satisfacen $\alpha = 1$, pero una converge y la otra diverge. □

Teorema 5.6 (Criterio del cociente)**.** *Considere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\mathbb{R}$ y asuma que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, para $n \geq N_0$. Entonces:*

1. *Si $\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, la serie converge absolutamente.*
2. *Si $1 < \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la serie diverge.*
3. *Si $\liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, el criterio no decide sobre la convergencia de la serie.*

Demostración. (1) Si $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, fije $\alpha < \beta < 1$ y determine $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0$, tal que si

$$n \geq N, \qquad \text{entonces } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \beta,$$

Teorema 4.8 (2). Por tanto, $|a_{n+1}| \leq \beta|a_n|$, $n \geq N$. De esta forma tenemos que

$$|a_{N+1}| \leq \beta|a_N|, \quad |a_{N+2}| \leq \beta|a_{N+1}| \leq \beta^2|a_N|, \quad \ldots, \quad |a_{N+k}| \leq \beta^k|a_N|.$$

De manera equivalente,

$$|a_n| \leq \beta^n(\beta^{-N}|a_N|) = C\beta^n, \qquad n \geq N,$$

donde $C \geq 0$ es independiente de n. Por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ converge.

(2) Si $1 < \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, por el Teorema 4.8 (2) para el límite inferior, existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0$, tal que $1 < |a_{n+1}|/|a_n|$, si $n \geq N$. Por tanto,

$$|a_n| > |a_{n-1}| > \cdots > |a_{N+1}| > |a_N| > 0.$$

y la condición $a_m \to 0$ si $m \to +\infty$, necesaria para la convergencia, no se cumple.

(3) Podemos emplear las mismas series que en la demostración del criterio de la raíz para concluir. □

El criterio de la raíz es más preciso que el del cociente, en el sentido que explican las siguientes desigualdades fundamentales.

Teorema 5.7. *Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}. \tag{5.9}$$

En particular,

$$\textit{si} \lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = c, \textit{ entonces } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = c.$$

Demostración. Sea $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$. Si $\alpha = +\infty$, no hay nada que probar. Si es finito, tome $\alpha < \beta$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq N, \qquad \text{entonces } \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \beta.$$

Argumentando como en la demostración del Teorema 5.6, concluimos que

$$c_n \leq \beta^n(\beta^{-N}c_N) = C\beta^n, \qquad \text{es decir} \qquad \sqrt[n]{c_n} \leq C^{1/n}\beta, \quad n \geq N.$$

Tomando límite superior a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \lim_{n\to+\infty} C^{1/n}\beta = \beta.$$

Como $\beta > \alpha$ fue arbitrario, vemos que $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha$, como se requería. La desigualdad restante se demuestra de la misma forma. □

Nota 5.4.1. Para una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de términos distintos de cero el teorema anterior demuestra que si $\lim_{n\to+\infty} |a_n/a_{n-1}| = \alpha$ existe, entonces $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ también existe y es igual a α. Por tanto, en este caso el criterio de la raíz da la misma información que el criterio del cociente. En general, este criterio depende del comportamiento de cada razón consecutiva $|a_n/a_{n-1}|$, mientras que el criterio de la raíz estudia la media geométrica de estas fracciones, porque

$$|a_n|^{1/n} = \left(\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\right)^{1/n} |a_0|^{1/n}.$$

Empleando las desigualdades entre medias geométrica y aritmética, ver Ejercicio 7.3.7, de hecho podemos estimar estos valores por

$$\frac{n}{\left|\frac{a_0}{a_1}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right| + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|} \leq \frac{|a_n|^{1/n}}{|a_0|^{1/n}} \leq \frac{\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| + \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|}{n}. \tag{5.10}$$

A partir de estas desigualdades podemos concluir que si $\lim_{n\to+\infty} |a_n/a_{n-1}| = \alpha$, entonces $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \alpha$. En efecto, si $\alpha > 0$ empleamos el Ejercicio 4.2.9, que $|a_0|^{1/n} \to 1$ y ambas desigualdades en (5.10). En el caso $\alpha = 0$ basta tener en cuenta solo la desigualdad de la derecha. Estos argumentos están basados en [39] y [60, Theorem 20].

Ejemplo 5.4.1. Las desigualdades del Teorema 5.7 en general son estrictas. Como ejemplo considere la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots, \qquad a_{2n} = \frac{1}{3^n}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Para aplicar el criterio de la raíz, como $\sqrt[2n]{a_{2n}} = 1/3^{1/2}$, $\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = 1/2^{\frac{n+1}{2n+1}}$, obtenemos

$$\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Para el criterio del cociente, $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ y $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. Así

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < +\infty = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Note que para esta serie el criterio del cociente no provee información, mientras que el criterio de la raíz sí permite concluir convergencia.

Ejemplo 5.4.2. Considere la sucesión $c_n = n$. Recordando que $(n+1)/n \to 1$, se sigue la fórmula $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$. De la misma forma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

porque al escoger $c_n = n^n/n!$ obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Terminamos esta sección con una revisión sobre series de potencias con coeficientes reales.

Definición 5.3. Una *serie de potencias* es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \text{donde } a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

El valor x_0 se conoce como el *centro* de la serie.

En este sentido, una serie de potencias es una función de la variable x. Estas funciones se denominan *analíticas* y su estudio completo se realiza en un curso de Variable Compleja. En este texto nos limitaremos a desarrollar algunas de sus propiedades básicas, en particular, como modelos de series para aplicar los criterios de la raíz y del cociente.

Teorema 5.8 (Fórmula de Hadamard)**.** *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $|x-x_0| < R$ y diverge si $|x-x_0| > R$, donde*

$$R = \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si $\alpha = 0$, $R = +\infty$ (converge en todo $\mathbb{R}$). El valor R y el conjunto $(x_0 - R, x_0 + R)$ se denominan el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie, respectivamente. Además, si $a_n \neq 0$ a partir de algún $N \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta$ existe, entonces $R = 1/\beta$.

Demostración. Aplicando el criterio de la raíz a $a_n(x-x_0)^n$ la serie converge si

$$\limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

de donde se sigue el primer enunciado. Al aplicar el criterio del cociente a $a_n(x-x_0)^n$ obtenemos que la serie converge si

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Si suponemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = \beta$, por el Teorema 5.7, $\beta = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, demostrando así la segunda afirmación. □

Ejemplo 5.4.3. El ejemplo fundamental es la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

En este caso el centro es $x_0 = 0$, los coeficientes son $a_n = 1$ y radio es $R = 1$. Además la serie diverge en los extremos $x = \pm 1$ del intervalo de convergencia. Por otro lado, tenemos la serie

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1,$$

cuyo centro es $x_0 = 0$, $a_{2n} = 1$ y $a_{2n+1} = 0$. En este caso $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Note que no es posible aplicar el criterio del cociente porque la serie tiene infinitos términos nulos. Esta serie también diverge en los extremos $x = \pm 1$. Una situación análoga la presenta la serie

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n},$$

donde $a_m = 2^n$ si $m = 2^n$ y es 0 en los demás casos. Calculando su radio de convergencia a través de la subsucesión $a_{2^n} = 1$ obtenemos que $R = 1$. En este caso el criterio del cociente tampoco es aplicable.

Ejemplo 5.4.4. Considere las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Ambas tienen radio de convergencia $R = 1$ y la primera converge en el extremo $x = -1$ (Ejemplo 5.5.1 más adelante), pero diverge en $x = 1$, mientras que la segunda converge en ambos extremos. En general, para cada serie particular hay que analizar el comportamiento en los extremos por separado.

Finalizamos esta sección con el estudio del producto de Cauchy entre series numéricas. Para series de potencias, si se multiplican formalmente y se agrupan los coeficientes con la misma potencia de x obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right) x^n. \tag{5.11}$$

Basados en esta situación y poniendo $x = 1$ consideramos la siguiente definición.

Definición 5.4. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son dos series de números reales, su *producto de Cauchy* se define como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Aunque el producto de Cauchy de series convergentes no necesariamente converge, ver Ejemplo 5.5.3 más adelante, cuando alguno de los factores converge absolutamente la situación mejora substancialmente.

Teorema 5.9 (Mertens)**.** *Suponga que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen a s y t, respectivamente, y sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ su producto de Cauchy. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge a st.*

Demostración. Sean $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ y $\beta_n = t_n - t$. Entonces

$$u_n = a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_n t_0 = a_0(\beta_n + t) + a_1(\beta_{n-1} + t) + \cdots + a_n(\beta_0 + t) = s_n t + \gamma_n,$$

donde $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$. Para terminar de demostrar la afirmación basta ver que $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$. Para ello, sea $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ y tome $\epsilon > 0$. Por hipótesis $\beta_n \to 0$ si $n \to +\infty$, así que podemos elegir N tal que $|\beta_n| < \epsilon$, si $n \geq N$. Entonces

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |a_n\beta_0 + \cdots + a_{n-N+1}\beta_N| + |\beta_{N+1}a_{n-N} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |a_n\beta_0 + \cdots + a_{n-N+1}\beta_N| + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

Como $\lim_{m\to+\infty} a_m = 0$, manteniendo N fijo y tomando límite superior sobre n obtenemos $\limsup_n |\gamma_n| \leq \epsilon\alpha$. Pero ϵ fue arbitrario, así que $\liminf_n |\gamma_n| = \limsup_n |\gamma_n| = 0$ como se requería. □

En el Teorema 11.6 del Proyecto 11.3 veremos un resultado paralelo al teorema anterior, sin la hipótesis de convergencia absoluta.

El teorema anterior garantiza en particular que el producto de Cauchy de dos series de potencias con radio de convergencia positivo también converge y que la igualdad en (5.11) es válida en la intersección de los intervalos de convergencia de las series de la izquierda.

Ejemplo 5.4.5. La *función exponencial* se define por la serie

$$e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

con centro en $x_0 = 0$ y coeficientes $a_n = 1/n!$. En este caso la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ como lo demuestra el criterio del cociente. Además, es claro de la definición que

$$e^x > 1 + x, \qquad \text{para } x > 0. \tag{5.12}$$

Por otra parte, una de las propiedades fundamentales de esta función es que

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Para demostrarlo podemos aplicar el Teorema 5.9 para multiplicar

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y},$$

estableciendo así la igualdad. Esta propiedad en particular implica que $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ porque $e^x e^{-x} = e^0 = 1$.

Ejercicios

5.4.1 *a*) Comprobar que cualquiera de las siguientes condiciones para una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ implica que $a_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$:

i) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$

ii) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$

b) Aplicar el enunciado anterior para concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{(1+p)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

donde $p > 0$, $k \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

5.4.2 Discutir la convergencia de las series $\sum a_n$ con

a) $a_n = \dfrac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$.

b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

c) $a_n = \dfrac{1}{1+x^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) $a_n = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$.

e) $a_n = 1/(\ln n)^{\ln n}$.

5.4.3 Comprobar los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/n}}{n} = \frac{4}{e}.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{1/n} = e.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+2)(n+4)\cdots(n+2n))^{1/n}}{n} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$ (considere subsucesiones).

5.4.4 Determinar $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, $\liminf_n \sqrt[n]{|a_n|}$, $\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ y $\liminf_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ para las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + a + b + a^2 + b^2 + \cdots$, con $0 < a < b < 1$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a + 1 + a^3 + a^2 + a^5 + a^4 + \cdots$, con $0 < a < 1$.

c) [60] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + (-1)^{n+1})!^2}{(2n + (-1)^n)!^2} = \frac{(2!)^2}{(1!)^2} + \frac{(1!)^2}{(5!)^2} + \frac{(4!)^2}{(5!)^2} + \frac{(3!)^2}{(9!)^2} + \cdots.$

5.4.5 Fije $|q| < 1$ y $p > 0$. Determinar el radio de convergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cdot x^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n.$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln n)^2 x^n.$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n + 3n} x^n.$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!^p}.$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

5.4.6 Demostrar que si $a_n \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con infinitos términos no nulos, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es a lo más 1.

5.4.7 [98] El objetivo de este ejercicio es demostrar la divergencia de las series de recíprocos de los enteros libres de cuadrados y de los números primos.

a) Un número $n \in \mathbb{N}^+$ se dice *libre de cuadrados* si no es divisible por ningún entero de la forma j^2, con $j > 1$. Sea

$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, \ldots\}$$

el conjunto de estos números. Si $\sum_{n\in\mathcal{K}} 1/n = 1+1/2+1/3+1/5+1/6+\cdots$, argumentar por qué

$$\left(\sum_{k<n, k\in\mathcal{K}} \frac{1}{k}\right)\left(\sum_{j<n} \frac{1}{j^2}\right) \geq \sum_{m<n} \frac{1}{m},$$

y concluir por comparación que la serie $\sum_{n\in\mathcal{K}} 1/n$ diverge.

b) Demostrar que la serie de recíprocos de los primos $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p$ diverge. En efecto, por contradicción, si esta convergiera a algún valor b, aplique la desigualdad (5.12) para mostrar que

$$e^b > \exp\left(\sum_{p<n} \frac{1}{p}\right) = \prod_{p<n} e^{1/p} > \prod_{p<n}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \sum_{k<n, k\in\mathcal{K}} \frac{1}{k},$$

y obtener una contradicción con el numeral anterior.

El Ejercicio 8.6.12 contiene más información sobre la serie $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p$.

5.4.8 (∗) La *función de Möbius* $\mu : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ se define por $\mu(1) = 1$ y si $n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r} > 1$ es su descomposición en factores primos, $\mu(n) = (-1)^r$ si $k_1 = \cdots = k_r = 1$, y $\mu(n) = 0$ para los demás casos.

a) Mostrar que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases},$$

donde la suma se toma sobre todos los divisores d de n. Indicación: si $n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r} > 1$, los divisores d que contribuyen a la suma son $p_1^{\epsilon_1}\cdots p_r^{\epsilon_r}$, con $\epsilon_j = 0$ o 1.

b) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)/n^s$ converge absolutamente para $s > 1$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1, \qquad \text{para } s > 1.$$

Esto muestra de forma alternativa que $\zeta(s) \neq 0$ para $s > 1$.

5.5. Criterios de Dirichlet y Leibniz

Los criterios presentados en esta sección están basados en la siguiente fórmula, análoga a la de integración por partes para la integral de Riemann, Proposición 8.7(1).

Lema 5.1 (Sumas por partes)**.** *Dadas las sucesiones* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *considere* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, *con* $s_{-1} = 0$. *Entonces*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} s_n(b_n - b_{n+1}) + s_q b_q - s_{p-1} b_p, \qquad 0 \le p \le q.$$

Demostración. Recordando que $a_n = s_n - s_{n-1}$ obtenemos

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (s_n - s_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} s_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} s_n b_{n+1},$$

de donde se sigue el resultado. □

Teorema 5.10 (Dirichlet)**.** *Suponga que las sumas parciales* s_n *de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *son acotadas. Si*

$$b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots, \qquad y \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Demostración. Si $|s_n| \leq M$, como $b_n - b_{n+1} \geq 0$, entonces

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} s_n(b_n - b_{n+1}) + s_q b_q - s_{p-1} b_p\right|$$
$$\leq \sum_{n=p}^{q-1} |s_n|(b_n - b_{n+1}) + |s_q| b_q + |s_{p-1}| b_p \leq M\left(\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right) = 2Mb_p.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq N$, entonces $b_p \leq b_N < \epsilon/2M$. La convergencia de la serie se sigue del criterio de Cauchy, Proposición 5.2. □

Teorema 5.11 (Leibniz)**.** *Dados $b_n \geq 0$, la serie alternante $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge si*

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \quad y \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Demostración. Tome $a_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet. □

Antes de presentar los ejemplos finales de esta sección, recordamos la noción de convergencia condicional.

Definición 5.5. Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, pero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge condicionalmente*.

Ejemplo 5.5.1. El criterio de Leibniz muestra inmediatamente que la serie alternante $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$ converge. De hecho esta serie se puede sumar explícitamente y su valor es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Por otra parte, la serie no converge absolutamente. Otro ejemplo de la misma naturaleza es la serie de Gregori-Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

que converge condicionalmente. En el Ejemplo 8.6.4 del Capítulo 8 veremos cómo obtener estas sumas. El método clásico se dará en el Ejemplo 11.3.1 empleando el Teorema de continuidad de Abel, ver el Proyecto 11.3.

Ejemplo 5.5.2. La condición de decrecimiento en el criterio de Leibniz es necesaria para concluir la convergencia de la serie. Por ejemplo, aunque $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \to 0$, esta sucesión no es decreciente y de hecho $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n$ diverge. En efecto, escribiendo

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}},$$

vemos que el primer sumando converge, pero el segundo diverge gracias a la desigualdad $1/(n+(-1)^n\sqrt{n}) \geq 1/(2n)$, $n \geq 2$. De esta forma, concluimos la divergencia de la serie original.

Ejemplo 5.5.3. Por el criterio de Leibniz la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge. Si la multiplicamos por si misma usando el producto de Cauchy obtenemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Como $(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$, vemos que

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Por tanto, la condición $c_n \to 0$ no se satisface y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge.

Ejercicios

5.5.1 Utilice el criterio de Leibniz para concluir la convergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)^n}.$

5.5.2 Estudie la convergencia de la serie de Bertrand $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, con $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Respuesta: converge absolutamente si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. Si $x = 1$, converge absolutamente si $\alpha > 1$ o si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. Si $x = \alpha = 1$ y $\beta \leq 1$, entonces diverge. Si $x = -1$, la serie converge si $\alpha > 0$ o si $\alpha = 0$ y $\beta > 0$.

5.5.3 (Sobre el criterio de Leibniz) Considere una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente con $b_n \to 0$ si $n \to +\infty$, y la serie alternante $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$. Si $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j b_j$, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es monótona decreciente y $\{s_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es monótona creciente. Además, $s_{2n+1} \leq s_{2n}$.

b) Aplicar el Teorema 4.3 para mostrar que ambas sucesiones convergen y que su límite B es el mismo. Concluir que

$$s_{2n+1} \leq B \leq s_{2n}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $0 \leq b_0 - b_1 = s_1 \leq B$.

c) Mostrar que $|s_n - B| \leq b_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.5.4 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión k-periódica ($a_{n+k} = a_n$) tal que $a_0+a_1+\cdots+a_{k-1} = 0$. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda n + 1} \text{ converge, para todo } \lambda > 0.$$

En particular, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+q}$ converge para $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ver el Ejercicio 8.6.4 para calcular esta suma en términos de integrales.

5.5.5 Determine, en cada caso, los valores $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n},$$

son convergentes. Indicación: recordar las identidades (13.7) y (13.6). La suma de estas series será dada en el Ejemplo 13.1.1 del Proyecto 13.1.

5.5.6 ($*$) (**Desigualdad de Carleman**) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números reales no negativos, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ converge, donde $\gamma_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Seguir los siguientes pasos para completar la demostración dada por K. Knopp (1882-1957) de este resultado:

a) Emplee sumas por partes, Lema 5.1 y $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, para mostrar que

$$\sum_{j=1}^{q} c_j = \sum_{j=1}^{q} a_j - qc_q < \sum_{j=1}^{q} a_j, \qquad \text{donde } c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}.$$

b) Aplique la desigualdad entre medias geométricas y aritméticas a los valores $ja_j/(n+1)$, $j = 1, \ldots, n$, Ejercicio 7.3.7, para mostrar que

$$c_n \ge \frac{(n!)^{1/n}}{n+1} \gamma_n.$$

Luego aplique el Ejercicio 5.3.4 para terminar la demostración.

Para más información sobre esta desigualdad junto con otras posibles demostraciones, ver [48].

5.6. Reordenación de series y series múltiples

En esta sección discutimos brevemente el proceso de cambiar de orden los términos de una serie en $\mathbb{R}$. El resultado principal es el Teorema de Riemann que indica que si solo tenemos convergencia condicional, entonces podemos reordenar una serie de manera que el resultado de sumar la serie obtenida sea cualquier valor de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Además, introducimos una noción de convergencia para series indexadas por conjuntos contables y exploramos su caracterización a través de convergencia absoluta. Esto en particular permite sumar series absolutamente convergentes a través de bloques. Como ejemplo fundamental discutimos algunos cálculos con la función zeta de Riemann doble.

Definición 5.6. Considere una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Una *reordenación* de la misma es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección.

Teorema 5.12. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, toda reordenación $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ también converge, y todas ellas convergen al mismo valor.*

Demostración. Sean $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ y $s'_n = a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)}$. Por el criterio de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$\sum_{j=n}^{m} \left|a_j\right| < \epsilon.$$

Escoja $p \in \mathbb{N}^+$ tal que $\{0, 1, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(p)\}$. Entonces, si $n > p$, $a_0, a_1, \ldots, a_N$ se cancelan en la diferencia $s_n - s'_n$. Por tanto,

$$|s_n - s'_n| < \epsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$ como se requería. □

Teorema 5.13 (Riemann)**.** *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente y $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, existe una reordenacion $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ que converge a α.*

Demostración. Considere las sucesiones

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

de forma que $p_n, q_n \geq 0$, $p_n - q_n = a_n$ y $p_n + q_n = |a_n|$. En efecto, si $a_n \geq 0$ entonces $p_n = a_n$, $q_n = 0$, mientras que si $a_n < 0$, entonces $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$.

Note que por hipótesis, $\sum_n p_n$ y $\sum_n q_n$ divergen, porque de lo contrario, $\sum_n |a_n|$ sería convergente. Sean $P_1, P_2, \ldots$ los términos no-negativos de $\sum_n a_n$ en el orden en

que aparecen, es decir, los términos no nulos de la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Sean también $Q_1, Q_2, \dots$ los valores absolutos de los términos negativos de $\sum_n a_n$ en el orden en que aparecen, es decir, los valores no nulos de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.

Fije $\alpha \in \mathbb{R}$. Como las series $\sum_n P_n$ y $\sum_n Q_n$ solo difieren de $\sum_n p_n$ y $\sum_n q_n$ en términos que son cero, ellas también divergen. Por tanto, podemos escoger m_1, k_1 números enteros de forma que sean los mínimos que satisfacen

$$x_1 = P_1 + \cdots + P_{m_1} \geq \alpha, \qquad y_1 = P_1 + \cdots + P_{m_1} - (Q_1 + \cdots + Q_{k_1}) \leq \alpha.$$

Luego considere a los mínimos enteros m_2, k_2 de forma que

$$x_2 = P_1 + \cdots + P_{m_1} - (Q_1 + \cdots + Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} \geq \alpha,$$

$$y_2 = P_1 + \cdots + P_{m_1} - (Q_1 + \cdots + Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - (Q_{k_1+1} + \cdots + Q_{k_2}) \leq \alpha.$$

Continuando inductivamente consideramos las sumas $x_n = P_1 + \cdots + P_{m_n}$ y $y_n = P_1 + \cdots - Q_{k_n}$, donde m_n, k_n se eligen de manera que

$$x_n \geq \alpha, \quad y_n \leq \alpha, \quad x_n - P_{m_n} < \alpha, \quad y_n + Q_{k_n} > \alpha,$$

es decir $|x_n - \alpha| \leq P_{m_n}$ y $|y_n - \alpha| \leq Q_{k_n}$.

Este proceso genera la reordenación de $\sum_n a_n$ dada por

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots .$$

El objetivo consiste en demostrar que ella converge a α. Si $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ denota la sucesión de sus sumas parciales, empleando los enteros $m_1, m_1 + k_1, k_1 + m_2, m_2 + k_2, \dots$ para descomponer a $\mathbb{N}^+$ en intervalos, la elección de m_n y k_n establece las siguientes propiedades:

1. Si $j = k_{n-1} + m_n$, entonces $s_j = x_n$. Si $j = m_n + k_n$, entonces $s_j = y_n$.
2. Si $k_{n-1} + m_n < j < m_n + k_n$, entonces
$$y_n \leq \alpha < s_j, \qquad \text{y así} \qquad |s_j - \alpha| = \alpha - s_j < \alpha - y_n < Q_{k_n}.$$
3. Si $m_n + k_n < j < k_n + m_{n+1}$, entonces
$$\alpha < s_j \leq x_n, \qquad \text{y por tanto} \qquad |s_j - \alpha| = s_j - \alpha < x_n - a < P_{m_n}.$$

Como $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ y $\{-Q_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ son subsucesiones de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ y $a_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, entonces $P_m, Q_m \to 0$ si $m \to +\infty$. Las desigualdades establecidas anteriormente permiten concluir que

$$\lim_{j\to+\infty} s_j = \alpha,$$

como era requerido. El caso $\alpha = \pm\infty$ es similar, ver Ejercicio 5.6.1. □

Nota 5.6.1. Existe una versión más general de este teorema para series de vectores en $\mathbb{R}^d$, conocido como el *Teorema de Lévy-Steinitz* que afirma que las sumas de reordenaciones de series en $\mathbb{R}^d$ son un espacio afín de $\mathbb{R}^d$. Para el caso $d = 1$ esto se verifica porque el conjunto de sumas (en $\mathbb{R}$) de una serie o bien es vacío (divergencia), es un punto (convergencia absoluta) o bien es todo $\mathbb{R}$ (convergencia condicional). El lector puede consultar [112] para más información.

En general, construir ejemplos explícitos del Teorema de Riemann es una cuestión delicada. Presentamos a continuación el ejemplo clásico empleando la serie armónica alternada.

Ejemplo 5.6.1. Recordando el Ejemplo 5.5.1 y el Ejercicio 5.1.5, sabemos que

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots, \\ \frac{\ln(2)}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots. \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades, obtenemos una reordenación de la serie original

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\ln(2) &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots, \end{aligned}$$

que converge a otro valor. Para más ejemplos de reordenaciones de esta serie, ver el Ejemplo 11.3.2.

Ejemplo 5.6.2. Considere el conjunto $S(\mathbb{N})$ de todas las biyecciones $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. El Teorema de Riemann permite mostrar que $S(\mathbb{N})$ no es contable. En efecto, fije una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ que converge condicionalmente, digamos $a_n = (-1)^n/(n+1)$. Considere la aplicación

$$f : \mathbb{R} \to S(\mathbb{N}), \qquad \alpha \longmapsto f(\alpha) = \sigma_\alpha,$$

donde σ_α se escoge de forma que la reordenación $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_\alpha(n)}$ converga a α. El teorema anterior implica que dicha f existe. Además f es inyectiva porque si $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, entonces $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_\alpha(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_\beta(n)} = \beta$. Por tanto, $S(\mathbb{N})$ contiene un conjunto no contable, a saber $f(\mathbb{R})$, y por tanto no puede ser contable.

Como aplicación del Teorema de Riemann presentamos una formulación equivalente de convergencia absoluta empleando índices de conjuntos A que sean infinitos contables. En la práctica A suele ser un subconjunto de $\mathbb{N}^N$, para algún $N \in \mathbb{N}^+$.

Definición 5.7. Sea A un conjunto infinito contable de índices y $\{a_p \in \mathbb{R} \,:\, p \in A\}$. La serie $\sum_{p\in A} a_p$ se dice *sumable* a $s \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $I_0(\epsilon) \subseteq A$ tal que para todo conjunto finito I tal que $I_0(\epsilon) \subseteq I \subseteq A$ se tiene que

$$\left| \sum_{p\in I} a_p - s \right| < \epsilon.$$

Proposición 5.4. *Sea A un conjunto infinito contable. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La serie $\sum_{p\in A} a_p$ es sumable.*
2. *Existe una biyección $\sigma : \mathbb{N}^+ \to A$ tal que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ es absolutamente convergente.*
3. *Para toda biyección $\sigma : \mathbb{N}^+ \to A$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ es absolutamente convergente.*
4. *La serie $\sum_{p\in A} |a_p|$ es sumable.*

En los casos (1), (2) y (3) el valor de las sumas coincide.

Demostración. Para demostrar que (2) y (3) son equivalentes, sean $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N}^+ \to A$ dos biyecciones. Entonces $\tau = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ es biyectiva. Si $b_j = a_{\sigma_1(j)}$ y $b'_j = a_{\sigma_2(j)}$, entonces $b'_{\tau(j)} = a_{\sigma_2(\tau(j))} = a_{\sigma_1(j)} = b_j$ y por tanto $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_1(j)}$ es una reordenación de $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_2(j)}$. El Teorema 5.12 demuestra que estas series convergen o divergen simultáneamente.

Veamos ahora que (1) y (2) son equivalentes. Suponga que (1) es válida y que la serie es sumable a s. Fije $\epsilon > 0$ y $I_0(\epsilon)$ como en la definición anterior. Considere ahora una biyección arbitraria $\sigma : \mathbb{N}^+ \to A$ y tome $N = N_\sigma \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $I_0(\epsilon) \subseteq I = \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$. Se sigue que si $n \geq N$ y $I' = I \cup \{\sigma(N+1), \dots, \sigma(n)\}$, entonces

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)} - s \right| = \left| \sum_{p\in I'} a_p - s \right| < \epsilon.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge a s. Si esta serie no convergiera absolutamente, el Teorema de Riemann 5.13 implicaría que existe una reordenación de esta serie que converge a otro valor, pero el argumento del párrafo anterior descarta esta posibilidad.

Si (2) es válida, estamos suponiendo que $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ converge absolutamente a un valor s. Así, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir N tal que $|\sum_{j=1}^{m} a_{\sigma(j)} - s| < \epsilon/2$ si $m \geq N$ y $\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{\sigma(j)}| < \epsilon/2$. Por tanto, si ponemos $I_0(\epsilon) = \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$, dado un conjunto finito $I \supseteq I_0(\epsilon)$, tomando $N' \geq N$ tal que $I \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(N')\}$ se sigue que

$$\left| \sum_{p\in I} a_p - s \right| = \left| \sum_{j=1}^{N'} a_{\sigma(j)} - s - \sum_{p\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(N')\}\setminus I} a_p \right| < \epsilon/2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{\sigma(j)}| < \epsilon.$$

Por definición, concluimos que $\sum_{p\in A} a_p$ es sumable con suma s.

Finalmente, (4) es equivalente a (1) gracias a la equivalencia entre (1) y (2) porque $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\sigma(j)}|$ converge. □

Aplicando esta caracterización de ser sumable podemos recuperar fácilmente criterios de convergencia, por ejemplo el criterio de comparación.

Corolario 5.2. *Sea A un conjunto infinito numerable. Si $|a_p| \leq b_p$, para todo $p \in A$, salvo un número finito de índices, y $\sum_{p\in A} b_p$ es sumable, entonces $\sum_{p\in A} a_p$ es sumable.*

Una aplicación interesante de la caracterización del teorema anterior es que permite demostrar fácilmente que una serie que converge absolutamente se puede sumar por bloques. Recordamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de un conjunto A si estos conjuntos son disjuntos dos a dos y su unión es todo A.

Proposición 5.5 (Series por bloques)**.** *Sea A un conjunto infinito numerable y $\sum_{p\in A} a_p$ una serie de números reales sumable a s. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de A, entonces cada suma $\sum_{p\in A_n} a_p$ es sumable, digamos a b_n, y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s$.*

Demostración. Cada $\sum_{p\in A_n} a_p$ es sumable gracias al anterior criterio de comparación, comparándola con la serie original. Ahora, dado $\epsilon > 0$, sea $I_0(\epsilon/2) \subseteq A$ finito tal que para cada conjunto finito $I \supseteq I_0(\epsilon/2)$, $\left|\sum_{p\in I} a_p - s\right| < \epsilon/2$.

Denote por $B = \{n \in \mathbb{N} : I_0(\epsilon/2) \cap A_n \neq \emptyset\}$ que es finito. Si $J \supseteq B$ es finito y $m = |J|$, para cada $n \in J$, tome un conjunto finito $I_n \subseteq A_n$ de forma que $I_0(\epsilon/2) \subseteq \bigcup_{n\in J} I_n$ y

$$\left|\sum_{p\in I_n} a_p - b_n\right| < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Entonces

$$\left|\sum_{n\in J} b_n - s\right| = \left|\sum_{n\in J}\left(b_n - \sum_{p\in I_n} a_p\right) + \sum_{n\in J}\sum_{p\in I_n} a_p - s\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto demuestra que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ es sumable con suma s y por tanto que converge a s. □

Ejemplo 5.6.3. Si $A = \mathbb{N}$, ejemplos de particiones comunes son $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ en índices pares o impares, $\mathbb{N} = 3\mathbb{N} \cup (3\mathbb{N} + 1) \cup (3\mathbb{N} + 2)$ dependiendo del resto del número al dividir por 3, o en general separando por resto al dividir por un número arbitrario $k \geq 2$. De esta forma, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk+j}. \tag{5.14}$$

Por ejemplo, $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$, y así $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{8}$. De la misma forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ejemplo 5.6.4. Si $A = \mathbb{N}^2$ y $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}$ es una serie sumable, entonces su suma también está dada por cualquiera de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{j,n-j} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + \sum_{j=0}^{n-1}(a_{n,j} + a_{j,n})\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m,m} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,n} + \sum_{m>n\geq 0} a_{n,m} + \sum_{n>m\geq 0} a_{n,m},$$

que corresponden a las particiones ilustradas en la Figura 5.3.

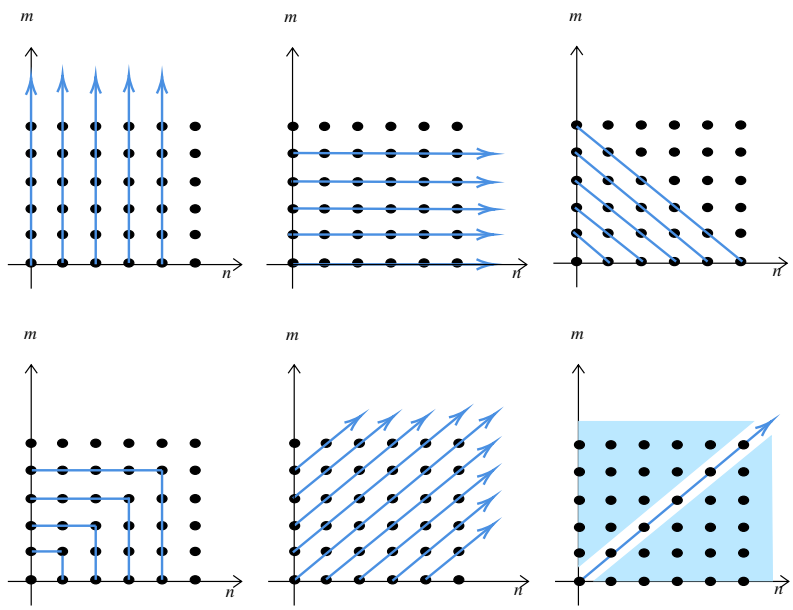

Figura 5.3: Algunas particiones de $\mathbb{N}^2$.

Ejemplo 5.6.5. Considere dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números reales que convergen absolutamente a s y t, respectivamente. Defina la serie

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^+)^2} c_{(n,m)}, \qquad \text{donde } c_{(n,m)} = a_n b_m, \tag{5.15}$$

indexada por $A = (\mathbb{N}^+)^2$. Sea $\sigma : \mathbb{N}^+ \to (\mathbb{N}^+)^2$ la biyección inducida por la Figura 1.2. Entonces las sumas parciales de $\sum_{j=1}^{\infty} |c_{\sigma(j)}|$ en índices de la forma $n(n+1)/2$ son

$$|a_1b_1| + |a_2b_1| + |a_1b_2| + \cdots + |a_nb_1| + |a_{n-1}b_2| + \cdots + |a_1b_n| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} |a_l||b_{k+1-l}|.$$

Estos valores son precisamente los términos que conforman el producto de Cauchy entre las series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Como $|c_{\sigma(j)}| \geq 0$, se sigue del Teorema de Mertens 5.9, que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |c_{\sigma(j)}|$ converge . En efecto, la subsucesión $\{s_{n(n+1)/2}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$

de sumas parciales $s_m = |c_{\sigma(1)}| + \cdots + |c_{\sigma(m)}|$ es convergente y por tanto $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ es acotada, ver el Ejemplo 5.1.4. Por tanto, la serie (5.15) es sumable. El Teorema de Mertens también garantiza que la serie converge a $s \cdot t$ porque al sumar por los bloques $A_n = \{(l, n+1-l) \in (\mathbb{N}^+)^2 : l = 1, \ldots, n\}$, obtenemos

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^+)^2} a_n b_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{l=1}^{n} a_l b_{n+1-l}\right] = s \cdot t.$$

Note que un caso particular de esta situación es la serie geométrica doble

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x^n y^m = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, \qquad |x|, |y| < 1. \tag{5.16}$$

Ejemplo 5.6.6 (La función zeta de Riemann doble [137])**.** Consideremos la serie doble

$$\zeta(s, s') := \sum_{1\le m<n} \frac{1}{n^s m^{s'}}, \qquad s \ge 2, s' \ge 1,$$

donde sumamos sobre el conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : 1 \le m < n\}$. Con las restricciones sobre s y s' podemos acotar esta serie doble por

$$\zeta(s, s') = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^{s'}}\right)\frac{1}{n^s} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \zeta(2, 1),$$

y deducir así su convergencia vía el Ejemplo 5.2.3.

Esta función satisface numerosas identidades. Para establecer algunas de ellas, fijado un entero $N \ge 1$, considere las sumas finitas

$$\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}, \qquad \zeta_N(s, s') = \sum_{(n,m)\in A_N} \frac{1}{n^s m^{s'}},$$

donde $A_N = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : 1 \le m < n \le N\}$. Al expandir el producto $\zeta_N(s)\zeta_N(s')$ y descomponer la cuadrícula $\{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\}$ en $\{(n, m) : m > n\} \cup \{(n, m) : m < n\} \cup \{(n, n)\}$, obtenemos la relación

$$\zeta_N(s)\zeta_N(s') = \zeta_N(s, s') + \zeta_N(s', s) + \zeta_N(s + s').$$

En particular, si $s > 1$ y $s' > 1$ podemos tomar $N \to +\infty$ para obtener la *fórmula de reflexión*

$$\zeta(s)\zeta(s') = \zeta(s, s') + \zeta(s', s) + \zeta(s + s'), \qquad s, s' > 1.$$

Por ejemplo, se verifica la relación

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2, 2) + \zeta(4).$$

Es posible obtener más identidades de este tipo para los valores límite $s' = 1$. Consideremos por ejemplo el caso $s = 2$. A partir de la relación algebraica

$$\frac{1}{n\,m^2} - \frac{1}{(n+m)m^2} = \frac{1}{(n+m)^2 n} + \frac{1}{(n+m)^2 m},$$

sumando sobre $(n,m) \in \{1,\dots,N\} \times \{1,\dots,N\}$ obtenemos

$$\zeta_N(1)\zeta_N(2) - \sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{(n+m)m^2} = 2\sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{(n+m)^2 m}. \tag{5.17}$$

El término de la derecha consiste en sumar $1/(j^2 m)$ sobre el conjunto $C_N = \{(j,m) \in \mathbb{N}^2 : 1 \le m \le N, m+1 \le j \le m+N\}$ y por tanto

$$\zeta_N(2,1) < \sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{(n+m)^2 m} < \zeta(2,1),$$

porque $A_N \subseteq C_N \subseteq A$. Al hacer $N \to +\infty$ concluimos que $\sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{(n+m)^2 m} \to \zeta(2,1)$.

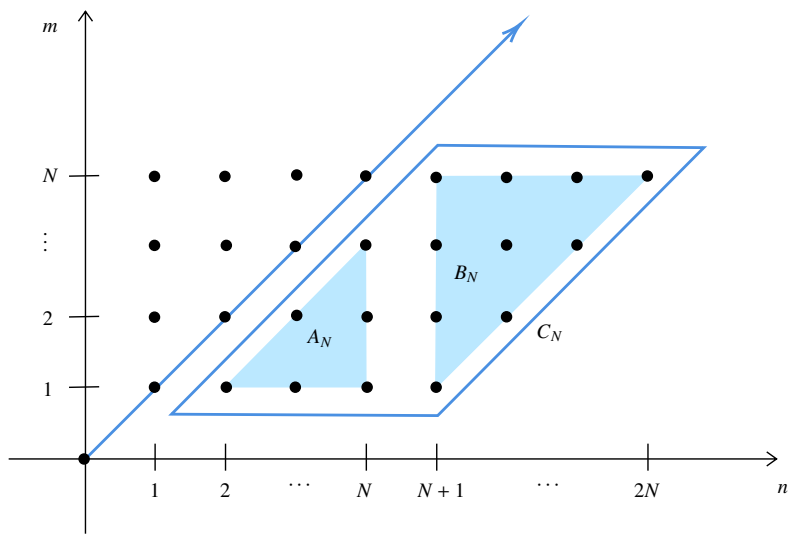

Figura 5.4: Los conjuntos A_N, B_N y su unión dada por C_N.

Para analizar el término de la izquierda en (5.17) note que

$$\sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{(n+m)m^2} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=m+1}^{m+N} \frac{1}{jm^2} = \sum_{(n,m)\in C_N} \frac{1}{nm^2} = \zeta_N(1,2) + \sum_{(n,m)\in B_N} \frac{1}{nm^2},$$

porque $C_N = A_N \cup B_N$, como lo indica la Figura 5.4. Pero

$$\sum_{(n,m)\in B_N} \frac{1}{nm^2} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=N+1}^{N+m} \frac{1}{n\,m^2} \le \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^2} \sum_{n=N+1}^{N+m} \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \to 0,$$

cuando $N \to +\infty$, gracias al criterio de Stolz-Cesàro. Teniendo en cuenta estas relaciones, al tomar límite en la ecuación (5.17) obtenemos que $\lim_{N\to+\infty} \zeta_N(1)\zeta_N(2) - \zeta_N(1,2) = 2\zeta(2,1)$. Como (5.17) muestra que $\zeta_N(1)\zeta_N(2) - \zeta_N(1,2) = \zeta_N(2,1) + \zeta_N(3)$, concluimos que $\zeta(2,1) + \zeta(3) = 2\zeta(2,1)$, es decir

$$\zeta(2,1) = \zeta(3), \tag{5.18}$$

identidad debida a L. Euler. Un razonamiento similar permite determinar el valor de $\zeta(4)$ en términos de $\zeta(2)$, ver el Ejercicio 5.6.6.

Ejercicios

5.6.1 Demostrar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, existe una reordenación $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ que converge a $+\infty$ y otra que converge a $-\infty$.

5.6.2 *a*) [49] Demostrar que la serie armónica diverge asumiendo que converge y justificando por qué en ese caso es posible escribir

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right) = S_{\text{impar}} + S_{\text{par}}.$$

Concluya comprobando que $S_{\text{par}} = S/2$ pero $S_{\text{impar}} > S_{\text{par}}$.

b) [12] Considere $a, b \geq 0$ y $r, s, p, q > 0$ tales que $rp + qs \leq 1$. Mostrar que la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^r + a)^p (n^s + b)^q} \qquad \text{diverge,}$$

poniendo $S = S_{\text{par}} + S_{\text{impar}}$ y probando que $S_{\text{impar}} > S_{\text{par}}$ y $S_{\text{par}} \geq S/2$.

5.6.3 La *función eta de Dirichlet* se define por la serie alternada

$$\eta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s}.$$

Demostrar que la serie converge para $s > 0$ y que $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, para $s > 1$. Luego aplicar el Ejercicio 5.5.3 para mejorar las desigualdades del Ejercicio 5.2.4 por

$$\frac{1 - 2^{-s}}{1 - 2^{1-s}} < \zeta(s) < \frac{1}{1 - 2^{1-s}}, \qquad \text{para } s > 1.$$

5.6.4 Demostrar el criterio de Cauchy para series sumables: la serie $\sum_{p\in A} a_p$ es sumable si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $I_0(\epsilon) \subseteq A$ tal que para todo par de conjuntos finitos $A \supseteq I \supseteq J \supseteq I_0(\epsilon)$ se verifica que

$$\left| \sum_{p\in I\setminus J} a_p \right| < \epsilon.$$

Emplear este criterio para comprobar nuevamente que si $|a_p| \le b_p$ y $\sum_{p\in A} b_p$ es sumable, lo mismo es válido para $\sum_{p\in A} a_p$.

5.6.5 Emplear la serie geométrica y una partición adecuada de $\mathbb{N}$ para establecer nuevamente el Ejercicio 5.1.2.

5.6.6 (D. Zagier [146]) Considere los términos

$$a_{n,m} = \frac{1}{mn^3} + \frac{1}{2m^2n^2} + \frac{1}{m^3n} = a_{m,n}, \qquad n, m \ge 1.$$

Comprobar que $a_{m,n} - a_{m+n,n} - a_{m,m+n} = \frac{1}{m^2n^2}$. Empleando la misma notación del Ejemplo 5.6.6, compruebe que al sumar estas ecuaciones sobre $1 \le n, m \le N$ se obtiene la relación

$$\begin{aligned}\zeta_N(2)^2 = \sum_{1\le n,m\le N} a_{n,m} - \sum_{1\le n,m\le N} 2a_{m,n+m} &= \sum_{n=1}^{N} a_{n,n} - \sum_{(j,m)\in B_N} 2a_{j,m} \\ &= \frac{5}{2}\zeta_N(4) - \sum_{(j,m)\in B_N} 2a_{j,m}.\end{aligned}$$

Hacer $N \to +\infty$ para concluir que

$$\zeta(2)^2 = \frac{5}{2}\zeta(4).$$

Así, la fórmula $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ implica el valor $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

5.6.7 [77] Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de enteros libres de cuadrados, ver Ejercicio 5.4.7. Comprobar que la aplicación $(m, k) \in \mathbb{N}^+ \times \mathcal{K} \to m^2k \in \mathbb{N}^+$ es una biyección. Justificar por qué se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4s}} \cdot \sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{k^{2s}}, \qquad \text{y así} \qquad \sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{k^{2s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(4s)}, \qquad \text{si } s > 1.$$

En particular, $\sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{k^2} = \zeta(2)/\zeta(4) = 15/\pi^2$.

5.6.8 [137, p. 105] Una versión más general de (5.18) indica que para $p \ge 2$ entero se verifica que

$$\zeta(p+1) = \zeta(p,1) + \zeta(p-1,2) + \cdots + \zeta(2,p-1) = \zeta(p,1) + \sum_{j=2}^{p-1} \zeta(p-j+1, j).$$

a) Imitar los argumentos del Ejemplo 5.6.6 partiendo de la identidad

$$\frac{1}{nm^p} - \frac{1}{(n+m)m^p} = \frac{1}{(n+m)^p n} + \sum_{j=0}^{p-2} \frac{1}{(n+m)^{p-j} m^{j+1}}$$

y sumando sobre $1 \le n, m \le N$ para demostrar dicha generalización.

b) Escribiendo $2\zeta(p+1) = 2\zeta(p,1) + \sum_{j=2}^{p-1} \zeta(p-1\,j+1, j) + \zeta(j, p-j+1)$ y empleando la fórmula de reflexión concluir que

$$2\zeta(p,1) = p\zeta(p+1) - \sum_{j=2}^{p-1} \zeta(j)\zeta(p+1-j).$$

5.6.9 *a*) Sea A un conjunto infinito contable y $\{a_p : p \in A\} \subseteq [0, +\infty)$. Entonces $\sum_{p\in A} a_p$ es sumable si y solo si el conjunto $S = \{\sum_{p\in I} a_p : I \subseteq A \text{ finito}\}$ es acotado superiormente. En este caso, la suma de $\sum_{p\in A} a_p$ es $\sup S$.

b) Si $B \neq \emptyset$ y $\{b_p : p \in B\} \subseteq [0, +\infty)$, se puede definir

$$\sum_{p\in B} b_p := \sup\left\{\sum_{p\in I} b_p : I \subseteq B \text{ finito}\right\}.$$

Mostrar que si esta cantidad es finita, entonces $B' = \{p \in B : b_p \neq 0\}$ es a lo más contable. Indicación: si $B_n = \{p \in B : b_p > 1/n\}$, mostrar que $B' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $|B_n|/n \leq \sum_{p\in B_n} b_p$.

5.7. El Teorema de Tannery

Esta sección es opcional y está dedicada a profundizar en la noción de límites y series mediante el Teorema de Tannery. Este resultado es muy similar al M-test de Weierstrass que estudiaremos en el Capítulo 9 –por esta razón no suele enseñarse explícitamente–. Sin embargo, encontramos útil incluirlo como herramienta para establecer dos fórmulas básicas: un límite destacado para e^x y una solución al problema de Basilea. Además, para tratar el intercambio de series dobles. Señalamos que también existen versiones de este resultado para integrales impropias y productos infinitos, que serán dadas en el Ejemplo 9.3.7 y en el Teorema 13.6, respectivamente.

Teorema 5.14 (Tannery)**.** *Considere $s(n) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(n)$, suma finita o serie convergente, donde $n \in \mathbb{N}$. Si para cada j, $\lim_{n\to+\infty} f_j(n) = f_j$ existe, $|f_j(n)| \leq M_j$ y la serie $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} s(n) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j.$$

Demostración. Note primero que si $n \to +\infty$ en la desigualdad $|f_j(n)| \leq M_j$, tenemos que $|f_j| \leq M_j$ para todo j. Dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j>N(\epsilon)} M_j < \epsilon/3$. Por hipótesis, para cada j, existe $N_j(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_j(n) - f_j| < \epsilon/(3N(\epsilon))$, para $n \geq N_j(\epsilon)$. Tomando $\overline{N}(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), \ldots N_{N(\epsilon)}(\epsilon)\}$, se sigue que

$$\left| s(n) - \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right| \leq \sum_{j=0}^{N(\epsilon)} |f_j(n) - f_j| + 2 \sum_{j=N(\epsilon)+1}^{\infty} M_j < N(\epsilon)\frac{\epsilon}{3N(\epsilon)} + 2\frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

para todo $n \geq \overline{N}(\epsilon)$. □

Una situación interesante que está contemplada en el teorema anterior es cuando

$$s(n) = \sum_{j=0}^{m(n)} f_j(n), \qquad \text{donde } \{m(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ satisface } m(n) \to +\infty.$$

Bajo dichas hipótesis la conclusión del teorema, en forma más sugestiva, es la validez del intercambio de límites:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{m(n)} f_j(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to+\infty} f_j(n).$$

Presentamos ahora dos ejemplos relevantes de cómo aplicar esta relación.

Ejemplo 5.7.1. Fijado $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{x^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x,$$

generalizado así la fórmula del Teorema 5.4. En este caso el Teorema de Tannery es aplicable a $m(n) = n$ y $f_j(n) = \binom{n}{j} x^j/n^j$. En efecto, $f_j(n) \to x^j/j!$ si $n \to +\infty$, y recordando la desigualdad (5.6), tenemos que $|f_j(n)| \le |x|^j/j!$.

Ejemplo 5.7.2 (El problema de Basilea)**.** [64] Empleando ángulos dobles tenemos la identidad trigonométrica

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi+\theta}{2}}\right],$$

si $\theta \ne n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. En particular,

$$1 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4^2}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{8}}\right].$$

Continuando de esta manera obtenemos que

$$1 = \frac{1}{4^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2j+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{4^n} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2j+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \tag{5.19}$$

Para acotar los términos internos empleamos la desigualdad de Jordan

$$\frac{2\theta}{\pi} < \sin\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{5.20}$$

ver Ejemplo 12.1.2, que implica que $0 \le f_j(n) := 1/(4^n \sin^2\left(\frac{(2j+1)\pi}{2^{n+1}}\right)) < 1/(2j+1)^2$. Por otra parte, como

$$\lim_{N\to+\infty} N\sin(x/N) = x, \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_j(n) = \frac{4}{\pi^2(2j+1)^2},$$

donde $N = 2^n$ y $x = (2j+1)\pi/2$. Por el Teorema de Tannery concluimos que

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}, \qquad \text{es decir} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De esta forma obtenemos finalmente que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\zeta(2)}{4} + \frac{\pi^2}{8}, \qquad \text{y por tanto} \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Los valores de $\zeta(2k)$, para $k \in \mathbb{N}^+$ serán calculados en el Proyecto 13.1.

Finalmente presentamos una aplicación al intercambio de series dobles.

Proposición 5.6. *Sea $\{a_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ una sucesión doble de números reales. Asuma que cada $M_j = \sum_{k=0}^{\infty}|a_{j,k}|$ converge y que $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge. Entonces*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

Demostración. Si $f_j(n) = \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}$, entonces $f_j = \lim_{n\to+\infty} f_j(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}$ existe, gracias a la convergencia absoluta de dicha serie. Además, por hipótesis $|f_j(n)| \leq \sum_{k=0}^{n}|a_{j,k}| \leq M_j$. Por tanto, el Teorema de Tannery demuestra que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f_j(n) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k},$$

como se requería. □

Ejemplo 5.7.3. Las hipótesis de la proposición anterior son necesarias. Considere por ejemplo la sucesión doble dada por $a_{j,k} = 2^{k-j}$ si $j > k$, $a_{j,j} = -1$ y $a_{j,k} = 0$ si $j < k$. Los términos se pueden visualizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\
\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[a_{j,j} + \sum_{k=0}^{j-1} 2^{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} -\frac{1}{2^j} = -2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{j,j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} 0 = 0.$$

En este caso no es posible intercambiar el orden. En efecto, si $M_j = \sum_{k=0}^{\infty}|a_{j,k}| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^j} = 2 - \frac{1}{2^j}$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ no converge porque $M_j \to 2$ si $j \to +\infty$.

Ejercicios

5.7.1 ¿Por qué no es posible aplicar directamente el Teorema de Tannery en la primera igualdad de (5.19) en el Ejemplo 5.7.2?

5.7.2 Comprobar los límites

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^k}=0. \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^n}=1.$$

5.7.3 Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e-1}.$

5.7.4 [72] Comprobar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^j=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n=\frac{e}{e-1}.$

Indicación: si $f_j(n)=(1-j/n)^{n-j}$, $0\le j\le n-2$, observe que $f_j(n)$ es decreciente respecto a n. Así, alcanza su máximo valor en $n=j+2$, de donde $f_j(n)\le 4/(j+2)^2$.

5.7.5 Comprobar que si $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ y $0<\lambda<1$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\lambda^{n-j}x_j=0.$$

Capítulo 6

Aplicaciones continuas

El objetivo de este capítulo es estudiar la noción de continuidad de aplicaciones entre espacios métricos. A partir del concepto de límite se definirá esta importante noción y se determinarán sus propiedades fundamentales, entre ellas su comportamiento sobre conjuntos compactos y conexos y como consecuencia los Teoremas del valor extremo y del valor intermedio. También trataremos la noción de continuidad uniforme, que siempre es válida para aplicaciones continuas definidas sobre compactos. Finalmente, concluimos el capítulo con el estudio de límites laterales y tipos de discontinuidades de funciones reales.

6.1. Límites de aplicaciones

Definición 6.1. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $E \subseteq X$, $x_0 \in X$ un punto de acumulación de E, es decir $x_0 \in E'$, y $f : E \to Y$ una aplicación. Diremos que $q \in Y$ es *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0*, en símbolos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = q \quad \text{ó} \quad f(x) \to q, \text{ si } x \to x_0,$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ que satisface que

$$\text{si } x \in E \text{ y } 0 < d(x, x_0) < \delta, \quad \text{entonces} \quad d'(f(x), q) < \epsilon. \tag{6.1}$$

En términos de bolas abiertas estas condiciones nos dicen que

$$\text{si } x \in B_d(x_0, \delta) \cap E, \quad \text{entonces} \quad f(x) \in B_{d'}(q, \epsilon).$$

En otras palabras,

$$B_d(x_0, \delta) \cap E \subseteq f^{-1}(B_{d'}(q, \epsilon)).$$

En esta definición ϵ describe los radios de las bolas abiertas en Y con centro en q, y por tanto describe las vecindades abiertas de este punto. Así, requerimos que $f(x)$ se encuentre cerca de q siempre que x esté suficientemente cerca de x_0.

Note que x_0 es solo un punto de acumulación de E. Podemos tener dos casos:

1. Si $x_0 \in E' \setminus E$, entonces f no está definida en x_0, pero su límite sí puede existir. En el caso real, esta situación se ilustra con funciones definidas en intervalos abiertos $E = (a, b)$ y su comportamiento en $x_0 = a$ ó b.

2. Si $x_0 \in E$, entonces f está definida en el punto, pero bien puede suceder que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Nota 6.1.1. Se debe prestar atención al orden en que aparecen los cuantificadores en esta definición. Un ejercicio necesario para interiorizar esta noción es suponer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = q$ no es válido. Si esto no ocurre es porque existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe $x = x(\delta) \in E$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{y} \quad d'(f(x), q) \geq \epsilon.$$

Es posible extender las propiedades de límites de sucesiones a este caso mediante el siguiente resultado fundamental.

Teorema 6.1. *Bajo las condiciones de la Definición 6.1,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = q \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = q,$$

para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq E \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$.

Demostración. Asuma que $\lim_{x\to x_0} f(x) = q$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión en E tal que $x_n \to x_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que (6.1) es válida. Para este δ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$, si $n \geq N$. Por tanto, $d'(f(x_n), q) < \epsilon$ para estos valores de n y así $f(x_n) \to q$ cuando $n \to +\infty$.

Recíprocamente, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = q$ no se satisface, siguiendo la Nota 6.1.1, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ podemos escoger $\delta = 1/n$ y encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en E tal que $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) \not\to q$, cuando $n \to +\infty$. □

El Teorema 4.1 y las proposiciones 4.1 y 4.2 demuestran así lo siguiente.

Proposición 6.1. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $x_0 \in X$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Dados $f : E \subseteq X \to Y$ y $x_0 \in E'$, si $q = \lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, entonces es único.*

2. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \ \textit{si } B \neq 0.$$

3. *Si $\gamma = (f_1, \ldots, f_d) : X \to \mathbb{R}^d$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \gamma(x) = (A_1, \ldots, A_d) \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{x\to x_0} f_j(x) = A_j, \textit{para } j = 1, \ldots, d.$$

Respecto a la composición de aplicaciones tenemos el siguiente resultado que describe las posibilidades del límite, ver el Ejercicio 6.1.4.

Proposición 6.2. *Sean $f : E \subseteq X \to Y$ y $g : F \subseteq Y \to Z$ aplicaciones entre espacios métricos con $f(E) \subseteq F$. Fije puntos $x_0 \in E'$, $q \in F'$ y asuma que $f(x) \to q$ si $x \to x_0$ y que $g(y) \to z$ si $y \to q$. Entonces tenemos los siguientes casos:*

1. *Si existe una vecindad $U \subseteq X$ de x_0 tal que $f(x) \neq q$ para $x \in U \cap E$, entonces $g(f(x)) \to z$, cuando $x \to x_0$.*

2. *En otro caso, $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ puede o no existir. En caso de hacerlo, este valor debe ser $g(q)$.*

Demostración. Note que $g \circ f : E \subseteq X \to Z$ está bien definida por que $f(E) \subseteq F$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión en $E \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$. En el primer caso, existe $N \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U \cap E$. Por el Teorema 6.1 tenemos que $f(x_n) \to q$ si $n \to +\infty$. Como $f(x) \neq q$ en U, podemos aplicar de nuevo el teorema a g y la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\geq N} \subseteq F \setminus \{q\}$ para concluir que $g(f(x_n)) \to z$ si $n \to +\infty$.

Si la hipótesis en (1) no es válida, esto significa que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ tal que $f(x_n) = q$. Si $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ existe, evaluándolo a lo largo de esta sucesión, vemos que su valor debe ser $g(f(x_n)) = g(q)$. □

Por otra parte, para aplicaciones con valores en un espacio métrico completo como $\mathbb{R}$, existe un análogo al criterio de Cauchy para la existencia del límite.

Proposición 6.3. *Sea $f : E \subseteq X \to Y$ una aplicación, $x_0 \in E'$ y asuma que (Y, d') es completo. Entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in B_d(x_0, \delta)$ se verifica que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Demostración. Si el límite existe y vale q, basta tomar $\delta > 0$ asociado a $\epsilon/2$ en la definición anterior. Si $d(x, x_0) < \delta$ y $d(y, x_0) < \delta$, se sigue que $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), q) + d'(q, f(y)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Recíprocamente, asuma la condición de Cauchy y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión en $E\setminus\{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$. Verifiquemos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es de Cauchy en Y. Dado $\epsilon > 0$, elija $\delta > 0$ como en el enunciado. Si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $d(x_n, x_m) < \delta$ si $m, n \geq N$, entonces $d'(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$ como se requería. Como el espacio (Y, d') es completo, el límite $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ existe. Veamos ahora que este valor es independiente de la sucesión elegida. Si $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = q$ y $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = q'$, para otra sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en X tal que $y_n \to x_0$, tenemos que

$$d'(q, q') \leq d'(q, f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), q').$$

Fijado $\epsilon > 0$ y eligiendo n suficientemente grande, es claro que $d'(q, f(x_n)) < \epsilon/3$ y $d'(f(y_n), q') < \epsilon/3$. Por otra parte, la condición de Cauchy de la hipótesis implica que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon/3$, siempre que $d(x_n, y_n) < \delta'$, para cierto $\delta' > 0$ adecuado. En efecto, como $x_n, y_n \to x_0$, podemos elegir n grande de forma que $d(x_n, y_n) \leq$

$d(x_n, x_0) + d(x_0, y_n) < \delta'$. En conclusión, podemos deducir que $d'(q, q') < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ y así $d'(q, q') = 0$, es decir $q = q'$. El resultado se sigue entonces del Teorema 6.1. □

Concluimos esta sección con algunos ejemplos para ilustrar la definición. Nuestro caso central, de funciones reales, será retomado en la última sección de este capítulo, donde estudiaremos con más detalle, límites laterales y discontinuidades.

Ejemplo 6.1.1. Considere $E = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}^+\}$, donde $E' = \{0\}$ y la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(1/n) = 1/n!$. En este caso f no está definida en 0, pero $f(x) \to 0$ si $x \to 0$. Dado $\epsilon > 0$, si $\delta = \epsilon$ y $|1/n - 0| < \delta$, entonces $|f(1/n) - 0| = 1/n! < 1/n < \delta = \epsilon$.

Ejemplo 6.1.2. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Entonces, f sólo posee límite en el punto $x_0 = 0$.

1. Se verifica que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ porque dado $\epsilon > 0$, podemos elegir $\delta = \epsilon$. Si $|x - 0| < \delta$, y x es racional, entonces $|f(x) - 0| = |x| < \delta = \epsilon$. Si x es irracional, $|f(x)| = 0 < \epsilon$. En cualquier caso, $|f(x)| < \epsilon$ de donde se sigue el límite.

2. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, si tomamos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$, entonces $f(x_n) = x_n \to x_0$. Pero si tomamos otra sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$, entonces $f(x_n) = 0 \to 0$ si $n \to +\infty$. Por tanto, siguiendo el Teorema 6.1, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

Ejemplo 6.1.3. Considere la función $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Note que g no está definida en $(0, 0)$ y que $(0, 0)$ es punto límite de $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Podemos comprobar que $g(x, y) \to 0$ si $(x, y) \to 0$ directamente de la definición. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \epsilon$. Como $2ab \leq a^2 + b^2$, para todo $a, b \geq 0$, se sigue que

$$|g(x, y)| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2.$$

Por tanto, si $\|(x, y)\|_2 < \delta$, entonces $|g(x, y)| < \epsilon$, como se requería.

Ejemplo 6.1.4. La función $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no tiene límite cuando $(x.y) \to (0,0)$. Considere por ejemplo las sucesiones $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ y $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ cuyo límite es $(0,0)$ si $n \to +\infty$. Como $F\left(\frac{1}{n}, 0\right) = F\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$ y $F\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, F no puede verificar el Teorema 6.1 porque tiende a distintos valores por diferentes sucesiones. Más aún, F es constante a lo largo de cada recta que pasa por el origen. Sobre la rectas $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$ vemos que $F(0,y) = F(x,0) = 0$, mientras que sobre la recta de pendiente $m \neq 0$, $y = mx$, tenemos que

$$F(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}, \qquad x \neq 0,$$

que claramente solo depende de m.

Nota 6.1.2. En adelante nos referiremos a aplicaciones de la forma $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ como *curvas*.

En general, una estrategia para comprobar que un límite no existe hacia un punto (x_0, y_0) en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ es evaluar la función en varias curvas γ que pasen por dicho punto, en búsqueda de valores o límites distintos a lo largo de las mismas. Para $d = 2$ algunas posibilidades son $y - y_0 = m(x - x_0)^a$, con $m \neq 0$ y $a > 0$.

Ejercicios

6.1.1 Sea (X,d) un espacio métrico, $f, g : E \subseteq X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E'$, y asuma que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A < B = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in E \cap B_d(x_0, \delta)$. Indicación: $\epsilon = (B - A)/2 > 0$.

6.1.2 *a*) Sean $f, g : E \subseteq X \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in E$. Si $x_0 \in E'$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ existen, entonces $A \leq B$.

b) Formular y demostrar la propiedad de límites encajados, Proposición 4.3 (2) en este contexto.

6.1.3 Sea (X,d) un espacio métrico, $f : E \subseteq X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E'$, y asuma que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe. Mostrar que f es acotada en una vecindad de x_0.

6.1.4 [108] Analice el límite $\lim_{x \to x_0} g(h(x))$ en los siguientes casos, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$, para comprobar que los tres casos de la Proposición 6.2 pueden ocurrir:

a) $h(x) = x$ y $x_0 = 0$.

b) $h(x) = \lfloor x \rfloor$ y $x_0 = 1/2$.

c) $h(x) = f(x)$ como en el Ejemplo 6.1.2 y $x_0 = 0$.

6.1.5 Determinar si las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tienen límite en $(0,0)$ y calcularlo en caso de existir:

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$,

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+(x^2+y^2)^2}$.

6.1.6 (∗) Sea $d \geq 2$, Y un espacio métrico y $f : \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\} \to Y$ una aplicación. Demostrar que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{x}) = q$ si y solo si para toda curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \mathbf{0}$, se verifica que $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = q$.
Indicación: emplear sucesiones $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una curva formada por los segmentos de recta que unen a $\boldsymbol{x}_n$ con $\boldsymbol{x}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

6.2. Aplicaciones Continuas

El objetivo de esta sección es introducir la noción de continuidad para aplicaciones entre espacios métricos a través de límites y también estudiando el comportamiento de la imagen inversa de conjuntos abiertos y cerrados.

Definición 6.2. Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos, $f : E \subseteq X \to Y$ una aplicación y $x_0 \in E'$. Decimos que f es *continua* en x_0 si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0$ tal que

$$\text{si } x \in E \text{ y } d(x,x_0) < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

En particular, asumimos que f está definida en x_0. En términos de bolas abiertas, requerimos que $B_d(x_0,\delta) \cap E \subseteq f^{-1}(B_{d'}(f(x_0),\epsilon))$.

Diremos que $f : X \to Y$ es continua en un subconjunto $C \subseteq X$ si lo es en cada uno de los puntos de C.

Si x_0 es un punto aislado de E, es decir $x_0 \in E \setminus E'$, entonces toda función $f : E \subseteq X \to Y$ es continua en x_0. Esto se sigue de la existencia de $r > 0$ tal que $B_d(x_0,r) \cap E = \{x_0\}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = r$, si $d(x,x_0) < \delta$ con $x \in E$, se sigue que $x = x_0$ y así $f(x) = f(x_0)$. Por tanto, la noción de continuidad cobra interés cuando $x_0 \in E \cap E'$. Recordando la Definición 6.1 esto significa precisamente que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Aplicando el Teorema 6.1, si f es continua en x_0 y tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en E tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right).$$

En este sentido las funciones continuas son aquellas que conmutan con límites.

La continuidad también se puede expresar en términos de conjuntos abiertos y cerrados. Señalamos que el siguiente teorema es el punto de partida de la noción de aplicación continua entre espacios topológicos.

Teorema 6.2. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos.*

1. *Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si para cada $V \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto en X.*

2. *Una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y solo si para cada $C \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(C) \subseteq X$ es cerrado en X.*

Demostración. Para (1), suponga que $V \subseteq Y$ es abierto y fije $x_0 \in f^{-1}(V)$. Al ser abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{d'}(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$B_d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d'}(f(x_0), \epsilon)) \subset f^{-1}(V).$$

Note que la primera contenencia se debe a la continuidad de f. Por tanto, todo punto de $f^{-1}(V)$ es interior y así este conjunto es abierto en X. La afirmación recíproca se demuestra de la misma manera empleando $V = B_{d'}(f(x_0), \epsilon)$. Finalmente (2) se sigue de (1) y de la igualdad

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V),$$

entre dichos conjuntos. □

Ejemplo 6.2.1 (Aplicaciones identidad y constantes)**.** La aplicación identidad $id : (X, d) \to (X, d)$ es continua. Basta tomar $\delta = \epsilon$ o empleando conjuntos abiertos notar que $id^{-1}(U) = U$, si $U \subseteq X$. Por otra parte, las aplicaciones constantes son continuas. En efecto, si fijamos $y \in Y$ y definimos $c_y : X \to Y$ por $c_y(x) = y$, $x \in X$, entonces

$$c_y^{-1}(V) = X, \text{ si } y \in V, \qquad c_y^{-1}(V) = \emptyset, \text{ si } y \notin V,$$

donde $V \subseteq Y$ es abierto.

Ejemplo 6.2.2 (Composición de aplicaciones continuas es continua)**.** Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son aplicaciones continuas entre espacios métricos (X, d), (Y, d') y (Z, d''), también lo es $g \circ f : X \to Z$. Esto se sigue de la igualdad

$$(g \circ f)^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W)).$$

Por otra parte, si solo suponemos que f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0. En efecto, dado $\epsilon > 0$, por la continuidad de g, existe $\eta > 0$ tal que si $d'(y, f(x_0)) < \eta$, entonces $d''(g(y), g(f(x_0))) < \epsilon$. Para este $\eta > 0$, usando la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \eta$. Por tanto,

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta, \qquad \text{entonces } d''(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon.$$

Ejemplo 6.2.3 (Normas)**.** Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es continua dado que, por el Ejercicio 2.1.2,

$$|\,\|v\| - \|w\|\,| \leq \|v - w\|, \qquad v, w \in E.$$

En particular, el valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuo.

Ejemplo 6.2.4 (El álgebra de funciones continuas)**.** Si (X, d) es un espacio métrico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas en $x_0 \in X$, también lo son $f + g$, $f \cdot g$ y f/g, siempre que $g(x_0) \neq 0$, gracias a la Proposición 6.1 (2). Si denotamos por

$$C^0(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ es continua en } X\} \tag{6.2}$$

al espacio de funciones continuas definidas en X, con valores en $\mathbb{R}$, estas propiedades demuestran que $C^0(X)$ es cerrado bajo sumas y productos. En este sentido, este conjunto tiene estructura de álgebra sobre $\mathbb{R}$. Además $\mathbb{R} \subseteq C^0(X)$, identificando a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con la función constante c_α de valor α.

Ejemplo 6.2.5 (Proyecciones, polinomios y funciones racionales)**.** Las proyecciones

$$\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad \pi_j(\boldsymbol{x}) = x_j, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d),$$

del espacio euclídeo son continuas en todo su dominio. Dado $\epsilon > 0$, es suficiente tomar a $\delta = \epsilon$ y aplicar la desigualdad

$$|\pi_j(\boldsymbol{x}) - \pi_j(\boldsymbol{x}_0)| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_2.$$

Recordemos que un polinomio en las variables $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ con coeficientes reales es una función dada por una suma finita

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum a_{m_1, m_2 \ldots, m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d},$$

donde $m_1, m_2 \ldots, m_d \in \mathbb{N}$ y $a_{m_1, m_2 \ldots, m_d} \in \mathbb{R}$. En términos de las proyecciones, tenemos que

$$P = \sum a_{m_1, m_2 \ldots, m_d} \pi_1^{m_1} \pi_2^{m_2} \cdots \pi_d^{m_d},$$

es una suma finita de productos finitos de funciones continuas, y por tanto todo polinomio es continuo en $\mathbb{R}^d$. Si denotamos por $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_d]$ al conjunto de dichos polinomios, entonces

$$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \subseteq C^0(\mathbb{R}^d).$$

Aquí recalcamos que hay un abuso de notación porque en el rigor del Álgebra Abstracta un polinomio no es una función. Sin embargo, en este texto identificaremos a un polinomio con la función que define.

Una función racional se define como el cociente de dos polinomios y por tanto será continua en aquellos puntos donde el denominador no se anule. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ la función

$$f = \frac{\pi_1^2 + 3\pi_2^7 - \pi_3}{5\pi_1^4 + 6\pi_2}, \qquad \text{es decir} \qquad f(x, y, z) = \frac{x^2 + 3y^7 - z}{5x^4 + 6y}$$

es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^4 + 6y = 0\}$.

Ejemplo 6.2.6 (Conjuntos de nivel)**.** Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces cada conjunto

$$f^{-1}(c) = \{x \in X : f(x) = c\}$$

es un conjunto cerrado de X. Esto se sigue del Teorema 6.2 porque cada conjunto puntual $\{c\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Otra manera de demostrar esta afirmación es tomar un punto límite x_0 de $f^{-1}(c)$. Por el Teorema 4.2 existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión en $f^{-1}(c)$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$. Entonces, como f es continua,

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = c, \qquad \text{es decir } x_0 \in f^{-1}(c).$$

Esta propiedad permite concluir sin dificultad que conjuntos como

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}, \qquad B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 - y^2 + z^2 + w^2 = 2\}$$

son cerrados en el correspondiente espacio euclídeo porque son conjuntos de nivel de funciones polinomiales.

Ejemplo 6.2.7. Una curva $\gamma = (f_1, \dots, f_d) : X \to \mathbb{R}^d$ es continua si y solo si cada una de sus componentes f_j, $j = 1, \dots, d$ es continua. Esto se deduce inmediatamente de la Proposición 6.1 (3). Note que en términos de proyecciones, podemos escribir $f_j = \pi_j \circ \gamma$.

Ejercicios

6.2.1 Si $f : X \to Y$ es una aplicación entre espacios métricos y X es discreto, entonces f es continua.

6.2.2 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ¿f es continua?

6.2.3 Aplicando la definición de límite (argumento $\epsilon - \delta$), establecer la continuidad de las funciones suma, producto, tomar recíprocos y potencias

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \iota : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

donde $\iota(x) = 1/x$ y $e_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Indicación: Ejercicio 1.4.8.

6.2.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que si $f(x_0) > 0$, para algún $x_0 \in X$, existe una vecindad $U \subseteq X$ de x_0 tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in U$.

6.2.5 Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ continuas. Probar que el conjunto $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ es cerrado, y que los conjuntos $\{x \in X \,|\, f(x) > g(x)\}$ y $\{x \in X \,|\, f(x) < g(x)\}$ son abiertos. Además, mostrar que las funciones $F_1, F_2 : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F_1(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \quad F_2(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\},$$

son continuas.

6.2.6 Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \text{y} \qquad 0 \le h(x) \le 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} h(x)f(x) + (1 - h(x))g(x) = \alpha.$$

6.2.7 *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es constante.

b) Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f(ax + b) = f(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que f es constante. Indicación: Considere primero el caso $b = 0$. Luego, hacer $x = t + \frac{b}{1-a}$ y aplicar el caso anterior.

6.2.8 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y asuma que existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ donde f es continua. Si suponemos que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$.

6.2.9 Interpretando a $\mathbb{R}^{n\times n}$ como el espacio de matrices cuadradas de tamaño n con entradas en $\mathbb{R}$, considere la función determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Además $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ es un conjunto cerrado.
Indicación: ¿qué tipo de función es el determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$?

6.2.10 *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, emplear el Teorema 4.8 para demostrar que

$$\limsup_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\limsup_{n\to+\infty} a_n\right), \qquad \liminf_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\liminf_{n\to+\infty} a_n\right).$$

¿Son válidas las igualdades si se remueve alguna de las hipótesis sobre f?

b) Emplear la versión fuerte de la regla de Stolz-Cesàro, Ejercicio 4.5.6 y la función exponencial para demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos positivos, entonces

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Además, recuperar el Teorema 5.7 a través de estos resultados.

6.3. Aplicaciones continuas definidas en compactos y en conexos

La continuidad de aplicaciones entre espacios métricos también se ve reflejada en su comportamiento sobre conjuntos compactos y conjuntos conexos. Como veremos, las aplicaciones continuas preservan estas propiedades bajo imágenes directas. Como consecuencias se obtendrán los Teoremas del valor extremo y del valor intermedio. Incluimos algunas aplicaciones como la existencia de raíces reales de polinomios de grado impar y una caracterización de conjuntos abiertos conexos del espacio euclídeo.

Teorema 6.3. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios métricos y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento por abiertos de $f(K)$. Como f es continua, cada $f^{-1}(V_\alpha)$ es un conjunto abierto en X. Se sigue entonces que $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es un cubrimiento por abiertos de K porque

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(V_\alpha).$$

Al ser compacto, existen índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_j})$, de donde se puede deducir que $f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$. Por tanto, $f(K)$ es compacto. □

Empleando este resultado para aplicaciones con valores en espacios euclídeos y recordando el Teorema de Heine-Borel, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.1. *Si $f : X \to \mathbb{R}^d$ es continua y X es un espacio métrico compacto, entonces $f(X)$ es cerrado y acotado.*

Más aún, en el caso de funciones definidas sobre compactos y con valores en la recta real se deduce que toda función alcanza máximo y mínimo.

Teorema 6.4 (Teorema del valor extremo)**.** *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y X es un espacio métrico compacto, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que*

$$\sup_{x\in X} f(x) = f(x_1), \qquad \inf_{x\in X} f(x) = f(x_0),$$

es decir

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1), \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

Demostración. Como $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ existen y por la Proposición 2.7 ambos pertenecen a $f(X)$, de donde se sigue el resultado. □

Note que el teorema clásico de Cálculo del valor extremo corresponde al caso $X = [a, b]$ de un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.

Pasamos ahora a la relación entre conjuntos conexos y aplicaciones continuas.

Teorema 6.5. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios métricos y $C \subseteq X$ es conexo, entonces $f(C)$ es conexo.*

Demostración. Suponga que (A, B) es una separación de $f(C)$, es decir, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, donde $A, B \subseteq Y$ no son vacíos. Vamos a demostrar que (G, H) es una separación de C, donde $G = C \cap f^{-1}(A)$ y $H = C \cap f^{-1}(B)$. Esto contradeciría que C es conexo, y por tanto $f(C)$ no puede tener separaciones.

Es claro que G y H no son vacíos. Como $A \subseteq \overline{A}$, entonces $G \subseteq f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$. Pero f es continua y así $f^{-1}(\overline{A})$ es cerrado. Por tanto, $\overline{G} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ de donde se deduce que $f(\overline{G}) \subseteq \overline{A}$. Por definición de H, $f(H) \subseteq B$, y como $\overline{A} \cap B = \emptyset$, concluimos que $\overline{G} \cap H = \emptyset$. De la misma manera, $\overline{H} \cap G = \emptyset$. □

Aplicando el teorema anterior a funciones reales y recordando que los conjuntos conexos de la recta real son los intervalos, Teorema 3.5, recuperamos el teorema clásico del valor intermedio para funciones continuas.

Teorema 6.6 (Teorema del valor intermedio)**.** *Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

En particular, si $I = [a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Ejemplo 6.3.1. Todo polinomio $p(x) = x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \cdots + a_1x + a_0$ con coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real. En efecto, como

$$\lim_{n\to+\infty} p(-n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} p(n) = +\infty,$$

existen $x_0 < 0$ y $x_1 > 0$ tales que $p(x_0) < 0$ y $p(x_1) > 0$. Por el Teorema del valor intermedio, existe $x_0 < c < x_1$ tal que $p(c) = 0$.

Ejemplo 6.3.2 (Puntos fijos)**.** Toda función continua

$$f : [0, 1] \to [0, 1]$$

tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Para demostrar esta afirmación considere la función $h(x) = f(x) - x$, que es continua en $[0, 1]$. Como $h(0) = f(0) \in [0, 1]$, $h(0) \geq 0$ y $h(1) \leq 0$ porque $f(1) \in [0, 1]$ y así $f(1) \leq 1$. Si $h(0) = 0$ ó $h(1) = 0$ hemos terminado. De lo contrario, $h(0) > 0$ y $h(1) < 0$. Por el Teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $h(x_0) = 0$, es decir, $f(x_0) = x_0$.

Otra demostración, por contradicción, es suponer que $h(x) \neq 0$, para todo $x \in [0, 1]$. Entonces la función

$$H(x) = \frac{h(x)}{|h(x)|} = \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$$

sería continua y nunca se anularía. Sin embargo, $H(0) = 1$ y $H(1) = -1$, en contradicción con el Teorema del valor intermedio.

Nota 6.3.1. El ejemplo anterior es un caso particular del famoso *Teorema del punto fijo de Brouwer*. Este afirma que una función continua $f : K \to K$ definida en un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto y convexo tiene un punto fijo. En particular, toda función

$$f : \overline{B} \to \overline{B}$$

continua tiene un punto fijo, donde $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una bola euclídea cerrada.

Ejemplo 6.3.3 (Abiertos conexos del espacio euclideo)**.** Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice *conexo por caminos* si para cada par de puntos $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in C$ existe una curva continua $\gamma : [0,1] \to C$ tal que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$ y $\gamma(1) = \boldsymbol{x}_1$.

Ejemplos de estos conjuntos son los conjuntos convexos, ver Nota 2.2.1, porque en este caso podemos tomar $\gamma(t) = t \cdot \boldsymbol{x}_1 + (1-t) \cdot \boldsymbol{x}_0$. Así, intervalos en $\mathbb{R}$, semiplanos en $\mathbb{R}^2$ y bolas abiertas o cerradas en $\mathbb{R}^d$ son conjuntos conexos por caminos.

Aunque las nociones conexidad y conexidad por caminos son en general distintas, para el caso de conjuntos abiertos del espacio euclídeo ellas coinciden. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Sea $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces, U es conexo si y solo si es conexo por caminos.

Supongamos que U es conexo por caminos. Si U no fuera conexo, existiría una separación (A, B) de U. Tome $\boldsymbol{x}_0 \in A$ y $\boldsymbol{x}_1 \in B$. Por hipótesis, existe $\gamma : [0,1] \to U$ continua tal que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$ y $\gamma(1) = \boldsymbol{x}_1$. El Teorema 6.5 demuestra que $\gamma[0,1] \subseteq U$ es conexo. Luego, el Ejemplo 3.3.2 indicaría que $\gamma[0,1] \subseteq A$ ó $\gamma[0,1] \subseteq B$, que es imposible. Esta contradicción implica que U debe ser conexo.

Recíprocamente, supongamos que U es conexo. Fije $\boldsymbol{x}_0 \in U$ y sea

$$V = \{\boldsymbol{x} \in U : \text{ existe } \gamma : [0,1] \to U \text{ continua}, \gamma(0) = \boldsymbol{x}_0, \gamma(1) = \boldsymbol{x}\}. \tag{6.3}$$

Para demostrar que U es conexo por caminos, basta mostrar que $U = V$. Como U es conexo, sus únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y U, ver Ejemplo 3.3.3. Entonces, si probamos que V es abierto y cerrado, se seguirá que $U = V$. En efecto, V no es vacío porque $\boldsymbol{x}_0 \in V$ (use la curva constante igual a $\boldsymbol{x}_0$).

Para demostrar que V es abierto fije $\boldsymbol{x} \in V \subseteq U$ y $\gamma : [0,1] \to U$ con $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$ y $\gamma(1) = \boldsymbol{x}$. Como U es abierto en $\mathbb{R}^d$, existe $r > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq U$. Si $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_2 < r$, considere la curva $\psi : [0,1] \to U$ definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2t-1) \cdot \boldsymbol{y} + 2(1-t) \cdot \boldsymbol{x}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ver Figura 6.1. Se sigue que ψ es continua y que conecta a $\boldsymbol{x}_0$ con $\boldsymbol{y}$. Por tanto, $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq V$ y V es abierto. Finalmente, para demostrar que V es cerrado, se demuestra que $U \setminus V$ es abierto en U. En efecto, si $\boldsymbol{x} \in U \setminus V$, es porque no es posible conectar a $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}_0$ por una curva continua. Si $r > 0$ es tal que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq U$,

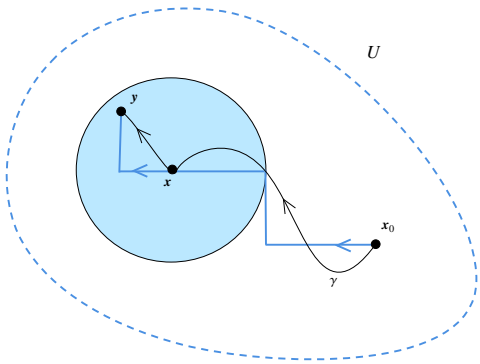

Figura 6.1: El camino γ conecta a $\boldsymbol{x}_0$ con $\boldsymbol{x}$. También es válida una curva formada por unión finita de segmentos paralelos a los ejes.

entonces ningún otro punto $\boldsymbol{y}$ de esta bola se podría conectar con $\boldsymbol{x}_0$ por una curva continua: de lo contrario, $\boldsymbol{y}$ se podría emplear para conectar a $\boldsymbol{x}_0$ con $\boldsymbol{x}$, conectando $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{y}$ por un segmento de recta, y luego siguiendo el camino que conecta $\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{x}_0$. Así $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq U \setminus V$, y por tanto $U \setminus V$ es abierto.

Nota 6.3.2. En la demostración anterior podemos tomar incluso curvas continuas formadas por un número finito de segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados. Basta con modificar la definición de V en (6.3) requiriendo que γ satisfaga esta condición. Dejamos los detalles al lector.

Ejercicios

6.3.1 ¿La imagen inversa de un conjunto compacto bajo una aplicación continua es un conjunto compacto? Misma pregunta para conjuntos conexos.

6.3.2 Aplicar el Teorema del valor intermedio para demostrar las siguientes afirmaciones e interpretarlas geométricamente:

a) Si $f : [a, b] \to [a, b]$ es continua, existe $x_0 \in [a, b]$, tal que $f(x_0) = x_0$.

b) Si $f : [a, b] \to [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

c) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(0) = f(1)$, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + 1/2)$.

d) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(0) = f(1)$, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + 1/3)$. Indicación: si $g(x) = f(x + 1/3) - f(x)$, $x \in [0, 2/3]$, entonces $g(0) + g(1/3) + g(2/3) = 0$.

e) Generalizar estos resultados para $n \in \mathbb{N}^+$ con $n \geq 2$.

6.3.3 Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ es continua, entonces es constante. Indicación: Ejercicio 3.3.3.

6.3.4 Sea (X, d) un espacio métrico conexo. Si X tiene más de un punto, entonces no es contable. Indicación: fijado $x_0 \in X$, considere la función $x \mapsto d(x, x_0)$ que es continua.

6.3.5 Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Demostrar que existe un cuadrado con dos vértices en el eje x y los otros dos en la gráfica de f, ver Figura 6.2.

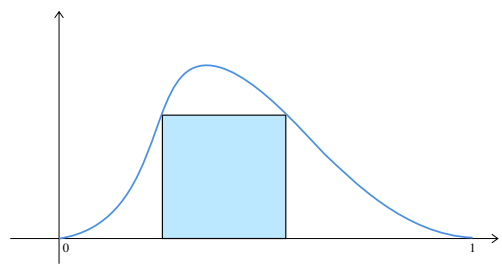

Figura 6.2: La gráfica de f soporta un cuadrado.

Nota 6.3.3. Considerando a la gráfica de f junto con el segmento $[0, 1] \times \{0\}$ como una curva cerrada, este ejercicio resulta ser un caso muy particular del *Problema del Cuadrado Inscrito* (*Square Peg Problem*) [92].

6.3.6 Sea (X, d) un espacio compacto y $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas.

a) Si $f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$, existe $k > 0$ tal que $k + f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$.

b) Si $0 < f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$, demostrar que existe $\lambda > 1$ tal que $\lambda \cdot f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$.

6.3.7 Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ funciones continuas tales que $f(g(x)) = g(f(x))$, para todo $x \in [0, 1]$. Comprobar que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Indicación: si $g(x) < f(x)$ para todo x y α es el máximo valor tal que $g(\alpha) = \alpha$, mostrar que también $g(f(\alpha)) = f(\alpha)$.

6.3.8 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión en $[a, b]$. Demostrar que para todo $\alpha > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{n^\alpha} \qquad \text{converge.}$$

¿Es válido el resultado si el intervalo de definición de f no es compacto?

6.3.9 Demostrar que un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es compacto si y solo si cada función continua $f : K \to \mathbb{R}$ es acotada.

6.3.10 Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$ una cadena decreciente de compactos no vacíos en X, y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Demostrar que $f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f(K_n)$.

6.3.11 Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una aplicación tal que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \qquad x, y \in X, x \neq y.$$

Demostrar que f tiene un único punto fijo, es decir, existe una única solución de la ecuación $f(x) = x$. Indicación: minimice $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = d(f(x), x)$.

6.3.12 (Normas equivalentes) Demostrar, completando los siguientes pasos, que todas las normas sobre $\mathbb{R}^d$ son equivalentes, en el sentido del Ejercicio 2.2.7:

a) Es suficiente mostrar que una norma arbitraria $\|\cdot\|'$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$. Considere la aplicación $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|'$. Demostrar que

$$\big| \|\boldsymbol{x}\|' - \|\boldsymbol{y}\|' \big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|' \leq \alpha \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1,$$

donde $\alpha = \text{máx}_{1 \leq j \leq d} \|e_j\|' > 0$, $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, y concluir que dicha aplicación es continua.

b) Justifique por qué los valores $c_1 = \text{mín}_{\|z\|_1 = 1} \|z\|'$ y $c_2 = \text{máx}_{\|z\|_1 = 1} \|z\|'$ existen. Concluya que

$$c_1 \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|' \leq c_2 \|\boldsymbol{x}\|_1, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

6.4. Aplicaciones uniformemente continuas

En esta sección exploramos la noción de aplicaciones uniformemente continuas donde el valor de δ se puede escoger de manera independiente del punto en cuestión y solo depende del valor de ϵ dado. Como ejemplo fundamental se definen las aplicaciones de tipo Lipschitz. Un caso de particular interés es la aplicación que mide la distancia de un punto a un conjunto.

Definición 6.3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre los espacios métricos (X, d) y (Y, d'). Decimos que f es *uniformemente continua* en un conjunto $E \subseteq X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x_0, x \in E$,

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Note que esta definición, primero, depende del conjunto E donde se trabaje. Segundo, el valor δ solo depende de ϵ mas no de los puntos del conjunto E. De esta forma, el adjetivo uniforme cobra sentido.

Ejemplo 6.4.1 (Aplicaciones de tipo Lipschitz)**.** Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios métricos es *de Lipschitz* si existe una constante $K > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(x_0)) \leq K \cdot d(x, x_0), \qquad \text{para todo } x, x_0 \in X.$$

Estas funciones conforman uno de los ejemplos principales de funciones uniformemente continuas. En efecto, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir $\delta = \epsilon/2K$ y concluir que

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad d'(f(x), f(x_0)) \leq K \cdot d(x, x_0) < \epsilon.$$

Ejemplo 6.4.2. Toda función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ es de tipo Lipschitz con constante $K = |a|$. Lo mismo es válido para la función valor absoluto $f(x) = |x|$ con $K = 1$ y más generalmente la función norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ en un espacio vectorial normado, Ejemplo 6.2.3.

Ejemplo 6.4.3. Considere $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Note que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = |\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = |x - y|. \tag{6.4}$$

Así, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon^2$ para concluir que f es uniformemente continua en $[0, +\infty)$. Sin embargo, f no es de tipo Lipschitz porque si $0 < x < y$, el cociente

$$\frac{|\sqrt{y} - \sqrt{x}|}{|y - x|} = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

no es acotado.

Ejemplo 6.4.4. En el caso real, una herramienta útil para establecer la condición de Lipschitz de funciones diferenciables es el Teorema del valor medio, Corolario 7.1, que estudiaremos en el próximo capítulo. Por ejemplo, para la función $f(x) = \cos(x)$, dados $x, y \in \mathbb{R}$, existe $\xi_{x,y}$ entre x y y tales que

$$|\cos(x) - \cos(y)| = \left|\sin(\xi_{x,y})\right| |x - y| \leq |x - y|.$$

Por tanto, esta función es de tipo Lipschitz con $K = 1$. El mismo razonamiento aplica a la función $g(x) = \sin(x)$.

Ejemplo 6.4.5. La función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Por contradicción, si lo fuera, tendríamos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |x^2 - y^2| < \epsilon.$$

Eligiendo $\epsilon = 1$, si existiera tal $\delta > 0$, tomando $y = x + \delta/2$ obtenemos que

$$|x^2 - (x + \delta/2)^2| = |\delta x + \delta^2/4| < 1, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

desigualdad que es falsa, porque implicaría que $\mathbb{R}$ es acotado.

Ejemplo 6.4.6 (La distancia a un conjunto)**.** En un espacio métrico (X, d), si $A \subseteq X$ y $x \in X$, *la distancia de x a A* se define por

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Esta fórmula define una función $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ que satisface

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y), \tag{6.5}$$

y por tanto es de Lipschitz con $K = 1$. Para demostrar la desigualdad, si $a \in A$,

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a), \qquad \text{es decir} \qquad \operatorname{dist}(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Como a es arbitrario, concluimos que

$$\operatorname{dist}(x, A) - d(x, y) \leq \operatorname{dist}(y, A), \qquad \text{y así} \qquad \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leq d(x, y).$$

Intercambiando los papeles de x e y, podemos concluir (6.5).

En general, no es válido que la distancia entre x y A se alcance en algún punto de A, es decir, que exista $a_0 \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a_0)$. Por ejemplo, considere en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ el semiplano $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ y el punto $x = (-1, 0)$. En este caso $\operatorname{dist}(x, A) = 1$ y se alcanza justo en el punto $b = (0, 0) \notin A$. Por otra parte, incluso si A es cerrado esta propiedad no es válida. Considere por ejemplo el espacio $X = \{-1\} \cup (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica inducida por la métrica usual de la recta real, $x = -1$ y $A = (0, 1)$. Entonces $\operatorname{dist}(x, A) = 1$, pero no existe un elemento en el espacio que alcance dicha distancia.

En este punto, destacamos un caso positivo, cuando $A = K \subseteq X$ es compacto en un espacio arbitrario X. Entonces, para cada $x_0 \in X$, existe $x_1 \in K$ tal que

$$\operatorname{dist}(x_0, K) = d(x_0, x_1).$$

Para demostrar esta afirmación note que la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{dist}(x, \{x_0\}) = d(x, x_0)$ es continua y por el Teorema del valor extremo, $f|_K$ alcanza su mínimo en algún punto de K.

Nota 6.4.1. Si suponemos que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un cerrado del espacio euclídeo, también se verifica que

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2, \qquad \text{para algún } \boldsymbol{y} \in A.$$

En efecto, como $\alpha = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A) = \inf_{\boldsymbol{w} \in A} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}\|_2$, existe una sucesión $\boldsymbol{w}_n \in A$ tal que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_n\| \to \alpha$ si $n \to +\infty$ (recuerde la Proposición 2.7). Por tanto, la sucesión $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ resulta ser acotada. Entonces por el Teorema de Bolzano-Weierstrass 4.7, existe una subsucesión $\{\boldsymbol{w}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, digamos $\boldsymbol{w}_{n_k} \to \boldsymbol{y}$. Como A es cerrado, entonces $\boldsymbol{y} \in A$ y además

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \lim_{k \to +\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_{n_k}\|_2 = \operatorname{dist}(x, A),$$

como requeríamos. En el Proyecto 14.1 veremos una afirmación similar, válida en el contexto de espacios con producto interno.

El siguiente es un criterio, en términos de sucesiones, útil para determinar cuándo una aplicación es uniformemente continua.

Proposición 6.4. *Una aplicación $f : X \to Y$ es uniformemente continua en $E \subseteq X$ si y solo si para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E tales que $d(x_n, y_n) \to 0$, se sigue que $d'(f(x_n), f(y_n)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.*

Demostración. Si f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Si $d(x_n, y_n) \to 0$ si $n \to +\infty$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) < \delta$, para todo $n \geq N$. Así $d'(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$ si $n \geq N$ y por tanto $d'(f(x_n), f(y_n)) \to 0$ si $n \to +\infty$.

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $x, y \in E$ tales que $d(x, y) < \delta$ pero $d'(f(x), f(y)) \geq \epsilon_0$. Eligiendo $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$, existen $x_n, y_n \in E$ con

$$d(x_n, y_n) < 1/n \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0.$$

Entonces $d(x_n, y_n) \to 0$ pero $d'(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$ si $n \to +\infty$. □

Usando este criterio podemos comprobar nuevamente que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si $x_n = n + 1/n$ y $y_n = n$ entonces $|x_n - y_n| = 1/n \to 0$, pero $|x_n^2 - y_n^2| = 2 + 1/n^2 \to 2$ si $n \to +\infty$. En este ejemplo cabe notar que las sucesiones empleadas no son acotadas. En caso contrario, si restringimos f a un intervalo compacto, la función sí será uniformemente continua. En efecto, si $-R \leq x, y \leq R$, entonces

$$|x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2R|x - y|.$$

Esta afirmación también es consecuencia del siguiente resultado más general.

Teorema 6.7. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios métricos y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Dado $p \in X$, por continuidad para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_p = \delta(p, \epsilon) > 0$ tal que si $q \in B_d(p, \delta_p)$, entonces $d'(f(p), f(q)) < \epsilon/2$. Así la familia $\{B_d(p, \delta_p/2)\}_{p\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Por compacidad, existen $p_1, \ldots, p_n \in X$ tal es que $X = \bigcup_{j=1}^n B_d(p_j, \delta_{p_j}/2)$. Consideremos

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{mín}\{\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_n}\} > 0, \qquad \text{valor que solo depende de } \epsilon.$$

Si $d(p, q) < \delta$, existe $j = 1, \ldots, n$ tal que $p \in B_d(p_j, \delta_{p_j}/2)$. Por tanto, $d(p, p_j) < \delta_{p_j}/2$ y esto implica que $d'(f(p), f(p_j)) < \epsilon/2$. Por otra parte,

$$d(q, p_j) \leq d(q, p) + d(p, p_j) < \delta + \frac{\delta_{p_j}}{2} \leq \delta_{p_j},$$

de donde se sigue, por la elección de δ_{p_j}, que $d'(f(q), f(p_j)) < \epsilon/2$. En conclusión,

$$d'(f(p), f(q)) \leq d'(f(p), f(p_j)) + d'(f(p_j), f(q)) < \epsilon,$$

y por tanto f es uniformemente continua en X. □

Ejercicios

6.4.1 Si $f : X \to Y$ es uniformemente continua, demostrar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy.

6.4.2 Determinar cuáles de las siguiente funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

c) $f(x) = (\cos x)^3$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^2}$.

e) $f(x) = \sin(x^2)$.

f) $f(x) = x\sin(x)$.

g) $f(x) = e^x$.

h) $f(x) = \ln|x|$.

6.4.3 *a*) Dado $n \in \mathbb{N}^+$, mostrar que si $x, y \geq 0$, entonces

$$\left|x^{1/n} - y^{1/n}\right| \leq |x-y|^{1/n}.$$

Indicación: por el Teorema del Binomio $a^n + b^n \leq (a+b)^n$, si $a, b \geq 0$.

b) Más generalmente, si $0 < \alpha < 1$ y $x, y \geq 0$, entonces

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha.$$

Indicación: si $0 \leq x < y$ y $0 \leq t = y/x < 1$, entones $\frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \leq \frac{1-t}{1-t} = 1$.

Concluir que la función $x \in [0, +\infty) \mapsto x^\alpha$ es uniformemente continua en su dominio, mas no es de Lipschitz.

6.4.4 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua allí. Las siguientes afirmaciones se verifican:

a) Si A es acotado, entonces f es acotada. Indicación: si f no fuera acotada elija $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $a_n \to a \in \overline{A}$ tal que $f(a_{n+1}) > f(a_n) + 1$. Si $b_n = a_{n+1}$, entonces $|a_n - b_n| \to 0$ pero $|f(a_n) - f(b_n)| \not\to 0$ si $n \to +\infty$.

b) f se extiende continuamente a $\overline{A}$. En efecto, para cada $a \in A'$, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Indicación: Por el Ejercicio 6.4.1 si $a_n \in A$ y $a_n \to a \in \overline{A}$, entonces $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por tanto convergente, digamos $f(a_n) \to b$. Mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Emplear estas propiedades para comprobar que $f(x) = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ y $g(x) = \sin(1/x)$ no son uniformemente continuas en $(0, a]$.

6.4.5 Si $f : X \to Y$ es uniformemente continua en su dominio, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{diam}(E) < \delta$, entonces $\operatorname{diam}(f(E)) < \varepsilon$.

6.4.6 Sean X, Y y Z espacios métricos. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son aplicaciones de tipo Lipschitz, demostrar que $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ es de Lipschitz, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Además si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son de Lipschitz, entonces $g \circ f : X \to Z$ es de Lipschitz. Demostrar las mismas afirmaciones para aplicaciones uniformemente continuas. En el caso real ¿qué pasa con el producto de tales funciones?

6.4.7 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice periódica de periodo $p > 0$ si $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si f es continua y periódica de periodo p, entonces f es uniformemente continua.

6.4.8 Hallar una fórmula para $f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, S^d)$ y comprobar que f es continua, donde $S^d := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$ es la esfera d-dimensional.

6.4.9 Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{dist}(x, \overline{A}) = \operatorname{dist}(x, A).$$

6.4.10 Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Si $A \subseteq X$ y $x \in X$, demostrar que $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$. En particular, si $F \subseteq X$ es cerrado, este es el conjunto de ceros de una función continua:

$$F = f^{-1}(0), \qquad \text{con } f(x) = \operatorname{dist}(x, F).$$

b) Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, considere

$$U_n = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, F) < 1/n\}.$$

Demostrar que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. En conclusión, un conjunto cerrado en un espacio métrico es la intersección contable de conjuntos abiertos (*conjunto G_δ*).

c) Demostrar que un conjunto abierto en un espacio métrico es la unión contable de conjuntos cerrados (*conjunto F_σ*).

6.4.11 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos cerrados disjuntos. Considere la función

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}.$$

Demostrar que f es continua, $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in X$, $f^{-1}(A) = 0$ y $f^{-1}(B) = 1$.

Concluir que si $U = f^{-1}([0, 1/2))$ y $V = f^{-1}((1/2, 1])$, entonces U y V son abiertos que separan a A y B, es decir, $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Esta propiedad topológica se denomina *normalidad* ó *T4*.

6.4.12 Dado un espacio métrico (X, d) y $A, B \subseteq X$, la *distancia* entre A y B se define por

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

a) Comprobar que $\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B) = \inf_{b \in B} \operatorname{dist}(b, A)$.

b) Demostrar que si $K \subseteq X$ es compacto, $C \subseteq X$ es cerrado y $K \cap C = \emptyset$, entonces $\operatorname{dist}(K, C) > 0$.

c) Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B en un espacio euclídeo, cerrados y disjuntos tales que $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

6.4.13 $(*)$ (**Teorema del número de Lebesgue**) Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Si $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento por abiertos de K, demostrar que existe $\delta > 0$ con la siguiente propiedad: si $A \subseteq K$ satisface $\operatorname{diam}(A) < \delta$, entonces existe $\alpha \in J$ tal que $A \subseteq U_\alpha$. El número δ es llamado un *número de Lebesgue* para el cubrimiento $\mathfrak{U}$.

Indicación: si $K \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$ y $K \setminus U_{\alpha_l} \neq \emptyset$, $l = 1, \ldots, n$, considere la función $f : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{dist}(x, K \setminus U_{\alpha_j}).$$

Comprobar que $\delta = \min\{f(x) : x \in K\} > 0$ satisface lo requerido.

6.5. Límites laterales y discontinuidades de funciones reales

La geometría de la recta real permite hacer un análisis más detallado a la hora de estudiar límites de funciones definidas allí. En particular, al aproximarnos a un punto solo hay dos direcciones posibles. En esta sección estudiaremos límites laterales así como límites infinitos y al infinito. Además, analizaremos los tipos de discontinuidades posibles, incluyendo el caso de funciones monótonas.

Definición 6.4 (Límites laterales)**.** Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, definimos el *límite a derecha de f en $x_0 \in (a, b)$* como $f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ si

$$\text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que si } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(x_0^+)| < \epsilon.$$

De la misma forma, *el límite por izquierda de f en x_0* es $f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ si

$$\text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que si } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ entonces } |f(x) - f(x_0^-)| < \epsilon.$$

En el primer caso se emplea la notación $f(x) \to f(x_0^+)$ cuando $x \to x_0^+$, mientras que en el segundo se escribe $f(x) \to f(x_0^-)$ cuando $x \to x_0^-$.

Nota 6.5.1. 1. En términos de sucesiones, $f(x_0^+) = q$ si y solo si $f(t_n) \to q$ si $n \to +\infty$ para toda sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (x_0, b), tal que $t_n \to x_0$ si $n \to +\infty$. También $f(x_0^-) = q$ si y solo si $f(t_n) \to q$ si $n \to +\infty$ para toda sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (a, x_0), tal que $t_n \to x_0$ si $n \to +\infty$.

2. Es posible estudiar también límites de funciones definidas en conjuntos $E \subseteq \mathbb{R}$ que no son intervalos. En este caso debemos considerar puntos de acumulación por *derecha* y por *izquierda*. Por ejemplo, $x_0 \in E'_+$ (punto de acumulación de E a derecha) si para todo $\epsilon > 0$, $(x_0, x_0 + \epsilon) \cap E \neq \emptyset$. El conjunto E'_- se define de la misma forma.

Se deduce de la definición que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe si y solo si $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ existen y

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Definición 6.5. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I. Un punto $x_0 \in I$ donde f no es continua es llamado una *discontinuidad* de f. Decimos que x_0 es una *discontinuidad simple o de primer tipo* si $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ existen. De lo contrario, x_0 se dice de *segundo tipo*. Denotaremos por

$$S_f := \{x \in I : f \text{ es discontinua en } x\}$$

al conjunto de discontinuidades de f.

Hay dos maneras es las que f puede tener una discontinuidad simple en x_0. Primero, si $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$, en cuyo caso el valor de $f(x_0)$ es irrelevante. Segundo, si $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$. En cualquier caso, el valor

$$f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

se conoce como el *salto* de f en x_0.

Presentamos a continuación algunos ejemplos en relación a estos conceptos, ver también la Figura 6.3.

Ejemplo 6.5.1. La función parte entera $f(x) = \lfloor x \rfloor$ tiene discontinuidades simples en cada número entero n y

$$f(n^+) = n, \qquad f(n^-) = n - 1, \qquad f(n^+) - f(n^-) = 1.$$

Por otra parte, la función parte fraccionaria $g(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ también tiene discontinuidades simples en $n \in \mathbb{Z}$ y

$$g(n^+) = 0, \qquad g(n^-) = 1.$$

Note además que esta función es periódica de periodo 1.

Ejemplo 6.5.2. Las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

son continuas en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sin embargo, en $x = 0$ $f(0^+)$ y $f(0^-)$ no existen. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $x_n = \pm 1/n\pi \to 0$ si $n \to +\infty$ entonces $f(x_n) = 0$, pero para $y_n = \pm 1/(2\pi n + \pi/2) \to 0$ tenemos que $f(y_n) = \pm 1$. Por otra parte, g sí es continua en 0 porque

$$|g(x)| \leq |x|, \qquad \text{y por tanto} \quad g(x) \to 0, \text{ si } x \to 0.$$

Ejemplo 6.5.3. Considere las funciones

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

El mismo razonamiento del Ejemplo 6.1.2 muestra que $1_{\mathbb{Q}}$ no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$, mientras que g solo es continua en $x = 0$. Una manera intuitiva de entender por qué g tiene este comportamiento es ver que las gráficas de las funciones $x \mapsto 0$ y $x \mapsto x$ se intersecan precisamente en $x = 0$.

La función $1_{\mathbb{Q}}$ se conoce como la *función de Dirichlet* y es el ejemplo notable de una función que no es integrable en el sentido de Riemann, como lo estudiaremos en el Capítulo 8, ver Ejemplo 8.1.1.

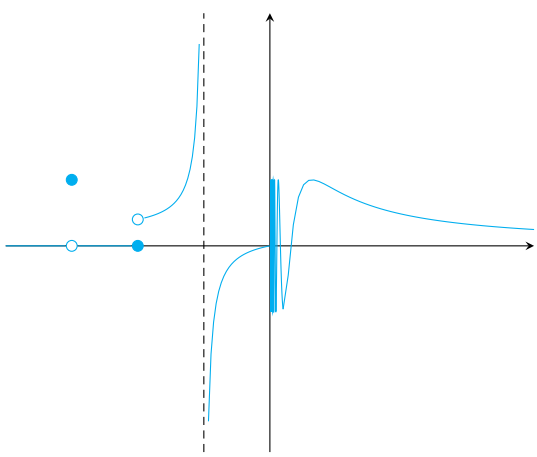

Figura 6.3: Algunas discontinuidades para funciones reales.

Ejemplo 6.5.4. La *función de Thomae* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ se define como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^+, \text{ primos relativos entre sí}, \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional}. \end{cases}$$

Esta función satisface que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \qquad \text{para todo } x_0 \in (0,1).$$

En efecto dado $0 < \epsilon < 1$, tome $N \in \mathbb{N}^+$ tal que $\frac{1}{N+1} < \epsilon \leq \frac{1}{N}$. Así, los números racionales en $(0,1)$ que no satisfacen $|f(x)| < \epsilon$, son $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$. Si elegimos $\delta > 0$ tal que ninguno de estos números esté en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, entonces $|f(x)| < \epsilon$ allí. En conclusión, f es continua en los números irracionales del intervalo $(0,1)$ y discontinua en $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

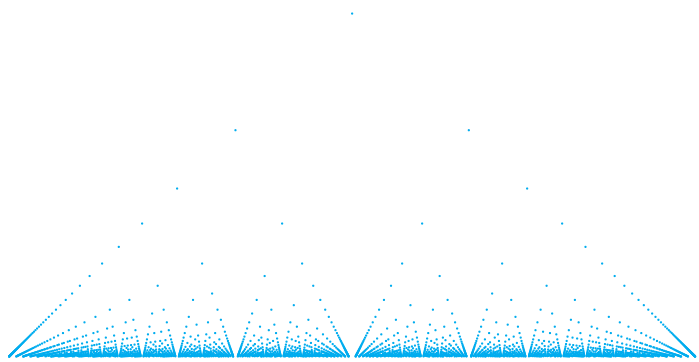

Figura 6.4: Gráfica de la función de Thomae.

Un nombre curioso dado por John H. Conway a esta función es la de *estrellas sobre Babilonia* (Stars over Babylon) dada la forma de su gráfica.

En la recta real, al igual que en el caso de sucesiones, podemos definir los límites

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

de manera satisfactoria, para funciones definidas en intervalos que tengan como punto límite a x_0, o sobre intervalos no acotados a derecha o izquierda, respectivamente. Por ejemplo, si $f : (b, +\infty) \to \mathbb{R}$ decimos que $f(x) \to L \in \mathbb{R}$ cuando $x \to +\infty$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que si $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Además estos límites se pueden caracterizar en términos de sucesiones como en el Teorema 6.1.

Ejemplo 6.5.5. Ejemplos clásicos de Cálculo incluyen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi/2^-} \tan(x) = +\infty.$$

En estos casos las funciones presentan discontinuidades de segundo tipo en los puntos correspondientes.

Por otra parte, es necesario analizar en cada caso límites que incluyan formas indeterminadas como

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad +\infty - \infty, \quad 0 \times (\pm\infty), \quad 0^0, \quad , +\infty^0.$$

Una de las herramientas fundamentales para tratar este tipo de límites es la derivada y la regla de L'Hôpital que serán estudiadas en el siguiente capítulo.

Ejemplo 6.5.6 (El teorema de los números primos)**.** Para $x > 0$, considere la función

$$\pi(x) := \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} 1$$

que cuenta cuántos números primos menores o iguales a x hay. Como existen infinitos números primos, entonces $\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty$. Por otra parte, el *teorema de los números primos* asegura que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1, \tag{6.6}$$

estableciendo una forma asintótica simple para la función $\pi(x)$. Este teorema fue demostrado de manera independiente por Jacques Hadamard y Charles de la Vallée Poussin en 1896. Aunque la prueba supera los alcances de este libro –se puede consultar en [62]–, si podemos ilustrar una consecuencia interesante empleando este límite. Se trata del siguiente resultado, cuya prueba está tomada de [63]: el conjunto

$$F(\mathcal{P}) = \{p/q \in \mathbb{Q}^+ : p, q \in \mathcal{P}\}$$

de cocientes entre números primos es denso en $\mathbb{R}^+$. Para ello veremos primero que dado $\alpha > 1$, existe $m(\alpha) \in \mathbb{N}^+$ tal que

$$[\alpha^n, \alpha^{n+1}] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset, \qquad \text{para todo } n \geq m(\alpha). \tag{6.7}$$

Para esto considere la función $L(x) = \log_\alpha(\pi(x)\ln(x)/x)$, $x \geq 2$. Aquí $\log_\alpha(t) = \ln(t)/\ln(\alpha)$ denota el logaritmo en base α de t.

Analicemos la situación $[\alpha^r, \alpha^{r+1}] \cap \mathcal{P} = \emptyset$, es decir, $\pi(\alpha^{r+1}) = \pi(\alpha^r)$, donde $r \in \mathbb{N}^+$. En este caso,

$$L(\alpha^{r+1}) - L(\alpha^r) = \log_\alpha\left(\frac{\ln(\alpha^{r+1})/\alpha^{r+1}}{\ln(\alpha^r)/\alpha^r}\right) = \log_\alpha\left(\frac{r+1}{r\alpha}\right) = \epsilon(r) - 1,$$

donde $\epsilon(r) = \log_\alpha\left(\frac{r+1}{r}\right) \to 0$ si $r \to +\infty$. Note que (6.6) asegura que $L(x) \to 0$ si $x \to +\infty$. Estos dos límites nos permiten elegir un entero $m(\alpha)$ suficientemente grande de manera que simultáneamente

$$L(\alpha^{k+1}) - L(\alpha^k) > -1/2, \quad \text{y} \quad \epsilon(k) < 1/2, \qquad \text{para } k \geq m(\alpha).$$

Si existiera un entero $r \geq m(\alpha)$ tal que $\pi(x)$ fuera constante en $[\alpha^r, \alpha^{r+1}]$, entonces tendríamos que $L(\alpha^{r+1}) - L(\alpha^r) = \epsilon(r) - 1 < -1/2$ y a su vez la desigualdad contraria. Como esto es imposible, concluimos que $\pi(x)$ no puede ser constante en $[\alpha^r, \alpha^{r+1}]$, es decir, que (6.7) se verifica para todo $n \geq m(\alpha)$.

Veamos ahora la densidad de $F(\mathcal{P})$. Sean $c > \epsilon > 0$. Demostrar que $[c-\epsilon, c+\epsilon] \cap F(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, equivale a mostrar que existe algún primo q tal que $[(c-\epsilon)q, (c+\epsilon)q] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Para esto, escoja $\alpha > 1$ tal que $\alpha^2 < \frac{c+\epsilon}{c-\epsilon}$. Sea además $q \in \mathcal{P}$ tal que $q > \alpha^{m(\alpha)}/(c-\epsilon)$, con $m(\alpha)$ como en (6.7). Entonces

$$\log_\alpha((c+\epsilon)q) - \log_\alpha((c-\epsilon)q) = \log_\alpha\left(\frac{c+\epsilon}{c-\epsilon}\right) > \log_\alpha(\alpha^2) = 2.$$

Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}^+$ con $[n, n+1] \subseteq [\log_\alpha((c-\epsilon)q), \log_\alpha((c+\epsilon)q)]$, o de manera equivalente, $[\alpha^n, \alpha^{n+1}] \subseteq [(c-\epsilon)q, (c+\epsilon)q]$. Como $\alpha^{m(\alpha)} < (c-\epsilon)q < \alpha^n$, entonces $n > m(\alpha)$. La propiedad (6.7) implica que $[(c-\epsilon)q, (c+\epsilon)q] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ como se requería.

Continuamos esta sección con una discusión sobre la naturaleza de las discontinuidades de funciones monótonas.

Definición 6.6. Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es *monótona creciente* (resp. *decreciente*)

$$\text{si } x \leq y \quad \text{implica que} \quad f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } f(y) \leq f(x)\,).$$

Si las desigualdades son estrictas se dice que f es *estrictamente monótona*.

En particular, f es monótona creciente si y solo si $-f$ es monótona decreciente. Por esta razón enunciaremos los siguientes resultados solo para el caso de funciones crecientes.

El siguiente teorema se puede interpretar como la contraparte del Teorema 4.3 para funciones reales.

Teorema 6.8. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $a < x < b$, entonces*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

   En particular, f solo tiene discontinuidades de primer tipo.

2. *Si f es acotada inferiormente en $(a, a+r) \subseteq (a, b)$ (resp. superiormente en $(b-r, b) \subseteq (a, b)$) para algún $r > 0$, entonces $f(a^+)$ existe (resp. $f(b^-)$ existe) y*

$$f(a^+) = \inf_{a<t<a+r} f(t), \qquad \textit{resp.} \quad f(b^-) = \sup_{b-r<t<b} f(t).$$

3. *Si $a < x < y < b$, entonces*

$$f(x^+) \leq f(y^-).$$

Demostración. (1) Al ser f monótona creciente, dado $x \in (a,b)$, el conjunto $A = \{f(t) \in \mathbb{R} : a < t < x\}$ es acotado superiormente por $f(x)$. Por tanto, $\alpha = \sup A$ existe y $\alpha \leq f(x)$. Veamos que $\alpha = f(x^-)$. Para ello, tome $\epsilon > 0$. Como $\alpha - \epsilon < \alpha$, existe $\delta > 0$ tal que $a < x - \delta < x$ y $\alpha - \epsilon \leq f(x-\delta) < \alpha$. Por tanto, si $x - \delta < s < x$, entonces

$$|\alpha - f(s)| = \alpha - f(s) \leq \alpha - f(x-\delta) < \epsilon,$$

como se requería. La demostración para $f(x^+)$ se hace de la misma forma.

Para (2), el argumento es el mismo que antes. Por ejemplo, si f es acotada en el intervalo $(b-r,b)$, entonces $\beta = \sup\{f(t) \in \mathbb{R} : b - r < t < b\}$ existe y $\beta = f(b^-)$.

Finalmente para (3), si $a < x < y < b$, la desigualdad requerida se sigue de (1), notando que

$$f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t), \qquad f(y^-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t).$$

□

En general, el conjunto de discontinuidades simples de una función real, definida sobre un intervalo, es finito o contable, Ejercicio 6.5.9. Este hecho admite una demostración más sencilla en el caso de funciones monótonas.

Teorema 6.9. *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente o decreciente, entonces su conjunto de discontinuidades S_f es finito o contable.*

Demostración. Supongamos que f es monótona creciente. Por el teorema anterior, si $x_0 \in S_f$, entonces $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. Podemos escoger entonces $r_{x_0} \in \mathbb{Q}$ con $f(x_0^-) < r_{x_0} < f(x_0^+)$ y definir la función $r : S_f \to \mathbb{Q}$ dada por $x_0 \mapsto r_{x_0}$. El resultado anterior también muestra que si $x_0, x_1 \in S_f$ y $x_0 < x_1$, entonces $f(x_0^+) \leq f(x_1^-)$. Esto a su vez demuestra que

$$r_{x_0} < f(x_0^+) \leq f(x_1^-) < r_{x_1}.$$

Así la aplicación r es inyectiva y S_f debe ser finito o contable. □

Ejemplo 6.5.7 (Continuidad de funciones estrictamente monótonas)**.** Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona, entonces $f : I \to J$ es biyectiva, donde $J = f(I)$. Ademas, si f es continua, entonces $f^{-1} : J \to I$ también será continua.

Para demostrar estas afirmaciones supongamos que f es creciente. El hecho de que sea biyectiva se sigue de su inyectividad. En efecto, si $x \neq x'$, entonces $f(x) \neq f(x')$, porque si por ejemplo $x < x'$, obtendríamos $f(x) < f(x')$.

Ahora, si f es continua, por el Teorema del valor intermedio 6.6, J es un intervalo. Sea $\alpha = f(a) \in J$, con $a \in I$ y suponga que $y_n \to \alpha$ si $n \to +\infty$, donde $y_n = f(x_n)$, $x_n \in I$. Para demostrar la continuidad de f^{-1} basta mostrar que $x_n \to a$ si $n \to +\infty$. Supondremos que a no es un extremo de I, el caso restante se hace de la misma forma. Sea entonces $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subseteq I$ y sea $J' = f(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Por

continuidad $J' = (f(a-\epsilon), f(a+\epsilon)) = (\beta, \gamma)$ es un intervalo que contiene a α. Si $\epsilon' = \text{mín}\{\gamma - \alpha, \alpha - \beta\} > 0$ es la distancia de α a los extremos de J', como $y_n \to \alpha$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \alpha| < \epsilon'$ para todo $n \geq N$. Por tanto,

$$\beta \leq \alpha - \epsilon' < y_n < \alpha + \epsilon' \leq \gamma$$

y al aplicar f concluimos que $a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon$, es decir, $|x_n - a| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ como se requería.

Nota 6.5.2. En general, no es cierto que si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva entre espacios métricos, su inversa $f^{-1} : Y \to X$ sea continua. Por ejemplo, considere $f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$ dada por $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = x - 1$ si $x \in (2,3]$. Esta función es continua y biyectiva. Su inversa $f^{-1} : [0,2] \to [0,1] \cup (2,3]$ está dada por $f^{-1}(y) = y$ si $y \in [0,1]$ y $f^{-1}(y) = y + 1$ si $1 < y \leq 2$. Luego f^{-1} no es continua (en $y = 1$). Note también que $f^{-1}[0,2]$ no es ni compacto ni conexo.

Existe otra herramienta para determinar cuándo una función acotada es continua en un punto y consiste en analizar cómo oscilan sus valores alrededor de dicho punto. Aunque el siguiente concepto se puede definir entre espacios métricos arbitrarios, restringimos nuestra atención al caso real. Los siguientes resultados solo serán usados en la Sección 8.5.

Definición 6.7. Dada una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y el intervalo $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, la *oscilación* de f en $B(x_0, r)$ se define por

$$\text{osc}(f, x_0, r) := \sup_{t,s \in [a,b] \cap B(x_0,r)} |f(t) - f(s)|,$$

valor que existe porque f es acotada. Entonces la función $r \mapsto \text{osc}(f, x_0, r)$ es una función monótona creciente y por tanto

$$\text{osc}(f, x_0) := \lim_{r \to 0^+} \text{osc}(f, x_0, r) = \inf_{r > 0} \text{osc}(f, x_0, r),$$

existe. Este valor se conoce como la *oscilación de f en x_0*.

A través de la definición de límite se sigue el siguiente resultado esperado.

Proposición 6.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $x_0 \in [a,b]$, entonces f es continua en x_0 si y solo si osc$(f, x_0) = 0$.*

Ejemplo 6.5.8. Para la función $f(x)$ del Ejemplo 6.5.2, observe que $\text{osc}(f, 0, r) = 2$ porque por ejemplo $|\sin(1/t) - \sin(1/s)| = 1 + 1 = 2$ para $t = 1/(n\pi + \pi/2)$ y $s = 1/(n\pi - \pi/2)$, con $n \in \mathbb{N}^+$ suficientemente grande. Así concluimos que

$$\text{osc}(f, 0) = 2.$$

Para la función de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$, del Ejemplo 6.5.3, el máximo valor que alcanza $|1_{\mathbb{Q}}(t) - 1_{\mathbb{Q}}(s)|$ en cualquier intervalo abierto es 1 y por tanto

$$\text{osc}(1_{\mathbb{Q}}, x_0) = 1, \qquad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Dado $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$A_{f,\epsilon} := \{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f,x) \geq \epsilon\}.$$

La proposición anterior demuestra que

$$S_f = \{x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } x\} = \bigcup_{\epsilon>0} A_{f,\epsilon} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} A_{f,1/n}. \tag{6.8}$$

Una propiedad interesante de estos conjuntos es que son cerrados, como lo muestra el siguiente lema. Por tanto, podemos concluir que el conjunto de discontinuidades de f es unión contable de conjuntos cerrados.

Lema 6.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $A_{f,\epsilon}$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que $x_n \in A_{f,\epsilon}$ y $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$. Si $x_0 \notin A_{f,\epsilon}$, podemos escribir $\operatorname{osc}(f,x_0) = \epsilon - \delta$, para algún $\delta > 0$. Seleccione $r > 0$ tal que $\operatorname{osc}(f,x_0,r) < \epsilon - \delta/2$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < r/2$. Esta elección implica que $(x_n - r/2, x_n + r/2) \subseteq (x_0 - r, x_0 + r)$. Así

$$\operatorname{osc}(f,x_n,r/2) < \epsilon - \delta/2 \quad \text{que a su vez implicaría que } \operatorname{osc}(f,x_n) \leq \epsilon - \delta/2 < \epsilon,$$

contradiciendo que $x_n \in A_{f,\epsilon}$. Esto demuestra que $A_{f,\epsilon}$ contiene todos sus puntos límite y por tanto es cerrado. □

Ejercicios

6.5.1 Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ números reales distintos. Construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua sólo en estos puntos.

6.5.2 Comprobar que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \cos(x), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

sólo posee límite y es continua en un conjunto numerable de puntos.

6.5.3 Determine las gráficas de las siguientes funciones y el tipo de sus discontinuidades. Si x_0 es una discontinuidad de la función f, calcular $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ y su salto, en caso de existir:

a) $f(x) = \lfloor x^2 - x \rfloor$,
b) $f(x) = x^{\lfloor x \rfloor}$, $x > 0$,
c) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,
d) $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|^\alpha}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

6.5.4 *a*) Mostrar que la función de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ es periódica de periodo $\tau > 0$, para todo $\tau \in \mathbb{Q}$.

b) Extienda la función de Thomae a todo $\mathbb{R}$ a través de la definición

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \neq 0, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, \text{ primos relativos entre sí,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Si $x = n \in \mathbb{Z}$, note que $f(n) = 1$ (eso incluye el caso $n = 0 = 0/1$). Demostrar que f es periódica de periodo 1. Además, f es continua en cada número irracional y posee una discontinuidad simple en cada número racional.

6.5.5 [46] Considere a $g : (0,1) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $g(p/q) = q$, si $0 < p < q$ son enteros primos relativos entre sí. Comprobar que $\lim_{x \to r} g(x) = +\infty$, para todo $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Por tanto, g se aproxima a infinito en todos los puntos de su dominio, ver Figura 6.5.

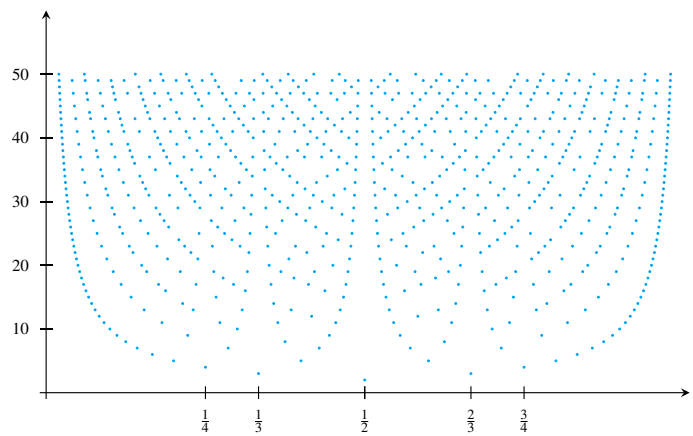

Figura 6.5: Recíproca de la función de Thomae.

6.5.6 Sea $f : (b, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Suponga que existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $(b, +\infty)$ con $x_n \to +\infty$ y $f(x_n) \to L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $n \to +\infty$. Demostrar que $f(x) \to L$ si $x \to +\infty$.

6.5.7 *a*) Demostrar la Proposición 6.5.

b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona acotada y $x_0 \in (a,b)$, demostrar que

$$\operatorname{osc}(f, x_0) = |f(x_0^+) - f(x_0^-)|.$$

¿Cuánto vale la oscilación de f en los extremos del intervalo?

6.5.8 Sea $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto contable y considere una serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ de números positivos. Defina las funciones

$$j_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_n, \\ 1, & \text{si } x \geq x_n, \end{cases} \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(x).$$

Mostrar que j_n y F son funciones monótonas crecientes. Estudiar la continuidad de la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (puede usar el *M-Test de Weierstrass* 9.3) y demostrar que tiene discontinuidades exactamente en los puntos de E. Mostrar que las discontinuidades son de primer tipo y calcular $F(x_N^+) - F(x_N^-)$.

6.5.9 ($*$) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto de discontinuidades simples de f es finito o contable.
Indicación: el conjunto de discontinuidades simples de f es igual a

$$\{x \in [a, b] : f(x^-) < f(x^+)\} \cup \{x \in [a, b] : f(x^-) > f(x^+)\}$$

$$\cup\{x \in [a, b] : \lim_{t\to x} f(t) < f(x)\} \cup \{x \in [a, b] : \lim_{t\to x} f(t) > f(x)\}.$$

Para x en el primer conjunto asocie la tripla $(p, q, r) \in \mathbb{Q}^3$ de forma que: i) $f(x^-) < p < f(x^+)$, ii) si $a < q < t < x$, entonces $f(t) < p$, iii) si $x < t < r < b$, entonces $f(t) > p$. Para x en el tercer conjunto, asocie la tripla $(p, q, r) \in \mathbb{Q}^3$ tal que: i) $\lim_{t\to x} f(t) < p < f(x)$, ii) si $a < q < t < x$ o $x < t < r < b$, entonces $f(t) < p$. Demostrar que, en cada caso, la función $x \mapsto (p, q, r)$ es inyectiva. Hacer una construcción similar para los conjuntos restantes.

Capítulo 7

Funciones diferenciables

Este capítulo introduce una de las herramientas fundamentales del Cálculo de funciones reales, a saber, la derivada y el proceso de diferenciación. A lo largo del mismo estableceremos las reglas de cálculo para derivadas y su aplicación al estudio de valores extremos y monotonicidad, incluyendo derivadas laterales. Como resultados fundamentales presentamos el Teorema del valor medio en sus diferentes versiones, el Teorema de Darboux sobre la propiedad del valor intermedio y la regla de L'Hôpital. También trataremos la fórmula de Taylor y de manera concisa la noción de función analítica. Aunque nuestro objetivo principal es la diferenciación de funciones reales, se incluye una breve discusión sobre derivadas parciales y un caso particular de la regla de la cadena en varias variables, que será útil en capítulos posteriores.

7.1. Derivada de funciones reales

Definición 7.1. Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* en $x_0 \in (a, b)$ si

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}. \tag{7.1}$$

existe. El valor $f'(x_0)$ también se denota por $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ o $\partial_x f(x_0)$, y se denomina *la derivada de f en x_0*. Si f es diferenciable en todos los puntos de (a, b), la función

$$f' : (a, b) \to \mathbb{R} \quad \text{se llama la } \textit{derivada} \text{ de } f.$$

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0, podemos emplear sucesiones para hallar su derivada. Recordando el Teorema 6.1, vemos que si $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $t_n \to 0$ y $x_n \to x_0$ si $n \to +\infty$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_0 + t_n) - f(x_0)}{t_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Note que $x_0 + t_n, x_n \in (a, b)$, si n es suficientemente grande.

En el caso real, la derivada de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en un punto x_0 se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Esta recta viene dada precisamente por la función

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En este sentido, esta recta es la mejor aproximación lineal de f cerca de x_0. En efecto, si escribimos

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r(x)$ queda determinada por esta ecuación, el requerir que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

es equivalente a que f sea diferenciable en x_0 y $\alpha = f'(x_0)$. Para ello basta despejar $r(x)$ y recordar el límite (7.1) de la definición anterior.

Nota 7.1.1. Es importante reflexionar sobre las propiedades de $\mathbb{R}$ que hacen posible la definición de derivada. Además de la métrica para poder hablar de límites, requerimos de la estructura de cuerpo para realizar la resta y el cociente en (7.1). Sin embargo, esta definición se puede extender a aplicaciones $F : (a, b) \to E$ con valores en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ a través de la fórmula

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0},$$

donde $1/(x - x_0)$ es un escalar que multiplica al vector $F(x) - F(x_0)$, y el límite se toma respecto a la norma dada. Si este límite existe, se dice que F es *diferenciable* en x_0.

Para el caso del espacio euclideo $E = \mathbb{R}^d$, si $\gamma = (f_1, \ldots, f_d) : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ es una curva, se verifica que γ es diferenciable en x_0 si y solo si cada f_j lo es en x_0, $j = 1, \ldots, d$, y en dicho caso

$$\gamma'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_d'(x_0)).$$

Esto se sigue de manera inmediata de la Proposición 6.1(3). Geométricamente γ se interpreta como una curva en $\mathbb{R}^d$ y $\gamma'(x_0)$ como el vector tangente a la curva en el punto $\gamma(x_0)$. En este caso la recta tangente a γ en x_0 se parametriza por

$$\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(x_0) + \lambda \cdot \gamma'(x_0).$$

Esta recta pasa por el punto $\gamma(x_0)$ cuando $\lambda = 0$ y tiene como dirección la indicada por el vector $\gamma'(x_0)$.

El primer resultado clásico que presentamos es que diferenciabilidad implica continuidad. Por supuesto, el recíproco es falso, ver Ejemplo 7.1.7.

Teorema 7.1. *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in (a, b)$, entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Basta calcular

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

para concluir el resultado. □

A continuación presentamos las reglas básicas de cálculo con derivadas de funciones reales. Salvo por la regla de la cadena, la demostración es elemental.

Proposición 7.1 (Reglas de cálculo con derivadas)**.** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $x_0 \in (a, b)$. Entonces:*

1. *$f \pm g$ es diferenciable en x_0 y $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.*
2. *(Regla de Leibniz) $f \cdot g$ es diferenciable en x_0 y*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, f/g es diferenciable en x_0 y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Teorema 7.2 (Regla de la cadena)**.** *Si $f : (a, b) \to (c, d)$ es diferenciable en x_0 y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $f(x_0) \in (c, d)$, entonces $g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0, y*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Demostración. Recordando el Teorema 6.1, es suficiente demostrar que

$$\frac{g \circ f(x_0 + t_n) - g \circ f(x_0)}{t_n} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

cuando $n \to +\infty$, para cada sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Dividimos este límite en dos casos:

1. Si $f(x_0) \neq f(x_0 + t_n)$, para todo $n \geq N_0$, entonces la fracción anterior es igual a
$$\frac{g(f(x_0 + t_n)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + t_n) - f(x_0)} \frac{f(x_0 + t_n) - f(x_0)}{t_n},$$
porque el cociente es distinto de cero. De esta expresión se sigue el valor requerido porque $\{f(x_0 + t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiende a $f(x_0)$, gracias al Teorema 7.1.

2. Si $f(x_0) = f(x_0 + t_n)$ para infinitos n, podemos dividir la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en dos subsucesiones: los $\{s_n\}$ tales que $f(x_0) \neq f(x_0 + s_n)$, y los $\{\tau_n\}$ tales que $f(x_0) = f(x_0 + \tau_n)$. Como f es diferenciable en x_0, calculando su valor a través de la sucesión $\{\tau_n\}$ obtenemos

$$f'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0 + \tau_n) - f(x_0)}{\tau_n} = 0.$$

Por otra parte,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(f(x_0 + \tau_n)) - g(f(x_0))}{\tau_n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(f(x_0 + s_n)) - g(f(x_0))}{s_n} = g'(f(x_0))f'(x_0) = 0,$$

donde el primer valor se obtiene por la definición de τ_n y el segundo gracias al primer caso. Entonces, $(g \circ f)'(x_0)$ existe y es igual a 0, como se debía demostrar.

□

Nota 7.1.2 (Derivadas de orden superior)**.** Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable, también podemos preguntarnos por la diferenciabilidad de $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. En caso de existir esta será denotada por f'' y se conoce como *la segunda derivada de f*. Procediendo de esta manera, obtenemos funciones

$$f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$$

cada una siendo la derivada de la anterior. Si la función $f^{(n)}$ existe decimos que f *es n veces diferenciable* y dicha función es llamada la *derivada n-ésima de f*. Otra notación que se suele emplear es

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0),$$

donde x es la variable de la que depende f. Note que si $f^{(n)}(x_0)$ existe, $f^{(n-1)}(x)$ está definida en una vecindad de x_0 y es diferenciable en x_0. En esta situación $f^{(n-2)}$ es diferenciable en dicha vecindad.

Finalmente, si f admite derivadas de todos los ordenes en su dominio, decimos que *f es infinitas veces diferenciable*.

Nota 7.1.3. Es posible calcular las derivadas de orden superior de una composición $g \circ f$ con el uso repetido de la regla de la cadena y la regla de Leibniz. Por ejemplo,

$$(g \circ f)''(x) = g'(f(x))f''(x) + g''(f(x))(f'(x))^2,$$
$$(g \circ f)^{(3)}(x) = g'(f(x))f^{(3)}(x) + 3g''(f(x))f'(x)f''(x) + g^{(3)}(f(x))(f'(x))^3.$$

La fórmula general para $(g \circ f)^{(n)}$ es conocida como la *fórmula de Faà di Bruno*, cuya naturaleza es en realidad combinatoria. Esta será tratada en el Proyecto 12.2.

Con las reglas de cálculo podemos derivar funciones polinomiales y racionales como lo muestran los siguientes ejemplos. Para ilustrar algunos fenómenos que ocurren con funciones diferenciables haremos uso de la función seno y algunas de sus propiedades.

Ejemplo 7.1.1. Es inmediato comprobar que si $f(x) = c$ es constante, entonces $f'(x) = 0$, y que si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$. Empleando inducción y la regla del cociente se sigue que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

y si $n < 0$, se requiere que $x \neq 0$. En general, toda función racional es diferenciable en los puntos donde su denominador no se anula. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + ax^2}, \qquad \text{donde } a > 0,$$

es diferenciable en toda la recta real y

$$f'(x) = -\frac{2ax}{(1 + ax^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6a^2x^2 - 2a}{(1 + ax^2)^3}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{24a^2x(ax^2 - 1)}{(1 + ax^2)^4}.$$

En general, $f^{(n)}(x) = P_n(x)/(1 + ax^2)^{n+1}$, donde los $P_n(x)$ son polinomios de grado n que se calculan mediante la recurrencia

$$P_{n+1}(x) = (1 + ax^2)P_n'(x) - 2(n + 1)axP_n(x).$$

Por tanto, f es una función infinitas veces diferenciable en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.1.2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Por la continuidad de la función seno, f es continua en todo $x \neq 0$. Pero además $|f(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que f también es continua en $x = 0$. Sin embargo, f no tiene derivada allí porque el límite

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sin(1/x) \qquad \text{no existe.}$$

Ejemplo 7.1.3. Consideremos ahora la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Al igual que antes, g es continua en $\mathbb{R}$ y además es diferenciable en toda la recta.

En efecto, de las reglas de cálculo se sigue que

$$g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), \qquad \text{si } x \neq 0,$$
$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

Es interesante notar que aunque g' existe en todo $\mathbb{R}$, no es una función continua (en $x = 0$). Este es un ejemplo directo que ilustra la existencia de funciones diferenciables cuya derivada no es continua. La única desventaja es que emplea funciones trigonométricas, que no han sido desarrolladas en el texto. Es posible también, con algo más de trabajo, dar ejemplos de esta situación empleando funciones polinomiales a trozos, ver Ejercicio 7.1.12.

Ejemplo 7.1.4. La función

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

resulta ser diferenciable en todo $\mathbb{R}$, con $h'(0) = 0$ y

$$h'(x) = 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2), \qquad x \neq 0.$$

En este caso aunque h es acotada en cualquier vecindad de 0, h' no es acotada en dicho lugar. Por ejemplo, si elegimos $x_n = 1/\sqrt{\pi n}$, con $n \in \mathbb{N}^+$ obtenemos $h'(x_n) = 2(-1)^{n+1}\sqrt{\pi n} \to \pm\infty$, recordando que $\sin(\pi n) = 0$ y $\cos(\pi n) = (-1)^n$.

Ejemplo 7.1.5. La función

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

solo es continua en $x = 0$ y además es diferenciable allí. En efecto,

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \pm\frac{x^2}{x} = 0.$$

Claramente la función no puede ser diferenciable en ningún otro punto de su dominio.

Ejemplo 7.1.6 (Derivadas parciales)**.** Aunque definir la noción de derivada para una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donde U es abierto, es una cuestión que atañe a un curso de Análisis en Varias Variables, la noción de derivada parcial es posible abordarla con herramientas de una variable real. En efecto, sea $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_d^0) \in U$ y elija una dirección $\boldsymbol{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ (la única componente distinta de cero es la j-ésima) entre las d posibles de los ejes coordenados. Entonces la curva

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^d,$$

que describe la recta que pasa por $\boldsymbol{x}_0$ con dirección $\boldsymbol{e}_j$, estará en U para valores de t cercanos a 0, digamos si $t \in (-r, r)$. Entonces $t \in (-r, r) \mapsto f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_j)$ es una función de variable real. Si su derivada

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) := \frac{d}{dt}(f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_j))\bigg|_{t=0} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_j^0 + t, \ldots, x_d^0) - f(x_1^0, \ldots, x_d^0)}{t},\end{aligned}$$

existe, esta es llamada la *derivada parcial de f respecto a x_j en $\boldsymbol{x}_0$*.

Al ser en realidad derivadas de una variable, las reglas de cálculo descritas en la Proposición 7.1 son válidas en este contexto. A efectos prácticos los cálculos se realizan derivando respecto a la variable indicada, considerando las demás como constantes.

En el caso de funciones de variable real, así como existen límites laterales, también es posible definir derivadas laterales. Terminamos esta sección con una breve discusión de este concepto.

Definición 7.2 (Derivadas laterales)**.** Decimos que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ posee *derivada por derecha en a* (resp. *derivada por izquierda en b*) si

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left(\text{resp. } f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}\right)$$

existe.

Recordando la Sección 6.5, vemos que si $x_0 \in (a, b)$ es un punto interior, entonces $f'(x_0)$ existe si y solo si $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ existen y son iguales. Por otra parte, la demostración del Teorema 7.1 aplicada a límites laterales muestra que si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene derivadas laterales en x_0, entonces f es continua en x_0, incluso si $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, es decir, si f no es diferenciable en x_0.

Ejemplo 7.1.7. La función valor absoluto $f(x) = |x|$, aunque continua en todo su dominio, solo es diferenciable cuando $x \neq 0$. En efecto, $f'(x) = 1$ si $x > 0$ y $f'(x) = -1$ si $x < 0$. Sin embargo, $f'(0)$ no existe porque

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \text{y} \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,$$

son valores distintos.

Por otra parte, la función raíz cuadrada $g(x) = \sqrt{x}$, definida para $x \geq 0$ es diferenciable si $x > 0$ con derivada

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

pero $g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$ no es finito.

Nota 7.1.4. Como hemos visto, es fácil imaginar funciones continuas en $\mathbb{R}$ que no admitan derivada en un número finito de puntos. Para un conjunto contable como $\mathbb{Z}$ esto también es válido, como lo ilustra la extensión de $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \leq 1$, a través de la relación $\varphi(x+2) = \varphi(x)$, ver Figura 12.1.

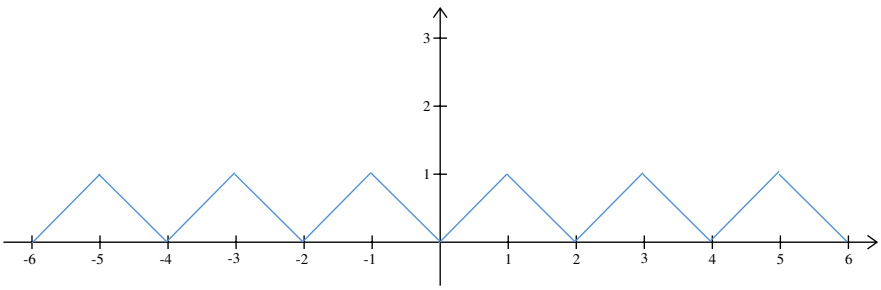

Figura 7.1: La gráfica de la función φ.

Otro ejemplo es la función $a_0(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z})$ que es periódica de periodo 1 y satisface

$$|a_0(s) - a_0(t)| \leq |s - t|, \qquad \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

como se vio en el Ejemplo 6.4.6. Note que estas dos funciones están relacionadas por

$$\varphi(x) = 2a_0(x/2).$$

Por tanto, φ también satisface que $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Más sorprendente aún es la existencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que no son diferenciables en ningún punto. En el Capítulo 9 veremos ejemplos de esta sorprendente situación.

Ejercicios

7.1.1 Fije $x_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y considere la función $f(x) = (x - x_0)^m$. Mostrar que f es diferenciable infinitas veces en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ y que

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \binom{m}{n}(x - x_0)^{m-n}.$$

Aquí estamos empleando el *coeficiente binomial* definido por

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. ¿Cuándo se anula dicho coeficiente?

7.1.2 Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Determine el número de veces que $f(x) = x^n \cdot |x|$ es diferenciable en $x = 0$.

7.1.3 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in (a, b)$. Demostrar que

$$f'(x_0) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{qx_0 - x_0}.$$

7.1.4 Sean $f_0, f_1, g_0, g_1 : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciables. Si $F(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ g_0(x) & g_1(x) \end{vmatrix} = f_0(x)g_1(x) - f_1(x)g_0(x)$ denota dicho determinante, comprobar que

$$F' = \begin{vmatrix} f_0' & f_1' \\ g_0 & g_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0' & g_1' \end{vmatrix}.$$

¿Puede generalizar este resultado para determinantes de mayor tamaño?

7.1.5 Sean $f, g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Mostrar que si f y g son diferenciables en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x_0) = g'(x_0)$, entonces h es diferenciable en x_0 y $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$.

7.1.6 Si $\gamma, \psi : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ son curvas diferenciables, mostrar que su producto interno $\langle \gamma, \psi \rangle : (a, b) \to \mathbb{R}$ también es diferenciable y que

$$\langle \gamma, \psi \rangle' = \left\langle \gamma', \psi \right\rangle + \left\langle \gamma, \psi' \right\rangle.$$

Además, si $\gamma(t) \neq (0, \ldots, 0)$, entonces $f(t) = \|\gamma(t)\|_2$ es una función diferenciable con derivada dada por

$$f'(t) = \frac{\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|_2}.$$

7.1.7 (Regla de Leibniz general) Si $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ son funciones n veces diferenciables en x, entonces

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x).$$

Más generalmente, si $f_1, \ldots, f_j : (a, b) \to \mathbb{R}$ son funciones n veces diferenciables en x, entonces

$$\frac{d^n}{dx^n}(f_1 f_2 \cdots f_j)(x) = \sum_{l_1 + \cdots + l_j = m} \binom{n}{l_1, l_2, \ldots, l_j} f^{(l_1)}(x) f^{(l_2)}(x) \cdots f^{(l_j)}(x),$$

donde la suma se toma sobre todas las posibles soluciones $l_1, \ldots, l_j \in \mathbb{N}$ de $l_1 + l_2 + \cdots + l_j = n$. Indicación: inducción en j.

7.1.8 Si $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ existen, $g'(x_0) \neq 0$, y $f(x_0) = g(x_0) = 0$, demostrar que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

7.1.9 Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y diferenciable.

a) ¿La función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es diferenciable?

b) Asumiendo que f^{-1} es diferenciable en (c, d), demostrar que $f'(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in (a, b)$ y que

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

para todo $y_0 \in (c, d)$.

7.1.10 En este ejercicio puede asumir que $\partial_t(e^t) = e^t$, ver Ejemplo 9.3.3.

a) Considere el cambio de variable $x(t) = e^t$, donde $x > 0$. Si $g(t) = f(x(t))$, entonces $\frac{dg}{dt}(t) = x\frac{df}{dx}$. De esta forma

$$(\partial_t)^n(g) = (x\partial_x)^n(f), \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

b) Mostrar que $\partial_t^k((1 - e^t)^n)|_{t=0} = 0$ si $k < n$ y $\partial_t^n((1 - e^t)^n)|_{t=0} = (-1)^n\, n!$.

c) Calculando la derivada de $f(x) = (1 - x)^n$ en $x = 1$ de dos maneras distintas concluya que

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^k = 0, \text{ si } k < n, \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^n = (-1)^n n!.$$

7.1.11 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en (a, b) tales que $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = x_0$.

a) Si $a < t_n < x_0 < s_n < b$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(s_n) - f(t_n)}{s_n - t_n} = f'(x_0). \tag{7.3}$$

b) Si $x_0 < t_n < s_n$ y $\left\{\lambda_n = \dfrac{s_n - x_0}{s_n - t_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces (7.3) es válido.

7.1.12 [58] Para cada entero $k \geq 1$ considere la función

$$g_k : \left[\frac{1}{3^k}, \frac{1}{3^{k-1}}\right] \to \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{4}{9^k}(3^k x - 2)^{3^k} + \frac{5}{9^k}.$$

a) Calcular $g_k'(x)$ y comprobar los valores

$$g_{k+1}(1/3^k) = g_k(1/3^k) = 1/9^k, \qquad g_k(2/3^k) = 5/9^k,$$
$$g_{k+1}'(1/3^k) = g_k'(1/3^k) = 4, \qquad g_k'(2/3^k) = 0.$$

b) Mostrar que la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$ y $g(x) = g_k(x)$ si $1/3^k \leq x \leq 1/3^{k-1}$ es diferenciable en $(0,1]$.

c) Si $0 < x_0 \leq 1$, tome un entero $k \geq 1$ tal que $1/3^k < x_0 \leq 1/3^{k-1}$. Como $1/9^k \leq g(x_0) \leq 1/9^{k-1}$ allí, deduzca que

$$\left|\frac{g(x_0)}{x_0}\right| < \frac{9}{3^k} < 9x_0.$$

Concluir que g es diferenciable en $x = 0$ y $g'(0) = 0$.

d) Finalmente, como $g'(1/3^k) = 4$, $g'(x)$ no puede ser continua en $x = 0$.

Consultar [58] y [103] para otros ejemplos de esta naturaleza.

7.2. Valores extremos y el Teorema del valor medio

Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un espacio métrico tiene un *máximo local en* $x_0 \in X$ si existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in B_d(x_0, r)$. Si requerimos la desigualdad invertida, decimos que f tiene un *mínimo local en* x_0. Así, f tiene un máximo local en x_0 si y solo si $-f$ tiene un mínimo local en x_0.

Para funciones diferenciables de variable real, la derivada provee un criterio para determinar puntos donde se alcanzan máximos y mínimos.

Teorema 7.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $f'_+(a)$ existe y f tiene un máximo local en a, entonces $f'_+(a) \leq 0$. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f'_+(a) \geq 0$.*

2. *Si $f'_-(b)$ existe y f tiene un máximo local en b, entonces $f'_-(b) \geq 0$. Si f tiene un mínimo local en b, entonces $f'_-(b) \leq 0$.*

3. *Si f tiene un máximo o mínimo local en $x_0 \in (a,b)$ y $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Basta considerar el caso de máximos locales, porque los resultados para mínimos se siguen de este aplicados a $-f$.

Si f tiene un máximo local en a, existe $\delta > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ si $a < x < a + \delta$. Por tanto, para estos valores de x,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Tomando $x \to a^+$ obtenemos que $f'_+(a) \leq 0$. Ahora, si f alcanza un máximo en b,

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0,$$

para valores de x cercanos a la izquierda de b. Haciendo $x \to b^-$ en esta desigualdad, concluimos que $f'_-(b) \geq 0$. Finalmente, si f alcanza un máximo local en un punto interior $x_0 \in (a, b)$, por el razonamiento anterior $f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$ y $f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0$. Así, $f'(x_0) = 0$ como se requería. □

En el caso del enunciado (3) es necesario que el punto sea interior. Por ejemplo, si $f(x) = x$, con $x \in [0, 1]$, f tiene un mínimo en 0 y un máximo en 1, pero $f'(x) = 1$, para todo x. Por otra parte, si $f'(x_0) = 0$, x_0 no tiene porque ser ni máximo ni mínimo local, como lo ilustra la función $f(x) = x^3$ en $x = 0$.

A continuación discutiremos el Teorema del valor medio para derivadas y algunos enunciados equivalentes.

Teorema 7.4 (Teorema del valor medio - Cauchy)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas y diferenciables en (a, b). Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = f'(x_0)(g(b) - g(a)).$$

Demostración. Si definimos

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x),$$

entonces h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y además $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. La demostración estará completa si mostramos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $h'(x_0) = 0$. Por el Teorema del valor extremo h alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$. Si los máximos y mínimos se alcanzaran en los extremos, como $h(a) = h(b)$, entonces h sería constante y hemos terminado. De lo contrario, al menos alguno de estos valores se debe alcanzar en un punto interior al intervalo, como se requería mostrar. □

El caso $g(t) = t$ recupera la versión más habitual de este teorema.

Corolario 7.1 (Teorema del valor medio - Lagrange)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a, b). Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Corolario 7.2 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

La interpretación geométrica del Teorema del valor medio (Lagrange) y del Teorema de Rolle se encuentran en las Figuras 7.2 y 7.3, respectivamente. En el primer caso, el teorema indica la existencia de un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En el Teorema de Rolle estas rectas son paralelas al eje x. Note también que el punto x_0 no tiene por que ser único.

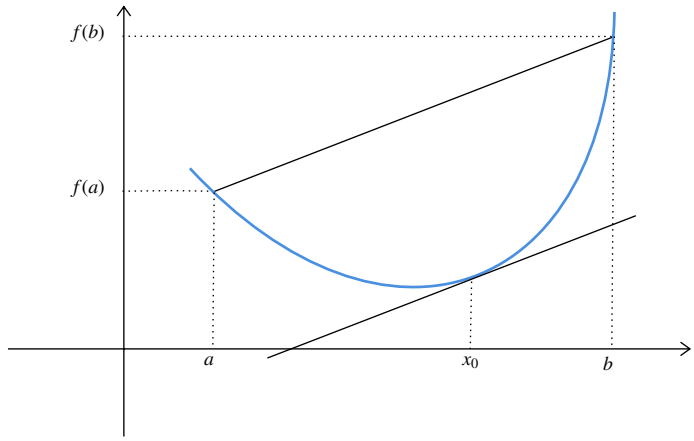

Figura 7.2: Interpretación geométrica del Teorema de Lagrange.

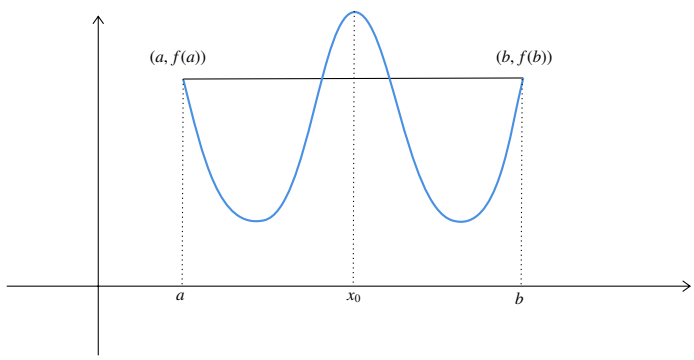

Figura 7.3: Interpretación geométrica del Teorema de Rolle.

La versión de Cauchy del Teorema del valor medio también admite una interpretación geométrica. Suponiendo que las cantidades involucradas no son nulas, este teorema indica que

$$\mu = \frac{f'(x_0)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(x_0)}{g(b) - g(a)}.$$

Esto se interpreta diciendo que la recta tangente a la curva $t \in [a, b] \longmapsto \gamma(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2$ en el punto $t = x_0$ es paralela a la recta que une $(f(a), g(a))$ con $(f(b), g(b))$. En efecto, la recta que une a estos dos puntos se parametriza por

$$\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda(f(b), g(b)) + (1 - \lambda)(f(a), g(a))$$

y su dirección está dada por el vector $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$. Por tanto,

$$\gamma'(x_0) = (f'(x_0), g'(x_0)) = \mu \cdot (f(b) - f(a), g(b) - g(a)),$$

es decir, los vectores tangentes asociados son proporcionales, como se requería, ver Figura 7.4.

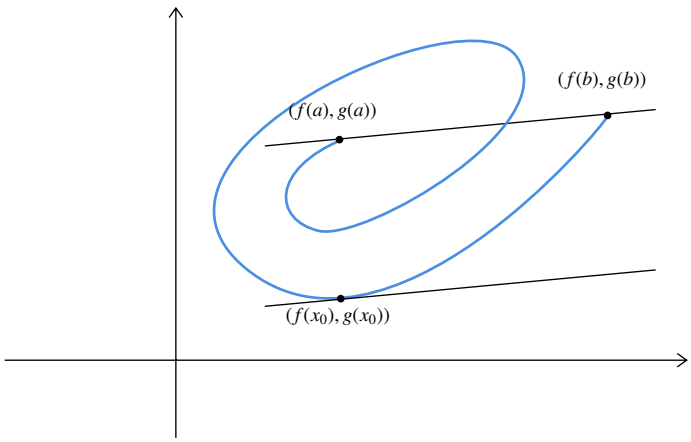

Figura 7.4: Interpretación geométrica del Teorema de Cauchy.

Nota 7.2.1. Los Teoremas del valor medio de Cauchy, de Lagrange y de Rolle son equivalentes entre si. Hemos demostrado ya que la versión de Cauchy 7.4 implica la versión de Lagrange, Corolario 7.1, y esta a su vez implica el Teorema de Rolle. Un momento de reflexión nos permite observar que la demostración del Teorema del valor medio de Cauchy en realidad está demostrando el Teorema de Rolle, y por tanto son equivalentes. Por otra parte, el Teorema de Rolle también implica directamente el Corolario 7.1, porque basta con aplicarlo a la función

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

El hecho que la versión de Lagrange implique la de Cauchy será indicado en la Nota 7.4.1 de la siguiente sección.

Ejemplo 7.2.1 (Números algebraicos)**.** Recordemos que un número irracional $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es algebraico si existe un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ tal que $P(\xi) = 0$, ver el Ejercicio 1.5.4. En este caso, se verifica que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}, \tag{7.4}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ con $q \geq 1$, donde A se escoge de forma que

$$0 < A < \text{mín}\{1, 1/M, |\xi - \xi_1|, \ldots, |\xi - \xi_m|\}.$$

Aquí $M = \sup_{x \in [\xi-1, \xi+1]} |P'(x)| > 0$ y $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ son las distintas raíces reales de $P(x)$, diferentes a ξ.

Para demostrar (7.4), suponga por contradicción que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \geq 1$ tales que $|\xi - p/q| \leq A/q^n \leq A$. Esto implica que $p/q \in [\xi - 1, \xi + 1]$ y que $p/q \neq \xi_j$,

$j = 1, \ldots, m$. Por el Teorema del valor medio 7.1, existe x_0 entre p/q y ξ tal que $|P(p/q)| = |P(p/q) - P(\xi)| = |P'(x_0)| \cdot |\xi - p/q|$. De esta forma, vemos que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{|P(p/q)|}{M} = \frac{|q^n P(p/q)|}{Mq^n} \geq \frac{1}{Mq^n} > \frac{A}{q^n},$$

contradiciendo la desigualdad de partida. Note que $q^n|P(p/q)| = |a_n p^n + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n| \geq 1$ porque la cantidad en valor absoluto es un entero distinto de cero.

Vale la pena recalcar que la condición (7.4) fue empleada por J. Liouville para construir explícitamente números reales que no son algebraicos, ver el Ejemplo 10.1.1 en el Proyecto 10.1.

Finalizamos esta sección con algunos resultados para varias variables. El primero de ellos es una extensión del Teorema del valor medio para curvas, compare luego con el Ejemplo 10.3.7.

Proposición 7.2 (Desigualdad del valor medio)**.** *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es continua y es diferenciable en (a, b), entonces existe $t_0 \in (a, b)$ tal que*

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2 \leq (b - a)\|\gamma'(t_0)\|_2.$$

Demostración. Defina la función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \gamma(t)\rangle$. Ella es diferenciable en (a, b) y $\varphi'(t) = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \gamma'(t)\rangle$. Por el Teorema del valor medio 7.1, existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(t_0)(b - a)$. Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2^2 = |\varphi(b) - \varphi(a)| = (b - a)|\varphi'(t_0)| \leq (b - a)\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2\|\gamma'(t_0)\|_2.$$

Note que si $\gamma(b) = \gamma(a)$ el enunciado es válido trivialmente. En caso contrario, podemos cancelar el factor $\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2$ en la desigualdad anterior para concluir el resultado. □

El segundo resultado es una aplicación del Teorema del valor medio para establecer una caso particular de la regla de la cadena. Este será empleado en la Sección 8.4 para determinar la regla general de Leibniz para derivación bajo el signo integral.

Lema 7.1. *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto. Suponga que $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_d}$ existen en una vecindad de $\boldsymbol{x_0} \in U$ y que son continuas en este punto. Entonces, existen funciones $G_1, \ldots, G_d : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definidas en una vecindad V de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ que son continuas en el origen y tales que*

$$F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = F(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})h_j + \sum_{j=1}^{d} G_j(\boldsymbol{h})h_j, \qquad \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_j) \in V.$$

Demostración. Haremos primero el caso $d = 2$ para aclarar el método empleado. Si $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{h}_0 = (h_1, h_2)$, podemos escribir

$$F(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x_0}) = \left[F(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - F(x_1 + h_1, x_2)\right]+\left[F(x_1 + h_1, x_2) - F(x_1, x_2)\right],$$

siempre que $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in U$. Como F admite derivadas parciales en U, podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange para asegurar la existencia de ξ_j entre x_j y $x_j + h_j$, $j = 1, 2$ de manera que

$$F(x_1 + h_1, x_2) - F(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi_1, x_2)h_1,$$
$$F(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - F(x_1 + h_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1 + h_1, \xi_2)h_2.$$

Si definimos

$$G_1(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2), \qquad G_2(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1 + h_1, \xi_2) - \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2),$$

para $\boldsymbol{h}$ como antes, la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales de F en $\boldsymbol{x}_0$, implican que $G_1(\boldsymbol{h}), G_2(\boldsymbol{h}) \to 0$ si $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$. Definiendo $G_1(\boldsymbol{0}) = G_2(\boldsymbol{0}) = 0$, se sigue que estas funciones satisfacen las condiciones requeridas.

Para el caso general, si escribimos

$$F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{x_0}) = \sum_{j=0}^{d-1} F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{k}_j) - F(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{k}_{j+1}),$$

con $\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}_1 = (h_1, \ldots, h_{d-1}, 0), \ldots, \boldsymbol{k}_{d-1} = (h_1, 0, \ldots, 0)$, podemos aplicar el Teorema del valor medio a cada sumando y proceder como antes. Se dejan los detalles al lector. □

Teorema 7.5 (Regla de la cadena)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. Suponga que $\gamma = (f_1, \ldots, f_d) : (a, b) \to U$ es diferenciable en t_0. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y suponga que $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_d}$ existen en una vecindad de $\gamma(t_0) \in U$ y que son continuas en este punto. Entonces $F \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t_0 y*

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t_0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\gamma(t_0))f_j'(t_0).$$

Demostración. El lema anterior nos permite escribir

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\gamma(t_0))\frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0} + \sum_{j=1}^{d} G_j(\gamma(t) - \gamma(t_0))\frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0},$$

donde las funciones $G_1, \ldots, G_d$ están definidas en una vecindad del origen, son continuas en este punto y se anulan allí. La fórmula se sigue de hacer $t \to t_0$ en la ecuación anterior. En efecto, $\gamma(t) \to \gamma(t_0)$ y por tanto $G_j(\gamma(t) - \gamma(t_0)) \to 0$, para todo j. □

La versión general del teorema anterior garantiza la validez de la fórmula sin necesidad de requerir la continuidad de las derivadas parciales de F.

Ejercicios

7.2.1 Aplicar el Teorema de Rolle para demostrar la siguiente versión del Teorema del valor medio: Si $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y diferenciables en (a, b), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $D'(x_0) = 0$, donde

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

es el determinante dado. ¿Qué se obtiene si $h(x) = 1$?

7.2.2 *a*) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable y asuma que $f'(x) \to 0$ si $x \to +\infty$. Definiendo la función $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, demuestre que $g(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

b) Fije $0 < \alpha < 1$ y considere la sucesión $a_n = (n + 1)^\alpha - n^\alpha$. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $a_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

c) Mostrar que sucesión $b_n = \arctan(n + 1) - \arctan(n)$ es decreciente y satisface que $b_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

7.2.3 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a, b). Suponga además que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Demostrar que dado $k \in \mathbb{R}$, existe al menos un $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = k.$$

Indicación: considere $F(x) = f(x)e^{-kx}$.

7.2.4 Sean $C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que $C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$. Demostrar que el polinomio $C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n$ tiene al menos una raíz entre 0 y 1.

7.2.5 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable y $g(0) = g(1) = 0$. Si

$$f'(x)g(x) + f(x) = 1, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

demostrar que existen infinitos $\xi \in \mathbb{R}$ tales que $f(\xi) = 1$.

7.2.6 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en (a, b) tales que $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = x_0$. Mostrar que si f' es continua en (a, b), entonces el límite (7.3) es válido.

7.2.7 Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, con derivada finita para $x \in (0, 1)$, y de forma que $|f'(x)| < 1$. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} f(1/n)$ existe. Indicación: muestre que la sucesión es de Cauchy.

7.2.8 Suponga que $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Demostrar que f no es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

7.2.9 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable en dicho intervalo. Entonces f es de Lipschitz en (a, b) si y solo si f' esta acotada en (a, b).

7.2.10 Asuma que $f : (0, +\infty)$ es diferenciable, $f(x) \to L$ si $x \to +\infty$ y f' es uniformemente continua en $(0, +\infty)$. Demostrar que $f'(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

7.2.11 (Fórmula de Euler) Sea $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Suponga que F es homogénea de grado $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir

$$F(tx_1, \ldots, tx_d) = t^\lambda F(x_1, \ldots, x_d),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Demostrar que

$$\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \lambda F(\boldsymbol{x}).$$

7.3. Comportamiento local de funciones reales a través de sus derivadas

Una consecuencia importante del Teorema del valor medio de Lagrange es que el signo de la derivada determina si la función es monótona. Iniciamos esta discusión con el caso de funciones diferenciables en intervalos abiertos.

Teorema 7.6. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Si $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces f es monótona creciente.*
2. *Si $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces f es monótona decreciente.*
3. *Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante.*

Demostración. Por el Teorema del valor medio, Corolario 7.1, si $a < s < t < b$, existe x_0 tal que

$$f(t) - f(s) = f'(x_0)(t - s).$$

El resultado se sigue de analizar los valores de la derivada en cada caso. □

Veamos algunos ejemplos prácticos de cómo emplear estos criterios.

Ejemplo 7.3.1 (Polinomios y fracciones parciales)**.** Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n ($a_n \neq 0$). Si p se anula en $n + 1$ puntos, es decir, existen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ tales que $p(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, entonces $p(x) \equiv 0$.

Podemos demostrar esto por inducción sobre n. Si $n = 0$, $p(x) = a_0$ y si $p(x_0) = 0$, entonces $a_0 = 0$. Ahora, supongamos que el enunciado es válido para algún n y sea p un polinomio de grado $n+1$ que se anula en los puntos $y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1}$. Por el Teorema de Rolle, existen n puntos x_j con $y_j < x_j < y_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ tales que $p'(x_j) = 0$. Como p' es un polinomio de grado n, se sigue por hipótesis de inducción que $p' \equiv 0$. Por el Teorema 7.6, p es constante y además $p \equiv 0$ porque $p(y_j) = 0$. El principio de inducción matemática implica que la afirmación es válida para todo n.

Considere ahora dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de grados n y m, respectivamente. Si $n < m$ y suponemos que $q(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)$ se factoriza en $\mathbb{R}$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$, entonces es válida la *descomposición en fracciones parciales*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{x - \lambda_j}, \qquad \text{con } a_j = \frac{p(\lambda_j)}{q'(\lambda_j)}.$$

Note que si llamamos $q_j(x) = q(x)/(x - \lambda_j)$, q_j es un polinomio de grado $m - 1$ y al hacer $x \to \lambda_j$ obtenemos $q_j(\lambda_j) = q'(\lambda_j)$. De esta forma, el polinomio $R(x) = p(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j q_j(x)$ tiene grado menor a m. Como $R(\lambda_l) = p(\lambda_l) - a_l q_l(\lambda_l)$, al elegir los a_l como se indica arriba, vemos que R se anula en m puntos distintos, a saber, en $x = \lambda_l$, para $l = 1, \ldots, m$. Por el párrafo anterior, $R(x) \equiv 0$ que equivale a la descomposición deseada.

Ejemplo 7.3.2. Partiendo del hecho de que la función exponencial $f(x) = e^x$ es positiva, $e^0 = 1$, y $f'(x) = e^x$, podemos deducir que

$$1 + x \leq e^x, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Para ello considere la función $g(x) = e^x - x - 1$. Ella es diferenciable en $\mathbb{R}$, $g(0) = 1 - 1 = 0$ y $g'(x) = e^x - 1$. El objetivo es entonces mostrar que $g(x) \geq g(0)$, si $x \in \mathbb{R}$. Para esto veamos que g es creciente en $[0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$. Como $g''(x) = e^x > 0$, entonces $g'(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. Por tanto,

$$\text{si } x > 0, \text{ entonces } 0 = g'(0) < g'(x) = e^x - 1, \qquad \text{y si } x < 0, \text{ entonces } e^x - 1 < 0.$$

Esto implica que g exhibe el comportamiento monótono que habíamos enunciado.

Ejemplo 7.3.3. Suponiendo conocidas las identidades

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x), \tag{7.6}$$

y los valores $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$, podemos deducir la identidad trigonométrica

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1, \qquad \text{válida para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{7.7}$$

Para ello considere la función $h(x) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2$. Ella es diferenciable y $h'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$. Por tanto, debe ser constante. Pero como $h(0) = 0^2 + 1^2 = 1$, se sigue que h es idénticamente 1 como queríamos mostrar.

Ejemplo 7.3.4. El Teorema 7.6(3) también admite un análogo en varias variables: si $U \subseteq \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo y $F : U \to \mathbb{R}$ es una función que posee derivadas parciales tales que $\frac{\partial F}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, para todo $\boldsymbol{x} \in U$ y $l = 1, \dots, d$, entonces F es constante.

En efecto, fije $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Como U es conexo por caminos, ver Ejemplo 6.3.3, dado $\boldsymbol{x} \in U$, podemos elegir una curva continua $\gamma = (f_1, \dots, f_d) : [0,1] \to U$ con $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_0$ y $\gamma(1) = \boldsymbol{x}$. Incluso, podemos suponer que γ está formada por un número finito de segmentos de recta paralelos a los ejes, ver Nota 6.3.2. Escribamos entonces $[0,1] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n]$, con $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ y tales que $\gamma_j = \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} : [t_j, t_{j+1}] \to U$ es un segmento de recta, en particular, diferenciable. Por la regla de la cadena, Teorema 7.5 y el Teorema 7.6(3), cada $F \circ \gamma_j$ es constante porque

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma_j)(t) = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_l}(\gamma(t)) \cdot \frac{df_l}{dt}(t) \equiv 0.$$

De esta manera, $F(\boldsymbol{x}_0) = F(\gamma(0)) = F(\gamma(t_1)) = F(\gamma(t_2)) = \cdots = F(\gamma(t_n)) = F(\gamma(1)) = F(\boldsymbol{x})$. Como $\boldsymbol{x}$ fue arbitrario, se sigue que F es constante en todo U.

Podemos detallar más el análisis del Teorema 7.6 para el caso de derivadas laterales y obtener un recíproco para los dos primeros enunciados del Teorema 7.3, ver Figura 7.5. Para no sobrecargar la escritura solo consideramos el caso de valores positivos de las derivadas involucradas.

Proposición 7.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $f'_+(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$, entonces $f(a) < f(x)$.*

2. *Si $f'_-(b) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $b - \delta < x < b$, entonces $f(x) < f(b)$.*

3. *Si $f'(x_0) > 0$ para un punto $x_0 \in (a,b)$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < t < x_0 < s < x_0 + \delta$, entonces $f(t) < f(x_0) < f(s)$.*

Demostración. Para (1), si $f'_+(a) = \lim_{x \to a+}(f(x) - f(a))/(x - a) > 0$, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $(f(x) - f(a))/(x - a) > 0$, para $a < x < a + \delta$, ver Ejercicio 6.1.1. Por tanto, $f(x) - f(a) > 0$ para estos valores de x. (2) se demuestra de la misma forma y (3) es consecuencia de (1) y (2). □

Ejemplo 7.3.5 (Puntos críticos)**.** Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable, los $x_0 \in (a,b)$ tales que $f'(x_0) = 0$ se conocen como *puntos críticos* de f. El Teorema 7.3 asegura que los máximos y mínimos locales de f son puntos críticos. Sin embargo el recíproco no es cierto porque $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en $x = 0$ que no es ni máximo ni mínimo.

Si $f'(x_0) = 0$ y además $f''(x_0)$ existe y $f''(x_0) \neq 0$, x_0 se llama un *punto crítico no degenerado*. De hecho, si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 será un mínimo local de f. En efecto, por la Proposición 7.3 (3), existe $\delta > 0$ tal que si

$$x_0 - \delta < t < x_0 < s < x_0 + \delta, \qquad \text{entonces } f'(t) < f'(x_0) = 0 < f'(s). \tag{7.8}$$

Así, si $x_0 - \delta < x < x_0$, para algún $x < t < x_0$ tenemos que

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(t) < 0 \quad \text{y así } f(x_0) < f(x).$$

Si $x_0 < x < x_0 + \delta$ el mismo argumento muestra que $f(x_0) < f(x)$, como queríamos concluir. Por el contrario, si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local de f, hecho que se sigue de aplicar el argumento anterior a $-f$. Por otra parte, note que por la Proposición 7.3 (3) vía la condición en (7.8), los puntos críticos no degenerados de f son aislados.

Para el caso en que $f''(x_0) = 0$, es necesario analizar las derivadas de orden superior, ver el Ejercicio 7.6.2.

Corolario 7.3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente (resp. decreciente), entonces si los valores $f'_+(x_0)$ o $f'_-(x_0)$ existen para algún $x_0 \in [a, b]$, deben ser positivos o cero (resp. negativos o cero).*

Demostración. Si, digamos, $f'_+(x_0) < 0$, se verificaría que $f(x) < f(x_0)$ para valores $x > x_0$ cercanos a x_0, contradiciendo que f es monótona creciente. □

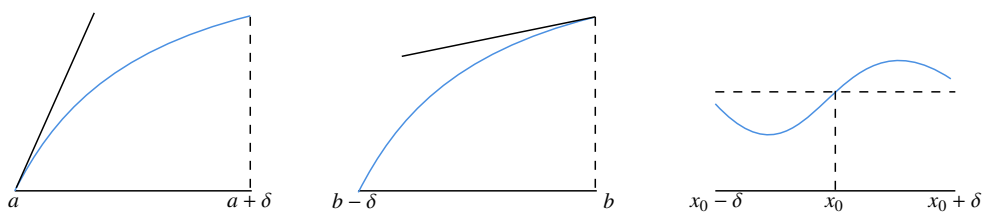

Figura 7.5: El signo de la derivada y el comportamiento local de f.

La diferencia clave entre la Proposición 7.3 y el Teorema 7.6 es que, por ejemplo, si solo asumimos que $f'(x_0) > 0$ para un punto $x_0 \in (a, b)$, no podemos concluir que si $t_0 < t_1 < x_0$, entonces $f(t_0) < f(t_1)$. Ilustramos esto en el siguiente ejemplo. Por supuesto, si f' es continua en x_0, entonces $f'(x) > 0$ para x en una vecindad de x_0 y en este caso sí podemos concluir estas desigualdades cerca de x_0, vía el Teorema 7.6.

Ejemplo 7.3.6. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + \frac{x}{2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es diferenciable en toda la recta, con $f'(0) = 1/2$ y $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) + 1/2$, si $x \neq 0$, aunque f' no es continua en 0. Recordando que $\cos(m\pi) = (-1)^m$, con $m \in \mathbb{Z}$ vemos que si $x_n = (2n+1)\pi$ y $y_n = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces

$$f'(1/x_n) = -\frac{1}{2} < 0, \qquad f'(1/y_n) = \frac{3}{2} > 0.$$

Por tanto, como $1/x_n$ y $1/y_n$ pueden ser tan pequeños como se desee, el Corolario 7.3 implica que f no puede ser monótona en ninguna vecindad de 0, ver Figura 7.6.

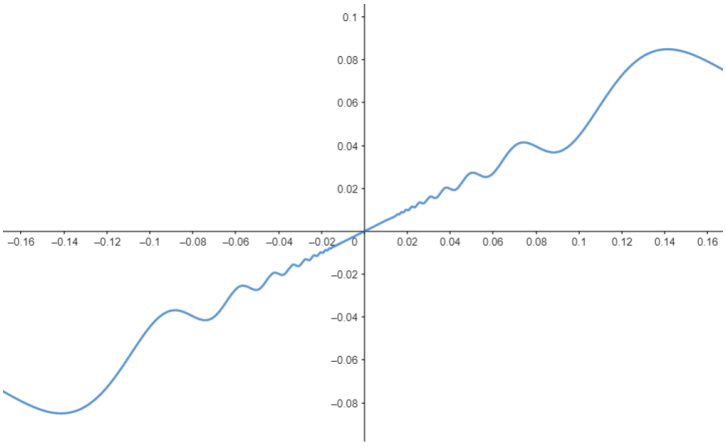

Figura 7.6: La gráfica del Ejemplo 7.3.6 en una vecindad de 0.

Ejercicios

7.3.1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que existen constantes $M, \epsilon > 0$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{1+\epsilon}, \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que f es constante.

7.3.2 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en (a, b), tales que $g'(x) = f'(x)$, para todo $x \in (a, b)$. Mostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

7.3.3 Demostrar que si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sobre este intervalo, entonces f es estrictamente creciente (resp. decreciente) y por tanto invertible. Mostrar que en este caso su inversa f^{-1} también es diferenciable. La derivada de f^{-1} se calculó en el Ejercicio 7.1.9.

7.3.4 Emplear las propiedades de las derivadas para comprobar las siguientes desigualdades, válidas para $x > 0$:

a) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$.

b) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, si $0 < \alpha < 1$.

c) $\sin(x) \le x$.

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \dfrac{x}{2}$.

e) $\dfrac{x}{1+x^2} \le \arctan(x) \le x$.

f) $1 - \frac{1}{x} \le \ln(x) \le x - 1$.

Indicación: en (f) es suficiente comprobarlas para $x > 1$ y luego aplicarlas a $s = 1/x \in (0,1)$.

7.3.5 Sea $p > 0$ y $x \in [0,1]$. Demostrar que

$$1 - px \le (1-x)^p \text{ si } p > 1, \quad \text{y} \quad (1-x)^p \le 1 - px, \text{ si } p < 1.$$

7.3.6 [118] e^π o π^e ,¿quién es mayor? Tome $x = \frac{\pi}{e} - 1 > 0$ en la desigualdad (5.12) para resolver esta pregunta . Más generalmente, emplear derivadas para mostrar que $x^e < e^x$, si $x \ge 0$. Comprobar así que

$$\lim_{n\to+\infty} (n^e + e^n)^{1/n} = e.$$

7.3.7 (Medias aritmética y geométrica)

a) Sean $a_1, \dots, a_n > 0$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Demostrar que

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Indicación: Emplear (7.5) con los valores $r_j = \frac{a_j}{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n} - 1$, eleve a la λ_j y luego multiplique las desigualdades obtenidas.

b) En particular, si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$, entonces

$$\frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} \le (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Estas se conocen como las *desigualdades de la media geométrica y aritmética*. El término de la izquierda se conoce como la *media armónica* de los valores $a_1, \dots, a_n$. Compare estas desigualdades con los resultados del Ejercicio 4.2.9.

7.3.8 (Desigualdad de Young) Comprobar que el caso $n = 2$ en el ejercicio anterior se puede escribir como

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

donde $a, b > 0$, $p > 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Obtenga esta desigualdad de manera alternativa comprobando que

$$\min_{t>0} \left(\frac{t^p \alpha^p}{p} + \frac{t^{-q} \beta^q}{q} \right) = \alpha\beta, \qquad \text{donde } \alpha, \beta > 0.$$

Luego haga $t = 1$. Volveremos sobre esta situación en la Sección 8.6.

7.3.9 Demostrar que si $a, b > 0$ con $a \neq b$ y $0 < x < 1/2$, entonces

$$\sqrt{ab} < \frac{a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x}{2} < \frac{a+b}{2}.$$

El valor $(a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x)/2$ se conoce como la *media de Heinz* entre a y b. ¿Qué se obtiene en $x = 0$ y $x = 1/2$?

7.3.10 Demostrar que $a^\theta + b^\theta \leq 2^{1-\theta}(a+b)^\theta$, para todo $a, b \geq 0$ y $0 < \theta < 1$. Indicación: maximizar $(t^\theta + 1)/(t+1)^\theta$, con $t > 0$.

7.3.11 (Flett) [54] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable con $f'(a) = f'(b)$. Entonces existe $a < \xi < b$ tal que

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\xi).$$

Geométricamente esto significa que si las tangentes a la curva $y = f(x)$ en a y b son paralelas, existe ξ tal que la tangente a f en este punto pasa por $(a, f(a))$, ver Figura 7.7.

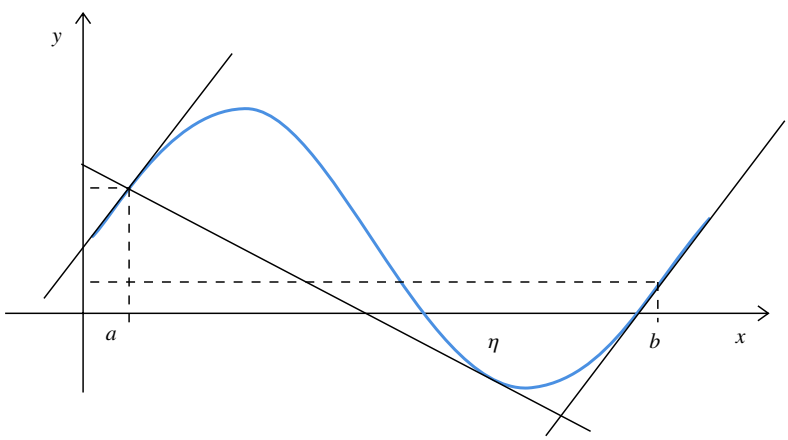

Figura 7.7: Interpretación geométrica del Teorema de Flett.

Indicación: Asuma que $f'(a) = f'(b) = 0$, (cambiando $f(x)$ por $f(x) - f'(a)x$). Si $\psi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, para $x \neq a$ y $\psi(a) = f'(a) = 0$, debemos mostrar que existe $\xi \in (a, b)$ con $\psi'(\xi) = 0$. Si $\psi(b) = 0$, aplique el Teorema de Rolle. Si $\psi(b) > 0$, mostrar que $\psi'(b) < 0$ y por tanto existe $a < x_1 < b$ con $\psi(x_1) > \psi(b) > 0 = \psi(a)$. Por continuidad, existe $a < x_2 < x_1$ con $\psi(x_2) = \psi(b)$ de donde se sigue el resultado. El caso $\psi(b) < 0$ es similar.

Para un recuento reciente de este teorema y algunas extensiones, ver [65].

7.4. El Teorema de Darboux

Esta sección está destinada al Teorema de Darboux. Este enuncia que las derivadas de funciones reales poseen la propiedad del valor intermedio, incluso si estas no son continuas, como en el Ejemplo 7.1.3. Entre sus aplicaciones está el estudio de puntos de inflexión, Ejercicio 7.4.2.

Incluimos la demostración a continuación. Referimos al lector a los Ejercicios 7.4.5 y 7.4.6 para demostraciones alternativas más recientes de este resultado clásico.

Teorema 7.7 (Darboux)**.** *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en todos los puntos de I (con derivadas laterales en los puntos extremos de I, en caso de tenerlos). Entonces cada número entre dos valores de f' es un valor de f'.*

Demostración. Para fijar ideas supongamos que $I = [a, b]$ y $f'_+(a) < \lambda < f'_-(b)$. Si consideramos $g(x) = f(x) - \lambda x$, entonces $g'_+(a) < 0$ y $g'_-(b) > 0$. Por tanto, la Proposición 7.3 implica que

$$g(t_1) < g(a), \quad g(t_2) < g(b), \qquad \text{para ciertos } t_1, t_2 \in (a, b).$$

Como g es continua, por el Teorema del valor extremo esta alcanza un mínimo en algún punto x_0 de $[a, b]$. Por las desigualdades anteriores, x_0 debe estar en (a, b). Así $g'(x_0) = 0$ y $f'(x_0) = \lambda$ como se requería. □

Corolario 7.4. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable, f' no tiene discontinuidades simples.*

Nota 7.4.1. El Teorema de Darboux permite dar un argumento directo para comprobar que el Teorema del valor medio de Lagrange implica la versión de este teorema debida a Cauchy, bajo la hipótesis adicional que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). En efecto, el Teorema 7.7 muestra que

$$\text{o bien } g'(x) > 0 \text{ para todo } x \in (a, b), \qquad \text{o } g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Por tanto, g es invertible y g^{-1} es diferenciable, ver Ejercicio 7.3.3. Aplicando el Teorema del valor medio, Corolario 7.1 a la función $u = f \circ g^{-1}$ en $x_1 = g(a)$ y $x_2 = g(b)$ obtenemos

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(\xi) = f'(g^{-1}(\xi))[g^{-1}]'(\xi) = \frac{f'(g^{-1}(\xi))}{g'(g^{-1}(\xi))} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

donde $c = g^{-1}(\xi)$. Esta demostración fue tomada de [41].

Ejercicios

7.4.1 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Demostrar que si $x_0 \in (a, b)$ y $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$, entonces $f'(x_0)$ no puede existir. Formular y demostrar el mismo enunciado en el caso $x_0 = a$ o $x_0 = b$. Ejemplifique estos hechos con las funciones $f(x) = x^{1/n}$, $x \geq 0$ y $n \geq 2$ entero.

7.4.2 [100] Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que f'' existe en $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Se dice que f tiene un *punto de inflexión* en x_0 si f'' cambia de signo en x_0, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$ si $x_0 < x < x_0 + \delta$ y $f''(x) < 0$ si $x_0 - \delta < x < x_0$ (o viceversa). Suponga que f tiene un punto de inflexión en x_0. Demostrar que:

a) Si $f''(x_0)$ existe, entonces $f''(x_0) = 0$.

b) Si $f'(x_0)$ existe, entonces f' es continua en x_0.

Note que ni $f'(x_0)$ ni $f''(x_0)$ tienen por qué existir. Este es el caso de $f(x) = -x^2 - 2x$, si $x > 0$ y $f(x) = x^2$, si $x \leq 0$.

7.4.3 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable y $t_1, \ldots, t_n \in (a, b)$. Mostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ satisfacen $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\lambda_1 f'(t_1) + \cdots + \lambda_n f'(t_n) = f'(\xi).$$

7.4.4 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable, incluyendo los puntos extremos de I, en caso de haberlos. Sea D el conjunto de valores de f' y $C = \left\{\frac{f(s)-f(t)}{s-t} \in \mathbb{R} : s, t \in I, s \neq t\right\}$. Justificar por qué $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$. Concluir que $\overline{D} = \overline{C}$.

7.4.5 [95] Completar los siguientes pasos para obtener una demostración alternativa del Teorema de Darboux:

a) Sean D y C como en el ejercicio anterior. Para demostrar el teorema se mostrará que D es un intervalo. Comprobar que basta entonces demostrar que C es un intervalo.

b) Si $p = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, q = \frac{f(c)-f(d)}{c-d} \in C$, con $a < c$ y $b < d$, considere la función

$$g(t) = \frac{f((1-t)a + tc) - f((1-t)b + td)}{(1-t)a + tc) - ((1-t)b + td)}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Interprete geométricamente. Comprobar que g está bien definida, es continua, su imagen está contenida en C, $g(0) = p$ y $g(1) = q$. Así, gracias al Teorema del valor medio, $g([0, 1]) \subseteq C$ es un intervalo. Concluir que C es un intervalo.

7.4.6 [101] Sean I y f como en el Teorema de Darboux y asuma que λ es un número ubicado estrictamente entre $f'(a)$ y $f'(b)$, donde $a < b$, $a, b \in \mathrm{Int}(I)$.

a) Considere las funciones $f_a, f_b : I \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_a(t) = \begin{cases} f'(a), & \text{si } t = a, \\ \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, & \text{si } t \neq a, \end{cases} \qquad f_b(t) = \begin{cases} f'(b), & \text{si } t = b, \\ \frac{f(t)-f(b)}{t-b}, & \text{si } t \neq b. \end{cases}$$

Comprobar que ambas son continuas en I y que $f_a(b) = f_b(a)$.

b) Si λ está entre $f_a(a) = f'(a)$ y $f_a(b)$, aplique el Teorema del valor intermedio para funciones continuas para mostrar que existe $s \in (a, b]$ tal que $\lambda = f_a(s)$. Luego aplique el Teorema del valor medio para concluir que $\lambda = f'(x)$, para cierto $x \in (a, s)$.

c) Si λ está entre $f_b(a)$ y $f_b(b) = f'(b)$, aplique el mismo razonamiento para concluir que $\lambda = f'(x)$, para cierto $x \in I$. Esto demuestra de nuevo el Teorema de Darboux.

7.5. La regla de L'Hôpital

En esta sección desarrollamos la regla quizás más famosa para calcular límites a través de derivadas, a saber, la regla de L'Hôpital. Ella es válida para límites usuales, límites laterales o límites al infinito. El siguiente enunciado se plantea para límites a izquierda. Las consideraciones para límites a derecha o límites usuales son similares.

Teorema 7.8. *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, donde $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$ y asuma que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \tag{7.9}$$

Si $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, o si $g(x) \to +\infty$, cuando $x \to a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha. \tag{7.10}$$

La regla también es válida si $a = -\infty$.

Demostración. Trataremos solo el caso en que $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Las demás posibilidades siguen la misma idea de demostración o se pueden obtener a partir de este caso, ver Ejercicio 7.5.1. Por ejemplo, el caso $a = -\infty$ se obtiene empleando el cambio de variable $t = -1/x$.

Si $a, \alpha \in \mathbb{R}$, por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < t - a < \delta, \qquad \text{entonces } \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - \alpha \right| < \epsilon/2.$$

Dados $a < x < y < a + \delta$, por el Teorema del valor medio de Cauchy,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \alpha \right| < \epsilon/2. \tag{7.11}$$

Al suponer que $f(u), g(u) \to 0$ si $u \to a$, podemos tomar $x \to a$ para obtener que

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - \alpha \right| \leq \epsilon/2 < \epsilon,$$

demostrando este primer caso.

Si ahora suponemos que $g(u) \to +\infty$ cuando $u \to a$, escojamos $\delta > 0$ como antes pero además tal que $g(x) > g(y) > 0$, si $a < x < y < a + \delta$ y con y un valor fijo. En este caso, multiplicando a (7.11) por $(g(x) - g(y))/g(x) = 1 - g(y)/g(x)$ obtenemos que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} - \alpha\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) < \frac{\epsilon}{2},$$

y por tanto

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| \leq \frac{g(y)}{g(x)}\alpha + \frac{|f(y)|}{g(x)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

tomando x suficientemente cerca a a. Esto concluye la prueba del segundo caso. □

Ejemplo 7.5.1. La función exponencial $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} x^m/m!$ por definición satisface

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x > 0$. Por tanto $x^n/e^x < (n+1)!/x$ y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Este resultado también se puede obtener del uso repetido de la regla de L'Hôpital porque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

Ejemplo 7.5.2. Podemos calcular

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} -x = 0,$$

aplicando la regla de L'Hôpital porque el denominador $1/x \to +\infty$ si $x \to 0^+$. Un límite similar es

$$\lim_{x\to1^-} (x^\alpha - 1)\ln(1-x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-1/(1-x)}{-\alpha x^{\alpha-1}/(x^\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to1^-} \frac{(x^\alpha-1)^2}{1-x} = \frac{1}{\alpha}\cdot0\cdot(-\alpha) = 0,$$

válido para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nota 7.5.1. Es natural preguntarse si existen relaciones entre las reglas de Stolz-Cesàro y de L'Hôpital. De hecho, la regla de Stolz implica la regla de L'Hôpital en el caso en que $g : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisface que $g'(x) \neq 0$ si $x > r$ y $g(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$. En efecto, por el Teorema de Darboux 7.7, $g'(x) > 0$ si $x > r$ ó $g'(x) < 0$ si $x > r$. Pero el comportamiento de g en infinito implica que g' es positiva y por tanto, g es estrictamente creciente en su dominio. Veamos ahora que el límite (7.9) implica el límite (7.10), para $a = +\infty$. Para comprobarlo basta hacerlo por sucesiones crecientes

$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(r, +\infty)$ tales que $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. En este caso $\{g(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de nuevo una sucesión creciente tal que $g(t_n) \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Por el Teorema del valor medio 7.4, existe $t_n < s_n < t_{n+1}$ tal que

$$\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{g(t_{n+1}) - g(t_n)} = \frac{f'(s_n)}{g'(s_n)}.$$

Como $s_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, la regla de Stolz-Cesàro 4.4 y el límite (7.9) implican que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n)}{g(t_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{g(t_{n+1}) - g(t_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(s_n)}{g'(s_n)} = \alpha,$$

como era requerido.

Ejercicios

7.5.1 Demostrar la regla de L'Hôpital, Teorema 7.8, para los casos $\alpha = \pm\infty$, $a = \pm\infty$.

7.5.2 Aplicar la regla de L'Hôpital para justificar los siguientes límites. Puede asumir las propiedades básicas de las funciones elementales necesarias. Recuerde que $x^a := e^{a\ln(x)}$, $x > 0$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln(b)$, $b > 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1 + x)^{1/x} = e$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1 + x)\ln(1 + x) - x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e - (1 + x)^{1/x}}{x} = \frac{e}{2}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan(x) - x}{x(1 - \cos(x))} = \frac{2}{3}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x - \sin(x)}{\tan(x) - x} = \frac{1}{2}$.

7.5.3 Justificar los siguientes límites, donde $\alpha, x \in \mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right) = \alpha$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + 2}\right)^n = e$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^2$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

7.5.4 Si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

7.5.5 Considere las funciones

$$f(x) = x + \cos(x)\sin(x), \quad g(x) = e^{\sin(x)}(x + \cos(x)\sin(x)), \quad x > 0.$$

Compruebe que $f'(x)/g'(x) \to 0$ si $x \to +\infty$ pero que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ no existe. ¿Por qué no se contradice la regla de L'Hôpital? Este contraejemplo se debe al matemático austriaco Otto Stolz (1842-1905). Para otros ejemplos de esta naturaleza ver [20].

7.5.6 Sea $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que:

a) Si f es diferenciable y $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) + f(x) = \alpha$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$.

b) Si f es dos veces diferenciable y $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+2f'(x)+f(x) = \alpha$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$.

Generalice estos resultados. Indicación: $f(x) = f(x)e^x e^{-x}$.

7.5.7 *a*) Suponga que f está definida en una vecindad de x_0 y que $f''(x_0)$ existe. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

b) Demostrar que si f alcanza un máximo en x_0, entonces $f''(x_0) \le 0$. De la misma forma, si f alcanza un mínimo allí, entonces $f''(x_0) \ge 0$.

7.5.8 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en x_0. Mostrar que

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2}.$$

Más generalmente, si f es diferenciable n veces en x_0, entonces se verifica la fórmula de *Grünwald-Letnikov*

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x_0 - jh).$$

Indicación: recuerde el Ejercicio 7.1.10.

7.5.9 *a*) [4] (Criterio de diferenciación para convergencia de series) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real tal que $f''(0)$ existe. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ converge absolutamente si y solo si $f(0) = f'(0) = 0$.

Indicación: calcular el límite $\lim_{x\to 0} f(x)/x^{1+u}$, con $0 \le u < 1$ y usarlo para comparar la serie dada con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+u}$.

b) Emplear este criterio para discutir la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(\frac{1}{n}) - 1\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $0 < a < 1$.

7.6. El Teorema de Taylor

Esta sección está dedicada a estudiar una versión más general del Teorema del valor medio, que incluye derivadas de orden superior. Este constituye el Teorema de Taylor que permite aproximar una función con n derivadas por un polinomio de grado n que recupera los valores $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ en un punto dado x_0.

Comenzamos la discusión considerando un polinomio $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ de grado n con coeficientes reales, centrado en un punto x_0. Entonces los coeficientes a_j se puede expresar en términos de las derivadas de p en x_0. En efecto, evaluando en $x = x_0$ obtenemos que $a_0 = p(x_0)$. Derivando p y evaluando de nuevo en x_0 resulta que $a_1 = p'(x_0)$. En general, derivando j veces p y evaluando en x_0 (Ejercicio 7.1.1), resultará que

$$j!a_j = p^{(j)}(x_0), \qquad j = 0, 1, , \ldots, n. \tag{7.12}$$

Por tanto, para polinomios de grado n se verifica la *fórmula de Taylor*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j. \tag{7.13}$$

La idea del Teorema de Taylor es aproximar a una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, que sea n veces diferenciable en (a, b), por su *polinomio de Taylor de grado n en el punto* $x_0 \in (a, b)$, definido por

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

El primer resultado que estudiamos es el orden de aproximación de este polinomio. El resultado se basa en el siguiente lema fundamental.

Lema 7.2. *Sea $r : (a, b) \to \mathbb{R}$, n veces diferenciable en el punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces*

$$r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0 \qquad \textit{si y solo si} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Demostración. Primero note que como r es n veces diferenciable en x_0, esto indica que cada $r^{(j)}(x)$ existe en una vecindad de x_0, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y además es continua en x_0, es decir, $r^{(j)}(x) \to r^{(j)}(x_0)$ si $x \to x_0$.

La demostración se basa en la regla de L'Hôpital. Si suponemos que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$, entonces $r^{(j)}(x) \to 0$ si $x \to x_0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Por tanto, podemos aplicar repetidamente el Teorema 7.8 para concluir que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

donde en el último paso empleamos la definición de $r^{(n)}(x_0)$. Recíprocamente, si suponemos que $r(x)/(x-x_0)^n \to 0$ cuando $x \to x_0$, se deduce también que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^j} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} \cdot (x-x_0)^{n-j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Para $j = 0$ esto indica, por la continuidad de r en x_0, que $r(x_0) = 0$. Luego para $j = 1$ obtenemos que $r'(x_0) = \lim_{x\to x_0}(r(x) - r(x_0))/(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} r(x)/(x - x_0) = 0$. Inductivamente, si asumimos que $r^{(j-1)}(x_0) = 0$, para $j - 1 < n$, de nuevo por la regla de L'Hôpital vemos que

$$\frac{r^{(j)}(x_0)}{j!} = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(j-1)}(x)}{j!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^j} = 0.$$

De esta manera concluimos que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$, como era requerido. □

Con esta herramienta podemos establecer fácilmente el siguiente resultado. Note que el caso $n = 1$ fue discutido al comienzo de este capítulo.

Teorema 7.9 (Taylor)**.** *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es n veces diferenciable en x_0, la función R_n definida por*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n(x), \qquad \textit{satisface} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Recíprocamente, si $p(x)$ es un polinomio de grado n tal que $\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces $p(x)$ es el polinomio de Taylor de f de grado n en x_0.

Demostración. Por su definición, R_n es n veces diferenciable en x_0 porque f lo es. Recordando (7.12) se sigue que $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$. Por tanto, el lema anterior establece el límite requerido. Recíprocamente, si $r(x) = p(x) - f(x)$ satisface $\lim_{x\to x_0} r(x)/(x - x_0)^n$, el mismo lema implica que

$$p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

y el resultado se sigue recordando la fórmula (7.13). □

El resto $R_n(x)$ obtenido en el teorema anterior se puede rescribir de diferentes formas. La siguiente versión permite expresar este valor en términos de $f^{(n)}$.

Teorema 7.10 (Fórmula de Taylor con resto diferencial - Lagrange)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $f^{(n-1)}$ es continua en $[a, b]$ y $f^{(n)}$ existe en (a, b). Dados $x_0, x \in (a, b)$, existe $\xi = \xi_{x_0,x}$ entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demostración. Sea $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$. La discusión previa muestra que

$$p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Si M es el valor definido por la igualdad

$$f(x) = p(x) + M(x - x_0)^n,$$

el teorema requiere demostrar que $M = f^{(n)}(\xi)/n!$ para algún ξ entre x_0 y x. Para ello aplicaremos el Teorema de Rolle a la función

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - M(t - x_0)^n,$$

y a sus derivadas. Primero, note que $\phi^{(j)}(x_0) = 0$ si $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Ahora, como $\phi(x_0) = 0 = \phi(x)$, existe x_1 entre x_0 y x tal que $\phi'(x_1) = 0$. Luego, como $\phi'(x_0) = 0 = \phi'(x_1)$, existe x_2 entre x_0 y x_1 tal que $\phi''(x_2) = 0$. Continuando de esta forma, tras n pasos encontraremos un punto x_n entre x_0 y x_{n-1} tal que $\phi^{(n)}(x_n) = 0$. Como $\phi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M$ para $t \in (a, b)$, vemos que $\xi = x_n$ es el punto requerido. □

Note que el teorema anterior en el caso $n = 1$ se reduce a la expresión $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ que es precisamente el Teorema 7.1 del valor medio de Lagrange.

Otra forma de expresar el resultado del Teorema 7.10 es poniendo $x = x_0 + h$. Como ξ estará entre x_0 y $x_0 + h$, podemos escribir $\xi = x_0 + \theta h$ con $|\theta| < 1$. De esta forma, la fórmula de Taylor se escribe como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^n.$$

Al comparar las expresiones obtenidas en los Teoremas 7.9 y 7.10, vemos que si f es n veces diferenciable en (a, b) y $f^{(n-1)}$ es continua en $[a, b]$, entonces podemos escribir

$$R_n(x) = \left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)\right)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

para cierto $\xi = \xi_{x_0,x}$ entre x_0 y x. El Teorema 7.10 demuestra que para esta elección de ξ se verifica que $f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \to 0$ si $x \to x_0$. Sin embargo, este límite solo es válido para dicho $\xi_{x_0,x}$ que depende de x_0 y x, afirmación que no es suficiente para concluir que $f^{(n)}$ sea continua en x_0.

Terminamos esta sección con una breve discusión sobre clases de funciones diferenciables.

Definición 7.3 (Clases C^n)**.** Decimos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de *clase* C^n *en* (a, b) si su n-ésima derivada existe y es continua en dicho intervalo. El conjunto de funciones n veces diferenciables en (a, b) será denotado por $C^n(a, b)$.

Gracias a las reglas de cálculo de derivadas vemos que $C^n(a,b)$ es un espacio vectorial real. En general, estos espacios son distintos para diferentes valores de n (Ejercicio 7.1.2) y tenemos las contenencias estrictas

$$\cdots \subsetneq C^{n+1}(a,b) \subsetneq C^n(a,b) \subsetneq \cdots C^2(a,b) \subsetneq C^1(a,b) \subsetneq C^0(a,b).$$

La intersección de estos espacios produce el espacio de funciones infinitas veces diferenciables sobre (a,b), denotado por

$$C^\infty(a,b) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(a,b).$$

Es común referirse a las funciones $f \in C^\infty(a,b)$ como *funciones suaves*.

Ejemplo 7.6.1. Ejemplos de funciones en $C^\infty(\mathbb{R})$ son los polinomios, funciones racionales $p(x)/q(x)$ tal que q no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$, e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\arctan(x)$ y compuestas de estas funciones.

Al disponer de todas las derivadas de una función suave, podemos no solo asociarle su polinomio de Taylor en un punto sino también su serie de Taylor.

Definición 7.4. Dada una función f suave en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$, la *serie de Taylor de f en $x_0 \in (a,b)$* se define por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Si $x_0 = 0$ esta serie también se conoce con el nombre de *serie de Maclaurin de f*.

Sin embargo, no hay razón para concluir ni que esta serie es convergente en algún punto $x \neq x_0$ del dominio de f, ni que si converge, lo haga a $f(x)$. El primer ejemplo de una función f cuya serie de Taylor converge a un valor distinto de $f(x)$ se debe a Cauchy quien en 1823 propuso la función

$$F(x) = e^{-1/x^2}, \text{ si } x \neq 0, \qquad F(0) = 0.$$

Ella resulta satisfacer $F^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, ver Ejercicio 7.6.3. Por tanto, su serie de Taylor en 0 se reduce a la serie 0, pero $F(x_0) \neq 0$ si $x_0 \neq 0$. Otra función con esta misma naturaleza se detalla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.6.2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Note que $0 \leq f(x) < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es inmediato verificar que $f^{(n)}(x) = 0$, si $x < 0$ y también $f_-^{(n)}(0) = 0$. Para $x > 0$, aplicando inducción sobre n, concluimos que

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}, \qquad x > 0,$$

donde p_n es un polinomio de grado $n-1$, definido por la recurrencia

$$p_1(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - (2nx - 1)p_n(x),$$

compare con el Ejercicio 12.2.1. Por tanto, como $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}/x^{2n} = 0$, se sigue que $f_+^{(n)}(0) = 0$. En conclusión, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(0) = 0$, para todo n. Claramente, la serie de Taylor $\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ no converge a $f(x)$, para ningún $x > 0$.

Definición 7.5. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Decimos que f es *analítica* en x_0 si existe $r > 0$ de manera que f se puede representar como

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n (x - x_0)^n,$$

para $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$. Decimos que f es analítica en (a, b) si lo es en cada punto de su dominio. El espacio de dichas funciones será denotado por $C^\omega(a, b)$.

Como veremos más adelante en el Capítulo 9, una función analítica es infinitas veces diferenciable en el intervalo de convergencia $(x_0 - r, x_0 + r)$ y su derivada se calcula por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

ver Ejemplo 9.3.3. Esta seguirá convergiendo en el mismo intervalo. Como ella es de nuevo una serie de la misma naturaleza, concluimos por inducción que f es infinitas veces diferenciable en $(x_0 - r, x_0 + r)$ y que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

En particular, evaluando en $x = x_0$ recuperamos la identidad

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

que habíamos comprobado para polinomios al inicio de la sección. En conclusión, una función f es analítica en x_0 si y solo si ella está dada por la suma de su serie de Taylor en x_0, en un intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$. También vemos que es válida la contenencia estricta

$$C^\omega(a, b) \subsetneq C^\infty(a, b),$$

como lo ilustra el Ejemplo 7.6.2.

Nota 7.6.1. Existen muchos más resultados en esta dirección, por ejemplo, el Teorema de Borel-Peano que será tratado en el Proyecto 12.3 que ilustra que la serie de Taylor de una función suave puede ser arbitraria. Por otra parte, existen funciones suaves que no son analíticas en ningún punto, ver Ejemplo 9.6.4.

Ejercicios

7.6.1 ¿A qué se corresponde la fórmula (7.12) para el caso $p(x) = x^n$?

7.6.2 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, n veces diferenciable, $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si n es par, entonces f alcanza un máximo local en x_0 si $f^{(n)}(x_0) < 0$ y f alcanza un mínimo local en x_0 si $f^{(n)}(x_0) > 0$.

b) Si n es impar, f no tiene ni un máximo ni un mínimo local en x_0.

c) Ejemplificar estos hechos con $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}^+$.

7.6.3 Para $k \in \mathbb{N}^+$ considere las funciones

$$F_{2k+1}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^{2k+1}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \qquad F_{2k}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^{2k}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que $F_m^{(n)}(0) = 0$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ y que cada F_m es suave en $\mathbb{R}$. Ninguna de ellas es analítica en $x = 0$.

7.6.4 Sea $f \in C^\infty(a, b)$ y asuma que existen constantes $C, \rho > 0$ tales que

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C\rho^n n!, \qquad \text{para todo } x \in (a, b), n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $f \in C^\omega(a, b)$. El resultado completo se presentará en el Teorema 12.4 del Proyecto 12.2.

7.6.5 (Teorema de Taylor generalizado) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones con n-ésima derivada en (a, b) y derivada $(n-1)$-ésima en $[a, b]$. Fije $x_0 \in [a, b]$. Entonces, dado $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, existe ξ entre x y x_0 tal que

$$\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \right) g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) \left(g(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \right). \tag{7.14}$$

a) Para fijar ideas, tome x con $x_0 < x$. Considere las funciones

$$F(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j, \quad G(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j, \quad t \in [x_0, x].$$

Comprobar que $F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$ y $G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)$.

b) Muestre que $F'(\xi)(G(x) - G(x_0)) = G'(\xi)(F(x) - F(x_0))$ para algún $\xi \in (x_0, x)$ y que esta ecuación implica (7.14).

c) Si $g(x) = (x - x_0)^n$, (7.14) demuestra el Teorema de Taylor 7.10.

d) ¿Qué se obtiene si en vez de usar $G(t)$ en el razonamiento se hubiera empleado $G(t) = g(t) - g(x)$ donde g' no se anula?

7.6.6 Sean f, g funciones con N-ésima derivada en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0) = 0$, para todo $j = 0, 1, \ldots, N - 1$. Suponga también que $g^{(N)}(x) \neq 0$ en (a, b). Demostrar que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(N)}(x_0)}{g^{(N)}(x_0)}.$$

Indicación: bien puede intentar aplicar el Ejercicio 7.6.5 o la regla de L'Hôpital.

7.6.7 (Desigualdades de Hadamard-Landau [138]) Fije $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $I_a = (a, +\infty)$. Sea $f \in C^2(I_a)$ tal que

$$M_0 = \sup_{x \in I_a} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in I_a} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in I_a} |f''(x)|$$

son finitos. Entonces

$$M_1^2 \leq c M_0 M_2,$$

donde $c = 4$ si a es finito y $c = 2$ si $I_a = \mathbb{R}$.

Indicación: Tome $h > 0$. Para a finito aplique el Teorema de Taylor para encontrar $\xi \in (x, x + 2h)$ con $f'(x) = \frac{1}{2h}\left(f(x + 2h) - f(x)\right) - hf''(\xi)$. Mostrar que $|f'(x)| \leq hM_2 + h^{-1}M_0$ y encontrar h que minimice esta expresión. Si $I_a = \mathbb{R}$, existe $x < \xi_h < x + h$ tal que $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi_h)h^2/2$. Por tanto, $2h|f'(x)| = |f(x + h) - f(x - h) + (f''(\xi_h) - f''(\xi_{-h}))h^2/2| \leq 2M_0 + M_2h^2$ y proceder como en el primer caso.

Considere $a = -1$ y la función $f(x) = 2x^2 - 1$, si $-1 < x < 0$ y $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, si $x \geq 0$. Muestre que $f \in C^2(-1, +\infty)$ y $M_0 = 1$, $M_1 = M_2 = 4$. Por tanto, la constante 4 en la desigualdad anterior es óptima.

Nota 7.6.2. El caso $a = -\infty$ fue demostrado por Hadamard en 1914 mientras que el caso a finito fue dado por Landau en 1913. Estas desigualdades fueron generalizadas por Kolmogorov (1939) quien demostró en [78] que

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|\right)^n \leq C_{k,n} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|\right)^{n-k} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|\right)^k,$$

para $f \in C^n(\mathbb{R})$ y $0 < k < n$. Las constantes $C_{n,k}$ son óptimas y son números racionales que se pueden calcular explícitamente. Más información se puede consultar en el artículo de Schoenberg [121].

Capítulo 8

La integral de Riemann

El origen del Cálculo integral se remonta al cómputo de Arquímedes del área bajo una parábola. Sin embargo, la primera definición se da en los trabajos de I. Newton y G. W. Leibniz en los siglos XVII y XVIII empleando antiderivadas, esto es

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \qquad F'(t) = f(t),$$

resultado que hoy conocemos como uno de los Teoremas Fundamentales del Cálculo. Cabe destacar que en esta época las funciones que se consideraban eran en su mayoría definidas por series de potencias.

Posteriormente, fue A. L. Cauchy (1789-1857) quien propone la definición constructiva de la integral de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ como el límite de sumas de la forma

$$f(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_1)(t_2 - t_1) + \cdots + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}),$$

donde $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ es una partición del intervalo dado. Cauchy demostró que el límite de estas sumas cuando $\|P\| = \text{máx}_{1\leq j\leq n}(t_j - t_{j-1}) \to 0$ existe suponiendo que f es continua. Por otra parte, B. Riemann (1826-1866) motivado por sus estudios sobre convergencia de series de Fourier y en aras de extender la validez del Teorema Fundamental del Cálculo a funciones menos regulares, propuso una definición análoga para funciones acotadas, pero en vez de emplear los extremos de los intervalos $[t_{j-1}, t_j]$, empleó el valor de f en un punto arbitrario $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Dichas sumas se conocen actualmente como sumas de Riemann y su límite da lugar a la noción más famosa de integral. También, una aproximación equivalente fue desarrollada por J. G. Darboux (1842-1917) a través de sumas superiores e inferiores, esto es, en vez de emplear $f(\xi_j)$ se calculan las sumas con los valores $M_j = \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t)$ y $m_j = \text{ínf}_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t)$, respectivamente.

Existe una generalización de esta teoría de integración, donde en vez de emplear las cantidades $t_j - t_{j-1}$ se utilizan los valores $\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})$, donde $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente. La integral resultante se conoce como la integral de Riemann-Stieltjes y surgió con los trabajos de T. Stieltjes (1865-1894) sobre modelos

de distribución de masa en la recta real. Esta integral posee propiedades análogas a la de Riemann (caso $\alpha(t) \equiv t$) y permite estudiar sumas finitas, series e integrales de Riemann de manera unificada.

El siguiente paso en el desarrollo de la teoría moderna de integración fue dado por H. Lebesgue (1875-1941). Su construcción es conceptualmente distinta y requiere del desarrollo de la noción de medida (longitud en dimensión uno, área en dimensión dos). Las dificultades de este concepto se compensan con su utilidad al proveer resultados satisfactorios sobre el límite de integrales de sucesiones de funciones y sobre la completitud de espacios de funciones cuya norma se define a través de dicha integral.

Otra teoría de integración moderna es la desarrollada de manera independiente por R. Henstock (1937-2007) y J. Kurzweil (1926-2022). Esta integral generaliza la integral de Riemann y a su vez extiende la clase de funciones integrables en el sentido de Lebesgue. Su construcción no requiere el concepto de medida. En vez, se basa en la integral de Riemann que requiere que para todo $\epsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$, entonces $|f(\xi_1)(t_1-t_0)+f(\xi_2)(t_2-t_1)+\cdots+f(\xi_n)(t_n-t_{n-1})-\int_a^b f(t)dt| < \epsilon$. La diferencia fundamental yace en reemplazar la constante δ por una función $\delta : [a.b] \to (0, +\infty)$ que regule las longitudes de los intervalos involucrados.

En este libro nos restringiremos a la integral clásica de Riemann. Aunque partiremos de la definición de Darboux, demostraremos la equivalencia con la aproximación de Riemann. Desarrollaremos las principales propiedades como estabilidad por operaciones básicas, reglas de cálculo, desigualdades fundamentales y Teoremas del valor medio. Por supuesto, se desarrollarán los Teoremas Fundamentales del Cálculo y el Teorema de Taylor con resto integral. Incluimos también una sección sobre la derivación bajo el signo de integración y algunas aplicaciones como la construcción del logaritmo, la constante de Euler-Mascheroni, sumas de series y la demostración de la fórmula de Stirling. Aunque no trataremos la integral de Lebesgue, que corresponde a un curso más avanzado, demostramos la caracterización de integrabilidad en el sentido de Riemann en términos de conjuntos de medida cero. Finalmente, estudiaremos el caso de integrales impropias definidas como límites de integrales de Riemann. El lector interesado puede consultar [113, Capítulo 6] para el desarrollo de la integral de Riemann-Stieltjes, [129] para la integral de Lebesgue y [25] para información histórica sobre las teorías de integración mencionadas anteriormente.

8.1. La definición de integral (Riemann y Darboux)

Definición 8.1. Un conjunto finito de la forma $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ se llama una *partición de* $[a, b]$. El valor

$$\|P\| := \operatorname*{máx}_{1\le j\le n} \Delta t_j, \qquad \text{donde} \qquad \Delta t_j := t_j - t_{j-1} > 0,$$

se conoce la *norma de* P. Además, si P y P^* son dos particiones de $[a, b]$ tales que $P \subseteq P^*$ decimos que P^* es *más fina* que P.

La idea geométrica que se emplea para introducir la integral de una función acotada f, es la de aproximar el área bajo la gráfica de f. Esta aproximación se puede realizar por rectángulos sobre o debajo de esta curva. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 8.2 (Sumas de Darboux)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real acotada. Dada una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, consideramos los valores

$$M_j := \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t), \qquad m_j := \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Las *sumas de Darboux inferior y superior de f asociadas a P* se definen como

$$s(P, f) := \sum_{j=1}^{n} m_j \, \Delta t_j, \qquad S(P, f) := \sum_{j=1}^{n} M_j \, \Delta t_j,$$

respectivamente.

Note que si $m = \inf_{t\in[a,b]} f(t)$ y $M = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$, entonces $m \le m_j \le M_j \le M$, para cada j. Como

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta t_j = b - a,$$

obtenemos las desigualdades

$$m(b - a) \le s(P, f) \le S(P, f) \le M(b - a). \tag{8.1}$$

Note además que si $s_j, s'_j \in [t_{j-1}, t_j]$, entonces $f(s_j), f(s'_j) \in [m_j, M_j]$ y por tanto

$$|f(s_j) - f(s'_j)| \le M_j - m_j. \tag{8.2}$$

De aquí deducimos que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(s_j) - f(s'_j)|\Delta t_j \le S(P, f) - s(P, f).$$

Una pregunta natural es cómo se comportan estos valores cuando refinamos la partición dada. Supongamos que $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subseteq [a, b]$ y sea $P^* = P \cup \{t^*\}$ otra partición que es obtiene al agregar un punto $t^* \in (t_{l-1}, t_l)$, para algún l. Si escribimos

$$m'_l = \inf_{t\in[t_{l-1},t^*]} f(t), \quad m''_l = \inf_{t\in[t^*,t_l]} f(t).$$

Como $m'_l, m''_l \ge m_l$, vemos que

$$s(P^*, f) = m'_l(t^* - t_{l-1}) + m''_l(t_l - t^*) + \sum_{j\neq l, 1\le j\le n} m_j \Delta t_j \ge m_l \Delta t_l + \sum_{j\neq l, 1\le j\le n} m_j \Delta t_j = s(P, f).$$

De la misma forma, para las sumas superiores tenemos que $S(P^*, f) \leq S(P, f)$. Aplicando estas desigualdades repetidamente, se deduce que

$$\text{si } P \subseteq P^*, \qquad \text{entonces} \qquad s(P, f) \leq s(P^*, f), \quad S(P^*, f) \leq S(P, f), \tag{8.3}$$

para particiones de $[a, b]$. En particular, si P_1 y P_2 son particiones de $[a, b]$, entonces

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f). \tag{8.4}$$

En efecto, como $P_1 \cup P_2$ es más fina que P_1 y P_2, entonces $s(P_1, f) \leq s(P_1 \cup P_2, f) \leq S(P_1 \cup P_2, f) \leq S(P_2, f)$, como se requería.

Finalmente, las desigualdades en (8.1) indican que los conjuntos de números reales $\{s(P, f)\}_P$ y $\{S(P, f)\}_P$ son acotados superior e inferiormente, respectivamente. Por tanto, la siguiente definición cobra sentido.

Definición 8.3 (Las integrales inferior y superior de Darboux)**.** Dada una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, los valores

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt := \sup_P s(P, f), \qquad \overline{\int_a^b} f(t)dt := \inf_P S(P, f),$$

donde P varía sobre todas las particiones del intervalo $[a, b]$, se conocen como la *integral inferior* y la *integral superior de f sobre* $[a, b]$, respectivamente. Diremos que f es *integrable en el sentido de Darboux* (o simplemente *integrable*) si $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \underline{\int_a^b} f(t)dt$. En esta situación, este valor común se denotará por

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Notemos que las integrales inferior y superior de una función acotada siempre existen. De hecho, gracias a la desigualdad en (8.4) tenemos que

$$s(P, f) \leq \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt \leq S(P, f), \qquad \text{para toda partición } P \text{ de } [a, b].$$

Ejemplo 8.1.1. Consideremos una función constante $f(t) = c$, definida sobre $[a, b]$. Para cualquier partición P de este intervalo es claro que $M_j = m_j = c$. Por tanto, $s(P, f) = S(P, f) = c(b - a)$ y así la función es integrable con

$$\int_a^b c dt = c(b - a).$$

En contraste, la función de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ del Ejemplo 6.5.3 restringida al intervalo $[a, b]$ satisface que $m_j = 0$ y $M_j = 1$. Por tanto,

$$\underline{\int_a^b} 1_{\mathbb{Q}}(t)dt = 0 < 1 = \overline{\int_a^b} 1_{\mathbb{Q}}(t)dt,$$

y no es integrable.

La primera propiedad que señalamos es que es posible calcular la integral superior e inferior solo empleando particiones que refinen a una partición dada.

Proposición 8.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y P_0 una partición de $[a, b]$. Entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt := \sup_{P_0 \subseteq P} s(P, f), \qquad \overline{\int_a^b} f(t)dt := \inf_{P_0 \subseteq P} S(P, f),$$

donde el supremo e ínfimo se toma sobre las particiones P de $[a, b]$ más finas que P_0.

Demostración. Note que $A' = \{s(P, f) : P$ partición de $[a, b]$ tal que $P_0 \subseteq P\} \subseteq A = \{s(Q, f) : Q$ partición de $[a, b]\}$. Como $Q \cup P_0$ es una partición de $[a, b]$ que contiene a Q, las condiciones de la Proposición 1.6 (2) se satisfacen y así $\sup(A) = \sup(A')$. La demostración para la integral superior es similar. □

Un criterio útil para determinar la integrabilidad de una función acotada es la siguiente condición de tipo Cauchy.

Proposición 8.2 (Condición de Cauchy)**.** *Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en este intervalo si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que*

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon. \tag{8.5}$$

Demostración. Si f es integrable y $\epsilon > 0$, recordando la Nota 1.3.2 sobre el supremo e ínfimo, existen particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ tales que

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt - \frac{\epsilon}{2} < s(P_1, f), \qquad S(P_2, f) < \overline{\int_a^b} f(t)dt + \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces si $P = P_1 \cup P_2$, gracias a la desigualdad (8.4) tenemos que

$$S(P, f) - s(P, f) \leq S(P_2, f) - s(P_1, f) < \overline{\int_a^b} f(t)dt + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f(t)dt = \epsilon,$$

porque la integral superior e inferior coinciden. Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ y una partición P como en el enunciado, por la definición de integral superior e inferior podemos acotar

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt - \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq S(P, f) - s(P, f) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario concluimos que $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \underline{\int_a^b} f(t)dt$ como se requería. □

La condición expresada en la proposición anterior se mantiene al tomar particiones más finas que la partición dada. En efecto, si (8.5) se verifica y $P \subseteq P^*$, entonces también

$$S(P^*, f) - s(P^*, f) < \epsilon,$$

gracias a las desigualdades en (8.3).

Por otra parte, no es claro cuál es el comportamiento de las sumas superiores e inferiores cuando se trabaja con particiones cuya norma $\|P\|$ tiende a cero. El siguiente resultado indica cómo proceder.

Lema 8.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$, entonces*

$$\left| S(P, f) - \overline{\int_a^b} f(t)dt \right| < \epsilon, \qquad \left| \underline{\int_a^b} f(t)dt - s(P, f) \right| < \epsilon.$$

Demostración. Note que es suficiente demostrar el enunciado para la integral superior, porque para la integral inferior basta aplicar el caso anterior a $-f$. En efecto,

$$S(P, -f) = -s(P, f) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} (-f(t))dt = -\underline{\int_a^b} f(t)dt,$$

como lo muestra el Ejercicio 1.5.7. Ahora, para sumas superiores, tratamos primero el caso en que $f(t) \geq 0$ en $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe una partición $P_0 = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(P_0, f) < \overline{\int_a^b} f(t)dt + \epsilon/2.$$

Si $M = \sup_{t \in [a,b]} f(t) > 0$, elijamos $0 < \delta < \epsilon/(2nM)$. Sea $P = \{r_0, r_1, \ldots, r_k\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Entonces podemos escribir al conjunto de índices como la unión disjunta $\{1, \ldots, k\} = A \cup B$, donde A está conformado por los índices l tales que $[r_{l-1}, r_l] \subseteq [t_{j-1}, t_j]$, para algún $j = 1, \ldots, n$. Esta situación se denotará por $l \preceq j$. El conjunto B será el complemento de A. Por definición, B tiene a lo más n elementos, uno por cada intervalo $[r_{l'-1}, r_{l'}]$ que contenga a alguno de los t_j.

Si $l \preceq j$, entonces $\overline{M_l} = \sup_{t \in [r_{l-1}, r_l]} f(t) \leq M_j = \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f(t)$ y $\sum_{l \preceq j} \Delta r_l \leq \Delta t_j$. Como por hipótesis estas cantidades son positivas, entonces $\sum_{l \preceq j} \overline{M_l} \Delta r_l \leq M_j \Delta t_j$. Por otra parte, si $l' \in B$, entonces $\overline{M_{l'}} \Delta r_{l'} \leq M\delta$. De esta forma

$$S(P, f) = \sum_{l \in A} \overline{M_l} \Delta r_l + \sum_{l' \in B} \overline{M_{l'}} \Delta r_{l'} \leq \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta t_j + nM\delta < \overline{\int_a^b} f(t)dt + \epsilon,$$

como se requería.

En general, como f es acotada, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) + c \geq 0$ en $[a, b]$. Como

$$S(P, f + c) = S(P, f) + c(b - a), \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} (f(t) + c)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt + c(b - a),$$

ver el Ejercicio 8.1.2, basta con aplicar el caso anterior a $f + c$ para concluir. □

Podemos expresar el resultado anterior como

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P, f) = \overline{\int_a^b} f(t)dt, \qquad \lim_{\|P\| \to 0} s(P, f) = \underline{\int_a^b} f(t)dt.$$

Así, f es integrable si y solo si estos límites tienden al mismo valor.

Terminamos esta sección con otra manera equivalente de definir integrabilidad, esta vez, empleando sumas de Riemann. A diferencia de las sumas de Darboux, estas utilizan puntos determinados en cada subintervalo de una partición dada. Más específicamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 8.4 (Sumas de Riemann)**.** Diremos que la pareja (P, ξ) es una *partición punteada* de $[a, b]$ si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de este intervalo y $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. En este caso, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada se define

$$\Sigma(P, \xi, f) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta t_j$$

como la *suma de Riemann de f relativa a (P, ξ)*.

Definición 8.5. Decimos que f es *integrable en el sentido de Riemann*, con *integral* $I_a^b(f) \in \mathbb{R}$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición punteada (P, ξ) de $[a.b]$ con $\|P\| < \delta$, se verifica que

$$\left| \Sigma(P, \xi, f) - I_a^b(f) \right| < \epsilon.$$

En este caso emplearemos la notación

$$I_a^b(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \Sigma(P, \xi, f).$$

Nota 8.1.1. Si (P, ξ) es una partición punteada de $[a, b]$, entonces

$$s(P, f) \leq \Sigma(P, \xi, f) \leq S(P, f). \tag{8.6}$$

Además, si f es integrable y P es una partición de $[a, b]$, tenemos que

$$\left| \Sigma(P, \xi, f) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq S(P, f) - s(P, f). \tag{8.7}$$

Esto se debe a que tanto esta suma de Riemann como el valor $\int_a^b f(t)dt$ pertenecen al intervalo $[s(P, f), S(P, f)]$.

Teorema 8.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es integrable en el sentido de Darboux si y solo si lo es en el sentido de Riemann y ambos valores coinciden, es decir*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\|P\|\to 0} \Sigma(P, \xi, f).$$

Demostración. Asuma que f es integrable en el sentido de Darboux. Por el Lema 8.1, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $S(P, f) \leq \int_a^b f(t)dt + \epsilon/2$ y $\int_a^b f(t)dt - \epsilon/2 \leq s(P, f)$, si $\|P\| < \delta$. Gracias a la desigualdad (8.7), $|\Sigma(P, \xi, f) - \int_a^b f(t)dt| < S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$, como se quería mostrar.

Recíprocamente, si f es integrable en el sentido de Riemann, entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces $|\Sigma(P, \xi, f) - I_a^b(f)| < \epsilon/4$. Fijada tal $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, por definición de M_j y m_j, existen $\alpha_j, \beta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tales que $M_j < f(\alpha_j) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ y $f(\beta_j) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < m_j$. Entonces

$$S(P, f) < \sum_{j=1}^{n} \left(f(\alpha_j) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \right) \Delta t_j = \sum_{j=1}^{n} f(\alpha_j)\Delta t_j + \frac{\epsilon}{4} < I_a^b(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

De la misma forma, $s(P, f) > I_a^b(f) - \frac{\epsilon}{2}$. Esto demuestra que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$. Por el criterio de Cauchy, f es integrable en el sentido de Darboux. Luego $\int_a^b f(t)dt$ existe, y por las desigualdades anteriores vemos que $\int_a^b f(t)dt \leq S(P, f) < I_a^b(f) + \epsilon/2$ y $I_a^b(f) < s(P, f) + \epsilon/2 \leq \int_a^b f(t)dt + \epsilon/2$. Esto muestra que

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_a^b(f) \right| \leq \epsilon/2$$

y como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, $\int_a^b f(t)dt = I_a^b(f)$. □

Ejercicios

8.1.1 Mostrar que $\|P^*\| \leq \|P\|$ para particiones $P \subseteq P^*$ de un intervalo $[a, b]$ dado.

8.1.2 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, $c \in \mathbb{R}$ y P, P_1, P_2 particiones de $[a, b]$. Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) $S(P, f + c) = S(P, f) + c(b - a)$ y $s(P, f + c) = s(P, f) + c(b - a)$. Por tanto,

$$\overline{\int_a^b} (f(t) + c)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt + c(b - a), \qquad \underline{\int_a^b} (f(t) + c)dt = \underline{\int_a^b} f(t)dt + c(b - a).$$

b) $S(P, f + g) \leq S(P, f) + S(P, g)$ y $s(P, f) + s(P, g) \leq s(P, f + g)$.

c) $s(P_1, f) + s(P_2, g) \leq s(P_1 \cup P_2, f) + s(P_1 \cup P_2, g) \leq \underline{\int_a^b}(f(t) + g(t))dt$. De la misma forma, $\overline{\int_a^b}(f(t) + g(t))dt \leq S(P_1 \cup P_2, f + g) \leq S(P_1, f) + S(P_2, g)$. Tomando supremos e ínfimos concluir que

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt + \underline{\int_a^b} g(t)dt \leq \underline{\int_a^b}(f(t) + g(t))dt$$
$$\leq \overline{\int_a^b}(f(t) + g(t))dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt + \overline{\int_a^b} g(t)dt.$$

8.1.3 Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Riemann. Demostrar que si $\{(P_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de particiones punteadas de $[a, b]$ tales que $\|P_n\| \to 0$ si $n \to +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma(P_n, \xi_n, f) = \int_a^b f(t)dt.$$

En particular,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

8.1.4 (Cálculo de Fermat para la integral de una potencia) Sean $n \in \mathbb{N}^+$, $b > 0$ y $0 < r < 1$. Calcular las sumas inferiores y superiores de $f(x) = x^n$ asociadas a cada partición $\{0, br^m, \ldots, br, b\}$ y hacer $m \to +\infty$ para demostrar que

$$b^{n+1} \frac{1-r}{1-r^{n+1}} \leq \underline{\int_0^b} t^n dt \leq \overline{\int_0^b} t^n dt \leq b^{n+1} r^n \frac{1-r}{1-r^{n+1}}.$$

Tomando $r \to 1^-$ concluir que f es integrable en $[0, b]$ y

$$\int_0^b t^n dt = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Mostrar que este argumento es válido para $n = \alpha > 0$ real positivo.

8.1.5 $(*)$ Sea $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n$ converge para todo $0 < q < 1$ y que

$$\lim_{q\to 1^-} a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n = \int_0^a f(t)dt.$$

En realidad la hipótesis sobre acotación se puede reemplazar por la condición más débil de que $|t^\alpha f(t)|$ sea acotada para $t \in (0, a]$, para algún $0 \leq \alpha < 1$.

Nota 8.1.2. La expresión en el límite se conoce como la *integral de Jackson*, útil en q-Cálculo.

8.2. Propiedades generales de la integral

En la sección anterior establecimos maneras equivalentes para determinar cuándo una función real acotada es integrable. En adelante escribiremos

$$\mathcal{R}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ es acotada e integrable}\},$$

para denotar dicho espacio. El hecho que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial se deduce de la siguiente proposición.

Proposición 8.3. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. *$f + g$ y $\alpha \cdot f$ son integrables sobre $[a,b]$, $\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ y $\int_a^b \alpha \cdot f(t)dt = \alpha \cdot \int_a^b f(t)dt$.*

2. *Sea $a < c < b$. Entonces $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son integrables. En este caso*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Demostración. (1) Para suma de funciones el resultado es consecuencia del Ejercicio 8.1.2. Para productos por escalar, si $\alpha > 0$ tenemos que $S(P, \alpha \cdot f) = \alpha \cdot S(P, f)$ y $s(P, \alpha \cdot f) = \alpha \cdot s(P, f)$. Por tanto,

$$\underline{\int_a^b} \alpha \cdot f(t)dt = \alpha \cdot \underline{\int_a^b} f(t)dt \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} \alpha \cdot f(t)dt = \alpha \cdot \overline{\int_a^b} f(t)dt.$$

Si $\alpha < 0$, tenemos que $S(P, \alpha \cdot f) = \alpha \cdot s(P, f)$, $s(P, \alpha \cdot f) = \alpha \cdot S(P, f)$ y así

$$\overline{\int_a^b} \alpha \cdot f(t)dt = \alpha \cdot \underline{\int_a^b} f(t)dt \qquad \text{y} \qquad \underline{\int_a^b} \alpha \cdot f(t)dt = \alpha \cdot \overline{\int_a^b} f(t)dt.$$

La integrabilidad de f permite concluir el resultado en ambos casos.

(2) Considere los conjuntos

$$A = \{s(P, f|_{[a,c]}) : P \text{ partición de } [a,c]\},$$
$$B = \{s(P, f|_{[c,b]}) : P \text{ partición de } [c,b]\}.$$

Entonces $A + B = \{s(P, f) : P \text{ partición de } [a,b] \text{ y } c \in P\}$. Aplicando la Proposición 1.6 (1) y la Proposición 8.1 a $P_0 = \{a, c, b\}$, vemos que

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt = \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) = \underline{\int_a^c} f(t)dt + \underline{\int_c^b} f(t)dt.$$

De la misma forma se demuestra que $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \overline{\int_a^c} f(t)dt + \overline{\int_c^b} f(t)dt$. Entonces

$$\overline{\int_a^b} f(t)dt - \underline{\int_a^b} f(t)dt = \left[\overline{\int_a^c} f(t)dt - \underline{\int_a^c} f(t)dt\right] + \left[\overline{\int_c^b} f(t)dt - \underline{\int_c^b} f(t)dt\right].$$

Como los sumandos son mayores o iguales a cero, su suma es cero si y solo si cada sumando es cero. Esto demuestra que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ son integrables. La fórmula para la integral se sigue de estas igualdades. □

Con el criterio de Cauchy obtenemos la integrabilidad de funciones continuas y monótonas.

Proposición 8.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.*

1. *Si f es continua, entonces es integrable. En otras palabras, $C^0[a, b] \subseteq \mathcal{R}[a, b]$.*
2. *Si f es monótona, entonces f es integrable.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 6.7 que f es uniformemente continua. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \epsilon/(b - a)$. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| \leq \delta$. Por el Teorema del valor extremo 6.4, para cada $j = 1, \ldots, n$ existen $s_j, s'_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tales que $M_j = f(s_i)$ y $m_j = f(s'_j)$. Como $|s_j - s'_j| \leq \Delta t_j < \delta$, concluimos que

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta t_j < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{j=1}^{n} \Delta t_j = \epsilon.$$

Se sigue que f es integrable sobre $[a, b]$, gracias a la Proposición 8.2.

Para el segundo enunciado basta asumir que f es monótona creciente y no es constante. Por tanto, $f(a) < f(b)$. Si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ se sigue que $m_j = f(t_{j-1})$ y $M_j = f(t_j)$. De esta manera

$$S(P, f)-s(P, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(t_j)-f(t_{j-1}))\Delta t_j \leq \|P\| \sum_{j=1}^{n} (f(t_j)-f(t_{j-1})) = \|P\|(f(b)-f(a)).$$

Dado $\epsilon > 0$ basta tomar una partición P tal que $\|P\| < \epsilon/(f(b) - f(a))$ para concluir el resultado, nuevamente vía la Proposición 8.2. □

Teorema 8.2. *Sea $f : [a, b] \to [m, M]$ integrable y $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\phi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable.*

Demostración. Comprobaremos que la condición de Cauchy 8.2 es válida para $f \circ \phi$. Dado $\epsilon > 0$, como ϕ es uniformemente continua en $[m, M]$, podemos elegir $0 < \delta < \epsilon$ tal que para todo $s, t \in [m, M]$ con $|s - t| < \delta$, se verifica que $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$.

Por hipótesis, como f es integrable, existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$. Sean

$$M_j^* = \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} \phi(f(t)), \qquad m_j^* = \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} \phi(f(t)), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Dividimos al conjunto de índices $\{1, \ldots, n\} = A \cup B$ como unión disjunta donde $j \in A$ si $M_j - m_j < \delta$ y $j \in B$ si $M_j - m_j \geq \delta$.

Si $j \in A$, como $|f(s) - f(t)| \leq M_j - m_j$, si $s, t \in [t_{j-1}, t_j]$, gracias a la elección de δ tenemos que $|\phi(f(s)) - \phi(f(t))| < \epsilon$. A partir de esta desigualdad, tomando supremo y luego ínfimo, concluimos que $M_j^* - m_j^* \leq \epsilon$.

Por otra parte, si $j \in B$ y ponemos $K = \sup_{s\in[m,M]} |\phi(s)|$, entonces $M_j^* - m_j^* \leq 2K$. Además

$$\delta \sum_{j\in B} \Delta t_j \leq \sum_{j\in B} (M_j - m_j)\Delta t_j \leq S(P, f) - s(P, f) < \delta^2,$$

es decir, $\sum_{j\in B} \Delta t_j < \delta$. Empleando las desigualdades obtenidas concluimos que

$$\begin{aligned} S(P, f \circ \phi) - s(P, f \circ \phi) &= \sum_{j\in A} (M_j^* - m_j^*)\Delta t_j + \sum_{j\in B} (M_j^* - m_j^*)\Delta t_j \\ &\leq \epsilon \sum_{j\in A} \Delta t_j + 2K \sum_{j\in B} \Delta t_j < \epsilon(b - a) + 2K\delta < (b - a + 2K)\epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ fue arbitrario, se sigue que $\phi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$. □

Corolario 8.1. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables, también lo es $f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

Demostración. Por el teorema anterior $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. La afirmación se sigue de la igualdad

$$f \cdot g = \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4},$$

vía la Proposición 8.3. □

Veamos ahora como el proceso de integración preserva desigualdades.

Proposición 8.5. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables.*

1. *Si $f(t) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Además, si $g(t) \leq f(t)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt$.*

2. *La función $t \mapsto |f(t)|$ es integrable y*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

En particular, si $|f(t)| \leq M$, entonces $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b - a)$.

Demostración. Para (1), por hipótesis $M_j, m_j \geq 0$ y así $S(P, f), s(P, f) \geq 0$, de donde se sigue la desigualdad. Si $f(t) \geq g(t)$, aplicando lo anterior a $f - g$ y la linealidad de la integral, concluimos la desigualdad.

Para (2), tomando $\phi(t) = |t|$ en el Teorema 8.2 vemos que $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$. Sea $c = \pm 1$ tal que $|\int_a^b f(t)dt| = c\int_a^b f(t)dt = \int_a^b cf(t)dt$. Como $cf(t) \leq |f(t)|$, integrando en ambos lados de esta desigualdad concluimos el resultado deseado. □

Teorema 8.3 (Teorema del valor medio para integrales I)**.** *Sean $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es continua y p integrable. Si p no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)p(t)dt = f(c)\int_a^b p(t)dt.$$

En particular, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a). \tag{8.8}$$

Demostración. Asumamos que $p(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Por el Teorema del valor extremo sabemos que $m = \text{ínf}_{t\in[a,b]} f(t)$ y $M = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$ existe. Entonces, multiplicando las desigualdades $m \leq f(t) \leq M$ por $p(t)$ e integrando sobre $[a, b]$ obtenemos que $m\int_a^b p(t)dt \leq \int_a^b f(t)p(t)dt \leq M\int_a^b p(t)dt$. Por hipótesis, $\int_a^b p(t)dt \geq 0$. Si $\int_a^b p(t)dt = 0$ hemos terminado. Caso contrario, deducimos que

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)p(t)dt}{\int_a^b p(t)dt} \leq M.$$

El resultado se sigue de aplicar el Teorema del valor intermedio 6.6 a f. Finalmente, la última igualdad se obtiene para el caso $p(t) = 1$. □

Nota 8.2.1. La igualdad (8.8) admite una interpretación geométrica cuando f es positiva: el área bajo la curva f en $[a, b]$ coincide con el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $f(\xi)$, para algún $\xi \in [a, b]$.

Ejercicios

8.2.1 Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, $h \geq 0$ y suponga que $\int_a^b h(x)dx = 0$. Demostrar que $h(x) = 0$ en los puntos de continuidad de h.

8.2.2 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables.

a) Si $\text{ínf}_{t\in[a,b]} f(t) > 0$, entonces $1/f \in \mathcal{R}[a, b]$.

b) $\text{máx}(f, g), \text{mín}(f, g) \in \mathcal{R}[a, b]$ y $|f|^p \in \mathcal{R}[a, b]$, si $p > 0$.

c) Si asumimos que $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$, ¿es cierto que $f \in \mathcal{R}[a,b]$? Misma pregunta suponiendo que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ o $f^3 \in \mathcal{R}[a,b]$.

8.2.3 Mostrar que la sucesión dada por $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt$ es monótona decreciente y convergente hacia 0.

8.2.4 *a*) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona decreciente. Comprobar que $(b-a)f(b) \le \int_a^b f(t)dt \le (b-a)f(a)$.

b) Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ monótona decreciente. Separando por intervalos de longitud uno, mostrar que $\sum_{j=1}^n f(j) \le \int_0^n f(t)dt \le \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$.

c) Sea $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Compare este valor con una integral adecuada y muestre que

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \le na_n \le 2\sqrt{n} - 1.$$

Deducir que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente y que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8.2.5 Argumentar como en el ejercicio anterior para demostrar el conocido criterio de convergencia de series:

Proposición 8.6 (Criterio de la integral)**.** *Si $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es monótona decreciente, entonces $\sum_{n=0}^\infty f(n)$ converge si y solo si $L = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f(t)dt$ es finito. Además*

$$L \le \sum_{n=0}^\infty f(n) \le L + f(0).$$

8.2.6 Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$. Demostrar que dado $a > 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f(nx)dx = aL.$$

Indicación: dividir $[0,a] = [0,c/n] \cup [c/n,a]$, para c adecuado y n grande.

8.2.7 Sea $f \in C^0[a,b]$ y defina $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = \|f\|_{[a,b]}.$$

8.2.8 Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas y monótonas crecientes. Demostrar que

$$\int_0^1 f(t)dt \cdot \int_0^1 g(t)dt \le \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Indicación: si $\phi(x) = g(x) - \int_0^1 g(t)dt$, se debe mostrar que $\int_0^1 f(t)\phi(t)dt \ge 0$. Aplicar el Teorema del valor medio para integrales para mostrar que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $\phi(x) \le 0$ si $0 \le x \le \xi$ y $\phi(x) \ge 0$ si $\xi \le x \le 1$. Emplee esto para acotar la integral requerida.

8.3. Teoremas Fundamentales del Cálculo

En esta sección desarrollamos las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo que nos indican las relaciones entre los procesos de derivación e integración. En pocas palabras, ambas versiones indican que en efecto estos son procesos, inverso el uno del otro. Como consecuencias interesantes estableceremos el Teorema de Taylor con resto integral y otra versión del Teorema del valor medio para integrales.

Teorema 8.4 (Teorema Fundamental del Cálculo I)**.** *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y considere la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Entonces F es continua. Además, si f es continua en el punto x_0, entonces F es diferenciable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demostración. Por hipótesis, f es acotada, digamos $|f(t)| \leq M$, para $t \in [a,b]$. Si $a \leq x < y \leq b$, tenemos que

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M(y-x),$$

es decir, F es de tipo Lipschitz en $[a,b]$ y en particular es continua allí. Ahora, si f es continua en x_0, dado ϵ, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - x_0| < \delta$, entonces $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$. Por tanto,

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t-s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t-s} \int_s^t \left(f(\tau) - f(x_0) \right) d\tau \right| < \epsilon,$$

si $x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$. Esto implica que $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Una consecuencia de este teorema es que toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ posee una antiderivada, a saber, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ satisface $F'(x) = f(x)$. Por otra parte, si consideramos la función complementaria $G(x) = \int_x^b f(t)dt$, como $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt$, es decir, esta suma es constante, deducimos que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt \right) = -f(x),$$

en los puntos x de continuidad de f.

El segundo teorema fundamental establece la siguiente relación que es la base del cálculo de integrales como antiderivadas.

Teorema 8.5 (Teorema Fundamental del Cálculo II)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable y asuma que $f' \in \mathcal{R}[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la condición de Cauchy, existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que $S(P, f') - s(P, f') < \epsilon$. Aplicando del Teorema del valor medio para derivadas 7.1, existe $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tal que $f(t_j) - f(t_{j-1}) = f'(\xi_j)\Delta t_j$. Entonces tenemos la suma telescópica

$$\Sigma(P, \xi, f') = \sum_{j=1}^{n} f'(\xi_j)\Delta t_j = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) - f(t_{j-1}) = f(b) - f(a).$$

Recordando la desigualdad (8.7), vemos que

$$\left| f(b) - f(a) - \int_a^b f'(t)dt \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, concluimos que estos valores coinciden. □

El lector atento se preguntará por qué se incluye la hipótesis sobre la integrabilidad de f'. Esta es necesaria para poder integrar dicha función. En efecto, V. Volterra logró exhibir en 1881 funciones f que son diferenciables, cuya derivada f' es acotada pero no es necesariamente integrable. El Ejemplo 9.6.3 ilustra esta situación.

Dos consecuencias de este teorema son las reglas de cálculo conocidas como integración por partes e integración por substitución.

Proposición 8.7. *1. (Integración por partes) Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son diferenciables con derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

2. (Cambio de variable) Sean $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable con derivada integrable tal que $f([a, b]) \subseteq [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(s)ds.$$

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la regla de Leibniz para el producto y el teorema anterior. Para la segunda afirmación, como g es continua, la función $G(x) = \int_c^x g(s)ds$ es una antiderivada de g y por tanto

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(s)ds = G(f(b)) - G(f(a)).$$

Como también

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt = \int_a^b (G \circ f)'(t)dt = G(f(b)) - G(f(a),)$$

deducimos la igualdad requerida. □

En este momento estamos en posición para dar una demostración del Teorema de Taylor, donde el resto se expresa a través de una integral. Veremos que este es consecuencia de integrar por partes adecuadamente.

Teorema 8.6 (Fórmula de Taylor con resto integral)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}$ existe y es integrable allí. Entonces*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)ds, \qquad x \in [a, b].$$

Demostración. Por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo podemos escribir $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s)ds$, que corresponde al caso $n = 1$ de la fórmula anterior. Si f'' existe y es integrable allí, podemos integrar por partes para obtener

$$\int_{x_0}^x f'(s)ds = (s-x)f'(s)\Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (s-x)f''(s)ds = (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-s)f''(s)ds,$$

de donde resulta la fórmula para $n = 2$. En general, si sabemos que la fórmula se verifica para $n - 1$, entonces integrando por partes el resto

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(s)ds = -\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(s)\Bigg|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)ds,$$

se llega a la fórmula para n. Note que este proceso se puede realizar tantas veces como f es diferenciable con derivadas de orden superior integrable. □

Nota 8.3.1. El teorema anterior demuestra nuevamente la versión del Teorema de Taylor con resto diferencial 7.10, con la hipótesis adicional de que $f^{(n)}$ sea continua, es decir, $f \in C^n[a, b]$. En efecto, por el Teorema del valor medio para integrales 8.3, como la función $s \mapsto (x - s)^{n-1}$ no cambia de signo en $[x_0, x]$, existe ξ entre x_0 y x tal que

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)ds = f^{(n)}(\xi) \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = f^{(n)}(\xi)\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Nota 8.3.2. Otra forma posible de expresar el resto es como

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)ds = \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0))dt,$$

igualdad que se sigue del cambio de variable $s = x_0 + t(x - x_0)$. La clase de diferenciabilidad de la función $R_n(x)/(x - x_0)^n$ será tratada en el Proyecto 12.4.

Finalizamos esta sección con otra versión del Teorema del valor medio para integrales, útil en el estudio de series de Fourier y la transformada de Laplace.

Teorema 8.7 (Teorema del valor medio para integrales II)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es decreciente y $\varphi(t) \geq 0$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \varphi(a)\int_a^\xi f(t)dt.$$

2. *Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es creciente y $\varphi(t) \geq 0$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \varphi(b)\int_\xi^b f(t)dt.$$

3. *Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \varphi(a)\int_a^\xi f(t)dt + \varphi(b)\int_\xi^b f(t)dt.$$

Demostración. Para (1) si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, ella define una función continua en $[a, b]$. Si $m = \inf_{x\in[a,b]} F(x)$ y $M = \sup_{x\in[a,b]} F(x)$, estos valores son finitos gracias al Teorema del valor extremo. Si $\varphi(a) = 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ y no hay nada que demostrar. De lo contrario, $\varphi(a) > 0$. Por el Teorema del valor intermedio para funciones continuas basta demostrar que

$$\varphi(a)m \leq \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \leq \varphi(a)M. \tag{8.9}$$

Estableceremos esta desigualdad empleando sumas de Riemann.

Como f es integrable, es acotada, digamos $|f(t)| \leq L$, en $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, como φ es integrable, Proposición 8.4, existe una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(P, \varphi) - s(P, \varphi) < \epsilon/L$. Escribamos

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\varphi(t) - \varphi(t_{j-1}))f(t)dt + \sum_{j=1}^n \varphi(t_{j-1})\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt = I_1 + I_2.$$

Podemos acotar la primera integral por

$$|I_1| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} L\,|\varphi(t) - \varphi(t_{j-1})|dt \leq L\,(S(P, \varphi) - s(P, \varphi)) < \epsilon,$$

recordando la desigualdad (8.2).

Para acotar I_2, note primero que por la definición de la función F, $\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt = F(t_j) - F(t_{j-1})$. Por tanto, sumando por partes como en el Lema 5.1, obtenemos

$$I_2 = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t_j)(F(t_{j+1}) - F(t_j)) = \sum_{j=0}^{n-2} (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j+1}))F(t_{j+1}) + \varphi(t_{n-1})F(b),$$

porque $\sum_{l=0}^{j} F(t_{l+1}) - F(t_l) = F(t_{j+1}) - F(a)$, $F(t_0) = F(a) = 0$ y $F(t_n) = F(b)$. Como φ es monótona decreciente, cada factor que multiplica a los $F(t_{j+1})$ es positivo y así

$$I_2 \leq \sum_{j=0}^{n-2} (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j+1}))M + \varphi(t_{n-1})M = \varphi(a)M.$$

De la misma forma, $m\varphi(a) \leq I_2$. En conclusión, teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, concluimos que

$$-\epsilon + \varphi(a)m \leq \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \leq \epsilon + \varphi(a)M.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se sigue la validez de (8.9).

Para (2) basta aplicar (1) a $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(b-a-t)$ y $\widetilde{f}(t) = f(b-a-t)$ y luego aplicar el cambio de variable $s = b - a - t$ en las integrales resultantes. Finalmente, (3) se obtiene de (1) directamente: si φ es monótona decreciente, aplique (1) a $\varphi(x) - \varphi(b)$, y si φ es monótona creciente, aplique (1) a $\varphi(x) - \varphi(a)$. □

Ejercicios

8.3.1 Usar el Ejercicio 8.1.3 y el cálculo de integrales de funciones básicas para comprobar los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{n} j^p = \frac{1}{p+1}.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{j/n} = e - 1.$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \ln 2.$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n+j)^2} = 0.$

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n^2+j^2} = \frac{\pi}{4}.$

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+j^2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} \arctan\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-j^2}} = \frac{\pi}{2}.$

j) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{nj+j^2}{n^3+j^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

8.3.2 Determine todas las funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt, \qquad \text{para todo } x \in (0, 1).$$

8.3.3 *a*) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = a.$$

b) Si $a > 0$ y $f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^n f(t)dt}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)} = 1.$$

8.3.4 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(a) = f(b) = 0$. Si $\int_a^b f(x)^2 dx = 1$, demostrar que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}, \quad \left(\int_a^b f'(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b x^2 f(x)^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

8.3.5 Aplicar el Teorema de Taylor con resto integral a la función $f(x) = x^{n+k-1}$, con $n, k \in \mathbb{N}^+$ y con centro $x_0 = 0$, para obtener la integral

$$\int_0^x (x - t)^{n-1} t^{k-1} dt = \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n+k-1)!} x^{n+k-1}.$$

Mostrar que esta integral es equivalente a su valor en $x = 1$, a saber

$$\int_0^1 (1 - t)^{n-1} t^{k-1} dt = \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n+k-1)!}.$$

8.3.6 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas. Aplicar el Teorema del valor medio para derivadas 7.4 a las funciones $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ para demostrar que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$g(\xi) \int_a^b f(t)dt = f(\xi) \int_a^b g(t)dt.$$

El caso $g \equiv 1$ es el Teorema del valor medio para integrales.

8.3.7 (Wayment) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(a) = f(b)$. Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$(\xi - a)f(\xi) = \int_a^\xi f(t)dt.$$

Interpretar geométricamente. Indicación: recuerde el Teorema de Flett, Ejercicio 7.3.11. La demostración original está dada en [139], ver también [65, p. 1155].

8.3.8 Sea g una función diferenciable en $x = 0$. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} g(t)dt$$

converge absolutamente si y solo si $g(0) = 0$. Indicación: Ejercicio 7.5.9.

8.3.9 Considere la función $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1} dt$, $x \geq 0$. Demostrar que es diferenciable, calcular su derivada y probar que $f(x) > 0$, para todo $x > 0$.

8.3.10 (Bernstein) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f \in C^\infty(I)$ tal que $f^{(n)}(x) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$. Entonces $f \in C^\omega(I)$.

Indicación: Tome $a < x \leq b$ en I y sea $R_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$. Empleando el signo de las derivadas de f mostrar que $f(b) \geq R_n(b)$. Luego, expresando a $R_n(x)$ como resto integral, y empleando que $f^{(n)}$ es monótona creciente, justificar por qué

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} R_n(b) \leq \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} f(b).$$

8.3.11 ($*$) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Por el Teorema 8.3, si $x \in (a, b)$ podemos elegir $\xi_x \in (a, b)$ tal que $\int_a^x f(t)dt = f(\xi_x)(x-a)$. El objetivo de este ejercicio es estudiar el comportamiento de ξ_x como función de x.

a) [67] Asuma que f es diferenciable en a y $f'(a) = f'_+(a) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{\xi_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

Esto indica que cuando $x \to a$, ξ_x se aproxima al punto medio entre a y x. Para demostrar este resultado use el Teorema de Taylor para escribir $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \epsilon(t)(t-a)$, con $\epsilon(t) \to 0$ si $t \to a$. Integrando, escriba $\int_a^x f(t)dt = f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt$. Evaluando en $t = \xi_x$ en la primera ecuación y empleando la definición de ξ_x, obtenga

$$f'(a)\frac{\xi_x - a}{x - a} + \epsilon(\xi_x)\frac{\xi_x - a}{x - a} = \frac{f'(a)}{2} + \frac{\int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt}{(x-a)^2}.$$

Argumente por qué

$$\lim_{x \to a} \frac{\int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt}{(x-a)^2} = 0, \qquad \lim_{x \to a} \epsilon(\xi_x)\frac{\xi_x - a}{x - a} = 0,$$

y deduzca el resultado.

b) [13] Si f es k veces diferenciable en a, $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ y $f^{(k)}(a) \neq 0$, empleando el mismo argumento que antes, demostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{\xi_x - a}{x - a} = \frac{1}{(k+1)^{1/k}}.$$

Es posible obtener más resultados en esta dirección para la versión más general del Teorema del valor medio para integrales, ver [122].

8.4. Derivación bajo el signo de integración

En esta sección desarrollamos una regla de cálculo para derivar funciones definidas por integrales. Esta técnica recibe el nombre de *regla de Leibniz para integrales* y resulta útil para calcular integrales definidas, dando una alternativa donde los métodos de integración usuales no resultan efectivos. En este contexto la regla también se conoce como el *truco de Feynman* en honor a R. Feynman quien se destacó por el uso que le dio a esta regla para calcular integrales de considerable dificultad. La extensión de esta regla para integrales impropias será tratada en la Sección 9.5.

Teorema 8.8. *Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si definimos*

$$g : [c,d] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \int_a^b \varphi(s,t)ds,$$

entonces g es continua. Además, si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe y es continua en $[a,b] \times [c,d]$, entonces g es de clase C^1 en $[c,d]$ y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)ds.$$

Demostración. La continuidad de g se deduce de la continuidad uniforme de φ sobre el compacto $[a,b] \times [c,d]$, como en la demostración del Teorema 8.4. Ahora, si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es continua allí, esta función también es uniformemente continua. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $(s,t), (s',t') \in [a,b] \times [c,d]$ y $\|(s,t) - (s',t')\|_2 < \delta$, entonces

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s',t') \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

En particular, por el Teorema Fundamental del Cálculo II, si $0 < |t - t_0| < \delta$ y $t, t_0 \in [c,d]$, entonces

$$\left| \varphi(s,t) - \varphi(s,t_0) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t_0)(t-t_0) \right| = \left| \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,\tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t_0) \right) d\tau \right| \leq \frac{\epsilon |t-t_0|}{2(b-a)},$$

para todo $s \in [a,b]$. Así, dividiendo por $|t - t_0|$ encontramos que

$$\left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t_0)ds \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{\varphi(s,t) - \varphi(s,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t_0) \right) ds \right| \leq \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} < \epsilon.$$

Esto demuestra la fórmula dada para $g'(t)$. La continuidad de g' se deduce como en la primera parte del enunciado. □

Ejemplo 8.4.1. Es posible calcular la integral

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(a\cos(t)^2 + b\sin(t)^2)^2}, \qquad a,b > 0$$

explícitamente aplicando el teorema anterior. Para ello considere la integral auxiliar

$$J(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos(t)^2 + b\sin(t)^2}.$$

Empleando el cambio de variable $u = \tan(t)$ y la función arcotangente, ver Ejemplo 8.7.2 más adelante, obtenemos el valor

$$\begin{aligned} J(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec(t)^2}{a + b\tan(t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{a + bu^2} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (b/a)u^2} = \left.\frac{\arctan\left((b/a)^{1/2}u\right)}{(ab)^{1/2}}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Ahora, tomando las derivadas de J respecto a a y b, obtenemos las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)^2}{(a\cos(t)^2 + b\sin(t)^2)^2} dt = -\frac{\pi}{4a^{3/2}b^{1/2}} \\ \frac{\partial J}{\partial b} &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)^2}{(a\cos(t)^2 + b\sin(t)^2)^2} dt = -\frac{\pi}{4a^{1/2}b^{3/2}}, \end{aligned}$$

gracias al Teorema 8.8. Por tanto,

$$I(a,b) = -\frac{\partial J}{\partial a} - \frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Note que el resultado confirma el valor $I(a,a) = \frac{\pi}{2a^2}$, que es posible calcular directamente de la definición de I.

Finalizamos estableciendo una fórmula general para funciones definidas por integrales. Su demostración requiere la regla de la cadena en varias variables.

Teorema 8.9. *Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe y es continua en $[a,b] \times [c,d]$. Si $u, v : [c,d] \to [a,b]$ son continuamente diferenciables allí, entonces la función $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t,x)dt$ es diferenciable en $[c,d]$ y*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t,x)dt\right) = \varphi(v(x),x)v'(x) - \varphi(u(x),x)u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)dt.$$

Demostración. Considere la función

$$F(x,y,z) = \int_y^z \varphi(t,x)dt,$$

donde $a \le y, z \le b$ y $x \in [c,d]$. La regla de Leibniz 8.8 y el Teorema Fundamental del Cálculo implican que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^z \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)dt, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\varphi(y,x), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \varphi(z,x).$$

Como $g(x) = F(x, u(x), v(x))$, la fórmula se sigue de la regla de la cadena, Teorema 7.5. □

Nota 8.4.1. En particular, si

$$g(x) = \int_0^x \varphi(x,t)dt,$$

donde $\varphi : [0,a] \times I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,t) \mapsto \varphi(r,t)$ es una función continua con derivada parcial $\partial G/\partial r$ también continua, se verifica que g es diferenciable y

$$g'(x) = \varphi(x,x) + \int_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x,t)dt.$$

Esta fórmula será empleada en el Proyecto 12.4.

Ejercicios

8.4.1 Considere las funciones

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Muestre que $f'(x) + g'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$. Concluir que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{8.10}$$

8.4.2 Considere $I(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+st)}{t^2+1}dt$, definida para $s \in [0,1]$. Escribir

$$I(1) - I(0) = \int_0^1 I'(s)ds,$$

calcular la derivada interna con la regla de Leibniz e integrar explícitamente el resultado para obtener el valor

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2+1}dt = \frac{\pi \ln(2)}{8}.$$

8.4.3 Considere la función $f(t) = \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)d\theta$. Mostrar que $tf'(t) = 0$, y concluir que f es constante. Por tanto

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = f(1) = f(0) = 2\pi.$$

Indicación: calcule $\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta))$.

8.4.4 ($*$) Sea $f \in C^\infty(a,b)$ con $a < 0 < b$ y $f(0) = 0$. Demostrar que si $g(x) = f(x)/x$, $x \neq 0$ y $g(0) = f'(0)$, entonces $g \in C^\infty(a,b)$.

Indicación: mostrar que $f(x) = x\int_0^1 f'(xs)ds$. Una generalización de este resultado se presenta en el Corolario 12.2 del Proyecto 12.4

8.5. Caracterización de integrabilidad

El objetivo de esta sección es dar una caracterización de integrabilidad en términos de las discontinuidades de la función. El resultado se debe a H. Lebesgue y emplea la noción de conjuntos de medida cero.

Para intervalos de la forma $J = (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$, emplearemos la notación $|J| = b - a$ para denotar su medida o longitud. Un tipo de funciones útiles para expresar la longitud como una integral son las funciones características. Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $A \subseteq X$, la *función característica sobre A* se define por

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Para el caso $X = \mathbb{R}$ y para un intervalo J como antes se comprueba fácilmente que

$$\int_a^b 1_J(t)dt = |J|. \tag{8.11}$$

Note que solo consideramos esta noción para conjuntos de esta naturaleza geométrica sencilla. Otro caso posible es definir la longitud $|U|$ de un abierto U de $\mathbb{R}$, vía el Ejercicio 2.2.8, como la suma de las longitudes de los intervalos que lo conforman. El problema general de determinar qué es la medida de un subconjunto de $\mathbb{R}$ se trata en cursos más avanzados junto con la teoría de integración de Lebesgue. Sin embargo, la idea de medida cero se puede estudiar directamente.

Definición 8.6 (Conjuntos de medida nula)**.** Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene *medida cero ó nula* si para todo $\epsilon > 0$ existe una familia de intervalos abiertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \epsilon.$$

Si además la familia se puede escoger finita, se dice que A tiene *contenido nulo*.

Lema 8.2. *Sea $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ una familia contable de conjuntos de medida cero. Entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ tiene medida cero.*

Demostración. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ podemos escoger una familia $\{I_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ cuya unión contiene a A_j y $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{j,k}| < \epsilon/2^j$. Entonces la familia de intervalos $\{I_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{N}^+}$ es contable, su unión contiene a $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y además

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |I_{j,k}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon.$$

Por tanto dicha unión tiene medida nula. □

Ejemplo 8.5.1. Todo conjunto de un elemento $\{x_0\}$ tiene medida cero, pues basta elegir el intervalo $I = (\epsilon/2 - x_0, x_0 + \epsilon/2)$ de longitud ϵ. Gracias al lema anterior vemos que cada conjunto numerable de $\mathbb{R}$ tiene medida cero, por ejemplo, el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ satisface esta propiedad.

Ejemplo 8.5.2. El conjunto de Cantor C es un conjunto no contable de medida cero. En efecto, recordando la notación de la Sección 3.4, sabemos que $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, donde I_n consistía de 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$. Así, dado $\epsilon > 0$ y tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $(2/3)^N < \epsilon$, llegamos a la conclusión deseada porque $C \subseteq I_N$.

El siguiente teorema se basa en la noción de oscilación de una función en un punto, ver la Sección 6.5 y es tomada de [128, Appendix 1.2]. Antes de enunciarlo recordamos que denotamos por S_f el conjunto de discontinuidad de una función real. Este conjunto se obtiene como unión de los conjuntos $A_{f,\epsilon} := \{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f,x) \geq \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$, como en (6.8).

Teorema 8.10 (Lebesgue)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $S_f \subseteq [a,b]$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Entonces f es integrable si y solo si S_f tiene medida cero.*

Demostración. Asuma que S_f tiene medida cero. Dado $\epsilon > 0$, como $A_{f,\epsilon} \subseteq S_f$, podemos elegir una familia de intervalos abiertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ tales que $S_f \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \epsilon$. Por el Lema 6.1 $A_{f,\epsilon} \subseteq [a,b]$ es cerrado y por tanto compacto. Así, podemos elegir $N \geq 1$ tal que $A_{f,\epsilon} \subseteq I := \bigcup_{j=1}^{N} I_j$. Luego, el complemento $[a,b] \setminus I$ de esta unión resulta ser compacto. Además, si $z \in [a,b] \setminus I$, existe un intervalo J_z centrado en z tal que $\sup_{t,s\in[a,b]\cap J_z} |f(t) - f(s)| \leq \epsilon$, porque $z \notin A_{f,\epsilon}$. Por compacidad podemos elegir un número finito de estos intervalos, $J_{z_1}, \ldots, J_{z_m}$, que cubran a $[a,b] \setminus I$.

Si consideramos la partición P de $[a,b]$ conformada por los puntos extremos de los intervalos $I_1, \ldots, I_N, J_{z_1} \ldots, J_{z_m}$, obtenemos que

$$S(P,f) - s(P,f) \leq 2M \sum_{j=1}^{N} |I_j| + \epsilon(b-a) < (2M + b - a)\epsilon,$$

donde $|f(t)| \leq M$. Así f satisface la condición de Cauchy y por tanto es integrable.

Recíprocamente, si f es integrable en $[a,b]$, como $S_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{f,1/n}$, gracias al Lema 8.2 es suficiente demostrar que cada $A_{f,1/n}$ tiene medida cero. Dado $\epsilon > 0$, por integrabilidad sabemos que existe una partición $P_\epsilon = \{t_0, \ldots, t_N\}$ de $[a,b]$ tal $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon/2n$. Note que si $I_j = (t_{j-1}, t_j)$ interseca a $A_{f,1/n}$, entonces

$$M_j - m_j = \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t) - \operatorname*{ínf}_{t\in[t_{j-1},t_j]} f(t) \geq \sup_{t\in I_j} f(t) - \operatorname*{ínf}_{t\in I_j} f(t) \geq \operatorname{osc}(f,x_0) \geq 1/n,$$

para todo $x_0 \in I_j \cap A_{f,1/n}$. Esto muestra que

$$\frac{1}{n} \sum_{\{j:A_{f,1/n}\cap I_j\neq\emptyset\}} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j)\Delta t_j = S(P,f) - s(P,f) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Estos intervalos cubren a $A_{f,1/n}$ salvo por algunos de los puntos extremos $\{t_0, \ldots, t_N\}$. Además su longitud suma a lo más $\epsilon/2$. Agregando los intervalos $(t_j - \frac{\epsilon}{2(N+1)}, t_j + \frac{\epsilon}{2(N+1)})$ por cada índice j necesario, obtenemos una colección finita de intervalos que cubren a $A_{f,1/n}$ y cuya longitud es menor a ϵ. Por tanto $A_{f,1/n}$ tiene medida cero, como se debía mostrar. □

Ejemplo 8.5.3. Comprobamos en el Ejemplo 8.1.1 que la función de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}}$ no es integrable en ningún intervalo $[a, b]$. Esta función es discontinua en todo punto y así $S_{1_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}} = [a, b]$. Como ningún intervalo tiene medida cero, Ejercicio 8.5.3, verificamos nuevamente que dicha función no es integrable.

Ejemplo 8.5.4. La Proposición 8.4 demuestra que toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua o monótona es integrable. Esto también es consecuencia del teorema anterior, porque en el primer caso $S_f = \emptyset$, y en el segundo S_f es finito o contable, Teorema 6.9. En ambas situaciones S_f tiene medida cero.

Ejemplo 8.5.5. El teorema anterior permite demostrar de manera alternativa el Teorema 8.2 y el Corolario 8.1 sobre composición y producto de funciones integrables. Si suponemos que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables y ϕ es continua, note que

$$S_{f \cdot g} \subseteq S_f \cup S_g, \qquad S_{\phi \circ f} \subseteq S_f.$$

Como la medida de S_f y S_g es cero, lo mismo pasará con los anteriores subconjuntos.

Nota 8.5.1. La teoría de integración de Lebesgue se basa en la idea de integrar primero funciones de la forma 1_A, donde $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto *medible*. La integral de 1_A corresponde a su *medida*. Note que (8.11) es un caso particular de esta situación. Luego, el tipo de funciones que se consideran son aquellas que se pueden aproximar por funciones *simples*, es decir, combinaciones lineales de la forma $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$, donde los $\alpha_j \in \mathbb{R}$ y los conjuntos A_j son disjuntos entre si. La integral de estas funciones simples se extiende por linealidad. Finalmente, la integral de una función general f se obtiene como límite de integrales de funciones simples que aproximan a f.

Para el caso de la integral de Riemann el tipo de conjuntos que aparecen son solamente intervalos. De hecho, podemos comprobar la siguiente afirmación.

Lema 8.3. *Dados $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\epsilon > 0$, existe una función simple $\varphi = \sum_{j=1}^{n} m_j 1_{[t_{j-1}, t_j)}$ con $\varphi(t) \leq f(t)$, para todo $t \in [a, b]$ y tal que*

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b \varphi(t)dt \right| < \epsilon.$$

Demostración. Como f es integrable, existe una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $|\int_a^b f(t)dt - s(P, f)| < \epsilon$. Si definimos $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$, donde $m_j = \inf_{s \in [t_{j-1}, t_j]} f(s)$, y $\varphi(t_n) = f(t_n)$, esta será la función requerida. En efecto, se sigue de (8.11) que $\int_a^b \varphi(t)dt = s(P, f)$ y además $\varphi(t) \leq f(t)$, para todo $t \in [a, b]$. □

Terminamos esta sección con una aplicación del lema anterior, de importancia en el Análisis de Fourier.

Teorema 8.11 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0.$$

Demostración. Primero mostramos que el resultado es válido para $\sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{I_j}$, donde los $I_j \subseteq [a,b]$ son intervalos. Por linealidad basta con hacerlo para funciones del tipo 1_I. Para fijar ideas supongamos que $I = (c,d)$. Entonces

$$\left|\int_a^b 1_I(t)\cos(xt)dt\right| = \left|\int_c^d \cos(xt)dt\right| = \left|\frac{\sin(xdc) - \sin(xd)}{x}\right| \leq \frac{2}{x} \to 0 \quad \text{si } x \to +\infty.$$

Un cálculo similar establece el otro límite. Ahora, dada $f \in \mathcal{R}[a,b]$ arbitraria, tome $\epsilon > 0$. Por el lema anterior podemos tomar una función simple $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) \leq f(t)$ y $\left|\int_a^b f(t) - \varphi(t)dt\right| < \epsilon/2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\cos(xt)dt\right| &\leq \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cos(xt)dt + \int_a^b \varphi(t)\cos(xt)dt\right| \\ &\leq \int_a^b \big(f(t)-\varphi(t)\big)\,dt + \left|\int_a^b \varphi(t)\cos(xt)dt\right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

si x suficientemente grande para que $\left|\int_a^b \varphi(t)\cos(xt)dt\right| < \epsilon/2$. El límite con $\sin(xt)$ se demuestra de la misma forma. □

Ejercicios

8.5.1 Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ y $A, B \subseteq X$, demostrar las siguientes propiedades sobre funciones características:

a) $A \subseteq B$ si y solo si $1_A(x) \leq 1_B(x)$, para todo $x \in X$.

b) $1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x)$, para todo $x \in X$. En particular, $1_{A\cup B}(x) \leq 1_A(x) + 1_B(x)$ con igualdad cuando $A \cap B = \emptyset$.

c) Si $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N A_j$, entonces $1_A(x) \leq \sum_{j=1}^N 1_{A_j}(x)$, para todo $x \in X$.

d) Si $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ es una unión disjunta, entonces $1_A(x) = \sum_{n=0}^\infty 1_{A_n}(x)$, para todo $x \in X$.

8.5.2 Suponga que $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$, para ciertos intervalos abiertos I_j. Entonces

$$b - a \leq \sum_{j=1}^N |I_j|.$$

Demostrar un resultado similar si $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$ converge.

Indicación: si $\bigcup_{j=1}^{N} I_j \subseteq [c,d]$, tome la integral sobre $[c,d]$ en la desigualdad $1_{[a,b]}(x) \leq \sum_{j=1}^{N} 1_{I_j}(x)$. Para el segundo caso, use la compacidad.

8.5.3 Comprobar que un intervalo (que no sea un punto) no tiene medida cero. Usar esto para demostrar que si $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida cero, entonces debe tener interior vacío.

8.5.4 Suponga que $[a,b] = U \cup E$ es una unión disjunta, donde $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ es una unión disjunta de intervalos abiertos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n < b - a$. Demostrar que E no puede tener medida cero.

8.5.5 Considere un intervalo (a,b), $0 < L/2 \leq b - a$ y sea $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una numeración de $(a,b) \cap \mathbb{Q}$. Defina los intervalos

$$I_k = \left(r_k - \frac{L}{2^{k+2}}, r_k + \frac{L}{2^{k+2}}\right) \cap (a,b), \qquad k \geq 1$$

y sea $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subseteq (a,b)$. Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) U es abierto y es denso en (a,b).

b) Escriba, vía el Ejercicio 2.2.8, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ como unión contable de intervalos disjuntos. Si $S_n = \{k \in \mathbb{N}^+ : I_k \subseteq (a_n, b_n)\}$, entonces $S_n \cap S_m = \emptyset$ para $n \neq m$ y $\mathbb{N}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

c) Mostrar que $(a_n, b_n) = \bigcup_{k\in S_n} I_k$ y por tanto la longitud de U satisface

$$|U| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in S_n} |I_k| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2L}{2^{j+2}} = \frac{L}{2}.$$

Esta construcción demuestra que existe un abierto denso $U \subseteq (a,b)$ con longitud positiva y tan pequeña como se desee.

8.5.6 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de tipo Lipschitz. Demostrar que si $A \subseteq [a,b]$ tiene medida cero, lo mismo es válido para $f(A)$.

8.5.7 Mostrar que la función de Thomae, Ejemplo 6.5.4, es integrable y $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

8.5.8 Si $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que $S_{1_A} = \partial A$ es la frontera de A. Ahora, si $A \subseteq [a,b]$ concluir que 1_A es integrable en $[a,b]$ si y solo si ∂A tiene medida cero.

8.5.9 Sea $h \in \mathcal{R}[a,b]$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\int_a^b |h(t)|dt = 0$.

b) $h = 0$ en todos sus puntos de continuidad.

c) $\{x \in [a,b] : h(x) \neq 0\}$ tiene interior vacío.

8.6. Algunas aplicaciones de la integral

En esta sección, que puede ser de carácter opcional, incluimos algunos resultados que han sido mencionados a lo largo del texto y que se pueden demostrar mediante el uso de integrales. Entre ellos destacamos la construcción del logaritmo, la desigualdad de Young y el cálculo de la suma de algunas series. Otra aplicación al cálculo de longitud de curvas será tratada en el Proyecto 14.2.

Comenzamos con una versión más general de la desigualdad de Young, que fue tratada en el Ejercicio 7.3.8. Las siguientes demostraciones son tomadas de [45].

Lema 8.4. *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Entonces*

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(s)ds + \int_0^x f(s)ds = xf(x), \qquad \textit{para todo } x \geq 0.$$

Demostración. Las hipótesis sobre f implican que $f^{-1} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ está bien definida, es estrictamente creciente, continua y $f^{-1}(0) = 0$. Definiendo la función

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds + \int_0^{f(x)} f^{-1}(s)ds - xf(x),$$

demostraremos que F es diferenciable y $F' \equiv 0$. Como $F(0) = 0$, se sigue que $F \equiv 0$ como se requiere. Consideramos dos casos:

1. Si $h > 0$, escribimos

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} [f(s) - f(x+h)]\, ds + \int_{f(x)}^{f(x+h)} \left[f^{-1}(s) - x\right] ds.$$

Como f y f^{-1} son crecientes obtenemos

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &\geq \int_x^{x+h} [f(x) - f(x+h)]\, ds + \int_{f(x)}^{f(x+h)} \left[f^{-1}(f(x)) - x\right] ds \\ &= -h(f(x+h) - f(x)). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &\leq \int_x^{x+h} [f(x+h) - f(x+h)]\, ds + \int_{f(x)}^{f(x+h)} \left[f^{-1}(f(x+h)) - x\right] ds \\ &= h(f(x+h) - f(x)). \end{aligned}$$

2. Si $h < 0$, escribimos

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x+h}^{x} [f(x+h) - f(s)]\, ds + \int_{f(x+h)}^{f(x)} \left[x - f^{-1}(s)\right] ds.$$

Argumentando igual que antes vemos que $F(x+h) - F(x) \geq -h(f(x+h) - f(x))$ y $F(x+h) - F(x) \leq h(f(x+h) - f(x))$.

Ambos casos demuestran que

$$-|f(x+h)-f(x)| \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq |f(x+h)-f(x)|,$$

para $h \neq 0$. La fórmula $F'(x) = 0$ se sigue de hacer $h \to 0$ en estas desigualdades y de la continuidad de f en x, argumento que concluye la demostración. Vale la pena notar que estas consideraciones son necesarias porque f no se asume diferenciable, y por tanto la diferenciabilidad de F no se puede garantizar a priori. □

Teorema 8.12 (Desigualdad de Young)**.** *1. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si $a, b \geq 0$, entonces*

$$ab \leq \int_0^a f(s)ds + \int_0^b f^{-1}(s)ds.$$

La igualdad es válida si y solo si $b = f(a)$.

2. Si $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ son tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

La igualdad es válida si y solo si $a^p = b^q$.

Demostración. La desigualdad requerida es $\Delta(a, b) \geq 0$, donde

$$\Delta(a, b) := \int_0^a f(s)ds + \int_0^b f^{-1}(s)ds - ab.$$

El lema anterior demuestra que $\Delta(a, f(a)) = 0$, así que basta con comprobar que $\Delta(a, b) \geq \Delta(a, f(a))$, con igualdad si y solo si $b = f(a)$. Para ello consideramos dos casos. Primero, si $f(a) \leq b$, note que $f(a) \leq s \leq b$ implica que $a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(s) \leq f^{-1}(b)$. Por tanto, $f^{-1}(s) - a$ es una función continua, positiva y estrictamente creciente. Como

$$\Delta(a, b) - \Delta(a, f(a)) = \int_{f(a)}^b \left(f^{-1}(s) - a\right) ds \geq 0$$

la igualdad se obtiene si y solo si $b = f(a)$, vía el Ejercicio 8.2.1. En el segundo caso $b \leq f(a)$. Aquí escribiendo

$$\Delta(a, b) - \Delta(a, f(a)) = \int_b^{f(a)} \left(a - f^{-1}(s)\right) ds \geq 0$$

y usando que $a - f^{-1}(s)$ es continua, positiva y estrictamente decreciente llegamos a la misma conclusión. Esto demuestra (1). Finalmente (2) se sigue de (1) empleando $f(s) = s^{p-1}$ y $f^{-1}(s) = s^{q-1}$. □

La interpretación geométrica de este teorema se visualiza en la Figura 8.1.

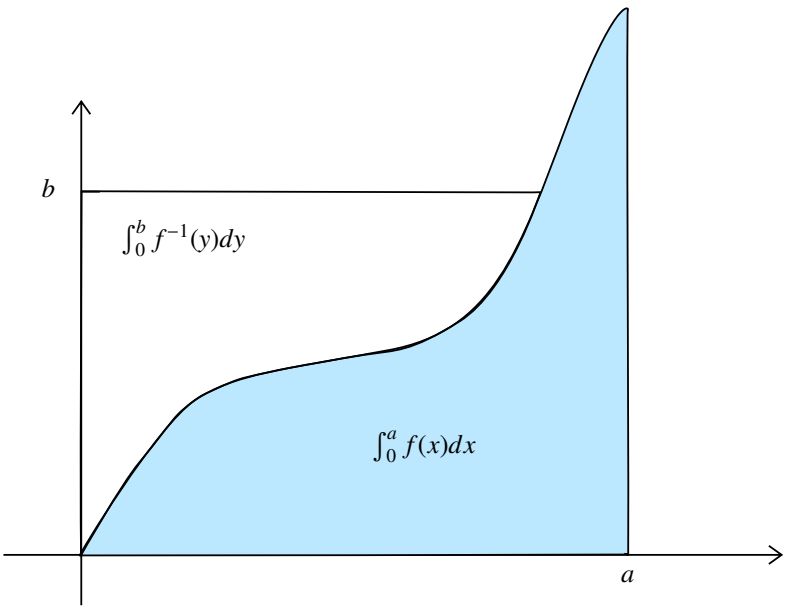

Figura 8.1: Interpretación geométrica de la desigualdad de Young.

Nota 8.6.1. La hipótesis $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se impone para asegurar que el dominio de f^{-1} sea de nuevo el intervalo $[0, +\infty)$. Si asumimos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ es finito o que $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ está definida en un intervalo finito, los resultados anteriores se mantienen, simplemente restringiendo a al dominio de f y b al dominio de f^{-1}.

Continuamos ahora con las desigualdades de Hölder dadas por el matemático alemán Otto Hölder (1859-1937), tanto en su versión discreta como continua.

Proposición 8.8 (Desigualdades de Hölder)**.** *Sean $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$.*

1. *Si $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{d} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{d} |y_j|^q \right)^{1/q}. \tag{8.12}$$

   De forma equivalente, $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$.

2. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables, entonces*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

   El caso $p = q = 2$ es la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales.

Demostración. Para (1) es suficiente demostrar la desigualdad para $\boldsymbol{x} \neq 0$ y $\boldsymbol{y} \neq 0$. Bajo esta hipótesis, aplicando la desigualdad de Young para $a = |x_k|/\|\boldsymbol{x}\|_p$ y $b = |y_k|/\|\boldsymbol{y}\|_q$, $k = 1, \ldots, d$ y sumando las d desigualdades obtenidas se llega al resultado.

Para (2) empleamos la misma idea. Asumiendo que $A = \int_a^b |f(t)^p| dt > 0$ y $B = \int_a^b |g(t)^q| dt > 0$, la desigualdad de Young muestra que

$$|f(t)g(t)|/AB \leq |f(t)|^p/A^p + |g(t)|^q/B^q.$$

Integrando sobre $[a, b]$ y simplificando se obtiene la desigualdad requerida. Si $A = 0$ o $B = 0$, la desigualdad se verifica trivialmente, ver Ejercicio 8.5.9. □

Nota 8.6.2. La desigualdad de Hölder permite dar otra demostración de la desigualdad de Minkowski, Proposición 2.2. Escribiendo

$$(|x_j| + |y_j|)^p = |x_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} + |y_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1},$$

y sumando sobre $j = 1, \ldots, d$ se obtiene

$$\sum_{j=1}^{d} (|x_j| + |y_j|)^p = \sum_{j=1}^{d} |x_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} + \sum_{j=1}^{d} |y_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1}.$$

Al aplicar (8.12) a cada suma de la derecha y simplificando se llega al resultado.

Ejemplo 8.6.1 (La función logaritmo)**.** El *logaritmo natural de* x se define por

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0. \tag{8.13}$$

Si $0 < x < 1$ se entiende que $\ln(x) = -\int_x^1 dt/t$ y por tanto $\ln(x) < 0$ en dicho intervalo. Por otra parte, $\ln(x) > 0$ si $x > 1$ y $\ln(1) = 0$. El primer Teorema Fundamental del Cálculo demuestra que $\ln(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Como $1/x \in C^\infty(0, +\infty)$ vemos que $\ln(x)$ es infinitas veces diferenciable allí. Además, como su derivada es positiva, la función es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Entre sus propiedades fundamentales destacamos que

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \text{para todo } x, y > 0. \tag{8.14}$$

Demostramos solo el caso $y > 1$ en (8.14), siendo los demás muy similares. Como $x < xy$, la propiedad se sigue de

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln(x) + \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln(x) + \ln(y),$$

donde en la última integral empleamos el cambio de variable $t = xs$.

Note que en particular,

$$\ln(1/x) = -\ln(x), \qquad x > 0.$$

La fórmula (8.14) demuestra que $\ln(x^n) = n\ln(x)$, para $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $x^n x^{-n} = 1$, tomando logaritmos vemos que $n\ln(x) + \ln(x^{-n}) = \ln(1) = 0$ y así $\ln(x^{-n}) = (-n)\ln(x)$. Además, para $p/q \in \mathbb{Q}$ tenemos que $q\ln(x^{p/q}) = \ln(x^p) = p\ln(x)$ y por tanto $\ln(x^{p/q}) = (p/q)\ln(x)$. Por tanto,

$$\ln(x^r) = r\ln(x),$$

para $x > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$. En particular, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ y $\ln(2^{-n}) = (-n)\ln(2)$. Esto demuestra que $\ln(x)$ no está acotada ni inferior ni superiormente en $(0, +\infty)$. Como ella es estrictamente creciente esto demuestra que $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva y

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Podemos establecer más límites de esta naturaleza. Por ejemplo, si $x > 1$ por el Teorema del valor medio para derivadas sabemos que $\ln(x) = \ln(x) - \ln(1) = (x-1)/\xi_x$ para cierto $1 < \xi_x < x$. Por tanto, $\ln(x) < x$ si $x \geq 1$. Ahora, dado $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$, si tomamos $0 < r_0 < r$ como $r_0\ln(x) = \ln(x^{r_0}) < x^{r_0}$, deducimos que $\ln(x)/x^r < 1/r_0 x^{r-r_0}$, y en particular

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0. \tag{8.15}$$

Ejemplo 8.6.2 (Funciones exponenciales)**.** Otra aplicación del logaritmo es dar una definición sistemática de a^x, para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Note que desde un punto de vista fundacional hasta el momento solo hemos definido este valor cuando $x = p/q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, vía el Teorema 1.5: $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$, donde $a^{1/q}$ existe gracias a dicho resultado.

Como $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva, posee una función inversa $E : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Así obtenemos que $E(0) = E(\ln(1)) = 1$ y la relación (8.14) se expresa como

$$E(x + y) = E(x)E(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{8.16}$$

En particular, $E(-x)E(x) = E(0) = 1$ y $E(-x) = 1/E(x)$. En particular, $E(n) = E(1)^n$ si $n \in \mathbb{Z}$. Además $E(p/q)^q = E(p) = E(1)^p$ si $p/q \in \mathbb{Q}$ y por tanto $E(p/q) = E(1)^{p/q}$. Esto indicaría que $E(x)$ puede dar sentido a la expresión $E(1)^x$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Como la derivada de $\ln(x)$ siempre es positiva los ejercicios 7.1.9 y 7.3.3 demuestran que E también es diferenciable y su derivada se calcula por la regla

$$E'(\ln(t)) \cdot \frac{1}{t} = 1, \qquad \text{es decir} \qquad E'(x) = E(x),$$

donde $x = \ln(t) \in \mathbb{R}$. Por supuesto, $E(x)$ no es otra que la función exponencial clásica e^x, introducida en el Ejemplo 5.4.5. Asumiendo que $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, podemos demostrar esto notando que $y(x) = E(x) - e^x$ satisface la ecuación diferencial

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 0.$$

Por tanto, $\frac{d}{dx}(E(-x)y) = -E'(-x)y(x) + E(-x)y'(x) = 0$, es decir $E(-x)y(x)$ es constante. Al evaluar en $x = 0$ concluimos que $y(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En conclusión

$$E(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

En particular, $E(1) = e$ y la ecuación (8.16) no es otra que (5.13). Por tanto, e^x cobra el sentido de elevar e a la potencia $x \in \mathbb{R}$. En general, si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se define

$$a^x := e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Al igual que antes, $a^{p/q}$ coincidirá con su definición a través del Teorema 1.5. Además $a^{x+y} = a^x a^y$ y $a^{-x} = 1/a^x$. Es inmediato comprobar que esta función es infinitas veces diferenciable y $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a)a^x$. Analizando el signo de la derivada, si $a > 1$, entonces a^x es creciente y si $0 < a < 1$ la función es decreciente. Finalmente, como la función es continua tenemos la siguiente regla de cálculo:

$$\text{si } x_n \to x, \qquad \text{entonces } a^{x_n} \to a^x \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Por supuesto también tenemos los límites $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ si $a > 1$. Para $0 < a < 1$ los valores de estos límites se intercambian. Finalmente, podemos extender el límite (8.15) de la siguiente manera: si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^b} = 0. \tag{8.17}$$

Los argumentos son similares al anterior ejemplo y se dejan al lector.

Ejemplo 8.6.3 (La constante de Euler-Mascheroni)**.** Consideremos la sucesión

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

que geométricamente representa la diferencia entre el área de rectángulos de base 1 y altura $1/j$, $j = 1, \ldots, n$ y el área bajo la curva $f(x) = 1/x$, ver la Figura 8.2.

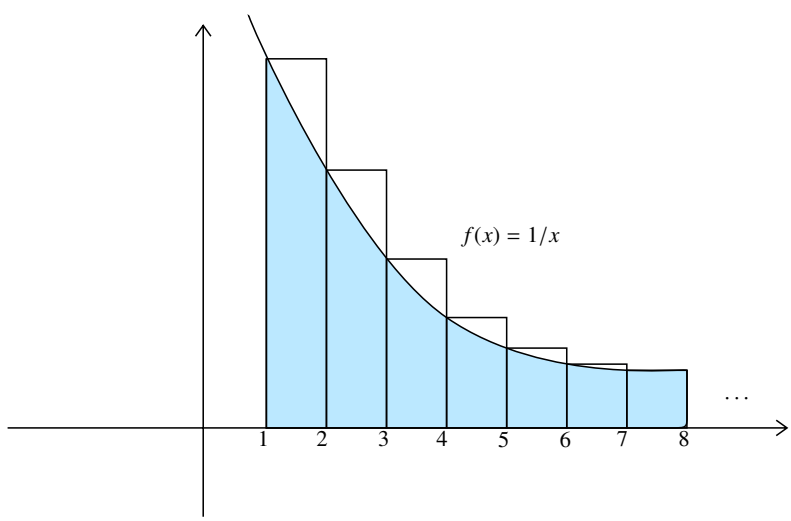

Figura 8.2: La constante de Euler-Mascheroni.

Empleando las propiedades del logaritmo podemos escribir la diferencia como

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Gracias a las desigualdades

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \qquad x > 0, \tag{8.18}$$

aplicadas en la forma $0 \leq x - \ln(1+x) \leq x^2/2$ al valor $x = \frac{1}{n+1}$, obtenemos que

$$0 \leq D_{n+1} - D_n \leq \frac{1}{2(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, la sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es creciente y por el criterio de comparación aplicado a la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}(D_{n+1} - D_n)$, ella converge. Su límite se conoce como la constante de *Euler-Mascheroni* y se denota por

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

La última igualdad se sigue de que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + 1/n) \to 0$ si $n \to +\infty$.

Su definición no permite aproximar de forma rápida su valor. De hecho, en [145] se demuestra que

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n},$$

es decir, la tasa de convergencia es proporcional a $1/n$. Para demostrar estas desigualdades argumentaremos de forma geométrica como en la referencia original. Sea R_n la región pseudotriangular acotada por $y = 1/x$ y la recta horizontal $y = 1/(n+1)$ desde $x = n$ hasta $x = n+1$. Por tanto,

$$\text{Área}(R_n) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}.$$

Observe ahora que $\sum_{k=n}^{n+j} R_k = D_n - D_{n+j+1}$ y por tanto, haciendo $j \to +\infty$,

$$D_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} \text{Área}(R_k).$$

Por una parte, gracias a la concavidad de la función $y = 1/x$, R_n está contenido en el triángulo Δ_n de la Figura 8.3. Así $\text{Área}(R_n) < \text{Área}(\Delta_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ y por tanto $D_n - \gamma < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1/(2n)$. Otra forma geométrica de interpretar esta desigualdad es desplazar horizontalmente todas las regiones R_k, $k > n$ a la región $n \leq x \leq n+1$.

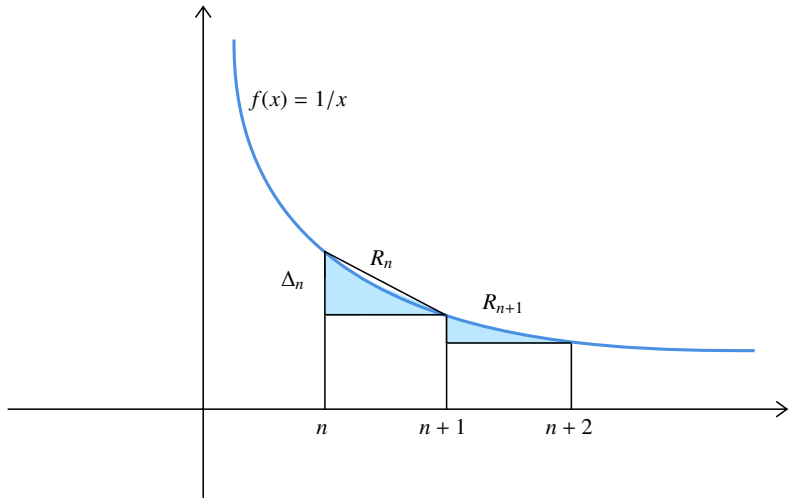

Figura 8.3: El triángulo Δ_n y la región R_n.

Para la desigualdad restante, acotamos inferiormente el área de R_n por la del triángulo τ_n que conecta los puntos $(n+1, \frac{1}{n+1})$ y $(n+2, \frac{1}{n+2})$ y con base sobre $n+1 \leq x \leq n+2$. Se sigue que

$$\text{Área}(R_n) > \text{Área}(\tau_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right),$$

desplazando τ_n a lo largo de su diagonal hasta situarlo con base sobre $n \leq x \leq n+1$ como en la Figura 8.4. De nuevo, sumando estos valores llegamos al resultado deseado. Para otro ejemplo de análisis geométrico de otras sucesiones que convergen a γ, ver [43].

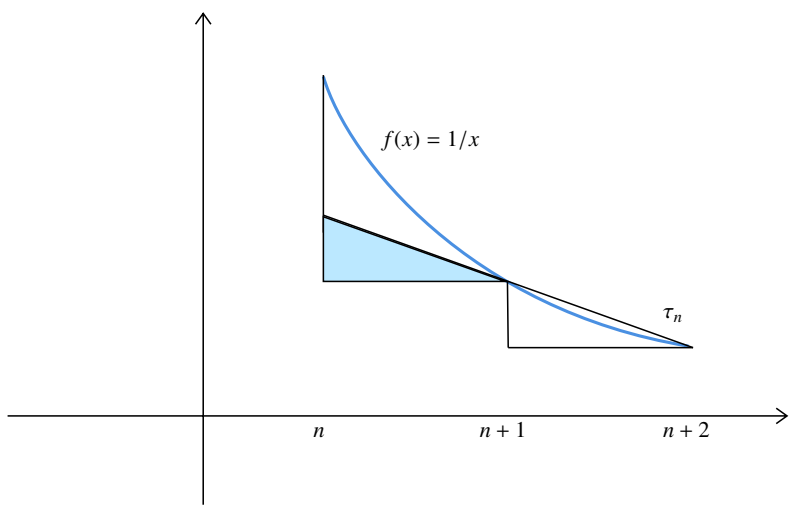

Figura 8.4: El triángulo τ_n.

Ejemplo 8.6.4. [79] Partiendo de la identidad

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^k = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

si integramos de 0 a 1 y luego tomamos $n \to +\infty$ obtendremos que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

En efecto, note que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \to 0$ si $n \to +\infty$. De la misma forma, de la igualdad

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2k} = \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2},$$

se obtiene que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

El valor de la integral será justificado en la siguiente sección, Ejercicio 8.7.4

La última aplicación que incluimos en esta sección es la demostración de la fórmula de Stirling dada en el Ejemplo 4.2.5.

Ejemplo 8.6.5 (La fórmula de Stirling y las integrales de Wallis)**.** Considere la sucesión $u_n := \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$, cuyas diferencias vienen dadas por

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Esta diferencia es comparable con $1/n^2$ porque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{x^3} = -\frac{1}{12},$$

donde aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces para llegar al resultado. Por el criterio de paso al límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ converge absolutamente y por tanto $\lim_{n\to+\infty} u_n = c$ existe. Si ponemos $C = e^c$, podemos escribir

$$C = e^c = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2u_n}}{e^{u_{2n}}} = \sqrt{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}.$$

Para determinar el valor de este límite empleamos las *integrales de Wallis*

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.19}$$

Note que $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ y aplicando integración por partes,

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos(x)^n \sin(x)^2 dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

Por tanto,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \text{ y } I_{2n} = \frac{(2n-1)\cdots 1}{(2n)\cdots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{((2n)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} 4^{-n}\binom{2n}{n}. \tag{8.20}$$

La recurrencia también implica que $(n+1)I_n I_{n+1}$ es independiente de n y así

$$(n+1)I_n I_{n+1} = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Por otra parte, si $x \in [0, \pi/2]$, $\cos(x)^{n+1} \leq \cos(x)^n$ y entonces $I_{n+1} \leq I_n$. Combinando estas desigualdades con la recurrencia anterior obtenemos

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1, \qquad \text{y así } \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Este límite demuestra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\frac{I_n}{I_{n+1}}(n+1)I_n I_{n+1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{8.21}$$

Finalmente, tomando el límite de la subsucesión $\sqrt{2n} I_{2n}$ y simplificando obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{8.22}$$

Esto demuestra que $C = \sqrt{2\pi}$. En conclusión,

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} = e^{u_n} \to e^c = C = \sqrt{2\pi}, \qquad \text{si } n \to +\infty,$$

que es precisamente la fórmula de Stirling.

Ejercicios

8.6.1 El objetivo de este ejercicio es demostrar que si $1 \leq r < r'$, entonces

$$\|\boldsymbol{x}\|_{r'} \leq \|\boldsymbol{x}\|_r \leq d^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}\|\boldsymbol{x}\|_{r'}, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{8.23}$$

a) Para la primera desigualdad, basta suponer que $\boldsymbol{x} \neq 0$. Tome $y_k = |x_k|/\|\boldsymbol{x}\|_{r'}$. Entonces $y_k \leq 1$ y por tanto $y_k^{r'} \leq y_k^r$. Sume estas desigualdades para concluir que $\|\boldsymbol{x}\|_{r'} \leq \|\boldsymbol{x}\|_r$.

b) Demuestre la segunda desigualdad en (8.23) aplicando (8.12) para los valores $|x_j|^r$, $|y_j| = 1$ y $p = r'/r$.

c) Plantear y demostrar desigualdades semejantes para una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

8.6.2 Demostrar las desigualdades en (8.18). Deducir que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Además aplicar este límite para deducir directamente que

$$E(1) = \lim_{x\to 0} E\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

8.6.3 [51] Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión estrictamente creciente de números positivos tal que $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}} = e.$$

Note que esto generaliza el Teorema 5.4 sobre el número e tomando $a_n = n$. Indicación: aplicar el Teorema del valor medio para acotar

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} < \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) < \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}.$$

8.6.4 Emplear el mismo razonamiento que en el Ejemplo 8.6.4 para demostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\lambda k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}$, con $\lambda > 0$. En particular,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{pk+q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt, \qquad \text{para enteros } p, q > 0.$$

Nota 8.6.3. Estas integrales se pueden expresar en términos de la función digamma ψ, Ejemplo 9.2.2 gracias al Ejercicio 11.3.5 del Proyecto 11.3. Para valores racionales de λ, se pueden calcular explícitamente gracias a la Proposición 13.7 del Proyecto 13.1.

8.6.5 *a*) [24] Emplear la integral $\int_0^1 (1-t)t^{b-1}dt = \frac{1}{b(b+1)}$ con $b > 0$ para escribir

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(\alpha+2j)(\alpha+2j+1)} = \int_0^1 (1-t)t^{\alpha-1}(1+t^2+\cdots+t^{2n})dt$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t^{2n+2})}{1+t}dt.$$

Hacer $n \to +\infty$ y justifica por qué se sigue que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+2j)(\alpha+2j+1)} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt, \quad \alpha > 0.$$

Tomar $\alpha = 1$ y $\alpha = 1/2$ para concluir que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots = \ln(2),$$
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \cdots = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-1/2}}{1+t}dt = \frac{1}{2}\arctan(t^{1/2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

b) Usar que $\frac{1}{2!}\int_0^1 (1-t)^2 t^{b-1}dt = \frac{1}{b(b+1)(b+2)}$ con $b > 0$ para demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+3n)(\alpha+3n+1)(\alpha+3n+2)} = \frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{(1-t)t^{\alpha-1}}{1+t+t^2}dt, \quad \alpha > 0.$$

c) ¿Cómo se generalizan estas fórmulas para la serie de recíprocos con k factores consecutivos?

8.6.6 Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que $f(0) = 0$. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \le \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

8.6.7 Decimos que una curva $\gamma = (f_1, \ldots, f_d) : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ es integrable en $[a,b]$ si cada f_j lo es allí. En este caso se define la integral de γ sobre $[a,b]$ por componentes como $\int_a^b \gamma(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \ldots, \int_a^b f_d(t)dt\right)$. Empleando la desigualdad de Hölder para sumas, demostrar que

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\|_p \le \int_a^b \|\gamma(t)\|_p\, dt, \quad \text{si } p > 1.$$

Los casos $p = 1$ y $p = +\infty$ son inmediatos.

8.6.8 Emplear la constante de Euler-Mascheroni γ para comprobar los límites

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln(2) + \frac{\gamma}{2},$$
$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \ln(2).$$

8.6.9 [22] Comprobar que las desigualdades del Ejercicio 5.3.3 equivalen a

$$\frac{e^{1/n}}{(n+1)/n} < e^{1/n(n+1)} \quad \text{y} \quad 1 < \frac{e^{1/n}}{(n+1)/n}.$$

Si $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n) = \ln\left(\frac{e^1}{2/1}\frac{e^2}{3/2}\cdots\frac{e^{1/n-1}}{n/n-1}\right)$, muestre que

$$0 < \gamma_n < \gamma_{n+1} < \ln(e^{1/1\cdot 2}\cdot e^{1/2\cdot 3}\cdots e^{1/n(n+1)}) = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Esto demuestra de forma alternativa que $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\gamma_n$ existe.

8.6.10 Demostrar que las integrales de Wallis verifican las siguientes identidades:

(a) $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin(x)^n dx$, (b) $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$.

8.6.11 [40] (Otra demostración de $\zeta(2) = \pi^2/6$) Considere las integrales $A_n = I_{2n}$ y

$$B_n = \int_0^{\pi/2} t^2\cos(t)^{2n}dt.$$

a) Integrar por partes dos veces en A_n para introducir el factor x^2 y demostrar que $A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2B_n$.

b) Dividir por n^2A_n la igualdad anterior y emplear (8.20) para obtener que

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{2B_n}{A_n}.$$

c) Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2B_n}{A_n}.$$

d) Emplear la desigualdad de Jordan (5.20) para acotar

$$B_n \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi/2}\sin(t)^2\cos(t)^{2n}dt = \frac{\pi^2}{4}\frac{A_n}{2(n+1)}.$$

Hacer $n \to +\infty$ en (c) para concluir que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

8.6.12 (∗) Completar el siguiente argumento para demostrar que

$$\sum_{p\le y} 1/p \ge \ln(\ln y) - 1, \quad y \ge 2,$$

donde la suma se extiende sobre todos los números primos $p \le y$. En particular, la serie armónica de los primos $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p$ diverge.

(a) Mostrar que $e^{x+x^2} \ge (1-x)^{-1}$, para $0 \le x \le 1/2$.

(b) Fije $y \ge 2$, y sea $\mathcal{N}_y = \{n \in \mathbb{N} : n$ está compuesto solo de primos $p \le y\}$. Entonces

$$\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p\le y}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) = \sum_{n\in\mathcal{N}_y} \frac{1}{n}.$$

(c) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\lfloor y\rfloor} \frac{1}{n} \ge \int_1^{\lfloor y\rfloor+1} \frac{dt}{t} = \ln(\lfloor y\rfloor+1) > \ln y$. Como $\{1, 2, \ldots, \lfloor y\rfloor\} \subseteq \mathcal{N}_y$, concluir que

$$\prod_{p\le y} \frac{1}{1-p^{-1}} > \ln y.$$

(d) Tome $x = 1/p$ en (a) y aplique el logaritmo a ambos lados de la desigualdad anterior para concluir que

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p} + \sum_{p\le y} \frac{1}{p^2} > \ln(\ln y),$$

Como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{p\le y} \frac{1}{p^2}$, se sigue el resultado.

Nota 8.6.4. Más aun, el Teorema de Mertens asegura que

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{p\le n} 1/p - \ln(\ln n) = \gamma + \sum_{p\in\mathcal{P}} \Big(1/p + \ln\left(1 - 1/p\right)\Big)$$

converge. Este valor $M \approx 0.261497212847$ se conoce como la constante de *Meissel–Mertens*. El lector puede consultar [62, p. 466] para la demostración.

8.7. Integrales impropias

En esta sección estudiaremos una forma natural de extender la integral de Riemann al caso funciones o intervalos no acotados. La idea básica es calcular límites de integrales usuales cuando la variable se aproxima al punto singular. Además veremos algunos criterios para convergencia, análogos al caso de series numéricas.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Diremos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* en I si es integrable sobre cada intervalo cerrado $[c, d] \subseteq I$.

Durante esta sección nos enfocaremos en intervalos de la forma $[a, b)$ con $a < b$ y $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Entonces que f sea localmente integrable allí significa que lo es sobre cada $[a, x]$, para todo $x \in (a, b)$. Para otros intervalos se trabaja de forma similar.

Definición 8.7. Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, decimos que f es *integrable en el sentido impropio* en $[a, b)$ si

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt \text{ existe y es finito.}$$

El valor de este límite se conoce como la *integral impropia de f sobre* $[a, b)$. Es común denotar este valor por el mismo símbolo que antes, $\int_a^b f(t)dt$. Note que por definición, si $\int_a^b f(t)dt$ existe, entonces

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)dt = 0.$$

En el caso de intervalos de la forma $(a, b]$ con $a < b$ y $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la definición anterior se modifica para requerir la existencia del límite

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

Para el caso $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ basta pedir la existencia de $c \in (a, b)$ tal que f sea integrable en el sentido impropio en $(a, c]$ y $[c, b)$ y se define $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. Es inmediato comprobar que este valor no depende del punto c elegido. Así por ejemplo una integral sobre $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ se entiende como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{y \to -\infty} \int_0^y f(t)dt,$$

como dos límites separados. Finalmente, si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ está definida salvo quizás en un número finito de puntos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ y asumimos que f es localmente integrable en cada intervalo (a_{j-1}, a_j), decimos que f es integrable en el sentido impropios sobre (a, b) si lo es en cada uno de dichos subintervalos. En este caso se define $\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(t)dt$.

Antes de continuar veamos que para el caso de funciones acotadas definidas sobre intervalos acotados, la definición anterior coincide con la integral usual.

Proposición 8.9. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ acotada y localmente integrable. Entonces f es integrable en el sentido impropio allí. Además, si se extiende f a $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiendo $\tilde{f}(b) \in \mathbb{R}$ arbitrariamente, entonces $\tilde{f}$ es integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\int_a^b \tilde{f}(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Demostración. Sea $M > 0$ con $|\tilde{f}(t)| \leq M$ para $t \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$ elija $c \in (a, b)$ con $M(b - c) < \epsilon/4$. Como f es integrable en $[a, c]$, existe una partición P de este intervalo tal que $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon/2$. Entonces $Q = P \cup \{b\}$ es una partición de $[a, b]$ tal que

$$S(Q, \tilde{f}) - s(Q, \tilde{f}) \leq 2M(b - c) + S(P, f) - s(P, f) + (b - c) < \epsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, $\tilde{f}$ es integrable en $[a, b]$. Finalmente, si $x \in (a, b)$ entonces

$$\left| \int_a^b \tilde{f}(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^b \tilde{f}(t)dt \right| \leq M(b - x) \to 0 \quad \text{si } x \to b^-,$$

como se requería. □

Destacamos las siguientes propiedades básicas de integración que se extienden de manera inmediata para integrales impropias. Las enunciamos para el intervalo $[a, b)$, siendo las modificaciones para el caso $(a, b]$ evidentes.

Proposición 8.10. *Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ funciones.*

1. *(Linealidad) Si f, g son integrables en el sentido impropio, también lo es $\alpha f + \beta g$ y*
$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Si $F'(t) = f(t)$ para $t \in [a, b)$, entonces f es integrable en el sentido impropio allí si y solo si $\lim_{x \to b^-} F(t)$ existe. En este caso*
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t \to b^-} F(t) - F(a).$$
3. *(Integración por partes) Sean f, g diferenciables en $[a, b)$ con derivada localmente integrable allí. Asuma que $\lim_{x \to b^-} f(t)g(t)$ existe. Entonces $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ converge si y solo si $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge y se tiene la relación*
$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{t \to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

La regla de cambio de variable también es válida para integrales impropias. Dejamos los detalles al lector.

Nota 8.7.1. Un caso particular del teorema anterior para antiderivadas es cuando $F : [a, +\infty)$ es diferenciable y $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$. Entonces tenemos que

$$F(t) = -\int_t^{+\infty} F'(s)ds, \qquad x > a.$$

Una fórmula análoga se verifica para funciones definidas en intervalos de la forma $(-\infty, b]$.

Para el caso de funciones no-negativas tenemos criterios de convergencia y análogos al caso de series numéricas de términos no-negativos.

Proposición 8.11. *Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrables.*

1. *Si $f(x) \geq 0$, para todo x, entonces f es integrable en el sentido impropio en $[a, b)$ si y solo si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es acotada en $[a, b)$.*

2. *(Criterio de comparación) Si existe $c \in (a, b)$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para $x \in (c, b)$ y si $\int_a^b g(t)dt$ converge, entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge.*

3. *(Paso al límite) Asuma que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para $x \in (c, b)$. Si $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x) = L > 0$, $\int_a^b g(t)dt$ converge si y solo si $\int_a^b f(t)dt$ converge.*

Demostración. Para (1) observe que F es monótona creciente. Por tanto, el resultado es consecuencia del Teorema 6.8. Para (2) como $\int_c^x f(t) \leq G(t) = \int_c^x g(t)dt$ para $x \in (c, b)$, si $\int_a^b g(t)dt$ converge, (1) muestra que $G(t)$ es acotada, de donde se deduce la convergencia de $\int_c^b f(t)$ y por tanto de $\int_a^b f(t)$. (3) es consecuencia de (2) de la misma forma que el Corolario 5.1 es consecuencia del criterio de comparación para series. □

Continuando con funciones no-negativas, tenemos la siguiente propiedad que establece la posibilidad de estudiar la convergencia de una integral impropia a través de series.

Proposición 8.12. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ no negativa y localmente integrable. La integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ en $[a, b)$ creciente con $x_n \to b$ tal que la serie numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt \text{ converge.}$$

En este caso, si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión en $[a, b)$ creciente con $y_n \to b$ se verifica que

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{y_1} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(t)dt.$$

Demostración. Por la proposición anterior, f es integrable en el sentido impropio en $[a, b)$ si y solo si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es acotada allí. Como F es monónota creciente, ella será acotada si y solo si $\lim_{N\to+\infty} F(x_N)$ existe y es finito, para alguna sucesión $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}^+}$ como en el enunciado. El resultado se sigue de notar que

$$\int_a^{x_1} f(t)dt + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt = F(x_N).$$

□

Finalmente, discutimos brevemente el caso de convergencia absoluta de integrales. Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es localmente integrable allí, también lo será $|f|$. Decimos que f es *absolutamente integrable* (en el sentido impropio) en $[a, b)$ si la integral $\int_a^b |f(t)|dt$ converge. Para mostrar que la convergencia absoluta implica convergencia haremos uso del siguiente criterio de Cauchy.

Lema 8.5. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable. Entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $c \in (a, b)$ tal que para todos $c < x < y$ se verifica que $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \epsilon$.*

Demostración. En términos de la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, la condición dada nos dice que para todo $\epsilon > 0$ existe $c = b - \delta \in (a, b)$ tal que $|F(y) - F(x)| < \epsilon$ para todo $x, y \in (b - \delta, b)$. Para el caso $b \in \mathbb{R}$ reconocemos esta condición como un caso particular de la dada en la Proposición 6.3 sobre existencia de límites de aplicaciones con valores en espacios completos. De allí se sigue el resultado. Para el caso $b = +\infty$ se aplican las mismas ideas que en la dicha proposición. □

Proposición 8.13. *Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable (en el sentido impropio) en $[a, b)$, entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge y además*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Demostración. Si $\int_a^b |f(t)|dt$ existe, se verifica que

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt, \qquad \text{para todo } a \leq x < y < b.$$

Por tanto, la condición de Cauchy es válida para f y $\int_a^b f(t)dt$ converge. Finalmente, por la Proposición 8.5 sabemos que $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, para todo $x \in [a, b)$. La desigualdad se sigue al hacer $x \to b^-$. □

Concluimos esta sección con varios ejemplos de integrales clásicas, incluyendo la función arcotangente y la integral de Dirichlet.

Ejemplo 8.7.1. Considere la función $f(x) = 1/x^\alpha$, con $\alpha \neq 1$ y $x > 0$. Entonces

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Para $\alpha = 1$ ambas integrales divergen porque $\int_0^1 dt/t = \ln(t)|_0^1 = \ln(1) - \lim_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$ y $\int_1^{+\infty} dt/t = \lim_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$.

Ejemplo 8.7.2 (La función arcotangente)**.** Esta función corresponde a la inversa de la función tangente. Sin embargo, partiremos de la definición a través de integrales dada por

$$\arctan(x) := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2},$$

para $x > 0$ y $\arctan(-x) = -\arctan(x)$. Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo, esta función es diferenciable y su derivada viene dada por $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = 1/(1+x^2)$. Al ser positiva vemos que la función es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$. Empleando la desigualdad $1/(1+t^2) < 1/t^2$, el criterio de comparación muestra que la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge. En particular, el límite

$$\frac{\pi}{2} := \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

existe y es una definición concreta de la constante π. Así $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$. Como la función es creciente, vemos que $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ establece una biyección entre estos dos conjuntos.

Ejemplo 8.7.3. La convergencia absoluta de una integral impropia no implica su convergencia. El ejemplo clásico es la *integral de Dirichlet*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Note que $f(t) = \sin(t)/t$ se extiende continuamente en $t = 0$ con valor $f(0) = 1$, y por tanto esta integral solo es impropia en infinito. Para mostrar que $\int_0^{+\infty} \left|\sin(x)/x\right| dx$ diverge, seguimos la Proposición 8.12 y analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$. Esta diverge porque

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

de donde se sigue el resultado.

Para demostrar que la integral inicial converge empleamos la misma idea escribiendo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+n\pi} dt,$$

donde se aplicó el cambio de variable $x = t + n\pi$ en cada sumando. Como $0 \leq b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+n\pi} dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = 2/(n\pi) \to 0$ si $n \to +\infty$, y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, la convergencia de la serie se sigue del criterio de Leibniz y la convergencia de la integral de la Proposición 8.12.

Otra manera de analizar la integral es integrar por partes sobre $[1, +\infty)$ para obtener

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Por tanto, la primera integral tiene el mismo carácter que $\int_1^{+\infty} \cos(x)/x^2 dx$. Esta converge absolutamente gracias al criterio de comparación porque $|\cos(x)/x^2| \leq 1/x^2$ y $\int_1^{+\infty} dx/x^2$ converge.

Finalmente, es posible calcular el valor de esta integral a través del lema de Riemann-Lebesgue, [82]. Primero, recordando la identidad trigonométrica

$$\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\theta/2)},$$

ver la ecuación (13.8) en el Proyecto 13.1, al integrar de 0 a π se obtiene que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\theta/2)} d\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{8.24}$$

Consideremos ahora la función

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\sin(\theta/2)} = \frac{2\sin(\theta/2) - \theta}{2\theta\sin(\theta/2)}, \quad 0 < \theta \leq \pi.$$

Ella se puede extender de manera continua en el origen poniendo $\phi(0) = 0$. En efecto, $\lim_{\theta\to 0} \phi(\theta) = 0$, como lo muestra la regla de L'Hôpital aplicada dos veces. Por el Teorema 8.11 obtenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \phi(\theta)\sin((n+1/2)\theta) d\theta = 0.$$

Así (8.24) muestra que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Empleando el cambio de variable $x = (n+\frac{1}{2})\theta$ obtenemos el valor

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 8.7.4 (Media aritmético-geométrica)**.** [96] Para $0 < b \leq a$ consideramos la integral

$$L(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}.$$

Como tenemos las acotaciones $1/(x^2+a^2) \leq 1/\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \leq 1/(x^2+b^2)$, se sigue la convergencia de esta integral. Empleando el cambio de variable

$$2t = x - \frac{ab}{x},$$

obtenemos las relaciones

$$dt = \frac{x^2+ab}{2x^2}dx, \quad t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}, \quad t^2+ab = \frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}.$$

Luego de un cálculo directo, llegamos a la igualdad

$$L(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+((a+b)/2)^2\right)(t^2+ab)}} = L(T(a,b)),$$

donde $T(a,b) := \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$. Por tanto la función L es invariante por T.

El Ejercicio 4.2.11 demostró que la *media aritmetico-geométrica entre a y b* definida por $M = M(a,b) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ existe, donde $(a_n, b_n) = T^{\circ n}(a,b)$ (la composición de T consigo misma n veces). Empleando este límite concluimos que

$$L(a,b) = \lim_{n\to+\infty} L(a_n,b_n) = L(M,M) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+M^2} = \frac{\pi}{M(a,b)}.$$

Esta representación integral es debida a Gauss. Este argumento de invarianza de L por T se debe a D. J. Newman (1985).

Ejercicios

8.7.1 Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias con parámetros $p, \alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t-t^4}$.

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{1-\cos(t)}$.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^p}dt$.

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(1/x)^p dt$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2}dx$.

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}dx$, $\alpha > 0$.

g) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\ln(1-x)dx$.

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin(x^4)dx$.

8.7.2 Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua e integrable en el sentido impropio allí. Demostrar que el primer Teorema Fundamental del Cálculo se sigue verificando, es decir

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \qquad x \in [a,b).$$

Casos particulares de esta relación son

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^x f(t)dt\right) = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_x^{+\infty} f(t)dt\right) = -f(x),$$

para f definida en el intervalo correspondiente.

8.7.3 [11] Considere las series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ de la Nota 5.2.2. Emplee la Figura 8.5 para interpretar a A_n y D_n como áreas. Concluya de los valores $\int_0^{r_1} dx/\sqrt{x} = 2\sqrt{r_1}$ y $\int_{s_1}^{+\infty} dx/x = +\infty$ la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ y divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$.

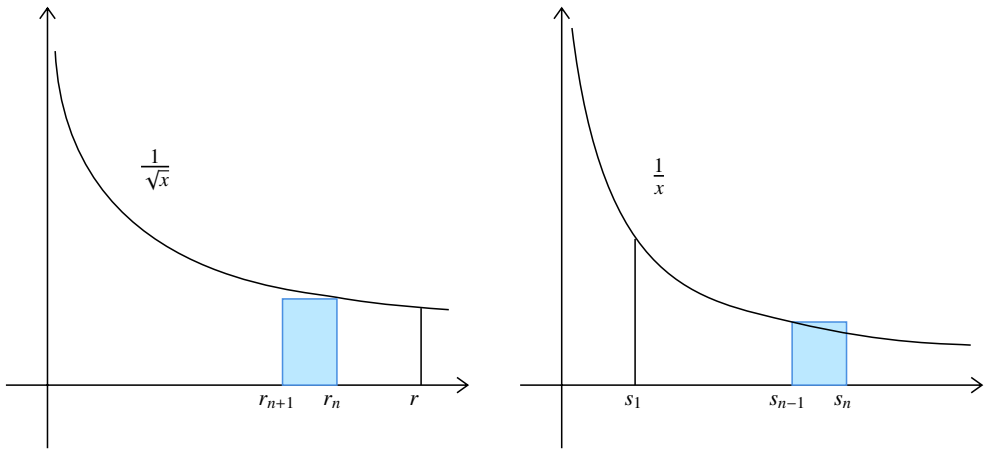

Figura 8.5: Áreas bajo las curvas de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ y $\frac{1}{x}$.

8.7.4 Comprobar que

$$\arctan(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

mediante el cambio $t = 1/x$. Emplee la misma idea para mostrar que

$$\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \qquad x > 0.$$

Por otra parte, demostrar que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad x > -1. \tag{8.25}$$

¿Qué valor constante se obtiene cuando $x < -1$? Para una justificación trigonométrica de (8.25), ver [104].

8.7.5 Emplear $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(x^{4k} + x^{4k+2})$ como en el Ejemplo 8.6.4 para comprobar que

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} + \frac{(-1)^k}{4k+3} = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

Puede calcular esta integral mediante fracciones parciales o a través del cambio de variable $s = x - x^{-1}$ para obtener

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(s/\sqrt{2})\Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

8.7.6 La función *arcoseno* se define a través de la integral

$$\arcsin(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad 0 \le x < 1.$$

Su interpretación geométrica se discute en el Ejemplo 14.2.7 del Proyecto 14.2. Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) En $x = 1$ la función está definida y existe como integral impropia. Además se extiende a $-1 \le x \le 0$ por la fórmula $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

b) $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ para $x > 0$. Indicación: $t = u/\sqrt{1-u^2}$.

c) $\arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(x)$, si $x > 0$.

d) Concluir que $\dfrac{\pi}{2} = \arcsin(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

8.7.7 Usar las integrales de Wallis para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \frac{\pi}{2^{2m+1}a^{2m+1}}\binom{2m}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, a > 0.$$

8.7.8 Emplear los cambios de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ y $x = \sqrt{n}\tan(t)$ para demostrar que las integrales de Wallis (8.19) se pueden escribir como

$$\sqrt{n}I_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx, \qquad \sqrt{n}I_{2n-2} = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

Luego, usar las desigualdades $1 - t \le e^{-t}$ si $t \in [0,1]$ y $e^{-t} \le (1+t)^{-1}$ si $t \ge 0$, para demostrar que

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \le \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \sqrt{n}I_{2n-2}.$$

Hacer $n \to +\infty$ y usar (8.21) para concluir de nuevo el valor (8.10).

8.7.9 Considere la integral $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$ que es impropia en $x = 0$. Demostrar que converge. Luego completar las indicaciones para hallar su valor:

a) Poner $x = \pi/2 - u$ para mostrar que $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx$.

b) Sustituir $u = \pi - v$ para mostrar que $J = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x))dx$. Así $2J = \int_0^{\pi} \ln(\sin(x))dx$.

c) Finalmente sustituir $x = 2z$ y usar la identidad $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ para concluir que $2J = 4J + \pi\ln(2)$ y por tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Este tipo de argumentos se pueden extender para la misma integral sobre el intervalo $[0, \pi/4]$. En este caso la integral se puede calcular empleando la constante de Catalan, ver [130].

8.7.10 Aplicar el cambio de variable $x = b\tan\theta$ a la integral $L(a, b)$ del Ejemplo 8.7.4 para demostrar que

$$\frac{\pi/2}{M(a,b)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

El argumento original de Gauss fue demostrar que esta integral era invariante por T. Estos cálculos fueron luego detallados por Jacobi, ver [37, Theorem 1].

8.7.11 (∗) (Las integrales de Fresnel) Los valores

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du, \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$$

se conocen como las *integrales de Fresnel*. Demostrar que ambas convergen, pero no absolutamente. Completar el siguiente análisis basado en [136] para determinar su valor explícito:

a) Considere las funciones auxiliares

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t(x^2+1))}{x^2+1}dx, \qquad s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t(x^2+1))}{x^2+1}dx.$$

Entonces $c(t) = \cos(t)g(t) - \sin(t)f(t)$, $s(t) = \sin(t)g(t) + \cos(t)f(t)$, donde

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx^2)}{x^2+1}dx, \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx^2)}{x^2+1}dx.$$

Mostrar que estas funciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Escribir $f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{(u+1)}\frac{du}{\sqrt{u}}$ y luego como una serie alternante adecuada para demostrar que

$$0 \le f(t) \le \int_0^{\pi/t} \frac{\sin(tu)}{(u+1)}\frac{du}{\sqrt{u}} < \int_0^{\pi/t} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\pi/t} \to 0 \text{ si } t \to +\infty.$$

Aplicar un razonamiento similar para ver que $g(t) \to 0$ si $t \to +\infty$, y por tanto lo mismo es válido para $c(t)$ y $s(t)$. Indicación: recordar el criterio de Leibniz, Ejercicio 5.5.3.

c) Como $f(t+h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\sin(tx^2)}{x^2+r^2}dx$ con $r = \sqrt{(t+h)/t}$, $t > 0$ y h pequeño, es posible escribir

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{1}{rt+t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-r)\sin(tx^2)}{(x^2+1)(x^2+r^2)}dx.$$

Haciendo $h \to 0$ encontramos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-1)\sin(tx^2)}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\sin(tx^2))'}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(tx^2)}{x^2+1}dx. \end{aligned}$$

Por tanto, f es diferenciable para $t > 0$ y su derivada se halla derivando bajo el signo integral. Realizar un razonamiento similar para hallar $g'(t)$.

d) Mostrar que $f'(t) = \frac{C}{\sqrt{t}} - g(t)$, $g'(t) = \frac{S}{\sqrt{t}} + f(t)$. Luego hallar $c'(t)$ y $s'(t)$ para justificar, vía la Nota 8.7.1, que

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_t^{+\infty} (C\sin(u) + S\cos(u))\frac{du}{\sqrt{u}}, \\ s(t) &= \int_t^{+\infty} (-C\cos(u) + S\sin(u))\frac{du}{\sqrt{u}}. \end{aligned}$$

Hacer $t \to 0^+$ para mostrar que $c(0) = 2CS$ y $s(0) = -C^2 + S^2$. Como por (a) $c(0) = \pi/2$ y $s(0) = 0$, se concluye que

$$C = S = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Capítulo 9

Sucesiones y series de funciones

El objetivo de este capítulo es estudiar la noción de convergencia en espacios de funciones acotadas y más precisamente, convergencia uniforme. En el caso real estudiaremos su comportamiento respecto a continuidad, diferenciación e integración. También veremos dos aplicaciones importantes. Primero, el M-test de Weierstrass para determinar la continuidad de funciones definidas a través de series. Esta herramienta permite por ejemplo establecer la continuidad y diferenciabilidad de las series de potencias y de la función zeta de Riemann. Segundo, el Teorema de aproximación de Weierstrass sobre la posibilidad de aproximar funciones continuas definidas en un intervalo $[a, b]$ a través de polinomios. Por otra parte, se estudiará la extensión de la regla de Leibniz para derivar funciones definidas por integrales impropias. Finalmente, el capítulo concluye con ejemplos de funciones que exhiben propiedades inusuales, por ejemplo, funciones continuas que no son diferenciables en ningún punto y funciones diferenciables cuya derivada no es integrable.

9.1. Convergencia uniforme

El objetivo de esta sección es estudiar las nociones de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones. Para este fin introduciremos el espacio normado de funciones acotadas sobre un conjunto y sus principales propiedades. Bajo esta óptica presentamos varios ejemplos que indican el comportamiento patológico que pueden presentar los límites de sucesiones de funciones reales respecto a continuidad, diferenciablidad e integrabilidad.

Dado un conjunto no vacío $Y \neq \emptyset$, consideramos el espacio

$$C_b(Y) := \{f : Y \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada en } Y\}$$

de *funciones acotadas* definidas sobre Y y con valores reales. En otras palabras $f \in C_b(Y)$ si y solo si

$$\|f\|_Y := \sup_{y \in Y} |f(y)| \quad \text{es finito.} \tag{9.1}$$

La pareja $(C_b(Y), \|\cdot\|_Y)$ es de hecho un espacio vectorial normado. Las operaciones de espacio vectorial están dadas por componentes, es decir,

$$(f+g)(y) = f(y) + g(y), \quad (\alpha \cdot f)(y) = \alpha \cdot f(y), \qquad f, g \in C_b(Y), \alpha \in \mathbb{R}, y \in Y.$$

Por otra parte, la fórmula (9.1) define una norma. Es inmediato verificar que esta es positiva y homogénea. Para comprobar la desigualdad triangular note que

$$|(f+g)(y)| = |f(y) + g(y)| \leq |f(y)| + |g(y)| \leq \|f\|_Y + \|g\|_Y, \qquad \text{para todo } y \in Y.$$

Por la definición de supremo concluimos que

$$\|f+g\|_Y \leq \|f\|_Y + \|g\|_Y,$$

como se quería mostrar. Más aún, tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 9.1. $(C_b(Y), \|\cdot\|_Y)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$, entonces $\|f_n - f_m\|_Y < \epsilon/2$. En particular, si $y \in Y$, entonces

$$|f_n(y) - f_m(y)| < \epsilon/2. \tag{9.2}$$

Por tanto, $\{f_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como la recta real es completa, entonces

$$f(y) := \lim_{n\to+\infty} f_n(y) \quad \text{existe para cada } y \in Y.$$

Veamos que $f \in C_b(Y)$ y que $f_n \to f$ en este espacio. Primero, fijando n y haciendo $m \to +\infty$ en (9.2) obtenemos

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon/2, \quad \text{para todo } y \in Y, n \geq N.$$

Tomando el supremo concluimos que $\|f_n - f\|_Y \leq \epsilon/2 < \epsilon$ y por tanto $\|f_n - f\|_Y \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Finalmente,

$$|f(y)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y)| \leq \epsilon/2 + \|f_n\|_Y, \quad \text{para todo } y \in Y \text{ y } n \geq N.$$

En particular, $\|f\|_Y$ es finito como se requería. □

Con estas herramientas podemos introducir las siguientes definiciones.

Definición 9.1 (Convergencia puntual)**.** Una sucesión de funciones $f_n : Y \to \mathbb{R}$ *converge puntualmente sobre* Y si para cada $y \in Y$ la sucesión de números reales $\{f_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En este caso podemos definir una nueva función $f : Y \to \mathbb{R}$ por la regla

$$f(y) := \lim_{n\to+\infty} f_n(y).$$

Definición 9.2 (Convergencia uniforme)**.** Una sucesión de funciones $f_n : Y \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente a una función* $f : Y \to \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(y) - f(y)| < \epsilon, \qquad \text{para todo } y \in Y. \tag{9.3}$$

Denotaremos esta situación por $f_n \to f$ unif. en Y.

La diferencia entre estas definiciones es el orden de los cuantificadores. En el caso de convergencia puntual requerimos que para todo $\epsilon > 0$ y para todo $y \in Y$, exista $N = N(\epsilon, y) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(y) - f(y)| < \epsilon$, si $n \geq N$. Por el contrario, para convergencia uniforme, este N solo depende de ϵ. En particular, las funciones $f_n - f$ son acotadas sobre Y, es decir, $f_n - f \in C_b(Y)$. Además, tomando supremo respecto a $y \in Y$ en (9.3), concluimos que $\|f_n - f\|_Y \leq \epsilon$, si $n \geq N$. A partir de aquí es inmediato verificar que

$$f_n \to f \text{ unif. en } Y \quad \text{ si y solo si } \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_Y = 0.$$

Por tanto, que f_n converja uniformemente a f sobre Y no es otra que la convergencia usual en el espacio normado $(C_b(Y), \|\cdot\|_Y)$ de la sucesión $\{f_n - f\}_{n\in\mathbb{N}}$ a 0. Sin embargo, en general ni f_n ni f están en $C_b(Y)$, pero su diferencia sí, ver Ejemplo 9.1.5.

Otro criterio para establecer esta convergencia es el ya familiar criterio de Cauchy.

Proposición 9.2 (Cauchy)**.** *Sea* $f_n : Y \to \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones. Si para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_n(y) - f_m(y)| \leq \epsilon, \qquad \textit{para todo } m > n \geq N \textit{ e } y \in Y,$$

entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a alguna función* $f : Y \to \mathbb{R}$.

Demostración. La hipótesis equivale a que $f_n - f_m \in C_b(Y)$ y que $\|f_n - f_m\|_Y \leq \epsilon$, si $m > n \geq N$. La demostración es idéntica a la prueba de la Proposición 9.1. En efecto, esta condición implica que para todo $y \in Y$, $f(y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(y)$ existe como número real. Luego tomando $m \to +\infty$ vemos que $\|f_n - f\|_Y \leq \epsilon$ si $n \geq N$. □

Terminamos esta sección presentando varios ejemplos de sucesiones y su comportamiento respecto a continuidad, derivación e integración.

Ejemplo 9.1.1. La sucesión de funciones lineales $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x/n$, $n \in \mathbb{N}^+$, converge puntualmente a 0. Sin embargo, la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$ porque $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = +\infty$. Por otra parte, si restringimos la sucesión a un intervalo compacto $[-r, r]$, entonces

$$\|f_n\|_{[-r,r]} = r/n,$$

y así $f_n \to 0$ unif. en $[-r, r]$.

Ejemplo 9.1.2. Sea $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, con $x \in [0,1]$. Como la función $t \in [0,1] \mapsto t(1-t)$ alcanza un máximo en $t = 1/2$ con valor $1/4$ vemos que

$$\|f_n\|_{[0,1]} = (1/4)^n$$

y por tanto $f_n \to 0$ unif. en $[0,1]$.

Ejemplo 9.1.3. Considere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Recordando el Ejemplo 4.2.1 vemos que $f_n(x)$ converge a 0 si $0 < x < 1$, mientras que $f_n(1) = 1$. Por tanto

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1. & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La convergencia no es uniforme porque $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$. Este es un ejemplo de una sucesión de funciones continuas cuyo límite no es continuo.

Ejemplo 9.1.4. Definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, por $f_n(x) = n^k x(1-x^2)^n$, con $k \geq 1$ fijo. De nuevo por la Proposición 4.4 (3), $f_n(x) \to 0$, para cada $x \in [0,1]$. Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{n^k}{2(n+1)} \to \begin{cases} 1/2, & \text{si } k = 1, \\ +\infty, & \text{si } k > 1, \end{cases} \qquad \text{mientras que } \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = 0.$$

Concluimos que en general no es posible intercambiar el límite con la integral. El problema aquí yace en que la convergencia no es uniforme. En efecto, analizando $f_n'(x) = n^k(1-x^2)^{n-1}(1-(2n+1)x^2)$ para $0 \leq x \leq 1$, vemos que ella alcanza un máximo en $x_n = 1/\sqrt{2n+1}$ y que

$$\left\|f_n\right\|_{[0,1]} = f_n(x_n) = \frac{n^k}{\sqrt{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \to (+\infty)(e^{-1/2}) = +\infty, \qquad \text{si } n \to +\infty$$

porque $k \geq 1$.

Ejemplo 9.1.5. Cada una de las funciones $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ es diferenciable en $\mathbb{R}$. Para determinar su convergencia, note que por la desigualdad (6.4) tenemos que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde $f(x) = |x|$. Como $f_n(0) = 1/\sqrt{n}$, concluimos que $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} = 1/\sqrt{n}$ y por tanto $f_n \to f$ unif. en $\mathbb{R}$. Pero f no es diferenciable en 0. Esto ilustra el hecho que el límite uniforme de funciones diferenciables no tiene por qué ser diferenciable.

Ejemplo 9.1.6. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Como $|\sin(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos que

$$\|f_n\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

y por tanto $f_n \to f \equiv 0$ unif. en $[0,1]$. Por otra parte, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ y en particular $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$, es decir, $f_n'(0) \not\to f'(0) = 0$ cuando $n \to +\infty$. Por tanto, incluso si las funciones f_n y su límite son diferenciables, no es posible concluir relación entre f_n' y f' sin requerir condiciones adicionales.

Ejercicios

9.1.1 Identificar al espacio $(C_b(Y), \|\cdot\|_Y)$ cuando Y es un conjunto finito.

9.1.2 Si $f, g \in C_b(Y)$, demostrar que $\|f \cdot g\|_Y \le \|f\|_Y \cdot \|g\|_Y$. Por tanto $f \cdot g \in C_b(Y)$.

9.1.3 Discutir la convergencia uniforme (sobre $[0,1]$ si no se dice lo contrario) de las siguientes sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = \left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2$.

b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$.

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{x+n+1}$.

d) $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$.

e) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$.

f) $f_n(x) = \dfrac{e^{1-x} - e^{1-nx}}{1-e^{1-n}}$.

g) $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^2 + x^2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

h) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, para $x \ge 0$.

9.1.4 Fije $r > 0$ y considere los subconjuntos de $C_b[-r,r]$ de funciones pares e impares, definidos por

$$\mathcal{P} = \{f \in C_b[-r,r] : f(-x) = f(x)\}, \quad \mathcal{I} = \{f \in C_b[-r,r] : f(-x) = -f(x)\},$$

respectivamente. Comprobar que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ son subespacios cerrados de $C_b[-r,r]$. Misma pregunta para $E = \{f \in C_b[-r,r] : f|_M = 0\}$, donde $M \subseteq [-r,r]$ es un subconjunto prefijado.

9.1.5 Sea $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Considere las sucesiones de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}, \qquad g_n(x) = \lim_{m\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2m}.$$

Mostrar que f_n y g_n convergen puntualmente a la misma función f. ¿La convergencia es uniforme? Estos son ejemplos de sucesiones cuyo límite puntual no es continuo en ningún punto ni integrable en ningún intervalo.

9.1.6 (Sucesiones que no convergen puntualmente en ningún punto) Cada número entero $n \ge 1$ se puede escribir de forma única como $n = 2^k + l$, con $0 \le l < 2^k$. Sea

$$f_n(x) := 1_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } l/2^k \le x \le (l+1)/2^k, \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases}.$$

Comprobar que f_n no converge puntualmente para ningún punto en $[0, 1]$.

9.1.7 Demostrar que la sucesión

$$f_n(x) = n(x^{1/n} - 1), \qquad 0 < x \leq 1,$$

converge puntualmente a una función $f(x)$. Determinar el valor $f(x)$, mostrar que $f_n(x) \geq f(x)$, para $x \in (0, 1]$ y que $f_n \to f$ unif. en cada intervalo $[a, 1]$, donde $0 < a < 1$ es fijo. Sin embargo, la convergencia no es uniforme en $(0, 1]$.

9.1.8 Mostrar que la sucesión

$$f_n(x) = \sin(x)\cos(x)^n$$

converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$. Indicación: $|f_n|$ es periódica de periodo π. Verificar que alcanza un máximo absoluto en un $a_n \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos(a_n) = \sqrt{n/(n+1)}$ y $\sin(a_n) = 1/\sqrt{n+1}$.

9.1.9 Sea $g : [-1, 1] \to [0, 1]$ continua. Se define $P_n(x)$ recursivamente por $P_0 = 0$ y

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{g(x)^2 - P_n(x)^2}{2}.$$

Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) $g(x) - P_{n+1}(x) = (g(x) - P_n(x))\left(1 - \frac{g(x)+P_n(x)}{2}\right)$. Además, si $g(0) = 0$, entonces $P_n(0) = 0$.

b) $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq g(x)$, si $|x| \leq 1$.

c) $g(x) - P_n(x) \leq g(x)\left(1 - \frac{g(x)}{2}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}$, si $|x| \leq 1$. Indicación: maximice $h(t) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$, $t \geq 0$.

Concluir que $P_n \to g$ unif. en $[-1, 1]$. En particular, si g^2 es un polinomio, lo mismo es válido para cada P_n. Por ejemplo, para $g(x) = |x|$ este resultado construye una sucesión de polinomios P_n tales que $P_n \to |x|$ unif. en $[-1, 1]$.

9.1.10 Sea (X, d) un espacio métrico. Fije $x_0 \in X$ y para cada $p \in X$, considere la función $f_p(x) = d(x, p) - d(x, x_0)$. Demostrar que $|f_p(x)| \leq d(x_0, p)$, para todo $x \in X$ y que

$$\|f_p - f_q\|_X = \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| = d(p, q).$$

Concluir que la aplicación $\Phi : X \to C_b(X)$ dada por $\Phi(p) = f_p$ está bien definida y preserva las distancias (es una isometría).

Nota 9.1.1. Si $\hat{X}$ es la clausura de $\Phi(X)$ en $C_b(X)$, este ejercicio demuestra que todo espacio métrico (X, d) se puede encajar en un espacio métrico completo $(\hat{X}, \hat{d})$, de forma que X es denso en $\hat{X}$.

9.2. Convergencia uniforme, continuidad y el M-test de Weierstrass

En esta sección tratamos el comportamiento del límite uniforme de funciones que son continuas sobre un conjunto. El resultado fundamental resulta ser que dicho límite es de nuevo continuo. Además estudiaremos funciones definidas a través de series y criterios importantes para determinar su continuidad, como el famoso M-test de Weierstrass.

Sea (X, d) un espacio métrico. Emplearemos la notación

$$C_b^0(X) = C_b(X) \cap C^0(X)$$

para indicar el conjunto de funciones que son continuas y acotadas sobre X. Es importante señalar que si

$$X \text{ es compacto, entonces} \quad C_b^0(X) = C^0(X),$$

gracias al Teorema del valor extremo 6.4.

Teorema 9.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y cada f_n es continua en $x_0 \in X$, entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Note que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_X + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, como $f_n \to f$ unif. en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\|f - f_n\|_X < \epsilon/3$. Fijado un $n \geq N$, por continuidad de f_n en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3$. La desigualdad anterior demuestra que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, si $d(x, x_0) < \delta$, es decir, que f es continua en x_0. □

Corolario 9.1. *$C_b^0(X)$ es un subespacio cerrado de $(C_b(X), \|\cdot\|_X)$.*

Demostración. El Ejemplo 6.2.4 muestra que $C_b^0(X)$ es un subespacio vectorial del espacio de funciones acotadas. Además, si $f_n \in C_b^0(X)$ y $f_n \to f$ unif. en X, el teorema anterior demuestra que $f \in C_b^0(X)$. Esto nos dice que $C_b^0(X)$ contiene a todos sus puntos de acumulación y por tanto es cerrado. □

Por medio del teorema anterior podemos argumentar nuevamente que la sucesión $f_n(x) = x^n$ dada en el Ejemplo 9.1.3 no converge uniformemente en $[0, 1]$ porque aunque cada f_n es continua, su límite puntual no lo es. El Ejemplo 9.1.5 por el contrario trata con convergencia uniforme de funciones y el límite hallado sí es continuo.

Existe una situación donde un tipo de recíproco del teorema anterior es cierto, conocido como el Teorema de Dini, debido al matemático italiano Ulisse Dini (1845–1918).

Teorema 9.2 (Dini)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si la sucesión de funciones continuas f_n converge puntualmente a una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ y además*

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \qquad \text{para todo } x \in X, n \in \mathbb{N},$$

entonces $f_n \to f$ unif. en X.

Demostración. Las desigualdades dadas implican que $f(x) \leq f_n(x)$. Si $g_n = f_n - f$, entonces

$$g_n(x) \geq 0, \qquad g_{n+1}(x) \leq g_n(x), \qquad \text{y } g_n \in C^0(X).$$

Dado $\epsilon > 0$, considere los conjuntos

$$K_n = \{x \in X : g_n(x) \geq \epsilon\} = g_n^{-1}[\epsilon, +\infty).$$

Por continuidad, cada K_n es cerrado, y por tanto compacto. Además, $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$.

Consideremos el conjunto $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Fijado $x \in X$, como $g_n(x) \to 0$ si $n \to +\infty$, entonces $x \notin K_n$ si n es suficientemente grande. Por tanto, $K = \emptyset$. El Teorema de intersección de Cantor 3.1 implica que $K_{n_0} = \emptyset$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y por las contenencias anteriores, $K_n = \emptyset$, si $n \geq n_0$. Esto significa que

$$0 \leq g_n(x) < \epsilon, \qquad \text{para todo } x \in X \text{ y } n \geq n_0,$$

como queríamos demostrar. □

En lo que resta de la sección estudiaremos series de funciones y condiciones suficientes para su convergencia uniforme. El primer resultado fundamental es el siguiente, que en el contexto adecuado se asemeja al criterio de comparación para series numéricas.

Teorema 9.3 (M-test de Weierstrass)**.** *Sea $Y \neq \emptyset$ un conjunto y $f_n : Y \to \mathbb{R}$ funciones tales que*

$$\|f_n\|_Y \leq M_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, entonces la función $f : Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)$$

está bien definida y converge uniformemente en Y. En particular, si (Y, d) es un espacio métrico y cada f_n es continua en Y, entonces f es continua en Y.

Demostración. Por definición, $f(y) = \lim_{n\to+\infty} s_n(y)$, donde $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$. Por hipótesis, $s_n \in C_b(Y)$. Como este espacio es completo, Proposición 9.1, es suficiente ver que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Note que si $m > n$, entonces

$$\|s_m - s_n\|_Y = \|f_{n+1} + \cdots + f_{m-1} + f_m\|_Y \leq M_{n+1} + \cdots + M_{m-1} + M_m.$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente, su sucesión de sumas parciales es de Cauchy, hecho que permite concluir que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es en $C_b(Y)$. En conclusión, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Como su límite puntal es f, entonces $s_n \to f$ unif. en Y cuando $n \to +\infty$. Finalmente, si cada f_n es continua, también lo será cada s_n y por tanto f, gracias al Teorema 9.1. □

Nota 9.2.1. Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, con $f_n : Y \to \mathbb{R}$, se dice que converge *normalmente* si la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_Y$ converge. En estos términos, el teorema anterior establece que si la serie converge normalmente, entonces converge como elemento de $C_b(Y)$. Este hecho es en realidad válido para cualquier espacio vectorial normado y completo $(E, \|\cdot\|)$, ver Ejercicio 5.1.9.

A continuación presentamos dos ejemplos clásicos de cómo aplicar el M-test de Weierstrass.

Ejemplo 9.2.1 (La función zeta de Riemann)**.** Recordemos del Ejemplo 5.2.2 que la función zeta de Riemann se define por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1.$$

Podemos comprobar que ella es continua aplicando el M-test de Weierstrass a las funciones $f_n(s) = 1/n^s$. Fijado $s_0 > 1$, tenemos que

$$|f_n(s)| \leq \frac{1}{n^{s_0}} = M_n, \qquad \text{si } s \geq s_0.$$

Por tanto, la serie que define $\zeta(s)$ converge uniformemente en esta semirecta. Como cada f_n es continua allí, lo mismo se verifica para ζ. Como $s_0 > 1$ fue arbitrario concluimos que $\zeta \in C^0(1, +\infty)$.

Ejemplo 9.2.2 (La función digamma)**.** Esta función especial se define a través de la serie

$$\psi(x) := \psi(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right), \qquad \psi(1) = -\gamma,$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni del Ejemplo 8.6.3. Para determinar su dominio y continuidad debemos analizar las fracciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} = \frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

Cada f_n es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$. Además, fijado $N \in \mathbb{N}^+$, si $|x| \leq N < n/2$, entonces $|x+n| \geq |n - |x|\,| = n - |x| > n/2$. Por tanto,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x-1|}{(n+1)(n/2)} \leq \frac{2(N+1)}{n^2} = M_n.$$

El M-test de Weierstrass permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[-N, N] \setminus \{0, -1, -2, \dots, -N\}$ y define una función continua allí. En conclusión

$$\psi : \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\} \to \mathbb{R}$$

define una función continua.

Por otra parte, los criterios de Dirichlet y de Leibniz para series numéricas en la Sección 5.5, también tienen su contraparte en este contexto. Estos se pueden extender de manera inmediata a series de funciones bajo las mismas hipótesis, reemplazando el valor absoluto por la norma del supremo $\|\cdot\|_X$. Más precisamente, tenemos los siguientes enunciados cuyos detalles dejamos al lector.

Teorema 9.4 (Dirichlet)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_b(X)$ dos sucesiones de funciones. Si las sumas parciales*

$$s_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

están uniformemente acotadas en X, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|s_n\|_X \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$g_0(x) \geq g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \text{ para todo } x \in X, \quad \text{y} \quad g_n \to 0 \text{ unif. en } X,$$

entonces la serie $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ converge uniformemente en X. Si (X, d) es un espacio métrico y $f_n, g_n \in C^0(X)$, entonces $F \in C^0(X)$.

Corolario 9.2 (Leibniz)**.** *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n(x)$ converge uniformemente en X. Si (X, d) es un espacio métrico y cada g_n es continua en X, esta serie alternada también es continua allí.*

Ejercicios

9.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico y $f_n \in C_b(X)$, tal que $f_n \to f$ unif. en X. Demostrar que si f es continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in X$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

9.2.2 Demostrar que

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \to f(x) = e^{x^2}, \quad \text{unif. en } [0, 1].$$

Calcular además $f_n(x_n) - f(x_n)$ con $x_n = \pm\sqrt{n}$ para estudiar la convergencia uniforme en una semirecta de $\mathbb{R}$.

Indicación: aplicar la desigualdad de la media aritmética y geométrica, Ejercicio 7.3.7, a $n + 1$, $a_1 = 1$, $a_j = 1 + x^2/n$, para mostrar que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente.

9.2.3 Determinar el dominio de definición y la continuidad de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, donde:

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)^2}{n^2}$.

b) $f_n(x) = x^n \arctan(x^2 + n^2)$.

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

d) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx+1)}{n^3}$.

9.2.4 Comprobar que la función digamma ψ satisface la ecuación funcional

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

Emplear esta fórmula para calcular $\psi(k+1) = \psi(1) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^+$. Los valores $\psi(p/q)$ para $p/q \in \mathbb{Q}$ con $0 < p/q < 1$ serán determinados en la Proposición 13.7.

9.2.5 Discutir la convergencia uniforme de las siguientes funciones ($0 < \delta < \pi$):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$, $x \in [0, +\infty)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^{-nx}}{n}$, $x \in [0, 1]$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \in [0, +\infty)$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)e^{-nx}}{n}$, $x \in [\delta, \pi - \delta]$.

9.2.6 Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números reales tales que $a_n \to 0$ si $n \to +\infty$, entonces las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\theta), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

definen funciones continuas para $\theta \in (0, 2\pi)$. Indicación: Ejercicio 5.5.5.

9.2.7 Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones acotadas. Demostrar que si

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f_n\|_X^{1/n} < 1 \qquad \text{o} \qquad \limsup_{n\to+\infty} \frac{\|f_{n+1}\|_X}{\|f_n\|_X} < 1,$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X.

9.2.8 [125] El objetivo de este ejercicio es completar los siguientes pasos para demostrar que la constante de Euler-Mascheroni γ admite la representación

$$\gamma = \lim_{x\to1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to1^+} \zeta(x) - \frac{1}{1-x}.$$

Note la antisimetría en los exponentes de la primera suma.

a) Mostrar que $\gamma = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$.

b) Comprobar que $\ln(n+1) = \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} \frac{dt}{t}$ y $\frac{1}{1-x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$. Deducir de estas expresiones que el término en el límite requerido es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}\right) \quad \text{y además } \gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}\right).$$

c) Justificar las acotaciones

$$\begin{aligned} 0 <& \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) dt = \int_n^{n+1} \left(\int_n^t xu^{-x-1} du\right) dt \\ \leq& xn^{-x-1} \int_n^{n+1} \left(\int_n^t du\right) dt = \frac{xn^{-x-1}}{2} \leq \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

donde $1 \leq x \leq 2$. Finalmente, justificar el paso al límite $x \to 1^+$ usando (b) para concluir el resultado.

9.3. Convergencia uniforme, diferenciación e integración

En esta sección discutimos el comportamiento de la convergencia uniforme de funciones reales respecto a integración y diferenciación.

Teorema 9.5 (Convergencia uniforme e integración)**.** *Si la sucesión de funciones integrables $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \tag{9.4}$$

Demostración. Si $t \in [a,b]$, entonces $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_{[a,b]}$, es decir

$$-\|f_n - f\|_{[a,b]} + f_n(t) \leq f(t) \leq \|f_n - f\|_{[a,b]} + f_n(t).$$

Por tanto, la integral superior e inferior satisfacen que

$$-(b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]} + \int_a^b f_n(t)dt \leq \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt \leq (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]} + \int_a^b f_n(t)dt.$$

Esto equivale a afirmar

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt - \underline{\int_a^b} f(t)dt \leq 2(b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]}.$$

Tomando $n \to +\infty$, vemos que la integral superior e inferior de f coinciden. Así concluimos que f es integrable en $[a,b]$. Finalmente, a partir de la desigualdad

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leq (b-a)\|f_n - f\|_{[a,b]}$$

se sigue el límite (9.4) al hacer $n \to +\infty$. □

Teorema 9.6 (Convergencia uniforme y derivación)**.** *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones diferenciables tal que $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algún $x_0 \in [a,b]$. Si $f_n' \to g$, unif. en $[a,b]$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = g(x), \qquad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$, entonces $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon/2$. De la misma forma, como $f_n' \to g$ unif. en $[a,b]$, podemos suponer que para estos índices se verifica que

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Aplicando el Teorema del valor medio de Lagrange, Corolario 7.1, se sigue que

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|}{2(b-a)}\epsilon \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{9.5}$$

para todo $t, x \in [a,b]$. Por tanto,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon.$$

De esta manera, gracias la Proposición 9.2, se sigue que $f_n \to f$ unif. en $[a,b]$, para cierta función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Para comprobar la diferenciabilidad de f, fije $x \in [a,b]$ y considere los cocientes

$$h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x},$$

para $t \in [a,b] \setminus \{x\}$. En estos términos, debemos demostrar que $\lim_{t\to x} h(t) = g(x)$. Para ello acotamos

$$|h(t) - g(x)| \leq |h(t) - h_n(t)| + |h_n(t) - f_n'(x)| + |f_n'(x) - g(x)|. \tag{9.6}$$

Note que la primera desigualdad en (9.5) implica que $|h_n(t) - h_m(t)| \leq \epsilon/2(b-a)$. Al igual que antes, esto demuestra que $h_n \to h$ unif. en $[a,b]\setminus\{x\}$, porque $f_n \to f$. Como $\lim_{t\to x} h_n(t) = f_n'(x)$ y $f_n'(x) \to g(x)$, el límite requerido se sigue de (9.6). □

Nota 9.3.1. La demostración anterior se simplifica si asumimos que cada $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua. En efecto, si $x \in [a,b]$, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, podemos escribir

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt.$$

Como $f_n(x_0) \to y_0$, para algún $y_0 \in \mathbb{R}$ y $f_n' \to g$ unif. en $[a,b]$, se sigue del Teorema 9.5 que

$$f_n(x) \to f(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt, \qquad \text{unif. en } [a,b].$$

Como cada f_n' es continua, también lo es g por el Teorema 9.1. De nuevo, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $f'(x) = g(x)$, como se requería.

Aplicando los teoremas anteriores a series de funciones con las condiciones adecuadas obtenemos resultados de intercambio entre la integral o derivada con la suma.

Corolario 9.3. *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si cada f_n es integrable en $[a,b]$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces esta serie define una función integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

2. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge para algún $x_0 \in [a,b]$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente allí y*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Ejemplo 9.3.1. La función definida por la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2},$$

donde $\{\cdot\}$ denota la función parte fraccionaria, ilustra que una función puede ser integrable en un intervalo $[a,b]$, incluso teniendo discontinuidades en un conjunto denso de $[a,b]$. Esta función es una modificación del ejemplo original de Riemann para ilustrar esta situación. Riemann consideró el término (nx) en vez de $\{nx\}$, donde $(t) = t$ para $-1/2 < t \leq 1/2$ y extendida a $\mathbb{R}$ por la regla $(x+1) = (x)$.

Veremos que f está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $S_f = \mathbb{Q}$. El Teorema de Lebesgue 8.10 implica que f es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$. Sin embargo, queremos obtener la integrabilidad de f sin apelar a este resultado.

Para analizar la función f, sea $f_n(x) = \{nx\}/n^2$. Entonces f_n es continua en todo punto salvo en el conjunto $S_{f_n} = \{p/n \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{Z}\}$. Además $|f_n(x)| \leq 1/n^2$, para todo x. Por el M-test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y por tanto f es una función continua en $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para comprobar que f es discontinua en cada punto de $\mathbb{Q}$, tome $p/q \in \mathbb{Q}$, fracción irreducible con $q > 0$. Entonces

$$\lim_{x \to p/q^-} \{nx\} = \begin{cases} 1, & n = kq, k \in \mathbb{N}^+, \\ \{np/q\}, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

En el segundo caso, esto se debe a que si np/q no es entero, podemos tomar x tan cerca de p/q de forma que $\lfloor np/q \rfloor < nx < np/q < \lfloor np/q \rfloor + 1$. Como $\{\cdot\}$ es continua

en cada intervalo de la forma $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, se sigue la fórmula. De esta forma vemos que

$$\lim_{x \to p/q^-} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 q^2} + \sum_{n \text{ no divisible por } q} \frac{\{np/q\}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6q^2} + f(p/q),$$

y por tanto f no es continua en $\mathbb{Q}$. Note que en la última igualdad usamos que $\{m\} = 0$, si $m \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, dado un intervalo compacto $[a, b]$, cada función f_n es integrable allí al tener solo un número finito de discontinuidades. El Corolario 9.3 implica entonces que f es integrable en $[a, b]$, aunque su conjunto de discontinuidades en este intervalo es $\mathbb{Q} \cap [a, b]$.

Ejemplo 9.3.2. Recordando la función digamma del Ejemplo 9.2.2 tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Empleando los mismos argumentos que antes se verifica que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente en $[-N, N] \setminus \{0, -1, -2, \ldots, -N\}$ y define una función continua allí. Por el Corolario 9.3 concluimos que ψ es diferenciable en su dominio y

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

En particular, $\psi'(x) > 0$ y por tanto ψ es creciente en cada intervalo que compone su dominio. Continuando de esta manera, ψ es de hecho C^∞ en su dominio y

$$\psi^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k!}{(x+n)^{k+1}}, \qquad k \geq 2.$$

Ejemplo 9.3.3 (Series de potencias)**.** Considere una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con radio de convergencia $R > 0$. Recordando la fórmula de Hadamard del Teorema 5.8, sabemos que $1/R = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Si fijamos $0 < r < R$, gracias al Teorema 4.8, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/r$, si $n \geq N$. En particular, si $C_r = \text{máx}\{1, |a_0|, |a_1| r, \ldots, |a_N| r^N\}$, concluimos que

$$|a_n| \leq \frac{C_r}{r^n}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto significa que los coeficientes de una serie de potencias con radio de convergencia positivo crecen a lo más a una razón geométrica, ver también el Ejercicio 9.3.4.

Estas estimaciones permiten demostrar que f define una función continua sobre su intervalo de convergencia. En efecto, fijados $0 < \rho < r < R$, si $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$,

$$|f_n(x)| \leq C_r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = M_n, \qquad \text{para } |x - x_0| \leq \rho.$$

El M-test de Weierstrass demuestra entonces que la serie $f(x)$ converge uniformemente en $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ y en particular que f es continua allí. Como $0 < \rho < R$ fue arbitrario, se sigue que f es continua en $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Consideremos ahora la serie que se obtiene al derivar término a término, digamos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Observe que $(x - x_0)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ tiene el mismo radio de convergencia que $f(x)$ porque

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} \cdot \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

gracias al Ejercicio 4.5.2. Como multiplicar por $x - x_0$ no afecta el radio de convergencia, podemos concluir que $g(x)$ converge para $|x - x_0| < R$. Al igual que antes, g converge uniformemente en cada intervalo $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, con $0 < \rho < R$. Estamos entonces en condiciones de aplicar el Corolario 9.3 para concluir que $f' = g$, es decir,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad |x - x_0| < R.$$

Como ya se había discutido al final de la Sección 7.6 se deduce de esta forma que f es infinitas veces diferenciable en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Dos ejemplos concretos de esta situación son la función exponencial y la serie geométrica. En el primer caso tenemos que

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$

Para la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1 - x)$, derivando sucesivamente obtenemos que $f^{(k)}(x) = k!/(1 - x)^{k+1} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$, que se puede reescribir como

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \qquad |x| < 1. \tag{9.7}$$

También es posible integrar término a término una serie de potencias. Si

$$F(x) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1},$$

F tiene el mismo radio de convergencia que f y $F'(x) = f(x)$ si $|x - x_0| < R$. Además, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \qquad |x - x_0| < r.$$

Por otra parte, la condición de que una función sea analítica en un punto implica que también lo será en una vecindad de dicho punto, a saber, en su intervalo de convergencia. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 9.3. *Asuma que la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Entonces f es analítica en cada punto del intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ y además*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n, \qquad \textit{para } |x - x_1| < R - |x_1 - x_0|.$$

Demostración. Basta escribir $x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0)$ en $f(x)$ para obtener

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_n (x_1 - x_0)^{n-j}(x - x_1)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} a_n (x_1 - x_0)^{n-j} \right] (x - x_1)^j.$$

El intercambio de las series se justifica vía la Proposición 5.6 porque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left| \binom{n}{j} a_n (x_1 - x_0)^{n-j}(x - x_1)^j \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x - x_1| + |x_1 - x_0|)^n$$

converge si $|x - x_1| + |x_1 - x_0| < R$. Finalmente, los coeficientes de la serie de Taylor de f en x_1 se determinan como en la discusión previa antes del enunciado. □

Terminamos esta sección con ejemplos de funciones elementales definidas por series de potencias y algunas de sus propiedades.

Ejemplo 9.3.4. A partir de la serie geométrica $1/(1-t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, $|t| < 1$, hemos visto que es válido integrar término a término. En particular, obtenemos las expansiones

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \qquad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1. \tag{9.8}$$

Como aplicación de la expansión del logaritmo podemos comprobar que si $r > 0$,

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x, \text{ unif. en } |x| \le r, \text{ cuando } n \to +\infty.$$

En efecto, si tomamos $n > r$, entonces $|x|/n \leq r/n < 1$ y podemos acotar

$$\left| n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x \right| = \left| n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)n^{k+1}} \right| \leq n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{n^{k+1}} = \frac{r^2}{n-r},$$

de donde se sigue la convergencia uniforme. Esto a su vez implica que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x, \text{ unif. en } |x| \leq r, \text{ cuando } n \to +\infty.$$

De hecho, esta afirmación es consecuencia de un resultado más general.

Lema 9.1. *Sea $Y \neq \emptyset$ un conjunto, $f_n : Y \to \mathbb{R}$ y asuma que $f_n \to f$ unif. en Y si $n \to +\infty$. Si $f : Y \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente, entonces $e^{f_n} \to e^f$ unif. en Y.*

Demostración. Asuma que $f(y) \leq M$, para todo $y \in Y$. Dado $\epsilon > 0$, por continuidad de la función exponencial, existe $\delta > 0$ tal que $|e^t - 1| < \epsilon/e^M$ siempre que $|t| < \delta$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_Y < \delta$ para $n \geq N$, obtenemos que

$$|e^{f_n(y)} - e^{f(y)}| = e^{f(y)}|e^{f_n(y)-f(y)} - 1| \leq e^M(\epsilon/e^M) = \epsilon, \qquad \text{para todo } y \in Y,$$

de donde se sigue el resultado. □

Ejemplo 9.3.5 (Las funciones trigonométricas)**.** Las funciones coseno y seno se definen analíticamente por las series de potencias

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{9.9}$$

Por el criterio del cociente, ambas convergen para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, sus derivadas están dadas por (7.6), como se demuestra derivando término a término cada serie. Note también que de aquel ejemplo deducimos la relación (7.7) que en particular implica que $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\sin(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostremos ahora que debe existir $\xi > 0$ tal que $\cos(\xi) = 0$. De lo contrario, como $\cos(0) = 1$, se debería tener que $\cos(x) = (\sin(x))' > 0$, para todo $x > 0$. Luego $\sin(x)$ sería una función estrictamente creciente. Como $\sin(0) = 0$, se seguiría que $\sin(x) > 0$ si $x > 0$. Por tanto, si $0 < x < y$, el Teorema del valor medio para integrales demuestra que

$$0 < (y - x)\sin(x) < \int_x^y \sin(t)dt = \cos(x) - \cos(y) \leq 2.$$

Pero esta desigualdad no puede ser válida si y se toma suficientemente grande.

Denotemos por $\xi_0/2 = \inf\{\xi > 0 : \cos(\xi) = 0\}$. Note que este valor existe y es positivo porque es el ínfimo de un conjunto cerrado, Ejemplo 6.2.6 y Proposición 2.7. Así $\cos(\xi_0/2) = 0$ y $\sin(\xi_0/2) = \pm 1$. Como por definición de esta constante, $\cos(x) > 0$ si $(0, \xi_0/2)$, entonces $\sin(x)$ es creciente allí, y así $\sin(\xi_0/2) = 1$.

Consideremos ahora la función *tangente* definida por

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad |x| < \xi_0/2.$$

Un cálculo directo muestra que $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = 1/\cos(x)^2$. Por tanto, la función tangente es estrictamente creciente en $(-\xi_0/2, \xi_0/2)$. Además $\lim_{x\to\pm\xi_0/2} \tan(x) = \pm\infty$. Note que para el límite a $-\infty$ podemos usar que $\tan(-x) = -\tan(x)$, hecho que se deduce de $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$ a través de las series de potencias en (9.9). En particular, $\tan : (-\xi_0/2, \xi_0/2) \to \mathbb{R}$ es biyectiva.

Si denotamos por $g : \mathbb{R} \to (-\xi_0/2, \xi_0/2)$ su función inversa, se sigue de los ejercicios 7.1.9 y 7.3.3 que

$$g'(\tan(x))\frac{1}{\cos(x)^2} = 1, \qquad |x| < \xi_0/2.$$

Como la fórmula (7.7) se puede expresar como $\tan(x)^2 + 1 = 1/\cos(x)^2$, concluimos que $g'(y) = 1/(1+y^2)$. Finalmente, empleando el valor $\tan(0) = g(0) = 0$ y el segundo Teorema Fundamental del Cálculo concluimos que

$$g(y) = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(y), \qquad \text{y en particular} \qquad \xi_0 = \pi,$$

donde π se definió en el Ejemplo 8.7.2. En particular,

$$\cos(\pi/2) = 1, \quad \sin(\pi/2) = 1.$$

Más propiedades sobre las funciones trigonométricas se incluyen en el Proyecto 13.1.

Ejemplo 9.3.6 (La expansión binomial)**.** Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ consideramos la ecuación

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x), \qquad y(0) = 1. \tag{9.10}$$

Es inmediato comprobar que $y_0(x) = (1+x)^\alpha$ es una solución de este problema. Por otra parte, considere la serie de potencias

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

donde el coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n}$ es como en el Ejercicio 7.1.1. Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$ esta serie se reduce a $(1+x)^m$ por el Teorema del Binomio. En los demás casos el criterio del cociente establece que $y_1(x)$ tiene radio de convergencia $R = 1$ porque $\binom{\alpha}{n+1}/\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha-n}{n+1}$. Para ver que $y_1(x)$ también satisface (9.10) notamos que los coeficientes binomiales satisfacen la recurrencia

$$\binom{\beta}{k} + \binom{\beta}{k-1} = \binom{\beta+1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9.11}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(1+x)y_1'(x) &= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n \\ &= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right)x^n = \alpha y_1(x).\end{aligned}$$

Ahora, como $y_0(x) \neq 0$ y $y_0'(x) \neq 0$ en $(-1,1)$ podemos considerar los cocientes de estas soluciones y empleando la ecuación (9.10) vemos que

$$\frac{y_1'(x)}{y_0'(x)} = \frac{y_1(x)}{y_0(x)}, \qquad \text{o de forma equivale} \qquad \frac{d}{dx}(y_1/y_0) = 0.$$

Por tanto, $y_1(x) = cy_0(x)$ para $|x| < 1$ y para cierta constante $c \in \mathbb{R}$. Evaluando en $x = 0$ vemos que $c = 1$ y así concluimos la expansión

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \qquad |x| < 1. \tag{9.12}$$

Esto demuestra que $y_0(x) = (1+x)^\alpha$ es analítica en el intervalo $(-1,1)$. Por supuesto, si calculamos los coeficientes de Taylor obtenemos que $y_0^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. El análisis anterior sin embargo es necesario para concluir que y_0 coincide con su serie de Taylor en $x = 0$. Para el estudio de la serie binomial en los puntos frontera $x = \pm 1$ referimos al lector al Ejercicio 13.3.8.

Ejemplo 9.3.7 (Teorema de Tannery para integrales)**.** Considere una sucesión de funciones $f_n : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrables en el sentido impropio allí tales que

1. $f_n \to f$ unif. en $[a,b]$, para todo $b > a$.

2. $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todo $x \geq a$, con $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrable en el sentido impropio allí.

Entonces f y $|f|$ son integrables en el sentido impropio en $[a,+\infty)$ y

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{p_n} f_n(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt,$$

para cualquier sucesión creciente $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ con $p_n > a$ tal que $p_n \to +\infty$.

Para demostrar esta propiedad note primero que f es integrable en cada intervalo $[a,b]$, al ser límite uniforme de funciones integrables. Ahora, por el criterio de comparación $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt$ converge porque $|f(x)| \leq g(x)$, para $x \geq a$. Por tanto, f también es integrable en el sentido impropio. Ahora, para demostrar el límite sea $\epsilon > 0$ y elija

$b_0 > a$ tal que $\int_{b_0}^{+\infty} g(t) < \epsilon/3$. Si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $\|f_n - f\|_{[a,b_0]} < \epsilon/3(b_0 - a)$ y $p_n > b_0$, para todo $n \geq N$, concluimos que

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{p_n} f_n(t)dt\right| \leq \int_a^{b_0} |f(t) - f_n(t)|dt + \int_{b_0}^{+\infty} |f(t)|dt + \int_{b_0}^{p_n} |f_n(t)|dt$$
$$\leq (b_0 - a)\|f_n - f\|_{[a,b_0]} + 2\int_{b_0}^{+\infty} g(t)dt < \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon.$$

Ejercicios

9.3.1 Considere la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nx^2}$. Determinar dónde converge absolutamente, dónde converge uniformemente y dónde es continua. ¿Es f acotada?

9.3.2 Mostrar que la sucesión $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ converge uniformemente a una función f y que $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$, para todo $x \neq 0$. ¿Qué pasa en $x = 0$?

9.3.3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(x + \frac{j}{n}\right) \quad \text{converge a } g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt,$$

uniformemente en cada intervalo $[a, b]$.

9.3.4 *a*) Demostrar que el radio de convergencia de una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se puede caracterizar de la siguiente manera: es el único número R tal que si $0 < r < R$, entonces existe $C = C_r > 0$ de manera que $|a_n| \leq Cr^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Considere la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = n$. Dado $\epsilon > 0$, encuentre el valor óptimo $C_\epsilon > 0$ tal que $|n| \leq C_\epsilon(1 + \epsilon)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Qué sucede con C_ϵ si $\epsilon \to 0^+$?

9.3.5 Comprobar que $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ es biyectiva y que su inversa es la función arcoseno dada en el Ejercicio 8.7.6.

9.3.6 Mostrar que las fórmulas (9.7) y (9.12) son compatibles comprobando que

$$(-1)^n\binom{-\alpha - 1}{n} = \binom{\alpha + n}{n}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

9.3.7 Las funciones *coseno y seno hiperbólico* se definen por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Demostrar que $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$, $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$ y $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$.

9.3.8 (Media logarítmica) [68] La *media logarítmica* entre $a > 0$ y $b > 0$ se define por $L(a,b) = \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$. Demostrar que

$$\sqrt{ab} \leq L(b,a) \leq \frac{a+b}{2}.$$

Indicación: si $x = b/a > 1$, esto equivale a

$$\sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)} \leq \frac{x+1}{2}, \qquad \text{o} \qquad 1 \leq \frac{\sinh(y)}{y} \leq \cosh(y),$$

si $x = e^{2y}$. Mostrar esta última desigualdad comparando término a término los desarrollos en series de potencia en 0 de estas funciones. En el Ejercicio 12.1.9 se da otra demostración de este resultado. El artículo [68] contiene más desigualdades asociadas a $L(a,b)$.

9.3.9 Comprobar que la función arcoseno del Ejercicio 8.7.6 es analítica en $(-1,1)$ y está dada por la serie

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}, \qquad |x| < 1.$$

9.3.10 Demostrar que la función zeta de Riemann es infinitas veces diferenciable en $(1,+\infty)$ y determinar una fórmula para sus derivadas.

9.3.11 Comprobar que si $\alpha > 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{x^\alpha}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha n+1)^{n+1}} = \int_0^1 x^{x^\alpha}\, dx.$$

En particular, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}$.

9.4. El Teorema de aproximación de Weierstrass

Este teorema hace rigurosa la idea intuitiva de que es posible aproximar a una función continua por polinomios, por ejemplo interpolando sucesivamente puntos de la función. En esta sección revisaremos una de sus demostraciones debida a S. Bernstein basada en ideas de Probabilidad. La versión general de este teorema, debida a M. H. Stone, será discutida en el Proyecto 14.3.

Teorema 9.7 (Weierstrass)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}[x]$ tal que $p_n \to f$ unif. en $[a,b]$ cuando $n \to +\infty$.*

En esta sección denotaremos por

$$\mathbb{R}[x]_{[a,b]}$$

al conjunto de funciones polinomiales definidas en $[a, b]$. Un elemento de este conjunto es simplemente la restricción de un polinomio usual al intervalo $[a, b]$. Por otra parte, recordemos que ser denso significa que su clausura es todo el espacio. En nuestro caso el teorema anterior indica que

$$\overline{\mathbb{R}[x]_{[a,b]}} = C^0[a, b].$$

En otros términos, cada función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{R}[x]_{[a,b]}$: dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{R}[x]_{[a,b]} \cap B_{\|\cdot\|_{[a,b]}}(f, \epsilon)$, es decir,

$$\left\|f - p\right\|_{[a,b]} < \epsilon.$$

Es importante recalcar que el dominio de las funciones que tratamos son intervalos compactos. De hecho podemos fijar al intervalo $[0, 1]$ como modelo para trabajar porque dado otro intervalo $[a, b]$, la función $\ell_{a,b} : [0, 1] \to [a, b]$, $\ell_{a,b}(x) = a+x(b-a)$, con inversa $\ell_{a,b}^{-1}(t) = \frac{t-a}{b-a}$ induce una aplicación lineal biyectiva

$$L_{a,b} : C^0[a, b] \to C^0[0, 1], \quad f \mapsto L_{a,b}(f) = f \circ \ell_{a,b}.$$

Ella satisface que $\|f\|_{[a,b]} = \|f \circ \ell_{a,b}\|_{[0,1]}$ y además preserva a $\mathbb{R}[x]$, es decir, $p \in \mathbb{R}[x]$ si y solo si $L_{a,b}(p) \in \mathbb{R}[x]$. Por esta razón, es suficiente demostrar el teorema para funciones sobre $[0, 1]$.

El argumento que presentamos a continuación es constructivo y se debe al matemático ruso Sergei N. Bernstein (1880 – 1968).

Teorema (Bernstein)**.** *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la sucesión de polinomios*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k/n)\, x^k (1 - x)^{n-k},$$

converge uniformemente a f en $[0, 1]$, cuando $n \to +\infty$.

Demostración. Sea $M = \|f\|_{[0,1]}$ y fije $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua sobre $[0, 1]$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, 1]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Considere los polinomios

$$r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Entonces $r_k(x) \ge 0$ si $x \in [0, 1]$ y por el Teorema del Binomio, $\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$. Así

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f(k/n)\right) r_k(x) \right|.$$

Podemos estimar esta suma dividiéndola en dos partes. La primera, sobre los k tales que $|k/n - x| < \delta$. Por tanto, $|f(x) - f(k/n)| < \epsilon/2$ y esta parte de la suma queda acotada por $(\epsilon/2) \cdot \sum_{k,\ |k-nx|<\delta n} r_k(x) \leq \epsilon/2$. La segunda parte de la suma está acotada por

$$2M \sum_{k,\, |k-nx|\geq \delta n} r_k(x) \leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 r_k(x) = \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2\delta^2 n},$$

donde usamos que $x(1-x) \leq 1/4$ en $[0,1]$ y $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x)$, que se justificará a continuación. Finalmente, con estas desigualdades concluimos que

$$\left\|f - p_n\right\|_{[0,1]} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n} < \epsilon,$$

si n es suficientemente grande.

Para finalizar, a partir de $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, derivando respecto a x y multiplicando por x, dos veces, vemos que

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k y^{n-k}.$$

Reemplazando $y = 1-x$, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} k r_k(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2,$$

y por tanto, expandiendo el cuadrado interno, que $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x)$. □

Nota 9.4.1. Este resultado se puede generalizar a funciones continuas $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$. En efecto, para este dominio los polinomios de Bernstein se definen por

$$p_{n_1,\ldots,n_d}(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{(*)} \prod_{j=1}^{d} \left[\binom{n_j}{k_j} x_j^{k_j} (1-x_j)^{n_j-k_j}\right] f(k_1/n_1,\ldots,k_d/n_d),$$

donde la suma $(*)$ se toma sobre los $(k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}^d$ con $0 \leq k_j \leq n_j$. Entonces se verifica que $p_{n_1,\ldots,n_d} \to f$ unif. en $[0,1]^d$ si $n_1,\ldots,n_d \to +\infty$. La demostración sigue las mismas ideas que antes, aunque su escritura es mucho más enrevesada.

Ejemplo 9.4.1 (Polinomios con coeficientes enteros)**.** Veamos que el conjunto de funciones polinomiales con coeficientes enteros $\mathbb{Z}[x]|_{[a,b]}$ es denso en $(C^0[a,b], \|\cdot\|)$, para cualquier intervalo $[a,b] \subseteq (0,1)$. Por el Teorema de aproximación de Weierstrass, es suficiente mostrar que

$$\mathbb{R}[x]_{[a,b]} \subseteq \overline{\mathbb{Z}[x]_{[a,b]}} \subseteq C^0[a,b],$$

porque al tomar clausura en estas contenencias se concluye que $\overline{\mathbb{Z}[x]_{[a,b]}} = C^0[a,b]$. De hecho, es suficiente demostrar que

$$\text{si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \epsilon > 0, \qquad \text{existe } q \in \mathbb{Z}[x] \text{ tal que } \|\alpha - q\|_{[a,b]} < \epsilon. \tag{9.13}$$

En efecto, si esto es válido, dado $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ y $\epsilon > 0$, para cada $j = 0, 1, \ldots n$, podemos elegir $q_j \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\|a_j - q_j\|_{[a,b]} < \epsilon/(n+1)$. Por tanto, si $q = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$, obtenemos que

$$\|p - q\|_{[a,b]} \leq \sum_{j=0}^{n} \|a_j - q_j\|_{[a,b]} \|x^j\|_{[a,b]} < \epsilon, \qquad \text{porque } \|x^j\|_{[a,b]} = b^j < 1.$$

Para comprobar (9.13) haremos uso de los polinomios

$$Q_p(x) = p^{-1}(1 - x^p - (1-x)^p) = \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{p} x^j \in \mathbb{Z}[x],$$

donde p es un número primo. Note que Q_p tiene coeficientes enteros porque p y $j!$ no tienen factores en común si $j \leq p-1$ y por tanto p divide a $\binom{p}{j}$. Además tenemos

$$\left| p^{-1} - Q_p(x) \right| = \frac{x^p + (1-x)^p}{p} \leq \frac{b^p + (1-a)^p}{p} = \omega_p.$$

Ahora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, sea $m = \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$ y p primo tal que $1/p < \epsilon/2$ y $p\omega_p < \epsilon/2$. Consideremos $k = \lfloor p(\alpha - m) \rfloor \in \mathbb{Z}$, es decir $m + k/p \leq \alpha < m + (k+1)/p$. Por definición, $0 \leq k \leq p-1$. Entonces $q = m + kQ_p \in \mathbb{Z}[x]$ satisface que

$$\|\alpha - q\|_{[a,b]} = \|\alpha - m - k/p + k/p - kQ_p\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{p} + k\|p^{-1} - Q_p\|_{[a,b]} < \frac{1}{p} + p\omega_p < \epsilon,$$

como era requerido.

Finalizamos esta sección con una extensión del Teorema 9.7 para de clase C^m.

Teorema 9.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^m. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}[x]$ tales que $p_n^{(j)} \to f^{(j)}$ unif. en $[a,b]$ cuando $n \to +\infty$, para $j = 0, 1, , \ldots, m$.*

Demostración. Aplicamos inducción sobre m. Si $m = 0$, este es el Teorema 9.7. Si lo suponemos válido para algún $m-1$, dada f tal que $f^{(m)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, la hipótesis de inducción aplicada a f' nos dice que existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}[x]$ tal que $q_n^{(j)} \to (f')^{(j)}$ unif. en $[a,b]$, para $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Si ponemos

$$p_n(x) = f(a) + \int_a^x q_n(t)dt \in \mathbb{R}[x],$$

por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$|p_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x q_n(t) - f'(t)\, dt \right| \leq (x-a)\|q_n - f'\|_{[a,b]} \leq (b-a)\|q_n - f'\|_{[a,b]},$$

para todo $x \in [a,b]$. De aquí se deduce que $p_n \to f$ unif. en $[a,b]$. Como $p_n'(x) = q_n(x)$ y $p_n^{(j+1)} = q_n^{(j)}$, también se verifica que $p_n^{(j)} \to f^{(j)}$, para $j = 1, \ldots, m$, como se requería. El principio de inducción permite terminar la demostración. □

Ejercicios

9.4.1 Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x_0) = 0$, para cierto $x_0 \in [a,b]$, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $p_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$, y tales que $p_n(x_0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ es una función continua par, entonces ella se puede aproximar uniformemente por polinomios pares sobre $[-a,a]$. Formular y demostrar la misma afirmación para funciones impares.

9.4.2 Demostrar que $\mathbb{Q}[x]_{[a,b]}$ también es denso en $C^0[a,b]$.

9.4.3 Si $f \in C^0[0,1]$, defina $|||f||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 f(t)t^n dt \right|$. Demostrar que esta aplicación define una norma sobre $C^0[0,1]$.
Indicación: si $|||f||| = 0$, usar el Teorema de Weierstrass para comprobar que $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$.

9.4.4 Sea $f \in C^0[0,1]$. Comprobar que

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \int_0^1 t^n f(t) dt = f(1).$$

Indicación: comprobarlo primero cuando f es un polinomio.

9.4.5 *a*) Si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios reales que convergen uniformemente a 0 en un subconjunto no acotado $S \subseteq \mathbb{R}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que p_n es constante, si $n \geq N$.

b) Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces no existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $p_n \to f$ unif. en $\mathbb{R}$, a menos que f sea un polinomio.

9.4.6 Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ existe y es finito. Demostrar que f puede aproximarse uniformemente en $\mathbb{R}$ por combinaciones lineales de funciones del tipo $x \mapsto e^{-kx}$, $k \in \mathbb{N}$.
Indicación: considere $g(t) = f(-\ln(t))$, $0 < t \leq 1$.

9.4.7 (Convergencia uniforme de polinomios con grado fijo) Sea $\mathcal{P}_N$ el espacio vectorial de polinomios en x con coeficientes reales de grado a lo más N.

a) (Fórmula de interpolación de Lagrange) Mostrar que un polinomio $q(x)$ de grado N queda determinado por sus valores en $N+1$ puntos prefijados $x_0, x_1, \ldots, x_N$ a través de la fórmula

$$q(x) = \sum_{j=0}^{N} q(x_j)\ell_j(x), \qquad \text{donde } \ell_j(x) := \prod_{\substack{0\le m\le N\\ m\neq j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}.$$

Indicación: $l_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$ y 1 si $i = j$. Luego recuerde el Ejemplo 7.3.1.

b) Fije $[a, b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ en $[a, b]$ y considere la aplicación

$$L : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathcal{P}_N, \qquad L(\boldsymbol{b}) \longmapsto \sum_{j=0}^{N} b_j\ell_j(x), \qquad \boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_N).$$

Mostrar que L es lineal y biyectiva.

c) Emplear el numeral anterior para demostrar que

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sup_{t\in[a,b]} |L(\boldsymbol{b})(t)|$$

define una norma en $\mathbb{R}^{N+1}$. Como todas las normas en este espacio son equivalentes (Ejercicio 6.3.12), concluya que una sucesión $p_n(x) = a_{0,n} + a_{1,n}x + \cdots + a_{N,n}x^N$ en $\mathcal{P}_N$ converge uniformemente en $[a, b]$ si y solo si $\{(a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, a_{N,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}^{N+1}$. Por tanto, $p_n \to p$ unif. sobre $[a, b]$, donde

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N, \qquad \text{con } a_j = \lim_{n\to+\infty} a_{j,n}.$$

d) Llegar a la misma conclusión del numeral anterior ahora empleando la aplicación $L_0 : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathcal{P}_N$, $L_0(\boldsymbol{b}) = \sum_{j=0}^{N} b_jx^j$ y la norma $\|\boldsymbol{b}\|' = \sup_{t\in[a,b]} |L_0(\boldsymbol{b})(t)|$.

e) Demostrar que si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función continua f y f no es un polinomio, entonces los grados de los p_n no pueden ser acotados.

9.4.8 *a*) (∗) Dado $a \in (0, 1)$, sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, demostrar que existe $p \in \mathbb{Z}[x]$ tal que

$$\|f - p\|_{[-a,a]} < \epsilon.$$

Indicación: Aplicar el Teorema de Weierstrass a $t \in [-a^k, a^k] \to g(t) = f(t^{1/k})$ con $k \in \mathbb{N}$ impar para obtener $q(t) = \sum_{j=0}^{n} a_jt^j$ con $\|g - q\|_{[-a^k,a^k]} < \epsilon/4$. Luego considere $p(x) = \sum_{j=1}^{n} \lfloor a_j \rfloor x^{jk}$ con k suficientemente grande.

b) La clausura de $\mathbb{Z}[x]$ como subconjunto de $(C^0[-a,a], \|\cdot\|_{[-a,a]})$ es

$$\overline{\mathbb{Z}[x]_{[-a,a]}} = \left\{ f \in C^0[-a,a] \,:\, f(0) \in \mathbb{Z} \right\}.$$

9.5. Regla de Leibniz para integrales impropias

El objetivo de esta sección es extender la regla de Leibniz sobre derivación bajo el signo integral para integrales impropias. Para ello extendemos el concepto de convergencia uniforme para funciones de dos variables. En realidad veremos que este concepto se reduce al caso tratado en la Sección 9.1.

Trabajaremos con funciones definidas en intervalos de la forma $[c,d)$ o $[c,+\infty)$. Los resultados que presentamos también son válidos para intervalos $(c,d]$ y $(-\infty,d]$.

Definición 9.3. Sean $F : [a,b]\times[c,d) \to \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que $F(x,t) \to f(x)$ *uniformemente para* $x \in [a,b]$ *cuando* $t \to d^-$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d - \delta < t < d$, entonces

$$|F(x,t) - f(x)| < \epsilon, \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$

En el caso $d = +\infty$, esta desigualdad se requiere para $t > \delta$. En cualquier caso esta situación se denotará por $F(\cdot,t) \to f$ unif. en $[a,b]$ cuando $t \to d^-$.

Para cada $t \in [c,d)$ denotaremos por $F(\cdot,t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ a la función dada por $x \mapsto F(x,t)$. Como en la Sección 9.1 se sigue que

$$F(\cdot,t) \to f \text{ unif. en } [a,b] \quad \text{ si y solo si } \quad \lim_{t\to d^-} \|F(\cdot,t) - f\|_{[a,b]} = 0,$$

es decir, requerimos que $F(\cdot,t) - f \to 0$ en el espacio $C_b[a,b]$, cuando $t \to d^-$. Recordando la caracterización de límites a través de límites de sucesiones, ver Nota 6.5.1, se sigue que

$$\lim_{t\to d^-} \|F(\cdot,t) - f\|_{[a,b]} = 0 \quad \text{ si y solo si } \quad \lim_{n\to+\infty} \|F(\cdot,t_n) - f\|_{[a,b]} = 0,$$

para toda sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [c,d)$ tal que $t_n \to d$ si $n \to +\infty$. Aplicando esta observación, los resultados de convergencia uniforme y continuidad (Proposición 9.1), integración (Teorema 9.5) y derivación (Teorema 9.6), se extienden de manera inmediata a este contexto. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado cuyos detalles se dejan al lector.

Proposición 9.4. *Sean* $F : [a,b] \times [c,d)$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tales que* $F(\cdot,t) \to f$ *unif. en* $x \in [a,b]$ *cuando* $t \to d^-$. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si* F *es continua en* $[a,b] \times [c,d)$, *entonces* $f \in C^0[a,b]$.

2. *Si $F(t,\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable para cada $t \in [c,d)$, entonces $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y*
$$\lim_{t\to d^-} \int_a^b F(s,t)ds = \int_a^b f(s)ds.$$

3. *Asuma que $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot,t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ existe y es continua para cada $t \in [c,d)$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot,t) \to \psi$ unif. en $[a,b]$ cuando $t \to d^-$. Entonces $\psi = f'$.*

Para el caso de funciones definidas por integrales tenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.4. *Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d) \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:*

1. *$G : [a,b] \times [c,d) \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,t) := \int_c^t \varphi(x,\tau)d\tau$ es continua.*

2. *Si para cada $x \in [a,b]$ la integral impropia*
$$g(x) = \int_c^d \varphi(x,\tau)d\tau \text{ converge} \quad y \quad G(\cdot,t) \to g \text{ unif. en } [a,b] \text{ si } t \to d^-, \tag{9.14}$$
entonces $g \in C^0[a,b]$.

3. *Si existe $h : [c,d) \to \mathbb{R}$ tal que*
$$|\varphi(x,t)| \le h(t), \ (x,t) \in [a,b] \times [c,d) \quad y \quad \int_c^d h(\tau)d\tau \text{ converge},$$
entonces (9.14) es válido y por tanto $g \in C^0[a,b]$.

Demostración. (1) Si fijamos $c < d' < d$, φ es continua en el compacto $[a,b]\times[c,d']$ y por tanto es uniformemente continua allí. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x,t),(y,s) \in [a,b] \times [c,d']$, si $\|(x,t)-(y,s)\|_2 < \delta$, entonces $|\varphi(x,t)-\varphi(y,s)| < \epsilon/(2(d'-c))$. Entonces, si $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in [a,b] \times [c,d']$, podemos escribir
$$\begin{aligned} G(x_1,t_1) - G(x_2,t_2) &= G(x_1,t_1) - G(x_2,t_1) + G(x_2,t_1) - G(x_2,t_2) \\ &= \int_c^{t_1} \varphi(x_1,\tau) - \varphi(x_2,\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x_2,\tau)d\tau, \end{aligned}$$
y por tanto acotar
$$|G(x_1,t_1) - G(x_2,t_2)| \le (d'-c)\epsilon + c|t_2-t_1| \le \epsilon/2 + c|t_2-t_1|,$$
donde $c = \|f\|_{[a,b]\times[c,d']}$, siempre que $|x_1-x_2| < \delta$. Tomando $|t_1-t_2|$ suficientemente pequeño se sigue que $|G(x_1,t_1)-G(x_2,t_2)| < \epsilon$. Así se deduce la continuidad de G en $[a,b] \times [c,d']$ y como d' fue arbitrario, G resulta ser continua en $[a,b] \times [c,d)$.

(2) Es una consecuencia inmediata de (1) y de la Proposición 9.4(1).

(3) Si suponemos que existe $h : [c, d) \to \mathbb{R}$ como en el enunciado, por el criterio de comparación, Proposiciones 8.11(2) y 8.13, $g(x)$ existe para cada $x \in [a, b]$. Además

$$|G(x,t) - g(x)| \leq \int_t^d |\varphi(x,\tau)| d\tau \leq \int_t^d h(\tau) d\tau.$$

Como $\lim_{t\to d^-} \int_t^d h(\tau)d\tau = 0$, se sigue que $G(\cdot, t) \to g$ unif. en $[a, b]$ si $t \to d^-$. □

En este punto tenemos todas las herramientas para poder extender la regla de Leibniz a integrales impropias.

Teorema 9.9 (Regla de Leibniz para integrales impropias)**.** *Sea $\varphi : [a, b]\times[c, d) \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial\varphi}{\partial x} : [a, b] \times [c, d) \to \mathbb{R}$ existe y es continua. Sean*

$$G(x,t) = \int_c^t \varphi(x,\tau)d\tau \quad y \quad g(x) = \int_c^d \varphi(x,\tau)d\tau,$$

y asuma que satisfacen la condición (1) del Corolario 9.4. Si $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \to \psi$ unif. en $[a, b]$ si $t \to d^-$, entonces g es de clase C^1 en $[a, b]$ y

$$\psi(x) = g'(x) = \int_c^d \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)d\tau.$$

En particular, el resultado es válido si existen funciones $h, h_1 : [c, d) \to \mathbb{R}$ tales que

$$|\varphi(x,t)| \leq h(t), \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq h_1(t), \quad \text{para todo } (x,t) \in [a,b]\times[c,d)$$

y tales que $\int_c^d h(\tau)d\tau$ y $\int_c^d h_1(\tau)d\tau$ converjan.

Demostración. Por la regla de Leibniz para integrales de Riemann, Teorema 8.8,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \int_c^t \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)d\tau.$$

Como $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ es continua en $[a, b] \times [c, d)$, el Corolario 9.4 asegura que $\frac{\partial G}{\partial x}$ es continua en este dominio. Note que por definición de ψ tenemos que

$$\psi(x) = \lim_{t\to d^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \lim_{t\to d^-} \int_c^t \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)d\tau = \int_c^d \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)d\tau.$$

La fórmula $g'(x) = \psi(x)$ se sigue de la Proposición 9.4(3). Además, la Proposición 9.4(1) muestra que ψ es continua en $[a, b]$ y por tanto g es de clase C^1 allí.

Finalmente, si existen h y h_1 como en el enunciado, el Corolario 9.4(3) implica que $g(x)$ y $\psi(x)$ convergen para todo $x \in [a, b]$, $G(\cdot, t) \to g$ y $\frac{\partial G}{\partial x}(\cdot, t) \to \psi$ unif. en $[a, b]$ si $t \to d^-$. Así, las condiciones de la primera parte son satisfechas. □

Los resultados presentados en esta sección también son válidos para intervalos de la forma $(-\infty, d]$ o (c, d), donde la integral es impropia en ambos extremos del intervalo. Terminamos esta sección con un ejemplo de esta situación. Más ejemplos se incluyen en los ejercicios y en el Proyecto 13.3 sobre la función Gamma.

Ejemplo 9.5.1. Considere la función definida por

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt, \qquad x > 0.$$

Esta integral es impropia para $t = 0$ y $t = +\infty$. Para demostrar que converge necesitamos analizar la función $\varphi(x, t) = (e^{-xt} - e^{-t})/t$, para $x, t > 0$. En este dominio tenemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e^{-xt}$ que es continua allí.

Fijemos un intervalo $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$. Aplicando el Teorema del valor medio para derivadas a $\varphi(x, t)$ como función de x, podemos escribir

$$\left|\varphi(x, t)\right| = |e^{-\xi t}||x - 1|,$$

para cierto $\xi = \xi_t$ entre x y 1. Distinguimos dos casos. Primero, si $1 < \xi < x$, entonces $e^{-\xi t} \leq e^{-t}$. Segundo, si $a \leq x < \xi < 1$, entonces $e^{-\xi t} \leq e^{-at}$. En cualquier caso obtenemos que

$$|\varphi(x, t)| \leq h(t) = (b + 1)e^{-a' t}, \qquad x \in [a, b] \text{ y } t > 0,$$

donde $a' = \text{mín}\{1, a\}$. Por otra parte, $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leq h_1(t) = e^{-at}$, si $x \in [a, b]$ y $t > 0$. Como $\int_0^{+\infty} h(\tau)d\tau$ y $\int_0^{+\infty} h_1(\tau)d\tau$ convergen, podemos aplicar el Teorema 9.9 para concluir que

$$\int_{1/t}^{t} \varphi(x, \tau)d\tau \quad \text{y} \quad \int_{1/t}^{t} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \tau)d\tau$$

convergen uniformemente en $[a, b]$ cuando $t \to +\infty$, que ϕ converge y es de clase C^1 en $[a, b]$ y además

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-x\tau} d\tau = \left.\frac{e^{-x\tau}}{x}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}.$$

Finalmente, como $\phi(1) = 0$, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, $\phi(x) - \phi(1) = -\int_1^x ds/s$, es decir

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt = -\ln(x), \qquad x > 0.$$

En particular, deducimos la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln(b/a), \qquad a, b > 0.$$

Ejercicios

9.5.1 Verificar que es posible derivar $\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = 1/x$, $x > 0$, para obtener

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt = \frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad x > 0.$$

9.5.2 Resolver el Ejercicio 8.7.7 derivando $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x}$, para $x > 0$.

9.5.3 Considere la función

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}dt, \quad x \geq a > -1.$$

Justificar por qué se puede calcular $g'(x)$ con la regla de Leibniz y comprobar que $g(x) = \ln(x + 1)$.

9.5.4 Emplear la regla de Leibniz para demostrar las fórmulas

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos(xt)}{t}\right) e^{-t}dt = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2), \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x > 0.$$

La segunda fórmula se extiende para $x = 0$ vía el Ejemplo 8.7.3.

9.5.5 Comprobar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + a^2t^2)}{1 + t^2}dt = \pi \ln(1 + a)$, para $a \geq 0$.

9.5.6 Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 t^x(\ln x)^m dt = (-1)^m \frac{m!}{(x + 1)^{m+1}}$, si $x > -1, m \in \mathbb{N}$.

9.5.7 Sea $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$. Aplicando la regla de Leibniz e integración por partes, demostrar que $g'(x) = -xg(x)/2$. Deducir que $(e^{x^2/4}g)'(x) = 0$ y así

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

Emplear la misma técnica para demostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 - x^2/t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}, \qquad x \geq 0.$$

Indicación: $e^s \geq s + 1$ puede ser útil para acotar la derivada del integrando.

9.6. Algunas funciones extrañas

Esta, la última sección del texto, tiene como objetivo incluir ejemplos de funciones que a primera vista pueden contradecir nuestra intuición. Por esta razón nos solemos referir a ellas como patológicas. Entre ellas destacamos funciones que no son diferenciables en ningún punto, curvas que llenan el espacio, funciones diferenciables con derivada no integrable y funciones suaves que no son analíticas en ningún punto. Ejemplos de otras funciones con comportamiento extraño se incluyen en los ejercicios.

Comenzamos la discusión con funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la propiedad del valor intermedio: dados $a < b$ y ξ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \xi$. El Teorema del valor intermedio asegura que una función continua tiene esta propiedad, así como también la tienen las derivadas de funciones, gracias al Teorema de Darboux 7.7. Sin embargo, existe funciones que satisfacen esta propiedad sin ser continuas en ningún punto. Más aún, existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son sobreyectivas en todo intervalo, es decir que

$$f(a, b) = \mathbb{R}, \qquad \text{para todo intervalo } (a, b) \subseteq \mathbb{R}. \tag{9.15}$$

Este tipo de funciones no pueden ser continuas en ningún punto. En efecto, si f fuera continua en x_0, dado $\epsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

Esto impediría que $f(x_0-\delta, x_0+\delta) = \mathbb{R}$. El siguiente ejemplo ilustra una construcción ingeniosa de una función de este tipo.

Ejemplo 9.6.1 (La función en base 13 de Conway)**.** Este ejemplo fue dado por J. Conway empleando la expansión de los números reales en base 13. Para este caso, un algoritmo similar al descrito en la Sección 4.3 permite demostrar que cada $x > 0$ se puede escribir de manera única como

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{13^n}, \qquad a_0 \in \mathbb{N}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C\},$$

donde $A = 10$, $B = 11$ y $C = 12$. Escribiendo también $a_0 = b_0 + b_1 13 + \cdots b_m 13^m$, con $b_j \in \{0, 1, \ldots, C\}$ mediante el algoritmo de la división, de forma abreviada notamos

$$x = b_m \ldots b_1 b_0 . a_1 a_2 a_3 \ldots_{13} .$$

Esta expansión es única si no admitimos colas infinitas con C. Por ejemplo, escribimos 1 en vez de $0.CCC\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} C/13^n$. Bajo estas convenciones la función de Conway $f_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como una función par ($f_C(-x) = f_C(x)$) y para $x > 0$:

1. Si su expansión en base 13 a partir de un punto es $Ax_1 \dots x_n C y_1 y_2 \dots$, con $x_j, y_l \in \{0, 1, \dots, 9\}$, entonces

$$f_C(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j 10^{n-j} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{y_l}{10^l} = x_1 x_2 \dots x_n . y_1 y_2 \dots_{10}, \text{ (en base 10).}$$

2. Si su expansión en base 13 a partir de un punto es $Bx_1 \dots x_n C y_1 y_2 \dots$, con $x_j, y_l \in \{0, 1, \dots, 9\}$, entonces $f_C(x) = -x_1 x_2 \dots x_n . y_1 y_2 \dots_{10}$.

3. $f_C(x) = 0$ en los demás casos.

La intuición bajo esta definición es la siguiente. Si usamos los símbolos $A = +$, $B = -$ y $C = .$ como lo hizo Conway originalmente, entonces, al escribir un número en base 13 con esta notación algunos números cobrarán sentido en base 10, aunque otros no. Por ejemplo, $320685 = 11 \cdot 13^4 + 2 \cdot 13^3 + 12 \cdot 13^2 + 7 \cdot 13 + 1 = B2C71$ y $f_C(B2C71) = -2.71$ sí, pero $324 = 1 \cdot 13^2 + 11 \cdot 13 + 12 = 1BC(= 1 + .)$ no. De esta manera, la función de Conway actúa de manera no trivial en los números cuya expansión en base 13 cobra sentido en base 10 a partir de un punto.

Para demostrar que f_C satisface (9.15) sea $z = \pm x_1 x_2 \dots x_n . y_1 y_2 \dots_{10} \in \mathbb{R}$ escrito en base decimal. Dado $0 < a < b$, por la propiedad arquimediana existen $m, N \in \mathbb{N}$ tales que $(\frac{m}{13^N}, \frac{m+1}{13^N}) \subseteq (a, b)$. Como $m/13^N = (b_0 \dots b_k . a_1 \dots a_N)_{13}$ tiene una representación finita en base 13, podemos considerar el número

$$\alpha = (b_0 \dots b_k . a_1 \dots a_N \square x_1 x_2 \dots x_n C y_1 y_2 \dots)_{13} \in \left(\frac{m}{13^N}, \frac{m+1}{13^N} \right),$$

donde $\square = A$ o B dependiendo del signo de x. Por construcción, $f(\alpha) = z$. Esto demuestra (9.15) para intervalos en $(0, +\infty)$. Los demás casos se reducen a este empleando la paridad de f.

En particular, f_C no es continua en ningún punto y tampoco es acotada en ningún intervalo. Otro ejemplo, no constructivo, de funciones con esta propiedad se da en el Ejercicio 9.6.1.

Discutimos ahora un ejemplo de *curva que llena al espacio (space-filling curve)*.

Ejemplo 9.6.2 (La curva de Hilbert)**.** Este consiste en una aplicación

$$f_H : [0, 1] \to [0, 1]^2$$

que es continua y sobreyectiva. Su construcción es de naturaleza geométrica y se basa en la idea de bisección. En efecto, de ser posible construir dicha función, si dividimos el intervalo $[0, 1]$ y el cuadrado $[0, 1]^2$ en 4 partes iguales, cada subintervalo se podría enviar de manera sobre en algunos de estos subcuadrados. Este proceso se podría iterar indefinidamente. La idea de Hilbert consiste en organizar estas familias de cuadrados de forma que subintervalos adyacentes se correspondan a cuadrados

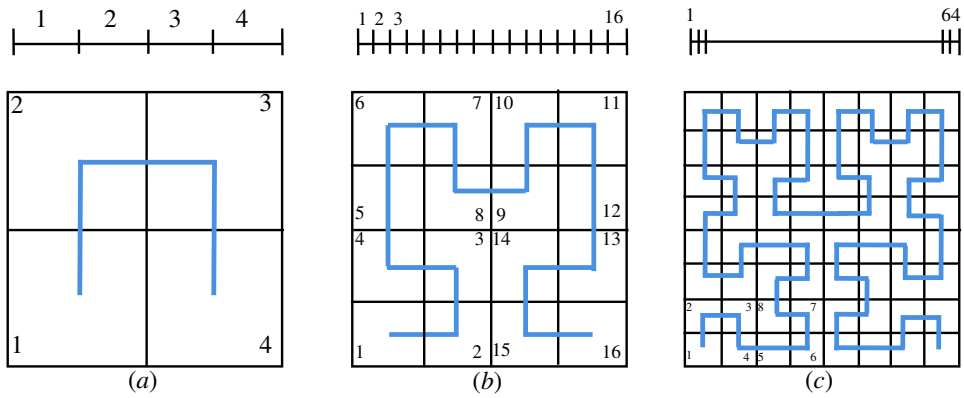

Figura 9.1: Los primeros pasos para generar la curva de Hilbert.

consecutivos según dicho orden. Además, que se preserven las contenencias, es decir, que si un cuadrado se corresponde a un intervalo, sus subcuadrados se correspondan a subintervalos de dicho intervalo.

El orden que empleó Hilbert se puede visualizar en la Figura 9.1 donde se muestran los primeros pasos del método.

De esta manera, cada $t \in [0,1]$ queda determinado por una única sucesión de intervalos encajados $\{I_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{n,t} = \{t\}$. A esta sucesión corresponden entonces una única sucesión de cuadrados cerrados encajados $\{Q_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Note que por construcción las diagonales de estos cuadrados se relacionan por

$$\operatorname{diam}(Q_{n,t}) = \frac{\operatorname{diam}(Q_{n-1,t})}{2} = \cdots = \frac{\operatorname{diam}(Q_{0,t})}{2^n}.$$

El valor $f_H(t)$ se define como el punto determinado por la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_{n,t}$, que en efecto consiste de un único elemento gracias al Teorema 4.5.

La curva de Hilbert satisface las siguientes propiedades.

Teorema 9.10. *La curva de Hilbert $f_H = (\varphi_H, \psi_H) : [0,1] \to [0,1]^2$ es sobreyectiva y continua. Además las funciones $\varphi_H, \psi_H : [0,1] \to [0,1]$ no son diferenciables en ningún punto de su dominio.*

Demostración. Para demostrar que f_H es sobre basta notar que dado $(x_0, y_0) \in [0,1]$, existe una sucesión de cuadrados $\{Q_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$ como antes, tales que $\{(x_0, y_0)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_{n,t}$. Esta sucesión de cuadrados proviene de una única sucesión de intervalos encajados en $[0,1]$ cuya intersección determina un único punto $t_0 \in [0,1]$. Por definición, $(x_0, y_0) = f_H(t_0)$.

En la n-ésima iteración del proceso de construcción, $[0,1]$ se ha dividido en 4^n intervalos de longitud $1/4^n$. Dado $\epsilon > 0$ escoja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{5}/2^N < \epsilon \leq \sqrt{5}/2^{N-1}$ y sea $0 < \delta < 1/4^N$. Si $s, t \in [0,1]$ y $0 < s - t < \delta$, entonces el intervalo $[s,t]$ interseca a lo más dos de los subintervalos consecutivos anteriores. Sus imágenes

estarán, en el peor de los casos, en dos cuadrados consecutivos, de lado $1/2^N$. Como estos cuadrados forman un rectángulo de diagonal $\sqrt{5}/2^N$, concluimos que

$$\|f_H(s) - f_H(t)\|_2 \leq \frac{\sqrt{5}}{2^N} < \epsilon.$$

Por tanto, f_H es continua.

Dado $n \geq 3$ y $t \in [0,1]$, escoja $t_n \in [0,1]$ con $|t - t_n| \leq 10/4^n$ y tal que $f_H(t)$ y $f_H(t_n)$ estén separados por al menos un cuadrado de longitud $1/2^n$. Entonces

$$\frac{|\varphi_H(t) - \varphi_H(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{1/2^n}{10/4^n} = \frac{2^n}{10}, \qquad \frac{|\psi_H(t) - \psi_H(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{2^n}{10},$$

de donde se sigue que estas funciones no son diferenciables en t. □

Existen muchos ejemplos de tales curvas y funciones con este tipo de propiedades. Por ejemplo, el lector puede consultar [134] para ver que la curva de Koch (el fractal copo de nieve, ver Figura 14.3) no es diferenciable en ningún punto.

Ejemplo 9.6.3 (Derivadas no integrables)**.** La segunda versión del Teorema Fundamental del Cálculo 8.5 requiere de la integrabilidad de la derivada de la función. Esta no es una hipótesis superflua, por ejemplo, la función del Ejemplo 7.1.4, aunque diferenciable, su derivada no es acotada en ningún intervalo de la forma $[-r, r]$ y por tanto no puede ser integrable allí.

Por otra parte, existen funciones diferenciables, que a pesar de tener derivada acotada, su derivada no es integrable. El primer ejemplo fue dado por V. Volterra en 1881. Para los detalles de la construcción el lector puede consultar [106]. Explicaremos aquí una modificación más sencilla del ejemplo de Volterra dada en [57]. Considere un conjunto abierto $U \subseteq (0,1)$ que sea denso en $[0,1]$ y tal que

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

donde los intervalos (a_n, b_n) son disjuntos dos a dos y su longitud total no supere a $1/2$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n \leq 1/2$, ver Ejercicio 8.5.5. Luego, para cada n, escoja $[c_n, d_n] \subseteq (a_n, b_n)$ determinado por las condiciones

$$\frac{c_n + d_n}{2} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad d_n - c_n = (b_n - a_n)^2.$$

En particular,

$$c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}(1 - (b_n - a_n)) > \frac{b_n - a_n}{4}, \tag{9.16}$$

porque $b_n - a_n < 1/2$.

Ahora, consideramos una función continua $f_n : [0,1] \to [-1,1]$ que satisfaga

$$f_n|_{[0,c_n]} = f_n|_{[d_n,1]} = 0, \qquad \int_{c_n}^{d_n} f_n(t)dt = 0, \qquad \|f_n\|_{[0,1]} = |f(t_n)| = 1, \text{con } t_n \in (c_n, d_n).$$

Por ejemplo, f_n puede ser una función lineal a trozos. Sea

$$f : [0,1] \to [-1,1], \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Note que como los intervalos (a_n, b_n) son disjuntos dos a dos, para cada $x \in [0,1]$ a lo más un sumando de esta serie es no nulo. Esta función satisface que

$$S_f = [0,1] \setminus U.$$

En efecto, $f|_{(a_n,b_n)} = f_n$ es continua y por tanto f es continua en U. Para mostrar que f no es continua en $[0,1] \setminus U$, consideramos el caso en que $x \in (0,1] \setminus U$ y $x \neq a_n$, $x \neq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Los demás casos siguen la misma línea de razonamiento. Dado $\delta > 0$, por la densidad de U debe existir $y \in U$ tal que $x - \delta < y < x$. Si $y \in (a_p, b_p)$, entonces $y < b_p < x$ (de lo contrario $x \leq b_p$ y x estaría en U o $x = b_p$). De nuevo por densidad, debe existir $z \in U$ con $b_p < z < x$. Si $z \in (a_n, b_n)$ se sigue que $b_p < a_n < b_n < x$ (porque (a_p, b_p) y (a_n, b_n) son disjuntos). En particular, $|t_n - x| < \delta$ pero $|f(t_n) - f(x)| = |f(t_n)| = 1$. Por tanto, f no es continua en x.

Note que S_f no tiene medida cero porque la longitud de U es a lo más $1/2$, compare con el Ejercicio 8.5.4. Por tanto, el Teorema de Lebesgue 8.10 demuestra que f no es integrable en $[0,1]$. Definamos ahora

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t)dt.$$

De nuevo, para cada $x \in [0,1]$, a lo más uno de estos sumandos es no nulo. Veamos que F es la función requerida mostrando que es diferenciable en $[0,1]$ y $F' = f$. Esta igualdad se verifica fácilmente para los puntos $x \in U$: si $x \in (a_n, b_n)$, tenemos que $F(x) - F(a_n) = \int_{a_n}^x f_n(t)dt$. Por el Teorema 8.4 se tiene que $F'(x) = f_n(x) = f(x)$, porque f_n es continua. Ahora, para los puntos $x \in S_f \setminus \{1\}$ veamos que

$$F'_+(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = 0.$$

Si $x = a_k$, la igualdad se verifica porque $F|_{[a_k,c_k]} = 0$. Si $x \neq a_k$, para todo k, fije y tal que $x < y < 1$. Tenemos dos casos:

1. Si $y \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)$, entonces $F(y) - F(x) = 0 - 0 = 0$.

2. Si $y \in (c_p, d_p)$, para algún p, como $x < a_p < c_p < y$ y $b_p - a_p < 4(c_p - a_p)$ por (9.16), tenemos que $|F(y) - F(x)| = \left|\int_{c_p}^y f_p(t)dt\right| \leq y - c_p < d_p - c_p = (b_p - a_p)^2 < 16(c_p - a_p)^2 \leq 16(y - x)^2$.

De aquí se sigue el límite requerido. El mismo tipo de argumento demuestra que $F'_-(x) = 0$, para todo $x \in S_f \setminus \{0\}$. Por tanto, la derivada de F existe, es acotada y no es integrable en $[0,1]$, como requeríamos.

Terminamos esta sección con un ejemplo tomado de [76] sobre una función que es C^∞ en toda la recta real pero que no es analítica en ningún punto.

Ejemplo 9.6.4. Consideremos la función

$$\phi(x) = \exp\left(-1/x^2\right)\exp\left(-1/(x-1)^2\right), \qquad 0 < x < 1,$$

y $\phi(x) = 0$ para los demás valores de x.

En términos de la función f del Ejemplo 7.6.2, $\phi(x) = f(x^2)f((x-1)^2)$. Por tanto, $0 \le \phi(x) < 1$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(1) = 0$, si $n \in \mathbb{N}$. Note que ϕ es analítica en $\mathbb{R}$ salvo en 0 y 1.

Consideremos ahora las funciones

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x), \qquad \phi_j(x) = \frac{1}{j!}\phi(2^j x - \lfloor 2^j x \rfloor)).$$

La gráfica de Φ se bosqueja en la Figura 9.2. La idea es que cada función ϕ_j falla en ser analítica cuando $2^j x - \lfloor 2^j x \rfloor = 0$, es decir $x = k/2^j$, con $k \in \mathbb{Z}$. El conjunto de estos puntos se reduce a

$$\Omega = \{m/2^n : n \in \mathbb{N}^+, m \in 2\mathbb{Z} + 1\},$$

quien resulta ser denso en $\mathbb{R}$. Esto impedirá que Φ sea analítica en algún punto de $\mathbb{R}$.

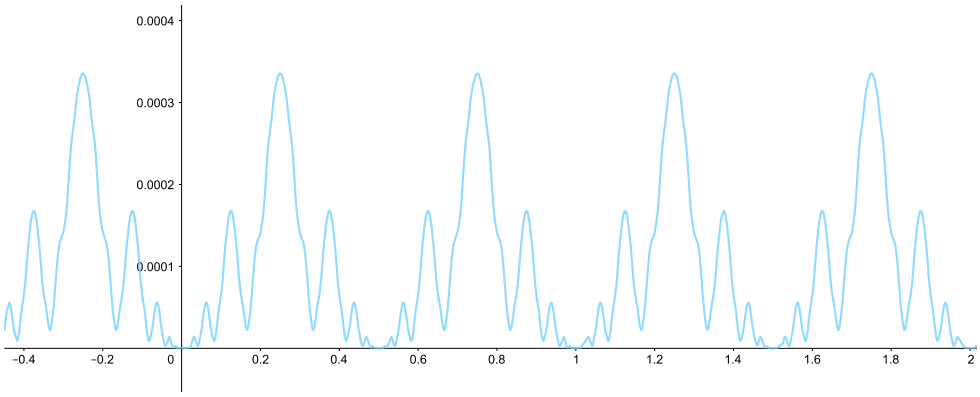

Figura 9.2: La función Φ no es analítica en ningún punto.

Más precisamente, si $x = k/2^j \in \Omega$, el hecho que $\phi^{(n)}(0) = 0$ implica que ϕ_j es suave allí, aunque no analítica. En el caso $k < 2^j x < k+1$, como $2^j x - \lfloor 2^j x \rfloor = 2^j x - k$, ϕ_j es analítica en dicho intervalo y además $\phi_j^{(n)}(x) = (2^{jn}/j!)\phi^{(n)}(2^j x - \lfloor 2^j x \rfloor))$. Por tanto, ϕ_j es C^∞ en $\mathbb{R}$ y cada serie $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ converge uniformemente gracias al M-test de Weierstrass. El Corolario 9.3 muestra entonces que Φ define una función suave en $\mathbb{R}$.

Si $\Phi(x)$ fuera analítica en algún $x \in \mathbb{R}$, lo sería también en una vecindad U de x. En particular, en algún punto de la forma $x_0 = m/2^n \in U \cap \Omega$. Como $\phi_j(x)$ es analítica en x_0 para $j = 1, \ldots, n-1$, también lo sería $\Phi_1(x) = \sum_{j=n}^{\infty} \phi_j(x)$. Pero $\Phi_1^{(k)}(x_0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ mientras que $\Phi_1(x) > 0$ para $x \neq x_0$ en un intervalo centrado en x_0. Esta contradicción muestra que Φ no es analítica en x como se requería.

Finalmente, como $\Phi(x) \geq 0$ en $\mathbb{R}$, la función $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt$ es creciente, suave en $\mathbb{R}$ y tampoco es analítica en ningún punto.

Ejercicios

9.6.1 ($*$ Requiere teoría de grupos) Considere el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$. Por el Teorema de Lagrange, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}| \cdot |\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$ y por tanto $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$. Existe entonces $g : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sobreyectiva.

Si $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\pi(x) = x + \mathbb{Q}$ es la aplicación cociente, entonces la función $f = g \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que $f(a, b) = \mathbb{R}$ para todo $a < b$. En efecto, si $z \in \mathbb{R}$, tome $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x + \mathbb{Q}) = z$. Por tanto,

$$f(x + r) = g(\pi(x + r)) = g(x + r + \mathbb{Q}) = g(x + \mathbb{Q}) = z, \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

Mostrar que existe $\alpha \in (x + \mathbb{Q}) \cap (a, b)$ y así $f(\alpha) = z$.

9.6.2 Considere la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x),$$

donde $\varphi(x) = 2 \cdot \operatorname{dist}(2x, \mathbb{Z})$ es la función del Ejemplo 1.4.6. Comprobar que f es continua. Sin embargo, f no es diferenciable en ningún punto como lo muestra el siguiente argumento dado por W. Rudin.

a) Dado $x \in \mathbb{R}$, para cada $m \in \mathbb{N}^+$ sea $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$, donde el signo se elije de forma que no haya ningún entero entre $4^m x$ y $4^m(x + \delta_m)$. Considere el cociente

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}.$$

Mostrar que si $n > m$, $\gamma_n = 0$ y si $0 \leq n < m$, entonces $|\gamma_n| \leq 4^n$. Además, por la elección de δ_m, $|\gamma_m| = 4^m$.

b) Emplear estas observaciones para acotar

$$\left|\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \geq \frac{3^m + 1}{2}$$

y concluir que $f'(x)$ no existe.

9.6.3 (La curva de Schoenberg) Considere $\gamma = (f, g) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(3^{2n}t)}{2^n}, \qquad g(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(3^{2n+1}t)}{2^n} = f(3t),$$

donde p es la función par de periodo 2 dada por la Figura 9.3.

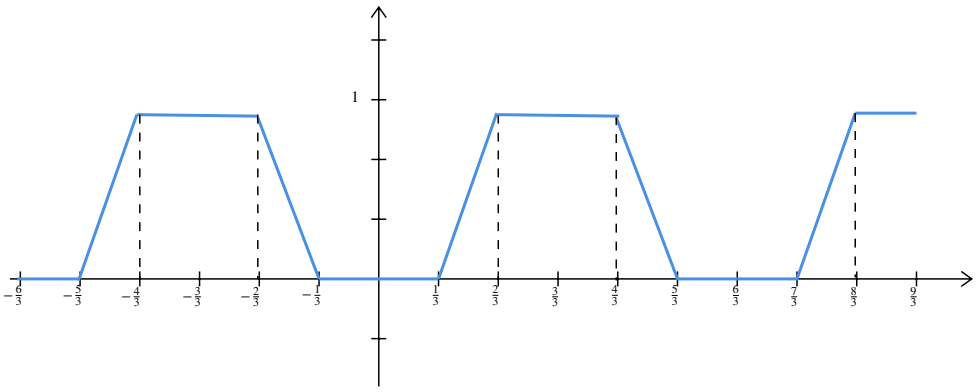

Figura 9.3: La gráfica de la función p, de periodo 2.

El objetivo de este ejercicio es demostrar que γ es continua, tiene como imagen $[0, 1]^2$ y además no es diferenciable en ningún punto de su dominio.

a) [119] Dado $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$, empleando su escritura binaria, digamos $x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}/2^j$, $y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}/2^j$, donde cada $a_l = 0$ o 1, comprobar que $f(3^n t_0) = a_n$ y que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ donde

$$t_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}.$$

Por tanto, γ es sobre. De hecho, este argumento muestra que $\gamma(C) = [0, 1]^2$, donde C es el conjunto de Cantor, Ejercicio 4.3.8.

b) [114] Note que basta trabajar con f, porque $g(t) = f(3t)$. Calcular

$$\frac{f(9^{-n}) - f(0)}{9^{-n}} = (9/2)^n, \qquad \frac{f(1 - 9^{-n}) - f(1)}{1 - 9^{-n}} = 9^n - (9/2)^n,$$

para $n \in \mathbb{N}^+$ y comprobar que $f'_+(0)$ ni $f'_-(1)$ existen.

c) Sea ahora $0 < t < 1$. Para demostrar que $f'(t)$ no existe considere $k_n = \lfloor 9^n t \rfloor \in \mathbb{N}$, $a_n = k_n/9^n$ y $b_n = (k_n + 1)/9^n$, de manera que $a_n \le t < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $b_n - a_n = 9^{-n} \to 0$ si $n \to +\infty$, concluir que $a_n \to t$ y $b_n \to t$ si $n \to +\infty$.

d) Asuma que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los cuales k_n es par y denote de nuevo por k_n a dicha subsucesión. Escriba $f(b_n) - f(a_n) = S_1 + S_2$ donde

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(p(9^{k-n}(k_n+1)) - p(9^{k-n}k_n)\right).$$

Si $k < n$, $9^{k-n} \leq 1/9$. Para estimar S_1 asuma el peor caso en que $9^k b_n$ y $9^k a_n$ están en un intervalo donde p decrece con pendiente -3. Así

$$p(9^k b_n) - p(9^k a_n) \geq -3(9^k b_n - 9^k a_n) = -3 \cdot 9^{k-n}.$$

Por tanto,

$$S_1 \geq -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3}{2^k}9^{k-n} = -\frac{3}{7 \cdot 9^n}((9/2)^n - 1).$$

Si $k \geq n$, $9^k a_n$ es par y $9^k b_n$ es impar, y por la definición de p obtenemos

$$S_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(p(\text{impar}) - p(\text{par})\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

Concluir que $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = 9^n(S_1 + S_2) \geq \dfrac{4(9/2)^n + 3}{7} \to +\infty$.

e) Asuma ahora que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los cuales k_n es impar y denote de nuevo por k_n a dicha subsucesión. Modifique el argumento anterior apropiadamente, esta vez acotando por arriba a S_1 para obtener

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \leq -\frac{4(9/2)^n + 3}{7} \to -\infty.$$

En cualquier caso, $f'(t)$ no existe para $0 \leq t \leq 1$.

9.6.4 (Funciones α-Hölder) Sea $0 < \alpha < 1$. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice de tipo *Hölder de exponente* α (o simplemente α-*Hölder*) si

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x,y\in[a,b], x\neq y}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

El espacio de tales funciones se suele denotar por $C^{0,\alpha}[a, b]$. Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) La función $f_\alpha(x) = x^\alpha$ es α-Hölder en $[0, 1]$. Sin embargo, $f_\alpha \notin C^{0,\beta}[0, 1]$ para $\alpha < \beta < 1$. Indicación: Ejercicio 6.4.3.

b) Si tomáramos $\alpha > 1$ en la definición y $f \in C^{0,\alpha}[a, b]$, entonces f es constante. Si $\alpha = 1$, la función sería de Lipschitz.

c) Una función de Lipschitz es α-Hölder. Además, si $f \in C^{0,\alpha}[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.

d) Si $0 < \alpha < \beta \leq 1$, entonces $C^{0,\beta}[a,b] \subseteq C^{0,\alpha}[a,b]$. Indicación: mostrar que $\|f\|_\alpha \leq \text{máx}\{2\|f\|_{[a,b]}, \|f\|_\beta\}$.

9.6.5 [17, 123] La *función de Van der Waerden* se define por

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t), \qquad a_j(t) = \frac{a_0(2^j t)}{2^j},$$

donde $a_0(t) = \text{dist}(t, \mathbb{Z})$ es la distancia de t al entero más cercano. El objetivo de este ejercicio es demostrar que f es α-Hölder, para todo $0 < \alpha < 1$ y sin embargo f no es diferenciable en ningún punto de la recta real.

a) Fije $0 < \alpha < 1$. Dado $0 < |t| \leq 1$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n-1} < |t| \leq 2^{-n}$. Recordando la desigualdad (7.2) mostrar que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j(x+t) - a_j(x)| \leq n|t| \leq n2^{-n(1-\alpha)}|t|^\alpha.$$

Por otra parte, como $0 \leq a_j(x) \leq 2^{-j-1}$, entonces $|a_j(x+t) - a_j(x)| \leq 2^{-j-1}$. Emplear esto para acotar la suma restante por $2^{-n} \leq 2|t| \leq 2|t|^\alpha$ y concluir

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M_\alpha |t|^\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{9.17}$$

donde $M_\alpha = 2 + \sup_{n\in\mathbb{N}} n2^{-n(1-\alpha)}$. ¿Cómo se puede estimar M_α?

b) Si $|t| > 1$, como $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $|f(x+t) - f(x)| \leq 1 \leq |t|^\alpha$. Tomando M_α como antes deduzca que (9.17) es válida para este caso. Esto demuestra que f es α-Hölder en $\mathbb{R}$.

c) Para demostrar que f no es diferenciable en ningún punto $x \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $k_n = \lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ y $u_n = k_n/2^n \leq x < (k_n+1)/2^n = v_n$. Justificar por qué

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(v_n) - a_j(u_n)}{v_n - u_n}.$$

Como cada a_j es lineal en $[u_n, v_n]$, $0 \leq j < n$, cada cociente en la suma anterior coincide con $(a_j)'_+(x) = \pm 1$. Si $f'(x)$ existiera, al hacer $n \to +\infty$ (Ejercicio 7.1.11) obtendríamos que

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \pm 1.$$

Como esta serie diverge, $f'(x)$ no puede existir. Este argumento se puede refinar para demostrar que de hecho f no admite derivadas laterales en ningún punto, ver [31].

Parte II

Proyectos

Capítulo 10

Números reales y complejos

Este capítulo consta de tres proyectos dedicados a profundizar sobre números irracionales y complejos. En el primero se explora la expansión decimal de un número real como herramienta para determinar irracionalidad, además de demostrar varios teoremas sobre densidad debidos a Dirichlet. También se establece la irracionalidad de constantes como $\pi, \ln(2), \sin(1), \cos(1)$ como consecuencia particular de un criterio relacionado con ecuaciones diferenciales. Por otra parte, el segundo proyecto discute otra expansión posible para un número real, esta vez empleando fracciones generadas por un algoritmo dado por Gauss. Como caso particular determinaremos la expansión en fracciones continuas del número de Euler e. Finalmente, el último proyecto trata sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Este se enfoca en extender resultados sobre sucesiones y series así como continuidad, diferenciación e integración de funciones de la forma $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Finalmente, se incluye la demostración clásica del Teorema Fundamental del Álgebra.

10.1. Algunos números irracionales

El objetivo de este proyecto es establecer la irracionalidad de algunas constantes como π y e^r con $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Para comenzar discutimos la expansión decimal de un número real y cómo a partir de ella podemos deducir la irracionalidad de un número. Como ejemplos particulares presentamos los números de Liouville que además resultan ser trascendentes. Incluimos también el Teorema de Dirichlet sobre la densidad del conjunto $\{n\alpha + m : m, n \in \mathbb{N}\}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y la naturaleza de los números de la forma a^a, con $a > 0$.

En este proyecto escribiremos $(n, m) \geq 1$ para denotar al máximo común divisor entre dos enteros no nulos n y m. Ser primos relativos significa que $(n, m) = 1$.

Recordemos de la Sección 4.3 que todo número real $x > 0$ admite una expansión

decimal de la forma

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \qquad a_n \in \{0, 1, 2, \dots 9\}.$$

Empleando la serie geométrica podemos ver que si a partir de un punto la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica, entonces x es racional. En efecto, suponga que x tiene una expansión de la forma

$$\begin{aligned} x &= a_0, a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+p} a_{k+1} \dots a_{k+p} \dots \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+p}}{10^{k+p}}\right) + \left(\frac{a_{k+1}}{10^{k+p+1}} + \cdots + \frac{a_{k+p}}{10^{k+2p}}\right) + \cdots \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{10^{jp+k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+p}}{10^{jp+k+p}}\right), \end{aligned}$$

que se repite a partir de $a_{k+1}/10^{k+1}$ con periodo $p \geq 1$. Simplificando esta expresión obtenemos

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+p}}{10^{k+p}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}}$$

que claramente es racional. Por ejemplo, $x = 0.313131\dots$ satisface

$$x = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{31}{99}.$$

Por supuesto, esto también se deduce de restar x a $100x = 31.3131...$ para obtener $99x = 31$.

Recíprocamente, dado $r = p/q \in \mathbb{Q}$, con $p > 0$, $q > 0$ y $(p, q) = 1$, su expansión decimal debe ser finita o eventualmente periódica. Podemos demostrar esta afirmación aplicando el siguiente algoritmo:

1. Si $p \geq q$, reste de r su parte entera para escribir $r = \lfloor r \rfloor + p'/q'$, con $0 \leq p'/q' < 1$. Si $p'/q' = 0$, r es entero y hemos terminado. De lo contrario continúe con p'/q' en el siguiente paso.

2. Suponga $0 < p' < q'$. Factorice $q' = 2^a 5^b q''$ con $(2, q'') = (5, q'') = 1$ y escriba

$$\frac{p'}{q'} = \frac{1}{10^c} \cdot \frac{p''}{q''},$$

donde $p'' = 2^{a'} 5^{b'} p'$, $c = \text{máx}\{a, b\} \geq 0$, $a' = c - a$ y $b' = c - b$. Entonces p'/q' posee una expansión decimal finita o eventualmente periódica si y solo si p''/q'' lo hace (multiplicar por una potencia de 10 solo traslada la coma en dicha expansión). Si $q'' = 1$, $p'/q' = p''/10^c$ y como $p'' < 10^c$, esta fracción tendrá una expansión decimal finita. En este caso hemos terminado. De lo contrario $q' > 1$ y continúe con el siguiente paso.

3. Aplicando el paso (1) a p''/q'' basta tratar el caso $0 < p'' < q''$ y $(q'', 10) = 1$, es decir, ni 2 ni 5 son factores de q''. Aplicando el algoritmo de la división, para cada $j \in \mathbb{N}^+$, podemos encontrar enteros $b_j \geq 0$ y $0 \leq r_j < q''$ tales que

$$10^j = b_j q'' + r_j.$$

Como $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ solo asume valores entre 0 y $q'' - 1$, deben existir $j_1 < j_2$ mínimos tales que $r_{j_1} = r_{j_2}$. Por tanto, $10^{j_1}(10^{j_2-j_1} - 1) = 10^{j_2} - 10^{j_1} = q''(b_{j_2} - b_{j_1})$ es un múltiplo de q''. Como $(q'', 10) = 1$, entonces q'' debe dividir a $10^{j_2-j_1} - 1$, digamos $10^{j_2-j_1} - 1 = q''m$. Por tanto,

$$\frac{p''}{q''} = \frac{mp''}{mq''} = \frac{mp''}{10^l - 1},$$

donde $l = j_2 - j_1 > 0$. Note que $mp'' < 10^l - 1$ y así mp'' está formado a lo más por l dígitos, digamos $mp'' = b_1 b_2 \ldots b_{l-1} b_l = 10^{l-1} b_1 + 10^{l-2} b_2 + \cdots + 10 b_{l-1} + b_l$, con $b_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Como

$$\frac{1}{10^l - 1} = \frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{2l}} + \cdots,$$

se sigue que

$$\frac{mp''}{10^l - 1} = \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_l}{10^l}\right) + \left(\frac{b_1}{10^{l+1}} + \frac{b_2}{10^{l+2}} + \cdots + \frac{b_l}{10^{2l}}\right) + \cdots,$$

es decir, este número tiene una expansión decimal periódica y el algoritmo termina.

Note que la idea intuitiva tras el paso (3) es que al dividir p'' entre q'' los dígitos que se obtienen serán periódicos. El argumento anterior prueba que este siempre es el caso. Resumiendo esta discusión hemos demostrado el primer resultado de este proyecto.

Proposición 10.1. *Un número real $x > 0$ es racional si y solo si su expansión decimal es finita o eventualmente periódica. Más aún, si $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}^+$ y $(p, q) = 1$, la expansión decimal de x es finita si y solo si $q = 2^a 5^b$, para ciertos $a, b \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 10.1.1 (Números de Liouville)**.** Un número $\omega \in \mathbb{R}$ es un *número de Liouville* si para todo $n \in \mathbb{N}^+$ existe $p/q \in \mathbb{Q}$ con $q \geq 1$ tal que

$$0 < \left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

El Ejemplo 7.2.1 demuestra que estos números no son algebraicos, es decir, son *trascendentes*. En efecto, argumentando por contradicción, si existiera un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado n tal que $P(\omega) = 0$, elija $l \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^l < A$, donde A es

como en (7.4). Por hipótesis, existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que $|\omega - p/q| < 1/q^{l+n}$. Esto implicaría que $|\omega - p/q| < 1/(2^l q^n) < A/q^n$, contradiciendo (7.4). Estos argumentos son debidos a J. Liouville y datan de 1844.

Como todo número racional es algebraico, entonces los números de Liouville son irracionales. Ejemplos explícitos de este tipo de constantes son aquellas de la forma

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = 0, a_1 a_2 000 a_3 00000000000000000 a_4 0 \ldots \tag{10.1}$$

donde $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ y $a_k \neq 0$ para infinitos índices. La Proposición 10.1 demuestra que estos números son irracionales. Para demostrar que son de Liouville, dado $n \in \mathbb{N}^+$ elija $q_n = 10^{n!}$ y $p_n = 10^{n!} \sum_{k=1}^{n} a_k/10^{k!}$. Entonces

$$0 < \left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} \leq 9 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < 9 \sum_{j=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^j} = \frac{10}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{q_n^{n+1}} < \frac{1}{q_n^n},$$

como era requerido. En particular, el número

$$L = 0.110001000000000000000010 \ldots$$

llamada la *constante de Liouville* es un ejemplo explícito de un número trascendente.

En el algoritmo usado para demostrar la Proposición 10.1 hemos empleado implícitamente la función parte fraccionaria. Recordemos que $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1)$ se define por la ecuación $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Es claro que esta función es periódica de periodo 1. Requeriremos además las siguientes propiedades.

Lema 10.1. *La función parte fraccionaria* $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1)$ *satisface:*

1. $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}$, *si* $\{x\}+\{y\} < 1$. *Además* $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}-1$, *si* $\{x\}+\{y\} \geq 1$.
2. *Si* $x \notin \mathbb{Z}$, $\{-x\} = 1 - \{x\}$.
3. *Si* $\{y\} > \{x\}$, *entonces* $\{y - x\} = \{y\} - \{x\}$.
4. *Si* $n \in \mathbb{N}^+$ *y* $n\{x\} < 1$, *entonces* $n\{x\} = \{nx\}$.

Demostración. (1) Como $0 \leq \{x\} + \{y\} \leq 2$, analizamos dos casos. Primero, si $0 \leq \{x\} + \{y\} < 1$, esto equivale a $0 \leq x + y - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 1$ que a su vez es $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. De la definición de parte entera se sigue que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Por tanto,

$$\{x + y\} = x + y - \lfloor x + y \rfloor = x + y - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = \{x\} + \{y\}.$$

Para el segundo caso, de $1 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, se deduce que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ y la fórmula se sigue como antes.

(2) Como $0 = \{0\} = \{x - x\} = \{x\} + \{-x\} + a$, con $a = 0$ ó -1, pero $\{x\}, \{-x\} > 0$, necesariamente $a = -1$. (3) Escriba $\{y\} = \{y - x\} + \{x\} + a$, con $a = 0$ ó -1. Si $a = -1$, tendríamos que $\{y\} - \{x\} = \{y - x\} - 1 < 0$, contradiciendo la hipótesis. Finalmente, (4) se sigue por inducción, aplicando (1). □

Teorema 10.1 (Dirichlet)**.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Para cada $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $\{n\alpha\} < \epsilon$.*
2. *El conjunto $\{\{n\alpha\} \in [0,1] : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0,1]$.*
3. *El conjunto $\{n\alpha + m : n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. (1) Asuma que $\epsilon < 1$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$. Sea $b = \operatorname{máx} A$ con $A = \{\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}\}$. De esta forma A divide al intervalo $[0, b]$ en N subintervalos. Note que de estos intervalos, el de menor longitud tiene medida menor a b/N. Por tanto,

$$0 < \{k\alpha\} - \{j\alpha\} = \{(k-j)\alpha\} < b/N < 1/N < \epsilon,$$

para ciertos enteros $0 \leq k, j \leq N$. Si $k > j$, tomando $n = k - j$ hemos terminado. De lo contrario, sea $m = j - k \in \mathbb{N}^+$. Como $\{-m\alpha\} < \epsilon$, si elegimos $p = \lfloor 1/\{-m\alpha\} \rfloor \in \mathbb{N}^+$, entonces $p \leq 1/\{-m\alpha\} < p + 1$ y en particular

$$0 < 1 - p\{-m\alpha\} < \{-m\alpha\}.$$

Por tanto, tomando $n = pm$ y aplicamos el lema anterior, obtenemos

$$\{n\alpha\} = \{pm\alpha\} = 1 - \{-pm\alpha\} = 1 - p\{-m\alpha\} < \{-m\alpha\} < \epsilon,$$

como se requería.

(2) Dado $u \in [0,1]$ y $0 < \epsilon < u$, por (1) podemos elegir $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $\{k\alpha\} < \epsilon$. Si $j = \lfloor \frac{u}{\{k\alpha\}} \rfloor$, entonces $j \leq \frac{u}{\{k\alpha\}} < j + 1$, es decir

$$0 < u - j\{k\alpha\} < \{k\alpha\} < \epsilon.$$

Como $j\{k\alpha\} \leq u < 1$, el lema anterior muestra que $j\{k\alpha\} = \{(jk)\alpha\}$ y así $\{(jk)\alpha\} \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$. Esto demuestra que el conjunto dado es denso en $[0,1]$.

(3) Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Como $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$, por (2) existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $0 < x - \lfloor x \rfloor - \{n\alpha\} < \epsilon$, es decir $\xi = \lfloor x \rfloor + \{n\alpha\} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, como se requería.

□

Ejemplo 10.1.2. [126] La sucesión $\boldsymbol{x} = \{\sin(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene como conjunto de puntos de acumulación a $[-1,1]$. Para esto sea $y_0 \in [-1,1]$ y elija $x_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $\sin(x_0) = y_0$. Por continuidad, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|\sin(x) - y_0| < \epsilon$. Aplicando el Teorema 10.1(2) con $\alpha = 1/2\pi$ obtenemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{x_0}{2\pi} - \left\{\frac{n}{2\pi}\right\} < \frac{\delta}{2\pi}.$$

En otras palabras $0 < x_0 - x_1 < \delta$, donde $x_1 = 2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}$. Esto implica $|\sin(x_1) - y_0| < \epsilon$. Como $x_1 = 2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} = 2\pi\left(\frac{n}{2\pi} - k\right) = n - 2\pi k$, donde $k = \lfloor \frac{n}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{Z}$, concluimos por periodicidad que

$$|\sin(n) - y_0| < \epsilon.$$

Así y_0 es un punto límite de $\boldsymbol{x}$ como se quería demostrar. El mismo tipo de argumento demuestra la misma afirmación para la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. En particular, obtenemos las fórmulas

$$\limsup_{n\to+\infty} \sin(n) = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty} \sin(n) = -1,$$

y análogamente para el coseno.

Pasamos ahora al caso de números de la forma a^a con $a > 0$. Sobre este aspecto incluimos la siguiente proposición tomada de [91].

Proposición 10.2. *Cada número racional en el intervalo $I = ((1/e)^{1/e}, +\infty)$ es de la forma a^a con a irracional, o está en el conjunto $\{1, 4, 27, \dots\} = \{n^n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.*

Demostración. Considere la función $f : (1/e, +\infty) \to I$ definida por $f(x) = x^x$. Como $f(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$ y $f'(x) = x^x(1 + \ln(x)) > 0$ si $x > 1/e$, entonces f establece una biyección entre dichos intervalos. De esta forma, si $r \in I \cap \mathbb{Q}$ existe un único $a > 1/e$ tal que $r = f(a) = a^a$. El enunciado es equivalente a demostrar que si a es racional, debe ser un entero positivo. Escribamos $a = n/m$ y $r = b/c$ en forma reducida. Entonces estos valores satisfacen que

$$(n/m)^{n/m} = b/c, \qquad \text{o de forma equivalente} \qquad n^n c^m = b^m m^n.$$

Debemos demostrar que $m = 1$. De la ecuación anterior note que un primo divide a c^m si y solo si divide a m^n, porque $(b, c) = (n, m) = 1$. Por tanto,

$$c^m = m^n.$$

Si $m > 1$ y p es un primo tal que $m = p^j l$, con $(p, l) = 1$, entonces $c = p^i k$, con $(p, k) = 1$ y además $im = jn$. Así $i(p^j l) = jn$, p^j debe dividir a j y en particular $p^j \leq j$. Como $p \geq 2$, esto contradice la desigualdad $j < 2^j$. En conclusión $m = 1$, como se requería. □

El último resultado que presentamos, tomado de [94], establece la irracionalidad de π y e^r, $r \neq 0$ racional, entre otras constantes. La idea empleada se remonta a C. Hermite y fue utilizada por I. Nivent para dar una demostración sencilla de la irracionalidad de π [97]. Aunque el siguiente teorema es válido para ecuaciones con orden de derivación $n \geq 2$, nos restringimos al caso más sencillo $n = 2$.

Teorema 10.2. *Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución no nula de la ecuación*

$$L(U)(x) = p_0 U''(x) + p_1 U'(x) + p_2 U(x) = 0,$$

donde $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ y $p_2 \neq 0$. Si dado $b > 0$, $u(0), u(b), u'(0)$ y $u'(b)$ son racionales, entonces b es irracional.

Demostración. Multiplicando por un factor adecuado podemos suponer que los p_j son enteros. Por contradicción, si $b \in \mathbb{Q}$, escribamos $b = p/q$ con $(p, q) = 1$. Sean

$$f_m(x) = \frac{1}{m!}(qx)^m(p - qx)^m = \frac{q^{2m}}{m!}(x(b - x))^m, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Destacamos las siguientes propiedades de estos polinomios:

1. $f_m(x) > 0$ si $x \in [0, b]$ y alcanza un máximo en $x = b/2$. Así $0 \leq f_m(x) \leq C^m/m!$, donde $C = (qb/2)^2$.

2. $f_m^{(k)}(0), f_m^{(k)}(b) \in \mathbb{Z}$, para todo $k \geq 0$. En efecto, al expandir podemos escribir

$$f_m(x) = \sum_{j=m}^{2m} c_j x^j/m!,$$

para ciertos $c_j \in \mathbb{Z}$. Así $f_m^{(k)}(0) = 0$ si $k < m$ y $f_m^{(k)}(0) = k!c_k/m!$ si $m \leq k \leq 2m$. Como $f_m(x) = f_m(b - x)$, entonces $f_m^{(k)}(b) = (-1)^k f_m^{(k)}(0)$.

Definamos ahora los polinomios auxiliares

$$F_m(x) = \sum_{j=0}^{2m} t_j f_m^{(j)}(x), \qquad m \in \mathbb{N},$$

donde las constantes t_j se definen recursivamente por $t_0 = 1$, $p_2t_1 - p_1t_0 = 0$ y

$$p_2t_{j+2} - p_1t_{j+1} + p_0t_j = 0, \qquad j \geq 2.$$

Estas recurrencias muestran inductivamente que $p_2^j t_j \in \mathbb{Z}$, para todo $j \geq 0$.

Si consideramos el operador $L^*(V) = p_2V - p_1V' + p_0V''$, vemos que

$$L^*(F_m) = \sum_{j=0}^{2m} t_j(p_2f_m^{(j)} - p_1f_m^{(j+1)} + p_0f_m^{(j+2)}) = p_2f_m,$$

luego de reagrupar términos comunes a $f_m^{(j)}$ y usar las recurrencias que definen a los t_j. Por otra parte, la función $P = p_1uF_m + p_0(u'F_m - uF_m')$ satisface la identidad

$$P' = F_mL(u) - uL^*(F_m),$$

como se comprueba directamente. Por tanto, $P' = -p_2uf_m$. Al integrar sobre $[0, b]$,

$$-p_2\int_0^b u(t)f_m(t)dt = P(t)\Big|_0^b.$$

Como $p_2^j t_j \in \mathbb{Z}$, lo mismo es válido para $p_2^{2m}F_m^{(l)}(0)$ y $p_2^{2m}F_m^{(l)}(b)$, $l \geq 0$. Esto se debe a que $p_2^{2m}F_m^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{2m} p_2^{2m-j}(p_2^j t_j)f_m^{(j+l)}(x)$.

Por hipótesis, $u(0), u(b), u'(0), u'(b) \in \mathbb{Q}$. Si A denota el producto de los denominadores de estos valores cuando se expresan en fracciones reducidas, se sigue que $Ap_2^{2m}\ P(t)\big|_0^b$ es un entero, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como

$$Ap_2^{2m}\ P(t)\big|_0^b = -Ap_2^{2m+1} \int_0^b u(t) f_m(t) dt,$$

y u no es idénticamente cero, concluimos que

$$0 < Ap_2^{2m+1} \left| \int_0^b u(t) f_m(t) dt \right| \leq \frac{bAp_2^{2m+1} C^m \|u\|_{[0,b]}}{m!},$$

siendo $\|u\|_{[0,b]} = \sup_{t\in[0,b]} |u(t)| > 0$. Si tomamos m suficientemente grande para que el término de la derecha sea menor a 1, llegamos a una contradicción porque el término intermedio es un entero. En conclusión, b debe ser irracional. □

Corolario 10.1. *Las siguientes constantes son irracionales:*

1. π^2 *y* π.
2. $e^r, \sin(r), \cos(r), \frac{1}{2}(e^r \pm e^{-r})$, *para cada racional* $r \neq 0$.
3. $\ln(r)$ *con* r *racional positivo y* $r \neq 1$.

Demostración. (1) Si $\pi^2 \in \mathbb{Q}$, considere la solución $u(x) = \sin(\pi x)/\pi$ de la ecuación $y'' + \pi^2 y = 0$. Esto contradiría el teorema anterior para $b = 1$. Por tanto, π^2 es irracional. A su vez π también debe serlo, de lo contrario su cuadrado sería racional. (2) Si $e^r \in \mathbb{Q}$ con $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, considere la ecuación $y' - y = 0$ y la solución $y(x) = e^x$. La elección $b = r$ contradice el teorema anterior. Para los demás valores basta emplear el mismo razonamiento pero aplicado a las ecuaciones $y'' \pm y = 0$. (3) En su forma contrarrecíproca, si $\ln(r) = p/q \in \mathbb{Q}$, entonces de acuerdo con (2), $r = e^{p/q}$ no sería racional. □

Nota 10.1.1. La ecuación $L(U)(x) = 0$ del teorema anterior se puede resolver explícitamente. En efecto, si μ_1, μ_2 son las soluciones del polinomio $p_0 m^2 + p_1 m + p_0 = 0$, entonces $U(x)$ toma alguna de las formas

$$\lambda_1 e^{\mu_1 x} + \lambda_2 e^{\mu_2 x}, \quad \lambda_1 e^{\mu_1 x} + \lambda_2 x e^{\mu_1 x}, \quad \lambda_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

dependiendo de si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\mu_1 \neq \mu_2$, si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\mu_1 = \mu_2$, o si $\mu_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ y $\mu_2 = \alpha - i\beta$, respectivamente. Los valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que se determinan empleando los valores $U(0)$ y $U'(0)$.

Existen más técnicas para demostrar la irracionalidad de números reales. Entre ellas destacamos el artículo [66] que incluye una demostración de la irracionalidad de la constante de Apéry $\zeta(3)$.

Ejercicios

10.1.1 Encontrar la expansión decimal de $211/105$.

10.1.2 [74] Sea $A_9 \subseteq \mathbb{N}^+$ el conjunto de números enteros positivos en cuya expansión decimal no aparece el 9. Demostrar que la *serie de Kempner* (1914)

$$\sum_{n\in A_9} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots$$

converge. Misma pregunta para A_j definido análogamente, con $j = 1, 2, \cdots, 8$. Indicación: ¿cuántos términos hay en A_9 menores que 10^n?

10.1.3 ¿Cómo se debe modificar la demostración de la Proposición 10.1 si x se expande en otra base que no sea la base decimal?

10.1.4 Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}$ satisface una ecuación polinomial de la forma

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \qquad \text{con } c_j \in \mathbb{Z},$$

entonces $x \in \mathbb{Z}$ ó $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Aplicar esto para comprobar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $m^{1/n}$ son irracionales, donde $m \in \mathbb{N}$ no es la potencia n-ésima de un entero.

Indicación: si $x = a/b$ con $(a, b) = 1$, entonces $a^n = -b(c_1 a^{n-1} + \cdots + c_n b^{n-1})$. Mostrar que $b = 1$.

10.1.5 Emplear los números de la forma (10.1) para demostrar que el conjunto de números de Liouville no es contable. Concluir también que el conjunto de números trascendentes $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ no es contable.

10.1.6 Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(x + 1) = f(x + \alpha)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es constante.

10.1.7 Calcular el radio de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n)x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)x^n$.

10.1.8 Demostrar que $\tan(r) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. Indicación: expresar $\cos(2x)$ en términos de $\tan(x)$.

10.1.9 Mostrar que, siempre que no sean nulos, $\arcsin(r), \arccos(r), \arctan(r) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para $r \in \mathbb{Q}$ en el dominio de cada función.

10.2. Fracciones continuas simples

En la Sección 4.3 y en Proyecto 10.1 estudiamos la representación decimal de los números reales. Este proyecto tiene como objetivo introducir otra representación

posible a través de límites de un tipo especial de fracciones. Esta escritura revela patrones interesantes para ciertos números que son imperceptibles en su representación decimal. Nuestra exposición se basa principalmente en [99].

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos, excepto tal vez x_0, escribiremos

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] := x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}},$$

para denotar dicha fracción. Por tanto, tenemos que

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = x_0 + \frac{1}{[x_1, \ldots, x_n]} = \left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right]. \tag{10.2}$$

El primer objetivo de esta sección es estudiar el límite de $\{[x_0, x_1, \ldots, x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuando cada x_j es entero.

Sea entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos, excepto tal vez por a_0. Entonces cada valor $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ es un número racional. Es posible describir la fracción reducida que resulta de cada uno de estos valores a través de las sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas recursivamente por

$$p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \tag{10.3}$$

$$q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \tag{10.4}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, y en general p_n y q_n son enteros, porque cada a_n lo es. De hecho, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente, es decir

$$1 = q_0 \le q_1 < q_2 < \cdots < q_n < q_{n+1} < \cdots .$$

Además estos valores satisfacen las siguientes relaciones.

Lema 10.2. $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] = \dfrac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}$, *para todo* $x > 0$. *En particular,*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Por inducción sobre n. Si $n = 0$ la fórmula es inmediata. Asumiendo que es válida para algún $n - 1$, gracias a (10.2), (10.3) y (10.4) obtenemos que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_n + \frac{1}{x}\right] = \frac{(a_n + 1/x)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/x)q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}.$$

Por tanto, la relación es válida para n. El principio de inducción permite concluir la prueba. La segunda afirmación se sigue de nuevo de (10.3) y (10.4). □

De hecho las fracciones p_n/q_n son reducidas como lo demuestran las siguientes relaciones.

Lema 10.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \qquad p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n. \tag{10.5}$$

En particular, p_n y q_n son primos relativos.

Demostración. Para la primera fórmula aplicamos inducción. Para $n = 0$ la fórmula es clara. Ahora, si asumimos que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, entonces $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = (-1)^n$ como se requería. A partir de aquí se sigue que p_n y q_n son primos relativos porque cada factor que tengan en común debería ser un factor de $(-1)^{n-1}$.

Para la segunda fórmula basta observar que el lado izquierdo de la ecuación es

$$(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) a_n = (-1)^{n-2} a_n,$$

como se quería mostrar. □

Con estas herramientas podemos demostrar que la sucesión $\{[a_0, a_1, \ldots, a_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionales inducida por $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ siempre es convergente y su límite es un número irracional.

Teorema 10.3. *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números enteros positivos, excepto tal vez por a_0. Entonces la sucesión $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ descrita en el Lema 10.2 converge a un número ω. Estos valores satisfacen las desigualdades*

$$\frac{p_0}{q_0} < \cdots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \cdots < \omega < \cdots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} < \cdots < \frac{p_1}{q_1}$$

y además $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demostración. Las fórmulas del lema anterior se pueden escribir como

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}, \qquad \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Para $k = 2n$ en la primera relación vemos que $p_{2n}/q_{2n} < p_{2n-1}/q_{2n-1}$. Además, considerando índices pares e impares en la segunda deducimos que $\{p_{2n}/q_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y que $\{p_{2m+1}/q_{2m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es decreciente, porque $a_k \geq 1$, si $k \geq 1$. Con esta información, tenemos además que

$$p_{2n}/q_{2n} < p_{2n+2m}/q_{2n+2m} < p_{2n+2m-1}/q_{2n+2m-1} \leq p_{2m-1}/q_{2m-1}, \qquad n \geq 0, m \geq 1.$$

En conclusión, $\{p_{2n}/q_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente (por p_1/q_1) y $\{p_{2m+1}/q_{2m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente (por p_0/q_0). El Teorema

4.3 demuestra que ambas sucesiones convergen. Pero como $\left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}} \to 0$ si $k \to +\infty$, el límite debe ser el mismo.

Si $\omega = \lim_{n\to+\infty} p_n/q_n$, entonces como ω está entre p_n/q_n y p_{n+1}/q_{n+1}, tenemos que $0 < |\omega - p_n/q_n| < |p_{n+1}/q_{n+1} - p_n/q_n| = 1/(q_n q_{n+1})$, es decir

$$0 < \left|q_n\omega - p_n\right| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Por contradicción, si $\omega = a/b$ fuera racional, la desigualdad anterior implica que

$$0 < \left|q_n a - p_n b\right| < \frac{b}{q_{n+1}}.$$

Como $q_n \to +\infty$, tomando n suficientemente grande para que $b/q_{n+1} < 1$, concluiríamos que $|q_n a - p_n b|$ es un entero entre 0 y 1, lo cual es una contradicción. Por tanto, ω es un número irracional. □

Definición 10.1. Un límite de la forma

$$\omega = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to+\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

se conoce como una *fracción continua simple*.

Ejemplo 10.2.1. Para la sucesión constante $a_n = 1$, tenemos que

$$\omega = \lim_{n\to+\infty} [1, 1, \ldots, 1] = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{[1, 1, \ldots, 1]} = 1 + \frac{1}{\omega},$$

gracias a (10.2). Por tanto, $\omega^2 = 1 + \omega$ y como $\omega > 0$ concluimos que

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

Recíprocamente, dado un número real, ¿es posible representarlo por una fracción continua simple? La respuesta es positiva y viene descrita por el siguiente algoritmo.

Definición 10.2 (Algoritmo de Gauss)**.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y denote por $\lfloor\omega\rfloor$ su parte entera. Este algoritmo genera la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera recursiva por

- $\omega_0 = \omega$ y $a_0 = \lfloor\omega\rfloor$,
- Si ω_n es entero, $a_n = \omega_n$ y terminamos. Caso contrario, sea $\omega_{n+1} = \dfrac{1}{\omega_n - a_n} > 1$ y $a_{n+1} = \lfloor\omega_{n+1}\rfloor \geq 1$.

De esta manera, tenemos que $\omega_n = a_n + 1/\omega_{n+1}$ y por tanto

$$\omega = [a_0, \omega_1] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{\omega_2}\right] = \cdots = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega_{n+1}] = \frac{\omega_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\omega_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son las sucesiones definidas por la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ determinada por ω. Note que en las anteriores igualdades se empleó reiteradamente (10.2) y el Lema 10.2.

Vale la pena anotar que si el algoritmo finaliza en un número finito de pasos k, entonces $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_k] \in \mathbb{Q}$. De hecho, el lector podrá reconocer que en este caso el método no es otra cosa que el algoritmo de la división de Euclides. Por tanto, el caso más interesante es cuando $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En general, los números racionales p_n/q_n así generados son llamados las *convergentes de* ω. Para estimar cómo estas fracciones se aproximan a ω podemos aplicar (10.5) y la ecuación anterior para observar que

$$\omega - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\omega_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\omega_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n(\omega_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\omega_{n+1}q_n + q_{n-1})}. \quad (10.6)$$

Como $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y por definición de parte entera, $a_{n+1} \leq \omega_{n+1} < a_{n+1} + 1$, obtenemos que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \leq \omega_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = q_{n+1} + q_n < 2q_{n+1}$. Esto implica que

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \frac{1}{q_n + q_{n+1}} \leq \left|q_n\omega - p_n\right| < \frac{1}{q_{n+1}}. \quad (10.7)$$

Con estas herramientas podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 10.4. *Si p_n/q_n son las convergentes asociadas a un número $\omega \in \mathbb{R}$, entonces $\omega = \lim_{n\to+\infty} p_n/q_n$. Además $|q_{n+1}\omega - p_{n+1}| < |q_n\omega - p_n|$. En particular,*

$$\left|\omega - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Demostración. Primero dividiendo (10.7) por q_n y tomando $n \to +\infty$, obtenemos el límite requerido. Ahora, como $\omega_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = q_{n+1} + q_n \leq a_{n+2}q_{n+1} + q_n = q_{n+2}$, la última desigualdad en (10.7) y la fórmula (10.6) implican que

$$|q_{n+1}\omega - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}} < \frac{1}{\omega_{n+1}q_n + q_{n-1}} = |q_n\omega - p_n|,$$

demostrando la primera desigualdad. La segunda es consecuencia de la primera recordando que $1/q_{n+1} < 1/q_n$. □

Terminamos este proyecto con la expansión en fracción continua del número e, que ilustra la dificultad que reviste determinar este tipo de expansiones.

Ejemplo 10.2.2. [35] La expansión en fracciones continuas simples de e fue establecida por Euler en 1744 y está dada por

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}.$$

Reemplazando el 2 inicial por los valores $1, 0, 1$, la expansión anterior toma la forma

$$e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots],$$

que permite escribir $a_{3n} = a_{3n+2} = 1$ y $a_{3n+1} = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (aunque $q_1 = 0$). Por tanto, los p_n y q_n asociados satisfacen las recurrencias

$$\begin{aligned} p_{3n} &= p_{3n-1} + p_{3n-2}, & q_{3n} &= q_{3n-1} + q_{3n-2}, \\ p_{3n+1} &= 2np_{3n} + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= 2nq_{3n} + q_{3n-1}, \\ p_{3n+2} &= p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= q_{3n+1} + q_{3n}. \end{aligned}$$

Para demostrar que $p_m/q_m \to e$ si $m \to +\infty$ una posible solución es considerar las integrales

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx. \end{aligned}$$

Note que gracias a su denominador, $A_n, B_n, C_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Una vez se demuestra que estos valores satisfacen las relaciones

$$A_n = q_{3n}\, e - p_{3n}, \quad B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}\, e, \quad C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}\, e, \tag{10.8}$$

Ejercicio 10.2.4, los límites anteriores establecen que $p_m - q_m\, e \to 0$ cuando $m \to +\infty$. Por tanto, también $p_m/q_m - e = (p_m - q_m e)/q_m \to 0 \cdot 0 = 0$ como era requerido.

La motivación para emplear tales integrales yace en las aproximaciones de Padé, que fueron empleadas por Hermite en su demostración de la trascendencia de e. De hecho, este mismo razonamiento permite establecer la expansión

$$e^{1/M} = [1, M-1, 1, 3M-1, 1, 1, 5M-1, 1, 1, 7M-1, \cdots],$$

válida para todo real $M > 0$. Para más detalles consultar [35, 102].

Ejercicios

10.2.1 Calcule los siguientes límites dados por fracciones continuas simples:

a) $\lim_{n\to+\infty}[2, 1, 1, \ldots, 1]$.

b) $\lim_{n\to+\infty}[k, k, \ldots, k]$, $k \in \mathbb{N}^+$.

c) $\lim_{n\to+\infty}[1, 2, 1, 2 \ldots, 1, 2]$.

d) $\lim_{n\to+\infty}[4, 1, 2, 3, 2, 3 \ldots, 2, 3]$.

10.2.2 Utilice el software de su preferencia para comprobar que los primeros términos de la fracción continua simple de π es

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \cdots].$$

Vale la pena anotar que no se conoce una fórmula cerrada para estos valores.

10.2.3 Una fracción continua simple es *periódica* si tiene la forma

$$[b_0, \ldots, b_m, a_0, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_n, \cdots],$$

donde sus coeficientes se repiten de manera periódica a partir de algún punto. Demostrar que una tal fracción converge a un número irracional de la forma $r_1 + r_2\sqrt{a}$, con $r_1, r_2, a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Indicación: emplear el Lema 10.2.

10.2.4 Demostrar las relaciones (10.8) del Ejemplo 10.2.2 por inducción sobre n, comprobando que $A_0 = e - 1$, $B_0 = 1$, $C_0 = 2 - e$, y que

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}, \quad B_n = -2nA_n + C_{n-1}, \quad C_n = A_n - B_n.$$

Indicación: expandir $\frac{d}{dx}\left(x^n(x-1)^n e^x/n!\right)$ y $\frac{d}{dx}\left(x^n(x-1)^{n+1}e^x/n!\right)$ y luego integrar de 0 a 1.

10.2.5 Mostrar que los números q_n dados por (10.4) satisfacen $q_n \geq \varphi^{n-1}$, donde $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Luego, comprobar que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(q_n)}{q_n} \qquad \text{convergen.}$$

Indicación: las relaciones $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ y $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{e\sqrt{x}}$, $x \geq 1$ pueden ser útiles.

10.2.6 (Números de Brjuno) [86] Sea $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los denominadores de sus convergentes. Se dice que ω es un *número de Brjuno* si la función definida como la serie

$$B(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} \qquad \text{converge.}$$

Estos números fueron introducidos por A. Brjuno en 1971 en el estudio de sistemas dinámicos analíticos y problemas de pequeños divisores.

a) Si $\omega = \lim_{n\to+\infty}[a_0, , \dots, a_k, 1, 1, 1, \dots]$, entonces $q_{n+1} < q_n^2$, para $n > k$. Concluir que estos números ω son de Brjuno.

b) Sea $\kappa \geq 2$. Un número $\omega \in \mathbb{R}$ es un *número de Diofanto* de orden al menos κ si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\epsilon}{q^\kappa},$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, donde $q \geq 1$. En particular, ω no puede ser racional. Ejemplos de tales números están dados por los números algebraicos, como lo demuestra el Ejemplo 7.2.1. Emplear (10.7) para demostrar que

$$q_{n+1} \leq (1/\epsilon) q_n^{\kappa-1},$$

para todo n y concluir que todo número de Diofanto es un número de Brjuno.

c) Sea $\omega_0 = \lim_{n\to+\infty}[a_0, a_1, \dots, a_n]$, donde $a_0 = a_1 = 10$ y $a_n = q_{n-1}^{q_{n-1}}$, con q_n determinado por (10.4). Entonces $q_{n+1} > q_n^{2q_n/q_{n-1}}$. Por tanto, $B(\omega_0)$ diverge y ω_0 no es un número de Brjuno.

10.3. Extensión de algunos resultados al caso complejo

Este proyecto tiene como objeto extender algunos resultados presentados en el texto a funciones con valores en el cuerpo complejo $\mathbb{C}$. Para dar una presentación autocontenida recordaremos primero la construcción de $\mathbb{C}$, su estructura de cuerpo, de espacio normado y el cálculo de límites allí. Trataremos brevemente las series de potencias haciendo énfasis en la función exponencial compleja. También veremos la noción de límite, derivada e integral de funciones de la forma $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ para las cuales teoremas sobre derivadas como el Teorema del valor medio o la regla de L'Hôpital fallan. Finalmente, se dará una demostración conocida del Teorema Fundamental del Álgebra.

El conjunto de *números complejos* $\mathbb{C}$ se define como $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

En particular, si escribimos $i = (0, 1)$, entonces $i^2 = (-1, 0)$. Además, si identificamos un número real x con la pareja $(x, 0)$, se sigue que

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib.$$

Esta se conoce como la *representación cartesiana* de un número complejo. Si $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, nos referiremos a a como la *parte real* de α, a b como la *parte imaginaria* de α y escribiremos

$$\mathrm{Re}(\alpha) = a, \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = b.$$

La función *conjugado* se define como

$$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \overline{a + ib} = a - ib,$$

y geométricamente representa una reflexión respecto al eje x. Es inmediato comprobar que ella satisface

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \qquad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}, \qquad \overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

En estos términos podemos escribir

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}.$$

Por otra parte, la *norma* de $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ se define por

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \text{es decir} \qquad |\alpha|^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha}.$$

Note que la norma de $a + ib$ no es otra cosa que su norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Además, si $\alpha = a + ib \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

es decir, el recíproco de un número complejo no nulo es de nuevo un elemento de $\mathbb{C}$. Por ejemplo, $1/i = -i$. A partir de estas observaciones se comprueba la siguiente afirmación.

Proposición 10.3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

Sin embargo, $\mathbb{C}$ no puede ser un cuerpo ordenado porque existen elementos no nulos cuyo cuadrado no es positivo: $i^2 = -1 < 0$, en contradicción con la Proposición 1.4(3).

Continuamos ahora con propiedades sobre la norma para establecer la estructura de espacio normado de $\mathbb{C}$.

Proposición 10.4. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$ *y* $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.
2. $|\,\mathrm{Re}(\alpha)\,| \leq |\alpha|$, $|\,\mathrm{Im}(\alpha)\,| \leq |\alpha|$.
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Demostración. Para (1) note que $|\alpha \cdot \beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha\beta} = (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta}) = |\alpha|^2|\beta|^2$. (2) es inmediata de la definición de la norma. Para (3), note que

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{b}) = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}) + |\beta|^2.$$

Empleando (2) obtenemos que

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\overline{\beta}| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2,$$

como se requería. □

La proposición anterior muestra que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio normado, que coincide con el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Podemos entonces considerar sucesiones y series de números complejos. Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \qquad \text{si y solo si} \qquad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n) = \operatorname{Re}(\alpha) \text{ y } \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(\alpha_n) = \operatorname{Im}(\alpha),$$

gracias a la Proposición 6.1(3) que permite calcular estos límites componente a componente. Por supuesto, esto se deduce inmediatamente de la proposición anterior porque

$$|\operatorname{Re}(\alpha_n) - \operatorname{Re}(\alpha)| = |\operatorname{Re}(\alpha_n - \alpha)| \le |\alpha_n - \alpha| \quad \text{y} \quad |\operatorname{Im}(\alpha_n) - \operatorname{Im}(\alpha)| \le |\alpha_n - \alpha|.$$

Finalmente, como $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ es completo, entonces $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge. De hecho, argumentado como en el párrafo anterior vemos que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ si y solo si $\{\operatorname{Re}(\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\operatorname{Im}(\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Trabajando por componentes se deduce que el cálculo de límites de sucesiones en $\mathbb{C}$ obedece las mismas reglas que el caso real, es decir, la Proposición 4.2 es válida para sucesiones en $\mathbb{C}$. Además, la regla de Stolz-Cesàro, Teorema 4.4 se verifica cuando $a_n \in \mathbb{C}$ y b_n es real, estrictamente creciente y tal que $b_n \to +\infty$, pues basta aplicarla a partes reales e imaginarias de a_n.

Ejemplo 10.3.1. Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$, entonces $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$ si y solo si $|\alpha_n| \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Como casos particulares de esta situación tenemos que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $|\alpha| < 1$ entonces $|\alpha|^n \to 0$ si $n \to +\infty$ y por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = 0.$$

Para una serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ se sigue que esta serie converge si y solo si las series de sus partes reales e imaginarias convergen, en cuyo caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(\alpha_n).$$

Además aplicando el Ejercicio 5.1.9 vemos que convergencia en norma implica la convergencia usual, es decir

$$\text{si } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \text{ converge}, \qquad \text{entonces} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \text{ converge.}$$

De esta manera podemos aplicar los criterios usuales del cociente y la raíz a la serie en norma para establecer su convergencia. En particular, para series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

obtenemos que esta converge cuando $|z - z_0| < R$, donde

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}.$$

En este caso el dominio de convergencia es un disco en $\mathbb{C}$ con centro en z_0 y radio R.

Ejemplo 10.3.2. Al igual que en el caso real, la serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

converge a dicho valor. En particular, tenemos la serie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad |z| < 1.$$

Note que en el caso real la función $t \in \mathbb{R} \mapsto 1/(1+t^2)$ está bien definida y además es una función suave. Sin embargo, su expansión en serie de potencias alrededor de 0 tiene radio de convergencia 1. La razón de este fenómeno se revela en $\mathbb{C}$ porque esta función no está definida para $t = \pm i$. Podemos interpretar la presencia de estas singularidades como una barrera que impide que la expansión en serie se pueda extender más allá de su dominio.

Ejemplo 10.3.3 (La función exponencial)**.** Para $z \in \mathbb{C}$ se define la función exponencial $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por la serie

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

de la misma forma que se hizo en el caso real. Esta converge para todo $z \in \mathbb{C}$, porque lo hace en norma. Como en el caso real, es posible demostrar que

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Por otra parte, las funciones trigonométricas se extienden a $\mathbb{C}$ a través de las fórmulas

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Desarrollando las series de potencias involucradas y notando que $i^{2n} = (-1)^n$ y $i^{2n+1} = (-1)^n i$, para $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\cos(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

coincidiendo así con la definición en el caso real, ver el Ejemplo 9.3.5. En particular, podemos escribir

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{10.9}$$

Como aplicación directa de esta escritura, como $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 - 2i\cos(\theta)\sin(\theta)$, obtenemos las fórmulas de ángulo doble

$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta), \qquad \cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\theta)^2. \tag{10.10}$$

Evaluando en $\theta = \pi/2$ concluimos que $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$. Esto equivale a la sorprendente fórmula

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que relaciona cinco constantes fundamentales. Note también que e^z resulta ser periódica de periodo $2\pi i$ porque $e^{2\pi i} = 1$.

En estos términos, las funciones tangente y cotangente definidas por $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$ y $\cot(\theta) = 1/\tan(\theta) = \cos(\theta)/\sin(\theta)$ se escriben como

$$\tan(z) = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \qquad \cot(z) = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \tag{10.11}$$

Continuaremos con más propiedades de las funciones trigonométricas en el Proyecto 13.1.

La fórmula (10.9) permite dar otra representación posible de los números complejos a través de coordenadas polares. En efecto, note que $t \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos(t), \sin(t)) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$ parametriza el círculo unitario

$$S^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}.$$

Por tanto, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $z/|z|$ es un elemento de S^1. Así es posible escribir

$$z = |z|e^{i\theta},$$

para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Geométricamente θ mide el ángulo entre la semirecta $[0, +\infty)$ y el segmento que une 0 con z. Por supuesto, θ no está determinado de manera única, pero si θ y θ_0 son dos ángulos para z, entonces $\theta_0 = \theta + 2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Es usual denotar por

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z/|z| = e^{i\theta}\}$$

al conjunto de posibles ángulos o *argumentos* de z. Esta representación permite extraer raíces k-ésimas de un número complejo no nulo, con $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\text{si } z = |z|e^{i\theta}, \text{ entonces } w = |z|^{1/k}e^{i\theta/k} \text{ satisface } w^k = z.$$

Un caso interesante lo constituyen las soluciones de la ecuación $z^k = 1$ conocidas como las raíces k-ésimas de la unidad, que serán discutidas en detalle en el Proyecto 13.1. Por el momento, en esta sección bastará saber que todo número complejo z admite al menos una raíz k-ésima.

Ejemplo 10.3.4 (El logaritmo complejo)**.** Inspirados en la representación polar de un número complejo $z = |z|e^{i\theta}$, con $z \neq 0$, se define el *logaritmo* de z por la fórmula

$$\log(z) = \ln|z| + i\theta.$$

Por supuesto, esta función no está bien definida si no se especifica el rango de θ. Es común tomar $-\pi < \theta < \pi$ en cuyo caso la función obtenida $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ se denomina la *rama principal del logaritmo*, dado que coincide con el logaritmo real para $z = x > 0$. En cualquier caso, se sigue que $e^{\log(z)} = z$, si $z \neq 0$.

Para nuestros propósitos, precisamos escribir log en coordenadas cartesianas cuando $\mathrm{Re}(z) > 0$. Un argumento geométrico permite determinar θ gracias a la relación $\tan\theta = y/x$. De esta forma obtenemos

$$\log(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan(y/x). \tag{10.12}$$

Por otra parte, otra extensión del logaritmo real se puede obtener a través de la serie de potencias (9.8). Consideremos así la serie

$$F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad |z| < 1.$$

Si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces $F(x) = \ln(1 - x)$. Para demostrar que esta relación es válida cuando $|z| < 1$ calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x + iy)^n = -\frac{1}{1 - (x + iy)}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -i\sum_{n=0}^{\infty}(x + iy)^n = -\frac{i}{1 - (x + iy)}.$$

Considere ahora $L(x + iy) = \log(1 - x - iy)$ como en (10.12). Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{1 - x}{(1 - x)^2 + y^2} - i\frac{y}{(1 - x)^2 + y^2} = -\frac{1 - x + iy}{(1 - x)^2 + y^2} = -\frac{1}{1 - (x + iy)},\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{y}{(1 - x)^2 + y^2} + i\frac{x - 1}{(1 - x)^2 + y^2} = -i\frac{1 - x + iy}{(1 - x)^2 + y^2} = -\frac{i}{1 - (x + iy)}.
\end{aligned}$$

De esta forma, $\frac{\partial(F-L)}{\partial x} = \frac{\partial(F-L)}{\partial y} = 0$ para $|z| < 1$ y por tanto $F - L$ es constante en este disco, ver Ejemplo 7.3.4. Como $F(0) = 0$ y $L(0) = \log(1) = 0$ se sigue que $F(z) \equiv L(z)$ allí, es decir

$$\log(1 - z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad |z| < 1. \tag{10.13}$$

Fijamos ahora nuestra atención en funciones con valores en $\mathbb{C}$. Sea (X, d) un espacio métrico. El cálculo de funciones $f = f_1 + if_2 : X \to \mathbb{C}$ con valores complejos se

extiende fácilmente gracias a la Proposición 6.1(3) que demuestra que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe si y solo si $\lim_{x\to x_0} \mathrm{Re}(f(x))$ y $\lim_{x\to x_0} \mathrm{Im}(f(x))$ existen. En este caso,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + i \cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x). \tag{10.14}$$

De aquí se deduce que la Proposición 6.1(2) es válida con las operaciones de cuerpo de $\mathbb{C}$. Note que estas afirmaciones también se siguen del cálculo de límites en $\mathbb{C}$.

La noción de continuidad para $f : X \to \mathbb{C}$ es un caso particular de aplicaciones entre espacios métricos. En este contexto, f es continua en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Esto de hecho se reduce a la continuidad de sus partes reales e imaginarias, es decir, f es continua en $x_0 \in X$ si y si solo si $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ y $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ son continuas en x_0, gracias al límite (10.14). En particular, la suma y el producto de funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$ siguen siendo continuas. Es común denotar por

$$C^0(X, \mathbb{C})$$

al espacio de funciones continuas sobre X con valores en $\mathbb{C}$. Por tanto, $C^0(X, \mathbb{C})$ es cerrado bajo sumas y productos.

Ejemplo 10.3.5. Toda función polinomial $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ define una función continua sobre $\mathbb{C}$. Más aún, estas funciones satisfacen que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty.$$

Esto significa que para todo $M > 0$ existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$, entonces, $|p(z)| > M$. En efecto, si $z \neq 0$, por la desigualdad triangular invertida

$$\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right| = \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq 1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n z}\right| - \cdots - \left|\frac{a_1}{a_n z^{n-1}}\right| - \left|\frac{a_0}{a_n z^n}\right|.$$

Si además $|z| \geq R > 1$, obtenemos que

$$\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right| \geq 1 - \frac{1}{R}\sum_{j=0}^{n-1} |a_j/a_n|.$$

Por tanto, si $R \geq \text{máx}\{1, 2\sum_{j=0}^{n-1} |a_j/a_n|\}$ y $|a_n|R^n > 2M$, se sigue que $|p(z)| > M$, para todo $|z| > R$.

Una función $f = f_1 + if_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ se dice diferenciable en $t \in (a, b)$ si

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe (note que el numerador es en general un número complejo). De acuerdo al límite (10.14) vemos que f es diferenciable en t si y solo si f_1 y f_2 lo son y además

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t).$$

La misma demostración del Teorema 7.1 muestra que si f es diferenciable en t_0, entonces ella es continua en dicho punto. De igual manera esto se sigue del Teorema 7.1 aplicado a f_1 y f_2. Además las reglas del cálculo de derivadas, Proposición 7.1, son válidas en este contexto.

Ejemplo 10.3.6. Un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \cdots + a_n t^n$ con coeficientes $a_j \in \mathbb{C}$ complejos es diferenciable, para todo $t \in \mathbb{R}$ y su derivada está dada por $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$. Para funciones racionales $p(t)/q(t)$ la derivada se calcula empleando la regla del cociente. En particular, para

$$f(t) = \frac{1}{t - (a + ib)} = \frac{t - a + ib}{(t-a)^2 + b^2}, \qquad a + ib \in \mathbb{C},$$

vemos por inducción sobre n que

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(t - (a + ib))^{n+1}} = (-1)^n n! \frac{(t - a + ib)^{n+1}}{((t-a)^2 + b^2)^{n+1}}.$$

Igualando partes reales e imaginarias encontramos las fórmulas

$$\left(\frac{t-a}{(t-a)^2 + b^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{((t-a)^2 + b^2)^{n+1}} \operatorname{Re}\left((t - a + ib)^{n+1}\right),$$
$$\left(\frac{b}{(t-a)^2 + b^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{((t-a)^2 + b^2)^{n+1}} \operatorname{Im}\left((t - a + ib)^{n+1}\right).$$

Para el caso de funciones con valores complejos ni el Teorema del valor medio ni la regla de L'Hôpital se verifican en general. Los ejemplos que presentamos a continuación son clásicos y están basado en el libro de W. Rudin [113].

Ejemplo 10.3.7. La función $f(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y satisface $f(2\pi) = f(0) = 1$. Por tanto $f(2\pi) - f(0) = 0$, pero como $f'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = ie^{it}$ y $|f'(t)| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos que $f(2\pi) - f(0) \neq 2\pi f'(t)$, para cualquier t.

Ejemplo 10.3.8. Considere las funciones

$$f(t) = t, \qquad g(t) = t + t^2 e^{i/t^2}, \qquad \text{para } t \in (0, 1).$$

Entonces

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1 + te^{i/t^2}} = 1,$$

porque $|e^{i/t^2}| = 1$. Por otra parte,

$$g'(t) = 1 + \left(2t - \frac{2i}{t}\right) e^{i/t^2}.$$

Empleando la desigualdad triangular vemos que $|g'(t)| \geq \left|2t - \frac{2i}{t}\right| - 1 \geq 2/t - 1$ y en particular $g'(t) \neq 0$, si $t \in (0,1)$. Así, podemos acotar

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right| = \frac{1}{|g'(t)|} \leq \frac{t}{2-t}, \qquad 0 < t < 1.$$

En conclusión, $\lim_{t\to 0} f'(t)/g'(t) = 0$, y por tanto la regla de L'Hôpital falla en este contexto.

Continuamos con la extensión de integrabilidad en el sentido de Riemann a funciones con valores complejos. Si $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, decimos que f es integrable sobre $[a,b]$ si f_1 y f_2 lo son. En este caso definimos

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt.$$

En otras palabras,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt, \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt.$$

Las propiedades fundamentales de la integral de Riemann se extienden de manera inmediata a funciones con valores complejos. Entre ellas destacamos las siguientes.

Proposición 10.5. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrables. Entonces*

1. *$\alpha f + \beta g$ es integrable sobre $[a,b]$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.*
2. *$\overline{\int_a^b f(t)dt} = \int_a^b \overline{f(t)}dt$.*
3. *$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.*

Demostración. (1) y (2) son inmediatas de la definición. Para (3), escriba $z = \int_a^b f(t)dt$. Si $z = 0$, la desigualdad es válida. De lo contrario, escriba $z = |z|e^{i\theta}$ en forma polar y observe que

$$|z| = e^{-i\theta}z = \int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta}f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}f(t))dt,$$

porque estamos trabajando con cantidades reales. Como $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$, para todo $w \in \mathbb{C}$ se deduce que

$$|z| \leq \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt,$$

como era requerido.

□

Los Teoremas Fundamentales del Cálculo se verifican y tenemos, al igual que para funciones de valor real, que

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a), \qquad \frac{d}{dt}\int_a^t F(s)ds = F(t).$$

Por ejemplo,

$$\int_a^b e^{ist}dt = \frac{e^{isb} - e^{isa}}{is}, \qquad s \neq 0.$$

Por otra parte, la regla de Leibniz para derivación bajo el signo integral es válida en este contexto, integrando funciones de valor complejo $\varphi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ cuyas partes reales e imaginarias verifiquen las mismas condiciones del Teorema 8.8.

Finalizamos este proyecto con el Teorema Fundamental del Álgebra, quizás la propiedad más sorprendente del cuerpo complejo. En términos algebraicos, el teorema afirma que $\mathbb{C}$ es *algebraicamente cerrado*: todo elemento de $\mathbb{C}[z]$, esto es, un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene todas sus raíces en este cuerpo.

Teorema 10.5 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Dado $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ de grado n ($a_n \neq 0$), existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$p(z) = a_n(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n). \tag{10.15}$$

Recordemos que el algoritmo de la división entre polinomios asegura que dados $p(z), u(z) \in \mathbb{C}[z]$, existen únicos $q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$, donde el grado de $r(z)$ es menor que el grado de $u(z)$, tales que

$$p(z) = q(z)u(z) + r(z).$$

En particular, si $u(z) = z - \alpha$ tiene grado uno, $r(z)$ es constante. Al evaluar en $z = \alpha$, obtenemos $p(z) = q(z)(z-\alpha)+p(\alpha)$. Por tanto, α es raíz de $p(z)$ si y solo si $z-\alpha$ divide a $p(z)$. Con esta observación, para demostrar el Teorema 10.5 es suficiente mostrar que dado $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = 0$. Luego, la factorización (10.15) se sigue por inducción sobre el grado de $p(z)$.

Demostración. Dividimos la demostración de la existencia de una raíz de $p(z)$ en $\mathbb{C}$ en tres pasos:

Paso 1: Demostramos que $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $h(z) = |p(z)|$ alcanza mínimo en $\mathbb{C}$. Para ello, sea $M = |p(0)|$. Si $M = 0$, este será el mínimo. De lo contrario, $M > 0$. Recordando el Ejemplo 10.3.5, existe $R > 0$ tal que $|p(z)| > M$ si $|z| \geq R$. Como el disco cerrado $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ es compacto, y h es continua, por el Teorema del valor extremo 6.4, h alcanza un mínimo m en D. Note que $m \leq M$, porque $0 \in D$. Por tanto, m es un mínimo de h en todo $\mathbb{C}$.

Paso 2: Probaremos que si $q(z) = 1 + z^k r(z) \in \mathbb{C}[z]$, donde $r(z)$ es un polinomio con $r(0) = 1$ y $k \in \mathbb{N}^+$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|q(z_0)| < 1$. La idea de la demostración consiste en elegir $z_0 = e^{i\pi/k}/p_0$ con $p_0 \in \mathbb{N}^+$ adecuado. Como $r(z)$ es

continua tenemos que $\lim_{p\to+\infty} r(e^{i\pi/k}/p) = r(0) = 1$. Por tanto, podemos elegir p_0 grande de forma que $r(e^{i\pi/k}/p_0) = 1 + u$, con $|u| < 1$. De esta forma,

$$|q(z_0)| = |1 - p_0^{-k} r(z_0)| \leq |1 - p_0^{-k}| + |p_0^{-k} u| < |1 - p_0^{-k}| + p_0^{-k} = 1 - p_0^{-k} + p_0^{-k} = 1$$

y z_0 satisface lo requerido.

Paso 3: Finalmente, dado $p(z)$ como en el enunciado, mostraremos que el punto $z_1 \in \mathbb{C}$ donde $|p(z)|$ alcanza mínimo satisface que $p(z_1) = 0$. Por contradicción, si $p(z_1) \neq 0$, entonces el polinomio

$$q(z) = \frac{p(z + z_1)}{p(z_1)}$$

es un polinomio no constante (de lo contrario $p(z)$ sería constante) y $q(0) = 1$. Note que podemos escribir

$$p(z + z_1) = \sum_{j=0}^{n} a_j (z + z_1)^j = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \left(z_1^j + \sum_{l=1}^{j} \binom{j}{l} z_1^{j-l} z^l \right) = p(z_1) + \sum_{l=1}^{n} d_l z^l,$$

donde intercambiamos el orden de la segunda suma y $d_l = \sum_{j=l}^{n} \binom{j}{l} a_j z_1^{j-l}$. De esta forma podemos escribir $q(z) = 1 + az^k r(z)$, donde $a \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^+$ y $r(z)$ satisface $r(0) = 1$. Gracias a que podemos escoger $\mu \in \mathbb{C}$ con $\mu^k = 1/a$, el polinomio $q(\mu z) = 1 + z^k r(\mu z)$ satisface los requerimientos del Paso 2. Por tanto, existiría $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|q(\mu z_0)| < 1$, es decir, $|p(\mu z_0 + z_1)| < |p(z_1)|$, contradiciendo la minimalidad de z_1. En conclusión, $p(z_1) = 0$ como se requería. □

Nota 10.3.1. Al evaluar (10.15) en $z = 0$ vemos que $p(0) = a_n(-1)^n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$. Por tanto, si $\lambda_j \neq 0$ para todo j, también podemos escribir

$$p(z) = p(0) \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j} \right), \tag{10.16}$$

dando otra representación de la factorización de $p(z)$.

Ejercicios

10.3.1 Comprobar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{n} = 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

10.3.2 *a*) Extender el criterio de convergencia de Dirichlet, Teorema 5.10, para series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, con $a_n \in \mathbb{C}$.

b) Emplear este criterio para comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{in\theta}$ converge para $\theta \in (0, 2\pi)$, donde $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión de números reales positivos, decreciente y tal que $b_n \to 0$ si $n \to +\infty$.

10.3.3 Considere el conjunto $A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + w^2 = 1\}$ en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ con la métrica usual. ¿A es compacto? Misma pregunta para el conjunto $B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

10.3.4 Mostrar que los siguientes conjuntos son densos en S^1:

a) $\{e^{2\pi i r} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{Q}\}$.

b) $\{e^{2\pi i k/2^n} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}^+, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$.

c) $\{e^{2\pi i n\theta} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\theta \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Indicación: La desigualdad $|e^{ib} - e^{ia}| \leq \sqrt{2}|a - b|$ con $a, b \in \mathbb{R}$, la propiedad $e^{2ai} = e^{\{2a\}i}$ y recordar el Teorema 10.1 de Dirichlet pueden ser útiles.

10.3.5 Sea $k \in \mathbb{N}^+$ y $b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Emplee la regla general del producto de derivadas, Ejercicio 7.1.7, para comprobar que si $k \geq n + 2$, entonces

$$\left(\frac{t^k}{t^2 + b^2}\right)^{(n)} = n! t^{k-n-2} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{(k-1)\cdots(k-1-n-j)}{(n-j)!} \mathrm{Re}\left(\frac{t^{j+1}}{(t+ib)^{j+1}}\right).$$

Luego compruebe que $\left|\mathrm{Re}(t^{j+1}/(t+ib)^{j+1})\right| \leq 1$ para concluir la cota

$$\left|\left(\frac{t^k}{t^2 + b^2}\right)^{(n)}\right| \leq (n+1)!\, k!\, |t|^{k-n-2}, \qquad t \in \mathbb{R}, k \geq n + 2.$$

10.3.6 Comprobar que la regla de L'Hôpital falla para las funciones $f(t) = t$ y $g(t) = t + t^k e^{i/t^n}$ cuando $t \to 0^+$ y $n + 1 > k > 1$.

10.3.7 Sean $f, g : (0, 1) \to \mathbb{C}$ funciones diferenciables, tales que $f(t) \to 0$, $g(t) \to 0$, $f'(t) \to A$ y $g'(t) \to B \neq 0$ cuando $t \to 0^+$. Demostrar que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{A}{B}.$$

Indicación: escribir $f(t)/g(t) = (f(t)/t - A)(t/g(t)) + At/g(t)$ y aplicar la regla de L'Hôpital a la parte real e imaginaria de $f(t)/t$ y $g(t)/t$.

10.3.8 Sea $a + ib \in \mathbb{C}$ con $a > 0$. Demostrar que la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+ib)t} dt = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{(-a+ib)t} dt = \frac{1}{a - ib}$$

converge a dicho valor. Deducir que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt) dt = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(bt) dt = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

10.3.9 Considere la función $\varphi(s,t) = e^{is}/(e^{is} - t\alpha)$, para $t \in [0,1]$, $s \in [0,2\pi]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$. Si $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)ds$, comprobar que es posible aplicar la regla de Leibniz para derivación bajo el signo de la integral para comprobar que $g'(t) = 0$ y por tanto es constante. Concluir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - \alpha} ds = 2\pi, \qquad |\alpha| < 1.$$

¿Qué integrales reales se obtienen al igualar partes reales y partes imaginarias en esta identidad?

Capítulo 11

Criterios de convergencia de series

Este capítulo se divide en tres proyectos: dos dedicados a desarrollar criterios útiles para determinar la convergencia o divergencia de series y otro dedicado a discutir el Teorema de continuidad de Abel para series de potencias. El primer proyecto está dedicado a dos versiones de un criterio reciente conocido como el segundo criterio del cociente que resulta de analizar los límites de los valores a_{2n}/a_n y a_{2n+1}/a_n para una serie $\sum a_n$ dada. El segundo proyecto trata el criterio general de Kummer y varios de sus casos particulares como los criterios de Bertrand-De Morgan y de Raabe, todos sobre un estudio del cociente usual a_{n+1}/a_n También se trata el criterio de Jamet cuyo contenido se asemeja al del criterio de la raíz. En todos los casos se dan ejemplos de series tratables con estos métodos, mas donde los criterios usuales estudiados en el Capítulo 5 fallan. Finalmente, el tercer proyecto incluye una demostración del Teorema de Abel y algunas de sus aplicaciones, por ejemplo, como herramienta para calcular valores especiales de sumas de series.

11.1. El segundo criterio del cociente

Este proyecto presenta dos versiones de un criterio útil para determinar la convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos cuando el test del cociente falla. Este principio, desarrollado recientemente, está basado en los cocientes a_{2n}/a_n y a_{2n+1}/a_n y por esta razón recibe el nombre del segundo test del cociente. Su primera versión fue dada en [7] por S. Ali (2008) y posteriormente fue mejorado en [61] en 2021. Aquí nos limitaremos a presentar algunos resultados y ejemplos, refiriendo al lector a los artículos originales para más información.

Teorema 11.1 (Segundo test del cociente I)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y considere los valores*

$$L = \text{máx}\left\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}, \qquad l = \text{mín}\left\{\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}.$$

Entonces,

1. *Si $L < 1/2$, la serie converge.*

2. *Si $l > 1/2$, la serie diverge.*

3. *Si $l \leq 1/2 \leq L$, el criterio no da información sobre la convergencia.*

Demostración. (1) Escoja $L < r < 1/2$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_{2n}/a_n \leq r$ y $a_{2n+1}/a_n \leq r$ si $n \geq N$. Para $k \geq 0$ considere los valores $S_k = a_{2^kN} + a_{2^kN+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}$. Entonces podemos acotar

$$\begin{aligned} S_k &= (a_{2^kN} + a_{2^kN+1}) + (a_{2^kN+2} + a_{2^kN+3}) \cdots + (a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}) \\ &\leq 2a_{2^{k-1}N}r + 2a_{2^{k-1}N+1}r + \cdots + 2a_{2^kN-1}r = 2rS_{k-1}. \end{aligned}$$

Se sigue por inducción que $S_k \leq (2r)^k S_0$. De esta forma podemos acotar

$$\sum_{n=N}^{2^{k+1}N-1} a_n = \sum_{j=0}^{k}(a_{2^jN} + a_{2^jN+1} + \cdots + a_{2^{j+1}N-1}) = \sum_{j=0}^{k} S_j \leq S_0 \sum_{j=0}^{k}(2r)^j < \frac{S_0}{1-2r}.$$

Esto muestra que las sumas parciales de a_n son acotadas y como $a_n \geq 0$, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si $l > 1/2$, escoja $1/2 < r < l$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $a_{2n}/a_n > r$ y $a_{2n+1}/a_n > r$, para $n \geq N$. En este caso vemos que $S_k > 2rS_{k-1}$ y por tanto $S_k > (2r)^k S_0$. De esta manera

$$\sum_{n=N}^{2^{k+1}N-1} a_n > S_0 \sum_{j=0}^{k}(2r)^j \to +\infty \qquad \text{si } k \to +\infty,$$

y así $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(3) Empleando el criterio de condensación de Cauchy, Teorema 5.2, se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(\ln n)^p}{2n(\ln(2n))^p} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(\ln n)^p}{(\ln(2n+1))^p} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $L = l = 1/2$ y el criterio no da información sobre la convergencia. □

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente criterio que también fue obtenido en [33].

Corolario 11.1. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente de términos positivos, entonces*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < 1/2$, la serie $\sum a_n$ converge.*

2. *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > 1/2$, la serie $\sum a_n$ diverge.*

Demostración. Por hipótesis, $a_{2n+1}/a_n \leq a_{2n}/a_n$. Si L y l están dados como en el teorema anterior, deducimos de estas desigualdades que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < 1/2$ y $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > 1/2$. El resultado se sigue del enunciado anterior. □

Ejemplo 11.1.1. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\sqrt{n}}}, \qquad p > 1.$$

En este caso el criterio del cociente no decide sobre la convergencia. Por otra parte, como la sucesión es decreciente y

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(p^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{n}}} = 0,$$

se sigue del corolario anterior que la serie converge.

Ejemplo 11.1.2. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con

$$a_n = \frac{n!}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}, \qquad x > 0.$$

La sucesión dada es decreciente porque $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{x}{n+1} > 1$. Para $x > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(n+1+x)(n+2+x)\cdots(2n+x)} \\ &= \frac{n+1}{2n+x}\prod_{j=2}^{n}\frac{n+j}{n+j-1+x} \le \frac{n+1}{2n+x}\left(\frac{2n}{2n+x-1}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

dado que $\frac{n+j}{n+j-1+x} \le \frac{2n}{2n-1+x}$ si $j = 2, \ldots, n$. Por tanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+x}\left(\frac{2n}{2n-1+x}\right)^{n-1} = \frac{e^{\frac{1-x}{2}}}{2} < \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, si $0 < x < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n}}{a_n} \ge \frac{a_{2n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)(2n+1)}{(n+1+x)(n+2+x)\cdots(2n+x)(2n+1+x)} \\ &= \frac{n+1}{2n+1+x}\prod_{j=2}^{n+1}\frac{n+j}{n+j-1+x} \ge \frac{n+1}{2n+1+x}\left(\frac{2n+1}{2n+x}\right)^{n},\end{aligned}$$

porque en este caso $\frac{n+j}{n+j-1+x} \ge \frac{2n+1}{2n+x}$. De esta forma vemos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \ge \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1+x}\left(\frac{2n+1}{2n+x}\right)^{n} = \frac{e^{\frac{1-x}{2}}}{2} > \frac{1}{2}.$$

Por el segundo criterio del cociente concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para $x > 1$ y diverge para $0 < x < 1$. Si $x = 1$ la serie también diverge porque $a_n = 1/(n+1)$.

Nota 11.1.1. Los anteriores ejemplos ilustran por qué el segundo test del cociente es más fuerte que el criterio del cociente. Por otra parte, veamos que las hipótesis del criterio del cociente implican las del Teorema 11.1. Suponga primero que $\alpha = \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Elija $\alpha < r < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n < r$ para $n \geq N$. De esta forma

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \leq r^n, \qquad \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \leq r^{n+1}$$

y así $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = 0$. Por tanto, el Teorema 11.1 implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De la misma forma, si $\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = +\infty$ y así $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema 11.2 (Segundo criterio del cociente II)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y considere los valores*

$$r_1 = \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{a_n}, \qquad r_2 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{a_n}.$$

Entonces,

1. *Si $0 \leq r_2 < 1$, la serie converge.*
2. *Si $r_1 > 1$, la serie diverge.*

Demostración. Considere la sucesión $c_m = a_{2^{m-1}} + a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_{2^m-1}$, que consiste de 2^{m-1} sumandos. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ converge. Si aplicamos el criterio del cociente a la nueva serie debemos analizar

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{(a_{2^m} + a_{2^m+1}) + (a_{2^m+2} + a_{2^m+3})\cdots + (a_{2^{m+1}-2} + a_{2^{m+1}-1})}{a_{2^{m-1}} + a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_{2^m-1}}.$$

Se sigue de la desigualdad del Ejercicio 1.4.9 (b) que

$$\min_{2^{m-1}\leq n\leq 2^m-1} \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{m+1}}{c_m} \leq \max_{2^{m-1}\leq n\leq 2^m-1} \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{a_n}.$$

Por tanto,

$$r_1 \leq \liminf_{m\to+\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \qquad \limsup_{m\to+\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} \leq r_2$$

y el resultado se sigue del criterio del cociente. □

Nota 11.1.2. Gracias a las desigualdades del Ejercicio 4.5.1 tenemos las relaciones

$$r_2 \leq 2L, \qquad 2l \leq r_1,$$

entre los valores dados por las dos versiones del segundo criterio del cociente. En particular, esto muestra que si $L < 1/2$, entonces $r_2 < 1$, y si $l > 1/2$, entonces $r_1 > 1$. Por tanto, si el Teorema 11.1 es aplicable, también lo será el Teorema 11.2 dando el mismo resultado. Sin embargo, puede suceder que $r_2 < 1 \leq 2L$ o que $2l \leq 1 < r_1$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 11.1.3 (Series bi-geométricas)**.** Considere la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y

$$a_{2n} = a \cdot a_n, \qquad a_{2n+1} = b \cdot a_n, \qquad n \geq 1,$$

donde $a, b > 0$. Los primeros términos de la sucesión son

$$1, a, b, a^2, ab, ab, b^2, a^3, a^2b, a^2b, ab^2, a^2b, ab^2, ab^2, b^3, \ldots,$$

y los valores asociados a esta serie son

$$L = \text{máx}\{a, b\}, \quad l = \text{mín}\{a, b\}, \quad r_1 = r_2 = a + b.$$

El Teorema 11.2 asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $0 \leq a + b < 1$ (región blanca y azul) y diverge si $a + b > 1$, mientras que el Teorema 11.1 solo indica convergencia si $\text{máx}\{a, b\} < 1/2$ (región blanca) y divergencia si $\text{mín}\{a, b\} > 1/2$, ver Figura 11.1. Finalmente, al considerar las sucesivas sumas parciales vemos que la serie converge al valor

$$1 + a + b + (a + b)^2 + (a + b)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - (a + b)}.$$

En particular, si $a + b = 1$ la serie diverge.

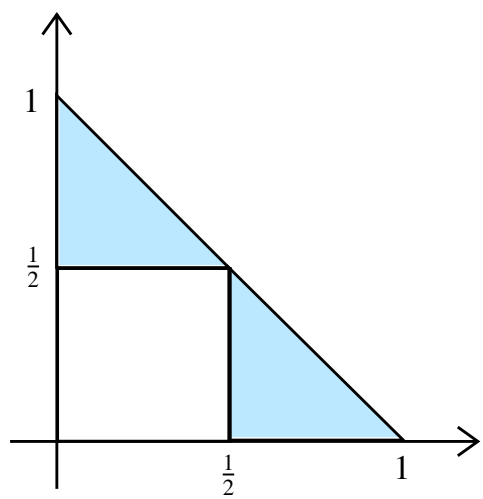

Figura 11.1: Regiones de convergencia de la serie bi-geométrica aplicando el segundo criterio del cociente I y II.

Ejercicios

11.1.1 Demostrar el Corolario 11.1 empleando el criterio de condensación de Cauchy y el criterio usual del cociente.

11.1.2 Mostrar que si $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es decreciente y $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(2n)}{f(n)} < 1/2$, entonces $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

11.1.3 Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series $\sum a_n$, donde $x > 0$ y $\alpha, p \in \mathbb{R}$:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^p}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

c) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(\ln n)}}$.

d) $a_n = 1/p^{n^\alpha}$.

Respuesta: (b) converge, (c) diverge. (d) converge si $\alpha > 0$ y $p > 1$.

11.1.4 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de términos positivos y $m > 1$ un entero fijo. Considere los valores

$$L_j = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{mn+j-1}}{a_n}, \qquad l_j = \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{mn+j-1}}{a_n}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$L = \text{máx}\{L_1, \ldots, L_m\}$ y $l = \text{mín}\{l_1, \ldots, l_m\}$. Demostrar que si $L < 1/m$, la serie converge y si $l > 1/m$, la serie diverge. Deducir de este criterio que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es decreciente, entonces la serie

a) converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{mn}}{a_n} < \dfrac{1}{m}$.

b) diverge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{mn+m-1}}{a_n} > \dfrac{1}{m}$.

11.2. Los criterios de Kummer, Raabe y Jamet

El criterio de convergencia de series, debido a E. Kummer, provee una condición necesaria y suficiente para la convergencia de series de términos positivos. Además incluye como casos particulares diversos criterios como el de Raabe y Bertrand-De Morgan . En este proyecto estableceremos la validez de estos criterios basados en analizar el cociente a_{n+1}/a_n. Además, veremos el criterio de Jamet que se entiende como contraparte del criterio de la raíz. Nuestra exposición está basada en los artículos [133, 117, 60].

Teorema 11.3 (Criterio de Kummer)**.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos. Entonces:*

1. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si existe una sucesión $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ de términos positivos tal que*

$$\rho := \liminf_{n\to+\infty} \left(\xi_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1}\right) > 0, \text{ (incluyendo el caso } \rho = +\infty).$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge si y solo si existe una sucesión* $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ *de términos positivos tal que*

$$\rho := \limsup_{n\to+\infty}\left(\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1}\right) < 0 \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_k} \text{ diverge}.$$

Demostración. (1) Si $\rho > 0$, tome $0 < r < \rho$. Por el Teorema 4.8 para límites inferiores existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < r \le \xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1}, \text{ para todo } n \ge N. \tag{11.1}$$

Como $a_{n+1} > 0$, se sigue que $\{\xi_n a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión monótona decreciente de términos positivos. Por el Teorema 4.3, esta sucesión converge y a su vez lo hará la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n - \xi_{n+1}a_{n+1}$. Por el criterio de comparación concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} ra_n$ converge, porque

$$0 < ra_{n+1} \le \xi_n a_n - \xi_{n+1}a_{n+1}.$$

Recíprocamente, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, construimos la sucesión

$$\xi_k := \frac{L - (a_1 + \cdots + a_k)}{a_k}, \qquad \text{donde } L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Claramente $\xi_k > 0$, porque $a_k > 0$ y además

$$\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

Por tanto, $\lim_{n\to+\infty}\left(\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1}\right) = 1 > 0$ como se requería.

(2) Si $\rho < 0$, de nuevo por el Teorema 4.8 para límites superiores, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} \le 0, \qquad \text{para todo } n \ge N. \tag{11.2}$$

Como $a_n > 0$, estas desigualdades muestran que $\{\xi_n a_n\}_{n\ge N}$ es una sucesión monónota creciente de términos positivos. En particular, $\xi_n a_n \ge C$, si $n \ge N$, donde $C = a_N\xi_N$. Por el criterio de comparación, $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverge porque $\sum_{n=1}^{\infty} C/\xi_n$ diverge.

Recíprocamente, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, podemos tomar $\xi_k := \sum_{j=1}^{k} a_j/a_k > 0$. Como

$$\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j/a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n+1} a_j/a_{n+1} = -1,$$

tenemos que $\lim_{n\to+\infty}\left(\xi_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1}\right) = -1 < 0$, como era requerido. Finalmente, la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\xi_k$ se sigue del Ejercicio 5.2.7(c). □

Nota 11.2.1. Las hipótesis del teorema anterior sobre límites inferiores y superiores en realidad se emplean en la forma de las desigualdades (11.1) y (11.2), respectivamente. El caso en que el límite de $\xi_n a_n/a_{n+1} - \xi_{n+1}$ exista y sea 0 en general no provee información suficiente para concluir la convergencia o divergencia de la serie dada.

Originalmente el criterio de Kummer enuncia que una serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si existe una sucesión estrictamente decreciente $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de términos positivos y una constante $r > 0$ tal que

$$c_k - c_{k+1} \geq r a_{k+1}, \qquad \text{para todo } k \geq 0.$$

Esto se sigue del criterio de comparación porque la serie telescópica $\sum_{k=0}^{\infty}(c_k - c_{k+1})$ converge. Planteado en esta forma, el criterio de Kummer no es otro que el mismo criterio de comparación. En efecto, cualquier serie convergente de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se puede representar de la forma

$$b_{k+1} = c_k - c_{k+1}, \qquad \text{por ejemplo con} \quad c_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n,$$

y la hipótesis anterior no es otra que $0 \leq r a_k \leq b_k$. La verdadera contribución de Kummer fue tomar a b_k como dicha diferencia y además poner a cada c_k como el producto

$$c_k = a_k \xi_k.$$

De esta forma recuperamos los requerimientos del Teorema 11.3. Además elecciones particulares de ξ_k determinan algunos criterios conocidos como el de D'Alembert y Gauss que especificaremos en los ejercicios. Los siguientes ejemplos contienen los criterios de Bertrand-De Morgan y de Raabe.

Proposición 11.1 (Bertrand-De Morgan)**.** *Para una serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *si*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{r_n}{n\ln(n)},$$

1. *La serie converge si* $\liminf_{n\to+\infty} r_n > 1$.
2. *La serie diverge si* $\limsup_{n\to+\infty} r_n < 1$.
3. *En el caso* $\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$, *el criterio no da información sobre la convergencia o divergencia de la serie.*

Demostración. Este caso corresponde al valor $\xi_n = n\ln(n)$ en el criterio de Kummer. Observe primero que

$$\xi_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} = \ln(1/u_n) + r_n, \qquad \text{donde } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Recordemos del Ejercicio 5.3.3 que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es una sucesión decreciente tal que $u_n \to e$, si $n \to +\infty$. Para demostrar el criterio, bajo la hipótesis (1) podemos tomar $r > 0$ con $\liminf_{n\to+\infty} r_n > 1 + r > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n > 1 + r$, para $n \geq N$. Por tanto, $\ln(1/u_n) + r_n > \ln(1/u_n) + 1 + r$. Tomando límite inferior en esta desigualdad concluimos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \ln(1/u_n) + r_n \geq r > 0,$$

y la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se sigue del criterio de Kummer. Para (2), note que por el Ejercicio 4.5.1

$$\limsup_{n\to+\infty} \ln(1/u_n) + r_n = -1 + \limsup_{n\to+\infty} r_n < 0.$$

Como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, el mismo criterio permite concluir que en este caso $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

Nota 11.2.2. Otro criterio posible se puede obtener con $\xi_n = n\ln(n)\prod_{j=2}^{M} \ln_{(j)}(n)$, donde $\ln_{(j+1)}(x) = \ln_{(j)}(\ln x)$ son las iteraciones sucesivas del logaritmo. El lector puede consultar [3] para más información.

Terminamos esta sección con una discusión sobre los criterios de Raabe y Jamet. El criterio de Raabe ($\xi_n = n$ en el criterio de Kummer) se puede entender como una contraparte del criterio del cociente cuando este no decide sobre la convergencia. De la misma forma, el criterio de Jamet, prácticamente olvidado de la literatura actual, es una contraparte del criterio de la raíz.

Proposición 11.2 (Raabe)**.** *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos es:*

1. *Convergente si* $\liminf_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$,
2. *Divergente si* $\limsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$.

Si $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$*, el criterio no da información sobre la convergencia o divergencia de la serie.*

Demostración. El enunciado se deduce del Teorema 11.3 con $\xi_n = n$ escribiendo

$$\xi_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1,$$

y recordando el Ejercicio 4.5.1 (con $b_n = -1$). El enunciado sobre la divergencia es válido porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. □

Otra forma más débil de este criterio se muestra en el siguiente enunciado, donde se supone una forma especial para el cociente a_{n+1}/a_n. Resaltamos que una demostración alternativa de este resultado se puede obtener empleando el segundo criterio del cociente, Teorema 11.1, ver [7].

Corolario 11.2. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}, \qquad \textit{donde } \epsilon_n \to 0 \textit{ si } n \to +\infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\beta > 1$ y diverge si $\beta < 1$.

Demostración. Bajo estas hipótesis tenemos que

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}} - 1\right) = \frac{\beta - \epsilon_n}{1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}} \to \beta, \qquad \text{si } n \to +\infty.$$

El resultado se deduce de la proposición anterior. □

Ejemplo 11.2.1. La serie de potencias

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{n!},$$

tiene radio de convergencia $1/3$ porque $a_n/a_{n+1} = (n+1)/(3n+1) \to 1/3$ si $n \to +\infty$. Para determinar la convergencia en los extremos del intervalo, note que para $x = -1/3$, la serie resultante es alternada. Como $(a_n/3^n)/(a_{n+1}/3^{n+1}) = (3n+3)/(3n+1) > 1$, la sucesión $\{a_n/3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y por el criterio de Leibniz la serie converge. Ahora, para $x = 1/3$, calculando

$$n\left(\frac{a_n/3^n}{a_{n+1}/3^{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{3n+3}{3n+1} - 1\right) = \frac{2n}{3n+1} \to \frac{2}{3} < 1,$$

el criterio de Raabe implica que la serie diverge. En conclusión, la serie de potencias inicial converge para $x \in [-1/3, 1/3)$.

Ejemplo 11.2.2. Considere la serie $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde

$$a_n = \frac{(a)_n}{(b)_n} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}, \qquad a, b > 0.$$

El valor $(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ suele llamarse el *símbolo de Pochhammer*. Aunque el criterio del cociente no decide sobre la convergencia de la serie, mediante el criterio de Raabe, calculando

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right) = \frac{b-a}{1 + \frac{a}{n}} \to b - a,$$

concluimos que la serie converge si $b > a + 1$ y diverge si $b < a + 1$. En el caso $b = a + 1$, tenemos que $a_n = a/(a+n)$ y así la serie diverge al compararla con la serie armónica.

Por otra parte, es posible reemplazar el término general del criterio de Raabe por una expresión que involucra al logaritmo del cociente. Más específicamente, tenemos el siguiente lema, compare con el Ejercicio 11.2.3(a).

Lema 11.1. *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *es una sucesión de términos positivos tal que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$*, entonces*

$$\limsup_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \limsup_n n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right), \quad \liminf_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \liminf_n n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

En particular, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ *existe y además coinciden.*

Demostración. Para comprobar el resultado requerimos de las desigualdades

$$\frac{x-1}{x} \le \ln(x) \le x - 1, \qquad x > 0, \tag{11.3}$$

que se establecen fácilmente a través del análisis de derivadas, ver Ejercicio 7.3.4(f). Se siguen entonces que

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \le n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \le n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

o de manera equivalente,

$$n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \le n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Tomando límite superior e inferior, y recordando el Ejercicio 4.5.2, concluimos las fórmulas requeridas. □

Pasamos ahora al criterio de Jamet, atribuido por T. Bromwich a V. Jamet por su artículo *Sur les séries à termes positifs*, Nouv. Ann. Math. 11 (1892), 99–103. Para no dificultar más la exposición restringimos nuestra atención al caso de límites como en [60], dejando los detalles del enunciado correspondiente para límites superiores e inferiores al lector.

Proposición 11.3 (Criterio de Jamet)**.** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos de forma que el límite*

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = p$$

existe y es finito. Si $p > 1$ *la serie converge y si* $p < 1$ *la serie diverge.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $-\epsilon < -\ln(a_n)/\ln(n) - p < \epsilon$, si $n \geq N$, es decir

$$\frac{1}{n^{p+\epsilon}} < a_n < \frac{1}{n^{p-\epsilon}}.$$

Si $p > 1$, tome $\epsilon > 0$ tal que $p - \epsilon < 1$ y si $p < 1$, elija $\epsilon > 0$ con $p + \epsilon < 1$. En ambos casos, por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o diverge, según sea el caso. □

Nota 11.2.3. El criterio de Jamet es más robusto que el criterio de Raabe en el siguiente sentido:

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p, \qquad \text{entonces } \lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = p.$$

Para establecer este resultado podemos aplicar la regla de Stolz-Cesàro 4.4 y el Lema 11.1 para escribir

$$p = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \ln\left(\frac{a_2}{a_3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_1) - \ln(a_n)}{\ln(n-1) + D_{n-1}}.$$

Aquí D_{n-1} es como en el Ejemplo 8.6.3 sobre la constante de Euler-Mascheroni γ. Por tanto,

$$-\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(a_1) - \ln(a_n)}{\ln(n-1) + D_{n-1}} \cdot \frac{\ln(n-1) + D_{n-1}}{\ln(n)} - \frac{\ln(a_1)}{\ln n} \to p(1 + \gamma \cdot 0) - 0 = p,$$

como se requería. Una desigualdad general con límites superiores e inferiores relacionando estos coeficientes se propone en el Ejercicio 11.2.7.

Ejemplo 11.2.3. Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - p\frac{\ln n}{n}\right)^n$, de términos positivos para n suficientemente grande. Calculando

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} \ln\left(1 - p\frac{\ln n}{n}\right) = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - px)}{x} = p,$$

podemos aplicar el criterio de Jamet para concluir que la serie converge para $p > 1$ y diverge si $p < 1$. Para $p = 1$ podemos emplear el criterio de paso al límite con la serie armónica para concluir su divergencia puesto que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) + \ln x\right) \\ &= \lim_{s\to 0^+} \exp\left(\frac{\ln(1 + s\ln s) - s\ln s}{s}\right) = e^0 = 1.\end{aligned}$$

El último límite se justifica aplicando la regla de L'Hôpital y recordando el límite $\lim_{s\to 0^+} s \ln s = 0$.

Para más información y observaciones recientes sobre los criterios de Raabe y de Jamet el lector puede consultar los artículos [60, 59].

Ejercicios

11.2.1 Comprobar que el criterio de Kummer en el caso $\xi_n = 1$ es el criterio del cociente, Teorema 5.6. Indicación: el Ejercicio 4.5.3 puede ser útil.

11.2.2 (Otra versión del criterio de Raabe) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\beta}{n}, \qquad \text{con } \beta > 1 \text{ y } n \text{ suficientemente grande.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si por el contrario, $1 - \dfrac{\beta}{n} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, con $0 < \beta < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Indicación: aunque el resultado se sigue de la Proposición 11.2 intente demostrarlo también empleando el Ejercicio 5.2.6 con $b_n = 1/n^{\beta}$, junto con las desigualdades del Ejercicio 7.3.5.

11.2.3 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de términos positivos. Comprobar las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ existe y es finito, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{\ln(n)}$ existe y es finito, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

c) Bajo la hipótesis en (b), emplear las desigualdades en (11.3) para mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)}(\sqrt[n]{a_n} - 1).$$

11.2.4 El siguiente criterio fue establecido por Gauss en 1812 para el estudio de la convergencia de series hipergeométricas.

Teorema 11.4 (Criterio de Gauss)**.** *Considere una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y asuma que*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{\beta}}, \qquad \textit{con } \beta > 1$$

y que la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es acotada. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

Demostrar este criterio empleando el test de Raabe para $\alpha \neq 1$ y el test de Bertrand-De Morgan para $\alpha = 1$.

11.2.5 Considere la serie hipergeométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde

$$a_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}, \qquad a, b, c > 0.$$

Emplear el test de Gauss para concluir que esta serie converge cuando $c > a+b$ y diverge si $c \leq a+b$. Esto también se puede establecer usando el segundo criterio del cociente, ver [7].

11.2.6 Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series $\sum a_n$, donde $x > 0$ y $p, a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a)\ a_n = \frac{(n-1)!^p}{(1+x)(2^p+x)\cdots(n^p+x)}. \qquad c)\ a_n = \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}x^{n-1}.$$

$$b)\ a_n = \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}\right)^p. \qquad d)\ a_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{an+b}{cn+d}.$$

Respuesta: (a) converge para todo $p \in \mathbb{R}$. (b) converge si $p > 2$ y diverge si $p \leq 2$. (c) converge para $x < 1$. (d) solo converge si $a = 0$ y $c \neq 0$.

11.2.7 Considere una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos. Imitar la Nota 11.2.3 y emplear los Ejercicios 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.6(b) para demostrar que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, entonces

$$\liminf_n\ n\cdot\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \leq \liminf_n -\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} \leq \limsup_n -\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} \leq \limsup_n\ n\cdot\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

Estas desigualdades asociadas a los criterios de Raabe y Jamet son la contraparte del Teorema 5.7 para el criterio del cociente y la raíz.

11.3. El Teorema de continuidad de Abel

El objetivo de este proyecto es demostrar el Teorema de continuidad de Abel sobre series de potencias en sus puntos frontera. Este resultado fue demostrado por N. Abel en su artículo de 1826 [1] con el propósito de establecer la validez de la expansión binomial (9.12) en la frontera $|x| = 1$ para cualquier valor de α. Veremos algunas de sus aplicaciones, por ejemplo a las funciones dilogaritmo y digamma, y al producto de Cauchy de series.

Teorema 11.5 (Abel)**.** *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s, entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $-1 < x < 1$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s$.*

Demostración. Como $a_n \to 0$ si $n \to +\infty$, podemos tomar $C > 0$ tal que $|a_n| < C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego su radio de convergencia satisface $R = 1/\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$. Si $R > 1$ el resultado es claro porque una serie de potencias es continua en su intervalo de convergencia. Si $R = 1$, f está definida en $(-1, 1]$. Reemplazando a_0 por $a_0 - s$, podemos suponer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$. Si $s_{-1} = 0$ y $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$ y por tanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s_{n-1})x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n| < \epsilon/2$, si $n \geq N$. Si $0 < x < 1$ vemos que

$$\left|(1-x)\sum_{n=N}^{\infty} s_n x^n\right| \leq \frac{\epsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \frac{\epsilon}{2}(1-x)\frac{x^N}{1-x} < \frac{\epsilon}{2},$$

y así

$$|f(x)| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{\infty} s_n x^n\right| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |s_n| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando x cerca de 1 de forma que $(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |s_n| < \epsilon/2$ concluimos que $|f(x)| < \epsilon$. Esto demuestra el límite requerido. □

Ejemplo 11.3.1. Podemos recuperar los valores del Ejemplo 8.6.4, a saber

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2), \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \tag{11.4}$$

al hacer $x \to 1^-$ en las expansiones dadas en (9.8). Por otra parte, el Ejercicio 13.3.8 demuestra que si $\alpha \notin \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ converge para $\alpha > -1$ y $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ converge si $\alpha > 0$. El Teorema de Abel implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} = 2^\alpha, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n = 0,$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^\alpha$ para $|x| < 1$, ver Ejemplo 9.3.6.

Ejemplo 11.3.2 (Reordenaciones de la serie armónica alternante)**.** [36] En el Ejemplo 5.6.1 mostramos que al reordenar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ posicionando bloques de 2 términos positivos y un bloque de un término negativo, se obtiene

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\ln(2).$$

Otra forma de argumentar este valor es introducir ceros en las posiciones pares que no son múltiplos de 4 para obtener

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

y considerar la función asociada

$$\begin{aligned} f(x) =& x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{2n} \\ =& \frac{1}{2}\left[\log(1+x) - \log(1-x) + \log(1-x^4)\right] = \frac{1}{2}\log((1+x)^2(1+x^2)), \end{aligned}$$

que converge para $|x| < 1$. Por el Teorema de Abel podemos hacer $x \to 1^-$ y obtener $f(x) \to \frac{3}{2}\ln(2)$, recuperando el valor deseado.

El mismo procedimiento funciona para reordenaciones en las que bloques de p términos positivos se alternan con bloques de q términos negativos. En este caso la función

$$\frac{1}{2}[\log(1+x^q) - \log(1-x^q) + \log(1-x^{2p})] = \frac{1}{2}\cdot\log\left[(1+x^q)\frac{1-x^{2p}}{1-x^q}\right]$$

recupera dicha serie. Haciendo $x \to 1^-$, se obtiene el valor de la suma $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Ejemplo 11.3.3 (La función dilogaritmo)**.** La función *dilogaritmo* se define por la serie

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad |x| < 1.$$

Note que ella converge en los puntos extremos $x = \pm 1$ y $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$. Además $\mathrm{Li}_2'(x) = -\ln(1-x)/x$, como se comprueba derivando término a término. Esta función satisface la ecuación funcional

$$\zeta(2) = \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x), \quad 0 < x < 1. \tag{11.5}$$

Para demostrar esta afirmación, notamos que el lado derecho de la ecuación es constante porque su derivada es cero. Para determinar el valor de la constante aplicamos el Teorema de Abel: si $x \to 1^-$, obtenemos

$$\lim_{x\to 1^-} \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x) = \zeta(2) + 0 + 0 = \zeta(2).$$

Si evaluamos $x = 1/2$ en (11.5) hallamos el valor

$$\mathrm{Li}_2\,(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Históricamente este razonamiento fue empleado por Euler para dar una aproximación numérica de $\zeta(2)$. En efecto, las series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^{n-1}n^2)$ y $\ln(2) = -\ln(1-1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$ convergen rápidamente, hecho que permitió calcular $\zeta(2) \approx 1.644934$ con una precisión de 6 cifras decimales. Se dice que a partir de aquí Euler reconoció el valor $\pi^2/6$.

Otro ejemplo interesante es establecer una representación integral de la función digamma, fórmula que se remonta a Gauss.

Ejemplo 11.3.4 (Representación de Gauss de la función digamma)**.** Vamos a demostrar que la función digamma $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \to \mathbb{R}$ admite la representación

$$\psi(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt, \qquad \text{para } x > 0. \tag{11.6}$$

Para ello fije $0 < s < 1$. Cerca de $t = 0$, el integrando se comporta como $1 - t^{x-1}$ y $\lim_{\epsilon\to 0^+} x\int_\epsilon^s t^{x-1}dt = \lim_{\epsilon\to 0^+} s^x - \epsilon^x$ existe cuando $x > 0$, hecho que justifica esta restricción. Ahora,

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt &= \int_0^s \sum_{k=0}^{\infty} t^k - t^{x-1+k}ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{k+1} - \frac{s^{x+k}}{x+k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right)s^{k+1} + (s - s^x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{x+k}.\end{aligned}$$

La última igualdad es necesaria para aplicar el Teorema 11.5. Este implica que el primer sumando converge a $\psi(x) + \gamma$ si $s \to 1^-$. Para terminar, mostramos que el segundo sumando tiende a 0. Como $x > 0$ podemos acotar

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{x+k} < \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{k} = \frac{1}{x} - \ln(1-s).$$

Pero

$$\lim_{s\to 1^-}(s - s^x)\ln(1-s) = \lim_{s\to 1^-} s\frac{1-s^{x-1}}{1-s}\cdot \lim_{s\to 1^-}(1-s)\ln(1-s) = (x-1)\cdot 0 = 0,$$

valor que es suficiente para concluir el resultado.

Corolario 11.3. *Si $P(x) = \sum_{l=0}^{p-1} a_l x^l \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio que satisface $P(1) = 0$, entonces*

$$\int_0^1 \frac{P(t)}{1-t^p}dt = \sum_{l=1}^{p-1}\frac{a_l}{p}\left[\psi\left(\frac{1}{p}\right) - \psi\left(\frac{j+1}{p}\right)\right].$$

Demostración. La condición $P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} = 0$ permite escribir $P(t) = \sum_{j=1}^{p-1} a_j(t^j - 1)$ y por tanto

$$\int_0^1 \frac{P(t)}{1-t^p}dt = \sum_{l=1}^{p-1} a_j \int_0^1 \frac{t^j - 1}{1-t^p}dt.$$

La fórmula se sigue de la sustitución $s = t^p$ y de la representación integral (11.6). □

Nota 11.3.1. En la Proposición 13.7 expresaremos los valores de $\psi(x)$ cuando x es racional en términos de funciones trigonométricas y logaritmos. Por tanto, si conocemos los valores explícitos de estas funciones (por ejemplo, cuando $p = 2, 3, 4, 5, 6, 8$) es posible calcular explícitamente las integrales del corolario anterior.

Finalizamos este proyecto con una aplicación sobre el producto de Cauchy entre series numéricas.

Teorema 11.6. *Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen a s y t, respectivamente, y sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ su producto de Cauchy. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, entonces su suma es st.*

Demostración. Por el Teorema de Abel las series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

convergen absolutamente para $|x| < 1$. Gracias al Teorema de Mertens 5.9, podemos multiplicarlas y obtener la igualdad $f(x)g(x) = h(x)$, válida para $|x| < 1$. El Teorema de Abel implica entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = st,$$

concluyendo la demostración. □

Ejercicios

11.3.1 Comprobar que

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \qquad |x| < 1,$$

y mostrar que Li_2 se extiende como función suave a $(-\infty, 1)$.

11.3.2 Considere los números armónicos $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Comprobar que $H_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k}$.

b) Si $|x| < 1$, mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^n = \ln(1-x)^2.$$

c) Más generalmente, si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia $r > 0$, lo mismo es válido para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n H_n x^n$. Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n H_n x^n = \int_0^1 \frac{f(x) - f(tx)}{1-t} dt, \qquad |x| < r.$$

d) Use (c) para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \int_0^1 \frac{\ln(2-t)}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Nota 11.3.2. Existen numerosas identidades que involucran a los números armónicos, ver por ejemplo [53].

11.3.3 Demostrar que la constante de Catalan $G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ se puede escribir como

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

11.3.4 El recíproco del teorema de Abel no es cierto. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1^-} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = 1/2$ existe, y sin embargo la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge. El siguiente es un recíproco parcial debido al matemático austriaco A. Tauber (1866-1941) quien lo demostró en 1897.

Teorema 11.7 (Tauber)**.** *Suponga que la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 1$ y satisface que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = s$. Si $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s.*

Probar este enunciado estimando $|s_n - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\epsilon_n x^{n+1}}{n(1-x)}$, donde $\epsilon_n = \sup_{k>n} |ka_k|$. Luego tome $x = 1 - \frac{1}{n}$ y justifique por qué estos términos tienden a cero si $n \to +\infty$.

11.3.5 Si $\lambda > 0$, mostrar que $2\lambda \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right) - \psi\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$.

11.3.6 [30] Fije un entero $k \geq 2$ y una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de periodo k (es decir $a_{n+k} = a_n$) tal que $a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} = 0$. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda n + 1} = \int_0^1 \frac{P(t^\lambda)}{1 - t^{k\lambda}} dt, \qquad \text{para } \lambda > 0, \tag{11.7}$$

donde $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}$. En particular,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{pn + q} = \int_0^1 \frac{P(s^p)}{1 - s^{pk}} s^{q-1} ds, \qquad \text{para } p, q \in \mathbb{N}^+. \tag{11.8}$$

Mostrar que el Ejercicio 8.6.4 es un caso particular de esta situación.
Indicación: descomponer la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda n+1} u^{\lambda n+1}$, $|u| < 1$, en bloques según el resto de n al dividir por k, ver ecuación (5.14).

11.3.7 Emplear el ejercicio anterior para comprobar las siguientes igualdades, identificando la sucesión y los valores de k, p y q:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots = \int_0^1 \frac{dt}{1 - t + t^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \cdots = \int_0^1 \frac{t^4 + t^2}{t^4 + t^2 + 1} dt = 1 - \frac{\ln 3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi.$$

Note que las fracciones en cada integral ya están simplificadas. Compare también el valor de estas integrales con el Corolario 11.3 y la Proposición 13.7.

Capítulo 12

Otros resultados sobre diferenciabilidad

Los cuatro proyectos de este capítulo ofrecen información adicional sobre diferenciabilidad en una variable. En el primero estudiaremos funciones convexas, sus propiedades y caracterizaciones. En el caso de funciones diferenciables esta propiedad equivale a tener derivada monótona creciente. Como aplicación incluimos algunas desigualdades destacadas que de hecho han sido usadas en la primera parte del libro. El segundo proyecto discute la fórmula de Faà di Bruno que permite calcular explícitamente las sucesivas derivadas de una composición de funciones. Demostraremos varias fórmulas relacionadas y una aplicación a la estabilidad por composición de funciones analíticas. El tercer proyecto demuestra que un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ coincide con el conjunto de ceros de alguna función suave. Además, trata el Teorema de Borel-Peano, que establece que los coeficientes de la serie de Taylor de una función suave pueden ser arbitrarios. Finalmente, el último proyecto incluye resultados de Whitney sobre la clase de diferenciabilidad del resto integral en la fórmula de Taylor.

12.1. Funciones convexas

Definición 12.1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *convexa* en I si para cada $x, y \in I$ con $x < y$ se verifica que

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x), \qquad \text{para todo } \lambda \in [0,1]. \tag{12.1}$$

Por otra parte, f se dice *cóncava* si para cada $x, y \in I$ con $x < y$ se verifica que

$$\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \leq f(\lambda y + (1-\lambda)x), \qquad \text{para todo } \lambda \in [0,1]. \tag{12.2}$$

Por tanto, f es cóncava si y solo si $-f$ es convexa.

Geométricamente ser convexa significa que el gráfico de f en el intervalo $[x, y]$ está debajo del segmento de recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$. De la misma forma, ser cóncava requiere que este segmento esté por debajo de la gráfica de f. Para comprobar la primera afirmación note que la ecuación de la recta que pasa por estos puntos está dada por

$$L(t) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x).$$

Como $L(\lambda y + (1 - \lambda)x) = \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$, se sigue que (12.1) es equivalente a requerir que $f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq L(\lambda y + (1 - \lambda)x)$.

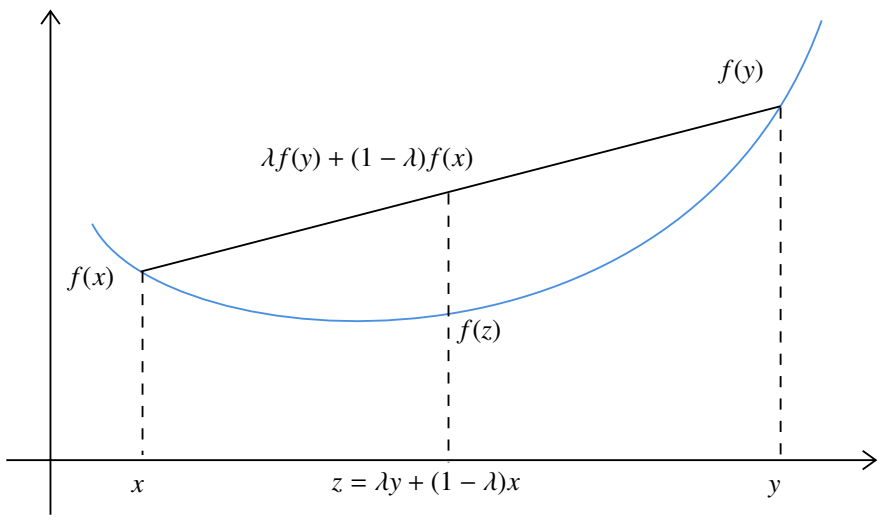

Figura 12.1: La gráfica de una función convexa.

En lo que resta del proyecto consideraremos solo los resultados para funciones convexas. Los enunciados para funciones cóncavas se expresan inmediatamente cambiando el orden de las desigualdades.

La condición de convexidad también se puede determinar empleando más de dos puntos, como lo muestra el siguiente resultado dado por el matemático danés Johan Jensen (1859-1925).

Proposición 12.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es convexa si y solo si para cada $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, se verifica que*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{12.3}$$

Demostración. Note que la condición (12.3) es precisamente la definición de convexidad para $n = 2$. Basta entonces demostrar que si f es convexa, entonces (12.3) es válida. Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 2$ es nuestra hipótesis de partida. Ahora, si el resultado se verifica para algún $n - 1 \geq 2$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$,

tenemos dos opciones. Si alguno de los λ_j es 0 o 1, estamos en el caso de la hipótesis de inducción. De lo contrario, podemos suponer que $0 < \lambda_n < 1$ y concluir que los $\lambda'_j = \lambda_j/(1-\lambda_n)$, $j = 1, \dots, n-1$ satisfacen $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_{n-1} = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) &= f\Big((1-\lambda_n)(\lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_{n-1} x_{n-1}) + \lambda_n x_n\Big) \\ &\le (1-\lambda_n) f\Big(\lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_{n-1} x_{n-1}\Big) + \lambda_n f(x_n) \\ &\le (1-\lambda_n)\Big(\lambda'_1 f(x_1) + \cdots + \lambda'_{n-1} f(x_{n-1})\Big) + \lambda_n f(x_n) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n), \end{aligned}$$

como era requerido. Note que en la primera desigualdad empleamos la convexidad y en la segunda, la hipótesis de inducción. Finalmente, el principio de inducción permite concluir el resultado. □

Es posible reescribir la definición de convexidad en términos de $z =: \lambda y + (1-\lambda)x$, que es un punto tal que $x < z < y$. En efecto, primero expresamos λ en términos de z para obtener

$$\lambda = \frac{z-x}{y-x}, \qquad 1-\lambda = \frac{y-z}{y-x},$$

donde cada término que forma estos cociente es positivo. Ahora, la desigualdad $f(z) \le \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$ en (12.1) admite las siguientes tres formas equivalentes:

1. $f(z) - f(x) \le \lambda(f(y) - f(x))$, es decir, $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
2. $f(z) - f(y) \le (1-\lambda)(f(x) - f(y))$, es decir, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$.
3. $(1-\lambda)(f(z) - f(x)) \le \lambda(f(y) - f(z))$, es decir $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$.

En conclusión, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 12.2. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si alguna de las tres desigualdades*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}, \qquad \textit{es válida, para todo } x < z < y. \tag{12.4}$$

En términos de la función

$$\Delta_f(x,y) := \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, \qquad x \ne y, \tag{12.5}$$

que satisface $\Delta_f(x,y) = \Delta_f(y,x)$, la convexidad de f se traduce en que para $x \in I$, la aplicación $t \in I \cap (x, +\infty) \mapsto \Delta_f(x,t)$ sea monónota creciente. Estas observaciones permiten establecer el siguiente resultado.

Teorema 12.1. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y $x_0 \in Int(I)$, entonces las derivadas laterales $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ existen. En particular, f es continua en $Int(I)$.*

Demostración. Si x_0 es punto interior a I, tome $r > 0$ tal que $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$. Por convexidad vemos que

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - r)}{r} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{si } x_0 - r < x_0 < x.$$

Empleando Δ_f en (12.5), concluimos que la función $x \in I \cap (x_0, +\infty) \mapsto \Delta_f(x, x_0)$ es monótona creciente y acotada inferiormente. El Teorema 6.8 (2) implica entonces que

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \Delta_f(x, x_0) = \inf_{x_0 < x < x_0 + r} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe y es finito. El mismo razonamientos demuestra que

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \Delta_f(x, x_0) = \sup_{x_0 - r < x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Las afirmaciones sobre la continuidad son inmediatas de la existencia de $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$, ver el párrafo luego de la Definición 7.2. □

En general, en los puntos extremos del intervalo I no se puede concluir continuidad, ni en sus puntos interiores diferenciabilidad. Por ejemplo, considere funciones como en la Figura 12.2.

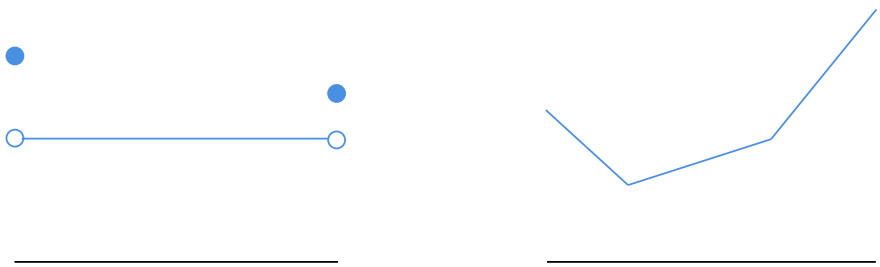

Figura 12.2: Convexidad, continuidad y diferenciación.

Sin embargo, al asumir mejor regularidad para f podemos caracterizar convexidad de manera práctica en términos de sus derivadas.

Teorema 12.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo.*

1. *Si f es diferenciable en I, f es convexa si y solo si f' es monótona creciente.*

2. *Si f es dos veces diferenciable en I, f es convexa si y solo si $f''(x) \geq 0$ para $x \in I$.*

Demostración. Si f es convexa, podemos tomar $z \to x^+$ y $z \to y^-$ en (12.4), para obtener las desigualdades

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y).$$

Como f es diferenciable, concluimos que $f'(x) \leq f'(y)$. Recíprocamente, si f' es monótona creciente, dados $x < z < y$, por el Teorema del valor medio, Corolario 7.1, podemos encontrar puntos $x < \xi_0 < z < \xi_1 < y$ tales que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

La convexidad de f se deduce de la Proposición 12.2. Para (2) basta emplear (1) y el Teorema 7.6 y Corolario 7.3 a la función f'. □

Ejemplo 12.1.1. Las funciones $h(x) = x^p$, para $p \geq 1$ son convexas en el intervalo $[0, +\infty)$. Para comprobar esto en $(0, +\infty)$ basta notar que $h''(x) > 0$ allí. Para el punto 0 la desigualdad (12.1) indica que $h(\lambda x) = \lambda^p x^p \leq \lambda x^p = \lambda h(x)$, que claramente es válida porque $\lambda \in [0, 1]$.

Por otra parte, la función $g(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}^+$ es convexa en $\mathbb{R}$ si k es par. Si k es impar, entonces g es convexa en $[0, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0]$. Finalmente, la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

es convexa en $\mathbb{R}$ porque $f''(x) = e^x > 0$, mientras que $\ln(x)$ es cóncava en $(0, +\infty)$ porque su segunda derivada es $-1/x^2 < 0$.

Ejemplo 12.1.2 (Desigualdades de Jordan)**.** La función seno satisface que

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x, \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2.$$

La primera desigualdad se debe a que $\frac{d^2}{dx^2}(\sin(x)) = -\sin(x) < 0$ en dicho intervalo. Por tanto, es cóncava allí. Como el segmento que une $(0, 0)$ con $(\pi/2, 1)$ está dado por $t \mapsto 2t/\pi$, se sigue la primera desigualdad.

La segunda desigualdad se deduce de analizar $h(x) = \sin(x) - x$ cuya derivada es $h'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Así h es decreciente, y en particular $h(x) \leq h(0) = 0$ si $x \geq 0$. Por otra parte, el mismo argumento de concavidad demuestra que

$$2 - \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x), \qquad \text{para } \pi/2 \leq x \leq \pi.$$

Ejemplo 12.1.3 (Desigualdad log-suma)**.** Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \ln(a_j/b_j) \geq (a_1 + \cdots + a_n) \ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}\right).$$

Para demostrar esta desigualdad, considere la función $f(x) = x\ln(x)$ que es convexa porque $f''(x) = 1/x > 0$ para $x > 0$. Sean $a = a_1 + \cdots + a_n$ y $b = b_1 + \cdots + b_n$. Como $\sum_{j=1}^n b_j/b = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen, Proposición 12.1, para obtener

$$\sum_{j=1}^n a_j \ln(a_j/b_j) = \sum_{j=1}^n b_j f(a_j/b_j) = b\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{b} f(a_j/b_j) \geq bf\left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{b}\frac{a_j}{b_j}\right) = bf(a/b),$$

como se requería.

Ejemplo 12.1.4. Fije $v > 0$ y considere la función definida por $f(x) = x\ln(1 + v^{1/x})$. Esta función es convexa porque $f''(x) = (\ln v)^2 v^{1/x}/((v^{1/x} + 1)^2 x^3) > 0$ si $x > 0$. En particular, $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Para los valores $x = 1$ y $y = 1/\alpha$, con $\alpha > 0$ esta desigualdad toma la forma

$$\frac{\alpha+1}{2\alpha}\ln(1 + v^{2\alpha/(\alpha+1)}) \leq \frac{1}{2}\ln(1+v) + \frac{1}{2\alpha}\ln(1+v^\alpha).$$

Luego de simplificar y aplicar la función exponencial concluimos que

$$(1 + v^{2\alpha/(\alpha+1)})^{\alpha+1} \leq (1+v)^\alpha(1+v^\alpha), \qquad \text{si } v, \alpha > 0.$$

Finalizamos este proyecto mencionando un concepto muy relacionado con convexidad llamado la convexidad logarítmica. Una función $h : I \to (0, +\infty)$ se dice *logarítmicamente convexa* si $\ln \circ h$ es convexa. En términos de la desigualdad (12.1) esto significa que

$$\ln(h(\lambda y + (1-\lambda)x)) \leq \lambda\ln(h(y)) + (1-\lambda)\ln(h(x)),$$

o aplicando la función exponencial, que

$$h(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq h(y)^\lambda h(x)^{1-\lambda}, \qquad \text{para todo } x < y \text{ en } I \text{ y } \lambda \in [0,1]. \tag{12.6}$$

Un ejemplo relevante de este comportamiento viene dado por la función Gamma $\Gamma(x)$, estudiada en el Proyecto 13.3.

Ejercicios

12.1.1 Comprobar las siguientes construcciones con funciones convexas:

a) Si $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ son convexas, entonces las funciones $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ y $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ también lo son, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$.

b) Si $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son convexas y g es monótona creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

c) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son funciones definidas en I, convexas y $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ existe para todo $x \in I$, entonces $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa.

12.1.2 Demostrar que una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo es convexa si y solo si el conjunto

$$\left\{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I, f(x) \leq v\right\} \quad \text{es convexo.}$$

Este conjunto se conoce como el *epígrafo* de f.

12.1.3 Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en su dominio y tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Si f^{-1} es la inversa de f, mostrar que es dos veces diferenciable en su dominio. Además, si f es convexa en (a, b), entonces f^{-1} es cóncava en su dominio.

12.1.4 Comprobar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable es convexa si y solo si

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x), \qquad \text{para todo } x, x_0 \in I.$$

12.1.5 Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \qquad \text{para todo } x, y \in I.$$

Demostrar que f es convexa.
Indicación: mostrar primero que $f(\sum_{j=1}^{2^n} a_j/2^n) \leq \sum_{j=1}^{2^n} f(a_j)/2^n$. Luego que (12.1) es válida para $\lambda = k/2^n$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Para el caso general escriba a $\lambda \in [0, 1]$ en expansión binaria y emplee la continuidad de f.

12.1.6 (Una desigualdad de Hardy-Littlewood y Karamata)

a) Sean $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ números en un intervalo I y fije $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Asuma que

$$s_j = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_j a_j \geq t_j = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_j b_j, \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, n-1,$$

y que $s_n = t_n$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(b_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(a_j).$$

Indicación: Escriba $f(a_j) - f(b_j) = c_j(a_j - b_j)$, donde, por convexidad, $c_j \geq c_{j+1}$. Luego aplique el Lema 5.1 de sumas por partes a la expresión $\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j c_j)(a_j - b_j)$.

b) Aplique estos resultados a $f(x) = 1/x$ y $\lambda_j = 1$ para mostrar que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c},$$

para todo $a, b, c > 0$. Note que puede asumir $a \geq b \geq c$.

12.1.7 (Medias aritmética y geométrica II) Empleando la concavidad de $f(x) = \ln(x)$ para $x > 0$ y aplicando la desigualdad de Jensen, establezca de nuevo las desigualdades

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

donde $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, dadas en el Ejercicio 7.3.7.

12.1.8 (Desigualdad de Hermite–Hadamard) Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa. Entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Indicación: La prueba clásica emplea $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(a + jh) \geq f(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a + jh))$ con $h = (b - a)/n$ y $\int_a^b f(t)dt = (b - a) \int_0^1 f(sa + (1 - s)b)ds$. Otra alternativa, siguiendo [50], es observar que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) =& f\left(\frac{\lambda b + (1-\lambda)a + \lambda a + (1-\lambda)b}{2}\right) \\ \leq& \frac{f(\lambda b + (1-\lambda)a) + f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, y luego integrar sobre $[0, 1]$. Para desigualdades más refinadas consulte [50]. Para otra demostración alternativa (2020) ver [89].

12.1.9 [23] Aplicar la desigualdad del Ejercicio 12.1.8 a $f(t) = e^t$, $\ln(a)$ y $\ln(b)$, con $a < b$ para recuperar la siguiente desigualdad entre la media aritmética, logarítmica y geométrica entre a y b:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} \leq \frac{a+b}{2}.$$

12.1.10 [75] Emplear la desigualdad del Ejercicio 12.1.8 a $f(t) = 1/t$ en el intervalo $[n, n + 1]$, donde $n \in \mathbb{N}^+$ para mostrar que

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

12.1.11 *a*) Sea $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Entonces h es log-convexa si y solo si

$$h''(x)h(x) - h'(x)^2 \geq 0, \qquad \text{para todo } x \in (a, b).$$

b) Una función log-convexa es convexa. El recíproco es falso, verificarlo para $h(x) = x^2$.

12.2. La fórmula de Faà di Bruno

El objetivo de este proyecto es demostrar una fórmula que permite calcular las derivadas de orden superior de una composición en términos de las derivadas de las funciones involucradas. Además presentamos una aplicación de este resultado demostrando que la clase de funciones analíticas es estable bajo composición. La fórmula lleva su nombre en honor a Francesco Faà di Bruno (1825-1888) aunque su descubrimiento se remonta a los trabajos de Louis Francois Antoine Arbogast (1759-1803), ver [38, 70] para más información. Nuestra exposición está basada en [70] donde se incluyen más versiones de esta fórmula. Los resultados sobre analiticidad son tomados de [83].

Comenzamos nuestra discusión con el caso de series de potencias. Supongamos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son series de potencias con radio de convergencia positivo. Si el valor $f(x)$ está en el intervalo de convergencia de g, entonces $g \circ f(x)$ está definida y toma la forma

$$g(f(x)) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k f(x)^k = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{l_1,\dots,l_k \geq 1} a_{l_1} a_{l_2} \cdots a_{l_k} x^{l_1+l_2+\cdots+l_k},$$

expandiendo cada potencia $f(x)^k$. Formalmente, si agrupamos los coeficientes con el mismo exponente en x, el resultado será la serie de potencias

$$(g \circ f)(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=n \\ l_i \geq 1}} a_{l_1} a_{l_2} \cdots a_{l_k},$$

donde la suma interna se toma sobre todos los posibles enteros $l_1, \dots, l_k \geq 1$ cuya suma es n. Recordando la fórmula de Taylor para $x = 0$, encontramos la relación

$$\frac{(g \circ f)^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=m \\ l_i \geq 1}} \frac{f^{(l_1)}(0)}{l_1!} \frac{f^{(l_2)}(0)}{l_2!} \cdots \frac{f^{(l_k)}(0)}{l_k!}, \tag{12.7}$$

que expresa la n-ésima derivada de $g \circ f$ en el origen en términos de las derivadas de g en $f(0) = 0$ y de f en 0. La fórmula de Faà di Bruno establece una relación equivalente para funciones m veces diferenciables, agrupando términos iguales en la suma interna.

Esta fórmula es en realidad de naturaleza combinatoria. Daremos dos formas equivalentes, la segunda en términos de particiones del conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$. Recordemos que una *partición* P de este conjunto es una familia $\{B_1, \dots, B_k\}$, formada por *bloques* $B_j \neq \emptyset$, disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \{1, 2, \dots, m\}$. También emplearemos los coeficientes multinomiales del Ejemplo 1.2.2.

Teorema 12.3 (Faà di Bruno)**.** *Si f y g son m veces diferenciables en x y $f(x)$, respectivamente, entonces $g \circ f$ es m veces diferenciable x y se verifican las siguientes fórmulas:*

1. *Sumando sobre todas las particiones P de $\{1, 2, \ldots, m\}$, donde $k = |P|$ es el número de bloques de P y b_i es el número de bloques con exactamente i elementos,*

$$(g \circ f)^{(m)}(x) = \sum_P g^{(k)}(f(x)) \left(f'(x)\right)^{b_1} \left(f''(x)\right)^{b_2} \cdots \left(f^{(m)}(x)\right)^{b_m}. \tag{12.8}$$

Note que $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ y $m = |\bigcup_{j=1}^k B_j| = b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m$.

2. *Sumando sobre las distintas soluciones $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ de $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$, tenemos que*

$$\frac{(g \circ f)^{(m)}(x)}{m!} = \sum \frac{g^{(b_1+b_2+\cdots+b_m)}(f(x))}{b_1!b_2!\cdots b_m!} \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right)^{b_m}. \tag{12.9}$$

Antes de presentar la demostración veamos un ejemplo.

Ejemplo 12.2.1. Para $m = 3$ las soluciones $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{N}^3$ de la ecuación $b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 3$ son $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Por tanto, la fórmula indica que

$$\begin{aligned}(g \circ f)'''(x) &= 3!\left(\frac{g'''(f(x))}{3!0!0!}(f'(x))^3 + \frac{g''(f(x))}{1!1!0!}f'(x)\frac{f''(x)}{2!} + \frac{g'(f(x))}{0!0!1!}\frac{f'''(x)}{3!}\right)\\ &= g'''(f(x))(f'(x))^3 + 3g''(f(x))f'(x)f''(x) + g'(f(x))f'''(x).\end{aligned}$$

La versión empleando particiones también se verifica, notando que las particiones de $\{1, 2, 3\}$ son

$$\{1|2|3\}, \qquad \{1|23\}, \qquad \{12|3\}, \qquad \{13|2\}, \qquad \{123\},$$

donde las barras verticales separan los distintos bloques. Para $\{1|2|3\}$ tenemos que $b_1 = 3, b_2 = b_3 = 0$ y $k = 3$. Para $\{123\}$, $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = 1$ y $k = 1$. Finalmente, para $\{1|23\}, \{12|3\}$ y $\{13|2\}$ se verifica $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$ y $k = 2$. Note que estas tres particiones inducen el mismo término en la suma anterior.

Demostración del Teorema 12.3. Para demostrar (12.8) procedemos por inducción sobre m. Como la fórmula es válida para $m = 1$, asumamos que se verifica para algún $m \geq 1$. Note que cada partición de $\{1, 2, \ldots, m + 1\}$ se puede obtener de forma única añadiendo el elemento $m + 1$ a una partición de $\{1, 2, \ldots, m\}$. Tenemos dos posibilidades: primero, si añadimos $\{m + 1\}$ como un nuevo bloque, el número de bloques de tamaño 1 y el número total de bloques aumenta en uno. Esto corresponde a aplicar $\frac{d}{dx}$ a $g^{(k)}(f(x))$ para obtener $g^{(k+1)}(f(x))f'(x)$. Segundo, si añadimos $m + 1$ a un bloque existente de tamaño i, el número de estos bloques disminuye en uno, el número total de bloques de tamaño $i + 1$ aumenta en uno, pero el número total de bloques se mantiene igual. Si hay b_i bloques de tamaño i, podemos añadir $\{m + 1\}$ a

cualquiera de ellos. Por tanto, esto corresponde a aplicar $\frac{d}{dx}$ a $(f^{(i)}(x))^{b_i}$ para obtener $b_i(f^{(i)}(x))^{b_i-1}f^{(i+1)}(x)$. Así la fórmula (12.8) es válida para $m+1$. El principio de inducción permite terminar la demostración.

Para demostrar que (12.8) implica (12.9) basta mostrar que el número de particiones P con b_i bloques de i elementos, $i = 1, \dots, m$, para una solución fija $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ de $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$ es

$$\frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}\frac{1}{1!^{b_1}2!^{b_2}\cdots m!^{b_m}}. \tag{12.10}$$

En efecto, fijados $b_1, b_2, \dots, b_m$ tales que $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$, sea p el número de particiones P de $\{1, 2, \dots, m\}$ con b_i bloques de tamaño i, para $i = 1, 2, \dots, m$. Entonces

$$p \cdot b_1!b_2!\cdots b_m!$$

cuenta el número de formas posibles de depositar m objetos en $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ urnas de forma que en las primeras b_1 urnas hay un elemento, en las b_2 siguientes hay 2 elementos, y así sucesivamente. Esto se debe a que una partición P como antes induce $b_1!b_2!\cdots b_m!$ formas distintas de depositar objetos como se requiere. En efecto, las $b_j!$ formas de permutar los bloques de tamaño j de P inducen diferentes formas de depositar. Finalmente, por la definición del coeficiente multinomial, obtenemos

$$p \cdot b_1!b_2!\cdots b_m! = \binom{m}{\underbrace{1, \dots, 1}_{b_1\, 1's}, \underbrace{2, \dots, 2}_{b_2\, 2's}, \dots}.$$

Al despejar p recuperamos el valor en (12.10). □

En este punto es natural preguntar qué relación existe entre las fórmulas (12.7) y (12.9). En realidad ellas son equivalentes. En efecto, basta con agrupar en (12.9) las soluciones $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ de $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$ tales que $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ es constante. Note $1 \le k \le m$ y así (12.9) toma la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} \sum_{\substack{k=b_1+b_2+\cdots+b_m \\ b_1+2b_2+\cdots+mb_m=m}} \frac{k!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right)^{b_m}.$$

Por otra parte, dado $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ como antes y $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, el número de soluciones de la ecuación

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = m, \qquad l_i \in \mathbb{N}^+,$$

tales que j aparece b_j veces, para $j = 1, \dots, m$ es precisamente $\binom{k}{b_1, b_2, \dots, b_m}$. Por tanto, la fórmula de Faà di Bruno se puede escribir de la forma

$$\frac{(g \circ f)^{(m)}(x)}{m!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=m \\ l_i \ge 1}} \frac{f^{(l_1)}(x)}{l_1!}\frac{f^{(l_2)}(x)}{l_2!}\cdots\frac{f^{(l_k)}(x)}{l_k!}, \tag{12.11}$$

que corresponde a (12.7).

Ejemplo 12.2.2. Considere $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{1-a(x-1)}$, donde $a > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = \frac{1-x}{1-(a+1)x} &= \frac{1}{1-(a+1)x} - \frac{x}{1-(a+1)x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+a)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(1+a)^n x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(1+a)^{n-1}x^n,\end{aligned}$$

donde la expansión en serie es válida si $(a+1)|x| < 1$. Note que $f^{(j)}(0)/j! = 1$, $f(0) = 1$ y $g^{(k)}(f(0))/k! = a^k$, valores que se obtienen desarrollando en series de potencias a f en 0 y a g en 1. Por tanto, la fórmula de Faà di Bruno demuestra que

$$a(1+a)^{m-1} = \frac{(g \circ f)^{(m)}(0)}{m!} = \sum \frac{k!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}a^k,$$

donde $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ y la suma se hace sobre las distintas soluciones $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ de $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$. Otra forma directa de obtener esta relación es notar que

$$\sum \binom{k}{b_1, b_2, \ldots b_m} a^k = \sum_{k=1}^{m} a^k \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_k=m \\ l_i \geq 1}} 1.$$

Como el número de soluciones de la ecuación $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = m$ es $\binom{m-1}{k-1}$, ver Ejercicio 1.2.2, la ecuación previa se sigue del Teorema del Binomio.

Existe otra forma posible de expresar la derivada de la composición de funciones atribuida a R. Hoppe (1816-1900), ver [70]. Daremos una idea de la demostración expandiendo los detalles en los ejercicios al final de la sección.

Proposición 12.3 (Hoppe)**.** *Si x, g y f son como en el Teorema 12.3, entonces*

$$(g \circ f)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} A_{m,k}(f)(x), \tag{12.12}$$

donde

$$A_{m,k}(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-f(x))^{k-j} \frac{d^m}{dx^m}(f^j)(x), \quad y \quad A_{0,0}(f) = 1.$$

Demostración. Aplicando inducción sobre m se sigue que $(g \circ f)^{(m)}$ se puede expresar como en el enunciado, donde los $A_{m,k}(f)$ son coeficientes independientes de g. En particular, (12.12) para $g(x) = x^k$, con $k = 0, 1, \ldots, m$, toma la forma

$$\frac{d^m}{dx^m}(f^k)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(x)^{k-j} A_{m,j}(f)(x),$$

porque $g^{(j)}(x) = j!\binom{k}{j}x^{k-j}$. Estas relaciones permiten despejar $A_{m,k}(f)$ como en el enunciado. En efecto, podemos emplear las *fórmulas de inversión binomial*

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^j b_j \quad \text{si y solo si} \quad b_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^j a_j, \tag{12.13}$$

cuya justificación se dará en el Ejercicio 12.2.3. □

Una de las aplicaciones de la fórmula de Faà di Bruno es que permite acotar la derivada de una composición si se conocen cotas para las derivadas de las funciones involucradas. Presentamos aquí el caso de funciones analíticas demostrando que la compuesta de dichas funciones se mantiene analítica. Para ello requerimos de la siguiente caracterización de analiticidad en términos de crecimiento de las derivadas.

Teorema 12.4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces $f \in C^\omega(I)$ si y solo si para cada $x_0 \in I$ existe un intervalo $J \subseteq I$ con $x_0 \in J$ y constantes $C, R > 0$ tales que*

$$\left|\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\right| \leq \frac{C}{R^j}, \qquad x \in J.$$

Demostración. Si $f \in C^\omega(I)$ y $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ y

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad \text{para } |x - x_0| < r, \qquad \text{donde } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{12.14}$$

Además las derivadas sucesivas de f se calculan derivando término a término, es decir

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-j+1)a_n(x - x_0)^{n-j}, \qquad |x - x_0| < r.$$

Si fijamos $0 < \rho < r$ y ponemos $C' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n \geq 0$ (que converge por la convergencia absoluta de f para $|x - x_0| < r$), se sigue que

$$|a_n| \leq C'/\rho^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

compare con el Ejercicio 9.3.4. De esta forma, si $|x - x_0| < \rho_0 < \rho$, obtenemos la cota

$$\left|\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\right| \leq \sum_{n=j}^{\infty} C'\binom{n}{j}\rho_0^{n-j}/\rho^n = \frac{C'}{\rho^j}\frac{1}{(1 - \rho_0/\rho)^{j+1}},$$

donde empleamos (9.7) para sumar la última serie. El resultado se sigue tomando $J = (x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0)$, $C = C'/(1 - \rho_0/\rho)$ y $R = \rho - \rho_0$.

Recíprocamente, dado $x_0 \in I$ debemos comprobar (12.14) para algún $r > 0$. Dados J, C y R como en el enunciado, sea $r > 0$ de forma que $0 < r < R$ y $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq J$. Si $|x - x_0| < r$, se sigue del Teorema de Taylor 7.10 con resto diferencial que

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}}{j!}(x - x_0)^j \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \right| \leq \frac{Cr^n}{R^n},$$

donde $\xi \in J$ es un punto entre x y x_0. El resultado se sigue de tomar $n \to +\infty$. □

Proposición 12.4. *Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos. Si $f \in C^\omega(I)$, su imagen está contenida en J y $g \in C^\omega(J)$, entonces $g \circ f \in C^\omega(I)$.*

Demostración. Fije $x_0 \in I$. Por el teorema anterior existen constantes $C, D, R, S > 0$ tales que

$$\left| \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right| \leq \frac{C}{R^j}, \qquad \left| \frac{g^{(j)}(y)}{j!} \right| \leq \frac{D}{S^j}, \qquad j \in \mathbb{N},$$

para x cerca de x_0 y $y = f(x)$. Por la fórmula de Faà di Bruno obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{(g \circ f)^{(m)}(x)}{m!} \right| &= \left| \sum \frac{g^{(b_1+b_2+\cdots+b_m)}(f(x))}{b_1!b_2!\cdots b_m!} \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right)^{b_m} \right| \\ &\leq \sum \frac{k!(D/S^k)}{b_1!b_2!\cdots b_m!} \left(\frac{C}{R}\right)^{b_1} \left(\frac{C}{R^2}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{C}{R^m}\right)^{b_m} \\ &= \frac{D}{R^m} \sum \frac{k!}{b_1!b_2!\cdots b_m!} (C/S)^k, \end{aligned}$$

donde $k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ y la suma se hace sobre las distintas soluciones $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ de $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$. El Ejemplo 12.2.2 implica

$$\left| (g \circ f)^{(m)}(x) \right| \leq \frac{D(C/S)}{R^m}(1 + C/S)^{m-1}.$$

Por tanto, $g \circ f$ satisface las cotas del Teorema 12.4 cerca de x_0. □

Corolario 12.1. *Si $f \in C^\omega(I)$, entonces $1/f$ es analítica en los puntos $x_0 \in I$ tales que $f(x_0) \neq 0$.*

Demostración. Si $f(x_0) \neq 0$, podemos escribir

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1/f(x_0)}{1 - (1 - f(x)/f(x_0))},$$

que, salvo el factor del numerador, es la composición de $F(x) = 1 - f(x)/f(x_0)$ con la serie geométrica $1/(1 - y)$. Si $|x - x_0|$ es suficientemente pequeño para que $|F(x)| < 1$, se sigue que $1/f$ es analítica en dicho intervalo al ser compuesta de funciones analíticas. □

Nota 12.2.1. Dado un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, existen clases de funciones entre los espacios $C^\infty(I)$ y $C^\omega(I)$ definidas a través del crecimiento de sus derivadas. En general, si $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos, es posible definir la clase de *funciones ultradiferenciables* $C^M(I)$ como el espacio de funciones $f \in C^\infty(I)$ tales que para cada $x_0 \in I$ existe un intervalo abierto $J \subseteq I$ con $x_0 \in J$ y constantes $C, R > 0$ tales que

$$\left|\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\right| \leq \frac{C}{R^j} M_j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 12.4, $C^\omega(I)$ se corresponde a la sucesión constante $M_n = 1$. Para que la clase $C^M(I)$ sea estable por las operaciones usuales es necesario requerir ciertas condiciones sobre M. Entre ellas se destaca la *convexidad logarítmica*, es decir

$$M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En este caso se dice que M es *log-convexa*. Las propiedades de estabilidad de $C^M(I)$ se dan en el Ejercicio 12.2.4. Más información sobre estos espacios se puede encontrar en [80].

Ejercicios

12.2.1 Comprobar que

$$\frac{d^m}{dx^m}(e^{1/x}) = (-1)^m e^{1/x} \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} \frac{m!}{k!} x^{-m-k}.$$

Nota 12.2.2. Una fórmula más general debida a G. H. Halphen (1880) indica que

$$\frac{d^n}{dx^m}\left(f(1/x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{x^k} f^{(k)}(1/x)(g(x)/x^k)^{(m-k)}.$$

El caso anterior es $g(x) = 1$ y $f(x) = e^x$. Halphen la demostró primero para el caso en que f y g son de la forma x^l, $l \in \mathbb{N}$. De ahí se sigue para polinomios y finalmente para funciones generales, vía el Teorema de aproximación de Weierstrass 9.8. La fórmula también se puede demostrar empleando la fórmula de Hoppe, Proposición 12.3 y algunas propiedades de los coeficientes binomiales, ver [107, Chapter 8]. Para más información consultar [2] donde se incluyen fórmulas más generales.

12.2.2 Completar el paso inductivo en la fórmula de Hoppe, Proposición 12.3, y mostrar que los coeficientes $A_{m,k}(f)$ satisfacen

$$\frac{d}{dt}(A_{m,k}(f))(x) = A_{m+1,k}(f)(x) - f'(x) A_{m,k-1}(f)(x),$$

donde $A_{m,0}(f) = 0$ si $m > 0$ y $A_{0,0}(f) = 1$. Además, comparando con (12.11), concluir que estos valores están dados explícitamente por

$$A_{m,k}(f)(x) = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=m \\ l_i\geq 1}} \binom{m}{l_1, l_2, \ldots, l_k} f^{(l_1)}(x) f^{(l_2)}(x) \cdots f^{(l_k)}(x).$$

12.2.3 Las relaciones en (12.13) reciben el nombre de *fórmulas de inversión binomial*. Demostrar que ambas son equivalentes reemplazando una en la otra. Para este fin compruebe primero que

$$\binom{k}{j}\binom{j}{l} = \binom{k}{l}\binom{k-l}{j-l}, \qquad 0 \leq l \leq j \leq k.$$

12.2.4 Sea $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Suponga que $M_0 = 1$, $M_1 \geq 1$ y considere la sucesión de cocientes $\mathfrak{m} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $m_n = M_{n+1}/M_n$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) M es log-convexa si y solo si $\mathfrak{m}$ es monótona creciente.

b) Si M es log-convexa, entonces $M_n M_l \leq M_{n+l}$, para todo $m, l \in \mathbb{N}$ (use inducción sobre l). Deducir que $C^M(I)$ es cerrado bajo productos.

c) Si M es log-convexa, entonces

$$M_k M_{l_1} M_{l_2} \cdots M_{l_k} \leq M_1^m M_m,$$

donde $m = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$, con $l_j \geq 1$. Emplear esto para demostrar un análogo a la Proposición 12.4 para la clase $C^M(I)$.
Indicación: inducción sobre $m \geq k$. En el paso inductivo existe $l_j \geq 2$, digamos l_1. Si $l_1' = l_1 - 1$, por hipótesis $M_k M_{l_1'} M_{l_2} \cdots M_{l_k} \leq M_1^{m-1} M_{m-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} M_k M_{l_1} M_{l_2} \cdots M_{l_k} &= M_k M_{l_1'} M_{l_2} \cdots M_{l_k} \cdot m_{l_1'} \\ &\leq M_1^{m-1} M_{m-1} \cdot m_{m-1} = M_1^{m-1} M_m. \end{aligned}$$

d) M se dice estable por derivadas si existe $\lambda > 0$ tal que $M_{n+1} \leq \lambda^n M_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que en este caso $C^M(I)$ es estable por derivadas, es decir, $f' \in C^M(I)$ para todo $f \in C^M(I)$.

e) Sea $s > 0$. La clase $\mathcal{G}^s(I) = C^M(I)$ asociada a la sucesión $M_n = n!^s$ se conoce como la clase *Gevrey de orden s* y sus elementos son llamados *funciones de tipo s-Gevrey*. Mostrar que M es log-convexa y estable por derivadas. Concluir que $\mathcal{G}^s(I)$ es estable bajo sumas, productos, composición y derivadas.

12.3. Sobre funciones suaves y el Teorema de Borel-Peano

Este proyecto pretende demostrar dos teoremas que ilustran la maleabilidad de las funciones suaves. Primero, mostraremos que todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ es el conjunto de ceros de una función suave. Segundo, incluimos el Teorema de Borel-Peano, que indica que cualquier serie de potencias formal es la serie de Taylor de una función real suave en un punto dado.

Dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su *soporte* se define por

$$\operatorname{supp}(f) =: \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})},$$

donde la linea superior denota la clausura. Se dice que f tiene *soporte compacto* si $\operatorname{supp}(f)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Note que esta definición se puede extender de manera natural para aplicaciones continuas $F : X \to \mathbb{R}$, donde (X, d) es un espacio métrico.

La clave del primer resultado se basa en la siguiente construcción.

Lema 12.1. *Dado un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, existe $f_I \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que* $\operatorname{supp}(f_I) = \overline{I}$.

Demostración. Tenemos tres posibilidades para I. Si $I = (a, b)$, consideremos primero el caso $I = (0, 1)$ y la función

$$f_{(0,1)}(x) := \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right), \text{ si } 0 < x < 1, \qquad f_{(0,1)}(x) = 0, \text{ en otros casos.}$$

En términos de la función f del Ejemplo 7.6.2 tenemos que $f_{(0,1)}(x) = f(x)f(1-x)$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f_{(0,1)} \in C^\infty(\mathbb{R})$, con $f^{(n)}_{(0,1)}(0) = f^{(n)}_{(0,1)}(1) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro además que $\operatorname{supp}(f_{(0,1)}) = [0, 1]$. En el caso general, considere la biyección entre $[0, 1]$ y $[a, b]$ dada por $x \mapsto (x-a)/(b-a)$ y la función

$$f_{(a,b)}(x) := f_{(0,1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \begin{cases} \exp\left(\frac{(b-a)^2}{(x-a)(x-b)}\right), & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}.$$

Se sigue que $f_{(a,b)}$ es suave al ser compuesta de funciones suaves y que $\operatorname{supp}(f_{(a,b)}) = [a, b]$. En los casos restantes basta escoger

$$f_{(a,+\infty)}(x) = f(x-a) = \begin{cases} e^{1/(a-x)}, & x > a, \\ 0, & x \leq a, \end{cases}, \quad f_{(-\infty,b)}(x) = f(b-x) = \begin{cases} 0, & x \geq b, \\ e^{1/(x-b)}, & x < b, \end{cases}$$

para concluir el resultado con el mismo tipo de argumento. □

En el Ejercicio 6.4.10 se demostró que cualquier conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ coincide con el conjunto de ceros de una función continua. Este resultado se puede mejorar sustancialmente reemplazando continuidad por suavidad.

Teorema 12.5. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Entonces existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $C = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.*

Demostración. Como $U = \mathbb{R} \setminus C$ es abierto, el Ejercicio 2.2.8 demuestra que $U = \bigcup_{j\in M} I_j$ es la unión, a lo más contable, de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, con $M \subseteq \mathbb{N}$.

Trataremos primero en caso en que para todo $j \in M$, $I_j = (a_j, b_j)$, con a_j y b_j finitos. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{j\in M} \alpha_j f_{I_j}(x) = \begin{cases} \alpha_l f_{I_l}(x), & x \in I_l, \\ 0, & x \notin U, \end{cases} \qquad \alpha_j := \frac{e^{-1/(b_j-a_j)}}{2^j},$$

donde f_{I_j} es como en el Lema 12.1. Entonces f está bien definida y satisface que $f(x) = 0$ si y solo si $x \in C$.

Debemos comprobar que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Recordando que $f_{I_j}(x) = f_{(0,1)}(l_j(x))$, con $l_j(x) = (x - a_j)/(b_j - a_j)$, vemos que

$$f_{I_j}^{(n)}(x) = \frac{f_{(0,1)}^{(n)}(l_j(x))}{(b_j - a_j)^n}.$$

Empleando el Ejercicio 12.3.3 sabemos que $\alpha_j/(b_j - a_j)^n \leq (ne)^n/2^j$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$ y $j \in M$. Por tanto, si $C_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_{(0,1)}^{(n)}(t)|$, que es finito, concluimos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\alpha_j f_{I_j}^{(n)}(x)| \leq \frac{(ne)^n C_n}{2^j}.$$

Por el M-test de Weierstrass 9.3, la serie $\sum_{j\in M} \alpha_j f_{I_j}^{(n)}(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma concluimos que f es infinitas veces diferenciable en $\mathbb{R}$, vía el Corolario 9.3.

Finalmente, si alguno de los I_j tiene extremos infinitos, al ser disjuntos, a lo más puede haber un intervalo de la forma $(b, +\infty)$ y uno de la forma $(-\infty, a)$. Sumando a f las funciones $f_{(-\infty,a)}$ y/o $f_{(b,+\infty)}$ del lema anterior, según sea el caso, obtenemos la función requerida en el enunciado. □

El segundo resultado propuesto para este proyecto es el Teorema de Borel que se enuncia a continuación. Vale la pena notar que este resultado fue enunciado y demostrado en la tesis doctoral de Émile Borel publicada en 1895. Sin embargo, el teorema apareció en 1884 en el libro *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* de A. Genocchi y G. Peano. Por este motivo algunos autores han renombrado al resultado como el *Teorema de Borel-Peano*.

Teorema 12.6 (Borel-Peano)**.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Entonces existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ de soporte compacto tal que*

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n, \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Existen varias demostraciones en la literatura de este enunciado, ver por ejemplo [111, 93]. La demostración de Peano se incluye en el Ejercicio 12.3.6 siguiendo el artículo [16]. Aquí explicaremos una aproximación que consiste en perturbar cada sumando de la serie formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para obtener

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k f_k(x). \tag{12.15}$$

Los f_k se escogerán de manera adecuada para que f esté bien definida y tenga las propiedades requeridas. Antes de comenzar, demostramos un lema auxiliar. Otra demostración de este lema, sin el uso de integrales, se incluye en el Ejercicio 12.3.4.

Lema 12.2. *Existe una función* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *con* $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-2, 2]$ *y* $\varphi|_{[-1,1]} \equiv 1$.

Demostración. Empleando la función $f_{(0,1)}$ del Lema 12.1, sea $a = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(0,1)}(t)dt \approx 0.007$. Entonces la función $g(x) = f_{(0,1)}(x)/a$ es suave y $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$. Si definimos

$$g_0(x) = \begin{cases} g(-x-1), & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ -g(x-1), & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

la función $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} g_0(t)dt$ satisface las propiedades requeridas, ver Figura 12.3.

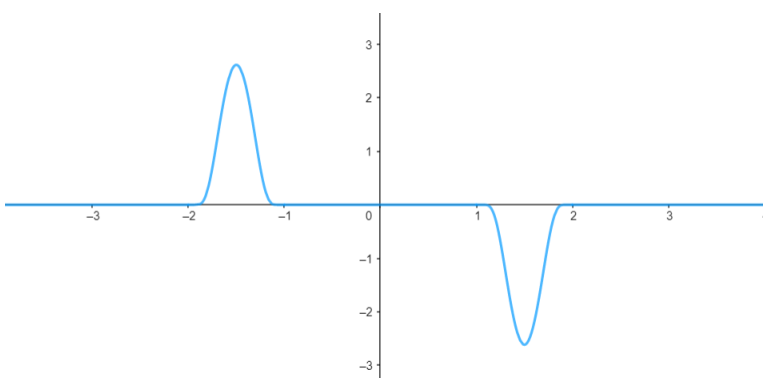

Figura 12.3: La función g_0. Su integral produce la función φ.

□

Demostración del Teorema de Borel-Peano. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos las funciones

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x), \qquad g_k(x) = a_k x^k f_k(x),$$

donde φ es como en el lema anterior y $\lambda_k > 0$ será escogido posteriormente. Entonces $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\operatorname{supp}(g_k) \subseteq \left[-\frac{2}{\lambda_k}, \frac{2}{\lambda_k}\right]$. Además, si $|x| \leq 1/\lambda_k$, entonces $g_k(x) = a_k x^k$. Por tanto,

$$g_k^{(k)}(0) = k! a_k \qquad \text{y} \qquad g_k^{(n)}(0) = 0 \text{ si } n \neq k.$$

Veremos ahora que es posible elegir a los λ_k de forma que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_k^{(n)}(x)| \leq 2^{-k}, \qquad \text{para } k \in \mathbb{N}^+ \text{ y } 0 \leq n \leq k-1.$$

Si esto es válido, el M-test de Weierstrass 9.3, muestra que cada una de las series $\sum_{k=0}^\infty g_k^{(n)}(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Por tanto, f en (12.15) define una función suave en $\mathbb{R}$ y $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^\infty g_k^{(n)}(x)$. En particular

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^\infty g_k^{(n)}(0) = n! a_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, para elegir las constantes λ_k note que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_k^{(n)}(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| a_k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} \lambda_k^{n-j} \varphi^{(n-j)}(\lambda_k x) \right| \\ &\leq |a_k| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{k!}{(k-j)!} \left(\frac{2}{|\lambda_k|}\right)^{k-j} \lambda_k^{n-j} \sup_{|x|\leq \frac{2}{\lambda_k}} \left|\varphi^{(n-j)}(\lambda_k x)\right|.\end{aligned}$$

Escribiendo $M_n = \sup_{0\leq l\leq n, t\in\mathbb{R}} |\varphi^{(l)}(t)|$, que es finito, y tomando $\lambda_k \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_k^{(n)}(x)| &\leq \frac{2^k k! |a_k| M_k}{\lambda_k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\lambda_k^{n-k+1} 2^{-j}}{(k-j)!} \\ &\leq \frac{2^k k! |a_k| M_k}{\lambda_k} (3/2)^n \leq \frac{2^k k! |a_k| M_k}{\lambda_k} (3/2)^k = \frac{3^k k! |a_k| M_k}{\lambda_k},\end{aligned}$$

porque $n \leq k-1$. Eligiendo además $\lambda_k \geq 6^k k! |a_k| M_k$ concluimos la cota deseada para $g_k^{(n)}(x)$. □

Ejercicios

12.3.1 Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son aplicaciones continuas definidas en un espacio métrico (X, d), mostrar que $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$. Concluir que si f y g tienen soporte compacto, lo mismo es válido para $\alpha f + \beta g$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

12.3.2 Si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y tiene soporte compacto, entonces $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

12.3.3 Sean $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Maximizar la función $h(x) = e^{-a/x}/x^n$, $x > 0$, y $h(0) = 0$, para demostrar que $h(x) \leq (ne/a)^n$, para todo $x \geq 0$.

12.3.4 Dados intervalos $[b, c] \subset [a, d]$ en $\mathbb{R}$, mostrar que existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $\operatorname{supp}(h) \subseteq [a, d]$ y $h|_{[b,c]} \equiv 1$. Para ello verifique que:

a) Si f es la función del Ejemplo 7.6.2, entonces

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

es suave, $g(x) = 0$ si $x \leq 0$, $g(x) = 1$ si $x \geq 1$, y $0 < g(x) < 1$ si $x \in (0, 1)$.

b) La función $\varphi(x) = g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) g\left(\dfrac{d-x}{d-c}\right)$ satisface lo requerido.

12.3.5 Mostrar que el anillo $C^\infty(\mathbb{R})$ no es un dominio entero, en el sentido que existen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $f \cdot g \equiv 0$, pero ni $f \equiv 0$ ni $g \equiv 0$.

12.3.6 (Demostración de Peano del Teorema 12.6) [16] Considere sucesiones $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números reales con $b_k > 0$ y las fracciones $g_k(x) = \dfrac{d_k x^k}{1 + b_k x^2}$, que definen funciones suaves en $\mathbb{R}$.

a) Emplear la serie geométrica para comprobar que

$$g_k^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^j n! d_{n-2j} b_{n-2j}^j, & \text{si } k = n - 2j \text{ para algún } j, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

b) Demostrar que $|g_k^{(n)}(x)| \leq (n+1)! \dfrac{k!|d_k|}{b_k} |x|^{k-n-2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k \geq n+2$. Indicación: emplear el Ejercicio 10.3.5.

c) Si $f(x) := \sum_{k=0}^\infty g_k(x)$, y $b_k = k!^2 |d_k|$, mostrar que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además $f(0) = d_0$, $f'(0) = d_1$ y

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = d_n + \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j d_{n-2} b_{n-2j}^j, \; n \geq 2. \tag{12.16}$$

d) Dada una sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, mostrar que se puede escoger d_k a través de (12.16) de manera que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

12.4. Diferenciabilidad del resto en la fórmula de Taylor

El objetivo de este proyecto es estudiar el resto en la fórmula de Taylor, versión integral. Se estudiará la clase de diferenciabilidad de esta función y condiciones para caracterizarla como tal resto. Además se incluye una aplicación sobre funciones diferenciables pares, resultado que hará uso del Teorema de Borel-Peano 12.6 del Proyecto 12.3. Los resultados de esta sección se deben al matemático estadounidense H. Whitney (1907-1989) y están tomados de sus artículos [140] y [141].

El Teorema de Taylor 8.6 en particular asegura que si f es de clase C^n en un intervalo abierto que contenga a 0, entonces

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{x^n}{n!} f_n(x), \tag{12.17}$$

donde el resto toma la forma

$$f_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt, \qquad x \neq 0. \tag{12.18}$$

Para fijar ideas asumamos como dominio de f a $(-r, r)$. Es fácil ver que la función f_n es de la misma clase de diferenciabilidad que f para $x \neq 0$. En efecto, basta con despejar f_n de (12.17). Para determinar su límite en 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital repetidas veces para obtener

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j}{x^n} = f^{(n)}(0).$$

Definiendo entonces $f_n(0) = f^{(n)}(0)$, obtenemos una función continua sobre $(-r, r)$.

La pregunta ahora es determinar el comportamiento de las derivadas de f_n cerca del punto singular $x = 0$. Antes de enunciar el primer resultado principal requerimos un ejemplo y dos lemas de naturaleza elemental.

Ejemplo 12.4.1. Para $p, n \in \mathbb{N}$ considere $f(x) = x^{n+p}$. Como $f^{(j)}(0) = 0$ si $j = 0, 1, \ldots, n+p-1$, obtenemos

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} f_n(x), \qquad f_n(x) = n! x^p.$$

Note también que $f^{(n+p)}(0) = (n+p)!$ y $f_n^{(p+k)}(0) = 0$ si $k > 0$.

Lema 12.3. *Si $\phi : (-r, r) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $k \geq 0, n \geq 2$ son enteros, entonces*

$$\int_0^x t^{k+1} \phi'(t)dt = x^{k+1}\phi(x) - (k+1) \int_0^x t^k \phi(t)dt, \tag{12.19}$$

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} t^{k+1} \phi'(t)dt = -(n+k) \int_0^x (x-t)^{n-1} t^k \phi(t)dt + (n-1)x \int_0^x (x-t)^{n-2} t^k \phi(t)dt. \tag{12.20}$$

Demostración. La primera ecuación se sigue de integrar por partes. Para la siguiente igualdad, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$0 = \int_0^x \frac{d}{dt}[(x-t)^{n-1}t^{k+1}\phi(t)]dt.$$

La fórmula se sigue de expandir el integrando como

$$(n-1)(x-t)^{n-2}t^k((x-t)-x)\phi(t) + (k+1)(x-t)^{n-1}t^k\phi(t) + (x-t)^{n-1}t^{k+1}\phi'(t),$$

y de distribuir la integral en cada sumando. □

Lema 12.4. *Sea $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ continua y continuamente diferenciable en $(-r, 0) \cup (0, r)$. Si $\lim_{t\to 0} f'(t) = a_1$ existe, entonces $f \in C^1(-r, r)$ y $f'(0) = a_1$.*

Demostración. Si consideramos la función $g(t) = f'(t)$ para $t \neq 0$ y $g(0) = a_1$, las hipótesis implican que g es continua en $(-r, r)$. Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo podemos escribir

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - a_1\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (g(t)-a_1)dt\right| \leq \sup_{|t|\leq|x|} |g(t)-a_1| \to 0 \text{ si } x \to 0,$$

dada la continuidad de $g(x)$ en $x = 0$. Este límite demuestra el resultado. □

El primer teorema que presentamos determina la clase de diferenciabilidad de f_n y fórmulas para sus derivadas.

Teorema 12.7. *Sea $1 \leq n \leq n + p$ y $f \in C^{n+p}(-r, r)$. Si definimos $f_n(x)$ por (12.18) y $f_n(0) = f^{(n)}(0)$, entonces $f_n \in C^p(-r, r)$. Las derivadas de f_n se calcular por la regla*

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n}{x^{n+k}}\int_0^x (x-t)^{n-1}t^k f^{(n+k)}(t)dt,\ x \neq 0, \qquad f_n^{(k)}(0) = \frac{n!k!}{(n+k)!}f^{(n+k)}(0), \tag{12.21}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, p$. Además

$$\lim_{x\to 0} x^k f_n^{(p+k)}(x) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{12.22}$$

Demostración. Primero, para $x \neq 0$ procedemos por inducción sobre k. Para $k = 0$ la fórmula (12.21) coincide con (12.18). Si suponemos que la fórmula es válida para algún k, entonces si $n = 1$, derivando $f_1^{(k)}$ obtenemos que

$$f_1^{(k+1)}(x) = -\frac{(k+1)}{x^{k+2}}\int_0^x t^k f^{(k+1)}(t)dt + \frac{1}{x^{k+1}}x^k f^{(k+1)}(x) = \frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x t^{k+1 f^{(k+2)}}(t)dt,$$

gracias a la fórmula (12.19) aplicada a $\phi = f^{(k+1)}$. Ahora, si $n \geq 2$, aplicando la regla de cálculo de la Nota 8.4.1 obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} f_n^{(k+1)}(x) &= -\frac{n(n+k)}{x^{n+k+1}}\int_0^x (x-t)^{n-1}t^k f^{(n+k)}(t)dt + \frac{n(n-1)}{x^{n+k}}\int_0^x (x-t)^{n-2}t^k f^{(n+k)}(t)dt \\ &= \frac{n}{x^{n+k+1}}\int_0^x (x-t)^{n-1}t^{k+1}f^{(n+k+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (12.20) para $\phi = f^{(n+k)}$. Por tanto, las fórmulas son válidas para $k+1$ en $x \neq 0$. El principio de inducción establece la validez de las mismas para $k \leq p$.

Para comprobar que el límite de $f_n^{(k)}(x)$ cuando $x \to 0$ existe y que

$$\lim_{x\to 0} f_n^{(k)}(x) = \frac{n!k!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0),$$

recordemos del Ejercicio 8.3.5 que

$$\frac{n}{x^{k+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} t^k dt = \frac{n!k!}{(n+k)!}. \tag{12.23}$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\left| f_n^{(k)}(x) - \frac{n!k!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0) \right| &= \left| \frac{n}{x^{n+k}} \int_0^x (x-t)^{n-1} t^k \left(f^{(n+k)}(t) - f^{(n+k)}(0) \right) dt \right| \\ &\leq \frac{n!k!}{(n+k)!} \sup_{|t|\leq|x|} |f^{(n+k)}(t) - f^{(n+k)}(0)| \to 0 \quad \text{si } x \to 0,\end{aligned}$$

gracias a la continuidad de $f^{(n+k)}$ en $x = 0$. Por tanto, es posible aplicar sucesivamente el Lema 12.4 a f_n y sus derivadas para concluir que $f_n \in C^p(-r, r)$ y para establecer la fórmula para $f_n^{(k)}(0)$.

Finalmente, para determinar el límite (12.22) derivando $k \leq n-1$ veces $f_n^{(p)}$ en (12.21) obtenemos por la regla del producto y el Teorema 8.9 que

$$\begin{aligned} f_n^{(p+k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} \left(\frac{n}{x^{n+p}} \right) \frac{d^j}{dx^j} \int_0^x (x-t)^{n-1} t^p f^{(n+p)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{A_{pnkj}}{x^{n+p+k-j}} \int_0^x (x-t)^{n-j-1} t^p f^{(n+p)}(t) dt, \end{aligned}$$

para $x \neq 0$. Para $k = n$ obtenemos de la misma manera

$$f_n^{(p+n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_{pnj}}{x^{2n+p-j}} \int_0^x (x-t)^{n-j-1} t^p f^{(n+p)}(t) dt + \frac{A_{pn}}{x^n} f^{(n+p)}(x).$$

Aquí los $A_{pnkj}, A_{pnj}, A_{pn}$ son ciertas constantes independientes de f. Si definimos

$$B_{npk} = \sum_{j=0}^{k} A_{pnkj} \frac{(n-j-1)!p!}{(n-j+p)!}, \qquad B_{pn} = A_{pn} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{pnj} \frac{(n-j-1)!p!}{(n-j+p)!},$$

empleando de nuevo (12.23) podemos escribir

$$\left| x^k f_n^{(p+k)}(x) - B_{npk} f^{(n+p)}(0) \right| = \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{A_{pnkj}}{x^{n+p-j}} \int_0^x (x-t)^{n-j-1} t^p \left(f^{(n+p)}(t) - f^{(n+p)}(0) \right) dt \right|,$$

para $k \leq n$. Por la continuidad de $f^{(n+p)}$ deducimos que

$$\lim_{x\to 0} x^k f_n^{(p+k)}(x) = B_{npk} f^{(n+p)}(0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Un razonamiento análogo para $k = n$ demuestra que

$$\lim_{x\to 0} x^n f_n^{(n+p)}(x) = B_{np} f^{(n+p)}(0).$$

Para concluir la demostración basta con hallar los B_{npk} y B_{np}. Al ser independientes de f podemos emplear

$$f(x) = x^{n+p}.$$

Los cálculos del Ejemplo 12.4.1 demuestran que $B_{npk} = B_{np} = 0$ si $k = 1, \ldots, n-1$ como se requería. □

Corolario 12.2. *Sea $f \in C^\infty(-r, r)$ tal que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Si definimos $g(x) = f(x)/x^n$, $x \neq 0$ y $g(0) = f^{(n)}(0)$, entonces $g \in C^\infty(-r, r)$.*

El teorema anterior admite un recíproco suponiendo f_n como dada y definiendo f por (12.17). Para ello necesitamos un lema preliminar.

Lema 12.5. *Sea $\phi \in C^m((-r, 0) \cup (0, r))$ y asuma que $\lim_{x\to 0} \phi^{(m)}(x)$ existe. Entonces es posible definir $\phi(0)$ para que $\phi \in C^m(-r, r)$.*

Demostración. Tomando $x_0 < x < 0$ o $0 < x < x_0$ y $l = 0, 1, \ldots, m-1$, al expandir $\phi^{(i)}(x)$ a través de la fórmula de Taylor con orden $m - l$, podemos escribir

$$\phi^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{m-l-1} \frac{\phi^{(l+j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{1}{(m-l-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{m-l-1}\phi^{(m)}(t)dt.$$

Para $l = 0$, podemos hacer $x \to 0$ en esta fórmula para ver que $\lim_{x\to 0} \phi(x)$ existe. Si definimos $\phi(0)$ como el valor de este límite, entonces ϕ es continua en 0. Luego, empleando la fórmula con $l = 1$ concluimos que $\lim_{x\to 0} \phi'(x)$ existe. Por el Lema 12.4, $\phi \in C^1(-r, r)$. Continuando de esta forma queda demostrado el resultado. □

Teorema 12.8. *Sea $f_n \in C^{n+p}((-r, 0) \cup (0, r))$ y asuma que los límites*

$$\lim_{x\to 0} x^k f_n^{(p+k)}(x) \quad \textit{existen para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Si definimos $f(0) = a_0$ y

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j!}x^j + \frac{x^n}{n!}f_n(x), \qquad 0 < |x| < r,$$

entonces $f \in C^{n+p}(-r, r)$, $f^{(j)}(0) = a_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y $f^{(n)}(0) = f_n(0)$.

Demostración. Aplicando la hipótesis con $k = 0$, concluimos que $f_n \in C^p(-r, r)$, vía el Lema 12.5. Si definimos

$$F(x) = \frac{x^n}{n!} f_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j!} x^j, \qquad |x| < r,$$

al ser producto de funciones C^p se sigue que $F \in C^p(-r, r)$. En términos de F, el enunciado es equivalente a que $F \in C^{n+p}(-r, r)$, $F^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y $F^{(n)}(0) = f_n(0)$. Para demostrar estas propiedades calculamos las derivadas de F para $x \neq 0$ empleando la regla del producto para obtener

$$F^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{d^{j-l}}{dx^{j-l}} \left(\frac{x^n}{n!}\right) f_n^{(l)}(x) = \sum_{l=\text{máx}\{0, j-n\}}^{j} \binom{j}{l} \frac{x^{n-j+l}}{(n-j+l)!} f_n^{(l)}(x). \tag{12.24}$$

Para mostrar que F es de clase C^{n+p}, gracias al Lema 12.5 es suficiente establecer la existencia de los límites $\lim_{x\to 0} F^{(j)}(x)$, para $j = p+1, \ldots, p+n$. Note que los sumandos en (12.24) correspondientes a $l \leq p$ son continuos en $x = 0$. Para los demás, si ponemos $l = p + k$, $k > 0$ se sigue de las hipótesis que

$$\lim_{x\to 0} x^{n-j+l} f_n^{(l)}(x) = \lim_{x\to 0} x^{n+p-j} \cdot \lim_{x\to 0} x^k f_n^{(p+k)}(x) \quad \text{existe.}$$

De esta forma, el límite requerido existe y $F \in C^{n+p}(-r, r)$. Además, $F^{(j)}(0) = 0$ para $j < n$ se sigue de (12.24). Por tanto, tenemos que $f \in C^{n+p}(-r, r)$ y que f_n es precisamente el resto en la fórmula de Taylor de grado n asociado a f. Por tanto, $f^{(n)}(0) = f_n(0)$, concluyendo así la demostración. Note también que los límites iniciales deben ser 0 gracias a (12.22). □

Finalizamos esta sección con una aplicación a funciones diferenciables pares. Si $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ es par, es decir, $f(x) = f(-x)$, es posible determinar $g : [0, r^{1/2}) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x^2) = f(x)$ simplemente definiendo $g(u) = f(u^{1/2})$. Si f es continua, entonces g también lo es. Sin embargo, no es inmediato determinar la clase de diferenciabilidad de g a partir de la clase de f ni como extender g a $(-r^{1/2}, r^{1/2})$. Los resultados presentados en este proyecto permiten resolver este inconveniente.

Teorema 12.9. *Sea $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ par. Entonces existe $g : (-r^{1/2}, r^{1/2}) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x^2) = f(x)$. Si f es analítica, de clase C^{2s} o de clase C^∞, entonces g se puede tomar analítica, de clase C^s o de clase C^∞ en su dominio, respectivamente.*

Demostración. Derivando repetidamente la ecuación $f(x) = f(-x)$ obtenemos que $f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces $f^{(j)}(0) = 0$ si j es impar.

Si f es analítica y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces $a_n = 0$ para n impar. Por tanto $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = g(x^2)$, donde $g(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2n} u^m$, siendo analítica para $|u| < r^{1/2}$.

Asumamos ahora que f es de clase C^{2s}. La fórmula de Taylor permite escribir

$$f(x) = b_0 + b_1 x^2 + \cdots + b_{s-1} x^{2s-s} + x^{2s}\phi(x).$$

De aquí se sigue que ϕ es par. El Teorema 12.7 indica que $\phi \in C^{2s}((-r,0) \cup (0,r))$ y

$$\lim_{u\to 0} u^k \phi(u) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2s. \tag{12.25}$$

Si definimos $\psi(u) = \psi(-u) = \phi(u^{1/2})$ para $u \geq 0$ y

$$g_s(u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_{s-1} u^{s-1} + u^s \psi(u), \quad |u| < r^{1/2},$$

se sigue que $g_s(x^2) = f(x)$. Para demostrar que $g_s \in C^s(-r^{1/2}, r^{1/2})$ el Teorema 12.8 indica que basta demostrar que

$$\lim_{u\to 0} u^k \psi^{(k)}(u) \quad \text{existe para } k = 0, 1, \ldots, s. \tag{12.26}$$

Para esto, si derivamos la ecuación $\psi(x^2) = \phi(x)$, donde $x > 0$, se sigue por inducción que

$$\phi^{(k)}(x) = 2^k x^k \psi^{(k)}(x^2) + \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha_{kj} x^{k-2j} \psi^{(k-j)}(x^2),$$

para ciertas constantes $\alpha_k j$. Entonces es posible determinar $x^k \psi^{(k)}(x^2)$ en términos de ϕ y sus derivadas. En efecto, resolviendo recursivamente se sigue que

$$2^k x^k \psi^{(k)}(x^2) = \phi^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj} x^{-j} \phi^{(k-j)}(x),$$

para ciertas constantes β_{kj}. Por tanto,

$$x^{2k} \psi^{(k)}(x^2) = \frac{x^k \phi^{(k)}(x)}{2^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_{kj}}{2^k} x^{k-j} \phi^{(k-j)}(x).$$

Estas fórmulas demuestran que (12.26) para $u > 0$ se sigue de (12.25). Como $\psi(-u) = \psi(u)$, los límites también son válidos para $u < 0$. Esto demuestra el teorema para la clase C^{2s}.

Finalmente, si $f \in C^\infty(-r, r)$, para cada s hemos demostrado que existe $g_s \in C^s(-r^{1/2}, r^{1/2})$ tal que $f(x) = g_s(x^2)$. Como $g(u) = g_s(s) = f(u^{1/2})$, entonces g es independiente de s para $u \geq 0$ y $g \in C^\infty[0, r^{1/2})$. Para extenderla a $(-r^{1/2}, 0]$ podemos aplicar el Teorema de Borel-Peano 12.6 para asegurar la existencia de $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $h^{(n)}(0) = g_+^{(n)}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Poniendo $g(u) = h(u)$ para $u \leq 0$, se sigue que $g \in C^\infty(-r^{1/2}, r^{1/2})$ como se requería. □

Ejemplo 12.4.2. La función $\cos(x)$ es par y analítica en $\mathbb{R}$. Si ponemos

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^n,$$

entonces g es analítica en $\mathbb{R}$ y $g(x^2) = \cos(x)$. Considere ahora la función

$$F(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

que pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$ y es par. Entonces las funciones

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}, \qquad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y ambas satisfacen que $g(x^2) = \widetilde{g}(x^2) = F(x)$. Esto ilustra que para el caso C^∞ la solución no es única, hecho que se debe a que no hay unicidad en el Teorema de Borel-Peano.

Para el caso de funciones impares tenemos un resultado similar. En este caso si f es de clase C^{2s+1}, podemos escribir

$$f(x) = a_0 x + a_1 x^3 + \cdots + a_{s-1} x^{2s-1} + x^{2s+1}\phi(x) = xF(x),$$

donde F es par. El Ejercicio 12.4.2 muestra que F es de clase C^{2s} y el resultado anterior que $F(x) = g(x^2)$ para cierta g de clase C^s. El caso analítico y C^∞ se tratan de manera similar al anterior. De esta forma obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 12.10. *Sea $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ impar. Entonces existe $g : (-r^{1/2}, r^{1/2}) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = xg(x^2)$. Si f es analítica, de clase C^{2s+1} o de clase C^∞, entonces g se puede tomar analítica, de clase C^s o de clase C^∞ en su dominio, respectivamente.*

Ejercicios

12.4.1 *a*) Sea $\alpha > 0$ no entero y defina $g(x) = |x|^\alpha$. Mostrar que g es de clase $C^n(\mathbb{R})$, donde $n = \lfloor \alpha \rfloor$ y que

$$g^{(j)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - j + 1)\frac{|x|^\alpha}{x^j}, x \neq 0, \quad g^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

b) Mostrar que $f(x) = |x|^{n+p+c}$, con $0 < c < 1$, satisface $f \in C^{n+p}(\mathbb{R})$. Determinar el f_n asociado a f en el Teorema 12.7 y comprobar que es de clase $C^p(\mathbb{R})$ pero no es de una clase de diferenciabilidad más alta.

c) Si $f(x) = |x|^{2s+1/2}$, entonces f es par y $f \in C^{2s+1}(\mathbb{R})$. Determinar g tal que $g(x^2) = f(x)$. ¿Cuál es el orden máximo de diferenciabilidad de g?

12.4.2 Sea $F : (-r, r) \to \mathbb{R}$ continua y asuma que $f(x) = x^n F(x) \in C^{n+p}(-r, r)$.

a) Emplear el Ejercicio 7.5.8 para mostrar que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ y así $f_n(x) = n!F(x)$. Concluir que $F \in C^p(-r, r)$.

b) Aplicar (*a*) a $x^j F(x)$ y a $n - j$ para mostrar que $x^j F(x) \in C^{j+p}(-r, r)$.

Usar estos resultados para mostrar que en el Teorema 12.7, $x^k f_n(x) \in C^{k+p}(-r, r)$, con $1 \le k \le n \le n + p$.

12.4.3 Fije $a, c > 0$ y considere la función

$$f(x) = x^a \sin(1/|x|^c),\ x \neq 0, \qquad f(0) = 0.$$

a) Encontrar $f_1(x)$ y mostrar que está en $C^1(\mathbb{R})$ si y solo si $a > c + 2$.

b) Comprobar que $f \in C^1(\mathbb{R})$ si y solo si $a > c + 1$. A su vez esta condición equivale a que $\lim_{x\to 0} x f_1'(x)$ exista (y sea igual a 0). Comparar con el Teorema 12.8 ($n = 1, p = 0$).

c) Mostrar que $f \in C^2(\mathbb{R})$ si y solo si $a > 2c + 2$.

Capítulo 13

Resultados sobre teoría de funciones

La teoría de funciones hace referencia al estudio de funciones especiales que aparecen en Análisis y otras ramas de las matemáticas. En la primera parte del libro, a manera de ejemplo hemos discutido algunas de ellas como la exponencial e^x, el logaritmo $\ln(x)$, la función digamma $\psi(x)$ y la función zeta de Riemann $\zeta(s)$. En el presente capítulo haremos el desarrollo de las funciones trigonométricas y de la función Gamma $\Gamma(x)$. Más específicamente, en el primer proyecto ahondaremos en las propiedades de las funciones trigonométricas, incluyendo sumas y productos notables y los polinomios de Chebyshev. Emplearemos sistemáticamente algunos resultados del Proyecto 10.3, en particular, la función exponencial compleja. Como aplicaciones calcularemos los valores $\psi(p/q)$ en números racionales, la descomposición en fracciones parciales infinitas de la cotangente y el recíproco del seno, así como los valores de $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}^+$ a través de los números de Bernoulli. En el segundo proyecto desarrollamos los principios de la teoría de productos infinitos y sus propiedades fundamentales, como por ejemplo determinar su convergencia con la ayuda de series. Incluimos como resultados notables la factorización en productos infinitos de las funciones $\zeta(s)$ y $\sin(\pi x)$, resultados que se remontan a L. Euler. Finalmente, el último proyecto trata la función Gamma, que se entiende como una extensión natural de la función factorial a la recta real. Se discutirá también la función Beta y fórmulas importantes como la factorización en productos infinitos de $\Gamma(x)$, su relación con el seno y la fórmula de Stirling. Hacemos énfasis en que estos resultados admiten extensiones al plano complejo y es allí, en un curso de Análisis Complejo, donde cobran mayor importancia, ver [127].

Por otra parte, este capítulo solo constituye una breve introducción a la teoría de funciones especiales. Familias como las funciones de Bessel, las funciones hipergeométricas, los polinomios ortogonales, las funciones elípticas, entre otras requieren un estudio detallado que se puede consultar en diversos libros sobre el tema, ver por ejemplo [8]. Finalmente, mencionamos que antiguamente estos temas se proponían

como parte del contenido de una sola asignatura de Análisis como lo demuestra el famoso libro de Whittaker y Watson [142]. Esto es natural porque es allí donde los procesos del Análisis encuentran una aplicación satisfactoria.

13.1. Algunas identidades trigonométricas

El objetivo de este proyecto es desarrollar algunas propiedades y fórmulas que involucran las funciones trigonométricas. Nuestro enfoque está basado en la función exponencial compleja y la fórmula de Euler, discutidas en el Proyecto 10.3. Exploraremos las raíces n-ésimas de una unidad como herramienta para determinar los valores de la función digamma en los números racionales. Advertimos al lector que estos resultados harán uso del Teorema de Abel del Proyecto 11.3. Estas fórmulas permiten deducir la descomposición en fracciones parciales de las funciones cotangente y el recíproco del seno. También discutiremos los números de Bernoulli para determinar las series de Taylor de la función tangente y cotangente y finalmente hallar los valores de la función zeta de Riemann en los números pares.

Recordemos que las funciones seno y coseno se definieron a través de series de potencias en el Ejemplo 9.3.5. A partir de estas expansiones es claro que

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$

En términos de la función exponencial esto también se puede deducir de la igualdad $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$. Por otra parte, algunos valores especiales se pueden obtener de $e^{i\pi} = -1$. En efecto, al elevar a la potencia n e igualar partes reales e imaginarias obtenemos

$$\sin(\pi n) = 0, \qquad \cos(\pi n) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función exponencial y la fórmula de Euler, tenemos que

$$\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi) = e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)),$$

para todo $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Expandiendo la ultima expresión y luego igualando partes reales e imaginarias concluimos las fórmulas para la suma de ángulos.

Proposición 13.1. *Dados $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, se verifica que*

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi), \quad \sin(\theta + \phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi).$$

Estas fórmulas muestran en particular que una función se puede obtener a partir de la otra trasladando $\pm\pi/2$, a saber

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta, \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta. \tag{13.1}$$

La proposición anterior establece los valores $\cos(3\pi/2) = 0$ y $\sin(3\pi/2) = -1$. Con esta información podemos determinar los signos de $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$. Recordemos que $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ son positivos en $(0, \pi/2)$. Como $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$, entonces $\cos(\theta) < 0$ para $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Además $\cos(\theta + 3\pi/2) = \sin(\theta)$, luego $\cos(\theta) > 0$ para $\theta \in (3\pi/2, 2\pi)$. Un análisis similar muestra que $\sin(\theta) > 0$ para $\theta \in (0, \pi)$ y $\sin(\theta) < 0$ para $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Analizando el signo de las derivadas vemos que $\cos(\theta)$ es decreciente en $(0, \pi)$ y creciente en $(\pi, 2\pi)$. Por otra parte, $\sin(\theta)$ es creciente en los intervalos $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$, y decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$. Esto en particular implica que 2π es el mínimo periodo de estas funciones. Su concavidad se puede obtener analizando su segunda derivada.

Por otra parte, un cálculo directo establece las fórmulas para las diferencias

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right), \tag{13.2}$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right). \tag{13.3}$$

Podemos también obtener fórmulas para un ángulo múltiple. Si $n \in \mathbb{Z}$, por la fórmula de Euler tenemos que $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Como $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ se deduce la siguiente fórmula fundamental.

Proposición 13.2 (Fórmulas de De Moivre)**.** *Si $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Note que el caso $n = 2$ coincide con (10.10). Al reemplazar θ por $\theta/2$ en dicha ecuación llegamos a las fórmulas de ángulos medios

$$\sin(\theta/2)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \qquad \cos(\theta/2)^2 = \frac{1 + \cos\theta}{2}.$$

En particular, si $\theta = \pi/2$ obtenemos los valores $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Otra aplicación de la fórmula de Euler determina las identidades

$$\tan(\theta/2) = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}, \quad \cot(\theta/2) = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{13.4}$$

Por ejemplo,

$$\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{1}{i}\frac{(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2} = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}},$$

de donde se sigue la primera fórmula.

Más generalmente, es posible escribir a $\cos(n\theta)$ como un polinomio de grado n en la variable $\cos\theta$. Estos polinomios se denotan por $T_n(x)$ y conocen con el nombre de *polinomios de Chebyshev*. Un resultado similar es válido para $\sin(n\theta)$. En este caso se consideran los *polinomios de Chebyshev de segundo tipo*.

Proposición 13.3. *Existen polinomios $T_n, U_n \in \mathbb{R}[x]$ de grado n tales que*

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \qquad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Estos se calcular a partir de los valores $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ y de la recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

De la misma forma, $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ y

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Demostración. Los valores de T_2 y U_1 se siguen de las fórmulas en (10.10). En general, aplicando la fórmula de suma de ángulos, vemos que

$$2\cos(n\theta)\cos(\theta) = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta.$$

De esta forma, los polinomios de Chebyshev T_n se encuentran a través de la recursión dada. Para los polinomios U_n basta notar que

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2\sin((n+1)\theta)\cos\theta,$$

que también se deduce de las fórmulas de suma de ángulos. □

Corolario 13.1. *Si $m \in \mathbb{N}^+$, se verifica la fórmula*

$$\sin(\theta) = (2m+1)\sin\left(\frac{\theta}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2m+1}\right)^2}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)^2}\right),$$

Demostración. Note las relaciones $T_m(1 - 2\sin(\theta)^2) = T_m(\cos(2\theta)) = \cos(2m\theta)$ y

$$\sin((2m+1)\theta) - \sin((2m-1)\theta) = 2\sin(\theta)\cos(2m\theta).$$

Si consideremos los polinomios $F_m(x)$ definidos por la recurrencia $F_0(x) = 1$ y

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + 2xT_m(1-2x),$$

se sigue que F_m tiene grado m y que

$$\sin(\theta)F_m(\sin(\theta)^2) = \sin((2m+1)\theta). \tag{13.5}$$

Al evaluar en $\theta_k = k\pi/(2m+1)$, $k = 1, \ldots, m$ tenemos que $\sin((2m+1)\theta_k) = 0$ y $\sin(\theta_k) \neq 0$. Por tanto, $\sin(\theta_1)^2, \ldots, \sin(\theta_m)^2$ son las raíces de F_m y así, recordando (10.16), podemos factorizar

$$F_m(x) = F_m(0)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{x}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)^2}\right).$$

Por otra parte, empleando (13.5) obtenemos que

$$F_m(0) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin(\theta)} = 2m+1.$$

Finalmente, el resultado se sigue de la factorización anterior, evaluando (13.5) en el ángulo $\theta/(2m+1)$. □

Empleando la fórmula de Euler es posible determinar sumas finitas que involucran senos y cosenos. En particular, tenemos las siguientes identidades.

Proposición 13.4. *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}$ y $n \in \mathbb{N}^+$ se verifica que:*

$$\cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos((n+1)\theta/2)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{13.6}$$

$$\sin\theta + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{13.7}$$

$$\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}, \tag{13.8}$$

$$\sin(\theta) + 2\sin(2\theta) + \cdots + (n-1)\sin((n-1)\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{4\sin(\theta/2)^2} - \frac{n\cos((2n-1)\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}. \tag{13.9}$$

Demostración. Empleando la suma geométrica

$$\sum_{j=1}^{n} e^{ji\theta} = \frac{e^{ni\theta}-1}{e^{i\theta}-1}e^{i\theta} = \frac{e^{ni\theta/2}-e^{-ni\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}e^{i\theta/2}e^{ni\theta/2} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{(n+1)i\theta/2}, \tag{13.10}$$

llegamos inmediatamente a las identidades (13.6) y (13.7) igualando partes reales e imaginarias, respectivamente. Para la tercera fórmula note que

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} e^{ji\theta} = \frac{1}{2} + \frac{e^{ni\theta}-1}{e^{i\theta}-1}e^{i\theta} = \frac{2e^{i(n+1)\theta}-e^{i\theta}-1}{2(e^{i\theta}-1)} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}-\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)},$$

donde en el último paso multiplicamos arriba y abajo por $e^{-i\theta/2}$ y simplificamos. Igualando partes reales en esta ecuación llegamos a (13.8). Finalmente, derivando $e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{i(n-1)\theta} = (e^{in\theta} - e^{i\theta})/(e^{i\theta}-1)$ respecto a θ y simplificando llegamos a la igualdad

$$e^{i\theta} + 2e^{2i\theta} + \cdots + (n-1)e^{i(n-1)\theta} = \frac{(n-1)e^{in\theta} - ne^{i(n-1)\theta} + 1}{-4\sin(\theta/2)^2}.$$

Igualando partes imaginarias y empleando (13.2) llegamos a la relación (13.9). □

Empleando el logaritmo complejo es posible determinar la suma de dos series que involucran senos y cosenos. La validez de las fórmulas se basa en el Teorema de Abel, Proyecto 11.3.

Ejemplo 13.1.1. Podemos estudiar el valor de la serie de $\log(1-z)$ para $|z| = 1$. El Teorema de Abel 11.5, aplicado a la serie (10.13) implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1} = -\log(1-e^{i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}. \tag{13.11}$$

La convergencia de esta serie es de hecho uniforme en intervalos compactos de $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ gracias al criterio de Dirichlet dado en el Teorema 9.4 y las fórmulas (13.6) y (13.7).

Igualando partes reales e imaginarias en (13.11) y recordando (13.12) obtenemos las identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}, \text{ si } 0<\theta<2\pi.$$

Note que los valores en (11.4) corresponden a $\theta = \pi$ y $\theta = \pi/2$ en la primera fórmula.

Para justificar los valores obtenidos note primero que

$$|1-e^{i\theta}|^2 = (1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta}) = 2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2(1-\cos(\theta)) = 4\sin(\theta/2)^2. \tag{13.12}$$

Para determinar el segundo valor, recordando el Ejercicio 8.7.4 y la ecuación (13.4) resulta que

$$-\arg(1-e^{i\theta}) = -\arctan\left(\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = \arctan(\cot(\theta/2)) = \frac{\pi-\theta}{2}, \text{ si } 0<\theta<2\pi. \tag{13.13}$$

Pasamos ahora al estudio de las raíces de la unidad, que servirán como herramienta para establecer algunas propiedades fundamentales sobre las funciones trigonométricas. Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es una *raíz n-ésima de la unidad*, donde $n \in \mathbb{N}^+$, si $z^n = 1$. Tomando módulo vemos que $|z|^n = 1$ y por tanto $|z| = 1$. De esta forma, $z = e^{i\theta}$ y $e^{in\theta} = 1$. Esto implica que $n\theta = 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Si denotamos por

$$\omega_n := e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n),$$

se sigue que hay n raíces n-ésimas de la unidad dadas por $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$. Note también que $\omega_n^{-j} = \omega_n^{n-j}$. En particular, tenemos la factorización $p_n(x) = x^n - 1 = (x-1)(x-\omega_n)\cdots(x-\omega_n^{n-1}) = (x-1)(x-\omega_n^{-1})\cdots(x-\omega_n^{-(n-1)})$. Una aplicación interesante de este resultado son los siguientes productos.

Proposición 13.5. *Si $n, m \in \mathbb{N}^+$ con $n \geq 2$, entonces*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{j\pi}{n}\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}, \qquad \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi j}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}. \tag{13.14}$$

Además,

$$\prod_{j=0}^{2m-1} \cos\left(\theta + \frac{j\pi}{2m}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sin(2m\theta),$$

$$\prod_{j=0}^{2m} \cos\left(\theta + \frac{j\pi}{2m+1}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \cos((2m+1)\theta).$$

Demostración. Empleando el polinomio $p_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1}(x - \omega_n^{-j})$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sin(n\theta) = \frac{e^{-in\theta}}{2i}(e^{2in\theta} - 1) &= \frac{e^{-in\theta}}{2i} \prod_{j=0}^{n-1} (e^{2i\theta} - e^{-2\pi i j/n}) \\
&= \frac{e^{-in\theta}}{2i} \prod_{j=0}^{n-1} e^{i\theta} e^{-\pi i j/n} (e^{i(\theta+\pi j/n)} - e^{-i(\theta+\pi j/n)}) \\
&= \frac{e^{-\pi i(n-1)/2}}{2i} \prod_{j=0}^{n-1} 2i \sin\left(\theta + \frac{j\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Extrayendo el factor $2i$ del producto y recordando que $i = e^{\pi i/2}$, llegamos a la fórmula deseada. Finalmente, dividiendo por $\sin(\theta)$ y haciendo $\theta \to 0$ concluimos la segunda fórmula en (13.14).

Las fórmulas para coseno se demuestran de la misma forma. En forma compacta, ellas aseguran que

$$\prod_{j=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{j\pi}{n}\right) = \frac{i^{n-1}}{2^n}(e^{in\theta} + (-1)^{n+1} e^{-in\theta}).$$

Esta fórmula se sigue de la factorización $\prod_{j=0}^{n-1}(x + \omega_n^{-j}) = (-1)^n((-x)^n - 1) = x^n + (-1)^{n+1}$ evaluando en $x = e^{2i\theta}$ y simplificando como antes.

□

Otra propiedad sobre las raíces de la unidad es

$$1 + \omega_n^j + \omega_n^{2j} + \cdots + \omega_n^{(n-1)j} = \frac{\omega_n^{nj} - 1}{\omega_n^j - 1} = 0, \tag{13.15}$$

para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Esta a su vez implica la siguiente descomposición de series de potencias.

Proposición 13.6. *Dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y un entero $p \geq 2$, se verifica que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{np+j} z^{np+j} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-lj} f(\omega_p^l z), \qquad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Demostración. Basta escribir

$$\sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-lj} f(\omega_p^l z) = \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-lj} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_p^{ln} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{l(n-j)} \right) z^n$$

y notar que la suma interna es igual a p si $n - j$ es un múltiplo de p, y es cero en los demás casos gracias a (13.15). □

Una aplicación muy interesante de esta fórmula general es la determinación de los valores de la función digamma en los números racionales, resultado debido a Gauss. La siguiente demostración es tomada de [32] y es válida para $p/q \in \mathbb{Q}$ con $0 < p/q < 1$. Para los demás valores, basta emplear la ecuación funcional de ψ dada en el Ejercicio 9.2.4.

Proposición 13.7 (Gauss)**.** *Para enteros $0 < q < p$, la función digamma toma los valores*

$$\psi(q/p) + \gamma = -\ln(p) - \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi q}{p}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-1} \cos\left(\frac{2\pi jq}{p}\right) \ln\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{p}\right)\right). \quad (13.16)$$

Demostración. Recordando la definición de ψ y el Teorema de Abel 11.5, vemos que

$$\psi(q/p) + \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{p}{np+q} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{p}{np+q} \right) x^{np+q}.$$

Sea $f(x)$ la anterior serie de potencias. Para calcularla explícitamente podemos aplicar la Proposición 8.11 a la serie (10.13) para obtener la fórmula general

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{np+q}}{np+q} = -\frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-ql} \log(1 - \omega_n^l x), \qquad -1 < x < 1,$$

para $p \geq 2$ y $q = 0, 1, \ldots, p-1$. De esta forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^{q-p} \ln(1 - x^p) + \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-jl} \log(1 - \omega_n^l x) \\ &= -x^{q-p} \ln\left(\frac{1 - x^p}{1 - x}\right) - (x^{q-p} - 1) \ln(1 - x) + \sum_{l=1}^{p-1} \omega_p^{-jl} \log(1 - \omega_n^l x). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= -\ln(p) + \sum_{l=1}^{p-1} \omega_p^{-jl} \log(1-\omega_n^l) \\ &= -\ln(p) + \sum_{l=1}^{p-1} \cos\left(\frac{2\pi ql}{p}\right) \ln\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi ql}{p}\right)\right) - \sum_{l=1}^{p-1} \sin\left(\frac{2\pi ql}{p}\right)\left(\frac{\pi l}{p} - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

En la primera igualdad usamos el límite del Ejemplo 7.5.2. La segunda igualdad se obtiene reteniendo solo la parte real de cada $\omega_p^{-jl} \log(1-\omega_n^l)$, dado que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ es un número real.

Para simplificar la segunda suma podemos aplicar (13.7) y (13.9) con $\theta_0/2 = \pi q/p$, $0 < \theta_0/ < \pi$, para obtener

$$\sum_{l=1}^{p-1} \sin(l\theta_0) = 0, \qquad \sum_{l=1}^{p-1} \sin(l\theta_0) = -\frac{p}{2}\cot(\theta_0),$$

de donde se sigue la fórmula requerida. □

Este teorema permite demostrar la expansión en fracciones parciales de la cotangente. Para ello consideramos la integral

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1} - t^{p-q-1}}{1-t^p} dt, \qquad \text{para enteros } 0 < q < p.$$

El Corolario 11.3 indica que esta integral es igual a $[\psi((p-q)/p) - \psi(q/p)]/p$. Empleando los valores explícitos (13.16) resulta que los términos logarítmicos y las sumas que involucran a los cosenos se cancelan. Además, como $\cot(\pi - \theta) = -\cot(\theta)$ el valor de la integral se simplifica como

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1} - t^{p-q-1}}{1-t^p} dt = \frac{1}{p}\left[\psi\left(\frac{p-q}{p}\right) - \psi\left(\frac{q}{p}\right)\right] = \frac{\pi}{p}\cot(q\pi/p). \tag{13.17}$$

En base a esta fórmula podemos demostrar el siguiente resultado.

Corolario 13.2. *La función digamma satisface la ecuación funcional*

$$\psi(1-\theta) - \psi(\theta) = \pi\cot(\pi\theta),$$

para todo $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En particular, la función cotangente admite la expansión en fracciones parciales

$$\pi\cot(\pi\theta) = \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\theta} - \frac{1}{n-\theta}\right) = \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta}{\theta^2 - n^2}, \tag{13.18}$$

que converge uniformemente en cada intervalo $[a,b] \subseteq (N, N+1)$, con $N \in \mathbb{Z}$.

Demostración. La ecuación (13.17) demuestra que la ecuación funcional es válida para todo $\theta \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Por continuidad de ψ y de la cotangente, se sigue que la ecuación se verifica para todo $\theta \in (0,1)$. Para los demás valores, la fórmula se sigue por periodicidad. En efecto, $\pi\cot(\pi\theta)$ y $\psi(1-\theta)-\psi(\theta)$ son periódicas de periodo 1. Para la segunda función recuerde que de la ecuación funcional del Ejercicio 9.2.4 se tiene que

$$\psi(1-(\theta+1))-\psi(\theta+1) = \psi(-\theta)-\psi(\theta)+\frac{1}{\theta} = \psi(1-\theta)-\psi(\theta),$$

como se requería. Ahora, recordando la definición original de ψ vemos que

$$\pi\cot(\pi\theta) = \psi(1-\theta)-\psi(\theta) = \frac{1}{\theta}+\psi(-\theta)-\psi(\theta) = \frac{1}{\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\theta}-\frac{1}{n-\theta}.$$

Finalmente, la convergencia uniforme se sigue de la convergencia uniforme de la serie que define a ψ. □

Un análisis con una integral similar determina la expansión del recíproco de la función seno. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13.1. *Si $0 < q < p$ son enteros, entonces*

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1}+t^{p-q-1}}{1+t^p}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt = \frac{\pi/p}{\sin(q\pi/p)}. \tag{13.19}$$

Además, la función $\pi/\sin(\pi\theta)$ admite la expansión en fracciones parciales

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\theta)} = \frac{1}{\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-\theta}-\frac{1}{n+\theta}\right) = \frac{1}{\theta}+2\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\theta^2}, \tag{13.20}$$

que converge uniformemente para $\theta \in [a,b] \subseteq (N, N+1)$, con $N \in \mathbb{Z}$.

Demostración. La igualdad entre las integrales se puede obtener escribiendo

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt = \int_0^1\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt,$$

y notando que $\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt = \int_0^1\frac{s^{p-q-1}}{1+s^p}ds$ bajo el cambio de variable $t = 1/s$. Ahora, para calcular la integral podemos aplicar el Corolario 11.3 escribiendo

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{t^{q-1}+t^{p-q-1}}{1+t^p}dt &= \int_0^1\frac{(t^{q-1}+t^{p-q-1})(1-t^p)}{1-t^{2p}}dt\\ &= \frac{1}{2p}\left[\psi\left(\frac{p+q}{2p}\right)+\psi\left(\frac{2p-q}{2p}\right)-\psi\left(\frac{q}{2p}\right)-\psi\left(\frac{p-q}{2p}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{2p}\left[\cot\left(\frac{\pi q}{2p}\right)-\cot\left(\frac{\pi(p+q)}{2p}\right)\right].\end{aligned}$$

La fórmula se sigue de la identidad $\cot(x)-\cot(\pi/2+x) = \cot(x)+\tan(x) = 2/\sin(2x)$.

Recordando el Ejercicio 8.6.4 sabemos que

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{np+q}, \qquad \int_0^1 \frac{t^{p-q-1}}{1+t^p}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{np+p-q}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1}+t^{p-q-1}}{1+t^p}dt = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{np-q} - \frac{1}{np+q}\right).$$

De esta forma, al igualar esta serie con (13.19) vemos que (13.20) se verifica para $\theta \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Consideremos la función $F(\theta) = \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-\theta} - \frac{1}{n+\theta}\right)$, con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Esta serie converge uniformemente para $\theta \in [N+a, N+1-a] \subseteq (N, N+1)$, con $0 < a < 1$ y $N \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo si $N > 0$ y $n > 2(N+a)$, entonces $|\theta^2 - n^2| \geq n^2 - \theta^2 > n^2 - (N+a)^2 > n^2 - n^2/4 = 3n^2/4$ y así

$$\left|\frac{1}{n-\theta} - \frac{1}{n+\theta}\right| \leq \frac{2|\theta|}{|\theta^2 - n^2|} \leq \frac{8(N+1-a)}{3n^2}.$$

Por el M-test de Weierstrass, F define una función continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Como $F(\theta)$ y $\pi/\sin(\pi\theta)$ coinciden en $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ y ambas son continuas allí, entonces coinciden para todo $\theta \in (0,1)$. Es inmediato comprobar que $F(\theta+1) = -F(\theta)$ y como $\pi/\sin(\pi\theta)$ también satisface esta identidad, concluimos que ambas funciones coinciden en todo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. □

Nota 13.1.1. Multiplicando por θ en ambos lados de la ecuación (13.18) y argumentando como en la demostración anterior, vemos que la convergencia de dicha serie es válida para $\theta \in (-1,1)$ y es uniforme en intervalos cerrados de este intervalo.

Finalizamos este proyecto con las expansiones en serie de Taylor en el origen de las funciones tangente y cotangente en términos de los números de Bernouilli. Como aplicación determinaremos el valor explícito de la función zeta de Riemann en los números pares.

Los *números de Bernoulli* B_n (con signos) fueron introducidos por J. Bernoulli en su *Ars Conjectandi* publicado de manera póstuma en 1713, para dar una fórmula para $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ como un polinomio en n. Ellos están definidos como los coeficientes de la serie de Taylor en $z = 0$ de

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}z^k, \quad |z| < 2\pi. \tag{13.21}$$

Note que esta serie de potencias es la recíproca de $(e^z - 1)/z$, que no se anula para $|z| < 2\pi$. El Corolario 12.1 implica que dicha serie es convergente alrededor de 0. De

la ecuación (13.21) se deduce que $B_0 = 1$ y $B_1 = -\frac{1}{2}$. Multiplicando las series de potencias involucradas e igualando potencias de z se concluye que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \qquad n \geq 2.$$

Esta fórmula nos permite encontrar B_n recursivamente y establece que los B_n son racionales. Los primeros valores vienen dados por

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

mientras que $B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = 0$. Este es un hecho general: como $\dfrac{z}{2}\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ es una función par, se deduce que

$$B_{2k+1} = 0, \qquad k \geq 1,$$

para todos los índices impares mayores a 1.

Ahora, reemplazando z por $2iz$ en (13.21) y recordando la ecuación (10.11) para la cotangente, concluimos que

$$z\cot(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(-1)^k 2^{2k} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} - \frac{2}{945}z^6 - \frac{1}{4725}z^8 + \cdots, \qquad |z| < \pi.$$

Además, de la identidad $\tan(z) = \cot(z) - 2\cot(2z)$ deducimos que

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \\ &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \cdots, \qquad |z| < \pi/2.\end{aligned}$$

Con estas herramientas estamos en posición de terminar el proyecto con el siguiente resultado debido a Euler.

Teorema 13.2. *La función zeta de Riemann asume los valores*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{13.22}$$

En particular, como $\zeta(2k) > 0$, los números de Bernoulli B_{2k} alternan en signo.

Demostración. Empleando la expansión (13.18) y serie geométrica podemos escribir para $|\theta| < 1$,

$$\pi\theta\cot(\pi\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta/n)^2}{(\theta/n)^2 - 1} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\theta}{n}\right)^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k)\theta^{2k},$$

donde el intercambio en el orden de las sumas se justifica empleando la convergencia absoluta de las series involucradas, Proposición 5.6. Comparando con la ecuación (13.18) obtenemos la fórmula requerida. □

En particular, tenemos los valores

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Ejercicios

13.1.1 Calcular $T_3(x)$ y $U_3(x)$. Emplear las fórmulas obtenidas para mostrar que

$$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2, \quad \cos(\pi/3) = 1/2, \quad \sin(\pi/6) = 1/2, \quad \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2.$$

13.1.2 Comprobar que

$$e^{2\pi i/5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Indicación: $e^{2\pi i/5}$ satisface $(z + 1/z)^2 + (z + 1/z) = 1$, que se puede resolver aplicando la fórmula cuadrática dos veces. Para $e^{i\pi/5}$ emplee la fórmula de ángulo doble.

13.1.3 Demostrar que $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$ y $(n+1)T_{n+1}(x) = xU_n(x) + (x^2-1)U_n'(x)$.

13.1.4 Demostrar que si $m \geq 2$, entonces

$$\prod_{j=1}^{m-1} \sin\left(\frac{\pi j}{2m}\right) = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}. \tag{13.23}$$

De la misma forma, si $m \geq 1$,

$$\prod_{j=1}^{m} \sin\left(\frac{\pi j}{2m+1}\right) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}. \tag{13.24}$$

Indicación: Poner $n = 2m$ en la segunda fórmula en (13.14) y separar el producto en dos partes. La identidad $\sin(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta)$ puede ser útil. Para la segunda igualdad proceda de forma similar con $n = 2m + 1$.

13.1.5 El objetivo de este ejercicio es demostrar las identidades

$$\cot\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cot\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \sqrt{7},$$
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

En la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(n+1)$ los coeficientes a_n se repiten periódicamente, con periodo 7. Para la primera identidad, mostrar que usando las fórmulas de diferencia de ángulos, $1-\cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$ y $\sin(3\theta) = \sin(\theta)(2\cos(2\theta)+1)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\cot(\theta) + \cot(2\theta) - \cot(3\theta) \\
&\quad = \frac{\cos(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta) + \cos(2\theta)\sin(3\theta)\sin(\theta) - \cos(3\theta)\sin(\theta)\sin(2\theta)}{\sin(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta)} \\
&\quad = \frac{\cos(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta) + \sin(\theta)^2}{\sin(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta)} \\
&\quad = \frac{\sin(\theta)^2 + \sin(2\theta)^2 + \sin(3\theta)^2}{2\sin(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta)} \\
&\quad = \frac{3 - \cos(2\theta) - \cos(4\theta) - \cos(6\theta)}{4\sin(\theta)\sin(2\theta)\sin(3\theta)}.
\end{aligned}$$

Deducir la identidad requerida tomando $\theta = \pi/7$ y aplicando (13.24) y (13.8) adecuadamente. Para sumar la serie emplee la descomposición en fracciones parciales de la cotangente en la forma $\frac{\pi}{p}\cot(j\pi/p) = \frac{1}{j} + \frac{1}{j-p} + \frac{1}{j+p} + \frac{1}{j-2p} + \frac{1}{j+2p} + \cdots$ con $p = 7$ y $j = 1, 2, 3$ y la primera parte del ejercicio.

13.1.6 Demostrar las identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\theta)}{n} = \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\theta}{2}, \quad |\theta| < \pi.$$

13.1.7 Comprobar que $\arctan(x) = \frac{1}{2i}(\log(1+ix) - \log(1-ix))$, para $|x| < 1$. Luego, obtener como casos particulares de la Proposición 13.6 las expansiones

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\arctan(x), \quad |x| < 1.$$

13.1.8 Usar la Proposición 13.6 para comprobar que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} &= \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2), \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} &= \frac{e^x}{3} - \frac{1}{3}e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2), \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} &= \frac{e^x}{3} - \frac{1}{3}e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2).
\end{aligned}$$

13.1.9 Emplear los productos para cosenos de la Proposición 13.5 para demostrar que

$$-2m\cot(2m\theta) = \sum_{j=0}^{2m-1} \tan\left(\theta + \frac{j\pi}{2m}\right),$$

$$(2m+1)\tan((2m+1)\theta) = \sum_{j=0}^{2m} \tan\left(\theta + \frac{j\pi}{2m+1}\right).$$

Indicación: tomar valor absoluto, logaritmo y luego derivar respecto a t en los productos dados.

13.1.10 Emplear la descomposición en fracciones parciales de la cotangente y la identidad $\tan(\theta/2) = \cot(\theta/2) - 2\cot(\theta)$ para demostrar que

$$\pi\tan\left(\frac{\pi\theta}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1-\theta} - \frac{1}{2n+1+\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\theta}{(2n+1)^2-\theta^2},$$

válida para $\theta \in \mathbb{R}$, excepto en los enteros impares. También, sustituir θ por$1/2-\theta$ en (13.20) par obtener la fórmula

$$\frac{\pi}{4\cos(\pi\theta/2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2-\theta^2}, \tag{13.25}$$

válida para $\theta \in \mathbb{R}$, salvo en los enteros impares.

13.1.11 Los *números de Euler* se definen por la expansión

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{2(2n)!}x^{2n}.$$

Multiplicando esta serie por la serie de coseno, mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k} = 0,$$

y concluir que $E_{2n} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$. En particular,

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385.$$

Imitar la demostración del Teorema 13.2 a la expansión (13.25) para concluir que

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = (-1)^k\frac{E_{2k}}{2(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}.$$

13.1.12 Aplicar las desigualdades de los Ejercicios 5.2.4 y 5.6.3 para mostrar que

$$\frac{1-2^{-2n}}{(2\pi)^{2n}(1-2^{1-2n})} \leq \frac{|B_{2n}|}{2(2n)!} \leq \frac{1}{(2\pi)^{2n}(1-2^{1-2n})}.$$

Emplear estas desigualdades para justificar los radios de convergencia de las series (13.21), $z\cot(z)$ y $\tan(z)$.

13.2. Productos infinitos

El objetivo de este proyecto es estudiar la noción de producto infinito entre números reales, de manera análoga a como se trató la noción de suma infinita o serie en el Capítulo 5. En esta sección, en vez de hacer sumas parciales trabajaremos con productos parciales.

Definición 13.1. Dada una sucesión de números reales $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, sean $p_n = A_1A_2\cdots A_n$ sus *productos parciales*. Decimos que el *producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ *converge a* p si

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n := \lim_{n\to+\infty} p_n = p.$$

En el texto ya encontramos un ejemplo interesante sobre estos productos: la fórmula de Wallis (4.5) en relación con la fórmula de Stirling. Otro ejemplo sencillo consiste en los productos telescópicos dados por $A_1 = B_1$ y $A_n = B_n/B_{n-1}$, si $n \geq 2$, donde $B_n \neq 0$. En este caso $p_n = B_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n$. Por ejemplo,

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0, \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} N = +\infty. \tag{13.26}$$

Retomando la definición anterior, note que si $A_j = 0$ para algún j, entonces $p_n = 0$ para $n \geq j$. En este caso $p = 0$ y la existencia del producto no reviste ninguna dificultad. Por otra parte, puede suceder que $A_n \neq 0$ para todo n y sin embargo $p = 0$. Dos ejemplos sencillos son

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N!^p} = 0, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} a = \lim_{N\to+\infty} a^N = 0,$$

donde $p > 0$ y $|a| < 1$.

Así como para series su convergencia implica que el n-ésimo término tiende a cero, la convergencia de productos admite el siguiente resultado similar.

Proposición 13.8. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de números reales. Si $A_n \neq 0$ para todo n y $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = p$ converge con $p \neq 0$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = 1. \tag{13.27}$$

Demostración. Como $p_n \neq 0$ y $A_n = p_n/p_{n-1}$, entonces $A_n \to p/p = 1$. □

Gracias a este resultado, es común escribir $A_n = 1 + a_n$ donde $a_n \to 0$ es una condición necesaria para que el producto sea convergente a un límite no nulo. Por otra parte, los ejemplos del párrafo anterior muestran que ambas condiciones de la proposición son necesarias para concluir el límite (13.27).

Nota 13.2.1. Para el siguiente resultado requerimos la desigualdad

$$\frac{|x|}{2} \leq \left|\ln(1+x)\right| \leq \frac{3|x|}{2}, \qquad |x| \leq 1/2. \tag{13.28}$$

Para demostrarla, recordando la expansión $\ln(1+x) - x = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$, vemos que si $0 < |x| \leq 1/2$, entonces

$$\left|\frac{|\ln(1+x)|}{|x|} - 1\right| \leq \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| \leq \frac{|x|}{2}\left(1 + |x| + |x|^2 + \cdots\right) \leq \frac{|x|}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} = |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Esto implica (13.28) para $x \neq 0$. El caso $x = 0$ es claro.

Teorema 13.3. *Considere una sucesión $A_n = 1 + a_n$ de números reales. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = p$ converge. En este caso $p = 0$ si y solo si $A_n = 0$ para algún n.*
2. *Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge y $a_n \neq 1$ para todo n, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n}$ converge.*
3. *Si $a_n \geq 0$, para todo n, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. (1) Gracias a la convergencia de la serie podemos asegurar la existencia de $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < 1/2$, para $n \geq N$. Escribamos entonces

$$\prod_{n=1}^{k} A_n = p_{N-1}e^{B_k}, \qquad \text{donde } B_k = \sum_{j=N}^{k}\ln(1+a_j)$$

y $p_{N-1} = A_1 \cdots A_{N-1}$. Por (13.28), $|\ln(1+a_j)| \leq (3/2)|a_j|$ y así, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{j=N}^{\infty}\ln(1+a_j) = B$ converge. Por la continuidad de la función exponencial obtenemos $e^{B_k} \to e^B$ si $k \to +\infty$. En conclusión, el producto infinito dado converge a

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} A_n = p_{N-1}e^B. \tag{13.29}$$

Así $p = 0$ si y solo si $A_n = 0$ para algún $n = 1, \ldots, N-1$, como se requería demostrar.

(2) Dado que $\prod_{n=1}^{k} 1/(1-a_n) = 1/\prod_{n=1}^{k}(1-a_n)$, el producto del denominador converge a un valor no nulo gracias a (1).

(3) Como $a_j \geq 0$ para cada j, la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es creciente y por tanto converge si y solo si es acotada. Lo mismo sucede con la sucesión de sumas parciales $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Note que al expandir los productos parciales obtenemos

$$p_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{13.30}$$

Por otra parte, la desigualdad (7.5) indica que $1 + a_j \leq e^{a_j}$. Multiplicando estas desigualdades y teniendo en cuenta (13.30) obtenemos que

$$1 + s_n \leq p_n \leq e^{s_n}.$$

En conclusión, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ es acotada si y solo si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ lo es, como se debía probar. □

El primer ejemplo importante que presentamos en esta sección es la factorización de la función zeta de Riemann debida a Euler.

Teorema 13.4 (Euler)**.** *Si $s > 1$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

donde el producto infinito se toma sobre el conjunto $\mathcal{P}$ de números primos.

Demostración. El producto converge gracias al Teorema 13.3(2) porque $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p^s$ converge si $s > 1$. Fije enteros $M > N \geq 1$. Note que si $n \leq N$, los factores primos p de n también satisfacen $p \leq N$ y no se pueden repetir más de M veces. De esta forma, empleando la serie geométrica obtenemos la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{p\leq N}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}}\right) \leq \prod_{p\leq N}\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) \leq \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Si $N \to +\infty$ obtenemos que $\zeta(s) \leq \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$. Para la desigualdad restante, observe que por el Teorema Fundamental de la Aritmética 1.1, se verifica que

$$\prod_{p\leq N}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Si $M \to +\infty$ obtenemos $\prod_{p\leq N}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \leq \zeta(s)$. Por tanto, la segunda desigualdad se sigue de hacer $N \to +\infty$. □

Esta identidad codifica analíticamente el Teorema Fundamental de la Aritmética 1.1 dado que cada factor $1/(1-p^{-s})$ es igual a $1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$. Por tanto, al expandir el producto, cada factor obtenido es de la forma $1/(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l})^s$ que corresponde a un único $1/n^s$, con $n \in \mathbb{N}^+$.

Pasamos ahora a revisar la noción de convergencia absoluta para productos. La primera impresión sería definir a $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ como absolutamente convergente si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} |A_n|$ converge. Sin embargo, esta noción no es adecuada porque no implicaría en general la convergencia del producto inicial. Por ejemplo, si tomamos $A_n = (-1)^n$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} |A_n| = 1$, pero $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{N\to+\infty}(-1)^N$ no existe. La noción correcta se explica a continuación.

Definición 13.2. Se dice que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.

Como veremos a continuación, convergencia absoluta implica convergencia para productos infinitos. El recíproco no es cierto como lo muestra la elección $a_n = (-1)^n/n$. En efecto, se verifica inmediatamente que $p_{2n} = 1$, $p_{2n-1} = (2n+1)/(2n)$, $n \geq 1$ y así

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$$

Por otra parte, el producto $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge como se mostró en (13.26).

Proposición 13.9. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge absolutamente si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ *converge absolutamente si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *converge.*

2. *Si un producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. (1) El Teorema 13.3(3) demuestra que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge. La equivalencia entre la convergencia de las series dadas se sigue directamente de la desigualdad (13.28). Finalmente, (2) es inmediata de (1) y del Teorema 13.3(1). □

Vale la pena resaltar que la idea subyacente en las demostraciones anteriores es hacer uso de las funciones logaritmo y exponencial para transformar productos infinitos en series y así poder aprovechar los criterios de convergencia ya disponibles. En particular, si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge y $|a_n| < 1$ para $n \geq N$, entonces se verifica que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}\ln(1+a_n)\right).$$

Note que esta situación fue la obtenida en (13.29).

Podemos también tratar el caso del producto infinito de funciones. En este aspecto tenemos el siguiente resultado análogo al M-test de Weierstrass para series.

Teorema 13.5. *Sea* (X,d) *compacto y sean* $g_n : X \to \mathbb{R}$ *funciones continuas tales que* $\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_X$ *converge. Entonces*

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(x)) \tag{13.31}$$

converge absolutamente y uniformemente en X*. Además, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $g(x) = 0$ *si y solo si* $1+g_n(x) = 0$*, para algún* $n = 1,\ldots,N-1$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_n\|_X < 1/2$, si $n \geq N$. Entonces $|\ln(1 + g_n(x))| \leq 2|g_n(x)|$, para todo $x \in X$ y $n \geq N$. Por el M-test de Weierstrass, la función definida por

$$h(x) = \sum_{j=N}^{\infty} \ln(1 + g_j(x))$$

converge uniformemente en X y es continua. Como X es compacto, $\|h\|_X$ es finito. Por tanto, podemos aplicar el Lema 9.1 para concluir que

$$e^{h(x)} = \prod_{j=N}^{\infty}(1 + g_j(x))$$

converge uniformemente en X. Finalmente, como $g(x) = (1+g_1(x)) \cdots (1+g_{N-1}(x))e^{h(x)}$ este producto se anula si y solo si algún $1 + g_j(x)$, para $j = 1, \ldots, N-1$, lo hace. □

Teorema 13.6 (Teorema de Tannery para productos)**.** *Considere los productos infinitos $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j(n))$, para $n \in \mathbb{N}$. Si para cada j, $\lim_{n\to+\infty} a_j(n) = a_j$ existe, $|a_j(n)| \leq M_j$ para todo n, j y $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j(n)) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j).$$

Demostración. Note que $|a_j| \leq M_j$, desigualdad que se sigue haciendo $n \to +\infty$ en la desigualdad correspondiente para $a_j(n)$. La convergencia de los $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j(n))$ y de $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j)$ se deduce del Teorema 13.3 (1).

Como $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_j < 1$, para todo $j \geq N$. Por tanto $|a_j(n)| < 1$ y así podemos escribir

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j(n)) = p_j(n) \prod_{j=N}^{\infty}(1 + a_j(n)) = p_j(n) \exp\left(\sum_{j=N}^{\infty} \ln(1 + a_j(n))\right), \qquad (13.32)$$

donde $p_j(n) = (1 + a_1(n)) \cdots (1 + a_{N-1}(n))$. Como $|\ln(1 + a_j(n))| \leq 2|a_j(n)| \leq 2M_j$, el Teorema de Tannery 5.14, muestra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=N}^{\infty} \ln(1 + a_j(n)) = \sum_{j=N}^{\infty} \ln(1 + a_j).$$

La fórmula se sigue de tomar $n \to +\infty$ en (13.32) y de la continuidad de la función exponencial. □

Como en el caso de series, una situación que está contemplada en el teorema anterior es para productos de la forma

$$\prod_{j=1}^{m(n)}(1 + a_j(n)), \qquad \text{donde } \{m(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ satisface } m(n) \to +\infty.$$

Si las hipótesis del teorema se verifican, entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{j=1}^{m(n)}(1+a_j(n)) = \prod_{j=1}^{\infty}\lim_{n\to+\infty}(1+a_j(n)).$$

Como aplicación de estos resultados podemos dar la factorización de la función seno. La demostración está basada en el artículo [81]. Es interesante notar la analogía de la siguiente fórmula con el caso de polinomios. En el caso polinomial es posible factorizar en factores lineales, donde cada factor incluye un cero del polinomio. Aunque la función seno no es un polinomio, una factorización de la misma naturaleza es posible. En este caso las soluciones de $\sin(x) = 0$ son precisamente los $x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, que dan lugar a los factores que aparecen a continuación.

Teorema 13.7 (Factorización de seno)**.** *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Además, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{R}$.

Demostración. La demostración se basa en la fórmula

$$\sin(x) = (2m+1)\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)^2}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)^2}\right), \tag{13.33}$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^+$, ver Corolario 13.1. Sea $1 + a_k(m)$ el correspondiente factor en la ecuación anterior. Las desigualdades de Jordan, Ejemplo 12.1.2, demuestran que

$$|a_k(m)| \le \frac{x^2/(2m+1)^2}{(2/\pi)^2k^2\pi^2/(2m+1)^2} = \frac{x^2}{4k^2}.$$

Además $a_k(m) \to -x^2/\pi^2k^2$ cuando $m \to +\infty$, gracias al límite $\lim_{\theta\to 0}\sin(\theta)/\theta = 1$. El Teorema de Tannery para productos implica entonces que

$$\sin(x) = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right).$$

Reemplazando x por πx llegamos a la expresión requerida. Finalmente, el Teorema 13.5 con $g_n(x) = -x^2/n^2$ demuestra que la convergencia es uniforme en cada intervalo $[-a, a]$ porque $\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_{[-a,a]} = a^2\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ converge. □

Nota 13.2.2. Las identidades del Ejercicio 13.1.9 junto con el Teorema de Tannery para productos y el producto de Wallis se pueden emplear para dar otra demostración de la factorización del seno. El lector puede consultar el artículo [34] para la prueba. Otra prueba elemental empleando integrales también se puede consultar en [116].

Nota 13.2.3. Bajo hipótesis adecuadas, es posible diferenciar un producto infinito. Por ejemplo, considere la función $g(x)$ dada por (13.31), donde $X = [a, b]$, y suponga que no se anula en ningún punto. Suponga además que cada $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{[a,b]}$ converge y la serie $G = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'/(1+g_n)$ converge uniformemente en $[a, b]$. Entonces el Corolario 9.3(2) asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + g_n)$ es diferenciable allí y su derivada está dada por G. Por el Teorema 13.3, existe N tal que $g = (1 + g_1) \cdots (1 + g_{N-1}) \exp(\sum_{j=N}^{\infty} \ln(1 + g_j))$. Se sigue entonces que g es diferenciable en $[a, b]$ y al derivar y dividir por g obtenemos la fórmula

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n'(x)}{1 + g_n(x)}.$$

Una aplicación de este resultado es deducir la descomposición en fracciones parciales del recíproco del seno, Teorema 13.1, derivando la factorización del teorema anterior.

Ejercicios

13.2.1 Comprobar el valor de los siguientes productos:

a) $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} = \frac{1}{4}$,

b) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$.

c) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

d) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{(n-1)(n+a)}\right) = a + 1$.

13.2.2 Discutir la convergencia absoluta de los siguientes productos:

a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$.

b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sin(1/n)^2\right)$.

c) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + x^{2n}\right)$.

d) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n}\right)$.

13.2.3 Si $0 \le a_n < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, probar que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ converge a cero. Indicación: mostrar que $p_n \le \exp(-(a_1 + \cdots + a_n))$.

13.2.4 Emplear el Teorema del producto de Euler y (13.28) para mostrar que $\ln \zeta(s) \le \frac{3}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} 1/p^s$, si $s > 1$. Hacer $s \to 1^+$ para concluir que $\lim_{s \to 1^+} \sum_{p \in \mathcal{P}} 1/p^s = +\infty$. ¿Es posible concluir de aquí que la serie $\sum_{p \in \mathcal{P}} 1/p$ diverge?

13.2.5 Demostrar $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1 - x}$, para $|x| < 1$.

13.2.6 Emplear la identidad $\cos(t) = \sin(2t)/2\sin(t)$ para establecer los productos

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \cos(\pi x) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.2.7 Justificar el intercambio de series dobles usando la Proposición 5.6 para demostrar que

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m)\frac{x^{2m}}{m}, \qquad |x| < 1.$$

Encontrar los primeros términos de la expansión en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ del término del lado izquierdo para deducir que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Nota 13.2.4. Originalmente Euler empleó la factorización del seno para deducir estos valores expandiendo el producto infinito y agrupando en potencias de x.

13.3. La función Gamma

El objetivo de este proyecto es desarrollar las propiedades básicas de la función Gamma, función trascendente que interpola la función factorial en los enteros positivos y es de vital importancia en el Análisis Matemático. Describiremos su caracterización empleando propiedades de funciones convexas, donde requeriremos del contenido del Proyecto 12.1. Además daremos varias fórmulas que la definen y su comportamiento asintótico cuando $x \to +\infty$. Discutimos también la función Beta y algunas integrales relacionadas.

Definición 13.3. La función *Gamma* se define por la integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x > 0.$$

Este valor se entiende como una integral impropia en infinito. Para $0 < x < 1$ ella también tiene un carácter impropio cerca del origen. En cualquier caso podemos comprobar la convergencia escribiendo

$$\Gamma(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \lim_{R\to+\infty} \int_1^R t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Para $x > 0$ fijo, aplicamos el criterio de paso al límite, Proposición 8.11. Primero, note que $\lim_{t\to 0^+} t^{x-1}e^{-t}/t^{x-1} = 1$ y $\int_0^1 t^{x-1}dt = 1/x$. Así la primera integral converge. Este límite también demuestra que $\Gamma(x)$ no converge para $x \leq 0$. Segundo, como $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t}/e^{-t/2} = \lim_{t\to+\infty} t^{x-1}/e^{t/2} = 0$, la segunda integral también converge porque $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt = 2/e^{1/2}$ converge.

Se sigue de la definición que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. Además, aplicando integración por partes, obtenemos que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x), \qquad x > 0.$$

Esta ecuación funcional es fundamental en el desarrollo de la teoría. Su primera aplicación es demostrar que Γ interpola a la función factorial. En efecto, por inducción se sigue que

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x), \qquad n \in \mathbb{N}^+, x > 0. \tag{13.34}$$

En particular, para $x = 1$ se obtiene la relación

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Por otra parte, la ecuación (13.34) permite extender Γ a todo $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ mediante la fórmula

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)\cdots(x+1)x}, \qquad -n < x < -n+1.$$

En la Figura 13.1 se esboza una gráfica de la función Γ en su dominio.

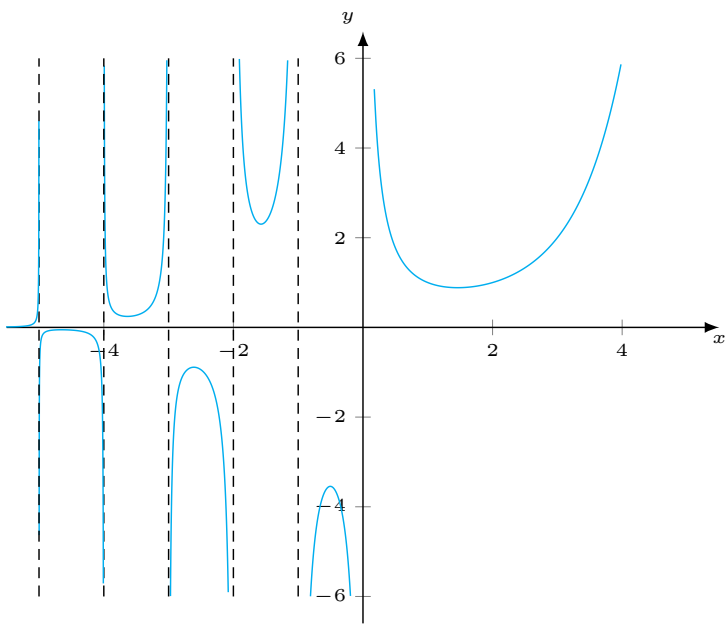

Figura 13.1: La función Gamma.

Otra propiedad importante de Γ es que ella es log-convexa, es decir, satisface la desigualdad (12.6). Esto es consecuencia de la desigualdad de Hölder, Proposición

8.8, aplicada a integrales impropias. En efecto, dado $0 < \lambda < 1$, si $p = 1/\lambda$ y $q = 1/(1-\lambda)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^{+\infty} t^{\lambda(x-1)+(1-\lambda)(y-1)} e^{-\lambda t-(1-\lambda)t} dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Un teorema sorprendente es que las propiedades descritas hasta el momento caracterizan a la función Gamma. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13.8 (Bohr-Mollerup)**.** *Si $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ es una función tal que*

1. $f(x+1) = xf(x)$,
2. $f(1) = 1$,
3. $\ln(f)$ *es una función convexa,*

entonces $f(x) = \Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

Demostración. Por (1) $f(x)$ queda determinada por su valor para $0 < x \leq 1$. Empleando la convexidad en (3), las desigualdades en (12.4) aplicadas a los valores $n < n+1 < n+x+1 < n+2$ implican que

$$\frac{\ln(f(n+1)) - \ln(f(n))}{(n+1)-n} \leq \frac{\ln(f(n+x+1)) - \ln(f(n+1))}{(n+x+1)-(n+1)} \leq \frac{\ln(f(n+2)) - \ln(f(n+1))}{(n+2)-(n+1)}.$$

Note que por (1) y (2), $f(n+1) = n!f(1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\ln(n) \leq \frac{\ln(f(n+x+1)) - \ln(n!)}{x} \leq \ln(n+1).$$

Como $f(n+x+1) = (x+n)\cdots(x+1)xf(x)$, tenemos que

$$\ln(n^x n!) \leq \ln(f(x)) + \ln(x(x+1)\cdots(x+n)) \leq \ln((n+1)^x n!).$$

De esta forma concluimos que

$$0 \leq \ln(f(x)) - \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right) \leq x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Finalmente, haciendo $n \to +\infty$ y aplicando la función exponencial vemos que $f(x)$ queda determinada por dicho límite para $0 < x < 1$. □

Como la función Gamma satisface las propiedades del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 13.9 (Gauss)**.** *Para todo $x \neq 0, -1, -2, \dots$ la función Gamma viene dada por el límite*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Demostración. La demostración anterior establece la validez del límite para $0 < x < 1$. Para $x = 1$ el resultado también es claro. Para otros valores de x, sea $g_n(x) = n!n^x/(x(x+1)\cdots(x+n))$. Se sigue que

$$g_n(x+1) = xg_n(x)\frac{n}{n+x+1}.$$

Por tanto, $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ existe si y solo si $g(x+1) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x+1)$, siempre que $x \neq 0, -1, -2, \dots$. De la ecuación anterior vemos que $g(x+1) = xg(x)$. Como $g(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leq 1$, gracias a la ecuación funcional, g y Γ deben coincidir para todo x donde están definidas. □

Volviendo sobre la condición de convexidad de Γ es posible establecer de manera elemental cotas para esta función. Las siguientes desigualdades son tomadas de [69].

Proposición 13.10. *Si $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ satisface (1) y (3) como en el Teorema 13.8, entonces*

$$x(x+y)^{y-1} \leq \frac{f(x+y)}{f(x)} \leq x^y, \qquad 0 \leq y \leq 1, \tag{13.35}$$

$$x^y \leq \frac{f(x+y)}{f(x)} \leq x(x+y)^{y-1}, \qquad y \leq 0 \text{ ó } y \geq 1. \tag{13.36}$$

Demostración. Fije $x > 0$. Para la segunda desigualdad en (13.35) considere $F(y) = \ln f(x+y) - y\ln(x)$, con $y > -x$. Entonces F es convexa y

$$F(1) = \ln f(x+1) - \ln(x) = \ln f(x) = F(0).$$

Así $F(y) = F(y \cdot 1 + (1-y)\cdot 0) \leq yF(1) + (1-y)F(0) = \ln f(x)$ si $0 \leq y \leq 1$ como se requería. Para establecer la primera desigualdad en (13.36), es decir, $F(y) \geq \ln f(x)$, basta con emplear (12.4) para $y < 0 < 1$ y para $0 < 1 < y$.

La segunda desigualdad en (13.35) muestra que si $R(x, y) = f(x+y)/f(x)$, entonces

$$R(x+y, 1-y) = \frac{f(x+1)}{f(x+y)} \leq (x+y)^{1-y}, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Por tanto, $f(x+y) \geq x(x+y)^{y-1}f(x)$. En los demás casos, la primera desigualdad en (13.36) implica que $R(x+y, 1-y) \geq (x+y)^{1-y}$. De esta forma hemos demostrado las desigualdades faltantes. □

Las desigualdades anteriores tienen la siguiente aplicación interesante.

Corolario 13.3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)x^a} = 1$, *si $a \geq 0$.*

Demostración. Si $0 < a \leq 1$, la desigualdad (13.35) implica que

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{a-1} \leq \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)x^a} \leq 1,$$

de donde se deduce el límite. En general, si $N \leq a < N + 1$ con $N \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq y = a - N < 1$ se sigue de la ecuación funcional que

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)x^a} = \frac{(x+y+N-1)\cdots(x+y+1)(x+y)}{x^N}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)x^y} \to 1$$

si $x \to +\infty$ gracias al primer caso. □

Por otra parte, el límite de Gauss admite otra representación como producto infinito, debida a Weierstrass. Escribiendo, como en la demostración del Teorema 13.9

$$g_n(x) = e^{x\left(\ln(n)-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)}\frac{1}{x}\frac{e^x}{1+x}\frac{e^{x/2}}{1+x/2}\cdots\frac{e^{x/n}}{1+x/n},$$

y recordando la definición de la constante de Euler-Mascheroni, 8.6.3, al hacer $n \to +\infty$ obtenemos la siguiente representación como producto infinito.

Teorema 13.10. *La función Gamma admite la factorización*

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x/n}}{1+x/n}, \qquad x \neq 0, -1, -2, \ldots. \tag{13.37}$$

En particular,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Demostración. Para demostrar la segunda fórmula, empleamos la ecuación funcional y este producto para escribir

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) = (-x)\Gamma(x)\Gamma(-x) &= (-x)\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x/n}}{1+x/n}\cdot\frac{e^{\gamma x}}{(-x)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x/n}}{1-x/n}\\ &= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x/n)(1-x/n)},\end{aligned}$$

si $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. El resultado se sigue de la factorización de la función seno del Teorema 13.7. □

Una propiedad interesante de esta fórmula es que demuestra que Γ es una función C^∞ en su dominio y revela la conexión que existe con la función digamma del Ejemplo 9.2.2. En efecto, de la representación integral se sigue que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$.

Entonces $\Gamma(x) = e^{\ln\Gamma(x)}$ y es suficiente demostrar la afirmación para $\ln\Gamma(x)$. Tomando logaritmo en el producto (13.37) obtenemos la serie

$$\ln\Gamma(x) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Aplicando el Corolario 9.3 basta comprobar entonces que la serie que se obtiene al derivar término a término converge uniformemente en compactos de $(0, +\infty)$. Pero la serie resultante no es otra que la función digamma para la cuál ya habíamos comprobado la convergencia uniforme. De esta manera llegamos a la fórmula

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \psi(x). \tag{13.38}$$

Esto demuestra que $\Gamma'(x)$ existe para $x > 0$ y gracias a la ecuación funcional lo mismo es válido para todo x en el dominio de Γ. Además, como $\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\})$, lo mismo será válido para Γ en este dominio. En particular, recordando el Ejercicio 9.2.4 obtenemos los valores

$$\Gamma'(m+1) = m!\left(-\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Por supuesto, $\Gamma'(1) = -\gamma$. La regla de Leibniz de derivación bajo el signo integral para integrales impropias, Teorema 9.9, es aplicable en este caso y justifica que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt, \qquad x > 0. \tag{13.39}$$

En particular, haciendo $x = 1$ obtenemos la representación integral

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt,$$

de la constante de Euler-Mascheroni.

Pasamos ahora al estudio de la función Beta que, como veremos, puede ser expresada en términos de Γ.

Definición 13.4. La *función Beta* se define por la integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \qquad x, y > 0.$$

Se sigue del criterio de paso al límite que esta integral impropia converge para dichos x e y. De hecho, esta integral ya había aparecido en el Ejercicio 8.3.5 cuando $x, y \in \mathbb{N}^+$. Este resultado se generaliza a través del siguiente teorema que demostramos aplicando el Teorema de Bohr-Mollerup.

Teorema 13.11. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, *para* $x, y > 0$.

Demostración. Fijado $y > 0$, veremos que la función $f(x) = \Gamma(x+y)B(x,y)/\Gamma(y)$ satisface las condiciones del Teorema 13.8 y por tanto $f(x) = \Gamma(x)$, para $x > 0$. En efecto, como $B(1,y) = 1/y$, entonces $f(1) = \Gamma(1+y)/(y\Gamma(y)) = 1$. Segundo, integrando por partes tenemos que

$$B(x+1,y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1} dt = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

De aquí se sigue que $f(x+1) = xf(x)$. Finalmente, para la log-convexidad de f, basta demostrar que

$$B(\lambda x_0 + (1-\lambda x_1), y) \le B(x_0,y)^\lambda B(x_1,y)^{1-\lambda}, \qquad 0 \le \lambda \le 1, x_0, x_1 > 0,$$

pero esto es consecuencia de la desigualdad de Hölder. □

Note que de este teorema se deduce la simetría $B(x,y) = B(y,x)$, que también es inmediata de la definición inicial, haciendo el cambio de variable $t = 1 - s$. Por otra parte, el cambio de variable $t = (\sin\theta)^2$ produce la integral

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta.$$

La elección $x = y = 1/2$ da el valor

$$\Gamma(1/2)^2 = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi, \qquad \text{es decir} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Note que la ecuación funcional determina los valores

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

empleando inducción sobre n. Además, el cambio de variable $s = t^2$ en la integral de la función Gamma produce la fórmula

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds, \qquad x > 0.$$

De esta forma recuperamos la identidad

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

dada en los Ejercicios 8.4.1 y 8.7.8 por otros métodos.

Terminamos este proyecto con el comportamiento en infinito de la función Gamma, resultado que extiende la fórmula de Stirling sobre la función factorial. Existen varias demostraciones en la literatura. Incluimos el siguiente argumento tomado de [88].

Teorema 13.12 (La fórmula de Stirling)**.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1. \tag{13.40}$$

Demostración. La idea de la demostración es aplicar cambios de variable adecuados a la integral que define a Γ para obtener el límite requerido. Para ello emplearemos algunas funciones. Sea

$$g(\xi) := \xi - \ln(\xi+1), \qquad \xi > -1.$$

Como $g'(\xi) = \xi/(1+\xi)$ y $g''(\xi) = 1/(1+\xi)^2 > 0$, g es convexa en $(-1,+\infty)$ y alcanza un mínimo en $x = 0$. Además $\lim_{\xi\to 1^-} g(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} g(\xi) = +\infty$.

Considere ahora $v : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $v(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)g(\xi)^{1/2}$. Aquí $\operatorname{sgn}(x)$ denota la función signo dada por $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$. La función v es biyectiva y posee una inversa $f : \mathbb{R} \to (-1,+\infty)$. Note que $g(f(u)) = u^2$ y por tanto $f'(u) = 2u/g'(f(u)) = 2u(1 + 1/f(u))$. Finalmente, definimos la función

$$y(v) = \frac{v}{f(v)}, \qquad v \neq 0.$$

Como f es continua, aplicando la expansión de Taylor del logaritmo obtenemos

$$\lim_{v\to 0} y(v) = \lim_{v\to 0} \frac{v}{f(v)} = \lim_{\xi\to 0} \frac{\sqrt{\xi - \ln(1+\xi)}}{|\xi|} = \lim_{\xi\to 0} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\xi^{n-2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De esta forma $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se extiende de manera continua al origen poniendo $y(0) = \sqrt{2}/2$. Como f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y $f(0) = 0$ se sigue de la definición de $y(v)$ que

$$0 < y(v) \leq C(1 + |v|), \qquad v \in \mathbb{R},$$

para cierta constante $C > 0$.

Para establecer (13.40) consideramos los cambios de variable $t = x(\xi+1)$ y $\xi = f(u/\sqrt{x})$ para obtener

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \frac{x^{x+1}}{e^x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-xg(\xi)} d\xi \\
&= \frac{x^{x+1}}{e^x} \sqrt{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{f(u/\sqrt{x})}\right) e^{-u^2} du \\
&= \frac{x^{x+1}}{e^x} \sqrt{x} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(y(u/\sqrt{x}) + u/\sqrt{x}\right) e^{-u^2} du.
\end{aligned}$$

Separando esta integral sobre $(-\infty, 0)$ y $(0,+\infty)$, luego de simplificar llegamos a la expresión

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} 2\left(y\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) + y\left(-\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right) e^{-u^2} du.$$

Para concluir la demostración debemos justificar el valor

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} 2\left(y\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)+y\left(-\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right)e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty} 4y(0)e^{-u^2}du = \sqrt{2\pi}.$$

Considere la función auxiliar

$$\omega(r) = \sup_{|v|\le r}|y(v)-y(0)|, \qquad r>0$$

que satisface $\omega(r)\to 0$ si $r\to 0^+$ gracias a la continuidad de y. Si $x>1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty}\left(y\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)+y\left(-\frac{u}{\sqrt{x}}\right)-2y(0)\right)e^{-u^2}du\right| \\
&\le \int_{\sqrt[4]{x}}^{+\infty}\left(2C\left(\frac{u}{\sqrt{x}}+1\right)+\sqrt{2}\right)e^{-u^2}du + \int_0^{\sqrt[4]{x}} 2\omega\left(1/\sqrt[4]{x}\right)e^{-u^2}du \\
&\le \int_{\sqrt[4]{x}}^{+\infty}\left(4C+\sqrt{2}\right)ue^{-u^2}du + \sqrt{\pi}\omega\left(1/\sqrt[4]{x}\right),
\end{aligned}$$

y esta expresión tiende a 0 cuando $x\to+\infty$ como era requerido. □

Ejercicios

13.3.1 Demostrar que

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x>0.$$

13.3.2 Justificar la fórmula (13.39) y más generalmente que

$$\Gamma^{(m)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln x)^m e^{-t}dt, \qquad x>0, m\in\mathbb{N}.$$

13.3.3 Comprobar los valores

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt = -\int_0^1 \ln(t)e^{-t}dt, \qquad \int_1^{+\infty}\ln(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{t}$$

para mostrar que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Indicación: integración por partes.

13.3.4 Emplear la función Beta para demostrar que

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1+y) \le \Gamma(1+x+y), \qquad x,y>0,$$

escribiendo el cociente correspondiente como $xB(x,1+y)$.

13.3.5 Demostrar las siguientes identidades:

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-t^a}dt = \frac{\Gamma(1/a)}{a}, \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{s^{a-1}}{(1+s)^{a+b}}ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

$$b)\ \int_0^{1} \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{\Gamma(m/n)\sqrt{\pi}}{n\Gamma(m/n+1/2)}, \qquad d)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

donde $a, b > 0$, $0 < x < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}^+$.

13.3.6 Aplicar el Teorema 13.8 para demostrar la fórmula de duplicación de Legendre

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

13.3.7 Integrar sucesivamente por partes para mostrar que

$$h_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Usar el Teorema de Tannery para integrales, Ejemplo 9.3.7 para demostrar directamente que $h_n(x) \to \Gamma(x)$ si $n \to +\infty$. Indicación: Acotar el integrando aplicando la desigualdad $e^s \geq 1 + s$ con $s = -t/n$. Luego considere los casos en que n es par o impar.

13.3.8 *a*) Considere $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Expresar el coeficiente binomial en términos de Γ a través de la fórmula

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(-\alpha+n)}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Emplear el límite de Gauss para mostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n\binom{\alpha}{n}n^{\alpha+1} = \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}$. Luego aplicar el criterio de paso al límite para concluir que $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ converge si y solo si $\alpha > 0$.

b) Emplear la identidad (9.11) para demostrar que

$$(1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k = \binom{\alpha}{n}x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+1}{k}x^k.$$

Aplicar esto para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ converge si y solo si $\alpha > -1$. Además $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ converge si y solo si $\alpha > 0$.

Capítulo 14

Sobre espacios de funciones

Este capítulo trata brevemente algunas propiedades de distintos espacios de funciones. En el primer proyecto introducimos los espacios con producto interno. Estos a su vez dan lugar a ejemplos de espacios vectoriales normados como es el caso de los espacios euclídeos. El resultado principal es la caracterización de espacios normados que provienen de productos internos, mediante el uso de la identidad de polarización. El segundo proyecto, de índole más geométrica, trata la noción de longitud de curva para curvas en el espacio euclídeo y a su vez desarrolla la teoría de funciones de variación acotada. Para el caso de una dimensión se incluye el Teorema de Jordan que caracteriza a las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada como aquellas que son diferencia de dos funciones monótonas crecientes. La sección también incluye una discusión geométrica de π y de cómo depende de la norma empleada en $\mathbb{R}^2$. Finalmente, el tercer proyecto discute el Teorema de Stone que extiende de manera natural el Teorema de aproximación de Weierstrass, reemplazando el álgebra de polinomios $\mathbb{R}[x]|_{[a,b]}$ por álgebras $\mathcal{A}$ más generales. El resultado consiste en dar condiciones necesarias y suficientes sobre $\mathcal{A}$ para determinar cuándo es densa en el espacio de funciones continuas $C^0(X)$, donde (X, d) es un espacio métrico compacto.

14.1. Espacios con producto interno

La situación descrita en la Sección 2.1 para el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es un caso particular de espacios vectoriales dotados de un producto interno. En este proyecto exploramos algunas propiedades sobre estos espacios, incluyendo una caracterización para decidir cuándo un espacio normado proviene de un producto interno.

Definición 14.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *producto interno* sobre E es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface:

- (Positividad) $\langle v, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in E$, y $\langle v, v\rangle = 0$ si y solo si $v = 0$.
- (Simetría) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, para todo $v, w \in E$.

- (Bilinealidad) $\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha \langle v, u\rangle + \beta \langle w, u\rangle$, para todo $u, v, w \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La pareja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se denomina un *espacio con producto interno*. Note que aunque requerimos bilinealidad, solo la enunciamos para la primera componente dada la simetría del producto.

En esta situación, todo producto interno sobre E induce una norma a través de la fórmula

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{14.1}$$

El lector atento notará que la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, Proposición 2.1 es válida también en este contexto.

Proposición 14.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \qquad \textit{para todo } v, w \in E.$$

La igualdad es válida si y solo si v es múltiplo de w (son linealmente dependientes).

Una aplicación inmediata de este resultado es establecer la continuidad de la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$. En efecto, si $v_n \to v$ y $w_n \to w$ cuando $n \to +\infty$, tenemos que

$$|\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| = |\langle v_n - v, w_n\rangle + \langle v, w_n - w\rangle| \leq \|v_n - v\| \cdot \|w_n\| + \|w_n - v\| \cdot \|v\|.$$

El mismo argumento dado en la demostración de la Proposición 4.2 (3) muestra que $\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle$ si $n \to +\infty$.

En el contexto de espacios con producto interno podemos hablar de ortogonalidad. Decimos que $v, w \in E$ son *ortogonales* si $\langle v, w\rangle = 0$. En este caso, el *Teorema de Pitágoras* asegura que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

y se deduce de la expansión $\langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.

Este tipo de normas no son arbitrarias porque satisfacen la llamada

$$\textbf{(Ley del paralelogramo)} \quad 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2, \quad v, w \in E. \tag{14.2}$$

Esta identidad se sigue de expandir

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle + \langle v - w, v - w\rangle$$

y luego simplificar. Por otra parte, cambiando los signos, podemos recuperar el producto interno en términos de la norma. En efecto, es inmediato comprobar la

$$\textbf{(Identidad de polarización)} \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2), \quad v, w \in E. \tag{14.3}$$

Así como es posible describir condiciones sobre una métrica para determinar si esta proviene de una norma, Ejercicio 2.1.4, la ley del paralelogramo determina una condición sobre una norma para decidir cuándo esta proviene de un producto interno. Este resultado fue dado por P. Jordan y J. von Neumann en 1935 [71].

Proposición 14.2. *Un espacio vectorial normado* $(E, \|\cdot\|)$ *se obtiene a partir de un producto interno si y solo si satisface la ley del paralelogramo (14.2).*

Demostración. Ya hemos mostrado que (14.2) es válida para espacios con producto interno. Recíprocamente, si una norma satisface esta relación, veamos que la fórmula (14.3) dada por la identidad de polarización define un producto interno.

Para comenzar, note que al tomar $v = w$ vemos que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, en coherencia con (14.1). El resto de la demostración la dividimos en pasos:

1. (Simetría). En efecto, la igualdad $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ se sigue usando la homogeneidad de la norma $\|\cdot\|$.

2. (Aditividad en la primera componente) Para mostrar que $\langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$, note que de (14.2) se deduce que

$$\begin{aligned}\|v + w + u\|^2 &= 2\|v + u\|^2 + 2\|w\|^2 - \|v - w + u\|^2,\\ \|v + w + u\|^2 &= 2\|w + u\|^2 + 2\|v\|^2 - \|w - v + u\|^2.\end{aligned}$$

   Así, tomando el promedio de las últimas dos igualdades vemos que

$$\|v+w+u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v+u\|^2 + \|w+u\|^2 - \frac{1}{2}\|v-w+u\|^2 - \frac{1}{2}\|w-v+u\|^2.$$

   Cambiando u por $-u$ en la última ecuación tenemos también la igualdad

$$\|v+w-u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v-u\|^2 + \|w-u\|^2 - \frac{1}{2}\|v-w-u\|^2 - \frac{1}{2}\|w-v-u\|^2.$$

   Finalmente se sigue de las dos últimas igualdades que

$$\begin{aligned}\langle v + w, u\rangle &= \frac{1}{4}(\|v + w + u\|^2 - \|v + w - u\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|v + u\|^2 + \|w + u\|^2 - \|v - u\|^2 - \|w - u\|^2)\\ &= \langle v, w\rangle + \langle w, u\rangle\,,\end{aligned}$$

   como era requerido

3. (Continuidad) La aplicación $E \times E \to E$ dada por $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ es continua porque la norma, la suma y resta en el espacio E son aplicaciones continuas.

4. (Producto por escalar en la primera componente) Veamos que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$, para todo $v, w \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = n \in \mathbb{N}$ esta igualdad se demuestra usando la aditividad en la primea componente e inducción sobre n. Si $\lambda \in \mathbb{Z}$ y $\lambda = -n < 0$ entonces la igualdad se sigue de $\langle -nv, w\rangle + n\langle v, w\rangle = \langle -nv, w\rangle + \langle nv, w\rangle = \langle (-n+n)v, w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0$.

   Si $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$ note que por los casos anteriores $q\left\langle \frac{p}{q}v, w\right\rangle = \langle pv, w\rangle = p\langle v, w\rangle$ de donde se sigue el resultado. Finalmente si $\lambda \in \mathbb{R}$ tome una sucesión $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ si $n \to +\infty$. Se sigue de la continuidad de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ que

$$\langle \lambda v, w\rangle = \left\langle \lim_{n\to+\infty} \lambda_n v, w\right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle \lambda_n v, w\rangle = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \langle v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle,$$

   argumento que demuestra la igualdad requerida para el caso general.

Es claro entonces que la fórmula dada por (14.3) define un producto interno. Esto concluye la demostración. □

Finalizamos con una propiedad geométrica que comparten los espacios con producto interno que son completos (respecto a la norma (14.1) en relación con la distancia entre un punto y un conjunto, como en el Ejemplo 6.4.6.

Proposición 14.3. *Sea $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y suponga que es completo. Si $v \in E$ y $A \subseteq E$ es cerrado y convexo, existe un único $w_0 \in A$ tal que*

$$\operatorname{dist}(v, A) = \|v - w_0\|.$$

Demostración. Como $\alpha = \operatorname{dist}(v, A) = \operatorname{ínf}_{w\in A} \|v - w\|$, existe una sucesión $w_n \in A$ tal que $\|v - w_n\| \to \alpha$ si $n \to +\infty$ (recuerde la Proposición 2.7). Aplicando la ley del paralelogramo a $v - w_n$ y $v - w_m$ obtenemos

$$\|2v - w_n - w_m\|^2 + \|w_m - w_n\|^2 = 2(\|v - w_n\|^2 + \|v - w_m\|^2).$$

Como A es convexo, $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in A$ y por tanto

$$\begin{aligned}\|w_n - w_m\|^2 &= 2(\|v - w_n\|^2 + \|v - w_m\|^2) - 4\left\|v - \frac{1}{2}(w_n + w_m)\right\|^2 \\ &\le 2(\|v - w_n\|^2 + \|v - w_m\|^2) - 4\cdot \operatorname{dist}(v, A)^2. \qquad (14.4)\end{aligned}$$

Se sigue de esta desigualdad que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E. Como este espacio es completo, existe $w' \in E$ tal que $w_n \to w'$ y como A es cerrado deducimos que $w' \in A$. Por tanto,

$$\|v - w'\| = \lim_{n\to+\infty} \|v - w_n\| = \alpha$$

como se requería. Para demostrar la unicidad, si $w', u \in A$ son tales que $\|v - w'\| = \|v - u\| = \alpha$, se sigue de la desigualdad (14.4) aplicada a $w_n = w'$ y $w_m = u$ que $\|w' - u\| \le 0$, es decir, $w' = u$. □

La proposición anterior es válida para el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. En este caso es claro que si A es cerrado pero no convexo, el punto w' no tiene por qué ser único. Considere por ejemplo $v = (0,0)$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Aquí $\operatorname{dist}(v, A) = 1$ se alcanza en todo punto de A.

Ejercicios

14.1.1 Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces

$$\|v + w\| \cdot \|v - w\| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2, \qquad \text{para todo } v, w \in E.$$

14.1.2 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada. Recuerde que su transpuesta se define por $A^t = (a_{ji})_{i,j=1,\dots,n}$ y su traza es $\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$. Comprobar que la aplicación $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$ define un producto interno sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$.

14.1.3 Mostrar que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ proviene de un producto interno si y solo si $p = 2$.

14.1.4 Sea $E = C^0[a,b]$ el espacio de funciones continuas sobre dicho intervalo. Si $p \geq 1$ y $f \in E$, defina

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Demostrar que $\|\cdot\|_p$ es una norma y que proviene de un producto interno si y solo si $p = 2$. En efecto,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

define un producto interno sobre E. Indicación: usar las mismas ideas que en la demostración de la desigualdad de Minkowski, Proposición 2.2. Para la segunda parte, si $[a,b] = [0,1]$ tome $f(t) = \frac{1}{2} - t$ y $g(t) = \frac{1}{2} - t$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $g(t) = t - \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, en (14.2).

14.1.5 (Desigualdad de Ptolomeo) En un espacio con producto interno $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es válida la desigualdad

$$\|v - z\| \cdot \|u - w\| \leq \|v - u\| \cdot \|z - w\| + \|v - w\| \cdot \|z - u\|, \qquad u, v, w, z \in E.$$

Interpretar geométricamente para el caso $E = \mathbb{R}^2$. Para demostrarla, hacerlo primero en el caso $\dim E = 2$, interpretando los vectores como números complejos. Para espacios de dimensión 3, reducir la desigualdad al caso planar rotando z a z' sobre el plano que determina u, v, w de forma que $\|z - w\| = \|z' - w\|$, $\|z - u\| = \|z' - u\|$ y $\|v - z'\| \geq \|v - z\|$, ver la Figura 14.1. Finalmente deducir el caso general del caso tridimensional. Estos argumentos son tomados de [9].

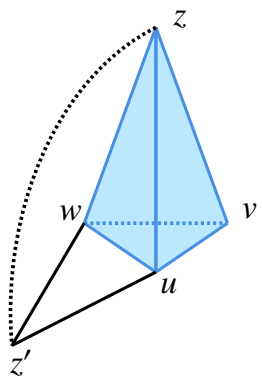

Figura 14.1: Rotar uno de los ejes para emplear el caso planar.

Nota 14.1.1. Schoenberg demostró en 1952 que todo espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$ proviene de un producto interno si y solo si la desigualdad de Ptolomeo es válida para todo $u, v, w, z \in E$, ver [120].

14.2. Longitud de curvas y funciones de variación acotada

El objetivo de este proyecto es introducir las nociones de curvas rectificables y de funciones de variación acotada. La idea intuitiva es intentar asociar una longitud finita a una curva a través de aproximaciones poligonales. Estudiaremos las principales propiedades de estos conceptos, incluidos el teorema de descomposición de Jordan que caracteriza ser de variación acotada y fórmulas para calcular la longitud cuando la curva es suficientemente regular. Finalmente, se discutirá el significado de π como longitud de circunferencias en el espacio euclídeo y sus variaciones en las p-normas. Destacamos también la constante de la lemniscata desarrollada en el Ejercicio 14.2.5.

Definición 14.2. Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es *rectificable* si existe una constante $M > 0$ tal que para toda partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ se verifica que

$$v(\gamma, P) := \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \leq M.$$

En otras palabras, esto equivale a que la *variación total de* γ, definida por

$$V(\gamma) = \sup_P v(\gamma, P),$$

sea un valor finito. Note que este supremo se toma sobre todas las particiones P de $[a, b]$. Cuando queramos hacer explícito el intervalo escribiremos $V(\gamma) = V_{[a,b]}(\gamma)$. Geométricamente la cantidad $v(\gamma, P)$ mide la longitud de la aproximación poligonal de γ formada por los segmentos de recta de $\gamma(t_j)$ a $\gamma(t_{j-1})$, ver Figura 14.2. Por tanto, en caso de ser finita, $V(\gamma)$ se puede interpretar como la *longitud de* γ.

En el caso de dimensión uno ($d = 1$), una curva es una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. En este caso, si $V(f)$ es finito se suele decir también que f es de *variación acotada*. Denotaremos al espacio de tales funciones por $BV[a, b]$.

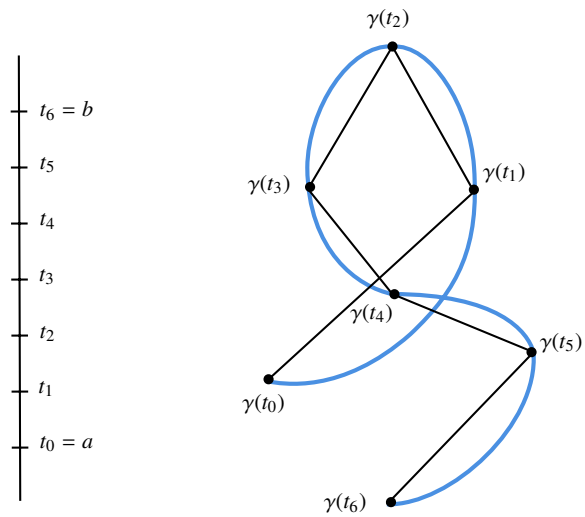

Figura 14.2: Aproximación poligonal de una curva.

Ser rectificable es una propiedad que se puede comprobar componente a componente. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 14.4. *Una curva $\gamma = (f_1, \dots, f_d) : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es rectificable si y solo si $f_1, \dots, f_d \in BV[a, b]$.*

Demostración. Si γ es rectificable, como $|f_k(t_j) - f_k(t_{j-1})| \leq \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2$, se sigue que $\nu(f_k, P) \leq \nu(\gamma, P)$ y así $V(f_k) \leq V(\gamma)$, para todo $k = 1, \dots, d$. Recíprocamente, suponga que cada f_k es de variación acotada. Como $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ (Ejercicio 8.6.1 o comprobación directa), se sigue que

$$\nu(\gamma, P) \leq \sum_{k=1}^{d} \nu(f_k, P), \qquad \text{y así} \quad V(\gamma) \leq \sum_{k=1}^{d} V(f_k).$$

Por tanto, γ es rectificable. □

Ejemplo 14.2.1. Si $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^d$ es rectificable, aplicando la definición con la partición $P = \{a, b\}$ vemos que

$$V(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2.$$

Esto permite deducir que un segmento de recta en $\mathbb{R}^d$ es la curva con longitud mínima que une a dos puntos.

Ejemplo 14.2.2. Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada es acotada en $[a, b]$. Si $a \leq x \leq b$, note que

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|.$$

Comparando la variación total de f con su variación respecto a la partición $P = \{a, x, b\}$, concluimos que

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V(f).$$

De la misma forma, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es rectificable, entonces $\|\gamma(t)\|_2$ permanece acotado, porque cada componente es acotada. Por otra parte, si $V_{[a,b]}(\gamma) = 0$, entonces $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es constante. En efecto,

$$0 \leq \|\gamma(x) - \gamma(a)\|_2 + \|\gamma(b) - \gamma(x)\|_2 \leq V_{[a,b]}(\gamma),$$

de donde se sigue que $\gamma(a) = \gamma(x) = \gamma(b)$, para todo $x \in [a, b]$.

Ejemplo 14.2.3. Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es de variación acotada. En efecto, suponga que f es monótona creciente. Entonces para cualquier partición P de $[a, b]$ tenemos que

$$\nu(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) - f(t_{j-1}) = f(b) - f(a), \qquad \text{y así } V(f) = f(b) - f(a).$$

Si f fuese monótona decreciente, entonces $V(f) = f(a) - f(b)$. En cualquier caso, vemos que $V(f) = |f(b) - f(a)|$.

Ejemplo 14.2.4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y es diferenciable en (a, b) de forma que f' es acotada allí, digamos $|f'(t)| \leq M$, si $t \in (a, b)$, entonces $f \in BV[a, b]$. En efecto, por el Teorema del valor medio, Corolario 7.1, podemos escribir

$$\nu(f, P) = \sum_{j=1}^{n} |f'(s_j)|(t_j - t_{j-1}) \leq M \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) = M(b - a),$$

para ciertos $s_j \in (t_{j-1}, t_j)$. De esta forma concluimos que $V(f) \leq M(b - a)$.

Esta misma situación es válida para curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ cuya derivada sea acotada. Podemos repetir el argumento, pero esta vez empleando la desigualdad de valor medio para curvas, Proposición 7.2.

Ejemplo 14.2.5. Un ejemplo de curva no rectificable es la gráfica de la función f del Ejemplo 7.1.2. Más precisamente, la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(0) = (0, 0), \qquad \gamma(t) = (t, t \sin(1/t)),\ 0 < t < 1.$$

Por la Proposición 14.4 basta argumentar por qué f no es de variación acotada en $[0, \frac{2}{\pi}]$. Para ello considere la partición $P_n = \{0, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0\}$, donde $t_j =$

$1/\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)$. Como $f(t_j) = t_j \sin(t_j) = (-1)^j t_j$ y $|f(t_j) - f(t_{j-1})| = t_j + t_{j-1}$ vemos que

$$\nu(f, P_n) = t_n + (t_n + t_{n-1}) + \cdots + (t_1 + t_0) = t_0 + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + j\pi} \geq t_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}.$$

Si $n \to +\infty$ vemos que $\nu(f, P_n) \to +\infty$, dada la divergencia de la serie armónica $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j$. Note que la curva γ es continua en su dominio, pero no es diferenciable para $t = 0$. Por otra parte, la restricción $\gamma|_{[a,2/\pi]}$ sí es rectificable para todo $0 < a < 2/\pi$ dado que allí es continuamente diferenciable.

Presentamos ahora algunas propiedades sobre la variación total, que reflejan su similitud con propiedades de la integral de Riemann.

Proposición 14.5. *Considere una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ rectificable. Las siguientes propiedades son válidas:*

1. *$\gamma|_{[c,d]} : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ es rectificable, para todo intervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$.*
2. *Si $c \in [a, b]$, entonces $V_{[a,c]}(\gamma) + V_{[c,b]}(\gamma) = V_{[a,b]}(\gamma)$.*
3. *La función $V_{[a,\cdot]}(\gamma) : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente. Además, en dimensión uno, si $\gamma = f$, entonces $f - V_{[a,\cdot]}(f)$ es monótona creciente.*

Demostración. (1) Si Q es una partición de $[c, d]$, $P = Q \cup \{a, b\}$ es una partición de $[a, b]$. Como $\nu(\gamma, P) = \nu(\gamma, Q) + \|\gamma(c) - \gamma(a)\|_2 + \|\gamma(b) - \gamma(d)\|_2$, se sigue que

$$V_{[c,d]}(\gamma|_{[c,d]}) \leq V_{[a,b]}(\gamma) - \|\gamma(c) - \gamma(a)\|_2 - \|\gamma(b) - \gamma(d)\|_2$$

y por tanto la restricción de la curva es rectificable.

(2) Si P_1 y P_2 son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, entonces $P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ y $\nu(\gamma|_{[a,c]}, P_1) + \nu(\gamma|_{[c,b]}, P_2) = \nu(\gamma, P_1 \cup P_2) \leq V_{[a,b]}(\gamma)$. Tomando supremos se sigue que

$$V_{[a,c]}(\gamma) + V_{[c,b]}(\gamma) \leq V_{[a,b]}(\gamma).$$

Para la desigualdad restante, note que si P es una partición de $[a, b]$, entonces $P' = P \cup \{c\}$ es otra partición de $[a, b]$ que se puede escribir como la unión $P_1 \cup P_2$, donde P_1 y P_2 son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Como

$$\nu(\gamma, P) \leq \nu(\gamma, P') = \nu(\gamma|_{[a,c]}, P_1) + \nu(\gamma|_{[c,b]}, P_2) \leq V_{[a,c]}(\gamma) + V_{[c,b]}(\gamma),$$

tomando el supremo sobre P se sigue el resultado.

(3) Finalmente, si $x < y$, entonces $V_{[a,y]}(\gamma) = V_{[a,x]}(\gamma) + V_{[x,y]}(\gamma) \geq V_{[a,x]}(\gamma)$, porque la variación total de una curva es un número mayor o igual a cero. Para el caso de dimensión uno, si $v(x) = f(x) - V_{[a,x]}(f)$, como $f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq V_{[x,y]}(f)$ obtenemos que

$$v(y) - v(x) = V_{[x,y]}(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0,$$

como se requería. □

Para el caso de una variable obtenemos así la siguiente caracterización.

Teorema 14.1 (Jordan). *$f \in BV[a,b]$ si y solo si $f = u - v$, donde $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones monótonas crecientes.*

Demostración. Si $f \in BV[a,b]$, gracias a la proposición anterior podemos tomar $u(t) = V_{[a,t]}(f)$ y $v(t) = f(t) - u(t)$. El recíproco se sigue del Ejemplo 14.2.3 y del Ejercicio 14.2.2. □

En general, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ es rectificable, la función

$$s_\gamma(t) = V_{[a,t]}(\gamma)$$

mide la longitud de curva de γ y se conoce como la *longitud de arco de* γ. Para $t = a$ se define $s_\gamma(a) = 0$. Por la Proposición 14.5(3), esta función es monótona creciente. Si la curva es continua, entonces esta función de longitud también resulta ser continua.

Proposición 14.6. *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ es continua, entonces la función longitud de arco $s_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Por el Teorema 6.8, $s_\gamma(c^+)$ y $s_\gamma(c^-)$ existen para todo $c \in [a,b]$. Veamos que $\lim_{t\to c^+} s_\gamma(c) = s_\gamma(c^+)$. Dado $\epsilon > 0$, por continuidad de la curva, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - c| < \delta$, entonces $\|\gamma(t) - \gamma(c)\|_2 < \epsilon/2$. Ahora, por la definición de $V_{[c,b]}(\gamma)$, existe una partición $P = \{c, t_1, \ldots, t_n = b\}$ de $[c,b]$ tal que

$$V_{[c,b]}(\gamma) - \frac{\epsilon}{2} \leq \nu(\gamma|_{[c,b]}, P).$$

Si tomamos una partición más fina $P' \supseteq P$, entonces $V_{[c,b]}(\gamma) - \frac{\epsilon}{2} \leq \nu(\gamma|_{[c,b]}, P')$. Por tanto, podemos suponer que $0 < t_1 - c < \delta$. De esta forma obtenemos que

$$V_{[c,b]}(\gamma) - \frac{\epsilon}{2} \leq \|\gamma(t_1) - \gamma(c)\|_2 + V_{[t_1,b]}(\gamma) < \frac{\epsilon}{2} + V_{[t_1,b]}(\gamma).$$

Finalmente, concluimos que si $0 < t_1 - c < \delta$, entonces

$$0 \leq s_\gamma(t_1) - s_\gamma(c) = V_{[c,t_1]}(\gamma) = V_{[c,b]}(\gamma) - V_{[t_1,b]}(\gamma) < \epsilon,$$

como se requería. Para demostrar la validez del límite por izquierda, basta aplicar el mismo argumento sobre la curva $\gamma|_{[a,c]}$. Los límites en los extremos del intervalo se demuestran de la misma forma. □

Para el caso de curvas con derivada continua podemos calcular su longitud a través de la siguiente fórmula.

Proposición 14.7. *Cada curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ de clase C^1 es rectificable y*

$$V(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Demostración. La curva es rectificable gracias al Ejemplo 14.2.4 y la integral dada es finita porque γ' es una función continua. Para comenzar, note que dada cualquier partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, se verifica que

$$\nu(\gamma, P) = \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|\gamma'(t)\right\|_2 dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt,$$

y por tanto $V(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$. Para la primera igualdad hemos utilizado el Teorema Fundamental del Cálculo en cada componente de γ, mientras que la segunda desigualdad se sigue del Ejercicio 8.6.7.

Ahora, dado $\epsilon > 0$, como γ' es continua en $[a, b]$ y por tanto uniformemente continua por la compacidad del intervalo, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, entonces $\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\|_2 < \epsilon' = \epsilon/2(b - a)$. Si P es una partición como antes tal que $\|P\| < \delta$ y $t \in [t_{j-1}, t_j]$ vemos que $\|\gamma'(t)\|_2 \leq \|\gamma'(t_j)\|_2 + \epsilon'$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|\gamma'(t)\right\|_2 dt &\leq (t_j - t_{j-1})\|\gamma'(t_j)\| + \epsilon'(t_j - t_{j-1}) \\
&= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) - \gamma'(t_j) - \gamma'(t)\, dt \right\|_2 + \epsilon'(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right\|_2 + 2\epsilon'(t_j - t_{j-1}) = \left\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right\|_2 + 2\epsilon'(t_j - t_{j-1}).
\end{aligned}$$

Al sumar sobre $j = 1, \ldots, n$ concluimos que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \leq \nu(\gamma, P) + 2\epsilon'(b - a) \leq V(\gamma) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se sigue que $\int_a^b \|\gamma'(s)\|_2 ds \leq V(\gamma)$ como se quería demostrar. □

En el caso en que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ sea de clase C^1 a trozos, es decir, que lo sea salvo un número finito de puntos del intervalo de definición, su función longitud de curva se puede calcular como

$$s_\gamma(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\|_2 ds.$$

En este caso, s_γ es diferenciable, $s_\gamma(a) = 0$ y $s'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|_2$. Otra ventaja de esta fórmula es que permite demostrar que la longitud total es invariante si cambiamos la parametrización de la curva. Más precisamente, si $l : [c, d] \to [a, b]$ es una función biyectiva, de clase C^1 y estrictamente creciente, entonces $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^d$, $\sigma(\tau) =$

$\gamma(l(\tau))$ define otra curva con el mismo trazo que γ. Como $\sigma'(\tau) = l'(\tau) \cdot \gamma'(l(\tau))$ y $l'(\tau) > 0$, vemos que

$$V(\sigma) = \int_c^d \|\sigma'(\tau)\|_2 d\tau = \int_c^d \|\gamma'(l(\tau))\|_2 l'(\tau) d\tau = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = V(\gamma),$$

aplicando el cambio de variable $t = l(\tau)$.

Ejemplo 14.2.6. Un ejemplo familiar de Cálculo es encontrar la longitud del gráfico de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1. En este caso, tal gráfica se parametriza por $\gamma(t) = (t, f(t))$ y por tanto su longitud total está dada por

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Para curvas $r = g(\theta)$ en coordenadas polares, con $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ es decir, parametrizadas como $\gamma(\theta) = (g(\theta)\cos(\theta), g(\theta)\sin(\theta))$, la proposición anterior indica que su longitud está dada por

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta.$$

Ejemplo 14.2.7. Considere la curva $C(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ que parametriza un círculo con centro en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$. Su longitud de curva está dada por

$$s_\gamma(t) = \int_0^t \|\gamma'(s)\|_2 ds = \int_0^t r ds = rt.$$

Por supuesto, si admitimos $t > 2\pi$ la fórmula es válida, solo que γ se enrollará más de una vez sobre si misma. En particular, este ejemplo muestra que π corresponde al cociente

$$\pi = \frac{V(C)}{2r}$$

de la longitud de un círculo sobre su diámetro. Para el caso del círculo unitario, otra posible expresión es $\gamma(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$, con $0 \leq x \leq 1$, que parametriza el arco en el semiplano superior. En este caso

$$s_\gamma(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x),$$

cuya inversa es la función seno. Algunas propiedades de esta función se discutieron en el Ejercicio 8.7.6. En particular, $s_\gamma(1) = \pi/2$ como se esperaba.

El lector atento notará que el desarrollo de este proyecto se ha hecho con la métrica euclídea, pero que todas las definiciones y demostraciones son válidas para cualquier otra norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^d$. En efecto, solo se ha empleado el hecho que $\|\cdot\|_2$ es una norma. Por tanto, tiene sentido hablar de $\pi_{\|\cdot\|}$ en otros contextos. Finalizamos así con el siguiente ejemplo sobre π para las p-normas. Los argumentos requerirán algunas propiedades de las funciones Gamma ($\Gamma(x)$), Beta ($B(x, y)$) y digamma ($\psi(x)$) dadas en el Proyecto 13.3.

Ejemplo 14.2.8 (π en el espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$)**.** [5] Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la p-norma, $p \geq 1$. En este caso podemos definir π_p como el cociente entre la longitud de la curva $|x|^p + |y|^p = r^p$ y su diámetro d_r. Es inmediato comprobar que $d_r = \|(r,0) - (-r,0)\|_p = 2r$. Por otra parte, podemos parametrizar la curva en el primer cuadrante como $C_p(u) = (ru^{1/p}, r(1-u)^{1/p})$, con $u \in [0,1]$, cuya longitud viene dada por

$$\int_0^1 \|C'(u)\|_p du = \frac{r}{p}\int_0^1 (u^{1-p} + (1-u)^{1-p})^{1/p} du.$$

De esta manera obtenemos el valor

$$\begin{aligned}\pi_p = \frac{V(C_p)}{2r} &= \frac{1}{2r}\cdot\frac{4r}{p}\int_0^1 (u^{1-p} + (1-u)^{1-p})^{1/p} du \\ &= \frac{2}{p}\int_0^1 \frac{(u^{p-1} + (1-u)^{p-1})^{1/p}}{(u(1-u))^{\frac{p-1}{p}}} du.\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\pi_1 = 4$ y $\pi_2 = \pi$. Para este segundo caso, una parametrización equivalente es $(r|\cos(t)|^{1/2p}), r|\sin(t)|^{1/2p})$, con $t \in [0, \pi/2]$ que coincide con el cálculo del ejemplo anterior. Para el caso $p = +\infty$ la curva es un cuadrado de longitud $4(2r)$ y diámetro $d_r = 2r$, de donde $\pi_\infty = 4$. Otros valores se pueden aproximar numéricamente, por ejemplo

$$\pi_{1.2} \approx 3.572, \quad \pi_{1.8} \approx 3.155, \quad \pi_{2.25} \approx 3.155, \quad \pi_3 \approx 3.259, \quad \pi_{11} \approx 3.757.$$

Aunque en general no podemos determinar el valor exacto de π_p, sí es posible demostrar que $\pi_p \in [\pi, 4]$ y que esta función se minimiza exactamente cuando $p = 2$. Para ello consideramos la constante auxiliar

$$\Pi_p = \frac{2}{p}\int_0^1 \frac{u^{2(p-1)/p} + (1-u)^{2(p-1)/p}}{(u(1-u))^{\frac{p-1}{p}}} du = \frac{4}{p}\int_0^1 u^{(p-1)/p}(1-u)^{-(p-1)/p} du,$$

obtenida al reemplazar el numerador del integrando en π_p por $u^{2(p-1)/p} + (1-u)^{2(p-1)/p}$. Aplicando el Ejemplo 12.1.4 con $\alpha = p-1$ y $v = u/(1-u)$ obtenemos la desigualdad

$$u^{2(p-1)/p} + (1-u)^{2(p-1)/p} \leq (u^{p-1} + (1-u)^{p-1})^{1/p}, \qquad 0 \leq u \leq 1$$

y por tanto $\Pi_p \leq \pi_p$. La ventaja de Π_p es que se puede evaluar explícitamente a través de la función Beta $B(x,y)$ estudiada en el Proyecto 13.3. Empleando el Teorema 13.11 y la ecuación funcional de la función Gama, obtenemos el valor

$$\begin{aligned}\Pi_p = \frac{4}{p}B\left(2 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) &= \frac{4}{p}\frac{\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2 - \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

En particular, tenemos los valores $\Pi_1 = 4\Gamma(2)\Gamma(1) = 4$, $\Pi_2 = 4\Gamma(3/2)^2 = \pi$ y

$$\Pi_\infty = \lim_{p\to+\infty} \Pi_p = 4\Gamma(1)\Gamma(2) = 4,$$

dada la continuidad de Γ.

Para comprobar que Π_p alcanza un mínimo en $p = 2$ calculamos su derivada empleando la función $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ para escribir

$$\begin{aligned}\Pi_p' &= \frac{4}{p^2}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma'\left(2-\frac{1}{p}\right) - \Gamma'\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right)\right]\\ &= \frac{4}{p^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right)\left[\psi\left(2-\frac{1}{p}\right) - \psi\left(1+\frac{1}{p}\right)\right].\end{aligned}$$

Como $\Gamma(x) > 0$ y $\psi(x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$, Ejemplo 9.3.2, si $\Pi_p' = 0$ debemos tener que $2 - 1/p = 1 + 1/p$, es decir $p = 2$. Por las mismas razones, $\Pi_p' < 0$ si $p < 2$ y $\Pi_p' > 0$ si $p > 2$. Esto demuestra que Π_p es mínimo cuando $p = 2$.

Finalmente, como $\Pi_p \le \pi_p$, para todo $p \ge 1$ y además estos valores coinciden cuando $p = 1, 2$ y $+\infty$, que $p = 2$ sea el mínimo para Π_p, implica también que lo sea para π_p.

Nota 14.2.1. [135] Si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$ con disco unitario $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$ (cerrado, convexo y simétrico respecto al origen), S. Gołab demostró en 1932 que el valor $\pi_{\|\cdot\|}$ siempre satisface

$$3 \le \pi_{\|\cdot\|} \le 4.$$

De hecho, $\pi_{\|\cdot\|} = 3$ si y solo si K es un hexágono regular afín (la imagen de un hexágono regular bajo una transformación afín) y $\pi_{\|\cdot\|} = 4$ si y solo si K es un paralelogramo. Además, cualquier valor entre 3 y 4 se alcanza por alguna norma. El lector puede consultar el artículo [47] para un caso particular de este resultado y el libro [131] para el caso general.

Como ejemplo explícito de la última afirmación, considere la norma $\|\cdot\|_{K_t}$ inducida por K_t en la Figura 2.3 del Ejercicio 2.3.10. Ella satisface que $\pi_{K_t} = 3 + t$, $0 \le t \le 1$. En efecto, su diámetro es 2 y al ser su frontera poligonal, la longitud de la misma es la suma de sus lados. Así

$$\begin{aligned}\pi_{K_t} &= \frac{1}{2}\Big(2\|(1,0)-(t,1)\|_{K_t} + 2\|(t,1)-(-1,1)\|_{K_t} + 2\|(-1,1)-(-1,0)\|_{K_t}\Big)\\ &= \|(1-t,-1)\|_{K_t} + (t+1)\|(1,0)\|_{K_t} + \|(0,1)\|_{K_t}\\ &= 1 + (t+1)\cdot 1 + 1 = 3 + t.\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a que $(1,0)$, $(1-t,-1)$ y $(0,1)$ tienen norma uno por estar en la frontera de K_t.

Ejercicios

14.2.1 Determinar si las siguientes funciones y curvas son de variación acotada en $[0,1]$:

a) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$,

b) $g(x) = x^2 \cos(1/x^2)$, $g(0) = 0$,

c) $(x, \sin(\sin(1/x)))$,

d) $\gamma(t) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t)$, donde $\gamma_n(t)$ es como en la Figura 14.3. Cada segmento de γ_n tiene longitud $\frac{1}{3^n}$.

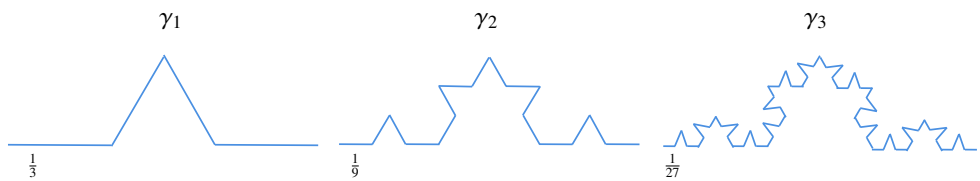

Figura 14.3: La curva de Koch es el límite γ.

Nota 14.2.2. Es posible demostrar que una función continua y de variación acotada sobre $[a, b]$ es diferenciable en todo el intervalo salvo por un conjunto de medida cero (Definición 8.6). La curva de Hilbert, Ejemplo 9.6.2 y la curva de Koch [134] son continuas pero no son diferenciables en ningún punto. Por tanto, no pueden ser rectificables. Para más información consultar [129].

14.2.2 Sean $f, g \in BV[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lambda \cdot f$, $f + g$ y $f \cdot g$ son elementos de $BV[a, b]$, comprobando que

$$V(\lambda\cdot f) = |\lambda|\cdot V(f), \;\; V(f+g) \leq V(f)+V(g), \;\; V(f\cdot g) \leq \|g\|_{[a,b]}V(f)+\|f\|_{[a,b]}V(g).$$

Por tanto, $BV[a, b]$ es un espacio vectorial. Además, la función

$$\|\cdot\|_V : BV[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \|f\|_V := \|f\|_{[a,b]} + V(f),$$

define una norma sobre $BV[a, b]$.

14.2.3 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Demostrar que si $V_{[a,x]}(f)$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, también lo es f en dicho punto. Mostrar además que el Teorema 14.1 se verifica para funciones continuas, tomando u y v monótonas crecientes y continuas.

14.2.4 Fije $a > 0$ y $b < 0$. La *espiral logarítmica* es la curva $\sigma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\sigma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)).$$

Esbozar la gráfica de esta curva y calcular la longitud de arco $s_\sigma(t)$. Mostrar que $\lim_{t\to+\infty} s(t)$ es finito. En este sentido, esta curva con dominio de longitud infinita tiene longitud finita.

14.2.5 (La constante de la lemniscata) Una *lemniscata* es el lugar geométrico de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que el producto de sus distancias r_1 y r_2 a dos puntos fijos es una constante c^2, ver Figura 14.4. Su nombre proviene del griego y significa "adornado con lazos".

a) Suponga que los puntos fijados son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Si $r^2 = x^2+y^2$, mostrar que la ecuación $r_1 r_2 = c^2$ toma la forma $r^4 + 2a^2r^2 + a^4 - 4a^2x^2 = c^2$. Normalizando las constantes de forma que $c = a$ y $2a^2 = 1$ concluir que (x, y) satisface

$$2x^2 = r^2 + r^4, \qquad 2y^2 = r^2 - r^4.$$

La forma de la ecuación implícita es $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ y en coordenadas polares $r^2 = \cos(2\theta)$.

b) Parametrizando por $0 \le r \le 1$, mostrar que la longitud de arco de la lemniscata en el primer cuadrante está dada por el valor

$$\frac{\varpi}{2} := \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Indicación: recuerde los Ejercicios 13.3.5(b) y 13.3.6.

c) Emplear la sustitución $r = \sin(\phi)$ y el Ejercicio 8.7.10 para comprobar que

$$\varpi = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1+\sin(\phi)^2}} = \frac{\pi}{M(1, \sqrt{2})},$$

se expresa en términos de la media aritmético-geométrica entre 1 y $\sqrt{2}$.

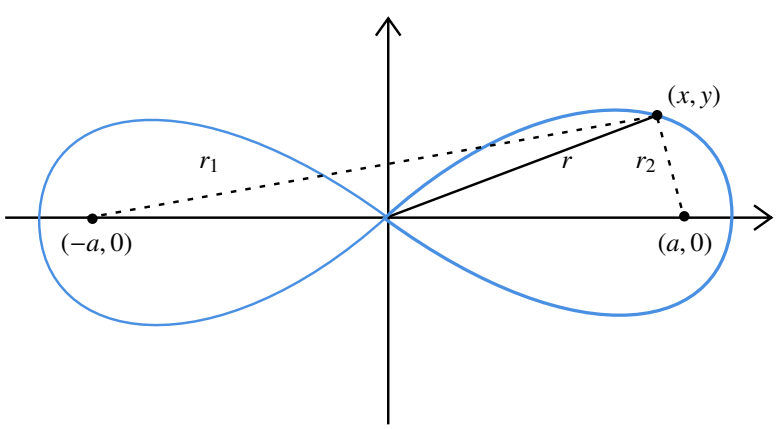

Figura 14.4: La construcción de la lemniscata.

Nota 14.2.3. Dada la simetría de la lemniscata respecto a los ejes coordenados, ϖ mide la longitud de una de sus hojas. Por tanto, este valor es a la lemniscata lo que es π al círculo. Su valor es aproximadamente

$$\varpi \approx 2.62205755429.$$

Para más de sus propiedades y cálculo numérico, ver [132]. Su analogía con π va más allá e incluso se pueden determinar los puntos sobre la lemniscata que son construibles con regla y compás, ver [110]. Finalmente, el estudio de la función inversa de longitud de arco de la lemniscata, en analogía con el caso del círculo en el Ejemplo 14.2.7, fue uno de los inicios de la teoría de las funciones elípticas. Para más información el lector puede consultar [124].

14.2.6 [47] Demostrar que $\pi_p = \pi_q$ si $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Indicación: aplicar la sustitución $u = 1 - x^p$ y la simetría del círculo unitario en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ para escribir

$$\pi_p = 4\int_0^{a_p} \left[1 + \left(\frac{x^p}{1-x^p}\right)^{p-1}\right]^{1/p} dx, \qquad \text{con } a_p = (1/2)^{1/p}.$$

Luego integre por partes para poner $\pi_p = 4(1 - I_p)$, donde

$$I_p = (p-1)\int_0^{a_p} \left[1 + \left(\frac{x^p}{1-x^p}\right)^{p-1}\right]^{1/p} \frac{x^{p(p-1)}}{(1-x^p)^p} dx.$$

Finalmente compruebe que la fórmula $\left(\frac{x^p}{1-x^p}\right)^{p-1} = \frac{y^q}{1-y^q}$ constituye una sustitución válida que establece la igualdad $I_p = I_q$. Otra demostración posible se puede consultar en [73].

14.3. El Teorema de Stone-Weierstrass

El objetivo de este proyecto es presentar la extensión dada por M. H. Stone (1903-1989) del Teorema de aproximación de Weierstrass 9.7. Este resultado trata sobre condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de funciones definidas sobre un espacio compacto (X, d) sea densa en el espacio de funciones continuas $C^0(X)$. Incluimos también el caso de funciones a valor complejo. Como ejemplo principal explicamos brevemente a los polinomios en varias variables y a los polinomios trigonométricos tanto reales como complejos.

Considere un conjunto $Y \neq \emptyset$ y el espacio de funciones acotadas $(C_b(Y), \|\cdot\|_Y)$, como se introdujo en la Sección 9.1. Como este espacio es cerrado bajo sumas, productos y productos por escalar nos podemos referir a él como un álgebra. Más concretamente tenemos la siguiente definición.

Definición 14.3. Una familia $\mathcal{A} \subseteq C_b(Y)$ se dice un *álgebra* si es cerrada bajo sumas, productos y productos por escalar, es decir, $f + g, f \cdot g, \alpha f \in \mathcal{A}$ para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice además que $\mathcal{A}$ es *uniformemente cerrada* si este conjunto es cerrado en $C_b(Y)$. En otras palabras, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $f_n \to f$ unif. en Y, entonces $f \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 14.3.1. El conjunto de polinomios $\mathbb{R}[x]_{[a,b]}$ es un álgebra de $C_b[a, b]$ porque es cerrado bajo las operaciones requeridas. Note que basta con las funciones $1(x) = 1$ y $\mathrm{id}(x) = x$ para generar a través de sumas, productos y productos por escalar cualquier elemento de $\mathbb{R}[x]_{[a,b]}$.

Ejemplo 14.3.2. La clausura $\overline{\mathcal{A}}$ de un álgebra $\mathcal{A} \subseteq C_b(Y)$ es de nuevo un álgebra. En efecto, si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ es porque existen sucesiones $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ unif. en Y, cuando $n \to +\infty$. Es inmediato comprobar que $f_n + g_n \to f + g$ y $\alpha f_n \to \alpha f$ unif. en Y, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Para el producto, escribiendo

$$\|f_n g_n - fg\|_Y \leq \|f_n - f\|_Y \|g_n\|_Y + \|g_n - g\|_Y \|f\|_Y,$$

podemos aplicar el mismo argumento que en la Proposición 4.2 (3) para concluir que $f_n g_n \to fg$ unif. en Y. Note que aquí se emplea que las funciones involucradas son acotadas.

Nos centramos ahora en el caso de espacios métricos (X, d) compactos y de álgebras de funciones continuas $\mathcal{A} \subseteq C^0(X) \subseteq C_b(X)$. Note que en particular $C^0(X)$ es un álgebra uniformemente cerrada de $C_b(X)$ gracias al Corolario 9.1. La pregunta que pretendemos responder es bajo qué condiciones, dada $\mathcal{A} \subseteq C^0(X)$ es válido que $\overline{\mathcal{A}} = C^0(X)$.

Nota 14.3.1. Si $x_0 \in X$ y $\mathcal{A}$ es una familia de funciones tales que $f(x_0) = 0$, para todo $f \in \mathcal{A}$, lo mismo será válido para todo $f \in \overline{\mathcal{A}}$. En efecto, si $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ unif. en X, y $f_n \in \mathcal{A}$, entonces $f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = 0$. Por tanto, las funciones constantes (no nulas) no pueden ser parte de $\overline{\mathcal{A}}$.

De la misma forma, si $x_0, x_1 \in X$ son dos puntos distintos y $\mathcal{A}$ es una familia de funciones tales que $f(x_0) = f(x_1)$, para todo $f \in \mathcal{A}$, lo mismo es válido para todo elemento de $\overline{\mathcal{A}}$. Pero sobre un espacio métrico la función $F(x) = d(x, x_0)$ satisface que $F(x_1) \neq 0 = F(x_0)$. Por tanto, $F \in C^0(X) \setminus \overline{\mathcal{A}}$. Incluso podemos trabajar con funciones acotadas considerando

$$F(x) = \frac{d(x, x_0)}{1 + d(x, x_0)}$$

que satisface las mismas propiedades de antes. En conclusión, si requerimos que $\overline{\mathcal{A}} = C^0(X)$, este par de condiciones no se pueden dar. Para referirnos a ellas introducimos la siguiente definición.

Definición 14.4. Una familia de funciones $\mathcal{B}$ definidas sobre un conjunto X se dice que *separa puntos* de X si para cada $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Si la familia de funciones tiene valores reales, decimos también que $\mathcal{B}$ *no se anula en ningún punto de* X si para cada $x_0 \in X$, existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

Lema 14.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de $C_b(Y)$ que separa puntos de Y y no se anula en ningún punto de Y. Considere $x_0, x_1 \in Y$, $x_0 \neq x_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que*

$$f(x_0) = \alpha, \quad f(x_1) = \beta. \tag{14.5}$$

Demostración. Por hipótesis existen $g, h, k \in \mathcal{A}$ tales que $g(x_0) \neq g(x_1)$, $h(x_0) \neq 0$ y $k(x_1) \neq 0$. Si ponemos $u = (g - g(x_0))k$ y $v = (g - g(x_1))h$, estos son elementos de $\mathcal{A}$ tales que

$$u(x_0) = v(x_1) = 0, \quad u(x_1) \neq 0, \quad v(x_0) \neq 0.$$

Entonces la función

$$f(x) = \alpha \frac{v(x)}{v(x_0)} + \beta \frac{u(x)}{u(x_1)}$$

es un elemento de $\mathcal{A}$ que satisface (14.5). □

Nota 14.3.2. Si $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$, es decir, si $\mathcal{A}$ contiene a las funciones constantes se verifica inmediatamente que $\mathcal{A}$ no se anula en ningún punto de Y. En este caso, si $\mathcal{A}$ separa puntos de Y, el lema anterior se verifica directamente usando $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x_0) \neq g(x_1)$ y la función

$$f(x) = \beta + (\alpha - \beta) \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x_0) - g(x_1)}.$$

Las ideas subyacentes en el teorema de Stone son dos. Primero, interpolar la función dada en puntos adecuados, que se logra gracias al lema anterior. Segundo, utilizar el máximo y el mínimo entre funciones del álgebra. Para ello se requiere poder tomar el valor absoluto puesto que

$$\text{mín}(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \qquad \text{máx}(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

La intuición de emplear estas operaciones se basa en la geometría del caso real: una función continua se puede aproximar por funciones lineales a trozos, Ejercicio 14.3.1, que a su vez de obtienen con máximos y mínimos de funciones lineales. En el caso general usaremos el siguiente lema.

Lema 14.2. *Sea (X, d) compacto y $\mathcal{A} \subseteq C^0(X)$ un álgebra. Si $f \in \mathcal{A}$, entonces $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. En particular, si $f, g \in \mathcal{A}$, entonces* $\text{máx}\{f, g\}, \text{mín}\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}$

Demostración. Como f es continua sobre un compacto, $a = \|f\|_X$ es finito. Por el Teorema de aproximación de Weierstrass 9.7 existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $p_n \to |x|$, unif. en $[-a, a]$ si $n \to +\infty$. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra, $p_n(f) \in \mathcal{A}$. Se sigue que $p_n(f) \to |f|$ unif. en X y por tanto $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. La última afirmación se sigue de las fórmulas del párrafo anterior. □

Notamos que la sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ anterior se puede construir explícitamente como se indica en el Ejercicio 9.1.9.

Con estos preliminares estamos en posición de demostrar el resultado principal.

Teorema 14.2 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C^0(X)$ un álgebra. Entonces $\overline{\mathcal{A}} = C^0(X)$ si y solo si $\mathcal{A}$ separa puntos y no se anula en ningún punto de X.*

Demostración. Una implicación ya fue mostrada en la Nota 14.3.1. Para el recíproco, sea $f \in C^0(X)$ y $\epsilon > 0$. Gracias al Lema 14.1, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $g_{x,y} \in \mathcal{A}$ tal que $g_{x,y}(x) = f(x)$ y $g_{x,y}(y) = f(y)$. Note que por continuidad, para cada $x \in X$, el conjunto

$$U_y = \{z \in X : g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon\} = (g_{x,y} - f)^{-1}(-\infty, \epsilon)$$

es un abierto de X que contiene a y. Como X es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j}$. Si definimos

$$h_x = \text{mín}\{g_{x,y_1}, \ldots, g_{x,y_n}\},$$

el Lema 14.2 implica que $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$. Además $h_x(x) = f(x)$ y $h_x(z) < f(z) + \epsilon$, para $z \in X$. De nuevo por continuidad, el conjunto

$$V_x = \{z \in X : f(z) - \epsilon < h_x(z)\} = (f - h_x)^{-1}(-\infty, \epsilon)$$

es un abierto de X que contiene a x. Por compacidad existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$. Por tanto la función

$$F = \text{máx}\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\} \in \overline{\mathcal{A}}$$

y además satisface que $f(z) - \epsilon < F(z) < f(z) + \epsilon$, para todo $z \in X$, es decir $\|f - F\|_X < \epsilon$. Esto demuestra que $f \in \overline{\mathcal{A}}$ como se requería. □

Ejemplo 14.3.3 (Funciones polinomiales)**.** El Teorema de aproximación de Weierstrass es una caso particular del teorema anterior porque $\mathbb{R}[x]$ separa puntos y no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Ejemplos de álgebras polinomiales que no satisfacen las condiciones del Teorema de Stone son los polinomios pares $\{p \in \mathbb{R}[x] : p(x) = p(-x)\}$ que no separa los puntos x_0 y $-x_0$, para $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. También, el álgebra $\{(x - x_0)p(x) : p \in \mathbb{R}[x]\}$ de $C^0[a, b]$ que se anula en el punto prefijado $x_0 \in [a, b]$.

Para funciones continuas de varias variables reales el resultado de Weierstrass sigue siendo válido. Considere el álgebra de polinomios en d variables $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$. Esta álgebra separa puntos porque dado $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, el polinomio

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{d} (x_j - a_j)^2$$

satisface que $p(\boldsymbol{x}) = 0$ si y solo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. Por tanto, si $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$, entonces $p(\boldsymbol{b}) > 0 = p(\boldsymbol{a})$. Además no se anula en ningún punto porque $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ contiene a las funciones constantes. El Teorema de Stone demuestra entonces que cualquier función continua $f : K \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida sobre un compacto se puede aproximar uniformemente en K por polinomios.

Para el caso de funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$, es posible extender el Teorema de Stone requiriendo la condición extra de que el álgebra sea cerrada bajo conjugación. Por supuesto, que $\mathcal{A} \subseteq C^0(X, \mathbb{C})$ sea un álgebra significa que sea cerrada bajo sumas, productos y producto por escalares en $\mathbb{C}$. En este caso decimos que $\mathcal{A}$ es *autoadjunta* si $\overline{f} \in \mathcal{A}$, siempre que $f \in \mathcal{A}$.

Teorema 14.3. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C^0(X, \mathbb{C})$ un álgebra autoadjunta. Entonces $\overline{\mathcal{A}} = C^0(X, \mathbb{C})$ si y solo si $\mathcal{A}$ separa puntos y no se anula en ningún punto de X.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A} \cap C^0(X, \mathbb{C})$ al conjunto de funciones en $\mathcal{A}$ con valores en $\mathbb{R}$. En general, si $f \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ es autoadjunta se sigue que

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2i} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}.$$

Las hipótesis sobre $\mathcal{A}$ implican que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ también separa puntos de X y no se anula en ningún punto allí. Por ejemplo, si $x_0 \in X$, y $f = u + iv \in \mathcal{A}$ es tal que $f(x_0) \neq 0$ es porque $u(x_0) \neq 0$ o $v(x_0) \neq 0$. Por el Teorema de Stone, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ es densa en $C^0(X)$. Por tanto, dado $f = u + iv \in C^0(X, \mathbb{C})$ existen sucesiones $u_n, v_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ tales que $u_n \to u$ y $v_n \to v$ unif. en X. Como $f_n = u_n + iv_n \in \mathcal{A}$, se sigue que $f_n \to f$ unif. en X. En conclusión, $\mathcal{A}$ es densa en $C^0(X, \mathbb{C})$. □

Ejemplo 14.3.4. Para cada compacto $K \subseteq \mathbb{C}$, una función continua $f : K \to \mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente allí por polinomios en z y $\overline{z}$. Es decir,

$$\mathbb{C}[z, \overline{z}] := \left\{ \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m} z^n \overline{z}^m : N \in \mathbb{N}, a_{n,m} \in \mathbb{C} \right\}$$

es denso en $C^0(K, \mathbb{C})$. Note que esta álgebra separa puntos porque dado $z_0 \in \mathbb{C}$, $p(z) = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = |z - z_0|^2 \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ satisface que $p(z_1) > 0 = p(z_0)$ si $z_1 \neq z_0$.

Ejemplo 14.3.5 (Polinomios trigonométricos)**.** Consideremos el espacio de *funciones continuas y periódicas de periodo* 2π

$$C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y periódica de periodo } 2\pi\}.$$

Podemos identificar este espacio con el conjunto

$$\{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y } f(0) = f(2\pi)\}.$$

De esta manera $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ forma un álgebra de $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Además, por periodicidad la norma satisface que $\|f\|_{[0,2\pi]} = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)|$. Por otra parte, una función $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ se corresponde con una función continua $F : S^1 \to \mathbb{C}$ a través de la fórmula $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$. En efecto, la aplicación

$$\Phi : C^0(S^1) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}), \qquad \Phi(F)(\theta) = F(e^{i\theta})$$

es una biyección que preserva las operaciones y la convergencia uniforme. Para esto último observe que

$$\|\Phi(F)\|_{[0,2\pi]} = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |F(e^{i\theta})| = \sup_{z\in S^1} |F(z)| = \|F\|_{S^1}.$$

Consideremos ahora el espacio de *polinomios trigonométricos* definido por

$$P_{tr} = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta} \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Si $p(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta} \in P_{tr}$, entonces $p(\theta) = P(e^{i\theta})$, donde $P(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n z^n + a_{-n}\overline{z}^n) \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$, dado que $\overline{z} = z^{-1}$ si $|z| = 1$. La versión periódica del Teorema de aproximación de Weierstrass afirma que:

$$P_{tr} \text{ es denso en } C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Esto se sigue del ejemplo anterior aplicado al círculo unitario, es decir $K = S^1$: dada $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, si $f = \Phi(F)$, existe una sucesión $p_n \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$ tal que $p_n \to F$ unif. en S^1. Por tanto, las funciones $q_n(\theta) = p_n(e^{i\theta}) \in P_{tr}$ satisfacen que $q_n \to f$ unif. en $[0, 2\pi]$.

Finalmente, si restringimos a funciones periódicas de valor real, obtenemos los *polinomios trigonométricos reales*

$$P_{tr,\mathbb{R}} = \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta) \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}) : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

La demostración del Teorema 14.3 muestra que $P_{tr,\mathbb{R}}$ es denso en $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. El estudio detallado de cómo aproximar funciones periódicas a través de este tipo de polinomios hace parte de un curso de Análisis de Fourier, ver por ejemplo [128].

Ejercicios

14.3.1 (Aproximación por funciones lineales a trozos) Un *spline lineal* es una función $\mathfrak{s} : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y lineal a trozos. El objetivo de este ejercicio es demostrar que toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por spline lineales. La idea geométrica es aproximar la gráfica de f por segmentos de recta que interpolen sus valores.

a) Para $\delta > 0$ considere el *módulo de continuidad de f* definido por

$$\omega(f,\delta) := \sup_{t,s\in[a,b],|t-s|\le\delta} |f(t) - f(s)|.$$

Si $\delta \le \delta'$, entonces $\omega(f,\delta) \le \omega(f,\delta')$. Además, como f es uniformemente continua en $[a,b]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f,\delta) < \epsilon$.

b) Dada una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ considere el spline lineal $\mathfrak{s}_{f,P}$ que interpola los puntos $(t_j, f(t_j))$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathfrak{s}_{f,P}(t) = \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} f(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} f(t_{j+1}), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

c) Mostrar que $\|f - \mathfrak{s}_{f,P}\|_{[a,b]} \leq \omega(f, \|P\|)$. En efecto, sobre el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ escriba

$$\begin{aligned} |f(t) - \mathfrak{s}_{f,P}(t)| &= \left| f(t) \left(\frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right) - \mathfrak{s}_{f,P}(t) \right| \\ &= \left| (f(t) - f(t_j)) \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + (f(t) - f(t_{j+1})) \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right| \\ &\leq \left(\frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right) \omega(f, \Delta t_j) = \omega(f, \Delta t_j) \end{aligned}$$

para concluir la desigualdad requerida. Utilizar estas afirmaciones para demostrar el resultado principal.

14.3.2 Sea (X, d) compacto y $\mathcal{A} \subseteq C^0(X)$ un álgebra tal que $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$.

a) Si $\psi : (-R, R) \to \mathbb{R}$ es una función analítica allí y $\|f\|_X < R$, emplear la serie de potencias de ψ para demostrar que $\psi \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$.

b) Si $f \in \mathcal{A}$ y $f(x) \geq 0$, $x \in X$, demostrar que $f^{1/2} \in \overline{\mathcal{A}}$. En particular, si $g \in \mathcal{A}$, entonces $|g| = \sqrt{g^2} \in \overline{\mathcal{A}}$. Indicación: ¿por qué es posible asumir que $0 \leq f(x) \leq 1$? En este caso emplear la serie

$$(1 + t)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n, \qquad |t| \leq 1,$$

ver (9.12), con $t = f(x) - 1$. Para mostrar la convergencia uniforme en $[-1, 1]$ de dicha serie note que

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n - 1)} \binom{2n}{n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \binom{2n}{n} \right|}{1/n^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

gracias al límite en (8.22).

14.3.3 Sea (X, d) compacto y $\mathcal{A} \subseteq C^0(X)$ un álgebra. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f \in \mathcal{A}$, demostrar que $\phi \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$.

14.3.4 Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ espacios compactos. Demostrar que la familia de funciones

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y) : n \geq 1, f_j \in C^0(X), g_j \in C^0(Y) \right\}$$

es densa en $C^0(X \times Y)$. Formular y demostrar una afirmación análoga para espacios de la forma $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Nota 14.3.3. El mismo resultado es válido para espacios métricos compactos (X, d) y (Y, d'), suponiendo que es conocido que el espacio producto $X \times Y$ es compacto (con alguna de las métricas del Ejercicio 2.1.8(a)).

14.3.5 Considere el círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y el álgebra

$$T(S^1) = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Demostrar que toda función continua sobre S^1 se puede aproximar uniformemente por elementos de $T(S^1)$. Considere ahora el álgebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n z^n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Mostrar que $\mathcal{A}$ separa puntos y no se anula en ningún punto de S^1, pero no toda función continua sobre S^1 se puede aproximar uniformemente por elementos de $\mathcal{A}$. Indicación: $\bar{z} = z^{-1}$ si $|z| = 1$. Además, si $f \in \mathcal{A}$, entonces $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$.

14.3.6 Suponga que α/π es irracional. Demostrar que para $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x + n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Indicación: hacerlo primero para $f(x) = e^{ikx}$ y luego aplicar la versión periódica del Teorema de aproximación de Weierstrass, Ejemplo 14.3.5.

Bibliografía

[1] N. H. Abel. Untersuchungen über die Reihe: $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$ u.s.w. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]*, 1:311–339, 1826. doi:10.1515/crll.1826.1.311.

[2] U. Abel. A Nearly Forgotten Formula: Halphen's Identity for Derivatives and Beyond. *Mathematics Magazine*, 94(4):273–280, Aug 2021. doi:10.1080/0025570x.2021.1951537.

[3] V. M. Abramov. Extension of the Bertrand–De Morgan Test and Its Application. *The American Mathematical Monthly*, 127(5):444–448, Apr 2020. doi:10.1080/00029890.2020.1722551.

[4] Y. S. Abu-Mostafa. A Differentiation Test for Absolute Convergence. *Mathematics Magazine*, 57(4):228–231, 1984. doi:10.1080/0025570x.1984.11977116.

[5] C. L. Adler and J. Tanton. π is the Minimum Value for Pi. *The College Mathematics Journal*, 31(2):102–106, 2000. doi:10.2307/2687579.

[6] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer, Berlin, sixth edition, 2018. doi:10.1007/978-3-662-57265-8.

[7] S. A. Ali. The mth Ratio Test: New Convergence Tests for Series. *The American Mathematical Monthly*, 115(6):514–524, 2008. doi:10.1080/00029890.2008.11920558.

[8] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999. doi:10.1017/CBO9781107325937.

[9] T. M. Apostol. Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric. *Mathematics Magazine*, 40:233–235, 1967. doi:10.2307/2688275.

[10] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley series in mathematics. 2nd ed. Addison-Wesley, 1974.

[11] J. M. Ash. Neither a Worst Convergent Series nor a Best Divergent Series Exists. *The College Mathematics Journal*, 28(4):296–297, 1997. doi:10.1080/07468342.1997.11973879.

[12] B. August and T. J. Osler. Divergence of Series by Rearrangement. *The College Mathematics Journal*, 33(3):233–234, 2002. doi:10.2307/1559037.

[13] Z. Bao-lin. A Note on the Mean Value Theorem for Integrals. *The American Mathematical Monthly*, 104(6):561–562, 1997. doi:10.1080/00029890.1997.11990679.

[14] S.-M. Belcastro and M. Green. The Cantor Set Contains 1/4? Really? *The College Mathematics Journal*, 32(1):55–56, 2001. doi:10.2307/2687224.

[15] L. F. Bennett. Another Note on Epsilons and Deltas. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 7(3):18, 1976. doi:10.2307/3027145.

[16] A. Besenyei. Peano's Unnoticed Proof of Borel's Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 121(1):69–72, 2014. doi:10.4169/amer.math.monthly.121.01.069.

[17] P. Billingsley. Van der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function. *The American Mathematical Monthly*, 89(9):691, 1982. doi:10.1080/00029890.1982.11995515.

[18] E. D. Bloch. *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2011. doi:10.1007/978-1-4419-7127-2.

[19] D. M. Bloom. A One-Sentence Proof That $\sqrt{2}$ Is Irrational. *Mathematics Magazine*, 68(4):286, 1995. doi:10.1080/0025570X.1995.11996338.

[20] R. P. Boas. Counterexamples to L'Hôpital's Rule. *The American Mathematical Monthly*, 93(8):644–645, 1986. doi:10.1080/00029890.1986.11971912.

[21] R. J. Bumcrot. Irrationality Made Easy. *The College Mathematics Journal*, 17(3):243–244, 1986. doi:10.1080/07468342.1986.11972964.

[22] F. Burk. Euler's Constant. *The College Mathematics Journal*, 16(4):279, 1985. doi:10.1080/07468342.1985.11972895.

[23] F. Burk. The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 94(6):527–528, 1987. doi:10.1080/00029890.1987.12000678.

[24] F. Burk. Summing Series via Integrals. *The College Mathematics Journal*, 31(3):178–181, 2000. doi:10.1080/07468342.2000.11974139.

[25] F. Burk and T. Scully. *A Garden of Integrals*. Dolciani Mathematical Expositions. Mathematical Association of America, 2007.

[26] K. Burns and B. Hasselblatt. The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof. *The American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244, 2011. doi:10.4169/amer.math.monthly.118.03.229.

[27] H. L. L. Busard and N. Oresme. *Nicole Oresme, Questiones Super Geometriam Euclidis*. Boethius (Series). Franz Steiner Verlag, 2010.

[28] N. Calkin and H. S. Wilf. Recounting the Rationals. *The American Mathematical Monthly*, 107(4):360–363, 2000. doi:10.1080/00029890.2000.12005205.

[29] G. Cantor. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik [Crelle's Journal]*, 1878(84):242–258, 1878. doi:10.1515/crelle-1878-18788413.

[30] S. A. Carrillo. Sum of alternating-like series as definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(10):2856–2866, 2022. doi:10.1080/0020739X.2021.1949060.

[31] F. S. Cater. On Van der Waerden's Nowhere Differentiable Function. *The American Mathematical Monthly*, 91(5):307–308, 1984. doi:10.1080/00029890.1984.11971413.

[32] H. Chen. On the summation of subseries in closed form. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4):538–547, 2010. doi:10.1080/00207390903477475.

[33] H. Chen. A New Ratio Test for Positive Monotone Series. *The College Mathematics Journal*, 44(2):139–141, 2013. doi:10.4169/college.math.j.44.2.139.

[34] O. Ciaurri. Euler's Product Expansion for the Sine: An Elementary Proof. *The American Mathematical Monthly*, 122(7):693–695, 2015. doi:10.4169/amer.math.monthly.122.7.693.

[35] H. Cohn. A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e. *The American Mathematical Monthly*, 113(1):57–62, 2006. doi:10.1080/00029890.2006.11920278.

[36] C. C. Cowen, K. R. Davidson, and R. P. Kaufman. Rearranging the Alternating Harmonic Series. *The American Mathematical Monthly*, 87(10):817–819, 1980. doi:10.1080/00029890.1980.11995162.

[37] D. A. Cox. *The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss*, pages 481–536. Springer New York, New York, NY, 2000. doi:10.1007/978-1-4757-3240-5_55.

[38] A. D. D. Craik. Prehistory of Faà di Bruno's Formula. *The American Mathematical Monthly*, 112(2):119–130, 2005. doi:10.1080/00029890.2005.11920176.

[39] D. Cruz-Uribe. The Relation Between the Root and Ratio Tests. *Mathematics Magazine*, 70(3):214–215, 1997. doi:10.1080/0025570X.1997.11996538.

[40] D. Daners. A Short Elementary Proof of $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Mathematics Magazine*, 85(5):361–364, 2012. doi:10.4169/math.mag.85.5.361.

[41] A. P. de Camargo. A New Proof of the Equivalence of the Cauchy Mean Value Theorem and the Mean Value Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 127(5):460–460, 2020. doi:10.1080/00029890.2020.1722552.

[42] P. N. de Souza and J. N. Silva. *Berkeley Problems in Mathematics*. Problem Books in Mathematics. Springer New York, 2004.

[43] D. W. DeTemple. A Geometric Look at Sequences That Converge to Euler's Constant. *The College Mathematics Journal*, 37(2):128–131, 2006. doi:10.2307/27646302.

[44] Z. Diao. An Elementary Proof of the Irrationality of e. *The American Mathematical Monthly*, 127(1):84, 2020. doi:10.1080/00029890.2020.1668706.

[45] J. B. Diaz and F. T. Metcalf. An Analytic Proof of Young's Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 77(6):603–609, 1970. doi:10.2307/2316736.

[46] G. Drago, P. Domenico Lamberti, and P. Toni. A "Bouquet" of Discontinuous Functions for Beginners in Mathematical Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 118(9):799–811, 2011. doi:10.4169/amer.math.monthly.118.09.799.

[47] J. Duncan, D. H. Luecking, and C. M. McGregor. On the Values of Pi for Norms on $\mathbb{R}^2$. *The College Mathematics Journal*, 35(2):84–92, 2004. doi:10.1080/07468342.2004.11922056.

[48] J. Duncan and C. M. McGregor. Carleman's Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 110(5):424–431, 2003. doi:10.1080/00029890.2003.11919980.

[49] M. W. Ecker. Divergence of the Harmonic Series by Rearrangement. *The College Mathematics Journal*, 28(3):209–210, 1997. doi:10.1080/07468342.1997.11973866.

[50] A. El Farissi. Simple proof and refinement of Hermite–Hadamard inequality. *Journal of Mathematical Inequalities*, 3(4):365–369, 2022. doi:10.7153/jmi-04-33.

[51] R. Farhadian. A Generalization of Euler's Limit. *The American Mathematical Monthly*, 129(4):384, 2022. doi:10.1080/00029890.2022.2027718.

[52] S. R. Finch. *Mathematical Constants*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2003.

[53] P. Flajolet and B. Salvy. Euler Sums and Contour Integral Representations. *Experimental Mathematics*, 7(1):15–35, 1998. doi:10.1080/10586458.1998.10504356.

[54] T. M. Flett. 2742. A mean value theorem. *The Mathematical Gazette*, 42(339):38–39, 1958. doi:10.2307/3608355.

[55] F. Galindo Soto, J. Sanz Gil, and L. A. Tristan Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real*. Ediciones Paraninfo, S.A., 2003.

[56] J. Gaspar. Direct Proof of the Uncountability of the Transcendental Numbers. *The American Mathematical Monthly*, 121(1):78–80, 2014. doi:10.4169/amer.math.monthly.121.01.080.

[57] R. A. Gordon. A Bounded Derivative That Is Not Riemann Integrable. *Mathematics Magazine*, 89(5):364–370, 2016. doi:10.4169/math.mag.89.5.364.

[58] C. N. B. Hammond. 104.16 Another function with discontinuous derivative. *The Mathematical Gazette*, 104(560):315–318, 2020. doi:10.1017/mag.2020.58.

[59] C. N. B. Hammond. The Case for Raabe's Test. *Mathematics Magazine*, 93(1):36–46, 2020. doi:10.1080/0025570X.2020.1684150.

[60] C. N. B. Hammond. Ratios, roots, and means: A quartet of convergence tests. *Elemente der Mathematik*, 75(3):89–102, 2020. doi:10.4171/EM/409.

[61] C. N. B. Hammond and E. Omey. A Second Look at the Second Ratio Test. *The American Mathematical Monthly*, 128(7):579–596, 2021. doi:10.1080/00029890.2021.1926185.

[62] G. H. Hardy, E. M. Wright, D. R. Heath-Brown, R. Heath-Brown, J. Silverman, and A. Wiles. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford mathematics. OUP Oxford, 2008.

[63] D. Hobby and D. M. Silberger. Quotients of Primes. *The American Mathematical Monthly*, 100(1):50–52, 1993. doi:10.2307/2324814.

[64] J. Hofbauer. A Simple Proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ and Related Identities. *The American Mathematical Monthly*, 109(2):196–200, 2002. doi:10.1080/00029890.2002.11919855.

[65] O. Hutník and J. Molnárová. On Flett's mean value theorem. *Aequationes mathematicae*, 89(4):1133–1165, 2015. doi:10.1007/s00010-014-0311-5.

[66] D. Huylebrouck. Similarities in Irrationality Proofs for π, $\ln 2$, $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *The American Mathematical Monthly*, 108(3):222–231, 2001. doi:10.1080/00029890.2001.11919744.

[67] B. Jacobson. On the Mean Value Theorem for Integrals. *The American Mathematical Monthly*, 89(5):300–301, 1982. doi:10.1080/00029890.1982.11995437.

[68] G. Jameson and P. R. Mercer. The Logarithmic Mean Revisited. *The American Mathematical Monthly*, 126(7):641–645, 2019. doi:10.1080/00029890.2019.1605799.

[69] G. J. O. Jameson. Inequalities for Gamma Function Ratios. *The American Mathematical Monthly*, 120(10):936–940, 2013. doi:10.4169/amer.math.monthly.120.10.936.

[70] W. P. Johnson. The Curious History of Faà di Bruno's Formula. *The American Mathematical Monthly*, 109(3):217–234, 2002. doi:10.1080/00029890.2002.11919857.

[71] P. Jordan and J. V. Neumann. On Inner Products in Linear, Metric Spaces. *Annals of Mathematics*, 36(3):719–723, 1935. doi:10.2307/1968653.

[72] S. Kaczkowski. The Limiting Value of a Series With Exponential Terms. *Mathematics Magazine*, 89(4):282–287, 2016. doi:10.4169/math.mag.89.4.282.

[73] J. B. Keller and R. Vakil. π_p, the Value of π in ℓ_p. *The American Mathematical Monthly*, 116(10):931–935, 2009. doi:10.4169/000298909X477069.

[74] A. J. Kempner. A Curious Convergent Series. *The American Mathematical Monthly*, 21(2):48–50, 1914. doi:10.1080/00029890.1914.11998004.

[75] S. K. Khattri. Three Proofs of the Inequality $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+0.5}$. *The American Mathematical Monthly*, 117(3):273–277, 2010. doi:10.4169/000298910X480126.

[76] S. S. Kim and K. H. Kwon. Smooth (C^∞) but Nowhere Analytic Functions. *The American Mathematical Monthly*, 107(3):264–266, 2000. doi:10.2307/2589322.

[77] M. S. Klamkin, H. Demir, H. J. Fletcher, R. Johnsonbaugh, N. Schaumberger, R. Shantaram, R. Aftabizadeh, J. Wiener, J. R. Anderson, D. Lindsay, H. Eves, H. J. Ludwig, F. G. B. Maskell, R. Patenaude, E. T. H. Wang, R. Parris, S. Boivin, G. Costa, B. W. Brunson, J. Magliano, R. Vrem, R. E. Shafer, and J. Suck. Problems. *The College Mathematics Journal*, 17(1):98–99, 1986. doi:10.2307/2686880.

[78] A. N. Kolmogorov. On inequalities for suprema of consecutive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval. In V. M. Tikhomirov, editor, *Selected Works I: Mathematics and Mechanics*, Springer Collected Works in Mathematics, pages 277–290. Springer Netherlands, 2019.

[79] V. Komornik and R. Schäfke. Leibniz, Newton, and Cauchy: A Complex Relationship. *The American Mathematical Monthly*, 128(4):367–369, 2021. doi:10.1080/00029890.2021.1867465.

[80] P. Koosis. *The Logarithmic Integral*, volume 1 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1988.

[81] R. A. Kortram. Simple Proofs for $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ and $\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. *Mathematics Magazine*, 69(2):122–125, 1996. doi:10.1080/0025570X.1996.11996405.

[82] W. Kozakiewicz. A Simple Evaluation of an Improper Integral. *The American Mathematical Monthly*, 58(3):181–182, 1951. doi:10.2307/2306590.

[83] S. G. Krantz and H. R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions (Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher)*. Birkhuser Advanced Texts Basler Lehrbcher. Birkhäuser Boston, MA, 2002. doi:10.1007/978-0-8176-8134-0.

[84] A. Kriegl. *Analysis 1*. Skriptum von Vorlesung über Analysis 1. Wintersemester 2003/2004, Universität Wien. Universität Wien, 2004. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/Analysis1/Analysis1-VO-BW-2.pdf.

[85] C. Kuratowski. Sur l'opération Ā de l'analysis situs. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1):182–199, 1922. doi:10.4064/fm-3-1-182-199.

[86] E. F. Lee. The structure and topology of the Brjuno numbers. Proceedings of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT). In *Topology Proceedings*, pages 189–201, 1999. URL: `http://topology.nipissingu.ca/tp/reprints/v24/tp24114.pdf`.

[87] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 1. Projecto Euclides of *Curso de análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 7a edition, 1982.

[88] H. Lou. A Short Proof of Stirling's Formula. *The American Mathematical Monthly*, 121(2):154–157, 2014. `doi:10.4169/amer.math.monthly.121.02.154`.

[89] D. S. Marinescu and M. Monea. A Very Short Proof of the Hermite–Hadamard Inequalities. *The American Mathematical Monthly*, 127(9):850–851, 2020. `doi:10.1080/00029890.2020.1803648`.

[90] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, and U. M. J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman, 1993.

[91] J. Marshall-Ash and Y. Tan. 96.06 A rational number of the form a^a with a irrational. *The Mathematical Gazette*, 96(535):106–108, 2012. `doi:10.1017/S002555720000406X`.

[92] B. Matschke. A Survey on the Square Peg Problem. *Notices of the American Mathematical Society*, 61(4):346–352, 2014. `doi:10.1090/noti1100`.

[93] M. D. Meyerson. Every Power Series is a Taylor Series. *The American Mathematical Monthly*, 88(1):51–52, 1981. `doi:10.1080/00029890.1981.11995186`.

[94] M. R. Murty and V. K. Murty. Irrational Numbers arising from Certain Differential Equations. *Canadian Mathematical Bulletin*, 20(1):117–120, 1977. `doi:10.4153/CMB-1977-021-x`.

[95] Jr. S. B. Nadler. A Proof of Darboux's Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 117(2):174–175, 2010. `doi:10.4169/000298910X476086`.

[96] D. J. Newman. A simplified version of the fast algorithms of Brent and Salamin. *Mathematics of Computation*, 169(44):207–210, 1985. `doi:10.2307/2007804`.

[97] I. Niven. A simple proof that π is irrational. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 509(53), 1947. `doi:10.1090/s0002-9904-1947-08821-2`.

[98] I. Niven. A Proof of the Divergence $\sum 1/p$. *The American Mathematical Monthly*, 78(3):272–273, 1971. `doi:10.1080/00029890.1971.11992740`.

[99] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[100] M. Olinick and B. B. Peterson. Darboux's Theorem and Points of Inflection. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 7(3):5–9, 1976. doi:10.2307/3027142.

[101] L. Olsen. A New Proof of Darboux's Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 111(8):713–715, 2004. doi:10.2307/4145046.

[102] T. J. Osler. A Proof of the Continued Fraction Expansion of $e^{1/M}$. *The American Mathematical Monthly*, 113(1):62–66, 2006. doi:10.1080/00029890.2006.11920279.

[103] B. Peterson. A Function with a Discontinuous Derivative. *The American Mathematical Monthly*, 89(4):249–263, 1982. doi:10.2307/2320226.

[104] A. Plaza. Identidades de tipo Machin con π y dos arcotangentes. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 21(3):608, 2018. URL: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1476.

[105] D. H. J. Polymath. The "Bounded Gaps between Primes" Polymath Project. A Retrospective Analysis. *EMS Newsletter*, 94:13–23, 2014. URL: https://ems.press/content/serial-issue-files/13726.

[106] J. C. Ponce-Campuzano and M. Á. Maldonado-Aguilar. Vito Volterra's construction of a nonconstant function with a bounded, non-Riemann integrable derivative. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 30(2):143–152, 2015. doi:10.1080/17498430.2015.1010771.

[107] J. Quaintance and H.W. Gould. *Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H. W. Gould*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2016.

[108] P. Ramankutty and M. K. Vamanamurthy. Limit of the Composite of Two Functions. *The American Mathematical Monthly*, 82(1):63–64, 1975. doi:10.1080/00029890.1975.11993773.

[109] J. P. Ramis, A. Warusfel, X. Buff, J. Garnier, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, and et al. *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*. 4e édition. Dunod, Paris, 2022.

[110] M. Rosen. Abel's Theorem on the Lemniscate. *The American Mathematical Monthly*, 88(6):387–395, 1981. doi:10.2307/2321821.

[111] A. Rosenthal. On functions with infinitely many derivatives. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4:600–602, 1953. doi:10.1090/S0002-9939-1953-0059331-0.

[112] P. Rosenthal. The Remarkable Theorem of Lévy and Steinitz. *The American Mathematical Monthly*, 94(4):342–351, 1987. doi:10.1080/00029890.1987.12000643.

[113] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[114] H. Sagan. An Elementary Proof that Schoenberg's Space-Filling Curve Is Nowhere Differentiable. *Mathematics Magazine*, 65(2):125–128, 1992. doi:10.1080/0025570X.1992.11995996.

[115] F. Saidak. A New Proof of Euclid's Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 113(10):937–938, 2006. doi:10.1080/00029890.2006.11920383.

[116] D. Salwinski. Euler's Sine Product Formula: An Elementary Proof. *The College Mathematics Journal*, 49(2):126–135, 2018. doi:10.1080/07468342.2018.1419703.

[117] H. Samelson. More on Kummer's Test. *The American Mathematical Monthly*, 102(9):817–818, 1995. doi:10.1080/00029890.1995.12004667.

[118] N. Schaumberger. An Instant Proof of $e^{\pi} > \pi^{e}$. *The College Mathematics Journal*, 16(4):280, 1985. doi:10.1080/07468342.1985.11972896.

[119] I. J. Schoenberg. On the Peano curve of Lebesgue. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(8):519, 1938. URL: https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society/volume-44/issue-8/On-the-Peano-curve-of-Lebesgue/bams/1183500618.full.

[120] I. J. Schoenberg. A Remark on M. M. Day's Characterization of Inner-Product Spaces and a Conjecture of L. M. Blumenthal. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(6):961–964, 1952. doi:10.2307/2031742.

[121] I. J. Schoenberg. The Elementary Cases of Landau's Problem of Inequalities Between Derivatives. *The American Mathematical Monthly*, 80(2):121–158, 1973. doi:10.1080/00029890.1973.11993247.

[122] W. J. Schwind, J. Ji, and D. E. Koditschek. A Physically Motivated Further Note on the Mean Value Theorem for Integrals. *The American Mathematical Monthly*, 106(6):559–564, 1999. doi:10.1080/00029890.1999.12005083.

[123] A. Shidfar and K. Sabetfakhri. On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense. *The American Mathematical Monthly*, 93(5):375–376, 1986. doi:10.1080/00029890.1986.11971830.

[124] C. L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory. Vol. 1 Elliptic Functions and Uniformization Theory*. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Wiley-Interscience, 1969.

[125] J. Sondow. An Antisymmetric Formula for Euler's Constant. *Mathematics Magazine*, 71(3):219–220, 1998. doi:10.1080/0025570X.1998.11996638.

[126] J. H. Staib and M. S. Demos. On the Limit Points of the Sequence $\sin(n)$. *Mathematics Magazine*, 40(4):210–213, 1967. doi:10.1080/0025570X.1967.11975797.

[127] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.

[128] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

[129] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.

[130] S. M. Stewart. A Catalan constant inspired integral odyssey. *The Mathematical Gazette*, 104(561):449–459, 2020. doi:10.1017/mag.2020.99.

[131] A. C. Thompson. *Minkowski Geometry*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1996. doi:10.1017/CBO9781107325845.

[132] J. Todd. *The Lemniscate Constants*, pages 412–417. Springer New York, NY, 1997. doi:10.1007/978-1-4757-2736-4_45.

[133] J. Tong. Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series. *The American Mathematical Monthly*, 101(5):450–452, 1994. doi:10.2307/2974907.

[134] S. Ungar. The Koch Curve: A Geometric Proof. *The American Mathematical Monthly*, 114(1):61–66, 2007. doi:10.1080/00029890.2007.11920392.

[135] C. A. van Cott. A Pi Day of the Century *Every Year*. *Math Horizons*, 23(3):24–27, 2016. doi:10.4169/mathhorizons.23.3.24.

[136] J. van Yzeren. Moivre's and Fresnel's Integrals by Simple Integration. *The American Mathematical Monthly*, 86(8):690–693, 1979. doi:10.2307/2321302.

[137] V. S. Varadarajan. *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*. Miscellaneous Books. American Mathematical Society, 2006.

[138] E. von Landau. Einige Ungleichungen Für Zweimal Differentiierbare Funktionen. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-13(1):43–49, 1914. doi:10.1112/plms/s2-13.1.43.

[139] S. G. Wayment. 3274. An integral mean value theorem. *The Mathematical Gazette*, 54(389):300–301, 1970. doi:10.2307/3613804.

[140] H. Whitney. Differentiability of the remainder term in Taylor's formula. *Duke Mathematical Journal*, 10(1):153 – 158, 1943. doi:10.1215/S0012-7094-43-01014-2.

[141] H. Whitney. Differentiable even functions. *Duke Mathematical Journal*, 10(1):159 – 160, 1943. doi:10.1215/S0012-7094-43-01015-4.

[142] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis.* V. Moll, Ed. Cambridge University Press, 5 edition, 2021. doi:10.1017/9781009004091.

[143] J. Wiener. Bernoulli's Inequality and the Number e. *The College Mathematics Journal*, 16(5):399–400, 1985. doi:10.1080/07468342.1985.11972916.

[144] A. Witkowski. Bijections between $(0,1)$, $(0,1]$, and $[0,1]$. *The American Mathematical Monthly*, 127(2):139–139, 2020. doi:10.1080/00029890.2020.1684788.

[145] R. M. Young. 75.9 Euler's Constant. *The Mathematical Gazette*, 75(472):187–190, 1991. doi:10.2307/3620251.

[146] D. Zagier. Values of Zeta Functions and Their Applications. In A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, and R. Rentschler, editors, *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992: Vol. II: Invited Lectures (Part 2)*, pages 497–512. Birkhäuser Basel, Basel, 1994. doi:10.1007/978-3-0348-9112-7_23.

[147] Y. Zhang. Bounded gaps between primes. *Annals of mathematics*, 179(3):1121–1174, 2014. doi:10.4007/annals.2014.179.3.7.

Índice alfabético

Álgebra de funciones continuas, 148, 436
Algoritmo de Gauss, 320
Aplicación, 6
  biyectiva, 7
  continua, 146
  de tipo Lipschitz, 157
  inyectiva, 7
  sobreyectiva, 7
  uniformemente continua, 156
Axioma del supremo, 25

Bola abierta, 46

Coeficiente
  binomial, 15, 180
  multinomial, 15
Conjunto
  F_σ, 161
  G_δ, 161
  abierto, 48
  acotado, 62
  acotado inferiormente, 24
  acotado superiormente, 24
  cerrado, 48
  Clausura de un, 53
  compacto, 62
  conexo, 69
  conexo por caminos, 153
  contable, 14
  convexo, 47
  Cubrimiento por abiertos de un, 62
  de Cantor, 72
  de medida nula, 235
  de nivel, 149
  denso, 56
  derivado, 53
  discreto, 71
  Diámetro de un, 89
  finito, 14
  Frontera de, 57
  Interior de un, 52
  ordenado, 24
  perfecto, 71
  Separación de, 69
  simétrico respecto a 0, 48
  ternario de Cantor, 72
  totalmente disconexo, 71
Conjuntos equipotentes, 14
Cono positivo, 27
Constante
  de Euler-Mascheroni, 414
  π, 29, 258, 283, 431
  de Apéry, 29, 316
  de Catalan, 29, 263, 355
  de Euler-Mascheroni, 29, 246, 275
  de Gelfond–Schneider, 34
  de la lemniscata, 29, 435
  de Liouville, 312
  de Meissel–Mertens, 253
Convergencia
  uniforme, 267
  normal, 273

puntual, 266
Cota
inferior, 24
superior, 24
Criterio
(segundo) del cociente, 337, 340
de Bertrand-De Morgan, 344
de comparación, 106
de comparación de cocientes, 111
de condensación de Cauchy, 107
de Dirichlet, 122, 274
de Gauss, 349
de Jamet, 347
de Kummer, 342
de la integral, 224
de la raíz, 114
de Leibniz, 123, 124, 274
de paso al límite, 106
de Raabe, 345
del cociente o de la razón de D'Alembert, 114
Cuerpo, 22
de funciones racionales $K(t)$, 28
ordenado, 26
Curva, 145
de Hilbert, 298
de Koch, 433
de Schoenberg, 304
Longitud de arco de una, 428
Longitud de una, 424
que llena al espacio, 298
rectificable, 424
Variación total de una, 424

d-celda, 47
Derivada
de orden superior, 176
de una función, 173
lateral, 179
parcial, 178
Desigualdad
de Bernoulli, 34
de Carleman, 125
de Cauchy–Schwarz para series, 109
de Cauchy-Schwarz, 43, 420
de Hölder, 242
de Hadamard-Landau, 209
de Hardy-Littlewood y Karamata, 363
de Hermite–Hadamard, 364
de Jensen, 358
de Jordan, 361
de la media geométrica y aritmética, 195
de Minkowski, 44
de Ptolomeo, 423
de Young, 195, 241
del valor medio, 187
log-suma, 361
triangular, 33
triangular (para métricas), 41

Espacio
con producto interno, 420
de funciones acotadas, 265
de funciones integrables, 220
euclídeo, 42, 43
métrico, 41
métrico completo, 89
vectorial normado, 42

Fracciones parciales, 191
Fracción continua simple, 86, 320
Función
arcotangente, 258
α-Hölder, 305
absolutamente integrable, 257
analítica, 207
arcoseno, 262
Beta, 414
característica de un conjunto, 235
convexa, 357
coseno, 282, 388
coseno hiperbólico, 285
cóncava, 357

de clase C^n, 205
de Dirichlet, 164, 214
de distancia, 41
de Möbius, 122
de soporte compacto, 373
de Thomae, 164
de tipo s-Gevrey, 372
de Van der Waerden, 306
de variación acotada, 425
diferenciable, 173
digamma, 273, 352
dilogaritmo, 352
Discontinuidad de una, 163
en base 13 de Conway, 297
Epígrafo de una, 363
estrictamente monótona, 167
eta de Dirichlet, 134
exponencial, 119, 244
exponencial (compleja), 327
factorial, 15
Gamma, 409
infinitas veces diferenciable, 176
integrable en el sentido de Darboux, 214
integrable en el sentido de Riemann, 217
integrable en el sentido impropio, 254
localmente integrable, 253
logaritmo (complejo), 329
logaritmo natural, 86, 243
logarítmicamente convexa, 362
monótona creciente, 167
monótona decreciente, 167
Módulo de continuidad de una, 440
Oscilación de una, 169
parte entera, 31
parte fraccionaria, 31, 312
polinomial, 287
seno, 282, 388
seno hiperbólico, 285
signo, 416
Soporte de una, 373
suave, 206
tangente, 283
ultradiferenciable, 371
valor absoluto, 33
zeta de Riemann, 108, 273, 398
zeta de Riemann doble, 132
Fórmula
de duplicación de Legendre, 418
de Euler, 190
de Faà di Bruno, 365
de Grünwald-Letnikov, 202
de Hadamard, 117
de inversión binomial, 372
de Moivre, 389
de reflexión para la función zeta de Riemann doble, 132
de Stirling, 84, 249, 416
de suma de ángulos para el seno y el coseno, 388
de sumas por partes, 122
de Taylor con resto diferencial, 204
de Taylor con resto integral, 227
de Taylor para polinomios, 203
de Wallis, 84

Identidad de polarización, 420
Ínfimo, 24
Integral
de Darboux, 214
de Dirichlet, 258
de Jackson, 219
de Riemann, 217
impropia, 254
inferior de Darboux, 214
superior de Darboux, 214
Integrales
de Fresnel, 263
de Wallis, 248, 262
Intervalo, 30

Lema de Riemann-Lebesgue, 238
Lemniscata, 434
Ley del paralelogramo, 420
Leyes de De Morgan, 6
Límite
a derecha de una función real, 162
a izquierda de una función real, 162
de una aplicación entre espacios métricos, 141
de una sucesión, 75
de una sucesión a $\pm\infty$, 82
inferior, 95
superior, 95

Media
aritmética y geométrica, 195
aritmético-geométrica, 87, 259
armónica, 195
de Heinz, 196
logarítmica, 286
Máximo, 24
local de una función, 183
Métricas, 41
equivalentes, 52, 78
Mínimo, 24
local de una función, 183

Normas, 42
equivalentes, 52, 156
Números
algebraicos, 38, 186
armónicos, 102, 354
complejos, 324
de Bernoulli, 397
de Brjuno, 323
de Diofanto, 324
de Euler, 401
de Fibonacci, 13
de Lioville, 311
enteros, 11
irracionales, 28
naturales, 11
naturales libres de cuadrados, 121
primos, 12, 17, 96
racionales, 12
reales, 28
trascendentes, 38

Partición, 365
de un intervalo, 212
punteada, 217
Polinomio
con coeficientes enteros, 288
de Taylor, 203
Polinomios
Anillo $K[t]$ de, 28
de Chebyshev, 389
en varias variables, 148
trigonométricos, 439
Principio
de buena ordenación, 13
de inducción matemática, 12
de intervalos encajados, 36
Problema
de Basilea, 108, 137, 252
del Cuadrado Inscrito, 155
Producto
infinito, 402
interno, 419
Propiedad arquimediana, 30
Punto
aislado, 71
crítico de una función real, 192
de inflexión de una función real, 198
interior, 52
límite o de acumulación, 53, 77

Raíz n-ésima de la unidad, 392
Recta real extendida, 95
Regla
de L'Hôpital, 199
de la cadena, 175, 188

de Leibniz, 175, 181
de Leibniz para integrales impropias, 294
Regla de Leibniz para integrales, 232
Regla de Stolz–Cesàro, 83
Versión general de la, 100

Serie
absolutamente convergente, 103
armónica, 102
armónica alternante, 351
bi-geométrica, 341
binomial, 284
de Bertrand, 124
de Maclaurin, 206
de potencias, 117, 279
de Taylor, 206
de términos positivos, 103
geométrica, 88, 103
numérica, 101
por bloques, 130
reordenación de una, 126
sumable, 128
telescópica, 103
Spline lineal, 440
Subsucesión, 92
Sucesión, 15
Convergencia de una, 75
de Cauchy, 89
de Farey, 100
log-convexa, 371
monótona creciente, 81
monótona decreciente, 81
Suma
de Riemann, 217
de una serie, 101
Supremo, 24
Símbolo de Pochhammer, 346

Teorema
de Abel, 350
de Abel-Pringsheim, 105
de aproximación de Weierstrass, 286
de Bohr-Mollerup, 411
de Bolzano-Weierstrass, 93
de Borel-Lebesgue, 66
de Borel-Peano, 374
de Cantor, 65
de Darboux, 197
de Dini, 272
de Dirichlet, 313
de Euler sobre la factorización de la función zeta de Riemann, 404
de factorización del seno, 407
de Flett, 196
de Gauss sobre la función Gamma, 412
de Gauss sobre los valores racionales de la función digamma, 394
de Heine-Borel, 67
de Jordan, 428
de Lebesgue, 236
de los números primos, 166
de Lévy-Steinitz, 128
de Mertens, 119
de Pitágoras, 420
de Riemann, 126
de Rolle, 184
de Stone-Weierstrass, 438
de Tannery para integrales, 284
de Tannery para productos, 406
de Tannery para series, 136
de Taylor, 204
de Wayment, 230
de Weierstrass, 68
del M-test de Weierstrass, 272
del Binomio, 26
del número de Lebesgue, 162
del punto fijo de Brouwer, 153
del valor extremo, 151
del valor intermedio, 152

del valor medio - Cauchy, 184
del valor medio - Lagrange, 184
del valor medio para integrales, 223, 228
Fundamental de la Aritmética, 12
Fundamental del Cálculo I, 225
Fundamental del Cálculo II, 226
Fundamental del Álgebra, 333
multinomial, 26

Vecindad, 48

Índice onomástico

Abel, Niels Henrik, 105, 110, 350
Alexandrov, Aleksandr Danilovich, 61
Ali, Sayel A., 337
Apéry, Roger, 29
Arbogast, Louis Francois Antoine, 365
Arquímedes de Siracusa, 211

Banach, Stefan, 42
Bernoulli, Jacob, 34, 397
Bernstein, Sergei Natanovich, 231, 287
Bertrand, Joseph Louis François, 124, 342
Bohr, Harald, 411
Bolzano, Bernhard, 68, 93
Borel, Émile, 66, 67, 374
Brjuno, Aleksandr, 323
Brocot, Achille, 20
Bromwich, Thomas John I'Anson, 347
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 153

Calkin, Neil, 20
Cantor, Georg, 19, 22, 71
Carleman, Torsten, 125
Catalan, Eugène Charles , 29
Cauchy, Augustin-Louis, 43, 88, 107, 184, 206, 211
Cesàro, Ernesto, 83
Conway, John Horton, 165, 297

Darboux, Jean Gaston, 197, 211
de la Vallée Poussin, Charles, 166
De Moivre, Abraham, 389
De Morgan, Augustus, 6, 342
Dedekind, Richard, 28
Dini, Ulisse, 271
Diofanto de Alejandría, 324
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 122, 309, 313
du Bois Reymond, Paul, 110

Euclides, 17
Euler, Leonard, 29, 108, 134, 190, 352, 409

Faà di Bruno, Francesco, 365
Farey Sr., John, 100
Fermat, Pierre de, 219
Feynman, Richard, 232
Flett, Thomas Muirhead, 196
Fourier, Jean-Baptiste-Joseph, 211
Fresnel, Augustin-Jean, 263
Fréchet, Maurice René, 61

Gauss, Johann Carl Friedrich, 88, 260, 263, 309, 320, 352, 394
Gelfond, Aleksandr, 34
Genocchi, Angelo, 374
Gołab, Stanisław, 432
Grünwald, Karl, 202
Gregori, James, 123

Hölder, Ludwig Otto, 242, 305

Hadamard, Jacques, 117, 166, 209
Halphen, Georges Henri, 371
Hausdorff, Felix, 62
Heine, Eduard, 67
Heinz, Erhard, 196
Henstock, Ralph, 212
Hermite, Charles, 314
Hilbert, David, 298
Hoppe, Ernst Reinhold Eduard, 368

Jackson, Frank Hilton, 219
Jacobi, Carl Gustav Jakob, 263
Jamet, Victor, 347
Jensen, Johan, 358
Jordan, Camille, 361
Jordan, Pascual, 421

Kempner, Aubrey John, 317
Knopp, Konrad, 125
Koch, Helge von, 433
Kolmogorov, Andrey Nikolaevich, 209
Kummer, Ernst Eduard, 342
Kuratowski, Kazimierz, 57
Kurzweil, Jaroslav, 212

L'Hôpital, Guillaume François Antoine, Marquis de, 199
Lagrange, Joseph-Louis, 184
Landau, Edmund Georg Hermann, 209
Lebesgue, Henri Léon, 66, 212, 235
Legendre, Adrien-Marie, 418
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 123, 175, 211
Letnikov, Aleksey Vasilievich, 202
Lima, Elon Lages, 1
Lindermann, Carl Louis Ferdinand, 38
Lioville, Joseph, 187, 311
Lipschitz, Rudolph Otto Sigismund, 157
Lévy, Paul Pierre, 128

Möbius, August Ferdinand, 122
Maclaurin, Colin, 206
Mascheroni, Lorenzo, 29
Meissel, Ernst, 253
Mertens, Franz, 119, 253
Minkowski, Hermann, 44, 58
Mollerup, Johannes, 411

Newman, Donald Joseph, 260
Newton, Isaac, 211
Niven, Ivan, 314

Oresme, Nicolas, 102

Pascal, Blaise, 20
Peano, Giuseppe, 374
Pitágoras de Samos, 420
Pochhammer, Leo August, 346
Pringsheim, Alfred, 105
Ptolomeo, Claudio, 423

Raabe, Joseph Ludwig, 342
Riemann, Bernhard, 126, 211
Rolle, Michel, 184
Rudin, Walter, 1, 303

Schneider, Theodore, 29, 34
Schoenberg, Isaac Jacob, 209, 304, 424
Schwarz, Karl Hermann Amandus, 43
Sharkovsky, Oleksandr Mykolayovych, 27
Smith, Henry John Stephen, 71
Steinitz, Ernst, 128
Stern, Moritz, 20
Stieltjes, Thomas Joannes, 211
Stirling, James, 83
Stolz, Otto, 83, 202
Stone, Marshall Harvey, 286, 435

Tannery, Jules, 136
Tauber, Alfred , 355
Taylor, Brook, 203
Thomae, Carl Johannes, 164

Urysohn, Pável, 61

van der Waerden, Bartel Leendert, 306
Volterra, Vito, 226, 300
von Neumann, John, 421

Wallis, John, 84
Watson, George Neville, 388
Wayment, Stanley, 230
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 68
Whitney, Hassler, 378
Whittaker, Edmund Taylor, 388
Wilf, Herbert, 20

Young, William Henry, 195, 241

Zagier, Don, 135
Zhang, Yitang, 96

Introducción al análisis real. Guía actualizada de clase
Se imprimió en los talleres de la Sección de Publicaciones de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, en octubre de 2023 con un tiraje de 300 ejemplares. Para su elaboración se utilizó papel Earth Pact 70 g para páginas interiores y propalcote 300 g para carátula.
Las fuentes utilizadas pertenecen a la familia Nimbus Roman.

El objetivo principal de este libro es ofrecer al lector una exposición actualizada de temas clásicos en Análisis Matemático en una variable real de forma autocontenida, asumiendo requisitos básicos en fundamentos de matemáticas y cálculo en una variable. El texto surge del desarrollo de esta asignatura por parte de los autores durante los años 2018 a 2022, basados en los ya clásicos *Principles of Mathematical Analysis* de Walter Rudin y *Curso de Análise Matemático* vol. 1 de Elon Lages Lima.

El libro propone ahondar en ideas básicas a través de resolución de problemas en temas relacionados con la materia. Se enfoca en detalles y aplicaciones dentro del propio Análisis Real, mas no en la búsqueda de generalidad. Este incorpora de manera natural más de cien artículos de revistas como *The American Mathematical Monthly* especializadas en publicar material inédito sobre temas elementales, así como 500 ejercicios de práctica y profundización.

Este texto es adecuado para un primer curso de Análisis Real a desarrollarse en uno o dos semestres académicos. Puede servir como texto guía para docentes que busquen una nueva alternativa y compartan la visión adoptada aquí. Por otra parte, puede valer como libro de consulta, como fuente de ejercicios y proyectos para asignar a estudiantes. Finalmente, se puede tomar como herramienta de diversión para personas apasionadas por las matemáticas con gusto por resolver problemas. Es el deseo de los autores que los lectores puedan disfrutar y aprender del texto tal como ellos lo hicieron al escribirlo.

ISBN: 978-958-505-394-6
Número de páginas: 473
Editorial: Universidad Nacional de Colombia