UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estudio de Cambios de Sabor Leptónico a Tres Cuerpos en el Marco de una Extensión No-Universal $U(1)_X$ al Modelo Estándar

Miguel Angel Bulla Rivas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2023

Estudio de Cambios de Sabor Leptónico a Tres Cuerpos en el Marco de una Extensión No-Universal $U(1)_X$ al Modelo Estándar

Miguel Angel Bulla Rivas

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Física

Director:
PhD. Roberto Enrique Martínez Martínez

Grupo de Investigación:
Grupo de Física Teórica de Altas Energías

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento Física
Bogotá, Colombia
2023

"The axiomatic basis of theoretical physics cannot be extracted from experience but must be freely invented."

A. Einstein.

Agradecimientos

A mi maestro y director de tesis, el profesor Roberto Enrique Martínez Martínez por toda su guía y dirección en la realización del presente trabajo, por todo el tiempo dedicado en seminarios, exposiciones, discusiones, por todo el conocimiento que compartió conmigo en el entendimiento y profundización de lo que es la teoría de campos, y por todo su esfuerzo en inculcar siempre una formación en física integral y de competencia

A mi amigo y compañero de estudio Daniel Guillermo Martínez Gómez, por todas las horas que compartimos discutiendo y comprendiendo gran parte de los temas expuestos en el presente documentos

A la Universidad Nacional de Colombia, por darme el privilegio de instruirme dentro de sus aulas, además de permitirme pertenecer a su comunidad académica.

Finalmente, a mi mamá, Diana Rivas B., y a mi papá, Wilson R. Bulla, porque sin todo su apoyo y cuidado no habría sido posible este trabajo.

Resumen

Título: Estudio de Cambios de Sabor Leptónico a Tres Cuerpos en el Marco de una Extensión No-Universal $U(1)_X$ al Modelo Estándar

El Modelo Estándar asume la conservación del sabor leptónico en las diferentes interacciones entre leptones cargados, quarks y bosones. No obstante, hace menos de seis meses se reportó la corroboración experimental del rompimiento de la universalidad del sabor leptónico en decaimientos semileptonicos del mesón B[1]. Esto conlleva a explorar la violación del sabor leptónico a través de las interacciones entre leptones cargados y bosones neutros. Para realizar esta exploración se hace uso de extensiones al modelo estándar con las cuales sea posible explicar la anomalía del mesón B, la violación del sabor leptónico, entre otras interrogantes. En ese orden de ideas, el presente proyecto busca estudiar la violación del sabor leptónico, a la luz de diferentes decaimientos a dos y tres cuerpos de leptones cargados, donde la descripción de estos procesos se enmarcan en una extensión No-Universal $U(1)_X$ al Modelo Estándar.

Palabras Clave: Violación del Sabor Leptónico, Operadores Efectivos, Decaimiento a Tres Cuerpos, Interacciones con Cambios de Sabor.

Abstract

Title: Study on Three-Body Leptonic Flavour Changes in the Framework of a Non-Universal Extension $U(1)_X$ to the Standard Model

The standard model assumes the conservation of lepton flavor in the different interactions between charged leptons, quarks and bosons. However, less than six months ago, experimental corroboration of the breakdown of the universality of the lepton flavor in semileptonic decays of the B meson was reported [1]. This leads to exploring the violation of lepton flavor through interactions between charged leptons and neutral bosons. To carry out this exploration, extensions to the standard model are used with which it is possible to explain the B meson anomaly, the violation of lepton flavor, among other questions. In this order of ideas, the present project seeks to study the violation of lepton flavor, in light of different decays to two and three charged lepton bodies, where the description of these processes are framed in a non-universal extension $U(1)_X$ to the standard model.

Keywords: Lepton Flavour Violation, Effective Operators, Two and three body decays, Flavour Changing Interactions.

Lista de Figuras

4-1. Representación diagramática más general para el proceso de transición de un leptón $l_i(p)$ a un leptón $l_j(p')$, al emitir se un fotón $\gamma(q)$ en el proceso 44
4-2. Diagrama - contribución mediada por el bosón de gauge $W^{\pm}$ y los neutrinos de Majorana $N_{1,2}$ 45
4-3. Diagrama de la contribución mediada por el leptón exótico E del modelo No-Universal $U(1)_X$ y el bosón neutro Z_0 del Modelo Estándar 48
4-4. Contribuciones asociadas con escalares neutros del modelo No-Universal $U(1)_X$ 49
4-5. Diagrama - contribución mediada por el bosón escalar cargado pesado $H^{\pm}$ y los neutrinos de Majorana $N_{1,2}$ 51
4-6. Diagramas de interacción entre el leptón E y (a) bosón de gauge W^- y bosón de Goldstone G_W^- (b) bosón de Goldstone G_W^- y bosón de gauge W^-. 53
4-7. Diagramas de interacción entre el leptón E y el bosón de Goldstone G_{Z_0} . . 53
4-8. Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación del Sabor de Leptón Cargado 54
4-9. Proceso de decaimiento a tres-cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado, a través de bosón escalar 54
4-10.Vértice con Violación del Sabor de Leptón Cargado ilustrando el acople entre el bosón de Higgs y los leptones cargados considerados 55
4-11.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu e \mu$ 66
4-12.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu\mu\mu$ 67
4-13.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu ee$ 67
4-14.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow e\mu e$ 68
4-15.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow e\mu\mu$ 68
4-16.Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow eee$ 69
4-17.Diagrama de decaimiento del proceso $\mu \longrightarrow eee$ 69

5-1. Gráfica para los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$, con $m_E = 1000\,GeV$ y $m_N = 300\,GeV$ 72
5-2. Gráfica para el decaimiento $\mu \longrightarrow e\gamma$, con $m_E = 1000\,GeV$ y $m_N = 300\,GeV$ 73
5-3. Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 10000\,GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir a $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$ 74

5-4. Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 5000\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$ 75
5-5. Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 2500\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$ 76
5-6. Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 2250\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$ 76
5-7. Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$. 78
5-8. Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$. 79
5-9. Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$. 80
5-10.Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$. 81
5-11.Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$. 82
5-12.Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$. 83
5-13.Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$. 84

B-1. Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe como $-i(a^i P_L + b^i P_R)$ 94
B-2. Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe como $-i(a^i P_L + b^i P_R)$ 94
B-3. Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$ 95
B-4. Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$ 95
B-5. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^\pm$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^i P_L + b^i P_R)$ 95
B-6. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^\pm$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^i P_L + b^i P_R)$ 96
B-7. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^\pm$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^i P_L + b^i P_R)$ 96
B-8. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^\pm$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$ 96

B-9. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$ 97
B-10. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$ 97
B-11. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge neutro Z 98
B-12. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge neutro Z 98
B-13. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge cargado W^- 99
B-14. Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge cargado W^- 99

Lista de Tablas

2-1. Limites superiores experimentales para las fracciones de decaimientos a dos y tres cuerpos de leptones cargados con cambios de sabor 6
2-2. Tabla de multiplicación de los posibles valores de la simetría Z_2. 7
2-3. Valores de la carga X y el valor asociado al grupo de paridad Z_2 para los dobletes de bosones escalares ϕ_1, ϕ_2 y el singlete escalar χ. 8
2-4. Números cuánticos del modelo extendido no-universal $U(1)_X$: carga X del grupo $U(1)_X$, Z_2 paridad, T_3 tercera componente de isoespín e hipercarga Y para las partículas SM y no SM. 8

4-1. Límites superiores experimentales para las fracciones de decaimiento de procesos a dos y tres cuerpos de leptones cargados con cambios de sabor 43
4-2. Comparación entre los diferentes valores de masa entre leptones cargados y el bosón de Higgs, en donde $m_h = 125.1\, GeV$ 60
4-3. Tabla resumen con los diferentes canales de decaimiento y sus respectivos coeficientes. $\widetilde{m}_E = \frac{m_E}{GeV}$, por lo que $\widetilde{m}_E$ es adimensional. 66
4-4. Tabla resumen con los canales de decaimiento y *Branching Ratio* para los decaimientos con Cambio de Sabor de Leptón Cargado. 70

5-1. Tabla con el resumen de los canales de decaimiento y *Branching Ratio* para procesos leptónicos a tres cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado. 85

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Abstract x

Lista de figuras xi

Lista de tablas xv

1. Introducción 2

2. Marco Conceptual de Trabajo: Extensión $U(1)_X$ al Modelo Estándar de Partículas Fundamentales 5

2.1. Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$ 7

2.1.1. Ecuaciones de anomalías quirales 9

2.1.2. Discusión Complementaria sobre el Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$ 10

2.2. Bosones escalares 12

2.2.1. CP-odd 14

2.2.2. CP-even 14

2.3. Sector cargado 17

2.3.1. Diagonalización 17

2.4. Sector neutro 25

2.5. Sector electrodébil 29

3. Acoples que Contribuyen a los Decaimientos con Violación de Sabor de Leptón Cargado en el Modelo No-Universal $U(1)_X$ 33

3.1. Sector de Acoples Leptón Neutro-Leptón Cargado con Bosones Escalares . . 33

3.2. Sector de Acoples entre Leptones Cargados y Bosones Escalares 34

3.3. Sector Electrodébil 36

3.3.1. Interacción entre Bosones de Gauge y Leptones 37

4. Procesos de Decaimiento a 2 y 3 Cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado **43**
4.1. Procesos de Decaimiento a Dos Cuerpos 44
4.1.1. Contribución Debida a $W^{\pm} - W^{\mp} - N_{1,2}^{e,\mu}$ 45
4.1.2. Contribución debida a $E - E - Z_0$ 48
4.1.3. Contribución debida a $E^- - E^- - h_{SM}$ 49
4.1.4. Contribución debida a $H^{\pm} - N_{1,2}^{e,\mu} - H^{\pm}$ 51
4.2. Procesos de Decaimientos a Tres Cuerpos 54
4.2.1. Vértices y Diagramas 54
4.2.2. Amplitud Invariante de Feynman (AIF) 56
4.2.3. Cuadrado de la AIF, Suma y Promedio del Spin del Leptón Entrante y de los Salientes 56
4.2.4. Integral del Cuadrado de la AIF 61
4.2.5. Diagramas y Deducciones Analíticas Asociadas a los Decaimientos a Tres Cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado 66
4.2.6. $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$ 66
4.2.7. $\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$ 67
4.2.8. $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$ 67
4.2.9. $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$ 68
4.2.10. $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$ 68
4.2.11. $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$ 69
4.2.12. $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$ 69

5. Análisis y Resultados **71**
5.1. Exploración de Parámetros - Decaimientos a 2-Cuerpos 71
5.1.1. Enfoque 1 71
5.1.2. Enfoque 2 74
5.1.3. Análisis 77
5.2. Exploración de Parámetros - Decaimientos a 3-Cuerpos 77
5.2.1. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$ 78
5.2.2. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$ 79
5.2.3. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$ 80
5.2.4. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$ 81
5.2.5. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$ 82
5.2.6. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$ 83
5.2.7. Proceso $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$ 84
5.2.8. Análisis 84
5.3. Discusión de los Resultados 85
5.3.1. Decaimientos Radiativos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ 85
5.3.2. Decaimientos Radiativos $\mu \longrightarrow e\,\gamma$ 88

5.3.3. Decaimiento en 3-Cuerpos 88

6. Conclusiones **91**

A. Anexo: Diagonalización por bloques **93**

B. Anexo: Reglas de Feynman - Descripción Complementaria **94**

B.0.1. Reglas para Acoples con el Bosón Escalar h_{SM} 94

B.0.2. Reglas para Acoples con el Bosón Escalar Cargado $H^{\pm}$ 95

B.0.3. Reglas para Acoples con el Bosón Z 97

B.0.4. Reglas para Acoples con el Bosón $W^{\pm}$ 99

Bibliografía **101**

1. Introducción

Dentro de las diferentes ramas de la física, existe una en particular que busca describir la naturaleza a nivel fundamental, la cual se denomina física de partículas. Esta área de la física está construida sobre la teoría cuántica de campos[2], teoría que describe procesos cuánticos a escalas relativistas[3]. La base estructural de esta teoría es la invarianza de diferentes cantidades físicas, mejor conocidas como simetrías[4]. Estas simetrías pueden ser clasificadas en discretas y continuas. Una simetría continua es, por ejemplo, la invariancia traslacional, que conlleva a la conservación del momentum lineal. En contraste, un ejemplo de simetría discreta es la invariancia al invertir los ejes coordenados del sistema físico particular, es decir, la invariancia bajo paridad[5, 6].

El modelo teórico que describe actualmente los fenómenos físicos a nivel fundamental se denomina Modelo Estándar de partículas,o Standard Model (SM) en inglés[7, 8]. Para la construcción de este modelo fue necesario el esfuerzo mancomunado de muchas personas, entre ellas, Salam, Weinberg y Glashow[9, 10, 11]. Este modelo es una teoría de gauge esencialmente constituida por el grupo de simetrías continuas $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. A través de este conjunto de simetrías de gauge es posible describir la interacción entre diferentes partículas fundamentales y compuestas(electrones, muones, mesones, piones, etc). El contenido de partículas del Modelo Estándar se clasifica en fermiones y bosones[8, 7, 12, 6]]. Dentro de la clasificación de los fermiones del modelo, se encuentran los quarks y los leptones, y en contraste, los bosones se clasifican en bosones escalares y bosones de gauge. Estos bosones de gauge son los campos cuánticos responsables de las interacciones entre fermiones de distinto tipo, es decir, son las partículas mediadoras de las interacciones.

En ese sentido, el Modelo Estándar postula la existencia de tres interacciones fundamentales: la interacción fuerte mediada por gluones, o mejor conocida como cromodinámica cuántica, y las interacciones electromagnética y débil mediadas por los bosones $W^{\pm}$ y Z^0. La interacción fuerte está asociada al grupo de simetría de gauge $SU\left(3\right)_c$[13, 14], la interacción débil está asociada al grupo de simetría $SU\left(2\right)_L$, donde únicamente las partículas con quiralidad izquierda interactúan débilmente[15, 16, 17]. El grupo de simetría $U\left(1\right)_Y$ esta asociado a la hipercarga. Es menester notar que al conjunto de simetrías $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ conforman la interacción electrodébil[18].

Ahora bien, para que las partículas del Modelo Estándar tengan masa, se introduce un campo escalar denominado campo de Higgs. Así, a través del mecanismo Brout–Englert–Higgs, el campo de Higgs dota de masa a las partículas del modelo (fermiones y bosones de gauge), al tomar este campo escalar un valor concreto de expectación del vacio[19]. Este hecho trae

como consecuencia la ruptura de la simetría de gauge electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, dejando como remanente la simetría de gauge $U(1)_Q$, la cual está asociada a la interacción electromagnética, mediada por el fotón. Cabe mencionar que las masas de los fermiones, así como las interacciones entre las diferentes partículas del modelo, aparecen a través de acoples de Yukawa, es decir, entre acoples de campos fermionicos y bosonicos escalares o vectoriales(de gauge) según sea el caso[20, 21].

Por otro lado, en la naturaleza a nivel fundamental, pueden tener lugar dos tipos de procesos, colisiones entre partículas o decaimiento de las mismas. Particularmente, los decaimientos son fenómenos físicos en los que una partícula (elemental o compuesta) transmuta espontáneamente en otra[6, 22]. Este proceso depende principalmente de las interacciones (intensidad o fuerza de la interacción) entre las partículas implicadas en el fenómeno, así como de sus masas.

El Modelo Estándar de partículas fundamentales establece que las interacciones entre partículas de la misma categoría, más específicamente, la intensidad de las interacciones entre bosones de gauge y leptones cargados es igual, de manera que se tiene una suerte de universalidad entre las interacciones de los diferentes tipos de leptones cargados. En ese sentido, a nivel del Modelo Estándar, el electrón, el muón y el tau, no se diferencian entre si al momento de considerar los decaimientos de estas partículas, mediadas, por ejemplo, por la interacción con el bosón de Higgs (bosón escalar neutro) y con los bosones de gauge Z^0 y $W^{\pm}$[23]. Ahora bien, la universalidad a la que se hace mención está asociada a lo que se denomina como conservación del sabor de leptón cargado. En ese sentido, se tiene que el Modelo Estándar clasifica los fermiones fundamentales en seis sabores de quarks y seis sabores de leptones. De estos fermiones, los únicos de los que no se tiene aún evidencia, en lo que respecta a la violación de esta universalidad, es decir, a la violación de sabor, son los leptones cargados. Sin embargo, el descubrimiento de la oscilación de neutrinos (neutrinos masivos) da cabida para la ocurrencia de la violación de sabor de leptón cargado, y por tanto, para su estudio.[24]

La no universalidad de la intensidad de las interacciones entre leptones cargados, o violación de sabor de leptón cargado, a la luz de los decaimientos de estas partículas, se ha buscado experimentalmente, en lo que respecta a los muones, desde la segunda mitad del siglo XX, y desde mediados de los años 80 en lo que se refiere a los tauones[25, 26, 27]. Desde entonces hasta hoy en día, varios laboratorios a nivel mundial (tales como el experimento MEG y SINDRUM I-II en el PSI y el LHC en el CERN en Suiza, el SuperKEKB y Belle en el J-PARC en Japón, el BaBar y CLEO en Estados Unidos) se han dedicado a la tarea de detectar posibles señales que manifiesten la violación de sabor de leptón cargado[28, 25, 29]. La referencia [26] consigna un revisión resumida sobre las búsquedas experimentales de la violación de sabor de leptón más actuales.

La aparición de una señal que evidencie la violación de sabor de leptón cargado abre una ventana para buscar nueva física, en tanto que el Modelo Estándar asume la conservación de sabor leptónico[12]. Esto implica que cualquier observación de la mencionada violación proporciona evidencia taxativa de física Más Allá del Modelo Estándar (BSM). Se tiene

entonces que la violación de sabor de leptón cargado es una herramienta perfecta para la exploración de modelos con física Más Allá del Modelo Estándar (BSM). Es importante mencionar que varios programas de búsquedas experimentales en este ámbito se están llevando a cabo en Estados Unidos, Europa y Asia[30], lo cual refleja la pertinencia y actualidad del tópico central del presente estudio. Ahora bien, varias extensiones al Modelo Estándar se han considerado para abordar la violación de sabor de leptón cargado (en adelante $VSLC$); la referencia [12] resume varios modelos extendidos que se han utilizado para estudiar la $VSLC$.

El modelo No-Universal $U(1)_Y$ es una extensión del Modelo Estándar que logra explicar la oscilación de neutrinos, la jerarquía de masas, al introducir nuevas partículas, entre ellas leptones exóticos cuyos acoples con bosones neutros cambian el sabor leptónico, y por tanto, permiten describir procesos de decaimiento en donde se viola el sabor de leptón cargado. Este modelo se describe con entero detalle en las referencias[31, 32, 33]. El contenido nuevo de partículas se introduce de tal manera que el modelo sea libre de anomalías, como se verá en capítulos siguientes.

Así, el presente estudio busca describir los decaimientos de leptones cargados que violan el sabor de leptón cargado a través de la interacción (acoples) entre los leptones cargados del Modelo Estándar con bosones (tanto escalares como de gauge) neutros exóticos, introducidos en la extensión No-Universal $U(1)_Y$, entre otros acoples. Adicionalmente, se espera identificar y acotar la región de parámetros libres asociada con los leptones cargados del modelo anteriormente mencionado. Por tal razón, en el capítulo 2 se explica la mencionada extensión No-Universal, en el capítulo 3 se abordan los acoples del modelo que contribuyen a los procesos con $VSLC$ al exponer los Lagrangianos cinéticos y de Yukawa, en el capítulo 4 se presentan los diagramas, con sus respectivas expresiones analíticas, que contribuyen a los procesos de decaimiento con $VSLC$ considerados, en el capítulo 5 se reportan y analizan los resultados del presente estudio. Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones.

2. Marco Conceptual de Trabajo: Extensión $U(1)_X$ al Modelo Estándar de Partículas Fundamentales

El contenido fermiónico de partículas del Modelo Estandar se clasifica en quarks y leptones, en donde se tienen tres generaciones para cada clase de partícula. En lo que respecta a los quarks, existen los quarks up-down (u,d), charm-strange (c,s) y top-bottom (t,b), mientras que para los leptones, los cuales se dividen en neutros y cargados, hay neutrino electrónico-electrón (ν_e,e^-), neutrino muonico-muón (ν_μ,μ^-) y neutrino tauónico-tauón (ν_τ,τ^-). Cada uno de estos tipos específicos de quarks o leptones (neutros y cargados) se les denomina sabor o "Flavor" en inglés[34].

El Modelo Estandar establece que las intensidades de interacción tanto entre leptones cargados y quarks, como entre leptones cargados entre sí es la misma, de manera que al decaer un quark en otro quark emitiendo un leptón cargado, o al decaer un leptón cargado en otros leptones cargados, la razón de ramificación, o "Branching Ratio" (BR) en inglés, para cada canal específico de decaimiento es aproximadamente el mismo[23]. En este sentido, se tiene que las únicas interacciones en el Modelo Estandar que permiten el cambio de sabor entre leptones cargados son los acoples entre quarks, bosones cargados y leptones cargados. Por tal razón, los acoples entre leptones cargados y bosones neutros en el Modelo Estandar no cambian de sabor, de manera que no se viola el sabor leptónico.

No obstante, en los últimos años se ha seguido con detenimiento a nivel experimental los canales de decaimiento del mesón B con emisión de leptones cargados, dado que se han presentado discrepancias entre lo que predice el Modelo Estandar y lo encontrado experimentalmente. En marzo del 2021, la colaboración del experimento LHCb encontró evidencia experimental de esta discrepancia, categorizándola como anomalía, en tanto que pone de manifiesto la violación de la universalidad leptónica ("Lepton Universality") en los decaimientos del quark b con un grado de significancia de 3.1 sigma[35].

Este hecho invita a estudiar los procesos de decaimiento en los que tienen lugar los cambios de sabor de leptones cargados, particularmente al estudiar los decaimientos de leptones cargados a leptones cargados en donde hay cambios de sabor de estas partículas, lo cual se conoce como violación del sabor leptónico, o "Lepton Flavor Violation" (LFV). De los experimentos de oscilación de neutrinos se sabe que los leptones neutros (neutrinos) violan el sabor leptónico[21], en tanto que esta violación se requiere para explicar la masa de los

neutrinos, lo cual motiva aún más el considerar estudiar la LFV para los leptones cargados. Cabe mencionar que cuando se haga alusión al concepto de LFV, se está hablando específicamente de la violación del sabor leptónico de leptones cargados.
Ahora bien, experimentalmente se han realizado pesquisas dirigidas a la búsqueda de evidencias que manifiesten la LFV, sin embargo, lo que se ha podido encontrar hasta el momento son cotas superiores para diferentes fracciones de decaimiento, o *Branching Ratio* (*BR.*), asociadas a varios canales de decaimiento leptónico a dos y tres cuerpos, tal como lo ilustra la Tabla **2-1**.

Branching Ratios	
Proceso	Cota Experimental
$\mathcal{B}(\tau \longrightarrow \mu\gamma)$	4.2×10^{-8}[36, 37]
$\mathcal{B}(\tau \longrightarrow e\gamma)$	3.3×10^{-8}[36, 38]
$\mathcal{B}(\mu \longrightarrow e\gamma)$	4.2×10^{-13}[36, 39]
$\mathcal{B}(\mu^- \longrightarrow e^-e^+e^-)$	1.0×10^{-12}[36, 40]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-)$	2.1×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-e^+e^-)$	2.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-)$	2.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-e^+e^-)$	1.8×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-e^+\mu^-)$	1.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-)$	1.5×10^{-8}[36, 41]

Tabla 2-1.: Limites superiores experimentales para las fracciones de decaimientos a dos y tres cuerpos de leptones cargados con cambios de sabor

Si bien los valores de las fracciones de decaimiento no son lo suficientemente grandes para aseverar en este momento la presencia de la LFV en la naturaleza, se espera que en los años venideros se logre aumentar la sensibilidad de los equipos de medición, de tal manera que se puedan detectar señales que evidencien la LFV. Por ejemplo, el experimento MEG en el Instituto Paul Scherrer (PSI) ya está evaluando la razón de ramificación $B(\mu \longrightarrow e\gamma)$ a un orden de magnitud de $O(10^{-13})$; además ya está aprobada una actualización para este experimento que lleve a aumentar el grado de sensibilidad a 4×10^{-14}[42]. En el experimento SuperKEKB, se planea llegar a una sensibilidad del orden de $O(10^{-8})$ para el canal de decaimiento $\tau \longrightarrow \mu\gamma$[12]. Cabe mencionar que estos procesos se estudian también en el experimento LHCb del CERN.

2.1. Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$

Con base en los resultados experimentales consignados en la Tabla **2-1**, y teniendo en cuenta las mejoras que se esperan en los próximos años para los diferentes laboratorios que realizan estas mediciones (experimento MEG y SINDRUM II en PSI[42, 43, 44], SuperKEK, PRISM/PRIME y COMET en J-PARC[45, 46, 47], LHCb en CERN[48], Mu2e en Fermilab[49, 50]), se tiene entonces la posibilidad de encontrar nueva física, es decir, física más allá del Modelo Estándar. Por tal razón, se considera en el presente estudio la extensión No-Universal $U(1)_X$ al del Modelo Estándar.

Este modelo extendido se basa en el grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_X$, donde la adición del nuevo grupo de simetría, $U(1)_X$, al Modelo Estándar introduce un nuevo bosón de gauge Z_1 con su respectiva constante de acople g_X. Adicionalmente, la simetría de paridad, representada matemáticamente por el grupo de simetría Z_2, es utilizada con el propósito de obtener texturas cero tipo Fristzsch [51, 52, 53, 54, 32] en las matrices de masa asociadas a los Lagrangianos de Yukawa. El producto de los elementos del grupo Z_2 se observan en la Tabla **2-2**.

Z_2	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tabla 2-2.: Tabla de multiplicación de los posibles valores de la simetría Z_2.

Del mismo modo, se introducen dos dobletes y dos singletes escalares cuyos números cuánticos se pueden ver en la Tabla **2-3**. Adicionalmente, la extensión del sector leptónico conlleva la introducción de dos partículas cargadas exóticas, tres neutrinos de quiralidad derecha y tres neutrinos de Majorana.
Por otro lado, en el sector de quarks se agregan tres singletes. Las números cuánticos del nuevo grupo de simetría asociados tanto para las partículas del Modelo Estándar como para los nuevos campos exóticos se encuentran listados en la Tabla **2-4**. Asimismo, la carga eléctrica es deducida a través de la relación de Gell-Mann–Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \tag{2-1}$$

con Q la carga electromagnética, T_3 la tercera componente de isoespín y Y la hipercarga.
Debido a la nueva simetría de gauge abeliana $U(1)_X$, la derivada covariante de la teoría tiene un término extra, es decir:

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{2}W_\mu^\alpha \sigma_\alpha - \frac{ig'}{2}\frac{Y}{2}B_\mu - ig_X X Z'_\mu \tag{2-2}$$

Bosones Escalares	X	Z_2
Dobletes		
$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{h_1+v_1+i\eta_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$2/3$	$+$
$\phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{h_2+v_2+i\eta_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$1/3$	$-$
Singletes		
$\chi = \begin{pmatrix} \frac{\xi_\chi+v_\chi+i\eta_\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$-1/3$	$+$

Tabla 2-3.: Valores de la carga X y el valor asociado al grupo de paridad Z_2 para los dobletes de bosones escalares ϕ_1, ϕ_2 y el singlete escalar χ.

Dobletes de Isospín SM									
Quarks	X	Z_2	T_3	Y	Leptones	X	Z_2	T_3	Y
$\begin{pmatrix} U^1 \\ D^1 \end{pmatrix}_L$	$+1/3$	$+$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$1/3$	$\begin{pmatrix} \nu^e \\ e^e \end{pmatrix}_L$	0	$+$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix} U^2 \\ D^2 \end{pmatrix}_L$	0	$-$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$1/3$	$\begin{pmatrix} \nu^\mu \\ e^\mu \end{pmatrix}_L$	0	$+$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix} U^3 \\ D^3 \end{pmatrix}_L$	0	$+$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$1/3$	$\begin{pmatrix} \nu^\tau \\ e^\tau \end{pmatrix}_L$	-1	$+$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1
Singletes de Isospín SM									
U_R^1	$+2/3$	$+$	0	$4/3$	e_R	$-4/3$	$-$	0	-2
U_R^2	$+2/3$	$-$	0	$4/3$	μ_R	$-1/3$	$-$	0	-2
U_R^3	$+2/3$	$+$	0	$4/3$	τ_R	$-4/3$	$-$	0	-2
D_R^1	$-1/3$	$-$	0	$-2/3$					
D_R^2	$-1/3$	$-$	0	$-2/3$					
D_R^3	$-1/3$	$-$	0	$-2/3$					
Quarks no SM					Leptones no SM				
T_L	$+1/3$	-	0	$4/3$	$\nu_R^{e,\mu,\tau}$	$1/3$	-	0	0
T_R	$+2/3$	-	0	-4/3	$N_R^{e,\mu,\tau}$	0	-	0	0
$J_L^{1,2}$	0	$+$	0	-2/3	E_L	-1	$+$	0	-2
$J_R^{1,2}$	$-1/3$	$+$	0	$2/3$	E_R	-2/3	-	0	-2
					ε_L	-2/3	$+$	0	-2
					ε_R	-1	$+$	0	-2

Tabla 2-4.: Números cuánticos del modelo extendido no-universal $U(1)_X$: carga X del grupo $U(1)_X$, Z_2 paridad, T_3 tercera componente de isoespín e hipercarga Y para las partículas SM y no SM.

2.1.1. Ecuaciones de anomalías quirales

Teniendo en cuenta que el modelo no-universal $U(1)_X$ introduce nuevas partículas, es necesario asegurar que el nuevo modelo sea libre de anomalías quirales, y de esta forma garantizar la no violación de las simetrías de gauge al momento de llevar a cabo cálculos de correcciones radiativas [7, 31, 32].
Las ecuaciones del triángulo de anomalías que resultan de considerar la nueva simetría de gauge, así como las simetrías de gauge del Modelo Estándar, se verifican teniendo en cuenta el contenido de partículas y sus números cuánticos, consignados en la Tabla **2-4**. Las 6 ecuaciones, desde la Ecuación (2-3) hasta la Ecuación (2-8), corroboran la no aparición de anomalías quirales.

$$\begin{aligned}[SU(3)_C]^2 U(1)_X \longrightarrow A_C &= \sum_Q X_{Q_L} - \sum_Q X_{Q_R} \\ &= \{X_{U^1} + X_{D^1} + X_T + X_{J^1} + X_{J^2}\}_L \\ &- \{X_{U^1} + X_{U^2} + X_{U^3} + X_{D^1} + X_{D^2} \\ &+ X_{D^3} + X_T + X_{J_1} + X_{J_2}\}_R = 0,\end{aligned} \tag{2-3}$$

$$\begin{aligned}[SU(2)_L]^2 U(1)_X \longrightarrow A_L &= \sum_l X_{l_L} + 3\sum_Q X_{Q_L} \\ &= \left[X_{\nu_L^\tau} + X_{e_L^\tau}\right] + 3\left[X_{U_L^1} + X_{D_L^1}\right] = 0,\end{aligned} \tag{2-4}$$

$$\begin{aligned}[U(1)_Y]^2 U(1)_X \to A_{Y^2} &= \sum_{l,Q}\left[Y_{l_L}^2 X_{l_L} + 3Y_{Q_L}^2 X_{Q_L}\right] - \sum_{l,Q}\left[Y_{l_R}^2 X_{l_R} + 3Y_{Q_R}^2 X_{Q_R}\right] \\ &= \{Y_{\nu_L^\tau}^2 X_{\nu_L^\tau} + Y_{e_L^\tau}^2 X_{e_L^\tau} + Y_{E_L}^2 X_{E_L} \\ &+ Y_{\varepsilon_L}^2 X_{\varepsilon_L} + 3Y_{U_L^1}^2 X_{U_L^1} \\ &+ 3Y_{D_L^1}^2 X_{D_L^1} + 3Y_{T_L}^2 X_{T_L}\} \\ &- \{Y_{\nu_R^e}^2 X_{\nu_R^e} + Y_{e_R^e}^2 X_{e_R^e} + Y_{\nu_R^\mu}^2 X_{\nu_R^\mu} + Y_{e_R^\mu}^2 X_{e_R^\mu} + Y_{\nu_R^\tau}^2 X_{\nu_R^\tau} + Y_{e_R^\tau}^2 X_{e_R^\tau} \\ &+ Y_{\varepsilon_R}^2 X_{\varepsilon_R} + Y_{E_R}^2 X_{E_R} + 3(3)Y_{U_R}^2 X_{U_R} + 3(3)Y_{D_R}^2 X_{D_R} \\ &+ 3Y_{T_R}^2 X_{T_R} + 3(2)Y_{J_R}^2 X_{J_R}\} = 0,\end{aligned} \tag{2-5}$$

$$\begin{aligned}U(1)_Y [U(1)_X]^2 \to A_Y &= \sum_{l,Q}\left[Y_{l_L} X_{l_L}^2 + 3Y_{Q_L} X_{Q_L}^2\right] - \sum_{l,Q}\left[Y_{l_R} X_{l_R}^2 + 3Y_{Q_R} X_{Q_R}^2\right] \\ &= \{Y_{\nu_L^\tau} X_{\nu_L^\tau}^2 + Y_{e_L^\tau} X_{e_L^\tau}^2 + Y_{E_L} X_{E_L}^2 + Y_{\varepsilon_L} X_{\varepsilon_L}^2 \\ &+ 3Y_{U_L^1} X_{U_L^1}^2 + 3Y_{D_L^1} X_{D_L^1}^2 + 3Y_{T_L} X_{T_L}^2\} \\ &- \{Y_{e_R^e} X_{e_R^e}^2 + Y_{e_R^\mu} X_{e_R^\mu}^2 + Y_{e_R^\tau} X_{e_R^\tau}^2 + Y_{\varepsilon_R} X_{\varepsilon_R}^2 + Y_{E_R} X_{E_R}^2 \\ &+ 3(3)Y_{U_R} X_{U_R}^2 + 3(3)Y_{D_R} X_{D_R}^2 + 3Y_{T_R} X_{T_R}^2 + 3(2)Y_{J_R} X_{J_R}^2\} = 0,\end{aligned} \tag{2-6}$$

$$
\begin{aligned}
[U(1)_X]^3 \to A_X &= \sum_{l,Q}\left[X_{l_L}^3 + 3X_{Q_L}^3\right] - \sum_{l,Q}\left[X_{l_R}^3 + 3X_{Q_R}^3\right] \\
&= \{X_{\nu_L^\tau}^3 + X_{e_L^\tau}^3 + X_{E_L}^3 + X_{\varepsilon_L}^3 + 3X_{U_L^1}^3 + 3X_{D_L^1}^3 + 3X_{T_L}^3\} \\
&- \{X_{e_R^e}^3 + X_{e_R^\mu}^3 + X_{e_R^\tau}^3 + X_{\nu_R^e}^3 + X_{\nu_R^\mu}^3 + X_{\nu_R^\tau}^3 + X_{\varepsilon_R}^3 + X_{E_R}^3 \\
&+ 3X_{U_R}^3 + 3X_{D_R}^3 + 3X_{T_R}^3 + 3(2)X_{J_R}^3\} = 0,
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Grav}]^2\, U(1)_X \to A_G &= \sum_{l,Q}\left[X_{l_L} + 3X_{Q_L}\right] - \sum_{l,Q}\left[X_{l_R} + X_{Q_R}\right] \\
&= \{X_{\nu_L^\tau} + X_{e_L^\tau} + X_{E_L} + X_{\varepsilon_L} + 3X_{U_L^1} + 3X_{D_L^1} + 3X_{T_L}\} \\
&- \{X_{e_R^e} + X_{e_R^\mu} + X_{e_R^\tau} + X_{\nu_R^e} + X_{\nu_R^\mu} + X_{\nu_R^\tau} + X_{\varepsilon_R} + X_{E_R}^3 \\
&+ 3X_{U_R} + 3X_{D_R} + 3X_{T_R} + 3(2)X_{J_R}\} = 0,
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

donde la suma sobre Q corren sobre los quarks y la suma en l sobre los leptones de carga X con los subíndices indicando la quiralidad derecha R o izquierda L. Adicionalmente, se ha considerado el posible acople con el gravitón, expresado como Grav en la ecuación de anomalías. Una solución a este conjunto de ecuaciones se representa en la Tabla **2-4** [32, 55].

2.1.2. Discusión Complementaria sobre el Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$

El modelo considera el contenido fermionico del modelo estándar e introduce una simetría $U(1)$ local con el fin de diferenciar familias y construir *ansatz* de masas que permitan entender la jerarquía de masas. Por cancelación de anomalías los fermiones del modelo estándar únicamente permiten una solución que corresponde a la hipercarga. Por esta razón, si se quiere introducir otra simetría local $U(1)$ es necesario introducir nuevos campos fermionicos. Como las anomalías tienen una ecuación cúbica no es trivial encontrar las soluciones posibles libres de anomalías y tampoco hay un criterio o una receta para definir cuántos fermiones singlete se deben introducir. Han sido muchos los intentos de resolver las ecuaciones de las anomalías usando diferentes técnicas de sustitución entre el conjunto de las ecuaciones de las anomalías que han indicando los fermiones singletes a considerar. Se comenzó con un fermion singlete para cada sector quark up, down y leptón cargado. Se definen nuevas cargas para dicha simetría no universal a los fermiones y se barren valores desde $-2/3$ hasta $2/3$ para quarks y $-1, 0, 1$ para leptones cargados. Se hace mediante loops en *Mathematica package* variando estas cargas y probando todas las ecuaciones de las anomalías. Al final se encuentran soluciones con el espectro que presentamos: dos quarks up, un quark down y un leptón exótico cargado. También se puede considerar el caso de dos quarks up, un quark down y lepton exótico. Pero este último caso no se consideró. Fenomenológicamente son modelos de

nueva física equivalentes porque el quark repetido se puede suprimir de bajas energías y solo considerar una partícula exótica por sector.

Como los neutrinos quedaban sin masa se introdujo un neutrino derecho pero dañó las ecuaciones de las anomalías entonces introduciendo un segundo leptón cargado, sin cambiar nada, se ajustó de nuevo las ecuaciones de las anomalías. Así el modelo necesita una escala del orden de los 10^{10} GeV Para dar la masa correcta a los neutrinos, pero es una escala que está fuera de los colisionadores. Entonces para remediar este problema se introducen neutrinos de Majorana que no tienen carga de la nueva simetría horizontal y permiten dar masa por mecanismo $See - Saw$ inverso obteniendo masas para los neutrinos activos y los exóticos adquieren masas del orden de los TeV al alcance de los colisionadores.

Sin embargo a pesar de las construcciones mencionadas anteriormente se pueden obtener cientos de soluciones posibles para la cancelación de las anomalías. Introduciendo un conjunto de campos escalares se puede definir los *ansatz* de masas y un número más reducido de soluciones de las ecuaciones de las anomalías.

La forma heurística de construir modelos $U(1)$ no universales con 3 familias es observando el contenido fermionico de los modelos $SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_X$ que contienen tripletes débiles y jugando con el color y las familias los podemos hacer vectoriales frente a $SU(3)_C \times SU(3)_L$ pero hay que ajustar las cargas $U(1)$. Estos tripletes débiles se pueden descomponer en dobletes y singletes débiles, y así construimos posibles escenarios de partículas y nuevos modelos con 3 familias. Un aspecto que tienen los modelos 331 es que no son universales de familias de quark pero si son universales de familia leptónica. Por eso en nuestro modelo, para hacerlo no universal de familia, debemos introducir más singletes leptonicos para ajustar las anomalías y las masas de los neutrinos, pero este último tiene un juego interesante cuando se usa el mecanismo $see - saw$ inverso. El sector escalar hereda propiedades similares, los tripletes escalares se descomponen en dobletes y singletes.

El modelo 331 tiene dos familias de quarks triplete débil pero por el color son 3 tripletes. Es decir hay 6 tripletes débiles, tiene una familia de quark-anti triplete pero por el color son 3 tripletes. Es decir hay 3 anti-tripletes débiles. Las 3 familias leptonicas se ponen en 3 anti-tripletes débiles. Por tanto, se tendría 6 tripletes débiles y 6 anti-tripletes débiles obteniendo una representación vectorial frente $SU(3)_L$. Para el color, los quarks tripletes débiles están en 3 de $SU(3)_C$ y los quarks singletes débiles, es decir los quarks R, están en anti-3 de color. Así, el color se hace vectorial.

La tarea final en los modelos 331 es ajustar las cargas $U(1)_X$ de todo el contenido fermiónico para que sea igual a cero. Si es necesario se introducen singletes para ajustar y no dañar el contenido de $SU(3)_C \times SU(3)_L$.

Ahora bien, el tema de la jerarquía de masa ha sido ampliamente discutido en la literatura y se han usado muchos grupos, desde simetrías locales hasta simetrías globales, para considerar tres familias y generar *ansatz* de masas que permitan entender el espectro de masas de los fermiones del Modelo Estándar. En la presente tesis se muestra un modelo nuevo y se ilustra la forma de construir este modelo teniendo en cuenta las anomalías quirales. Cabe mencionar

que a pesar de la larga lista de modelos en la literatura, esta es una buena apuesta dado que se explica la jerarquía de masas y la oscilación de neutrinos acorde con la misma. Por otra parte, es importante ir abordando diferentes problemas abiertos dentro del campo de investigación actual como lo es el cambio del sabor leptónico cargado. A pesar de observar oscilación de neutrinos, esto sugiere un cambio de sabor leptónico, pero a la fecha este fenómeno no se ha visto en el sector cargado y solo existen cotas de exclusión de no observación. Es una buena apuesta proponer modelos con miras a resolver estos problemas dado que nada dicta cual puede ser el modelo correcto, solamente los experimentos señalaran y orientaran cual podría ser la representación de la naturaleza, y no hay razón para preferir un modelo sobre el otro [39, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70]. Una lista de referencias en esta dirección ha sido publicada en la literatura sobre el problema del sabor por los miembros del grupo de investigación con el cual colaboro en la Universidad Nacional de Colombia [32, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85].

2.2. Bosones escalares

El Potencial V que da cuenta de las interacciones entre los campos escalares es

$$\begin{aligned} V = {} & \mu_1^2\phi_1^\dagger\phi_1 + \mu_2^2\phi_2^\dagger\phi_2 + \mu_\chi^2\chi^*\chi + \frac{f}{\sqrt{2}}\Big(\phi_1^\dagger\phi_2\chi^* + h.c.\Big) \\ & + \lambda_1\Big(\phi_1^\dagger\phi_1\Big)^2 + \lambda_2\Big(\phi_2^\dagger\phi_2\Big)^2 + \lambda_3(\chi^*\chi)^2 \\ & + \lambda_5\Big(\phi_1^\dagger\phi_1\Big)\Big(\phi_2^\dagger\phi_2\Big) + \lambda_5'\Big(\phi_1^\dagger\phi_2\Big)\Big(\phi_2^\dagger\phi_1\Big) \\ & + \lambda_6\Big(\phi_1^\dagger\phi_1\Big)(\chi^*\chi) + \lambda_7\Big(\phi_2^\dagger\phi_2\Big)(\chi^*\chi). \end{aligned} \tag{2-9}$$

donde se toman los parámetros tipo masa $\mu_{1,2}^2 < 0$, los coeficientes λ de los acoples cuadráticos de los dobletes escalares $\phi_{1,2}$ se consideran mayores que cero, f y f' parámetros libres. χ representa el singlete escalar.
Para encontrar el mínimo del potencial respecto a el campo ϕ_1 se toma la derivada parcial respecto a dicho campo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\phi_1} = {} & \phi_1^\dagger\Big(\mu_1^2 + 2\lambda_1\Big(\phi_1^\dagger\phi_1\Big) + \lambda_5\Big(\phi_2^\dagger\phi_2\Big) + [\lambda_6(\chi^*\chi) + \lambda_6'(\sigma^*\sigma)]\Big) \\ & + \phi_2^\dagger\Big(\frac{f}{\sqrt{2}}\chi + \frac{f'}{\sqrt{2}}\sigma + \lambda_5'\Big(\phi_1^\dagger\phi_2\Big)\Big), \end{aligned} \tag{2-10}$$

y evaluando en el valor esperado del vacío (v.e.v) se tiene

$$\left\langle\frac{\partial V}{\partial\phi_1^\dagger}\right\rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}}\left(\mu_1^2 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_5\frac{v_2^2}{2} + \lambda_6\frac{v_\chi^2}{2}\right) + \frac{v_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{f}{2}v_\chi + \lambda_5'\frac{v_1 v_2}{2}\right) = 0. \tag{2-11}$$

Como resultado, y siguiendo el mismo procedimiento para los campos ϕ_2 y χ se encuentra que el mínimo del potencial relacionado con los campos ϕ_1, ϕ_2 y χ son respectivamente

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 &= -\lambda_1 v_1^2 - \lambda_5 \frac{v_2^2}{2} + \lambda_6 \frac{v_\chi^2}{2} - \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{f}{2\sqrt{2}} v_\chi + \lambda_5' \frac{v_1 v_2}{2}\right). \\
\mu_2^2 &= -\lambda_2 v_2^2 - \lambda_5 \frac{v_1^2}{2} + \lambda_7 \frac{v_\chi^2}{2} - \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{f}{2\sqrt{2}} v_\chi + \lambda_5' \frac{v_1 v_2}{2}\right). \\
\mu_\chi^2 &= -\lambda_3 v_\chi^2 - \lambda_6 \frac{v_1^2}{2} - \lambda_7 \frac{v_2^2}{2} - \frac{f}{2}\frac{v_1 v_2}{\chi}.
\end{aligned} \tag{2-12}$$

Al reemplazar μ_1^2, μ_2^2 y μ_χ^2 en el potencial dado por la Ecuación (2-9), se puede extraer la matriz de masa para los campos escalares. En la base $\left(\phi_1^\pm, \phi_2^\pm\right)$, el cuadrado de la matriz de masa $M_{\phi^\pm}$ asociada a los campos cargados tiene la forma

$$M_{\phi^\pm}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -f\frac{v_\chi v_2}{v_1} - \lambda_5' v_2^2 & f v_x + \lambda_5' v_1 v_2 \\ \lambda_5' v_1 v_2 & -f\frac{v_\chi v_1}{v_2} - \lambda_5' v_1^2 \end{pmatrix}. \tag{2-13}$$

Para encontrar los autovalores de masa asociados a cada campo es necesario rotar los estados de la base de interacción a la base de masa a través de la matriz

$$R_\phi = \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta \\ -s_\beta & c_\beta \end{pmatrix}, \tag{2-14}$$

con $c_\beta = \cos\beta$ y $s_\beta = \sin\beta$, donde se define $\tan\beta = \frac{v_1}{v_2}$. Haciendo la rotación R_ϕ se encuentra que los valores de masa asociados a los campos $G_W^\pm$ y a los bosones escalares cargados $H^\pm$ están dados por $m_{G_W^\pm}$ y $m_{H^\pm}$:

$$\begin{aligned}
m_{G_W^\pm}^2 &= 0, \\
m_{H^\pm}^2 &= -\frac{1}{4}\frac{f v_\chi}{s_\beta c_\beta} - \frac{1}{4}\lambda_5' v^2.
\end{aligned} \tag{2-15}$$

De la anterior se expresión se tiene que si $m_{H^\pm}^2 > 0$, es necesario que $f < 0$. La rotación de los campos sería:

$$\begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta \\ -s_\beta & c_\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^\pm \\ G_W^\pm \end{pmatrix}, \tag{2-16}$$

deja como resultado que los campos $G_W^\pm$ corresponden a los bosones de Goldstone asociados a los bosones de gauge $W^\pm$. Además, se encuentran los bosones escalares cargados $H^\pm$, los cuales corresponden a nueva física.

2.2.1. CP-odd

Para el sector CP-odd de los bosones escalares el cuadrado de la matriz de masa M_η se escribe en la base $(\eta_1, \eta_2, \eta_\chi)$ como

$$M_\eta^2 = -\frac{f}{4}\begin{pmatrix} \frac{v_2 v_\chi}{v_1} & -v_\chi & v_2 \\ -v_\chi & \frac{v_1 v_\chi}{v_2} & v_1 \\ v_2 & -v_1 & \frac{v_2 v_1}{v_\chi} \end{pmatrix}, \tag{2-17}$$

donde la diagonalización se lleva a cabo a través del producto de dos matrices definidas como

$$R_{\text{odd}} = \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{pmatrix}, \tag{2-18}$$

utilizando $t_\gamma = \tan\gamma = v_\chi / v s_\beta c_\beta$ y diagonalizando la matriz de masa de la Ecuación (2-17) se encuentran los autovalores de masa

$$\begin{aligned} m^2_{G_{Z_0}} &= 0, \\ m^2_{G_{Z_1}} &= 0, \\ m^2_{A^0} &= -\frac{1}{4}\frac{f v_\chi}{s_\beta c_\beta s_\gamma^2}, \end{aligned} \tag{2-19}$$

los cuales corresponden a las masas del bosón de Goldstone del Z_0 del Modelo Estándar, del bosón de Goldstone de Z_1 de la nueva simetría y a la masa del bosón pseudo-escalar neutro A_0. De esta manera, se encuentra que los campos escalares CP-odd rotan de la forma

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\beta c_\gamma & s_\beta & c_\beta s_\gamma \\ -s_\beta c\gamma & c_\beta & -s_\beta s_\gamma \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ G_{Z_0} \\ G_{Z_1} \end{pmatrix}. \tag{2-20}$$

2.2.2. CP-even

Para el sector bosónico escalar CP-even se busca la matriz de rotación R tal que

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_\chi \end{pmatrix} = R_{\text{even}}\begin{pmatrix} H \\ h \\ H_\chi \end{pmatrix}, \tag{2-21}$$

donde h corresponde al bosón de Higgs del modelo estándar, H y H_χ a los bosones neutros más pesados que h. Para este sector, la matriz cuadrada de masa de estados mezclados M_{even} está definida como

$$M^2_{\text{even}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^2 - \frac{1}{4}\frac{f v_\chi v_2}{v_1} & \hat{\lambda}_5 v_1 v_2 + \frac{1}{4} f v_\chi & \frac{1}{4}\lambda_6 v_1 v_\chi + \frac{1}{4} f v_2 \\ \hat{\lambda}_5 v_1 v_2 + \frac{1}{4} f v_\chi & \lambda_2 v_2^2 - \frac{1}{4}\frac{f v_\chi v_1}{v_2} & \frac{1}{4}\lambda_7 v_2 v_\chi + \frac{1}{4} f v_1 \\ \frac{1}{4}\lambda_6 v_1 v_\chi + \frac{1}{4} f v_2 & \frac{1}{4}\lambda_7 v_2 v_\chi + \frac{1}{4} f v_1 & \lambda_3 v_\chi^2 - \frac{1}{4}\frac{f v_1 v_2}{v_\chi} \end{pmatrix}, \tag{2-22}$$

con $\hat{\lambda}_5 = (\lambda_5 + \lambda_5')/2$. Esta matriz tiene entradas polinómicas en los valores esperados del vacío v_i por lo que los autovalores son no triviales. Para diagonalizar esta matriz, se considera separarla en bloques:

$$M^2_{\text{even}} = \begin{pmatrix} M_{11_{(2\times2)}} & M_{12_{(2\times1)}} \\ M_{21_{(1\times2)}} & M_{22_{(1\times1)}} \end{pmatrix}, \tag{2-23}$$

tal que la matriz de rotación R_{even} que diagonaliza M^2_{even} se escribe como (Véase el Anexo A)

$$R_{\text{even}} = \begin{pmatrix} 1 & F_R^T \\ -F_R & 1 \end{pmatrix}, \tag{2-24}$$

la cual siempre que se cumpla la jerarquía de valores esperados del vacío $v^2 << v_\chi^2, v_\chi|f|$, que se considera un mecanismo tipo *Seesaw* inverso [86, 87], se diagonalizan los estados de interacción asociados a esta matriz. De esta forma, el proceso de diagonalización satisface que

$$M_{11} << M_{12} = M_{21}^T << M_{22}, \tag{2-25}$$

lo cual permite obtener un bloque M_{H_χ} con la masa del campo H_χ y un bloque M_{hH} con la masa de campo de Higgs del Modelo Estándar y el campo escalar H

$$R^T_{\text{even}} M^2_{\text{even}} R_{\text{even}} \approx \begin{pmatrix} M^2_{hH} & 0 \\ 0 & M^2_{H_\chi} \end{pmatrix}. \tag{2-26}$$

El bloque M^2_{hH} toma la forma

$$M^2_{hH} \approx M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 v^2 s_\beta^2 - \frac{f v_\chi}{4 t_\beta} & \tilde{\lambda}_5 v^2 s_\beta^2 c_\beta^2 + \frac{f v_\chi}{4} \\ \tilde{\lambda}_5 v^2 s_\beta^2 c_\beta^2 + \frac{f v_\chi}{4} & \tilde{\lambda}_2 v^2 c^2\beta - \frac{f v_\chi t_\beta}{4} \end{pmatrix}, \tag{2-27}$$

donde las constantes $\tilde{\lambda}$ se definen como

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \lambda_1 - \frac{\lambda_6^2}{4\lambda_3} - \frac{\lambda_7^2}{4\lambda_3 t_\beta^2}, \\ \tilde{\lambda}_2 &= \lambda_2 - \frac{\lambda_6^2 t_\beta^2}{4\lambda_3} - \frac{\lambda_7^2}{4\lambda_3}, \\ \tilde{\lambda}_5 &= \hat{\lambda}_5 - \frac{\lambda_6^2 t_\beta}{2\lambda_3} - \frac{\lambda_7^2}{2\lambda_3 t_\beta}, \end{aligned} \tag{2-28}$$

y considerando que $v_1^2, v_2^2, v_1, v_2 << |f| v_\chi$, es posible despreciar los términos pequeños de M^2_{hH} y simplificar la matriz de manera que

$$M^2_{hH} \approx -\frac{1}{4} f v_\chi \begin{pmatrix} \cot\beta & -1 \\ -1 & \tan\beta \end{pmatrix}. \tag{2-29}$$

El autovalor no nulo de M_{hH}^2 corresponde a la masa del campo escalar neutro H, el cual está expresado como

$$m_H^2 \approx -\frac{1}{4}\frac{f v_\chi}{\sin\beta\cos\beta}. \tag{2-30}$$

En contraste, la masa del bosón de Higgs m_h del Modelo Estándar puede ser extraída de la razón entre el determinante y la traza de la matriz (2-27), es decir,

$$\frac{\mathrm{Det}[M_{hH}^2]}{\mathrm{Tr}[M_{hH}^2]} = \frac{m_h^2 m_H^2}{m_h^2 + m_H^2} \approx m_h^2, \tag{2-31}$$

donde

$$m_h^2 \approx (\hat{\lambda}_1 \sin^2\beta + \hat{\lambda}_5 \cos\beta \sin\beta + \hat{\lambda}_2 \cos^2\beta)v^2. \tag{2-32}$$

Por otro lado, el valor de la masa m_{H_χ} del campo escalar neutro H_χ es aproximadamente

$$m_{H_\chi}^2 \approx \lambda_3 v_\chi^2. \tag{2-33}$$

La matriz de rotación R_{even} para el sector escalar CP-even es

$$R_{\text{even}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2-34}$$

donde los ángulos están definidos como

$$s_{13} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_6 v s_\beta}{\lambda_3 v_\chi}, \qquad s_{23} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_7 v c_\beta}{\lambda_3 v_\chi}, \qquad t_{2\alpha} = \frac{f v_\chi + 2\tilde{\lambda}_5 s_\beta c_\beta v^2}{f v_\chi + 2t_{2\beta}(s_\beta^2\tilde{\lambda}_1 - c_\beta^2\tilde{\lambda}_2)v_2} t_{2\beta}. \tag{2-35}$$

La parte del modelo que da cuenta de los quarks establece una proporcionalidad entre v_1 y la masa del quark top, mientras que la masa del quark bottom es proporcional a v_2 [32]. Por lo tanto, $\tan\beta = v_1/v_2$ es grande y el ángulo β se acerca a $\pi/2$. Así, $\cos\beta \to 0$ y $\sin\beta \to 1$, de está manera $s_{23} \to 0$ y $c_{23} \to 1$, lo cual deja la matriz de rotación R_{even} para el sector cp-even de la forma

$$R_{\text{even}} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2-36}$$

de tal manera que la transformación entre los campos queda establecida como

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\beta c_{13} & s_\beta c_{13} & s_{13} \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ -s_{13}c_\beta & -s_\beta s_{13} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ h \\ H_\chi \end{pmatrix}. \tag{2-37}$$

2.3. Sector cargado

El Lagrangiano de Yukawa $\mathcal{L}_{Y,C}$ que describe las corrientes cargas de los leptones es

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{Y,L} = {} & \eta\overline{l_L^e}\phi_2 e_R^\mu + h\overline{l_L^\mu}\phi_2 e_R^\mu + \zeta\overline{l_L^\tau}\phi_2 e_R^e + H\overline{l_L^\tau}\phi_2 e_R^\tau + q_{11}\overline{l_L^e}\phi_1 E_R + q_{21}\overline{l_L^\mu}\phi_1 E_R \\ & + g_{\chi E}\overline{E_L}\chi E_R + g_{\chi\mathcal{E}}\overline{\mathcal{E}_L}\chi^*\mathcal{E}_R + h.c.\end{aligned} \tag{2-38}$$

donde los parámetros $\eta, h, \zeta, H, q_{11}, q_{21}, g_{\chi E}, g_{\chi\mathcal{E}}$ son los acoples de Yukawa, y los dobletes leptónicos en el estado de interacción se representan de la forma

$$l_L'^i = \begin{pmatrix}\nu'_{i_L} \\ i'_L\end{pmatrix}, \quad i = e, \mu, \tau; \tag{2-39}$$

denotando e, μ, τ al electrón, muón y tau respectivamente.

2.3.1. Diagonalización

Para encontrar las masas de los leptones cargados es necesario identificar la matriz de masa, la cual se puede escribir, teniendo en cuenta el Lagrangiano definido en la ecuación (2-38) evaluado en el vacío

$$\begin{aligned}-\langle\mathcal{L}_{Y,C}\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\overline{e'_L} & \overline{\mu'_L} & \overline{\tau'_L} & \overline{E'_L}\end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{\eta v_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{q_{11}v_1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{hv_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{q_{12}v_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\zeta v_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Hv_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{g_{\chi E}v_\chi}{\sqrt{2}}\end{array}\right)\begin{pmatrix}e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \\ E'_R\end{pmatrix} \\ & + g_{\chi\mathcal{E}}\frac{v_\chi}{\sqrt{2}}\overline{\mathcal{E}_L}\mathcal{E}_R + h.c. \\ & = \overline{\psi'}_L M'^0_E \psi'_R + y_{\mathcal{E}\mathcal{E}}\frac{v_\chi}{\sqrt{2}}\overline{\mathcal{E}_L}\mathcal{E}_R + h.c.,\end{aligned} \tag{2-40}$$

donde la matriz M'^0_E y el vector de espinores ψ' han sido definidos como

$$M'^0_E = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{\eta v_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{q_{11}v_1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{hv_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{q_{12}v_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\zeta v_2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Hv_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{g_{\chi E}v_\chi}{\sqrt{2}}\end{array}\right), \qquad \psi'_{R,L} = \begin{pmatrix}e'_{R,L} \\ \mu'_{R,L} \\ \tau'_{R,L} \\ E'_{R,L}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}L'_{R,L} \\ E'_{R,L}\end{pmatrix}. \tag{2-41}$$

No obstante, en la matriz de masa M'^0_E se observa que el término diagonal asociado a la masa del electrón es nulo. Adicionalmente, se tiene que la citada matriz M'^0_E es de rango 3, lo que significa que el leptón más liviano, el electrón, no tiene masa a nivel árbol. De hecho, el término diagonal asociado a la masa del electrón es nulo. Por tal razón, se introducen los siguientes operadores efectivos[33, 88], de dimensión (máxima 7), los cuales son invariantes bajo las simetrías del modelo extendido, para así poder explicar la masa del electrón:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}^l_{ij} &= \Omega^l_{ij}\left(\frac{\chi^*}{\Lambda}\right)^3 \overline{l^i_L}\phi_2 e^j_R \\
\mathcal{O}^l_{\tau\mu} &= \Omega^l_{32}\left(\frac{\chi}{\Lambda}\right)^3 \overline{l^\tau_L}\phi_2 e^\mu_R \\
\mathcal{O}^l_{Ej} &= \frac{\Omega^l_{4j}}{\Lambda}\left(\phi_2^\dagger\phi_1\right)\overline{E_L}e^j_R \\
\mathcal{O}^l_{E\mu} &= \frac{\Omega^l_{42}}{\Lambda^2}\left(\phi_1^\dagger\phi_2\right)\chi\overline{E_L}e^\mu_R \\
\mathcal{O}^l_{\tau E} &= \Omega^l_{34}\left(\frac{\chi}{\Lambda}\right)^3 \overline{l^\tau_L}\phi_1 E_R
\end{aligned}
\tag{2-42}
$$

donde $i = e, \mu$, $j = e, \tau$ y Λ es la escala de energía asociada. Las contribuciones de los anteriores operadores efectivos, contribuyen a la masa del electrón. Por lo tanto, para obtener la masa del electrón se suma la contribución de la masa $\Delta M'_e$ debida a los operadores efectivos, es decir,

$$M'_E = M'^0_E + \Delta M'_e. \tag{2-43}$$

Así, al tener en cuenta esta adición se obtiene que $\Delta M'_e$ viene dada por

$$
\Delta M'_e = \left(\begin{array}{cccc}
\frac{\Omega^\ell_{11}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & 0 & \frac{\Omega^\ell_{13}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & 0 \\
\frac{\Omega^\ell_{21}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & 0 & \frac{\Omega^\ell_{23}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & 0 \\
0 & \frac{\Omega^\ell_{32}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & 0 & \frac{\Omega^\ell_{34}v_1v_\chi^3}{4\Lambda^3} \\
\hline
\frac{\Omega^\ell_{41}v_1v_2}{2\Lambda} & \frac{\Omega^\ell_{42}v_1v_2v_\chi}{2\sqrt{2}\Lambda^2} & \frac{\Omega^\ell_{43}v_1v_2}{2\Lambda} & 0
\end{array}\right)
\tag{2-44}
$$

donde Ω^ℓ_{mn} son los diferentes acoples de los operadores efectivos(2-42); de manera que al considerar la suma (2-43), se encuentra que la matriz resultante M'_E es

$$
M'_E = \left(\begin{array}{cccc}
\frac{\Omega^\ell_{11}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & \frac{\eta v_2}{\sqrt{2}} & \frac{\Omega^\ell_{13}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & \frac{q_{11}v_1}{\sqrt{2}} \\
\frac{\Omega^\ell_{21}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & \frac{hv_2}{\sqrt{2}} & \frac{\Omega^\ell_{23}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & \frac{q_{12}v_1}{\sqrt{2}} \\
\frac{\zeta v_2}{\sqrt{2}} & \frac{\Omega^\ell_{32}v_2v_\chi^3}{4\Lambda^3} & \frac{Hv_2}{\sqrt{2}} & \frac{\Omega^\ell_{34}v_1v_\chi^3}{4\Lambda^3} \\
\hline
\frac{\Omega^\ell_{41}v_1v_2}{2\Lambda} & \frac{\Omega^\ell_{42}v_1v_2v_\chi}{2\sqrt{2}\Lambda^2} & \frac{\Omega^\ell_{43}v_1v_2}{2\Lambda} & \frac{g_{\chi E}v_\chi}{\sqrt{2}}
\end{array}\right).
\tag{2-45}
$$

Por lo tanto, para diagonalizar por bloques la matriz de la ecuación (2-45), (véase el Anexo A) M'_E se expresa como:

$$
M'_E = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c}
M'_{ee(3\times3)} & M'_{eE(3\times1)} \\
\hline
M'_{Ee(1\times3)} & M'_{EE(1\times1)}
\end{array}\right).
\tag{2-46}
$$

Así, para diagonalizar esta matriz se define la rotación como el producto de dos matrices: $V^E_{L_{(SS)}}$ y $V^E_{L_{(SM)}}$. $V^E_{L_{(SS)}}$ diagonaliza los bloques de M'_E dejándola con las entradas no diagonales

iguales a cero. $V^E_{L_{(SM)}}$ diagonaliza el bloque 3×3 ($M'_{ee(3\times 3)}$) que contiene los leptones del modelo estándar, es decir:

$$V^E_{L(R)} = V^E_{L(R)_{(SM)}} V^E_{L(R)_{(SS)}} = V^E_{L(R)_{(SS)}} V^E_{L(R)_{(SM)}}. \tag{2-47}$$

En este sentido, la matriz $V^E_{L_{(SS)}}$ tiene la forma

$$V^E_{L(R)_{(SS)}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{3\times 3} & \vec{q}_{L(R)} \\ \hline -\vec{q}^{\dagger}_{L(R)} & 1 \end{array}\right), \tag{2-48}$$

y la que diagonaliza el sector del Modelo Estándar, $V^E_{L_{(SM)}}$, se define como

$$V^E_{L(R)_{(SM)}} = \left(\begin{array}{c|c} V_{L(R)_{(SM)}} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right). \tag{2-49}$$

Además, los vectores de espinores $\psi_{L(R)}$ son

$$\psi_{L(R)} = V^{E\dagger}_{L(R)} \psi'_{L(R)} = V^{E\dagger}_{L(R)} \left(\begin{array}{c} L'_{L(R)} \\ E'_{L(R)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} L_{L(R)} \\ E_{L(R)} \end{array}\right). \tag{2-50}$$

Con estas matrices el Lagrangiano (2-40), sin tener en cuenta el término $y_{\mathcal{E}\mathcal{E}}\frac{v_\chi}{\sqrt{2}}\overline{\mathcal{E}_L}\mathcal{E}_R$, queda:

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{L}_{Y,C}\rangle &= \overline{\psi'_L} M'_E \psi'_R + \overline{\psi'_R} M'^{\dagger}_E \psi'_L \\ &= \overline{\psi'_L} V^E_L V^{E\dagger}_L M'_E V^E_R V^{E\dagger}_R \psi'_R + \overline{\psi'_R} V^E_R V^{E\dagger}_R M'^{\dagger}_E V^E_L V^{E\dagger}_L \psi'_L \\ &= \overline{\psi_L} V^{E\dagger}_L M'_E V^E_R \psi_R + \overline{\psi_R} V^{E\dagger}_R M'^{\dagger}_E V^E_L \psi_L. \end{aligned} \tag{2-51}$$

Para encontrar las matrices de rotación asociadas a los estados de quiralidad derechos e izquierdos se consideran los cuadrados de la matriz de masa. El producto

$$[V^{E\dagger}_L M'_E V^E_R][V^{E\dagger}_R M'^{\dagger}_E V^E_L] = V^{E\dagger}_L M'_E M'^{\dagger}_E V^E_L, \tag{2-52}$$

sólo considera las matrices que rotan los estados de quiralidad izquierda. De la misma forma, tomando el producto

$$[V^{E\dagger}_R M'^{\dagger}_E V^E_L][V^{E\dagger}_L M'_E V^E_R] = V^{E\dagger}_R M'^{\dagger}_E M'_E V^E_R, \tag{2-53}$$

se obtiene que las matrices que diagonalizan este producto son las matrices de rotación de los estados de quiralidad derecha. Por lo tanto, se tienen dos formas equivalentes de diagonalizar la matriz cuadrada de masas. Al considerar el producto explícito que envuelve a las matrices de quiralidad izquierda, es decir:

$$\begin{aligned} M'_E {M'_E}^{\dagger} &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee} & M'_{eE} \\ \hline M'_{Ee} & M_{EE} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M'^{\dagger}_{ee} & M'^{\dagger}_{Ee} \\ \hline M'^{\dagger}_{eE} & M^{\dagger}_{EE} \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee}M'^{\dagger}_{ee} + M'_{eE}M'^{\dagger}_{eE} & M'_{ee}M'^{\dagger}_{eE} + M'_{eE}M^{\dagger}_{EE} \\ \hline M'_{Ee}M'^{\dagger}_{ee} + M_{EE}M'^{\dagger}_{eE} & M'_{Ee}M'^{\dagger}_{Ee} + M'_{EE}M'^{\dagger}_{EE} \end{array}\right), \end{aligned} \tag{2-54}$$

y teniendo en cuenta el Lagrangiano escrito en forma matricial (2-40), donde se observa que $M'_{Ee} = 0$, se obtiene

$$M'_E {M'_E}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee}M'^\dagger_{ee} + M'_{eE}M'^\dagger_{eE} & M'_{eE}M'^\dagger_{EE} \\ \hline M_{EE}M'^\dagger_{eE} & M'_{EE}M'^\dagger_{EE} \end{array}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee}M'^\dagger_{ee} & M'_{eE}M'^\dagger_{EE} \\ \hline M_{EE}M'^\dagger_{eE} & M'_{EE}M'^\dagger_{EE} \end{array}\right). \tag{2-55}$$

Por lo tanto, para diagonalizar esta matriz se toma $V^E_{SS,L}$ tal que

$$\begin{aligned} M^2_{\text{diag}} &= \frac{1}{2}(V^E_{SS,L})^\dagger {M'}^2_E V^E_{SS,L} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\vec{q}_L \\ \vec{q}^\dagger_L & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee}M'^\dagger_{ee} & M'_{eE}M'^\dagger_{EE} \\ \hline M_{EE}M'^\dagger_{eE} & M'_{EE}M'^\dagger_{EE} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & \vec{q}_L \\ -\vec{q}^\dagger_L & 1 \end{pmatrix}, \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee}M'^\dagger_{ee} & 0 \\ \hline 0 & M'_{EE}M'^\dagger_{EE} \end{array}\right), \end{aligned} \tag{2-56}$$

en donde la componente de la matriz de rotación, $\vec{q}^E_L$, se ha definido como

$$\vec{q}_L \approx \begin{pmatrix} \frac{v_1 q_{11}}{\sqrt{2}m_E} \\ \frac{v_2 q_{12}}{\sqrt{2}m_E} \\ \frac{v_1 v_2}{2\Lambda m_E}\left(\frac{\Omega_{34}v_\chi^3}{2\Lambda^2 v_2} + \frac{m_\tau(\Omega_{41}s_{e\tau} - \Omega_{43}c_{e\tau})}{m_E}\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{v_1 q_{11}}{\sqrt{2}m_E} \\ \frac{v_2 q_{12}}{\sqrt{2}m_E} \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{2-57}$$

siendo $\tan\theta_{e\mu} = \frac{\eta}{h}$ $\tan\theta_{e\tau} = \frac{\zeta}{H}$. Al aproximar el factor r_3

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{v_1 v_2}{2\Lambda m_E}\left(\frac{\Omega_{34}v_\chi^3}{2\Lambda^2 v_2} + \frac{m_\tau\left(\Omega_{41}s_{e\tau} - \Omega_{43}c_{e\tau}\right)}{m_E}\right) \\ &= \frac{v_1 v_2}{4\Lambda^3 v_2 m_E} v_\chi^3 \approx \frac{v_1 v_\chi^2}{\Lambda^3} \approx \frac{m_t}{\Lambda}\frac{v_\chi^2}{\Lambda^2} \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{2-58}$$

se obtiene que $\vec{q}_L$ se reexpresa

$$\vec{q}_L \approx \begin{pmatrix} \frac{v_1 q_{11}}{\sqrt{2}m_E} \\ \frac{v_2 q_{12}}{\sqrt{2}m_E} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{m_t}{y_t m_E} \\ \frac{m_\tau}{m_E} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-59}$$

en donde se ha asumido que $y_t = 1$, $m_{Top\ Quark} = m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}}v_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$ y $q_{11} = q_{12} = 1$, buscando reducir así el número de parámetros del modelo. Como resultado, el cuadrado de la masa del leptón exótico E es $m^2_E = g^2_{\chi E}v^2_\chi/2$. Entre tanto, los estados rotan de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} L'_L \\ E'_L \end{pmatrix} = V^E_{L_{(SM)}}V^E_{SS,L}\begin{pmatrix} L_L \\ E_L \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V_{L_{(SM)}} & V_{L_{(SM)}}\vec{q}^E_L \\ \hline -\vec{q}^{E\dagger}_L & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} L_L \\ E_L \end{pmatrix}. \tag{2-60}$$

Por componentes, de la ecuación (2-60) se obtiene:

$$\begin{aligned} L'_L &= V_{L_{(SM)}} L_L + \vec{q}_L E_L \Rightarrow {L'_L}^i = \left(V_{L_{(SM)}}\right)^{ij} {L_L}^j + q_L^i E_L \longleftrightarrow \bar{L'_L}^i = \bar{L_L}^j \left(V_{L_{(SM)}}\right)^{ji*} + \bar{E}_L {q_L^i}^T \\ E'_L &= -\vec{q}_L^T V_{L(SM)} L_L + E_L \end{aligned} \tag{2-61}$$

Por otro lado, para el producto que envuelve la matriz de rotación para los leptones de quiralidad derecha

$$\begin{aligned} {M'_E}^\dagger M'_E &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'^\dagger_{ee} & M'^\dagger_{Ee} \\ \hline M'^\dagger_{eE} & M'^\dagger_{EE} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M'_{ee} & M'_{eE} \\ \hline M'_{Ee} & M'_{EE} \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} M'^\dagger_{ee}M'_{ee} & M'^\dagger_{ee}M'_{eE} \\ \hline M'^\dagger_{eE}M'_{ee} & M'^\dagger_{EE}M'_{EE} \end{array}\right), \end{aligned} \tag{2-62}$$

y de manera similar se obtiene que la componente de la matriz que diagonaliza los bloques de la ecuación (2-62) es

$$\vec{q}_R \approx \begin{pmatrix} \frac{\Omega_{41}v_1v_2}{2m_E\Lambda} \\ \frac{\Omega_{42}v_1v_2v_\chi}{2m_E\Lambda^2} + \frac{v_1m_\mu}{\sqrt{2}m_E^2}\left(q_{11}s_{e\mu} + q_{12}c_{e\mu}\right) \\ \frac{\Omega_{43}v_1v_2}{2m_E\Lambda} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\Omega_{41}v_1v_2}{2m_E\Lambda} \\ t_1 \\ \frac{\Omega_{43}v_1v_2}{2m_E\Lambda} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{m_tm_\tau}{m_E\Lambda} \\ t_1 \\ m_tm_\tau m_E\Lambda \end{pmatrix} \tag{2-63}$$

en donde se ha asumido $\Omega_{41} \approx \Omega_{43} \approx 1$ con el fin de reducir el número de parámetros del modelo. Al aproximar el factor t_1 a

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\Omega_{42}v_1v_2v_\chi}{2m_E\Lambda^2} + \frac{v_1m_\mu}{\sqrt{2}m_E^2}\left(q_{11}s_{e\mu} + q_{12}c_{e\mu}\right) \\ &\approx \frac{v_1}{m_E}\{\frac{v_2v_\chi}{2\Lambda^2} + \frac{m_\mu}{\sqrt{2}m_E}\} \\ &\approx \frac{m_t}{m_E}\{\frac{m_\tau v_\chi}{\Lambda^2} + \frac{m_\mu}{\sqrt{2}m_E}\} \\ &\approx \frac{m_tm_\mu}{m_E^2} \end{aligned} \tag{2-64}$$

se obtiene que $\vec{q}_R$ se reexpresa

$$\vec{q}_R \approx \begin{pmatrix} \frac{m_tm_\tau}{m_E\Lambda} \\ \frac{m_tm_\mu}{m_E^2} \\ m_tm_\tau m_E\Lambda \end{pmatrix} \approx \frac{m_t}{m_E^2}\begin{pmatrix} \frac{m_\tau m_E}{\Lambda} \\ m_\mu \\ m_\tau m_E\Lambda \end{pmatrix} \tag{2-65}$$

asumiendo que $q_{11} \approx q_{12} \approx 1$, $c_{e\mu} \approx 1$, $\Omega_{ij} \approx 1$ buscando reducir así el número de parámetros del modelo.

Como resultado, las transformaciones de los leptones de quiralidad derecha se escriben como

$$\begin{aligned} L'_R &= V_{R(SM)} L_R + E_R, \\ E'_R &= -\vec{q}_R^T L_R + E_R. \end{aligned} \tag{2-66}$$

Ahora bien, la matriz $V_{L_{(SM)}}$ diagonaliza el bloque que contiene los leptones del Modelo Estándar, es decir, electrón, muón y tau. Esta matriz viene dada por

$$V_{L_{(SM)}} = \begin{pmatrix} c_{e\mu} & s_{e\mu} & r_1 \\ -s_{e\mu} & c_{e\mu} & r_2 \\ -r_1 c_{e\mu} + r_2 s_{e\mu} & -r_2 c_{e\mu} - r_1 s_{e\mu} & 1 \end{pmatrix} \tag{2-67}$$

en donde $r_1 = \frac{(s_{e\tau}\Omega^l_{11} + c_{e\tau}\Omega^l_{13}) v_2 v_\chi^3 + \sqrt{2} m_\mu v_\chi^3 \Omega^l_{32} s_{e\mu}}{4\Lambda^3 m_\tau}$ y $r_2 = \frac{(s_{e\tau}\Omega^l_{21} + c_{e\tau}\Omega^l_{23}) v_2 v_\chi^3 + \sqrt{2} m_\mu v_\chi^3 \Omega^l_{32} s_{e\mu}}{4\Lambda^3 m_\tau}$. Al considerar las aproximaciones $\theta_{e\tau} \ll \theta_{e\mu} \ll 1$ y $\Omega_{ij} \approx \Omega$, r_1 y r_2 resultan ser

$$\begin{aligned} r_1 &\approx \frac{\Omega}{4\Lambda^3 m_\tau} \{ c_{e\tau} v_2 v_\chi^3 + \sqrt{2} m_\mu v_\chi^3 s_{e\mu} \} \\ &\approx \frac{\Omega v_2}{4 m_\tau} (\frac{v_\chi}{\Lambda})^3 \approx (\frac{v_\chi}{\Lambda})^3 \\ r_2 &\approx \frac{\Omega}{4\Lambda^3 m_\tau} \{ c_{e\tau} v_2 v_\chi^3 + \sqrt{2} m_\mu v_\chi^3 s_{e\mu} \} \\ &\approx \frac{\Omega v_2}{4 m_\tau} (\frac{v_\chi}{\Lambda})^3 \approx (\frac{v_\chi}{\Lambda})^3 \end{aligned} \tag{2-68}$$

Bajo las anteriores aproximaciones, la matriz $V^E_{L\,(SM)}$ puede ser escrita como

$$V^E_{L\,2} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_{e\mu} & s_{e\mu} & r_1 & 0 \\ -s_{e\mu} & c_{e\mu} & r_2 & 0 \\ -r_1 & -r_2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{c|c} V_{L_{(SM)}} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I} \end{array} \right) \tag{2-69}$$

siendo

$$V_{L_{(SM)}} = \begin{pmatrix} c_{e\mu} & s_{e\mu} & r_1 \\ -s_{e\mu} & c_{e\mu} & r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} c_{e\mu} & s_{e\mu} & 0 \\ -s_{e\mu} & c_{e\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2-70}$$

Al observar la anterior matriz es posible percatarse de la supresión de los términos de mezcla con el leptón tau (τ), de manera que los términos de mezcla entre electrones (e) y muones (μ) tienen la mayor contribución. Con todo lo anterior, la matriz de rotación completa se escribe como

$$V^E_L = V_{L_1}{}^E V_{L_2}{}^E \approx \left[\begin{array}{c|c} V^E_{L_{(SM)}} & \vec{q}_L \\ \hline -\vec{q}_L^T V^E_{L_{(SM)}} & 1 \end{array} \right], \tag{2-71}$$

donde

$$\vec{q}_L = \begin{pmatrix} \frac{m_t}{y_t m_E} \\ \frac{m_\tau}{m_E} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2-72}$$

Al computar el producto $\vec{q}_L^T V^E_{L_{(SM)}}$, se encuentra que

$$\begin{aligned} \vec{q}_L^T V^E_{L_{(SM)}} &\approx \frac{1}{m_E} \begin{pmatrix} c_{e\mu} m_t - s_{e\mu} m_\tau \\ s_{e\mu} m_t + c_{e\mu} m_\tau \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ &\approx \frac{1}{m_E} \begin{pmatrix} m_t \\ s_{e\mu} m_t \\ 0 \end{pmatrix}^T \; or \; \approx \frac{1}{m_E} \begin{pmatrix} m_t \\ m_\tau \\ 0 \end{pmatrix}^T , \end{aligned} \tag{2-73}$$

de manera que se tienen dos posibles opciones, $s_{e\mu} m_t > c_{e\mu} m_\tau \longrightarrow \tan\theta_{e\mu} > \frac{m_\tau}{m_t}$ o $s_{e\mu} m_t < c_{e\mu} m_\tau \longrightarrow \tan\theta_{e\mu} < \frac{m_\tau}{m_t}$, pero en tanto se consideran ángulos pequeños ($\sin\theta_{e\mu} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+h^2}}$), se tiene por tanto la opción $\tan\theta_{e\mu} < \frac{m_\tau}{m_t}$. Por lo cual,

$$\vec{q}_L^T V^E_{L_{(SM)}} \approx \frac{1}{m_E} \begin{pmatrix} m_t \\ m_\tau \\ 0 \end{pmatrix}^T \approx \vec{q}_L^T. \tag{2-74}$$

Con ello, la matriz de rotación se aproxima a

$$V^E_L \approx \left[\begin{array}{c|c} V^E_{L_{(SM)}} & \vec{q}_L \\ \hline -\vec{q}_L^T & 1 \end{array} \right] \tag{2-75}$$

La matriz $V^E_{R_{(SM)}}$ diagonaliza el bloque de partículas del Modelo Estándar con quiralidad derecha. Esta matriz viene dada por

$$V^E_{R_{(SM)}} = \begin{pmatrix} c_{e\tau} & -c_{e\tau} t_2 & s_{e\tau} \\ t_2 & 1 & 0 \\ -s_{e\tau} & -s_{e\tau} t_2 & c_{e\tau} \end{pmatrix} \tag{2-76}$$

en donde $t_2 = \frac{v_2 v_\chi^3}{4\Lambda^3 m_\mu}\{-s_{e_\mu} c_{e_\tau} \Omega_{11} + c_{e_\mu} c_{e_\tau} \Omega_{21}\} \approx \frac{v_2 v_\chi^3}{4\Lambda^3 m_\mu} \approx \frac{m_\tau}{m_\mu}\left(\frac{v_\chi}{\Lambda}\right)^3 \approx 0$. Por lo cual, la anterior matriz de rotación se escribe como

$$V^E_{R_{(SM)}} \approx \begin{pmatrix} c_{e\tau} & 0 & s_{e\tau} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{e\tau} & 0 & c_{e\tau} \end{pmatrix} \tag{2-77}$$

Finalmente, con base en todas las anteriores matrices de rotación, se encuentran las masas de los leptones cargados, en términos de los parámetros del modelo,

$$\begin{aligned} m_E^2 &= \frac{g_{\chi E}^2 v_\chi^2}{2} \\ m_\tau^2 &\approx \frac{1}{2}\left(\zeta^2 + H^2\right) v_2^2 \approx \frac{H^2}{2} v_2^2 \approx \frac{1}{2} v_2^2 \\ m_\mu^2 &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 + h^2\right) v_2^2 \approx v_2^2 \frac{h^2}{2} \approx m_\tau^2 h^2 \end{aligned} \tag{2-78}$$

donde $\tan\theta_{e\mu} = \frac{\eta}{h}$ y $\tan\theta_{e\tau} = \frac{\zeta}{H}$. Como consecuencia de las anteriores relaciones, se encuentra que $\frac{m_\mu}{m_\tau} = \frac{h}{H} \approx \frac{105\ MeV}{1776\ MeV} = 5.9\times10^{-2} = 6\times10^{-2}$. Cabe mencionar que se ha asumido también la aproximación $\theta_{e\tau} \ll \theta_{e\mu}$.

Ahora, si $H \approx 1 \longrightarrow m_\tau \approx \frac{v_2}{\sqrt{2}}$, entonces $m_\mu = m_\tau h \longrightarrow h = \frac{m_\mu}{m_\tau} \approx 6\times10^{-2}$. En lo que respecta a la masa del electrón

$$\begin{aligned} m_e^2 &= \frac{v_1^4 v_2^2}{4}\left(\frac{c_{e\tau} v_\chi^3(\Omega_{11} c_{e\mu} - \Omega_{21} s_{e\mu})}{v_1^2\Lambda^3} + \frac{s_{e\tau} v_\chi^3(\Omega_{23} s_{e\mu} - \Omega_{13} c_{e\mu})}{v_1^2\Lambda^3} + \frac{(q_{11} c_{e\mu} - q_{12} s_{e\mu})(\Omega_{43} s_{e\tau} - \Omega_{41} c_{e\tau})}{\sqrt{2} m_E \Lambda}\right)^2 \\ &\approx \frac{v_1^4 v_2^2}{4}\left(\frac{c_{e\tau} v_\chi^3(\Omega_{11}^l c_{e\mu} - \Omega_{21}^l s_{e\mu})}{v_1^2\Lambda^3} + \frac{q_{11} c_{e\mu}\left(\Omega_{43}^l s_{e\tau} - \Omega_{41}^l c_{e\tau}\right)}{\sqrt{2} m_E \Lambda}\right)^2 \\ &\approx \frac{v_1^4 v_2^2}{4}\left(\frac{c_{e\tau} v_\chi^3 \Omega c_{e\mu}}{v_1^2\Lambda^3} - \frac{q_{11} c_{e\mu}\Omega c_{e\tau}}{\sqrt{2} m_E \Lambda}\right)^2 \\ &\approx \frac{v_1^4 v_2^2}{4\Lambda^2}\left(c_{e\tau} c_{e\mu}\Omega\{\frac{v_\chi^3}{\Lambda^2 v_1^2} - \frac{q_{11}}{\sqrt{2} m_E}\}\right)^2 \\ &\approx \frac{v_1^4 v_2^2}{4 v_1^4} c_{e\tau}^2 {c_{e\mu}}^2 \left(\frac{v_\chi}{\Lambda}\right)^6 \\ &\approx \frac{v_2^2}{4}\left(\frac{v_\chi}{\Lambda}\right)^6 \end{aligned}$$

.

(2-79)

De esta forma, a partir de la anterior expresión para la masa del electrón, es posible establecer una relación entre v_χ y Λ,

$$\frac{v_\chi}{\Lambda} = C_\eta \longrightarrow C_\eta^3 = \left(\frac{v_\chi}{\Lambda}\right)^3 = \sqrt{2}\frac{m_e}{m_\tau}, \tag{2-80}$$

donde $C_\eta = 4.3\times10^{-3}$.Adicionalmente, al recordar la masa calculada del leptón exótico m_E, se encuentra la relación

$$m_E = \frac{g_{\chi E}}{\sqrt{2}} v_\chi = \frac{g_{\chi E} C_\eta}{\sqrt{2}}\Lambda \longrightarrow \frac{m_E}{\Lambda} = \frac{g_{\chi E} C_\eta}{\sqrt{2}}, \tag{2-81}$$

de manera que si $g_{\chi E} \approx 1$, esta relación se reduce a

$$\frac{m_E}{\Lambda} \approx \frac{C_\eta}{\sqrt{2}}. \tag{2-82}$$

2.4. Sector neutro

El sector que contiene las corrientes leptónicas neutras del Lagrangiano de Yukawa es

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{Y,N} &= y_{2e}^{\nu e}\overline{l'^{e}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{e}_{R} + y_{2e}^{\nu\mu}\overline{l'^{e}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{\mu}_{R} + y_{2e}^{\nu\tau}\overline{l'^{e}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{\tau}_{R} + y_{2\mu}^{\nu e}\overline{l'^{\mu}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{e}_{R} \\ &\quad + y_{2\mu}^{\nu\mu}\overline{l'^{\mu}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{\mu}_{R} + y_{2\mu}^{\nu\tau}\overline{l'^{\mu}_{L}}\tilde{\phi}_2\nu'^{\tau}_{R} + y_{\chi^i}^{\nu j}\overline{\nu'^{iC}_{R}}\chi^* N'^{j}_{R} + \frac{1}{2}\overline{N'^{iC}_{R}}M_M^{ij}N'^{j}_{R} + h.c.\end{aligned} \tag{2-83}$$

Para este caso, los campos escalares acoplan de la forma $\tilde{\phi}_i = i\sigma_2\phi_i^*$, es decir

$$\tilde{\phi}_i = \begin{pmatrix} \frac{h_i+v_i-i\eta_i}{\sqrt{2}} \\ -\phi_i^- \end{pmatrix}. \tag{2-84}$$

Definiendo la base de interacción como

$$N_L = \begin{pmatrix} \vec{\nu'}_L \\ (\vec{\nu'}_R)^C \\ (\vec{N'}_R)^C \end{pmatrix}, \tag{2-85}$$

y tomando los v.e.v de los campos $\phi_{1,2}$ y χ, se encuentra la matriz de masa en la base de interacción

$$\begin{aligned}-\langle\mathcal{L}_{Y,N}\rangle &= \begin{pmatrix} \overline{(\vec{\nu'}_L)^C} & \overline{\vec{\nu'}_R} & \overline{\vec{N'}_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_\nu^T & 0 \\ m_\nu & 0 & M_D^T \\ 0 & M_D & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\nu'}_L \\ (\vec{\nu'}_R)^C \\ (\vec{N'}_R)^C \end{pmatrix} + h.c. \\ &= \overline{N_L^C}M_\nu N_L + h.c.,\end{aligned} \tag{2-86}$$

con

$$M_D^{ij} = y_{\chi^i}^{\nu j}\frac{v_\chi}{\sqrt{2}},\ \ m_\nu = \frac{v_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_{2e}^{\nu e} & y_{2e}^{\nu\mu} & y_{2e}^{\nu\tau} \\ y_{2\mu}^{\nu e} & y_{2\mu}^{\nu\mu} & y_{2\mu}^{\nu\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_\nu^T & 0 \\ m_\nu & 0 & M_D^T \\ 0 & M_D & M_M \end{pmatrix}, \tag{2-87}$$

en donde los subíndices denotan $i, j = e, \mu, \tau$. m_ν es la matriz de masa entre los neutrinos izquierdos ν_L y los neutrinos derechos ν_R. Por otro lado, M_D es la matriz de masa entre los neutrinos ν_R^C y N_R, mientras que M_M es la matriz de masa de los neutrinos de Majorana N_R.

Diagonalización

Para encontrar los estados en la base de masa se considera la diagonalización de la matriz $M_{\nu 9\times 9}$, a través de una matriz unitaria U que satisface

$$-\left\langle\mathcal{L}_{Y,N}^{\nu}\right\rangle = \frac{1}{2}\overline{N_L^C}U\underbrace{U^\dagger M_\nu U}_{M_{\nu,\text{diag}}}U^\dagger N_L + h.c. \tag{2-88}$$

Esta matriz U se define como el producto de tres matrices

$$U = W_{SS} W_H W_B, \tag{2-89}$$

las cuales rotan los estados de la forma

$$\begin{aligned} \overline{n_L^C} &= \overline{N_L^C} U, \\ n_L &= U^\dagger N_L. \end{aligned} \tag{2-90}$$

Para realizar la rotación de la matriz M_ν se organiza esta matriz por bloques

$$M_\nu = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & m_\nu^T & 0 \\ \hline m_\nu & 0 & M_D^T \\ 0 & M_D & M_M \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M_d^T \\ \hline M_d & M_n \end{array}\right). \tag{2-91}$$

La primera matriz de rotación de la ecuación (2-89) se define como

$$W_{SS} = \left(\begin{array}{c|c} I_{3\times 3} & F_{3\times 6} \\ \hline -F_{6\times 3}^T & I_{6\times 6} \end{array}\right). \tag{2-92}$$

Para poder llevar a cabo la diagonalización se considera que $0 << M_\nu << M_n$. Esto se satisface dado que los neutrinos N_R están en la escala de los KeV mientras que los neutrinos ν_R están en la escala de los TeV. Por lo tanto

$$\begin{aligned} W_{SS}^\dagger M_\nu W_{SS} &= \left(\begin{array}{c|c} I & -F \\ \hline F^T & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & M_d^T \\ \hline M_d & M_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I & F \\ \hline -F^T & I \end{array}\right) \\ &\approx \begin{pmatrix} -M_d^T M_n^{-1} M_d & 0 \\ 0 & M_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2-93}$$

con $F = M_d^T M_n^{-1}$, y el bloque superior $M_d^T M_n^{-1} M_d$ definido como una matriz 3×3:

$$\begin{aligned} M_d^T M_n^{-1} M_d &= \begin{pmatrix} m_\nu^T & ,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_D^{-1} M_M (M_D^T)^{-1} & M_D^{-1} \\ (M_D^T)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\nu \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left[-m_\nu^T M_D^{-1} M_M (M_D^T)^{-1} m_\nu \right]_{3\times 3}. \end{aligned} \tag{2-94}$$

Entre tanto, las componentes de W_{SS} se definen como

$$\begin{aligned} F = M_d^T M_n^{-1} &= \begin{pmatrix} m_\nu^T, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_D^{-1} M_M (M_D^T)^{-1} & M_D^{-1} \\ (M_D^T)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m_\nu^T M_D^{-1} M_M (M_D^T)^{-1}, & m_\nu^T M_D^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2-95}$$

En resumen, el resultado de esta diagonalización comprende un primer bloque M_{sm} que contiene los neutrinos del Modelo Estándar, y un segundo bloque M_n con los neutrinos exóticos, es decir

$$W_{SS}^\dagger M_\nu W_{SS} \approx \begin{pmatrix} -M_d^T M_n^{-1} M_d & 0 \\ 0 & M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{sm} & 0 \\ 0 & M_n \end{pmatrix} = M_{ss}. \tag{2-96}$$

Consecuentemente, el siguiente paso es diagonalizar el bloque M_n, para lo cual la siguiente matriz de rotación, W_H, de la ecuación (2-89) se aplica sobre M_{ss} como

$$\begin{aligned} W_H^\dagger M_{ss} W_H &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & V^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{sm} & 0 \\ 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{sm} & 0 \\ 0 & V^\dagger M_n V \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2-97}$$

Considerando a V como una matriz compuesta por una rotación de $\pi/4$, y por una rotación mediada por un parámetro S:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ -S^T & 1 \end{pmatrix}, \tag{2-98}$$

se realiza el producto

$$V^\dagger M_n V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -S^* \\ S^\dagger & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} -M_D^T - M_D + M_M & M_D^T - M_D - M_M \\ \hline -M_D^T + M_D - M_M & M_D^T + M_D + M_M \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & S \\ -S^T & 1 \end{pmatrix}. \tag{2-99}$$

Al considerar que $M_D^T = M_D$, $M_D S^\dagger = S^T M_D$, $S^T M_M = M_M S^\dagger$ y $M_M S = S^* M_M$ se obtiene

$$S = -\frac{1}{4} M_D^{-1} M_M, \tag{2-100}$$

y los términos diagonales de la matriz toman la forma

$$\begin{aligned} (V^\dagger M_n V)_{11} &= -(1 - S^T) M_D^T (1 + S^T) + (1 - S) M_D (1 - S^T) - (1 - S) M_M (1 - S^T) \\ &= \frac{1}{2} \left[-2(1 - S^2) M_D + (1 + S)^2 M_M \right] \approx -M_D + \frac{M_M}{2}, \end{aligned} \tag{2-101}$$

y

$$\begin{aligned} (V^\dagger M_n V)_{22} &= \frac{1}{2} \left[2(1 - S^2) M_D + (1 - S)^2 M_M \right] \approx M_D + \frac{M_M}{2} \\ &= -(1 + S^T) M_D^T (1 - S) + (1 - S) M_D (1 + S) + (1 - S) M_M (1 - S). \end{aligned} \tag{2-102}$$

Como resultado, se obtiene que los bloques quedan diagonalizados como

$$V^\dagger M_n V = \begin{pmatrix} -M_D + \frac{M_M}{2} & 0 \\ 0 & M_D + \frac{M_M}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = M_H. \tag{2-103}$$

Por último, la matriz de rotación W_B de la matriz U, definida en la ecuación (2-89), diagonaliza cada bloque 3×3

$$W_B^\dagger M_H W_B = \left(\begin{array}{c|c|c} V_\nu^\dagger & 0 & 0 \\ \hline 0 & V_1^\dagger & 0 \\ \hline 0 & 0 & V_2^\dagger \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} M_{sm} & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & M_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} V_\nu & 0 & 0 \\ \hline 0 & V_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & V_2 \end{array} \right). \tag{2-104}$$

En la matriz W_B (ecuación (2-104)), la submatriz V_ν diagonaliza el bloque del Modelo Estándar mientras que las matrices V_1 y V_2 diagonalizan los bloques M_1 y M_2 de la matriz M_H respectivamente. Se asume por simplicidad que las matrices M_1 y M_2 son matrices diagonales, y por lo tanto, la rotación total puede ser escrita como

$$U = \left(\begin{array}{c|c} I & F \\ \hline -F^T & I_{6\times 6} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & V_{6\times 6} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} V_\nu & 0 \\ \hline 0 & I_{6\times 6} \end{array}\right) \tag{2-105}$$

y teniendo en cuenta que la matriz V, definida en la ecuación (2-98)

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-S^T & 1+S \\ -(1+S^T) & 1-S \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}_{6\times 6} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}, \tag{2-106}$$

se obtiene entonces que la matriz de rotación U, que rota los estados de interacción a los estados de masa de los neutrinos, está dada por

$$\begin{aligned} U \approx \begin{pmatrix} V_\nu & FV \\ -F^T V_\nu & V \end{pmatrix} \approx & \left(\begin{array}{c|cc} V_\nu & m_\nu^T M_D^{-1} & m_\nu^T M_D^{-1} \\ \hline -M_D^{-1} M_M (M_D^T)^{-1} m_\nu V_\nu & \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ (M_D^T)^{-1} m_\nu V_\nu & -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{array}\right) \\ & \left(\begin{array}{c|cc} V_\nu & m_\nu^T M_D^{-1} & m_\nu^T M_D^{-1} \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ (M_D^T)^{-1} m_\nu V_\nu & -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{array}\right). \end{aligned} \tag{2-107}$$

Por lo tanto,

$$-\left\langle \mathcal{L}^\nu_{Y,N} \right\rangle = \frac{1}{2}\overline{N_L^C} M_\nu N_L = \frac{1}{2}\overline{n_L^C} M_{\nu,diag} n_L, \tag{2-108}$$

con

$$n_L = U^\dagger N_L \quad \Longrightarrow \quad N_L = U n_L. \tag{2-109}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} \vec{\nu'}_L \\ (\vec{\nu'}_R)^C \\ (\vec{N'}_R)^C \end{pmatrix} \approx \left(\begin{array}{c|c|c} V_\nu & m_\nu^T M_D^{-1} & m_\nu^T M_D^{-1} \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline (M_D^T)^{-1} m_\nu V_\nu & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)\begin{pmatrix} \vec{\nu}_L \\ \vec{N}_{1L} \\ \vec{N}_{2L} \end{pmatrix}. \tag{2-110}$$

Adicionalmente, con base en la definición de los espinores de Majorana

$$\begin{aligned} \xi^C = \xi &= U^\dagger N_L + (U^\dagger N_L)^C \\ &= U^\dagger N_L + U^T N_L^C \\ &= \xi_L + \xi_R, \end{aligned} \tag{2-111}$$

se tiene que la transformación para los neutrinos de quiralidad derecha viene dada por

$$\xi_R = U^T \begin{pmatrix} \left(\vec{\nu'}_L\right)^C \\ \vec{\nu'}_R \\ \vec{N}_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \left(\vec{\nu'}_L\right)^C \\ \vec{\nu'}_R \\ \vec{N'}_R \end{pmatrix} = U\, \xi_R. \tag{2-112}$$

2.5. Sector electrodébil

El Lagrangiano de las derivadas covariantes (Lagrangiano cinético) viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = (D_\mu \phi_1)^\dagger (D^\mu \phi_1) + (D_\mu \phi_2)^\dagger (D^\mu \phi_2) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi)\,. \tag{2-113}$$

Teniendo en cuenta los valores esperados del vacío (v.e.v) con sus respectivos números cuánticos,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad X = \frac{2}{3}, \quad Y = 1, \\
\langle \phi_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{3}, \quad Y = 1, \\
\langle \chi \rangle &= \frac{v_X}{\sqrt{2}}, \qquad X = -\frac{1}{3}, \quad Y = 0,
\end{aligned} \tag{2-114}$$

y la derivada covariante definida como

$$D_\mu \longrightarrow -igA_\mu^\alpha T_\alpha - ig'\frac{Y}{2}B_\mu - ig_X X Z'_\mu, \tag{2-115}$$

al aplicar la derivada covariante al campo $\langle \phi_1 \rangle$

$$D_\mu \langle \phi_1 \rangle \to -igA_\mu^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v_1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} - i\frac{g'}{2}B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - ig_X Z'_\mu \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{2-116}$$

y al considerar el hermítico conjugado de la derivada de la ecuación (2-116)

$$(D^\mu \langle \phi_1 \rangle)^\dagger \to ig \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} A^{\mu 3} + i\frac{g'}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} B^\mu + ig_X \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} Z'^\mu, \tag{2-117}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
(D^\mu \langle \phi_1 \rangle)^\dagger (D_\mu \langle \phi_1 \rangle) \to\ & g^2 A^{\mu 3} A_\mu^3 \left(\frac{v_1^2}{8}\right) + g'^2 B^\mu B_\mu \left(\frac{v_1^2}{8}\right) + g_X^2 Z'^\mu Z'_\mu \left(\frac{2v_1^2}{9}\right) \\
& + gg' A^{\mu 3} B_\mu \left(-\frac{v_1^2}{8}\right) + gg_X A^{\mu 3} Z'_\mu \left(-\frac{v_1^2}{6}\right) \\
& + g'g B^\mu A_\mu^3 \left(-\frac{v_1^2}{8}\right) + g'g_X B^\mu Z'_\mu \left(\frac{v_1^2}{6}\right) \\
& + gg_X Z'^\mu A_\mu^3 \left(-\frac{v_1^2}{6}\right) + g_X g' Z'^\mu B_\mu \left(\frac{v_1^2}{6}\right).
\end{aligned} \tag{2-118}$$

Asimismo, para el campo ϕ_2

$$\begin{aligned}(D^\mu \langle\phi_2\rangle)^\dagger (D_\mu \langle\phi_2\rangle) \to\ & g^2 A^{\mu 3} A^3_\mu \left(\frac{v_2^2}{8}\right) + g'^2 B^\mu B_\mu \left(\frac{v_2^2}{8}\right) + g_X^2 Z'^\mu Z'_\mu \left(\frac{v_2^2}{18}\right) \\ & + g g' A^{\mu 3} B_\mu \left(-\frac{v_2^2}{8}\right) + g g_X A^{\mu 3} Z'_\mu \left(-\frac{v_2^2}{12}\right) \\ & + g' g B^\mu A^3_\mu \left(-\frac{v_2^2}{8}\right) + g' g_X B^\mu Z'_\mu \left(\frac{v_2^2}{12}\right) \\ & + g g_X Z'^\mu A^3_\mu \left(-\frac{v_2^2}{12}\right) + g_X g' Z'^\mu B_\mu \left(\frac{v_2^2}{12}\right),\end{aligned} \tag{2-119}$$

y para el campo χ

$$(D^\mu \langle\chi\rangle)^\dagger (D_\mu \langle\chi\rangle) \to g_X^2 Z'^\mu Z'_\mu \frac{v_X^2}{18}. \tag{2-120}$$

Las ecuaciones (2-118), (2-119) y (2-120) son agrupadas

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \begin{pmatrix} A^3_\mu & B_\mu & Z'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g^2}{8}(v_1^2+v_2^2) & -\frac{gg'}{8}(v_1^2+v_2^2) & -\frac{gg_X}{12}(2v_1^2+v_2^2) \\ -\frac{gg'}{8}(v_1^2+v_2^2) & \frac{g'^2}{8}(v_1^2+v_2^2) & \frac{g'g_X}{12}(2v_1^2+v_2^2) \\ -\frac{gg_X}{12}(2v_1^2+v_2^2) & \frac{g'g_X}{12}(2v_1^2+v_2^2) & \frac{g_X^2}{18}(4v_1^2+v_2^2+v_X^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\mu 3} \\ B^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix}, \tag{2-121}$$

así, el cuadrado de la matriz de masa M_0 se define como

$$\frac{1}{2}M_0^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} g^2v^2 & -gg'v^2 & -\frac{2gg_Xv^2}{3}(1+s_\beta^2) \\ -gg'v^2 & g'^2v^2 & \frac{2g'g_Xv^2}{3}(1+s_\beta^2) \\ -\frac{2gg_Xv^2}{3}(1+s_\beta^2) & \frac{2g'g_Xv^2}{3}(1+s_\beta^2) & \frac{4g_X^2v_X^2}{9}(1+(1+3s_\beta^2)\epsilon^2) \end{pmatrix}, \tag{2-122}$$

donde $\tan\beta = v_1/v_2$, $\epsilon = v/v_X$ y $v_1^2 + v_2^2 = v^2$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^3_\mu & B_\mu & Z'_\mu \end{pmatrix} M_0^2 \begin{pmatrix} A^{\mu 3} \\ B^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix} \tag{2-123}$$

y la matriz M_0, que contiene las masas de los bosones de gauge, puede ser diagonalizada a través de la matriz de rotación

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_Z & s_Z \\ 0 & -s_Z & c_Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_W & c_W & 0 \\ c_W & -s_W & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_W & c_W & 0 \\ c_W c_Z & -s_W c_Z & s_Z \\ -c_W s_Z & s_W s_Z & c_Z \end{pmatrix}, \tag{2-124}$$

en donde θ_W es el ángulo electrodébil del Modelo Estándar y θ_Z es el ángulo de mezcla entre el sector del Modelo Estándar y la extensión $U(1)_X$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &\approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^3_\mu & B_\mu & Z'_\mu \end{pmatrix} R_0^\dagger R_0 M_0^2 R_0^\dagger R_0 \begin{pmatrix} A^{\mu 3} \\ B^\mu \\ Z'^\mu \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu & Z_{0\mu} & Z_{1\mu} \end{pmatrix} M^2 \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z_0^\mu \\ Z_1^\mu \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu & Z_{0\mu} & Z_{1\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Z_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_{Z_1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z_0^\mu \\ Z_1^\mu \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2-125}$$

siendo la rotación de los campos de gauge definida como

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_{0\mu} \\ Z_{1\mu} \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} A^3_\mu \\ B_\mu \\ Z'_\mu \end{pmatrix} \tag{2-126}$$

y el cuadrado de la matriz diagonalizada

$$M^2 = R_0 M_0^2 R_0^\dagger, \tag{2-127}$$

se encuentra que M^2 se puede reescribir así:

$$M^2 \approx \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{l} g^2v^2\frac{c_Z^2}{c_W^2} + \frac{1}{3}gg_Xv^2(-3+c_{(2\beta)})\frac{s_{(2Z)}}{c_W} \\ \quad + \frac{4}{9}s_Z^2g_X^2v_X^2 \end{array} & \begin{array}{l} -g^2g_Xv^2\frac{c_Zs_Z}{c_W^2} - gv^2\frac{c_{(2Z)}}{c_W} \\ \quad + \frac{1}{3}g_Xgv^2\frac{c_{(2\beta)}c_{(2Z)}}{c_W} + \frac{2}{9}s_{(2Z)}g_Xv^2 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{l} -g^2g_Xv^2\frac{c_Zs_Z}{c_W^2} - gv^2\frac{c_{(2Z)}}{c_W} \\ \quad + \frac{1}{3}g_Xgv^2\frac{c_{(2\beta)}c_{(2Z)}}{c_W} + \frac{2}{9}s_{(2Z)}g_Xv^2 \end{array} & \begin{array}{l} g^2v^2\frac{s_Z^2}{c_W} + gg_Xv^2\frac{s_{(2Z)}}{c_W} \\ \quad - \frac{1}{3}gg_X\frac{c_{(2\beta)}s_{(2Z)}}{c_W} + \frac{4}{9}c_Z^2g_X^2v_X^2 \end{array} \end{array}\right), \tag{2-128}$$

en la cual se observa que si el ángulo de mezcla $\theta_Z \to 0$, la matriz de masa toma la forma

$$M^2 \to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2v^2}{c_W^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9}g_X^2v_X^2 \end{pmatrix}, \tag{2-129}$$

a partir de la cual se obtienen las masas de los bosones de gauge

$$M_A = 0, \qquad M_{Z_0} = \frac{gv}{2C_W}, \qquad M_{Z_1} = \frac{g_Xv_X}{3}, \tag{2-130}$$

donde M_A corresponde al autovalor del fotón, M_{Z_0} es la masa del bosón gauge neutro del Modelo Estándar Z_0 y M_{Z_1} es la masa del bosón de gauge asociado a la nueva simetría. Además, bajo esta misma aproximación ($\theta_Z \to 0$) la transformación de los campos toma la forma

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_{0\mu} \\ Z_{1\mu} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} s_W A^3_\mu + c_W B_\mu \\ c_W A^3_\mu - s_W B_\mu \\ Z'_\mu \end{pmatrix}, \tag{2-131}$$

lo que evidencia la reproducción de la rotación del sector electrodébil en el Modelo Estándar.

3. Acoples que Contribuyen a los Decaimientos con Violación de Sabor de Leptón Cargado en el Modelo No-Universal $U(1)_X$

Con base en los desarrollos realizados en el Capítulo 2, particularmente, teniendo en cuenta las matrices que transforman los campos leptónicos, escalares y de gauge de la base de interacción a la base de masa, es posible obtener los acoples entre los diferentes campos fermiónicos y bosónicos que dan cuenta de la violación del sabor de leptón cargado. A través de estos acoples, es posible describir y estudiar procesos de decaimiento a dos y tres cuerpos en donde el leptón cargado inicial se convierte en otro leptón cargado de un sabor diferente, es decir $\tau \longrightarrow \mu\gamma$, $\mu \longrightarrow e\gamma$, $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$, $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$, entre otros.

3.1. Sector de Acoples Leptón Neutro-Leptón Cargado con Bosones Escalares

El sector del modelo que da cuenta de los acoples entre los leptones neutros, los leptones cargados y los bosones escalares está descrito por el Lagrangiano de Yukawa (2-83), el cual se escribe sin tener en cuenta los v.e.v de los campos como

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{Y,N} \rightarrow\ & y_{2e}^{\nu e}\overline{\nu_L^{\prime e}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime e} + y_{2e}^{\nu\mu}\overline{\nu_L^{\prime e}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime \mu} + y_{2e}^{\nu\tau}\overline{\nu_L^{\prime e}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime \tau} \\
& + y_{2\mu}^{\nu e}\overline{\nu_L^{\prime \mu}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime e} + y_{2\mu}^{\nu\mu}\overline{\nu_L^{\prime \mu}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime \mu} + y_{2\mu}^{\nu\tau}\overline{\nu_L^{\prime \mu}}\frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\nu_R^{\prime \tau} \\
& - y_{2e}^{\nu e}\overline{e_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime e} - y_{2e}^{\nu\mu}\overline{e_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime \mu} - y_{2e}^{\nu\tau}\overline{e_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime \tau} - y_{2\mu}^{\nu e}\overline{\mu_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime e} \\
& - y_{2\mu}^{\nu\mu}\overline{\mu_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime \mu} - y_{2\mu}^{\nu\tau}\overline{\mu_L^{\prime}}\phi_2^- \nu_R^{\prime \tau} + h.c.,
\end{aligned} \tag{3-1}$$

donde no se ha considerado la interacción entre los neutrinos exóticos debido a la no contribución de estos en los diagramas de Feynman a 1-loop para los procesos a estudiar. En

forma matricial el Lagrangiano (3-1) queda de la forma

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{Y,N} \to & \frac{h_2 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\overline{\nu_L^{'e}} & \overline{\nu_L^{'\mu}} & \overline{\nu_L^{'\tau}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2e}^{\nu e} & y_{2e}^{\nu\mu} & y_{2e}^{\nu\tau} \\ y_{2\mu}^{\nu e} & y_{2\mu}^{\nu\mu} & y_{2\mu}^{\nu\tau} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_R^{'e} \\ \nu_R^{'\mu} \\ \nu_R^{'\tau}\end{pmatrix} \\ & - \phi_2^-\begin{pmatrix}\overline{e_L'} & \overline{\mu_L'} & \overline{\tau_L'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2e}^{\nu e} & y_{2e}^{\nu\mu} & y_{2e}^{\nu\tau} \\ y_{2\mu}^{\nu e} & y_{2\mu}^{\nu\mu} & y_{2\mu}^{\nu\tau} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_R^{'e} \\ \nu_R^{'\mu} \\ \nu_R^{'\tau}\end{pmatrix} + h.c. \\ & = \frac{h_2 - i\eta_2}{v_2}\overline{\vec{\nu'}_L} m_\nu \vec{\nu'}_R - \phi_2^- \frac{\sqrt{2}}{v_2}\overline{L_L'} m_\nu \vec{\nu'}_R + h.c.\end{aligned} \tag{3-2}$$

El primer término de la ecuación (3-2) es la interacción neutrino-neutrino, sin embargo, este término no se considera debido a que no contribuye a los procesos a estudiar. Por lo tanto, se puede escribir la parte del Lagrangiano $\mathcal{L}_{Y,N}$ que contiene los acoples para los diagramas a 1-loop a estudiar de manera compacta como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y,N} &\to \phi_2^- \frac{\sqrt{2}}{v_2}\overline{L_L'} m_\nu \vec{\nu'}_R + h.c. \\ &= \phi_2^+ \frac{\sqrt{2}}{v_2}\overline{\vec{\nu'}_R} m_\nu^T L_L' + h.c.\end{aligned} \tag{3-3}$$

y con las transformaciones de los campos definidas así:

$$\begin{aligned}&\vec{\nu'}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\vec{N}_{1R} + \vec{N}_{2R}\Big), \\ &L_L' \approx V_{L_{(SM)}} L_L + \vec{q}_L E_L, \\ &\phi_2^+ = -s_\beta H^+,\end{aligned} \tag{3-4}$$

se obtienen entonces los términos que contienen los acoples que contribuyen al estudio de los procesos de decaimiento que violan el sabor de leptón cargado, en este caso, para el muón.

3.2. Sector de Acoples entre Leptones Cargados y Bosones Escalares

El Lagrangiano de Yukawa que describe los acoples entre los leptones cargados del modelo, a través de bosones escalares, es

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{Y,L} = & \eta\overline{l_L^e}\phi_2 e_R^\mu + h\overline{l_L^\mu}\phi_2 e_R^\mu + \zeta\overline{l_L^\tau}\phi_2 e_R^e + H\overline{l_L^\tau}\phi_2 e_R^\tau + q_{11}\overline{l_L^e}\phi_1 E_R + q_{21}\overline{l_L^\mu}\phi_1 E_R \\ & + g_{\chi E}\overline{E_L}\chi E_R + g_{\chi\mathcal{E}}\overline{\mathcal{E}_L}\chi^*\mathcal{E}_R + h.c.\end{aligned} \tag{3-5}$$

el cual se escribe en forma matricial, sin tener en cuenta el valor esperado del vacío, como

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{Y,C} = &\begin{pmatrix}\overline{e'_L} & \overline{\mu'_L} & \overline{\tau'_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \eta & 0\\ 0 & h & 0\\ \zeta & 0 & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e'_R\\ \mu'_R\\ \tau'_R\end{pmatrix}\left(\frac{h_2+i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)\\
&+\begin{pmatrix}\overline{\nu'_{e_L}} & \overline{\nu'_{\mu_L}} & \overline{\nu'_{\tau_L}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \eta & 0\\ 0 & h & 0\\ \zeta & 0 & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e'_R\\ \mu'_R\\ \tau'_R\end{pmatrix}\phi_2^+\\
&+q_{11}\overline{\nu'_{e_L}}\phi_1^+E'_R+q_{21}\overline{\nu'_{\mu_L}}\phi_1^+E'_R+q_{11}\overline{e'_L}\left(\frac{h_1+i\eta_1}{\sqrt{2}}\right)E'_R+q_{21}\overline{\mu'_L}\left(\frac{h_1+i\eta_1}{\sqrt{2}}\right)E'_R\\
&+g_{\chi E}\overline{E'_L}\left(\frac{h_\chi+i\eta_\chi}{\sqrt{2}}\right)E'_R+g_{\chi\mathcal{E}}\overline{\mathcal{E}_L}\left(\frac{h_\chi+i\eta_\chi}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{E}_R+h.c.,
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

Así, al utilizar las transformaciones definidas para los campos leptónicos de quiralidad izquierda (ecuación (2-61)), los campos de quiralidad derecha (ecuación (2-66)) y las transformaciones de los neutrinos (ecuación (2-110)), los términos que acoplan, por ejemplo, con el muón son

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{Y,C} \to &\left[\overline{L_L}V^\dagger_{L_{(SM)}}+\overline{E_L}\vec{q}_L^{\,\dagger}V^\dagger_{L_{(SM)}})\right]V_{L_{(SM)}}V^\dagger_{L_{(SM)}}Y'V_{R_{(SM)}}L_R\left(\frac{h_2+i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)\\
&+\left[\overline{\vec{\nu}_L}V_\nu^\dagger+(\overline{\vec{N}_{1_L}}+\overline{\vec{N}_{2_L}})(M_D^{-1})^\dagger m_\nu^*\right]V_{L_{(SM)}}V^\dagger_{L_{(SM)}}Y'V_{R_{(SM)}}L_R\phi_2^+\\
&+\left(q_{21}c_{\alpha_{e\mu}}+q_{11}s_{\alpha_{e\mu}}\right)\overline{\mu_L}\left(\frac{h_1+i\eta_1}{\sqrt{2}}\right)E_R+h.c.,
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

donde V_ν es la matriz que rota los estados de quiralidad izquierda de los neutrinos del Modelo Estándar. Por otro lado, la matriz que contiene los acoples de Yukawa, y el vector de espinores de neutrinos se escriben como

$$
Y'=\begin{pmatrix}0 & \eta & 0\\ 0 & h & 0\\ \zeta & 0 & H\end{pmatrix},\quad \overline{\vec{\nu}'_L}=\begin{pmatrix}\overline{\nu'_{e_L}} & \overline{\nu'_{\mu_L}} & \overline{\nu'_{\tau_L}}\end{pmatrix},
\tag{3-8}
$$

cuya matriz de acoples de Yukawa se diagonaliza como

$$
V^\dagger_{L_{(SM)}}Y'V_{R_{(SM)}}=Y=\delta^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta=e,\mu,\tau.
\tag{3-9}
$$

De esta manera, el Lagrangiano $\mathcal{L}_{Y,C}$ toma la forma

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{Y,C} \to & \Big[\overline{L_L} + \overline{E_L}\vec{q}_L^{\,\dagger}\Big] Y L_R \left(\frac{h_2 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \\
& + \Big[\overline{\vec{\nu}_L} V_\nu^\dagger V_{L_{(SM)}} + (\overline{\vec{N}_{1_L}} + \overline{\vec{N}_{2_L}})(M_D^{-1})^\dagger m_\nu^* V_{L_{(SM)}}\Big] Y L_R \phi_2^+ \\
& + \big(q_{21} c_{\alpha_{e\mu}} + q_{11} s_{\alpha_{e\mu}}\big)\overline{\mu_L}\left(\frac{h_1 + i\eta_1}{\sqrt{2}}\right) E_R + h.c \\
& = \Big[\overline{L_L} + \overline{E_L}\vec{q}_L^{\,\dagger}\Big] Y L_R (-s_\beta H + c_\beta h - i s_\beta c_\gamma A_0) \\
& + \Big[\overline{\vec{\nu}_L} U_{\text{PMNS}}^\dagger + (\overline{\vec{N}_{1_L}} + \overline{\vec{N}_{2_L}})(M_D^{-1})^\dagger m_\nu^* V_{L_{(SM)}}\Big] Y L_R (-s_\beta H^+) \\
& + \frac{q_{21}}{\sqrt{2}} c_{\alpha_{e\mu}} \overline{\mu_L}(c_{13} c_\beta H + s_\beta c_{13} h + s_{13} H_\chi + i c_\beta s_\gamma A_0) E_R + h.c.
\end{aligned} \tag{3-10}$$

Por lo tanto, al considerar, por ejemplo, los acoples con el muón μ, se obtiene

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{Y,C} \to & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\mu_L}\mu_R h + q_{21}\frac{v_1 y_{\mu\mu}}{v_\chi y_{EE}}\overline{E_L}\mu_R\right)(-s_\beta H + c_\beta h - i s_\beta c_\gamma A_0) \\
& + \sum_{i=1,2,3} \overline{\nu_{L_i}}\Omega_i^\dagger \mu_R (-s_\beta H^+) + \sum_{j=1,2}\sum_{i=e,\mu} \overline{N_{L_j}^i}\Theta_i \mu_R (-s_\beta H^+) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(q_{21} c_{\alpha_{e\mu}} + q_{11} s_{\alpha_{e\mu}}\big)\overline{\mu_L}(c_{13} c_\beta H + s_\beta c_{13} h + s_{13} H_\chi) E_R \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(q_{21} c_{\alpha_{e\mu}} + q_{11} s_{\alpha_{e\mu}}\big)\overline{\mu_L}(i c_\beta c_\gamma A_0) E_R + h.c.,
\end{aligned} \tag{3-11}$$

con las constantes Ω_i y Θ_i definidas como

$$\begin{aligned}
\Omega_i &= \frac{\sqrt{2}}{v_2} U_{\mu i} m_\mu, \\
\Theta_i &= g\big(s_{\alpha_{e\mu}} y_{2i}^{\nu e} + c_{\alpha_{e\mu}} y_{2j}^{\nu\mu}\big)\frac{m_\mu v_2}{\sqrt{2} M_W v_\chi y_{\chi i}^{\nu i}}.
\end{aligned} \tag{3-12}$$

Además, se ha tenido en cuenta que la matriz de mezcla de neutrinos Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) se define como[21]

$$U_{\text{PMNS}} = V_{L_{(SM)}}^\dagger V_\nu = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}. \tag{3-13}$$

3.3. Sector Electrodébil

El sector electrodébil describe las interacciones con los bosones de gauge electrodébiles del modelo. Para obtener los acoples correspondientes se considera la derivada covariante aplicada a los diferentes dobletes escalares

$$D_\mu \phi_i = \left(\partial_\mu + i g A_\mu^\alpha T_\alpha + i g' \frac{Y}{2} B_\mu + i g_X X Z'_\mu\right)\phi_i \qquad i = 1, 2; \tag{3-14}$$

de manera que para cada campo

$$D_\mu\phi_i = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & g\big(A_\mu^1 - iA_\mu^2\big) \\ g\big(A_\mu^1 + iA_\mu^2\big) & -gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} + ig_X X_i Z'_\mu\right)\begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ \frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{3-15}$$

y teniendo en cuenta la definición de los bosones de gauge $W^\pm$, la derivada covariante aplicada sobre los campos resulta

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_i = \frac{i}{2}&\begin{pmatrix} \partial_\mu\phi_i^+ + \big(gA_\mu^3 + g'B_\mu\big)\phi_i^+ + gW_\mu^+\Big(\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) \\ g\sqrt{2}W_\mu^-\phi_i^+ + \partial_\mu\Big(\frac{h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) + \big(-gA_\mu^3 + g'B_\mu\big)\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} ig_X X_i Z'_\mu\phi_i^+ \\ ig_X X_i Z'_\mu\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3-16}$$

De este modo, dadas las rotaciones de los campos de gauge definidas en la ecuación (2-126) se obtiene

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_i = i&\begin{pmatrix} \partial_\mu\phi_i^+ + gs_W A_\mu\phi_i^+ + \frac{g}{c_W}\big(\frac{1}{2} - s_W^2\big)(c_Z Z_{0\mu} - s_Z Z_{1\mu})\phi_i^+ + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu\Big(\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) \\ \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^\dagger\phi_i^+ + \partial_\mu\Big(\frac{h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) + \frac{g}{2c_W}(-c_Z Z_{0\mu} + s_Z Z_{1\mu})\Big(\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} ig_\chi X_i(s_Z Z_{0\mu} + c_Z Z_{1\mu})\phi_i^+ \\ ig_\chi X_i(s_Z Z_{0\mu} + c_Z Z_{1\mu})\Big(\frac{v_i+h_i+i\eta_i}{\sqrt{2}}\Big) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3-17}$$

por lo que al tomar el hermítico conjugado se obtienen los acoples con los bosones de gauge electrodébiles necesarios para computar las contribuciones a los procesos de decaimiento a 2 cuerpos que violan el sabor de leptón cargado. Por ejemplo, el acople entre el fotón A_μ y los campos escalares cargados $H^\pm$ es

$$(D_\mu\phi_i)^\dagger D^\mu\phi_i \Rightarrow gs_W A_\mu\big[H^+H^-\big](ip_+^\mu - ip_-^\mu). \tag{3-18}$$

El acople $W_\mu^\dagger A^\mu H^-$ es cero por cálculo directo de la energía cinética ($(D_\mu\phi_i)^\dagger D^\mu\phi_i$).

3.3.1. Interacción entre Bosones de Gauge y Leptones

La interacción entre los bosones de gauge neutros y los leptones se obtiene a partir del Lagrangiano cinético

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{lep}} = i\overline{l'_L}\not{D}l'_L + i\overline{l'_R}\not{D}l'_R + i\overline{E'}\not{D}E' \tag{3-19}$$

y considerando los dos primeros términos de este Lagrangiano para la primera familia de leptones, es decir, electrón y neutrino electrónico, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{L,\text{kin}}^{\text{ele}} = &i(\overline{\nu'_{e_L}}, \overline{e'_L})\gamma^\mu\left(\partial_\mu + igA_\mu^\alpha T_\alpha + ig'\frac{Y}{2}B_\mu + ig_X X Z'_\mu\right)\begin{pmatrix}\nu'_L \\ e'_L\end{pmatrix} \\ &+ i\overline{e'_R}\gamma^\mu\left(ig'\frac{Y}{2}B_\mu + ig_X X Z'_\mu\right)e'_R. \end{aligned} \tag{3-20}$$

Teniendo en cuenta los respectivos números cuánticos para cada campo (ver Tabla **2-4**) se obtiene

$$\mathcal{L}^{\text{ele}}_{L,\text{kin}} = -(\overline{\nu'_{e_L}}, \overline{e'_L})\gamma^\mu\left(\frac{g}{2}A^\alpha_\mu\sigma_\alpha - \frac{g'}{2}B_\mu\right)\begin{pmatrix}\nu'_L\\ e'_L\end{pmatrix} - \overline{e'_R}\gamma^\mu(-g'B_\mu + g_X X_e Z'_\mu)e'_R, \tag{3-21}$$

donde $X_e = -4/3$. Entonces, el Lagrangiano (3-20) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{ele}}_{L,\text{kin}} = &-\frac{1}{2}(\overline{\nu'_{e_L}}, \overline{e'_L})\begin{pmatrix} g\not{A}_3 - g'\not{B} & g(\not{A}_1 - i\not{A}_2)\\ g(\not{A}_1 + i\not{A}_2) & -g\not{A}_3 - g'\not{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu'_L\\ e'_L\end{pmatrix}\\ &- \overline{e'_R}\Big(-g'\not{B} + g_X X_e \not{Z}'\Big)e'_R,\end{aligned} \tag{3-22}$$

en donde las transformaciones de los campos están definidas como

$$\begin{aligned}\not{A}_3 &= s_W\not{A} + c_W c_Z\not{Z}_0 - c_W s_Z\not{Z}_1,\\ \not{B} &= c_W\not{A} - s_W c_Z\not{Z}_0 + s_W s_Z\not{Z}_1,\\ \not{Z}' &= s_Z\not{Z}_0 + c_Z\not{Z}_1.\end{aligned} \tag{3-23}$$

Al considerar solamente la matriz de la derivada covariante en la ecuación (3-22) se puede ver que

$$\begin{aligned}\gamma^\mu D'_\mu = &\begin{pmatrix}(gs_W - g'c_W)\not{A} + c_Z(gc_W + g's_W)\not{Z}_0 & g\sqrt{2}\not{W}^+\\ g\sqrt{2}\not{W}^- & (-gs_W - g'c_W)\not{A} + c_Z(-gc_W + g's_W)\not{Z}_0\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}(-gc_W - g's_W)s_Z\not{Z}_1 & 0\\ 0 & (gc_W - g's_W)s_Z\not{Z}_1\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3-24}$$

y dado que $\tan\theta_W = g'/g$ se deducen las relaciones

$$\begin{aligned}gs_W - g'c_W &= g\left(s_W - \frac{c_W s_W}{c_W}\right) = 0,\\ gc_W + g's_W &= g\left(c_W + \frac{g'}{g}s_W\right) = \frac{g}{c_W},\\ -gc_W + g's_W &= -g\left(c_W - \frac{s^2_W}{c_W}\right) = -\frac{2g}{c_W}\left(\frac{1}{2} - s^2_W\right),\end{aligned} \tag{3-25}$$

de manera que la derivada covariante $\not{D}'$ toma la forma

$$\not{D}' = \begin{pmatrix}\frac{g}{c_W}c_Z\not{Z}_0 - \frac{g}{c_W}s_Z\not{Z}_1 & g\sqrt{2}\not{W}^+\\ g\sqrt{2}\not{W}^- & -2gs_W\not{A} - \frac{2g}{c_W}(\frac{1}{2} - s^2_W)(c_Z\not{Z}_0 - s_Z\not{Z}_1)\end{pmatrix}. \tag{3-26}$$

De igual forma, al considerar el segundo término de la ecuación (3-22), se encuentra que

$$\mathcal{L}^{\text{ele}}_{R,\text{kin}} = \overline{e'_R}g'c_W\not{A}e'_R - \overline{e'_R}(g'c_Z s_W + g_X X_e s_Z)\not{Z}_0 e'_R + \overline{e'_R}(g's_W s_Z - g_X X_e c_Z)\not{Z}_1 e'_R \tag{3-27}$$

Por lo tanto, sumando las ecuaciones (3-22) y (3-26) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{ele}}_{\text{kin}} = &-\frac{1}{2}(\overline{\nu'_{e_L}}, \overline{e'_L}) \begin{pmatrix} \frac{g}{c_W} c_Z \not{Z}_0 - \frac{g}{c_W} s_Z \not{Z}_1 & g\sqrt{2}\not{W}^+ \\ g\sqrt{2}\not{W}^- & -2g s_W \not{A} - \frac{2g}{c_W}(\frac{1}{2} - s_W^2)(c_Z \not{Z}_0 - s_Z \not{Z}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_{e_L} \\ e'_L \end{pmatrix} \\ &+ \overline{e'_R} g' c_W \not{A} e'_R - \overline{e'_R}(g' c_Z s_W + g_X X_e s_Z)\not{Z}_0 e'_R + \overline{e'_R}(g' s_W s_Z - g_X X_e c_Z)\not{Z}_1 e'_R \end{aligned} \tag{3-28}$$

Este Lagrangiano se puede separar en dos partes. La primera, contiene la interacción con el bosón de gauge neutro del Modelo Estándar (Z_0), el fotón y el bosón de gauge Z_1; y la segunda, contiene la interacción con el bosón de gauge cargado del Modelo Estándar $W^{\pm}$.

Lagrangiano de Interacción del Bosón W

El Lagrangiano de interacción entre el bosón de gauge cargado $\not{W}^{\pm}$ y la primera familia de leptones se define como

$$\mathcal{L}_C = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{e'_L} \not{W}^- \nu'_{e_L} + h.c., \tag{3-29}$$

y recordando las transformaciones que tienen en cuentan las tres familias, e, μ y τ:

$$\begin{aligned} L'_L &= V_{L_{(SM)}} L_L + \vec{q}_L E_L, \\ \vec{\nu'}_L &= V_\nu \vec{\nu}_L + \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \vec{N}_{1_L} + \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \vec{N}_{2_L}, \end{aligned} \tag{3-30}$$

se encuentra que el Lagrangiano $\mathcal{L}_C$ toma la forma

$$\mathcal{L}_C = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{L_L} V^\dagger_{L_{(SM)}} + \overline{E}_L \vec{q}_L^\dagger \right) \not{W}^- \left(V_\nu \vec{\nu}_L + \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \vec{N}_{1_L} + \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \vec{N}_{2_L} \right) + h.c. \tag{3-31}$$

Adicionalmente, como $U^\dagger_{PMNS} = V_\nu^\dagger V_{L_{(SM)}}$, $\mathcal{L}_C$ queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C = &-\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{L_L} U_{PMNS} \not{W}^- \vec{\nu}_L + \overline{E}_L \vec{q}_L^\dagger \not{W}^- V^\dagger_{L_{(SM)}} V_\nu \vec{\nu}_L \right) \\ &- \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{L_L} \frac{V^\dagger_{L_{(SM)}} m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \not{W}^- \vec{N}_{1_L} + \overline{E}_L \vec{q}_L{}^\dagger_L V^\dagger_{L_{(SM)}} \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \not{W}^- \vec{N}_{1_L} \right) \\ &- \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{L_L} \frac{V^\dagger_{L_{(SM)}} m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \not{W}^- \vec{N}_{2_L} + \overline{E}_L \vec{q}_L{}^\dagger_L V^\dagger_{L_{(SM)}} \frac{m_\nu^T M_D^{-1}}{\sqrt{2}} \not{W}^- \vec{N}_{2_L} \right) + h.c. \end{aligned} \tag{3-32}$$

Finalmente, los términos del Lagrangiano (3-32) que contienen los acoples, que describen los diagramas de Feynman en donde interviene el bosón de gauge cargado del Modelo Estándar $\not{W}$ y que dan cuenta de los acoples que violan el sabor de leptón cargado, por ejemplo,

para el muón, son

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C = &-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{\mu}U_{\mu 1}\not{W}^- P_L\nu_e + \underbrace{\overline{\mu}U_{\mu 1}\not{W}^- P_L\nu_\mu}_{SM} + \overline{\mu}U_{\mu 2}\not{W}^- P_L\nu_\tau + h.c\right)\\ &- \sum_{i=e,\mu}\left(\overline{\mu}\theta_i\not{W}^- P_L N_1^i + \overline{\mu}\theta_i\not{W}^- P_L N_2^i\right) - \sum_{i=e,\mu}\left(\overline{N_1^i}\theta_i^\dagger\not{W}^+ P_L\mu + \overline{N_2^i}\theta_i^\dagger\not{W}^+ P_L\mu\right), ...\end{aligned} \tag{3-33}$$

Lagrangiano de Corriente Neutra

La parte neutra del Lagrangiano (3-28), es decir, la interacción con el fotón A, el Z_0 y Z_1 puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N = &\, g s_W \overline{e'}\not{A}e' - \frac{g}{2c_W}\left[-\left(1-2s_W^2\right)c_Z\overline{e'_L}\not{Z}_0 e'_L + 2s_W^2 c_Z\overline{e'_R}\not{Z}_0 e'_R\right] - g_X X_e s_Z\overline{e'_R}\not{Z}_0 e'_R\\ &- \frac{g}{2c_W}\left[\left(1-s_W^2\right)s_Z\overline{e'_L}\not{Z}_1 e'_L - 2s_W^2 s_Z\overline{e'_R}\not{Z}_1 e'_R\right] - g_X X_e c_Z\overline{e'_R}\not{Z}_1 e'_R.\end{aligned} \tag{3-34}$$

Con las respectivas transformaciones aplicadas ahora sobre las tres familias de leptones se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N = &\, g s_W\left[\overline{L}\not{A}L + \overline{L_L}\not{A}\vec{q}_L E_L + \overline{E_L}\vec{q}_L^\dagger\not{A}L_L\right]\\ &- \frac{g}{2c_W}\left[-\left(1-2s_W^2\right)c_Z\left(\overline{L_L}\not{Z}_0 L_L + \overline{L_L}\not{Z}_0\vec{q}_L E_L + \overline{E_L}\vec{q}_L^\dagger\not{Z}_0 L_L\right) + 2s_W^2 c_Z\overline{L_R}\not{Z}_0 L_R\right]\\ &- \frac{g}{2c_W}\left[\left(1-s_W^2\right)s_Z\left(\overline{L_L}\not{Z}_1 L_L + \overline{L_L}\not{Z}_1\vec{q}_L E_L + \overline{E_L}\vec{q}_L^\dagger\not{Z}_1 L_L\right) - 2s_W^2 s_Z\overline{L_R}\not{Z}_1 L_R\right]\\ &+ g_X c_Z\overline{L_R}X\not{Z}_1 L_R - g_X s_Z\overline{L_R}X\not{Z}_0 L_R,\end{aligned} \tag{3-35}$$

donde se ha omitido el término neutrino-neutrino y los factores de $(\vec{q}_L)^2$; y adicionalmente se ha definido la matriz X que contiene los números cuánticos X_i (ver Tabla **2-4**), es decir,

$$X = \begin{pmatrix} X_e & 0 & 0\\ 0 & X_\mu & 0\\ 0 & 0 & X_\tau\end{pmatrix}. \tag{3-36}$$

Teniendo en cuenta la aproximación $\theta_Z \to 0$, se puede considerar que los términos que están multiplicados por s_Z son mucho menores que uno y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N = &\, g s_W\left[\overline{L}\not{A}L + \overline{L_L}\not{A}\vec{q}_L E_L + \overline{E_L}\vec{q}_L^\dagger\not{A}L_L\right]\\ &- \frac{g}{2c_W}\left[-\left(1-2s_W^2\right)c_Z\left(\overline{L_L}\not{Z}_0 L_L + \overline{L_L}\not{Z}_0\vec{q}_L E_L + \overline{E_L}\vec{q}_L^\dagger\not{Z}_0 L_L\right) + 2s_W^2 c_Z\overline{L_R}\not{Z}_0 L_R\right]\\ &+ g_X c_Z\overline{L_R}X\not{Z}_1 L_R.\end{aligned} \tag{3-37}$$

Lagrangiano Cinético del Leptón Exótico E

El Lagrangiano cinético para el nuevo leptón cargado E, de donde se deducen las interacciones con los bosones de gauge W, Z_0 y Z_1 (segunda parte de la ecuación (3-19)) es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{\text{kin}} &= i\overline{E'}\not{D}E' = i\overline{E'_R}\not{D}E'_R + i\overline{E'_L}\not{D}E'_L \\ &\Rightarrow -\overline{E'_R}\gamma^\mu\left(gW^\alpha_\mu T_\alpha + g'\frac{Y}{2}B_\mu + g_X X Z'_\mu\right)E'_R \\ &- \overline{E'_L}\gamma^\mu\left(gW^\alpha_\mu T_\alpha + g'\frac{Y}{2}B_\mu + g_X X Z'_\mu\right)E'_L.\end{aligned} \tag{3-38}$$

Adicionalmente, de acuerdo con los valores de la carga e hipercarga del campo E se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{\text{kin}} &= -\overline{E'_R}\left(-g'(c_W\not{A} - s_W c_Z\not{Z}_0 + s_W s_Z\not{Z}_1) - g_X\frac{2}{3}(s_Z\not{Z}_0 + c_Z\not{Z}_1)\right)E'_R \\ &- \overline{E'_L}\left(-g'(c_W\not{A} - s_W c_Z\not{Z}_0 + s_W s_Z\not{Z}_1) - g_X\frac{2}{3}(s_Z\not{Z}_0 + c_Z\not{Z}_1)\right)E'_L,\end{aligned} \tag{3-39}$$

y debido a la aproximación $\theta_Z \to 0$, no se consideran los términos con s_Z, es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{\text{kin}} &= -\overline{E'_R}\left[-g'(c_W\not{A} - s_W c_Z\not{Z}_0) - g_X\frac{2}{3}c_Z\not{Z}_1\right]E'_R \\ &- \overline{E'_L}\left[-g'(c_W\not{A} - s_W c_Z\not{Z}_0) - g_X\frac{2}{3}c_Z\not{Z}_1\right]E'_L.\end{aligned} \tag{3-40}$$

Por lo cual, el Lagrangiano cinético en la base de masa se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{\text{kin}} &\to g'c_W\overline{E_R}\not{A}E_R - g's_W c_Z\overline{E_R}\not{Z}_0E_R + g_X\frac{2}{3}c_Z\overline{E_R}\not{Z}_1E_R \\ &+ g'c_W\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L + \overline{E_L}\right)\not{A}\left(-\vec{q}^\dagger_L L_L + E_L\right) - g's_W c_Z\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L + \overline{E_L}\right)\not{Z}_0\left(-\vec{q}^\dagger_L L_L + E_L\right) \\ &+ g_X\frac{2}{3}c_Z\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L + \overline{E_L}\right)\not{Z}_1\left(-\vec{q}^\dagger_L L_L + E_L\right) \\ &= g'c_W\overline{E_R}\not{A}E_R - g's_W c_Z\overline{E_R}\not{Z}_0E_R + g_X\frac{2}{3}c_Z\overline{E_R}\not{Z}_1E_R \\ &+ g'c_W\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L\not{A}E_L - \overline{E_L}\not{A}\vec{q}^\dagger_L L_L + \overline{E_L}\not{A}E_L\right) \\ &- g'c_Z s_W\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L\not{Z}_0E_L - \overline{E_L}\not{Z}_0\vec{q}^\dagger_L L_L + \overline{E_L}\not{Z}_0E_L\right) \\ &+ g_X\frac{2}{3}c_Z\left(-\overline{L_L}\vec{q}_L\not{Z}_1E_L - \overline{E_L}\not{Z}_1\vec{q}^\dagger_L L_L + \overline{E_L}\not{Z}_1E_L\right) \\ &= g'c_W\overline{E}\not{A}E - g's_W c_Z\overline{E}\not{Z}_0E + g_X\frac{2}{3}c_Z\overline{E}\not{Z}_1E + g'c_W\left(-\overline{L_L}\vec{q}^E_L\not{A}E_L - \overline{E_L}\not{A}\vec{q}^\dagger_L L_L\right) \\ &- g'c_Z s_W\left(-\overline{L_L}F^E_L\not{Z}_0E_L - \overline{E_L}\not{Z}_0F^{E^\dagger}_L L_L\right) + g_X\frac{2}{3}c_Z\left(-\overline{L_L}F^E_L\not{Z}_1E_L - \overline{E_L}\not{Z}_1F^{E^\dagger}_L L_L\right).\end{aligned}$$

(3-41)

Sumando las ecuaciones (3-37) y (3-41) se obtiene el Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N = {} & g s_W \left(\overline{L}\not{A} L + \overline{E}\not{A} E\right) - \frac{g c_Z}{2 c_W}\left[-(1-2s_W^2)\overline{L_L}\not{Z}_0 L_L + 2 s_W^2 \overline{L_R}\not{Z}_0 L_R\right] \\ & - \frac{g c_Z s_W^2}{c_W}\overline{E}\not{Z}_0 E + \frac{g c_Z}{2 c_W}\left[\overline{E_L}\vec{q}_L^{\,\dagger}\not{Z}_0 L_L + h.c.\right] \\ & + \frac{2 g_X}{3} c_Z \left[\overline{E}\not{Z}_1 E + \frac{3}{2}\overline{L_R} X \not{Z}_1 L_R - (\overline{L_L}\vec{q}_L \not{Z}_1 E_L + h.c.)\right].\end{aligned} \tag{3-42}$$

De esta manera se reproduce el Lagrangiano del Modelo Estándar para las corrientes neutras, además de obtener el acople de los bosones de gauge neutros ($\not{A}$, $\not{Z}_0$ y $\not{Z}_1$) con el leptón exótico E.

4. Procesos de Decaimiento a 2 y 3 Cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado

Una de las aristas de la Violación de Sabor de Leptón Cargado, esta relacionada con los decaimientos de Tauones y Muones a dos y tres partículas[29], en donde los leptones de los estados finales tienen un sabor de leptón cargado diferente al leptón Tau o Muón, según el proceso de decaimiento. Por lo cual, los observables físicos relacionados con los procesos de decaimiento, tales como las fracciones de decaimiento, o *Branching Ratios* (*Br.*), permiten estudiar y caracterizar la fenomenología de la Violación de Sabor de Leptón Cargado. El presente capítulo consigna las diferentes expresiones analíticas, obtenidas a partir del modelo extendido No-Universal $U(1)_X$, con las cuales es posible calcular las fracciones de decaimiento (*Branching Ratio*) de los diferentes procesos listados en la Tabla **2-1** del capítulo 2, es decir,

Fracción de Decaimiento (*Branching Ratio*)	
Proceso	Cota Experimental
$\mathcal{B}(\tau \longrightarrow \mu\gamma)$	4.2×10^{-8}[36, 37]
$\mathcal{B}(\tau \longrightarrow e\gamma)$	3.3×10^{-8}[36, 38]
$\mathcal{B}(\mu \longrightarrow e\gamma)$	4.2×10^{-13}[36, 39]
$\mathcal{B}(\mu^- \longrightarrow e^-e^+e^-)$	1.0×10^{-12}[36, 40]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-)$	2.1×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-e^+e^-)$	2.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-)$	2.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-e^+e^-)$	1.8×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow \mu^-e^+\mu^-)$	1.7×10^{-8}[36, 41]
$\mathcal{B}(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-)$	1.5×10^{-8}[36, 41]

Tabla 4-1.: Límites superiores experimentales para las fracciones de decaimiento de procesos a dos y tres cuerpos de leptones cargados con cambios de sabor

En el anexo B se presentan las reglas de Feynman de los vértices que contribuyen a los loops radiativos a estudiar, los cuales introducen la nueva física al considerar que dentro del loop corren los neutrinos de Majorana $N_{1,2}^{e,\mu}$, el leptón exótico E, entre otros campos. De igual forma, en este anexo se consideran las reglas con cambio de sabor generados por un bosón escalar cargado ($H^{\pm}$) y neutro (h_{SM}, H, H_{χ}, A_0).

4.1. Procesos de Decaimiento a Dos Cuerpos

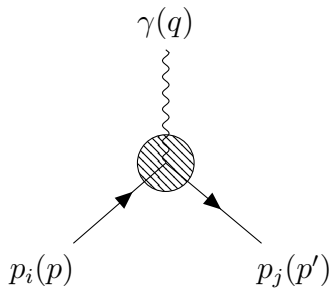


Figura 4-1.: Representación diagramática más general para el proceso de transición de un leptón $l_i(p)$ a un leptón $l_j(p')$, al emitir se un fotón $\gamma(q)$ en el proceso

Teniendo en cuenta que en el modelo extendido $U(1)_X$ no existe acople alguno entre dos leptones cargados de diferente sabor y el fotón, es necesario abordar los tres decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\gamma$, $\tau \longrightarrow e\gamma$ y $\mu \longrightarrow e\gamma$ a través de procesos radiativos. La Figura **4-1** ilustra el diagrama más general con el que se representa el proceso de conversión de un leptón l_i a un leptón l_j emitiendo un fotón en el proceso, lo cual corresponde a un proceso en donde el sabor de leptón cargado no se conserva, es decir, se viola. Este proceso de conversión más general se estudia a través de lo que se conoce como la corrección al vértice [7, 12], en donde las diferentes contribuciones a esta corrección provienen de procesos de diferente orden o de varios *loops*. Ahora bien, la forma general de este vértice fotón-leptón ($A\bar{f}_j f_i$) con violación de sabor puede ser escrita como[12, 88]:

$$V_{l_i l_j \gamma} = \left[\gamma^{\mu}\left(F_{V_L}^{ij}P_L + F_{V_R}^{ij}P_R\right) + \left(F_{S_L}^{ij}P_L + F_{S_R}^{ij}P_R\right)q^{\mu} + \left(F_{T_L}^{ij}i\sigma^{\mu\nu}P_L + F_{T_R}^{ij}i\sigma^{\mu\nu}P_R\right)q_{\nu}\right]\cdot\epsilon_{\mu}(q) \tag{4-1}$$

donde $q_{\nu} = (p_i - p_j)_{\nu}$, es decir, la sustracción entre los $4-momenta$ del leptón l_i y el leptón l_j, que es igual al $4-momentum$ del fotón emitido. Los seis términos $F_{V_L}^{ij}$, $F_{V_R}^{ij}$, $F_{S_L}^{ij}$, $F_{S_R}^{ij}$, $F_{T_L}^{ij}$ y $F_{T_R}^{ij}$ se conocen como factores de forma[7, 12, 88].

Para un fotón real se tiene que $\epsilon_{\mu}(q)\cdot q^{\mu} = 0$ y los factores de forma F_{S_L} y F_{S_R} no contribuyen a los decaimientos radiativos. Por conservación de la corriente se cumple que $V_{l_i l_j \gamma}^{\mu} q_{\mu} = 0$,

lo cual implica que los factores $\gamma^\mu \left(F_{V_L} P_L + F_{V_R} P_R\right)$ tampoco contribuyen. Por tanto, los factores de forma que contribuyen a los decaimientos radiativos son:

$$\begin{aligned} V^\mu_{l_i l_j \gamma} &= \left[\left(F^{ij}_{T_L} i\sigma^{\mu\nu} P_L + F^{ij}_{T_R} i\sigma^{\mu\nu} P_R\right)(p_i - p_j)_\nu\right] \\ &= \left[F^{ij}_{T_L} i\sigma^{\mu\nu} P_L q_\nu + F^{ij}_{T_R} i\sigma^{\mu\nu} P_R q_\nu\right] \\ &= i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \left[F_2{}^{ij}_L m_j P_L + F_2{}^{ij}_R m_i P_R\right] \end{aligned} \tag{4-2}$$

donde se ha definido $F^{ij}_{T_R} = F_2{}^{ij}_R m_i$ y $F^{ij}_{T_L} = F_2{}^{ij}_L m_j$[89]. Si se considera la masa del leptón l_j mucho menor que la masa del leptón l_i, la expresión del vértice $V^\mu_{l_i l_j \gamma}$ se simplifica a

$$V^\mu_{l_i l_j \gamma} \approx i\sigma^{\mu\nu} k_\nu F_2{}^{ij}_R m_i P_R. \tag{4-3}$$

Esto implica que solo es necesario computar las contribuciones, que corrigen el vértice, proporcionales a $i\sigma^{\mu\nu} k_\nu m_i P_R$. Como un primer acercamiento al estudio de los procesos de decaimiento entre l_i y l_j, con emisión de un fotón, en el presente documento de tesis se abordarán únicamente los diferentes procesos radiativos a primer orden en teoría de perturbaciones o a un bucle (*one loop*) que dan cuenta de los decaimientos radiativos $l_i \longrightarrow l_j \gamma$.
Con base en todo lo anteriormente mencionado, la fracción de decaimiento (*Branching Ratio*) se expresa únicamente en términos de los factores de forma $F_2{}^{ij}_L$ y $F_2{}^{ij}_R$, es decir,

$$\begin{aligned} Br\left(l_i \longrightarrow l_j \gamma\right) &= \frac{m^3_{l_i}}{16\pi^2 \Gamma_{l_i}} \left(\left|F_2{}^{ij}_R\right|^2 m^2_{l_i} + \left|F_2{}^{ij}_L\right|^2 m^2_{l_j}\right) \\ &\approx \frac{m^5_{l_i}}{16\pi^2 \Gamma_{l_i}} \left(\left|F_2{}^{ij}_R\right|^2\right) \end{aligned} \tag{4-4}$$

Por lo anterior, y teniendo en cuenta los acoples entre bosones y leptones que violan el sabor de leptón cargado listados en el capitulo 3, es posible identificar, y por tanto, considerar las siguientes contribuciones radiativas a los procesos de decaimiento $l_i \longrightarrow l_j \gamma$.

4.1.1. Contribución Debida a $W^\pm - W^\mp - N^{e,\mu}_{1,2}$

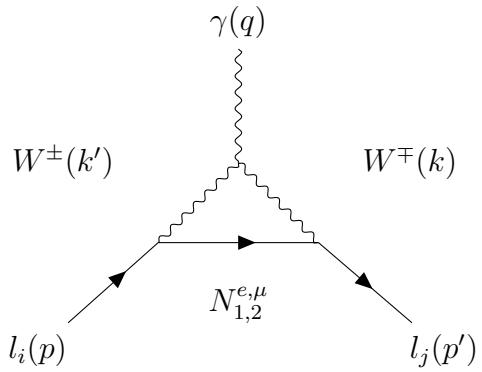


Figura 4-2.: Diagrama - contribución mediada por el bosón de gauge $W^\pm$ y los neutrinos de Majorana $N_{1,2}$

Definiendo $b = \frac{m_N^2}{m_W^2}$, el factor de forma proveniente de la Figura **4-2** puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
2F_{2,W}^{R}{}^{ji} m_i &= 2\frac{ig^2}{32\pi^2} e \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \left(\frac{v_2}{h_\chi v_\chi}\right)^2 R_{Wl}{}^{jk} R_{Wl}{}^{ki} \\
&\qquad \times \frac{-4\alpha_p(1-\alpha_p) + 4(\alpha_p\alpha_k - (1-\alpha_p)) + 8(1-\alpha_p)}{m_W^2(1-(1-b)\alpha_p)} m_i \\
&= 2\frac{ig^2}{32\pi^2} e \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \left(\frac{v_2}{h_\chi v_\chi}\right)^2 \left(R_{Wl} \cdot R_{Wl}^T\right)^{ji} \\
&\qquad \times \frac{-4\alpha_p(1-\alpha_p) + 4(\alpha_p\alpha_k - (1-\alpha_p)) + 8(1-\alpha_p)}{m_W^2(1-(1-b)\alpha_p)} m_i \\
&= \frac{2ieG_F}{4\sqrt{2}\pi^2}\left(\frac{v_2}{h_\chi v_\chi}\right)^2 \left(\tilde{m}_D\, U_{PMNS}^\dagger \cdot U_{PMNS}\, \tilde{m}_D^T\right)^{ji} \\
&\qquad \times \frac{5 - 24b + 39b^2 - 20b^3 + (-6b^2 + 12b^3)\ln b}{3(1-b)^4}
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_D \tilde{m}_D^T &= \frac{h_\chi^2 v_\chi^2}{\mu_N v_2^2} m_{light} \\
\mu_N \left(\frac{v_2}{h_\chi v_\chi}\right)^2 V_\nu^T \tilde{m}_D \tilde{m}_D^T V_\nu &= V_\nu^T m_{light} V_\nu \\
&= (m_{light})^{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\nu_3} \end{pmatrix} \\
\left(\frac{v_2}{h_\chi v_\chi}\right)^2 \tilde{m}_D \tilde{m}_D^T &= V_\nu \frac{(m_{light})^{diag}}{\mu_N} V_\nu^T .
\end{aligned} \tag{4-6}$$

Por lo cual,

$$2F_2^{R}{}_W^{ji} m_i = i\frac{eG_F}{2\sqrt{2}\pi^2}\left(V_\nu \frac{(m_{light})^{diag}}{\mu_N} V_\nu^T\right)^{ji} \frac{5 - 24b + 39b^2 - 20b^3 + (-6b^2 + 12b^3)\ln b}{3(1-b)^4} \tag{4-7}$$

Ahora bien, en tanto que

$$\begin{aligned}
\left[\left(m_{light}{}^{diag}\right)^2\right]^{1/2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{m_{\nu_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_{\nu_2}^3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta m_{21}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\Delta m_{31}^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4-8}$$

y con las consideraciones $\sqrt{\Delta m_{21}} = \sqrt{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2} = \sqrt{m_{\nu_2}^2} = m_{\nu_2} = \sqrt{(m_{light}{}^{diag})^2}$, $\Delta m_{21}^2 = 7.5 \times 10^{-5}\, eV^2$, $\Delta m_{31}^2 = 2.5 \times 10^{-3}\, eV^2$, $\mu_N = 1\, keV$, $h_\chi = 0.02$, $v_2 = 7\, GeV$, $v_\chi = 7\, TeV$ y $V_\nu \approx \begin{pmatrix} -0.87 & 0.31 & 0.39 \\ 0 & -0.78 & 0.63 \\ 0.5 & 0.54 & 0.65 \end{pmatrix}$ la matriz $V_\nu \frac{(m_{light})^{diag}}{\mu_N} V_\nu^T$ puede ser escrita ahora como:

$$
\begin{aligned}
V_\nu \frac{(m_{light})^{diag}}{\mu_N} V_\nu^T &= V_\nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.7 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-5} \end{bmatrix} V_\nu^T \\
&= \begin{bmatrix} 8.4 \times 10^{-6} & 1.0 \times 10^{-5} & 1.4 \times 10^{-5} \\ 1 \times 10^{-5} & 2.5 \times 10^{-5} & 1.6 \times 10^{-5} \\ 1.4 \times 10^{-5} & 1.6 \times 10^{-5} & 2.3 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 0.84 & 1.0 & 1.4 \\ 1 & 2.5 & 1.6 \\ 1.4 & 1.6 & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \\
&\approx (R_W)^{ji} \times 10^{-5} \approx (R_W)^{ij} \times 10^{-5}
\end{aligned}
\tag{4-9}
$$

donde la matriz R_W es simétrica. Las entradas de la matriz U_{PMNS} vienen dadas por[90]

$$
U_{PMNS} = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.54 & 0.05 \\ 0.38 & 0.60 & 0.70 \\ 0.38 & 0.60 & 0.70 \end{bmatrix}. \tag{4-10}
$$

Finalmente, el factor de forma F_{2W}^R viene dado por

$$
2F_{2W}^{R\,ij} m_i = i \frac{eG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \times 10^{-5} (R_W)^{ij} \, \frac{5 - 24b + 39b^2 - 20b^3 + (-6b^2 + 12b^3) \ln b}{3\,(1-b)^4} \tag{4-11}
$$

donde $b = \frac{m_N^2}{m_W^2}$.

4.1.2. Contribución debida a $E - E - Z_0$

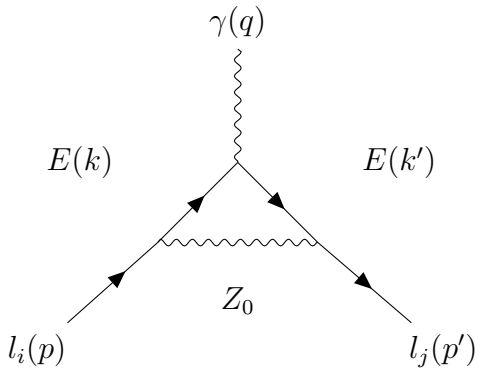


Figura 4-3.: Diagrama de la contribución mediada por el leptón exótico E del modelo No-Universal $U(1)_X$ y el bosón neutro Z_0 del Modelo Estándar

Definiendo $a = \frac{m_E^2}{m_Z^2}$ y $x = \sin^2\theta_W = 1 - \frac{m_W}{m_Z}$, el factor de forma que proviene de la Figura **4-3** puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} 2F_{2_Z}^{Rji} m_i &= \frac{ig^2}{32\pi^2} e \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{2}{C_W^2} \left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 \left(R_{eE_Z}^{\ j} \otimes R_{eE_Z}^{\ i\ T}\right) \\ &\qquad \times \frac{\left(4\alpha_p^2 + 4\alpha_p\left(\alpha_k - 1\right) + 4\alpha_p\right) m_i}{m_Z^2 \left(\alpha_p + \frac{m_E^2}{m_Z^2}\left(1 - \alpha_p\right)\right)} \\ &= \frac{ig^2}{32\pi^2} e \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{2}{C_W^2} \left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 \left(R_{eE_Z}^{\ j} \otimes R_{eE_Z}^{\ i\ T}\right) \times \frac{\left(4\alpha_p^2 + 4\alpha_p\alpha_k\right) m_i}{m_Z^2 \left(a + \alpha_p\left(1 - a\right)\right)} \end{aligned} \tag{4-12}$$

$$2F_{2_Z}^{Rji} m_i = \frac{ieg^2}{32\pi^2 m_W^2} \left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 \left(R_{eE_Z}^{\ j} \otimes R_{eE_Z}^{\ i\ T}\right) \times \frac{4 - 9a + 5a^3 + \left(6a - 12a^2\right)\ln a}{3\left(1 - a\right)^3} m_i \tag{4-13}$$

Recordando que $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$, $e^2 = 4\pi\alpha$ y

$$\left(R_{eE_Z}^{\ j} \otimes R_{eE_Z}^{\ i\ T}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2s_{e\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2s_{e\mu} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2s_{e\mu} & 0 \\ 2s_{e\mu} & 4s_{e\mu}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{ji} \equiv \mathcal{R}^{ij} \tag{4-14}$$

en donde se ha podido identificar la forma simétrica de la matriz $\mathcal{R}$.
Finalmente, el factor de forma $F_{2_W}^R$ puede ser escrito como:

$$2F_{2_Z}^{Rij} m_i = i\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 \mathcal{R}^{ij} \frac{4 - 9a + 5a^3 + \left(6a - 12a^2\right)\ln a}{3\left(1 - a\right)^3} \tag{4-15}$$

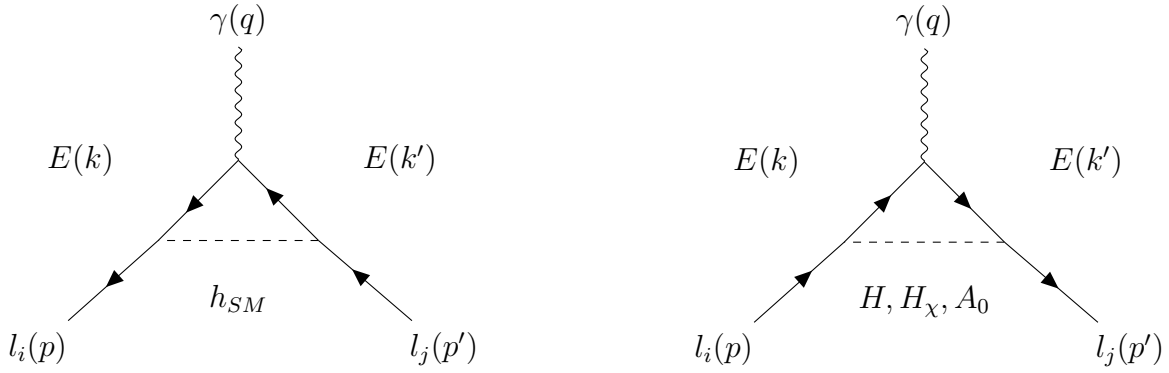
donde $a = \frac{m_E^2}{m_Z^2}$. A partir de las entradas no-nulas de la matriz $\mathcal{R}$, es posible identificar los posibles procesos físicos que pueden tener lugar:

$$Si = \tau \;\; y \;\; j = \mu, e \quad \Longrightarrow \quad 2F_{2Z}^{R^{ij}} = 0 \tag{4-16}$$

Por lo tanto, no hay contribuciones provenientes del modelo $U(1)_X$ a los procesos de decaimiento del leptón Tau con cambio de sabor de leptón cargado $\tau \longrightarrow e\gamma$ y $\tau \longrightarrow \mu\gamma$. Este hecho implica que solo haya un proceso con cambio de sabor de leptón cargado para estudio, es decir, $\mu \longrightarrow e\gamma$. Es así que la contribución al proceso de decaimiento $\mu \longrightarrow e\gamma$ viene dado por:

$$\begin{aligned} 2F_{2Z}^{R^{\mu e}} m_\mu &= i\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2}\left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2\left(-\frac{1}{2}+x\right)^2 \mathcal{R}^{\mu e}\frac{4-9a+5a^3+(6a-12a^2)\ln a}{3\,(1-a)^3} \\ &= i\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2}\left(\frac{m_t}{m_E}\right)^2\left(-\frac{1}{2}+x\right)^2 2s_{e\mu}\frac{4-9a+5a^3+6a\,(1-2a)\ln a}{3\,(1-a)^3}. \end{aligned} \tag{4-17}$$

4.1.3. Contribución debida a $E^- - E^- - h_{SM}$



(a) Contribución mediada por el boson de Higgs $h_{SM} = h$

(b) Contribución mediada por escalares neutros pesado ($\mathrm{m}_H, m_{H_\chi}, m_{A_0} > m_h$)

Figura 4-4.: Contribuciones asociadas con escalares neutros del modelo No-Universal $U(1)_X$

En primer lugar, en la medida en que los cálculos considerados,

$$
\begin{aligned}
R^{\mu}_{h_{SM}} &= \frac{ie}{16\pi^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\left(\alpha_p \not{p} - (1-\alpha_k)\not{k}\right)\gamma^{\mu}\left(\alpha_p \not{p} + \alpha_k \not{k}\right)\left(a^i a^j P_L + b^i b^j P_R\right)}{m_h^2 \alpha_p + m_E^2 (1-\alpha_p)} \\
&- \frac{ie}{16\pi^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{m_E\left(\gamma^{\mu}\left(\alpha_k \not{k} + \alpha_p \not{p}\right) + \left(\alpha_p \not{p} + (\alpha_k - 1)\not{k}\right)\gamma^{\mu}\right)\left(a^i b^j P_L + a^j b^i P_R\right)}{m_h^2 \alpha_p + m_E^2 (1-\alpha_p)} \\
R^{\mu}_h \Rightarrow & \frac{ie}{16\pi^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\left(2\alpha_p^2 \not{p} p^{\mu} - (1-\alpha_k)\alpha_p 2\not{p} p^{\mu}\right)\left(a^i a^j P_L + b^i b^j P_R\right)}{m_h^2\left(\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)\right)} \\
&- \frac{ie}{16\pi^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{m_E\left(\alpha_k \gamma^{\mu}\not{k} + 2\alpha_p p^{\mu} + (1-\alpha_k)\gamma^{\mu}\not{k}\right)\left(a^i b^j P_L + a^j b^i P_R\right)}{m_h^2\left(\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)\right)}
\end{aligned}
\tag{4-18}
$$

Si los términos del siguiente factor de forma son identificados a partir de la ecuación anterior,

$$
\left(A_1 \not{p} p^{\mu} + A_3 \not{k} p^{\mu} + A_5 \not{k}\gamma^{\mu}\not{p}\right) P_L + \left(B_3 \not{k} m_j p^{\mu} + B_{12} p^{\mu} + B_{11}\gamma^{\mu}\not{k}\right) P_R \tag{4-19}
$$

los factores de forma que provienen de la Figura **4-4**a pueden ser escritos como:

$$
\begin{aligned}
2F_{2_{h_{SM}}}^{R\ \ ji} m_i &= (A_1 + A_3 + 2A_5) m_i - B_3 m_j + B_{12} - 2B_{11} \\
&\approx (A_1 + A_3 + 2A_5) m_i + B_{12} - 2B_{11} \\
&\approx \frac{ie}{16\pi^2 m_h^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\left\{\left(2\alpha_p - 2(1-\alpha_k)\right) a^i a^j m_i - m_E\left(\alpha_k + 2\alpha_p + (1-\alpha_k)\right) a^j b^i\right\}}{\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)} \\
&\approx \frac{ie}{16\pi^2 m_h^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\left\{2(\alpha_p + \alpha_k - 1) a^i a^j m_i - m_E (2\alpha_p + 1) a^j b^i\right\}}{\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)} \\
&\approx \frac{i2e}{16\pi^2 m_h^2} I_1^{h_{SM}} a^i a^j m_i - \frac{ie}{16\pi^2 m_h^2} I_2^{h_{SM}} a^j b^i m_E
\end{aligned}
\tag{4-20}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
I_1^{h_{SM}} &= \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{(\alpha_p + \alpha_k - 1)}{\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)} = \frac{3 - 4\tilde{a} + \tilde{a}^2 + 2\ln\tilde{a}}{4(1-\tilde{a})^3} \\
I_2^{h_{SM}} &= \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{(2\alpha_p + 1)}{\alpha_p + \tilde{a}(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{2(-1+\tilde{a})\tilde{a} + (1-3\tilde{a})\ln -\tilde{a}}{(-1+\tilde{a})^3} \\
&= \frac{2(1-\tilde{a})\tilde{a} + (3\tilde{a}-1)\ln(-\tilde{a})}{(1-\tilde{a})^3}
\end{aligned}
\tag{4-21}
$$

de manera que

$$
2F_{2_h}^{R\,ji} m_i \approx \frac{ie}{16\pi^2 m_h^2}\left[\frac{3 - 4\tilde{a} + \tilde{a}^2 + 2\ln\tilde{a}}{4(1-\tilde{a})^3} a^i a^j m_i - \frac{2(1-\tilde{a})\tilde{a} + (3\tilde{a}-1)\ln(-\tilde{a})}{(1-\tilde{a})^3} a^j b^i m_E\right]
$$

(4-22)

donde se ha teniendo en cuenta que $\tilde{a} = \frac{m_E^2}{m_h^2}$.

4.1.4. Contribución debida a $H^{\pm} - N_{1,2}^{e,\mu} - H^{\pm}$

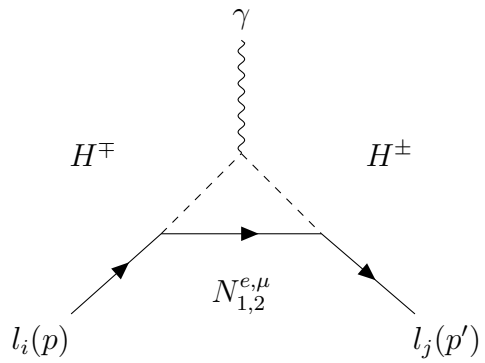


Figura 4-5.: Diagrama - contribución mediada por el bosón escalar cargado pesado $H^{\pm}$ y los neutrinos de Majorana $N_{1,2}$

En este caso,

$$R_H^{\mu} = -\frac{ie}{16\pi^2}\int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{-\{\left(\left((1-\alpha_p)\not{p} - \alpha_k \not{k}\right) 2\alpha_p p^{\mu}\right)\left(a^j a^i P_L + b^j b^i P_R\right) + m_N 2\left(a^i b^j P_L + a^j b^i P_R\right)\alpha_p p^{\mu}\}}{m_H^2\left(1-\alpha_p\right) + m_N^2 \alpha_p} \tag{4-23}$$

$$\left(A_1 \not{p} p^{\mu} + A_3 \not{k} p^{\mu} + A_5 \not{k}\gamma^{\mu}\not{p}\right) P_L + \left(B_3 \not{k} m_j p^{\mu} + B_{12} p^{\mu} + B_{11}\gamma^{\mu}\not{k}\right) P_R \tag{4-24}$$

$$
\begin{aligned}
2F_{2}{}^{R}_{H^{\pm}}{}^{ji} m_i &= \left(A_1 + A_3 + 2A_5\right) m_i - B_3 m_j + B_{12} - 2B_{11} \\
&\approx \left(A_1 + A_3 + 2A_5\right) m_i + B_{12} - 2B_{11} \\
&\approx -\frac{ie}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\left(-2\alpha_p(1-\alpha_p) a^j a^i + 2\alpha_p \alpha_k a^j a^i\right) m_i - m_N 2\alpha_p a^j b^i}{m_H^2 \left(1-\alpha_p\right) + m_N^2 \alpha_p} \\
&\approx -\frac{ie}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{2\alpha_p \left(\alpha_k - 1 + \alpha_p\right) a^j a^i m_i - m_N a^j b^i 2\alpha_p}{m_H^2 \left(1 - \alpha_p + \alpha_p \tilde{b}\right)} \\
&\approx -\frac{ie}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{-2\alpha_p \left(1 - \alpha_p - \alpha_k\right) a^j a^i m_i - 2\alpha_p m_N a^j b^i}{m_H^2 \left(1 - \left(1 - \tilde{b}\right) \alpha_p\right)} \\
&\approx -\frac{ie(-2)}{16\pi^2 m_H^2} I_1^{H^{\pm}} a^j a^i m_i - \frac{ie(-2)}{16\pi^2 m_H^2} I_2^{H^{\pm}} a^j b^i m_N
\end{aligned}
\tag{4-25}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1^{H^{\pm}} &= \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\alpha_p \left(1 - \alpha_p - \alpha_k\right)}{\left(1 - \left(1 - \tilde{b}\right) \alpha_p\right)} = \frac{1 - 6\tilde{b} + 3\tilde{b}^2 + 2\tilde{b}^3 - 6\tilde{b}^2 \ln \tilde{b}}{12 \left(1 - \tilde{b}\right)^4} \\
I_2^{H^{\pm}} &= \int_0^1 d\alpha_p \int_0^{1-\alpha_p} d\alpha_k \frac{\alpha_p}{\left(1 - \left(1 - \tilde{b}\right) \alpha_p\right)} = \frac{1 - \tilde{b}^2 + 2\tilde{b} \ln \tilde{b}}{2 \left(1 - \tilde{b}\right)^3}
\end{aligned}
\tag{4-26}
$$

$$
2F_{2}{}^{R}_{H^{\pm}}{}^{ji} m_i \approx \frac{ie}{16\pi^2 m_H^2} \left[\frac{1 - 6\tilde{b} + 3\tilde{b}^2 + 2\tilde{b}^3 - 6\tilde{b}^2 \ln \tilde{b}}{6 \left(1 - \tilde{b}\right)^4} a^j a^i m_i + \frac{1 - \tilde{b}^2 + 2\tilde{b} \ln \tilde{b}}{\left(1 - \tilde{b}\right)^3} a^j b^i m_N \right]
\tag{4-27}
$$

Es menester mencionar que todos los anteriores desarrollos han sido trabajados en el marco de un gauge no-lineal, adicionalmente $A^{\mu} W_{\mu}^{+} G_{W^-} = 0$. Esta es la razón por la cual no se considera en el presente estudio las contribuciones

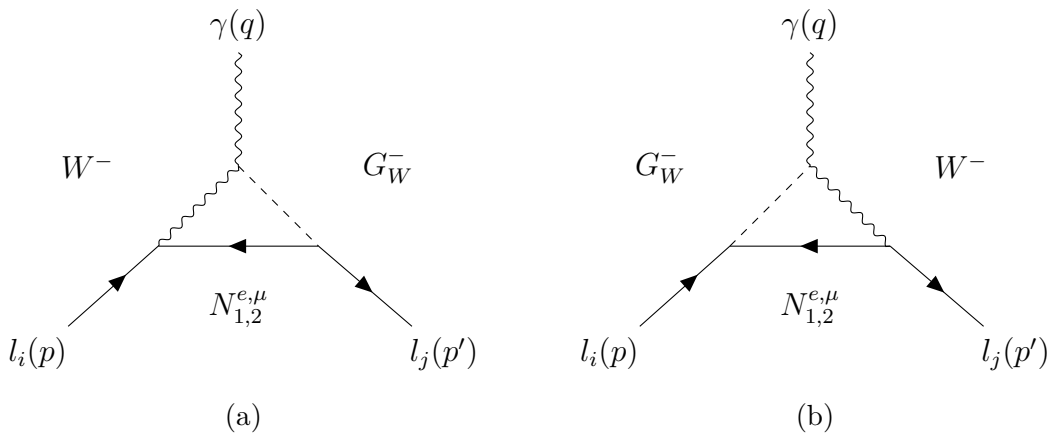


Figura 4-6.: Diagramas de interacción entre el leptón E y (a) bosón de gauge W^- y bosón de Goldstone G_W^- (b) bosón de Goldstone G_W^- y bosón de gauge W^-.

El alcance de lo anteriormente mencionado, conlleva a que las contribuciones debidas a G_{Z_0}, es decir,

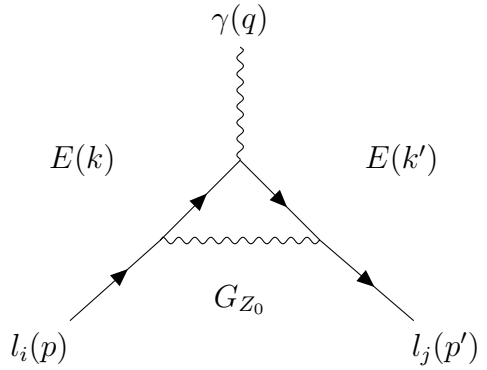


Figura 4-7.: Diagramas de interacción entre el leptón E y el bosón de Goldstone G_{Z_0}

no contribuyan tampoco al cambio de sabor leptónico.

4.2. Procesos de Decaimientos a Tres Cuerpos

4.2.1. Vértices y Diagramas

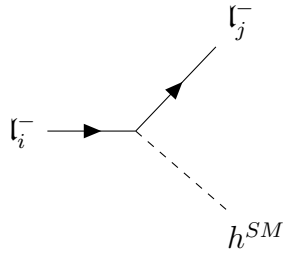


Figura 4-8.: Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación del Sabor de Leptón Cargado

La regla de Feynman asociada con el anterior diagrama ilustrado puede ser escrita como:

$$\alpha_1 \left(S_1 P_R + S_2 P_L\right) \tag{4-28}$$

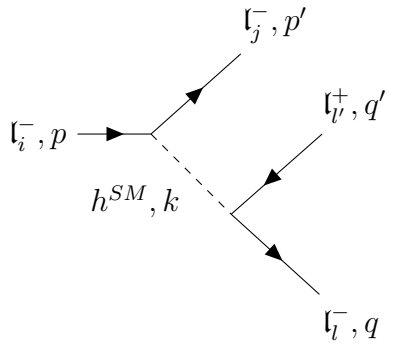


Figura 4-9.: Proceso de decaimiento a tres-cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado, a través de bosón escalar

Si bien se pueden tomar del orden de 1, se pueden usar para modelar el orden de magnitud del decaimiento, teniendo en cuenta que al final todo es dependiente del modelo.

El Lagrangiano que da cuenta de los acoples con LFV es:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_l =& -\overline{e}_L(q_{11}\cos\theta_{e\mu} - q_{12}\sin\theta_{e\mu})\frac{1}{m_E^2}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}h_{SM}\left(18\mu_R + \frac{3}{2}\tau_R\right) \\
& -\overline{\mu}_L(q_{11}\sin\theta_{e\mu} + q_{12}\cos\theta_{e\mu})\frac{\sin\beta h_{SM}}{m_E^2\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}e_R + \frac{3}{2}\tau_R\right) + h.c. \\
=& -\overline{e}_L\mu_R h_{SM}\frac{18q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2} - \overline{e}_L\tau_R h_{SM}\frac{3q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{2\sqrt{2}m_E^2} \\
& -\overline{\mu}_L e_R h_{SM}\frac{3q_{12}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{2\sqrt{2}m_E^2} - \overline{\mu}_L\tau_R h_{SM}\frac{3q_{12}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{2\sqrt{2}m_E^2} + h.c. \\
=& -\overline{e}\frac{q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2}(18P_R + \frac{3}{2}P_L)\mu h_{SM} + h.c. \\
& -\overline{e}\frac{3q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{2\sqrt{2}m_E^2}(P_R + P_L)\tau h_{SM} + h.c. \\
=& -\overline{e}\frac{q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2}(18P_R + \frac{3}{2}P_L)\mu h_{SM} + h.c. \\
& -\overline{e}\frac{3q_{11}\cos\theta_{e\mu}\sin\beta}{2\sqrt{2}m_E^2}\tau h_{SM} + h.c.
\end{aligned} \tag{4-29}$$

Así, al considerar la aproximación $\cos\theta_{e\mu} \approx 1$, el anterior Lagrangiano se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_l =& \frac{3}{2}\frac{q_{11}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2[GeV]}\overline{e}(12P_L + P_R)\mu h_{SM} + h.c. \\
& + \frac{3}{2}\frac{q_{11}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2[GeV]}\overline{e}P_R\tau h_{SM} + \frac{3}{2}\frac{q_{12}\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2[GeV]}\overline{\mu}P_R\tau + h.c.
\end{aligned} \tag{4-30}$$

Con lo cual, el diagrama

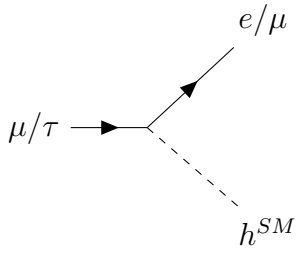


Figura 4-10.: Vértice con Violación del Sabor de Leptón Cargado ilustrando el acople entre el bosón de Higgs y los leptones cargados considerados

Tiene las reglas de Feynman tal que
$\mu \longrightarrow e\, h_{SM}$

$$i\frac{3}{2}q_{11}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2}(12P_L + P_R) \tag{4-31}$$

$\tau \longrightarrow e\, h_{SM}$

$$i\frac{3}{2}q_{11}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2} \tag{4-32}$$

$\tau \longrightarrow \mu\, h_{SM}$

$$i\frac{3}{2}q_{12}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}m_E^2}P_R \tag{4-33}$$

La matriz de rotación unitaria es debida a la base $(\vec{e}, E)$, donde el cambio de sabor se produce debido a la cuarta fila, columna del sabor donde interviene la nueva física debido a leptón exótico E.
Cabe mencionar que los experimentos llevados acabo en el LHC restringen el valor mínimo de la masa del leptón exótico tal que $m_E > 900GeV$.

4.2.2. Amplitud Invariante de Feynman (AIF)

Ahora bien, con base en las reglas de Feynman anteriormente listadas, es posible escribir la amplitud asociada al proceso de decaimiento ilustrado en la Figura **4-9**, es decir, la expresión analítica base que permite computar el proceso de decaimiento a estudiar, la cual se conoce como Amplitud Invariante de Feynman [7, 91, 92]. Esta amplitud es entonces igual a

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \overline{u_j(p')}\alpha_1\left(S_1P_R + S_2P_L\right)u_i(p)\frac{i}{k^2 - M_{Higgs}^2}\overline{v_{l'}(q')}\alpha_2\left(S_1'P_R + S_2'P_L\right)u_l(q) \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{k^2 - M_S^2}\overline{u_j(p')}\left(S_1P_R + S_2P_L\right)u_i(p)\overline{v_{l'}(q')}\left(S_1'P_R + S_2'P_L\right)u_l(q) \end{aligned} \tag{4-34}$$

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{-i\alpha_1\alpha_2}{k^2 - M_S^2}\overline{u_i(p)}\left(S_1P_L + S_2P_R\right)u_j(p')\overline{u_l(q)}\left(S_1'P_L + S_2'P_R\right)v_{l'}(q') \tag{4-35}$$

4.2.3. Cuadrado de la AIF, Suma y Promedio del Spin del Leptón Entrante y de los Salientes

A partir de la Amplitud Invariante de Feynman anteriormente mostrada, es posible computar la expresión analítica del ancho de decaimiento para el proceso ilustrado en la Figura **4-9**. Para ello, se parte del producto entre la AIF y su correspondiente complejo conjugado, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\mathcal{M}^{\dagger} &= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\overline{u_j(p')}\left(S_1P_R+S_2P_L\right)u_i(p)\overline{u_i(p)}\left(S_1P_L+S_2P_R\right)u_j(p')\right] \\
&\times\left[\overline{v_{l'}(q')}\left(S_1'P_R+S_2'P_L\right)u_l(q)\overline{u_l(q)}\left(S_1'P_L+S_2'P_R\right)v_{l'}(q')\right] \\
\mathcal{M}^2 &= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[u_i(p)\overline{u_i(p)}\left(S_1P_L+S_2P_R\right)u_j(p')\overline{u_j(p')}\left(S_1P_R+S_2P_L\right)\right] \\
&\times\left[u_l(q)\overline{u_l(q)}\left(S_1'P_L+S_2'P_R\right)v_{l'}(q')\overline{v_{l'}(q')}\left(S_1'P_R+S_2'P_L\right)\right]
\end{aligned} \tag{4-36}$$

Posteriormente, sumando sobre los valores de espín de la partícula que está decayendo (l_i), y promediando sobre los estados de espín de todas las partículas finales (l_j, l', l''),

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\mathrm{Tr}\left\{\left[\left(\not{p}+m_i\right)\left(S_1P_L+S_2P_R\right)\left(\not{p}'+m_j\right)\left(S_1P_R+S_2P_L\right)\right]\right\} \\
&\times\mathrm{Tr}\left\{\left[\left(\not{q}+m_l\right)\left(S_1'P_L+S_2'P_R\right)\left(\not{q}'-m_{l'}\right)\left(S_1'P_R+S_2'P_L\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\mathrm{Tr}\left\{S_1^2\not{p}\not{p}'P_R+S_2^2\not{p}\not{p}'P_L+S_1S_2m_im_j\right\} \\
&\times\mathrm{Tr}\left\{S_1'^2\not{q}\not{q}'P_R+S_2'^2\not{q}\not{q}'P_L+S_1'S_2'm_lm_{l'}\right\} \\
&= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\mathrm{Tr}\left\{\frac{S_1^2}{2}\not{p}\not{p}'+\frac{S_2^2}{2}\not{p}\not{p}'+S_1S_2m_im_j\right\} \\
&\times\mathrm{Tr}\left\{\frac{S_1'^2}{2}\not{q}\not{q}'+\frac{S_2'^2}{2}\not{q}\not{q}'+S_1'S_2'm_lm_{l'}\right\} \\
&= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S_1^2}{2}(4p\cdot p')+\frac{S_2^2}{2}(4p\cdot p')+4S_1S_2m_im_j\right] \\
&\times\left[\frac{S_1'^2}{2}(4q\cdot q')+\frac{S_2'^2}{2}(4q\cdot q')+4S_1'S_2'm_lm_{l'}\right]
\end{aligned} \tag{4-37}$$

recordando que

$$\begin{aligned}
t &= (p-p')^2 = (q+q')^2 \\
u &= (p-q)^2 = (p'+q')^2
\end{aligned} \tag{4-38}$$

y reescribiendo estos términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
p\cdot p' &= \frac{m_i^2+m_j^2}{2}-\frac{t}{2} \\
q\cdot q' &= \frac{t}{2}-\frac{m_l^2+m_{l'}^2}{2} \\
p\cdot q &= \frac{m_i^2+m_l^2}{2}-\frac{u}{2} \\
p'\cdot q' &= \frac{u}{2}-\frac{m_j^2+m_{l'}^2}{2}
\end{aligned} \tag{4-39}$$

Si se toma esto en cuenta, la AIF puede ser entonces reexpresada como

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S_1^2}{2}(4p\cdot p')+\frac{S_2^2}{2}(4p\cdot p')+4S_1S_2m_im_j\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{S'^2_1}{2}(4q\cdot q')+\frac{S'^2_2}{2}(4q\cdot q')+4S_1'S_2'm_lm_{l'}\right] \\
&= \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left(\frac{S_1^2}{2}\left(\frac{m_i^2+m_j^2}{2}-\frac{t}{2}\right)+\frac{S_2^2}{2}\left(\frac{m_i^2+m_j^2}{2}-\frac{t}{2}\right)+S_1S_2m_im_j\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{S'^2_1+S'^2_2}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{m_l^2+m_{l'}^2}{2}\right)+S_1'S_2'm_lm_{l'}\right) \\
&= \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left(\frac{S_1^2+S_2^2}{2}\left(\frac{m_i^2+m_j^2}{2}-\frac{t}{2}\right)+S_1S_2m_im_j\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{S'^2_1+S'^2_2}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{m_l^2+m_{l'}^2}{2}\right)+S_1'S_2'm_lm_{l'}\right)
\end{aligned} \tag{4-40}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S_1^2}{2}(4p\cdot p')+\frac{S_2^2}{2}(4p\cdot p')+4S_1S_2m_im_j\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{S'^2_1}{2}(4q\cdot q')+\frac{S'^2_2}{2}(4q\cdot q')+4S_1'S_2'm_lm_{l'}\right] \\
&= \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4}\left(\frac{m_{ij}^2t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{m_{ij}^2m_{ll'}^2}{4}+\frac{m_{ll'}^2t}{4}\right)\right] \\
&+ \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j}{4}t-\frac{S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j\left(m_l^2+m_{l'}^2\right)}{4}\right] \\
&+ \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'}\left(m_i^2+m_j^2\right)}{4}\right] \\
&- \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\frac{S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'}}{4}t-S_1S_2S'_1S'_2m_im_jm_lm_{l'}\right]
\end{aligned} \tag{4-41}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}^2_{1\longrightarrow 3}} = &\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[\{(\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})\left(m_{ij}^2+m_{ll'}^2\right)+(S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j)\}t\right]\\ &-\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'})t\right]\\ &-\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})t^2\right]\\ &-\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})m_{ij}^2m_{ll'}^2-(S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j\left(m_l^2+m_{l'}^2\right))\right]\\ &+\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'}\left(m_i^2+m_j^2\right))+4(S_1S_2S'_1S'_2m_im_jm_lm_{l'})\right]\end{aligned} \tag{4-42}$$

En la medida en que solo se tiene interés por los términos t, la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\overline{\mathcal{M}^2_{1\longrightarrow 3}} = \frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2+(A_2)t+(A_3)\right] \tag{4-43}$$

En este punto, es necesario recordar la ecuación diferencial del ancho de decaimiento, expresada en términos de la AIF y de la región de integración del espacio de fase.

$$d\Gamma_{1\longrightarrow 3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\overline{\mathcal{M}^2_{1\longrightarrow 3}}\ dudt \tag{4-44}$$

$$\Gamma_{1\longrightarrow 3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{t_{min}}^{t_{max}}\int_{u_{min}(t)}^{u_{max}(t)}\overline{\mathcal{M}^2_{1\longrightarrow 3}}\ dudt \tag{4-45}$$

Los límites de integración están definidos como

$$u_{min}^{max}(t) = m_i^2+m_l^2-\frac{(t+m_i^2-m_j^2)(t-m_{l'}^2+m_l^2)}{2t}\pm\frac{1}{2t}\lambda^{1/2}(t,m_i^2,m_j^2)\lambda^{1/2}(t,m_l^2,m_{l'}^2) \tag{4-46}$$

y

$$(m_l+m_{l'})^2 \leq t \leq (m_i-m_j)^2 \tag{4-47}$$

donde se ha recordado que $\lambda(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$.

Ahora bien, basandose en la tabla

	m_e	m_μ	m_τ
Masa (GeV)	0.511×10^{-3}	0.106	1.777
Fraction	**Lepton:** e	**Lepton:** μ	**Lepton:** τ
$\frac{m_{Lepton}}{m_\mu}$	4.836×10^{-3}	1	16.817
$\frac{m_{Lepton}}{m_\tau}$	2.876×10^{-4}	5.946×10^{-2}	1
$\frac{m_{Lepton}}{m_h}$	4.085×10^{-6}	8.446×10^{-4}	1.420×10^{-2}

Tabla 4-2.: Comparación entre los diferentes valores de masa entre leptones cargados y el bosón de Higgs, en donde $m_h = 125.1\,GeV$

los límites de integración pueden ser aproximados tal que

$$\begin{aligned}\lambda(t,m_i^2,m_j^2) &= t^2+m_i^4+m_j^4-2m_i^2t-2m_j^2t-2m_i^2m_j^2\\ &= t^2+m_i^4\left(1+\frac{m_j^4}{m_i^4}-\frac{2t}{m_i^2}-\frac{2}{m_i^2}\frac{m_j^2}{m_i^2}-\frac{2m_j^2}{m_i^2}\right)\\ &\approx t^2+m_i^4-2m_i^2t-2m_j^2m_i^2=\left(t-m_i^2\right)^2-2m_i^2m_j^2,\end{aligned} \tag{4-48}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\lambda^{1/2}(t,m_i^2,m_j^2) &\approx \sqrt{t^2+m_i^4+m_j^4-2m_i^2t-2m_j^2t-2m_i^2m_j^2}\\ &\approx \sqrt{\left(t-m_i^2\right)^2-2m_i^2m_j^2}\approx\sqrt{\left(t-m_i^2\right)^2}=\left|t-m_i^2\right|=m_i^2-t\end{aligned} \tag{4-49}$$

$$\lambda^{1/2}(t,m_l^2,m_{l'}^2)\approx\left|t-m_l^2\right|=t-m_l^2 \tag{4-50}$$

donde se ha considerado que $(m_l+m_{l'})^2\le t\le(m_i-m_j)^2\longrightarrow m_l^2\le t\le m_i^2$.

En la medida en que los valores de masa de las partículas finales se aproximan a cero, $m_j, m_l, m_{l'}\approx 0$, los dos valores límite de la variable u resultan ser

$$\begin{aligned}u_{min}^{max}(t) &= m_i^2+m_l^2-\frac{(t+m_i^2-m_l^2)(t-m_{l'}^2+m_l^2)}{2t}\pm\frac{1}{2t}\left(m_i^2-t\right)\left(t-m_l^2\right)\\ &= m_i^2-\frac{(t+m_i^2)t}{2t}\pm\frac{1}{2t}\left(m_i^2-t\right)t\\ &= m_i^2-\frac{(t+m_i^2)t}{2t}\pm\frac{1}{2}\left(m_i^2-t\right)\end{aligned} \tag{4-51}$$

Al simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned}u^{max}(t) &= m_i^2-t\\ u_{min}(t) &= 0\end{aligned} \tag{4-52}$$

4.2.4. Integral del Cuadrado de la AIF

Finalmente, se encuentra la fórmula del ancho de decaimiento para su respectiva integración,

$$\begin{aligned}\Gamma_{1\longrightarrow 3} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{t_{min}}^{t_{max}}\int_{u_{min}(t)}^{u_{max}(t)}\overline{\mathcal{M}^2_{1\longrightarrow 3}}\ dudt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{t_{min}}^{t_{max}}\int_{u_{min}(t)}^{u_{max}(t)}\left(\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2+(A_2)t+(A_3)\right]\right)\ dudt \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\left(\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2+(A_2)t+(A_3)\right]\right)\ dudt\end{aligned} \tag{4-53}$$

Esta integral puede ser dividida en tres términos, cada uno asociado a una potencia de t:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1\longrightarrow 3} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\left(\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2+(A_2)t+(A_3)\right]\right)\ dudt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2\right]\ dudt \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(A_2)t\right]\ dudt \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[(A_3)\right]\ dudt\end{aligned} \tag{4-54}$$

Por lo tanto, al computar las tres integrales

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{t^2}{\left(t-M_S^2\right)^2}\ dudt \\ I_2 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{t}{\left(t-M_S^2\right)^2}\ dudt \\ I_3 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_{0}^{m_i^2-t}\frac{1}{\left(t-M_S^2\right)^2}\ dudt\end{aligned} \tag{4-55}$$

el ancho de decaimiento puede ser finalmente calculado completamente,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_0^{m_i^2-t} \frac{t^2}{\left(t-M_S^2\right)^2}\; dudt \\
&= -m_S^4 - 2m_S^2 m_i^2 + \frac{m_i^4}{2} + \left(2m_S^2 - m_i^2\right) m_l^2 + \frac{m_l^4}{2} + \frac{m_S^4(m_S^2-m_i^2)}{m_S^2-m_l^2} + m_S^2\left(3m_S^2-2m_i^2\right)\ln\frac{m_S^2-m_l^2}{m_S^2-m_i^2} \\
&= m_S^4\left[-1-2\frac{m_i^2}{m_S^2}+\frac{m_i^4}{2m_S^4}+(2-\frac{m_i^2}{m_S^2})\frac{m_l^2}{m_S^2}+\frac{m_l^4}{2m_S^4}+\frac{m_S^2(1-\frac{m_i^2}{m_S^2})}{m_S^2(1-\frac{m_l^2}{m_S^2})}+\left(3-2\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\frac{1-\frac{m_l^2}{m_S^2}}{1-\frac{m_i^2}{m_S^2}}\right] \\
&= m_S^4\left[-3\frac{m_i^2}{m_S^2}+3\frac{m_l^2}{m_S^2}+\left(3-2\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}+\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\right] \\
&= m_S^4\;\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})
\end{aligned}
\tag{4-56}
$$

donde $\kappa^{(1)}(x,y) \approx [-3x+3y+(3-2x)\ln(1-y+x)]$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_0^{m_i^2-t} \frac{t}{\left(t-m_S^2\right)^2}\; dudt \\
&= -\frac{\left(m_i^2-m_l^2\right)\left(2m_S^2-m_l^2\right)}{m_S^2-m_l^2} - \left(2m_S^2-m_i^2\right)\ln\left[m_S^2-m_i^2\right] + \left(2m_S^2-m_i^2\right)\ln\left[m_S^2-m_l^2\right] \\
&= -\frac{\left(m_i^2-m_l^2\right)\left(2-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)}{\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)} + m_S^2\left(2-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\left(\frac{\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)}{\left(1-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)}\right) \\
&= -\left(m_i^2-m_l^2\right)\left(2+\frac{m_l^2}{m_S^2}\right) + m_S^2\left(2-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\left(\frac{\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)}{\left(1-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)}\right) \\
&= m_S^2\{-\frac{\left(m_i^2-m_l^2\right)}{m_S^2}\left(2+\frac{m_l^2}{m_S^2}\right) + \left(2-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\left(\frac{\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)}{\left(1-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)}\right)\} \\
&= m_S^2\{2\left(\frac{m_l^2}{m_S^2}-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right) + \left(2-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)\ln\left(\frac{\left(1-\frac{m_l^2}{m_S^2}\right)}{\left(1-\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)}\right)\} \\
&= m_S^2\;\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})
\end{aligned}
\tag{4-57}
$$

donde $\kappa^{(2)}(x,y) = \left[2\left(y-x\right)+(2-x)\ln\left(\frac{1-y}{1-x}\right)\right]$.
Si se tiene en cuenta que $x = \frac{m_i^2}{m_S^2} \approx 0$ y $y = \frac{m_j^2}{m_S^2} \approx 0$, la función *kappa* puede ser reescrita como $\kappa^{(2)}(x,y) \approx [-2x+2y+(2-x)\ln(1+x-y)]$.

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_0^{m_i^2-t}\frac{1}{\left(t-M_S^2\right)^2}\;dudt \\
&= -1+\frac{m_S^2-m_i^2}{m_S^2-m_l^2}-\ln\left(m_S^2-m_i^2\right)+\ln m_S^2-m_l^2\,() \\
&= -1+\frac{1-(\frac{m_i}{m_S})^2}{1-(\frac{m_l}{m_S})^2}+\ln\left(\frac{1-(\frac{m_l^2}{m_S^2})}{1-(\frac{m_i^2}{m_S^2})}\right) \\
&= \kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})
\end{aligned}
\tag{4-58}
$$

donde $\kappa^{(3)}(x,y)=-1+\frac{1-x}{1-y}+\ln\frac{1-y}{1-x}\approx -x+y+\ln\left(1-y+x\right)$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1\longrightarrow 3} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}\int_{m_l^2}^{m_i^2}\int_0^{m_i^2-t}\left(\frac{4^2\alpha_1^2\alpha_2^2 4^{-1}}{2\left(k^2-M_S^2\right)^2}\left[-(A_1)t^2+(A_2)t+(A_3)\right]\right)\;dudt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}2\alpha_1^2\alpha_2^2\left[-(A_1)\,m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right]+\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}2\alpha_1^2\alpha_2^2\left[(A_2)\,m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right] \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}2\alpha_1^2\alpha_2^2\left[(A_3)\,\kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}2\alpha_1^2\alpha_2^2\left[-(A_1)\,m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})+(A_2)\,m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})+(A_3)\,\kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right]
\end{aligned}
\tag{4-59}
$$

Ahora, al recordar que

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4} \\
A_2 &= (\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})\left(m_{ij}^2+m_{ll'}^2\right)+S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j-S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'} \\
A_3 &= -(\frac{\left(S_1^2+S_2^2\right)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})m_{ij}^2m_{ll'}^2+S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j\left(m_l^2+m_{l'}^2\right) \\
&+ S'_1S'_2\left(S_1^2+S_2^2\right)m_lm_{l'}\left(m_i^2+m_j^2\right)+4S_1S_2S'_1S'_2m_im_jm_lm_{l'}
\end{aligned}
\tag{4-60}
$$

pero si se desprecian las masas m_j, m_l y $m_{l'}$, la ecuación anterior puede ser aproximada a

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4} \\
A_2 &= (\frac{(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})\left(m_i^2\right) + S_1S_2\left(S'^2_1+S'^2_2\right)m_im_j \\
&= (\frac{(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})\left(m_i^2\right) \\
A_3 &= -(\frac{(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})m_{ij}^2m_{ll'}^2 \\
&= -(\frac{(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4})m_i^2\cdot m_l^2
\end{aligned} \tag{4-61}$$

de esta forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\longrightarrow 3} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32m_i^3}2\alpha_1^2\alpha_2^2\left[-(A_1)\,m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})+(A_2)\,m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})+(A_3)\,\kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right] \\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2A_1}{32m_i^3}\left[-m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})+\left(m_{ij}^2+m_{ll'}^2\right)m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})-m_{ij}^2m_{ll'}^2\kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},\frac{m_l^2}{m_S^2})\right] \\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2A_1}{32m_i^3}\left[-m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)+\left(m_i^2\right)m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)-m_i^2m_l^2\kappa^{(3)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)\right] \\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2A_1}{32m_i^3}\left[-m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)+\left(m_i^2\right)m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)\right]
\end{aligned} \tag{4-62}$$

Evaluando $\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)$ y $\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)$,

$$\begin{aligned}
\kappa^{(1)}(x_0,0) &\approx [-3x_0+(3-x_0)\ln(1+x_0)] \\
\kappa^{(2)}(x_0,0) &\approx [-2x_0+(2-x_0)\ln(1+x_0)]
\end{aligned} \tag{4-63}$$

$\Gamma_{1\longrightarrow 3}$ puede ser rescrita ahora como

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\longrightarrow 3} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\left[-m_S^4\,\kappa^{(1)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)+\left(m_i^2\right)m_S^2\,\kappa^{(2)}(\frac{m_i^2}{m_S^2},0)\right]\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\left[-m_S^4\;(-3x_0+(3-2x_0)\ln(1+x_0))\right]\\
&+\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\left[\left(m_i^2\right)m_S^2\;(-2x_0+(2-x_0)\ln(1+x_0))\right]\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\{\left[3m_S^4-2m_i^2m_S^2\right]x_0+\left[2m_i^2m_S^2-3m_S^4+(2m_S^4-m_i^2m_S^2)x_0\right]\ln(1+x_0)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\{\left[3m_S^4(1-\frac{2m_i^2}{3m_S^2})\right]x_0+\left[-3m_S^4(1-\frac{2m_i^2}{3m_S^2})+m_S^4(2-\frac{m_i^2}{m_S^2})x_0\right]\ln(1+x_0)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\{\left[3m_S^4(1-\frac{2m_i^2}{3m_S^2})\right]x_0+\left[-3m_S^4(1-\frac{2m_i^2}{3m_S^2})+2m_S^4x_0\right]\ln(1+x_0)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}\{3m_S^4x_0+m_S^4\left[4x_0-3\right]\ln(1+x_0)\};\quad x_0=\frac{m_i^2}{m_S^2}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{3x_0+(4x_0-3)\ln(1+x_0)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\kappa^{(F)}(x_0)
\end{aligned}\tag{4-64}$$

donde $\kappa^{(Final)}(x)=3x+(4x-3)\ln(1+x)$. Ahora, al recordar la aproximación $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, el ancho de decaimiento se reexpresa de manera simplificada como

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\longrightarrow 3} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{3x_0+(4x_0-3)\ln(1+x_0)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{3x_0+(4x_0-3)\left(x_0-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{3x_0-3x_0+4x_0^2-\frac{4}{2}x_0^3+\frac{3}{2}x_0^2+\frac{4}{3}x_0^4-\frac{3}{3}x_0^3\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{\frac{11}{2}x_0^2-3x_0^3+\frac{4}{3}x_0^4\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\{\frac{11}{2}x_0^2\}\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_i^3}m_S^4\,\frac{11}{2}\left(\frac{m_i^2}{m_S^2}\right)^2\\
&\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_i
\end{aligned}\tag{4-65}$$

4.2.5. Diagramas y Deducciones Analíticas Asociadas a los Decaimientos a Tres Cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado

Teniendo en cuenta la ecuación anterior (4-65), así como también las reglas de Feynman para los acoples entre el bosón de Higgs y los leptónes cargados del Modelo Estándar (4-30), los *Branching Ratio* para los diferentes decaimientos a tres cuerpos con violación de sabor de leptón cargado puede ser finalmente computados. La siguiente tabla muestra los diferentes valores del término $\alpha_1, \alpha_2, S_1, S_2, S_1^{'}, S_1^{'}$ para cada canal de decaimiento.

Canal de Decaimiento	α_1	S_1	S_2	α_2	$S_1^{'}$	$S_2^{'}$	$A_1 = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2(S_1^2+S_2^2)\left(S'^2_1+S'^2_2\right)}{4}$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{18}{\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{11745}{128} s_\beta^4 \frac{1}{\widetilde{m}_E^8}$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	i	$\frac{m_\mu}{v}$	$\frac{m_\mu}{v}$	$\frac{9}{8} s_\beta^2 \frac{m_\mu^2}{v^2} \frac{1}{\widetilde{m}_E^4}$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	i	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{9}{8} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2} \frac{1}{\widetilde{m}_E^4}$
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{18}{\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{11745}{128} s_\beta^4 \frac{1}{\widetilde{m}_E^8}$
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	i	$\frac{m_\mu}{v}$	$\frac{m_\mu}{v}$	$\frac{9}{8} s_\beta^2 \frac{m_\mu^2}{v^2} \frac{1}{\widetilde{m}_E^4}$
$\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	i	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{9}{8} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2} \frac{1}{\widetilde{m}_E^4}$
$\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$-i\frac{s_\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2\widetilde{m}_E^2}$	$\frac{18}{\widetilde{m}_E^2}$	i	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{m_e}{v}$	$\frac{1305}{16} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2} \frac{1}{\widetilde{m}_E^4}$

Tabla 4-3.: Tabla resumen con los diferentes canales de decaimiento y sus respectivos coeficientes. $\widetilde{m}_E = \frac{m_E}{GeV}$, por lo que $\widetilde{m}_E$ es adimensional.

4.2.6. $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$

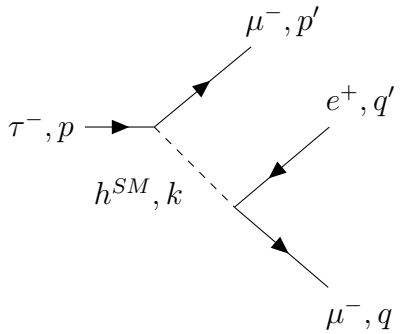


Figura 4-11.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu e \mu$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow\mu e\mu} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\cdot 11745}{32\cdot 128}s_\beta^4\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^8}\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096}s_\beta^4\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^8}\end{aligned} \tag{4-66}$$

4.2.7. $\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-$

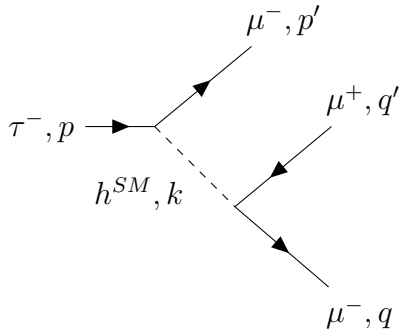


Figura 4-12.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu\mu\mu$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow\mu\mu\mu} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-67}$$

4.2.8. $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$

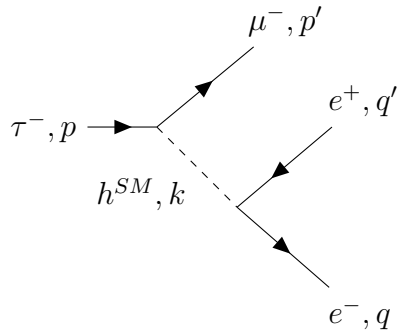


Figura 4-13.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow \mu ee$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow\mu ee} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-68}$$

4.2.9. $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-$

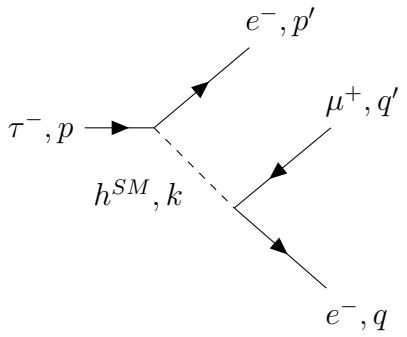


Figura 4-14.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow e\mu e$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow e\mu e} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096}s_\beta^4\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-69}$$

4.2.10. $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-$

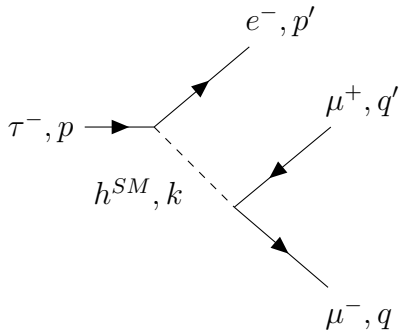


Figura 4-15.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow e\mu\mu$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow e\mu\mu} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-70}$$

4.2.11. $\tau^- \longrightarrow e^-e^+e^-$

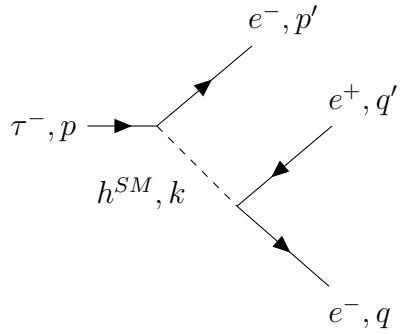


Figura 4-16.: Diagrama de decaimiento del proceso $\tau \longrightarrow eee$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tau\longrightarrow eee} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32m_\tau^3}m_h^4\{3\frac{m_i^2}{m_h^2}-\left(3-4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\}\\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32}m_\tau \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-71}$$

4.2.12. $\mu^- \longrightarrow e^-e^+e^-$

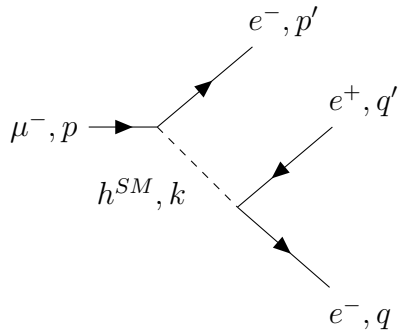


Figura 4-17.: Diagrama de decaimiento del proceso $\mu \longrightarrow eee$

El ancho de decaimiento para este proceso viene dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\longrightarrow eee} &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32 m_\tau^3} m_h^4 \{3\frac{m_i^2}{m_h^2} - \left(3 - 4\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\ln\left(1+\frac{m_i^2}{m_h^2}\right)\} \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{11\alpha_1^2\alpha_2^2 A_1}{32} m_\mu \approx \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{14355}{512} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\mu}{\widetilde{m}_E^4}\end{aligned} \tag{4-72}$$

Recapitulando,

Canal de Decaimiento	Branching Ratio Γ_i/Γ
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096} s_\beta^4 \frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^8}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256} s_\beta^2 \frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096} s_\beta^4 \frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256} s_\beta^2 \frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\tau}$
$\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{14355}{512} s_\beta^2 \frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\mu}{\widetilde{m}_E^4}\frac{1}{\Gamma_\mu}$

Tabla 4-4.: Tabla resumen con los canales de decaimiento y *Branching Ratio* para los decaimientos con Cambio de Sabor de Leptón Cargado.

5. Análisis y Resultados

Con base en todas las expresiones y desarrollos ilustrados en los capítulos anteriores, fue posible realizar una exploración de los parámetros del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$. Para esto, se hizo uso de las fracciones de decaimiento (*Branching Ratios*) reportadas en la Tabla **2-1** del capítulo 2.
Ahora bien, la mencionada exploración de parámetros se realizó estudiando por separado los procesos de decaimiento a 2 y 3 cuerpos que Violan el Sabor de Leptón Cargado.

5.1. Exploración de Parámetros - Decaimientos a 2-Cuerpos

El punto de partida del presente análisis es la ecuación (4-4), en donde se relaciona el *Branching Ratio* $Br(l_i \longrightarrow l_j\gamma)$ con el factor de forma $F_{2_R}^{ij}$, además de la masa y el ancho de decaimiento del leptón l_i. Ahora bien, las contribuciones provenientes de los procesos radiativos $W^{\pm} - N_{1,2}^{e,\mu} - W^{\pm}$, $E - Z_0 - E$, $E - h - E$ y $E - H^{\pm} - E$ se conectan con el factor de forma $F_{2_R}^{ij}$ de tal forma que

$$F_{2_R}^{ij} = {F_{2,W}^{R}}^{ij} + {F_{2,Z}^{R}}^{ij} + {F_{2,h}^{R}}^{ij} + {F_{2,H^{\pm}}^{R}}^{ij} \tag{5-1}$$

A partir de las expresiones consignadas en la subsección 4.1 del capitulo anterior, es posible identificar como parámetros libres, la masa del leptón exótico cargado m_E, la masa del leptón neutro (neutrino de Majorana) m_N y la masa del bosón escalar cargado m_H. Ahora, es menester mencionar que la exploración de los posibles intervalos de valores para estos tres parámetros se realizó a través de dos enfoques.

5.1.1. Enfoque 1

En el primer enfoque, se fija la masa del leptón exótico cargado m_E y la masa del leptón neutro (neutrino de Majorana) m_N, de manera que el *Branching Ratio* del proceso $l_i \longrightarrow l_j\gamma$ queda como función de la masa del bosón escalar cargado m_H. Ahora bien, la exploración se discrimina por proceso de decaimiento, sin embargo, los dos procesos de decaimiento $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$ se abordan conjuntamente en tanto que el orden de magnitud del respectivo *Branching Ratio* es el mismo (ver Tabla **2-1**).

Proceso $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$

La figura siguiente muestra el resultado asociado al primer enfoque, en donde se gráfica el *Branching Ratio* como función de la masa del bosón escalar cargado m_H en el intervalo 1000 a 4000 GeV.

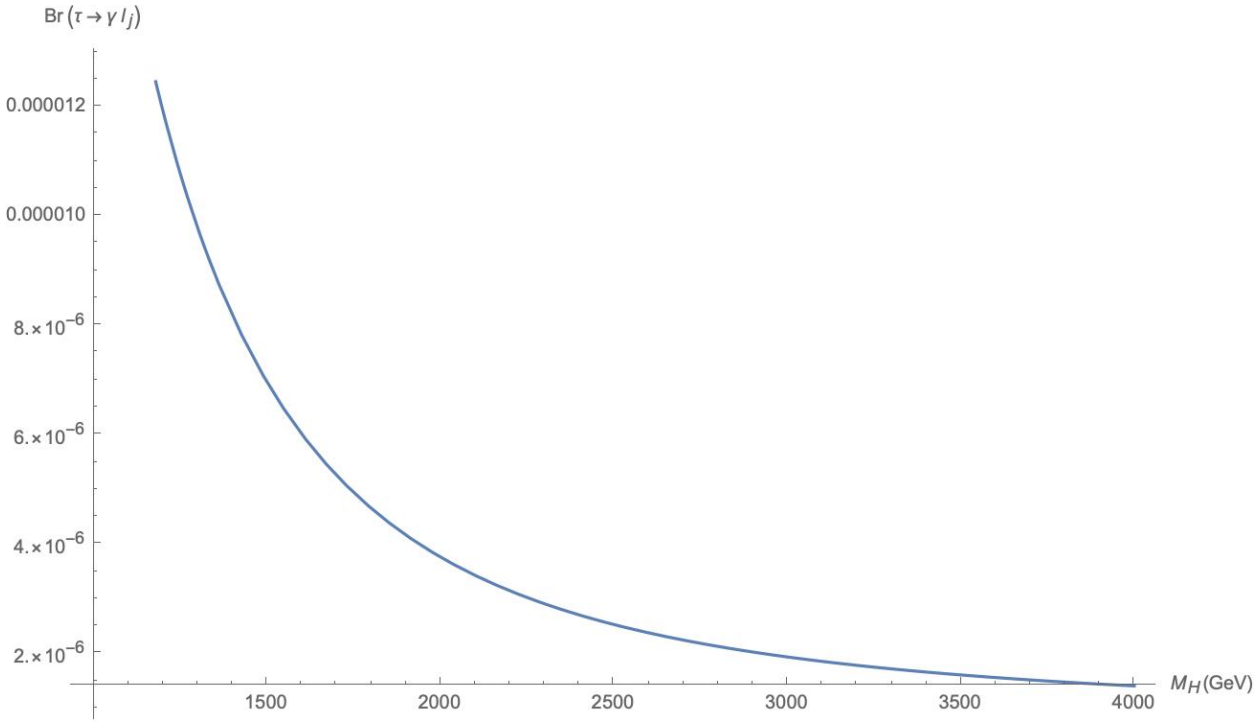


Figura 5-1.: Gráfica para los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$, con $m_E = 1000\,GeV$ y $m_N = 300\,GeV$

La Figura **5-1** muestra la gráfica del *Branching Ratio* de los procesos $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$ en función de la masa del bosón escalar cargado m_H, en donde la masa del neutrino de Majorana toma el valor $m_N = 300\,GeV$ y la masa del leptón exótico toma el valor $m_E = 1000\,GeV$. La cota superior reportada en la literatura para los dos procesos en consideración es

$$\begin{aligned} &Br(\tau \longrightarrow e\gamma) < 3.3 \times 10^{-8}[36,\ 38] \\ &Br(\tau \longrightarrow \mu\gamma) < 4.2 \times 10^{-8}[36,\ 37], \end{aligned} \tag{5-2}$$

de manera que al comparar los dos valores anteriores con los rangos de valores del eje vertical en la gráfica anteriormente mostrada, se observa como las contribuciones provenientes del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$, en el rango de parámetros considerado, predicen un *Branching Ratio* mucho más grande en magnitud que los reportados en la literatura. Lo anterior se explica, en tanto que experimentalmente aún no se ha medido la Violación de Sabor de Leptón Cargado para los dos procesos de decaimiento en estudio. Así las cosas, no se excluyen los intervalos de valores anteriormente considerados para los parámetros m_E, m_N y m_H.

Proceso $\mu \longrightarrow e\gamma$

La siguiente figura muestra el resultado asociados al primer enfoque, en donde se gráfica el *Branching Ratio* como función de la masa del bosón escalar cargado m_H en el intervalo 1000 a 4000 GeV.

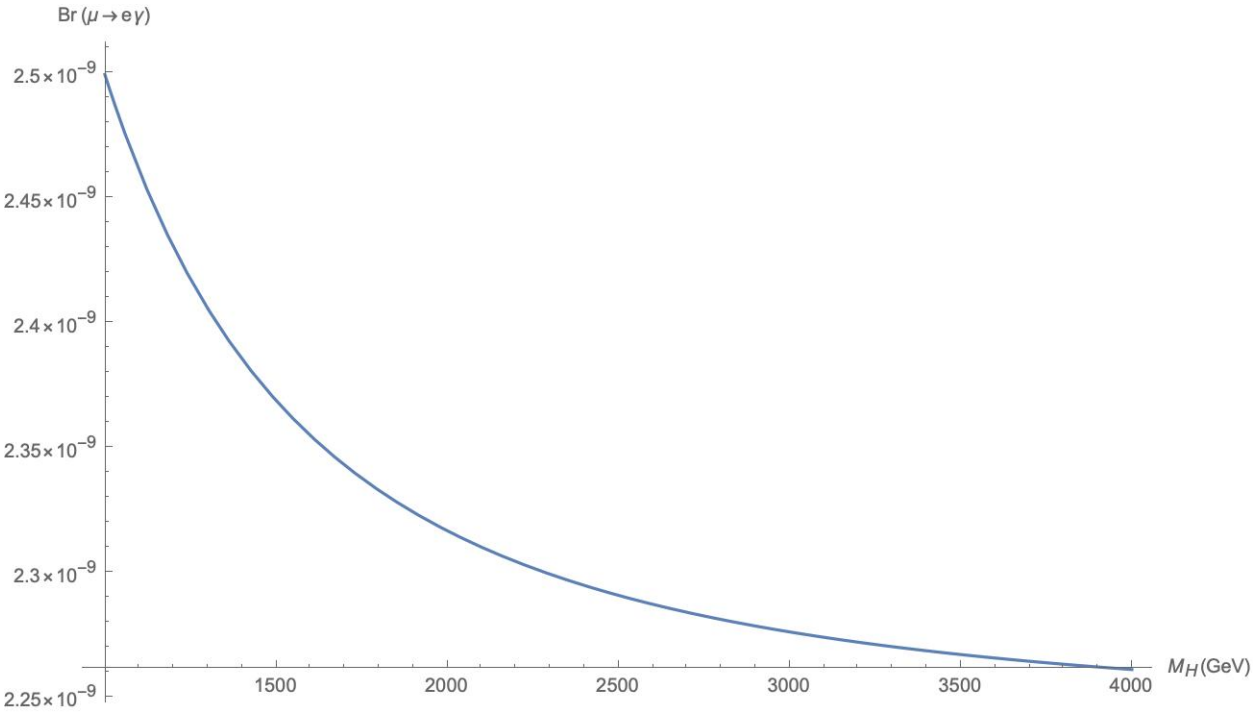


Figura 5-2.: Gráfica para el decaimiento $\mu \longrightarrow e\gamma$, con $m_E = 1000\,GeV$ y $m_N = 300\,GeV$

La Figura **5-2** muestra la gráfica del *Branching Ratio* para el proceso $\mu \longrightarrow e\gamma$ en función de la masa del bosón escalar cargado m_H, en donde la masa del neutrino de Majorana toma el valor $m_N = 300\,GeV$, y la masa del leptón exótico toma el valor $m_E = 1000\,GeV$.
La cota superior reportada en la literatura para el proceso en consideración es

$$Br(\mu \longrightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13} [36,\ 39] \tag{5-3}$$

de manera que al comparar el valor anterior con los rangos de valores del eje vertical en la gráfica anteriormente mostrada, se observa como las contribuciones provenientes del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$, en el rango de parámetros considerado, predicen un *Branching Ratio* mucho más grande en magnitud que el reportado en la literatura. Lo anterior se explica, en tanto que experimentalmente aún no se ha medido la Violación de Sabor de Leptón Cargado para el proceso de decaimiento analizado. Así las cosas, no se excluyen los intervalos de valores anteriormente considerados para los parámetros m_E, m_N y m_H.

5.1.2. Enfoque 2

El segundo enfoque consiste en fijar la masa de leptón exótico de manera que se busca gráficamente la región de puntos (m_N, m_H) tal que el *Branching Ratio* respectivo no supere la cota experimental acorde al proceso de decaimiento.

Proceso $\tau \longrightarrow \mu\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\gamma$

Fijando la masa de leptón exótico en $m_E = 10000\ GeV$, se obtiene la Figura **5-3** en la cual se identifica una región de parámetros (m_N, m_H) para los cuales el *Branching Ratio* es menor o igual a 4×10^{-8}.

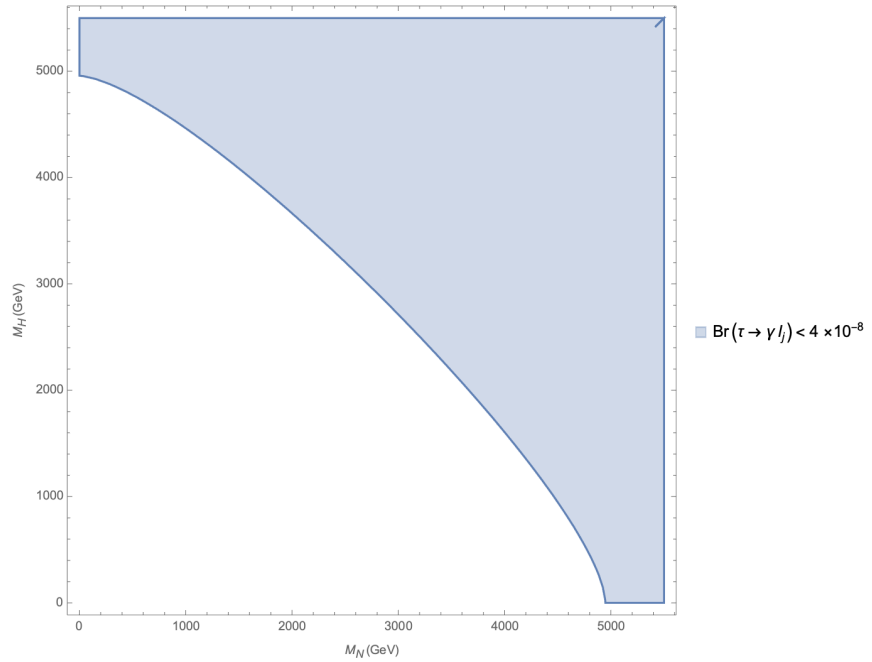


Figura 5-3.: Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 10000\,GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir a $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$

Con base en la anterior gráfica, se observa cómo el valor mínimo posible de m_N y m_H es aproximadamente el mismo, es decir, $m_N, m_H > 4800\ GeV$.
Ahora, fijando la masa de leptón exótico en $m_E = 5000\ GeV$, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura **5-4** en la cual se identifica una región de parámetros (m_N, m_H) para los cuales el *Branching Ratio* es menor o igual a la cota experimental. Particularmente, se observa como el valor mínimo posible de m_N y m_H es aproximadamente el mismo, es decir, $m_N, m_H > 5100$ GeV.

Por otra parte, fijando la masa de leptón exótico en $m_E = 2500\ GeV$, se obtiene la Figura **5-5** en la cual se identifica una región de parámetros (m_N, m_H) para los cuales el *Branching Ratio* es menor o igual a la cota experimental. Particularmente, se observa como el valor mínimo posible de m_N y m_H es aproximadamente el mismo, es decir, $m_N, m_H > 10300\ GeV$.

Fijando la masa de leptón exótico en $m_E = 2250\ GeV$, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura **5-6** en la cual se identifica una región de parámetros (m_N, m_H) para los cuales el *Branching Ratio* es menor o igual a la cota experimental. Particularmente, se observa como el valor mínimo posible de m_N y m_H es aproximadamente el mismo, es decir, $m_N, m_H > 25900\ GeV$.

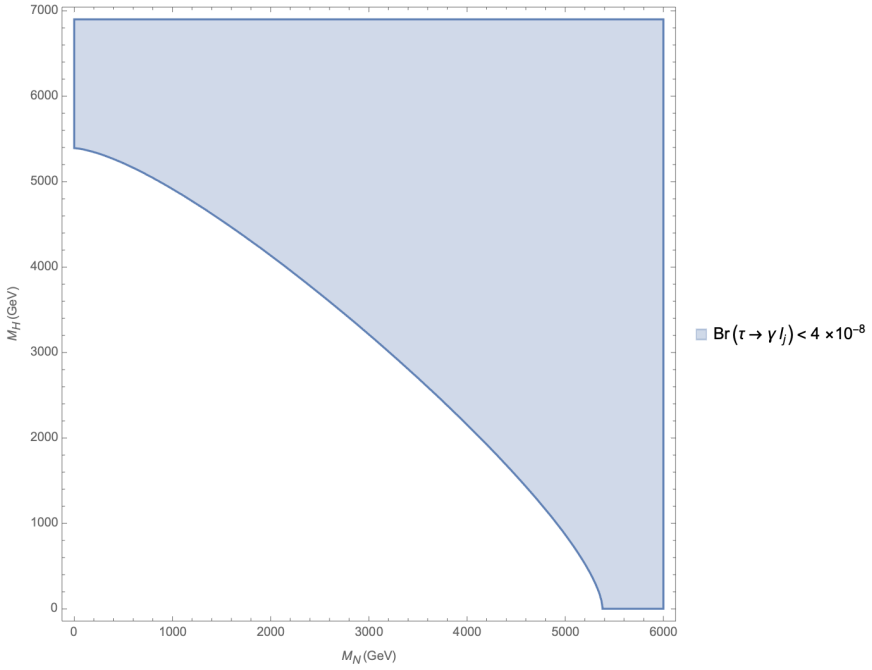


Figura 5-4.: Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 5000\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$

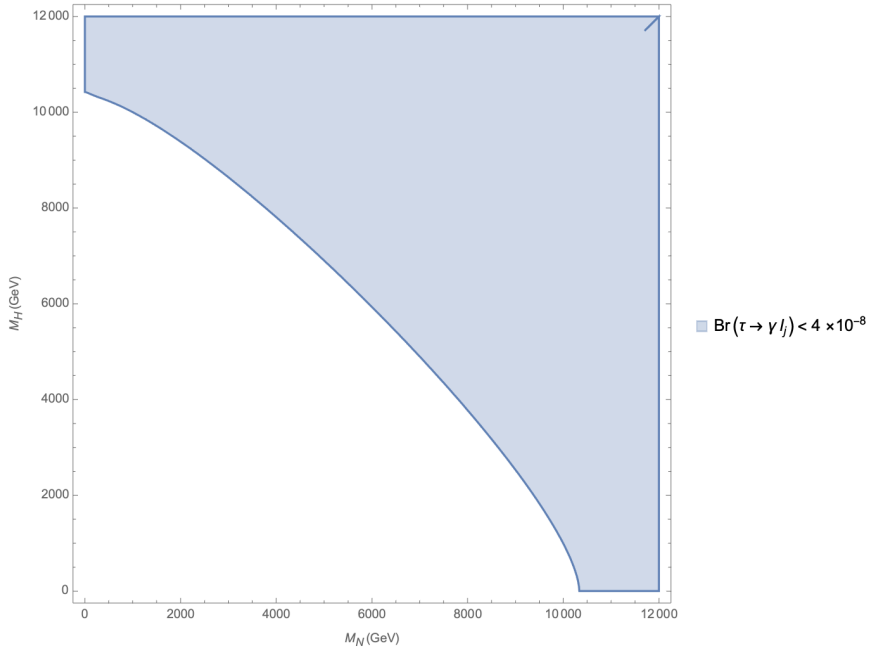


Figura 5-5.: Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 2500\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$

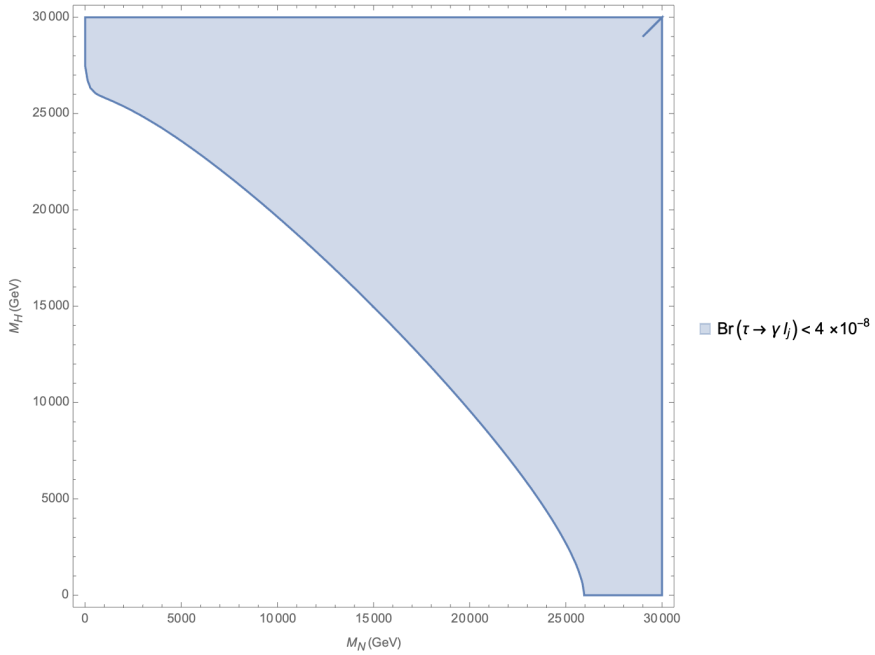


Figura 5-6.: Región de valores (m_N, m_H) permitida tal que $m_E = 2250\ GeV$ y el *Branching Ratio* calculado sea menor a la cota superior experimental, es decir $Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\gamma) < 4 \times 10^{-8}$

Proceso $\mu \longrightarrow e\gamma$

Al seleccionar la masa del leptón exótico entre los valores $m_E = 2250, 2500, 5000, 10000$ GeV, no se encontró región alguna de puntos (m_N, m_H) para los cuales el *Branching Ratio* calculado sea menor o igual a 4.2×10^{-13}.

5.1.3. Análisis

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los dos enfoques anteriormente mencionados, se puede ver, en primer lugar, que no es posible reproducir el valor de *Branching Ratio* para el proceso de decaimiento $\mu \longrightarrow e\gamma$ con el rango de parámetros considerado en el primer enfoque. En segundo lugar, a través del segundo enfoque es posible identificar un conjunto de valores mínimos para m_N y m_H a partir de las cuales se logra obtener la cota experimental asociada a los dos procesos de decaimiento del leptón tau ($\tau \longrightarrow \mu\gamma$, $\tau \longrightarrow e\gamma$). Por otra parte, es posible afirmar que el primer enfoque es el más limitado a la hora de explorar los posibles valores de m_N y m_H. En contraste, el segundo enfoque permite una identificación más acertada de los valores mínimos que pueden tomar la masa del neutrino de Majorana y la masa del bosón escalar cargado. Finalmente, en el marco del segundo enfoque, es posible observar una sensible y estrecha dependencia entre la masa del leptón exótico m_E y los valores mínimos que pueden tomar m_N y m_H. Particularmente, cuando $m_E < 2500\, GeV$, se observa cómo los cotas inferiores de m_N y m_H aumentan sustancialmente.

5.2. Exploración de Parámetros - Decaimientos a 3-Cuerpos

El punto de partida del presente análisis es la Tabla **4-4**, en donde se relaciona el decaimiento a tres cuerpos $l_i \longrightarrow l_j l' l''$ con la expresión analítica de *Branching Ratio* correspondiente.

A partir de las expresiones consignadas en la subsección 4.2 del capitulo anterior, es posible identificar como parámetro libre, la masa del leptón exótico cargado m_E. Por lo cual, en el marco de los los decaimientos a tres cuerpos que Violan el Sabor de Leptón Cargado, el parámetro del modelo m_E se estudia al graficar el *Branching Ratio* como función de m_E para cada decaimiento, buscando identificar la ventana de valores que puede tomar la masa del leptón exótico m_E tal que el $Br(l_i \longrightarrow l_j l' l'')$ (obtenida del modelo) sea compatible con la cota experimental del decaimiento respectivo. A continuación, se ilustran las gráficas obtenidas para los diferentes decaimientos a tres cuerpos que Violan el Sabor de Leptón Cargado, de manera que se discrimina el intervalo posible de m_E por decaimiento.

5.2.1. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$

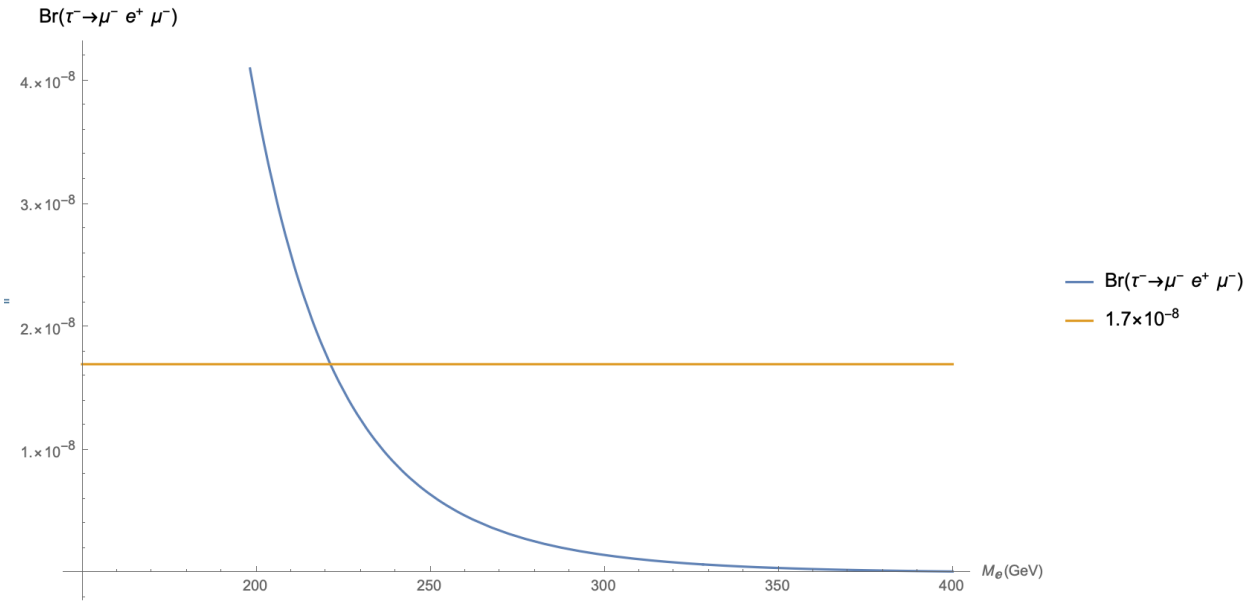


Figura 5-7.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$.

Teniendo en cuenta que la cota inferior para la masa de un leptón cargado pesado reportada en el *Particle Data Group* es de $100\,GeV$ aproximadamente ($m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36]), y dado que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 1.7×10^{-8}[36, 41], se gráfica el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $150\,GeV < m_E < 400\,GeV$. En la Figura **5-7**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, se requiere que la masa del leptón exótico sea $m_E > 221.32\,GeV$. Este valor límite se obtiene al resolver para m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096}s_\beta^4\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^8} < 1.7 \times 10^{-8} \tag{5-4}$$

5.2.2. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-$

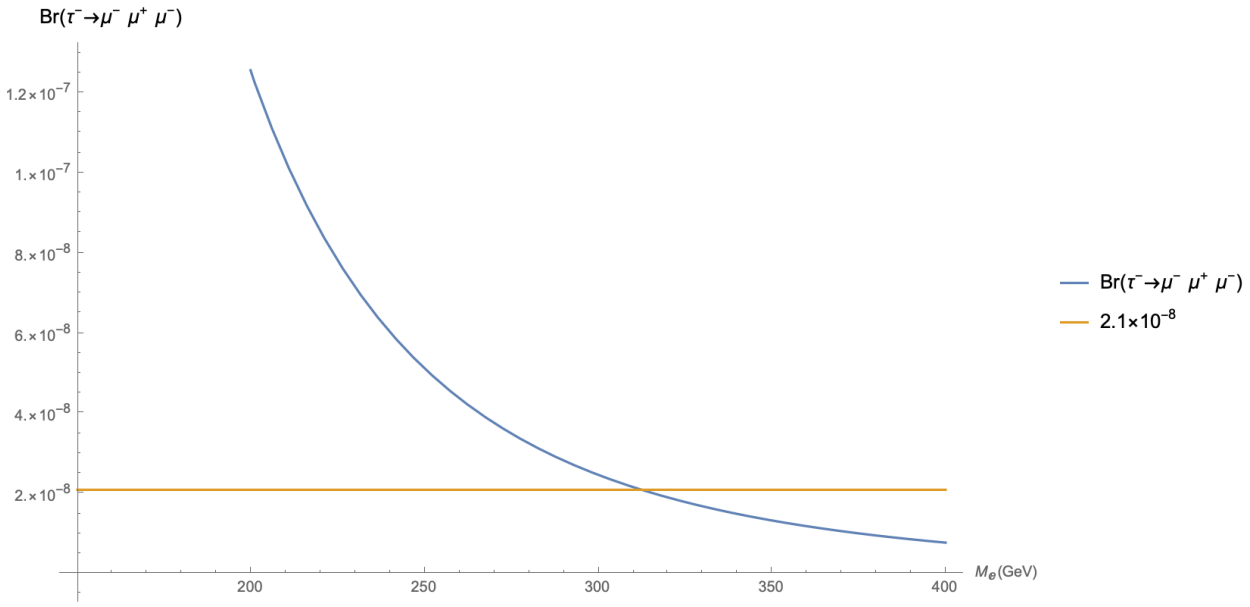


Figura 5-8.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-$.

Dado que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y teniendo en cuenta que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 2.1×10^{-8}[36, 41], se procedió a graficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $150\,GeV < m_E < 400\,GeV$. En la Figura **5-8**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow \mu^-\mu^+\mu^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, se requiere que la masa del leptón exótico sea $m_E > 312.48\,GeV$. Este valor límite se obtuvo al resolver para m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4} < 2.1\times10^{-8} \tag{5-5}$$

5.2.3. Proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$

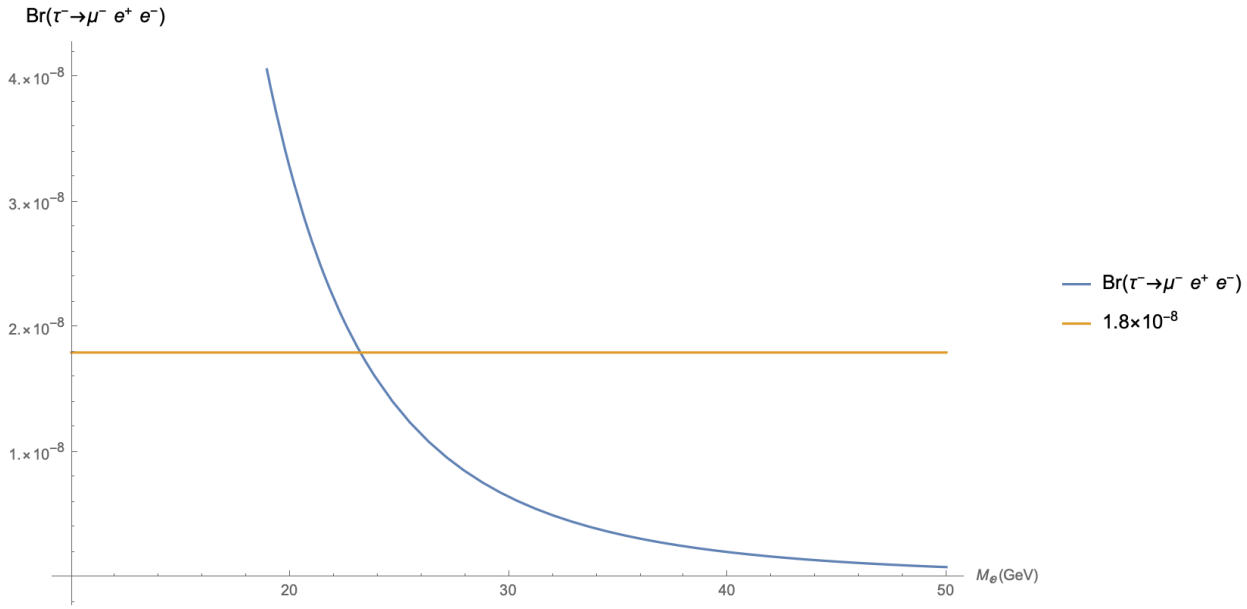


Figura 5-9.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$.

Debido a que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y teniendo en cuenta que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 1.8×10^{-8}[36, 41], se procedió a graficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $10\,GeV < m_E < 50\,GeV$. En la Figura **5-9**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, basta con que la masa del leptón exótico sea $m_E > 23.21\,GeV$. Por lo tanto, de este decaimiento en particular no se obtuvo ninguna restricción para el valor mínimo que puede tomar la masa del leptón exótico, en tanto que la cota experimental para la masa de un leptón exótico es del orden de $10^2\,GeV$. Cabe mencionar que el valor límite anteriormente reportado para la masa del citado leptón cargado, se obtuvo al resolver m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4} < 1.8 \times 10^{-8} \tag{5-6}$$

5.2.4. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-$

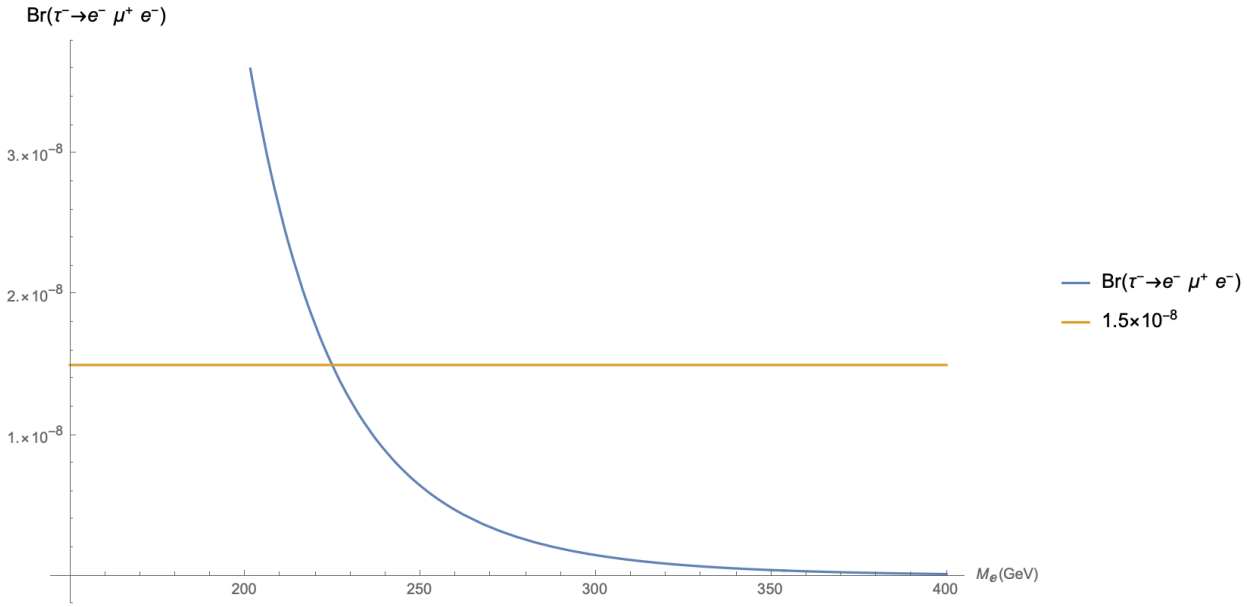


Figura 5-10.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-$.

Teniendo en cuenta que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y dado que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 1.5×10^{-8}[36, 41], se procedió a gráficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $150\,GeV < m_E < 400\,GeV$. En la Figura **5-10**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+e^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, se requiere que la masa del leptón exótico sea $m_E > 224.80\,GeV$. Este valor límite se obtuvo al resolver m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{129195}{4096}s_\beta^4\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4} < 1.5\times10^{-8} \tag{5-7}$$

5.2.5. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-$

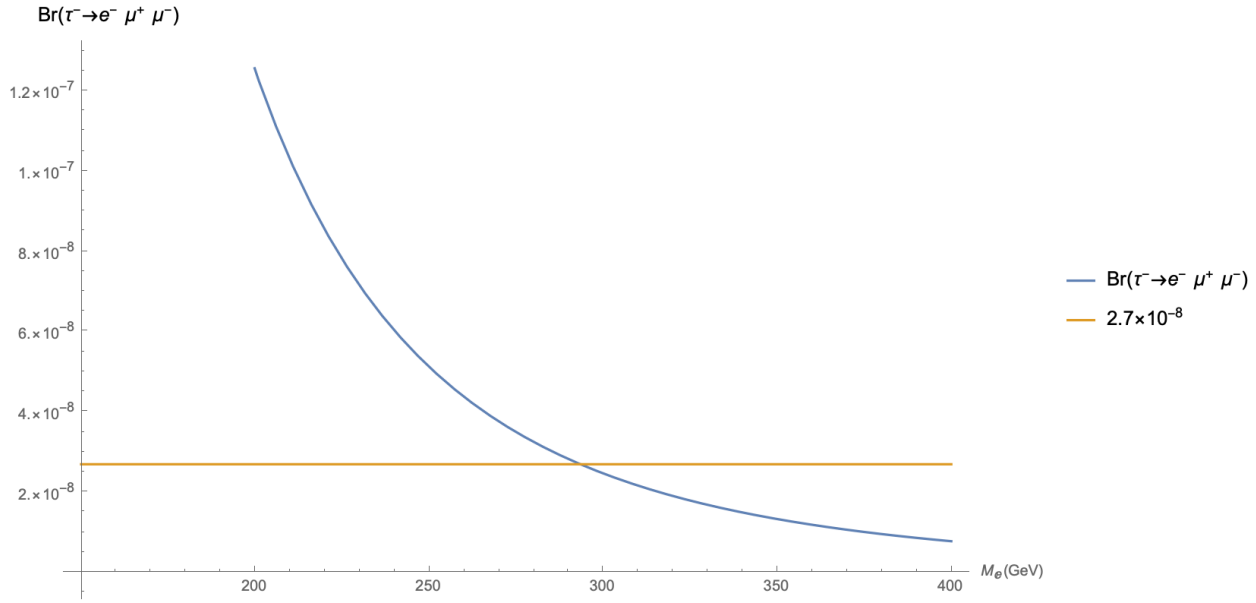


Figura 5-11.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-$.

Dado que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y teniendo en cuenta que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 2.7×10^{-8}[36, 41], se procedió a graficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $150\,GeV < m_E < 400\,GeV$. En la Figura **5-11**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow e^-\mu^+\mu^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, se requiere que la masa del leptón exótico sea $m_E > 293.45\,GeV$. Este valor límite se obtuvo al resolver m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_\mu^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4} < 2.7\times10^{-8} \tag{5-8}$$

5.2.6. Proceso $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$

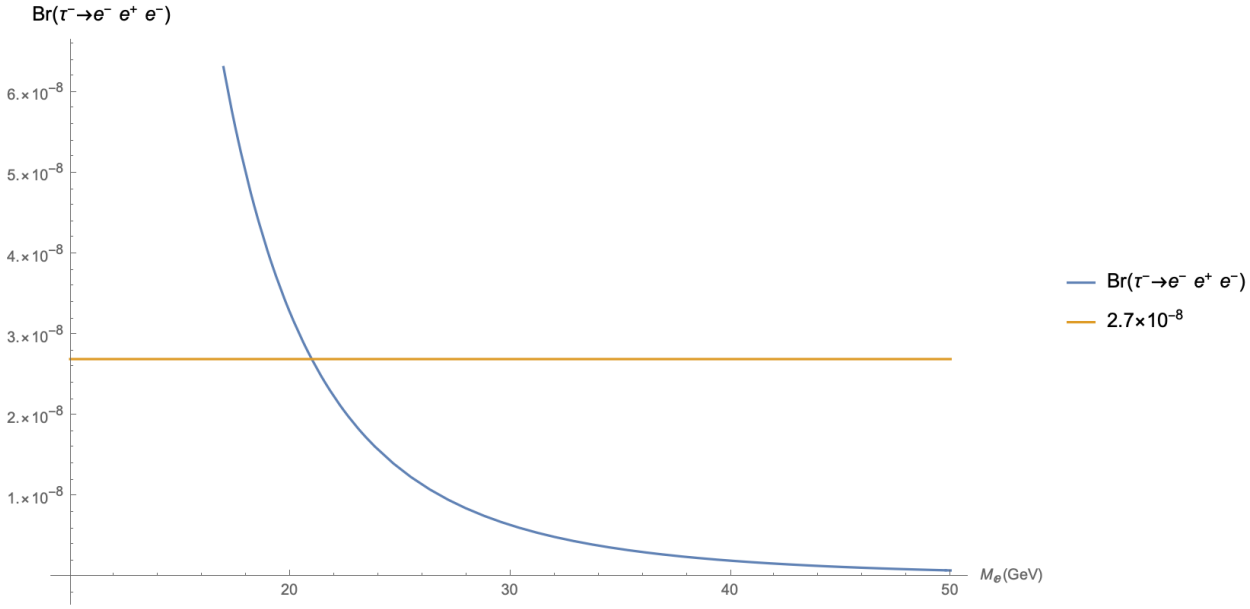


Figura 5-12.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$.

Teniendo en cuenta que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y en tanto que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 2.7×10^{-8}[36, 41], se procedió a graficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $150\,GeV < m_E < 400\,GeV$.

En la Figura **5-12**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, basta con que la masa del leptón exótico sea $m_E > 20.98\,GeV$. Por lo tanto, de este decaimiento en particular no se obtuvo ninguna restricción para el valor mínimo que puede tomar la masa del leptón exótico, en tanto que la cota experimental para la masa de un leptón exótico es del orden de $10^2\,GeV$. Cabe mencionar que el valor límite anteriormente reportado para la masa del citado leptón cargado, se obtuvo al resolver m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{99}{256}s_\beta^2\frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\tau}{\widetilde{m}_E^4} < 2.7 \times 10^{-8} \tag{5-9}$$

5.2.7. Proceso $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$

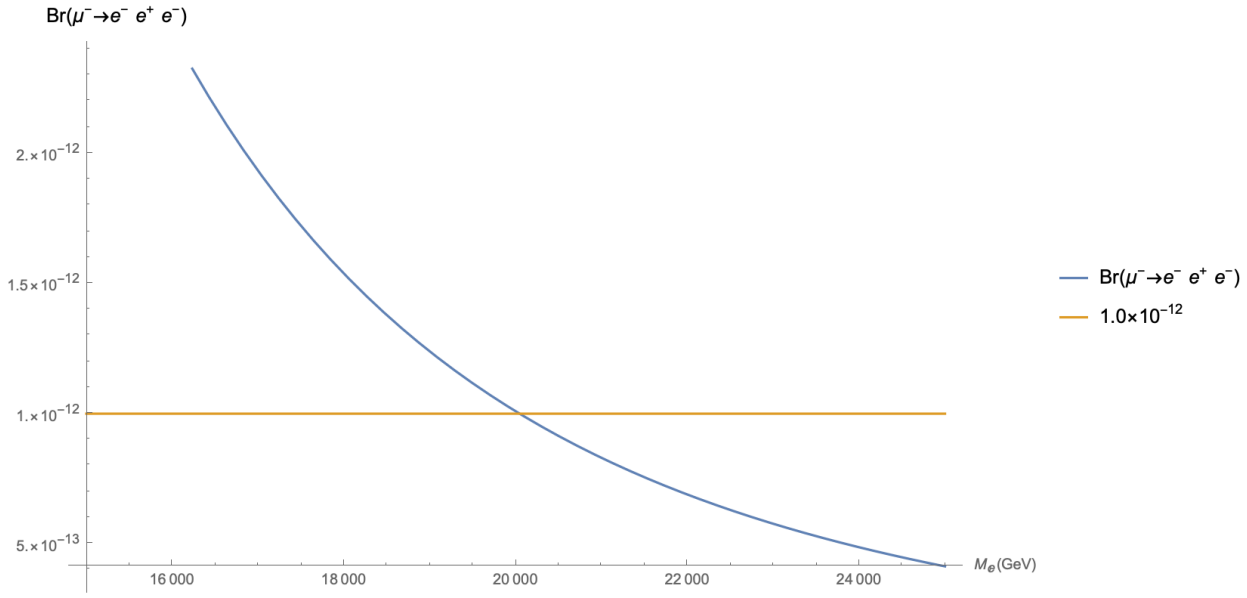


Figura 5-13.: Gráfica del *Branching Ratio* en función de la masa del leptón exótico m_E, para el proceso $\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$.

Debido a que $m_{Heavy\ Lepton} > 100.8\,GeV$[36], tal como lo indica el *Paticle Data Group*, y dado que la cota superior para el *Branching Ratio* del proceso en consideración es 1.0×10^{-12}[36, 40], se procedió a graficar el *Branching Ratio* del decaimiento analizado en función de la masa del leptón exótico, siento la ventana de análisis $15000\,GeV < m_E < 25000\,GeV$.

En la Figura **5-13**, se observa la intersección entre el valor experimental límite (recta horizontal) y la curva de la gráfica $Br(\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-)$ (función decreciente). Esto implica que para que el *Branching Ratio* (obtenido a partir del Modelo Extendido No-Universal $U(1)_X$) sea compatible con la cota superior experimental, es decir, sea menor a la mencionada cota superior, se requiere que la masa del leptón exótico sea $m_E > 20046\,GeV$. Este valor límite se obtuvo al resolver m_E en la desigualdad:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{14355}{512}s_\beta^2\frac{m_e^2}{v^2}\frac{m_\mu}{\widetilde{m}_E^4} < 1.0 \times 10^{-12} \tag{5-10}$$

5.2.8. Análisis

A partir de los resultados encontrados para los anteriores decaimientos leptónicos a tres cuerpos que Violan el Sabor de Leptón Cargado, más específicamente, con base en las diferentes cotas mínimas para la masa del leptón exótico m_E (obtenidas por decaimiento), es factible establecer por tanto que los *Bracnhing Ratios* calculados para los diferentes decaimientos

leptónicos anteriormente citados, son compatibles con las cotas máximas reportadas en el *Particle Data Group* para cada proceso de decaimiento, al considerar como cota mínima para la masa del leptón exótico $m_E > 20046\,GeV$ en cualquier proceso de decaimiento. En resumen, lo anterior resulta en una predicción del modelo para la masa del leptón exótico arriba de la cota reportada en el PDG. La siguiente tabla ejemplifica y esclarece la anterior idea, considerando $m_E = 20050\,GeV$:

Decaimiento	$Br.$ Calculado	$Br.$ Experimental	$\Gamma_i/\Gamma;(\widetilde{m}_E = 900)$	$\Gamma_i/\Gamma;(\widetilde{m}_E = 20050)$
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ \mu^-$	$\frac{9.8\times10^{10}}{\widetilde{m}_E^8}$	$< 1.7 \times 10^{-8}$	2.27×10^{-13}	3.75×10^{-24}
$\tau^- \longrightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$	$\frac{200.21}{\widetilde{m}_E^4}$	$< 2.1 \times 10^{-8}$	3.05×10^{-10}	1.24×10^{-15}
$\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$	$\frac{5.23\times10^{-3}}{\widetilde{m}_E^4}$	$< 1.8 \times 10^{-8}$	7.97×10^{-15}	3.24×10^{-20}
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ e^-$	$\frac{9.78\times10^{10}}{\widetilde{m}_E^8}$	$< 1.5 \times 10^{-8}$	2.27×10^{-13}	3.75×10^{-24}
$\tau^- \longrightarrow e^- \mu^+ \mu^-$	$\frac{200.21}{\widetilde{m}_E^4}$	$< 2.7 \times 10^{-8}$	3.05×10^{-10}	1.24×10^{-15}
$\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$\frac{5.23\times10^{-3}}{\widetilde{m}_E^4}$	$< 2.7 \times 10^{-8}$	7.97×10^{-15}	3.24×10^{-20}
$\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$	$\frac{161477}{\widetilde{m}_E^4}$	$< 1.0 \times 10^{-12}$	2.46×10^{-7}	9.99×10^{-13}

Tabla 5-1.: Tabla con el resumen de los canales de decaimiento y *Branching Ratio* para procesos leptónicos a tres cuerpos con Violación de Sabor de Leptón Cargado.

Por otro lado, al comparar entre los diferentes procesos de decaimiento la cota inferior obtenida para la masa del leptón exótico m_E, es posible percatarse cómo la cota obtenida para los procesos $\tau^- \longrightarrow \mu^- e^+ e^-$ y $\tau^- \longrightarrow e^- e^+ e^-$ no es de provecho, al encontrarse ésta por debajo del valor límite experimental (cota inferior). La razón principal del por qué estos dos decaimientos no contribuyen significativamente radica en la dependencia directa entre el *Branching Ratio* y la masa del electrón, la cual es del orden de $0.511 \times 10^{-3}\,GeV$. Así, al dividirse esta cantidad entre m_E^4, la respectiva contribución resulta fuertemente suprimida.

5.3. Discusión de los Resultados

5.3.1. Decaimientos Radiativos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$

Para H^+ corriendo dentro del loop, el factor de forma F_{2R} se puede aproximar a

$$2F_{2R}^{H^+} \approx 6 \times \frac{ie}{16\pi^2}\frac{1}{m_{H^+}^2} a^j b^i M_N f(\widetilde{b}) \tag{5-11}$$

donde

$$f(\widetilde{b}) = \frac{1 - \widetilde{b}^2 + 2\widetilde{b}\ln\widetilde{b}}{(1-\widetilde{b})^3},\ \ \widetilde{b} = \frac{m_N^2}{m_{H^+}^2} \tag{5-12}$$

El factor 6 corresponde a los 6 neutrinos de Majorana que corren dentro del loop, los cuales son cuasidegenerados como se encontró en el mecanismo *See-Saw* inverso (ver Capítulo 2.4). Los acoplamientos a^j y b^i son los acoples izquierdo y derecho respectivamente de los vértices $N - l - H^+$, y están dados por:
$N - e - H^+$

$$a^j = \frac{h_{2j}^{\nu e} \sin\beta}{2\sqrt{2}} \quad b^i = -\frac{h_{2i}^{\nu e} H \sin\beta\, \upsilon_2\, \sin\theta_{e\tau}}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \approx -\frac{h_{2i}^{\nu e} H \sin\beta\, m_\tau\, \sin\theta_{e\tau}}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \tag{5-13}$$

$N - \mu - H^+$

$$a^j = \frac{h_{2j}^{\nu \mu} \sin\beta}{2\sqrt{2}} \quad b^i = \frac{h_{2i}^{\nu \mu} h \sin\beta\, \upsilon_2\, \sin\beta}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \approx \frac{h_{2i}^{\nu \mu} m_\mu \sin^2\beta}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \tag{5-14}$$

$N - \tau - H^+$

$$a^j = 0 \qquad b^i = \frac{H\upsilon_2 \sin\beta\cos\theta_{e\tau}}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \approx \frac{m_\tau \sin\beta\cos\theta_{e\tau}}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi} \tag{5-15}$$

Los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ son cero para este loop. Por tanto, miramos la contribución de los bosones W, Z y H^0.

La razón del desacople del leptón τ en la interacción $N - H^+ - \tau$ se debe a la rotación de los neutrinos en el mecanismo *See-Saw* (ver ecuación 2-110), el cual es producto de la simetría propuesta

$$\widetilde{m}_D = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_{2e}^{\nu e} & h_{2\mu}^{\nu e} & 0 \\ h_{2e}^{\nu \mu} & h_{2\mu}^{\nu \mu} & 0 \\ h_{2e}^{\nu \tau} & h_{2\mu}^{\nu \tau} & 0 \end{bmatrix} \tag{5-16}$$

Observando la rotación de los leptones $e - E$ a autoestados de masa vemos que el leptón τ no se mezcla con el leptón exótico E en el sector escalar, Por tanto, todos los loops para los procesos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ con campos escalares son cero.
Entonces la contribución para los dos procesos anteriormente citados provienen del intercambio de un bosón W o Z dentro del loop.
Para la contribución con el bosón Z, los decaimientos con $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ son proporcionales a $\mathcal{R}^{ij}$ (ver ecuaciones 4-14, 4-15), pero ésta tiene ceros en la tercera fila y tercer columna, por tanto también la contribución es cero. Finalmente, la contribución proveniente del loop para los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ en lo que el bosón cargado $W^\pm$ corre dentro del loop está dado por:

$$2F_{2R}^{W\,ij}\, m_i \approx i\frac{e\, G_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \times 10^{-5}\, R_W^{ij}\, g(b)\, m_i \tag{5-17}$$

donde

$$\begin{aligned} R_W^{\tau e} \approx 1.4, \qquad R_W^{\tau\mu} \approx 1.6 \\ g(b) = \frac{5 - 24b + 39b^2 - 20b^3 - 6b^2(1-2b)\ln b}{3(1-b)^4}; \quad b = \frac{m_N^2}{m_W^2}. \end{aligned} \tag{5-18}$$

Como se puede ver de los factores R_W^{ij}, los factores de forma $F_{2R}^{W\tau\mu} \approx F_{2R}^{W\tau e}$ son del mismo orden aproximadamente.
Finalmente, la razón de decaimiento (*Branching Ratio*) es aproximadamente del orden:

$$\begin{aligned} Br(\tau \longrightarrow \mu(e)\,\gamma) &\approx \frac{m_\tau^3}{16\Gamma_\tau} \left| F_{2R}^W\, m_\tau \right|^2 \\ &\approx \frac{G_F^2\,\alpha\, m_\tau^5}{128\pi^4\Gamma_\tau}\, 2.56 \times 10^{-10}\, |g(b)|^2 \end{aligned} \tag{5-19}$$

usando los valores

$$\begin{aligned} G_F = 1.166 \times 10^{-5}\, GeV^{-2} \qquad \Gamma_\tau \approx 2.2 \times 10^{-12} GeV \\ \alpha = \frac{1}{137} \qquad m_\tau = 1.777\, GeV \\ m_N \approx 1000\, GeV \qquad g(b) \approx 0.0896 \end{aligned} \tag{5-20}$$

con lo que la razón de decaimiento $\tau \longrightarrow \mu(e)\,\gamma$ es del orden de

$$Br(\tau \longrightarrow \mu(e)\,\gamma) \approx 1.8 \times 10^{-13} \tag{5-21}$$

Los valores experimentales son del orden

$$\begin{aligned} Br(\tau \longrightarrow \mu\,\gamma) \leqslant 4.2 \times 10^{-8} \\ Br(\tau \longrightarrow e\,\gamma) \leqslant 3.3 \times 10^{-8}. \end{aligned} \tag{5-22}$$

Como podemos ver, el valor predicho por el modelo está a 5 ordenes de magnitud por abajo de la cota superior experimental. Dicha predicción tan pequeña es que el leptón tau (τ) está suprimido en los acoples del modelo debido a la simetría del modelo, como ya se explico en cada contribución de los loops para los factores de forma F_{2R}. Como ya se mencionó, el acople $W - N - l$, es decir, el acople del bosón cargado $W^\pm$ con el neutrino de Majorana y el leptón ordinario proviene del acople $W - \nu - l$, pero al realizar las rotaciones de los neutrinos en el mecanismo $See - Saw$ inverso a autoestados de masa (ver ecuación 2-110), se cambia el neutrino ordinario por un neutrino de Majorana, el cual queda muy suprimido de manera que el vértice se pude reescribir en función de los parámetros de la oscilación de neutrinos, lo cual evita introducir muchos parámetros libres a mano. Dicha forma de expresar este acoplamiento $W - N - l$ es presentado por primera vez y es un resultado nuevo de la presente tesis.

5.3.2. Decaimientos Radiativos $\mu \longrightarrow e\,\gamma$

Para este decaimiento, el loop más importante proviene del intercambio del bosón cargado $H^{\pm}$ con los neutrinos de Majorana N_i, es decir:

$$\begin{aligned} Br(\mu \longrightarrow e\gamma) &\approx \frac{m_\mu^3}{16\pi\Gamma}\left|F_{2R}^{H^\pm} m_\mu\right|^2 \\ &\approx 36\frac{m_\mu^3}{16\pi}\frac{m_N^2}{{m_{H^+}}^4\Gamma_\mu}\frac{e^2}{(16\pi^2)^2}\left|f(\widetilde{b})\right|^2 (a^j b^i)^2 \\ &\approx \frac{9\,\alpha}{2048\pi^4}\frac{m_\mu^5 m_N^2}{{m_{H^+}}^4\Gamma_\mu}\frac{\sin^6\beta}{(2h_{\chi_1}\upsilon_\chi)^2}(h_{2e}^{\nu e}\,h_{2\mu}^{\nu\mu})^2\left|f(\widetilde{b})\right|^2 \end{aligned} \tag{5-23}$$

donde

$$\begin{aligned} \upsilon_\chi \approx 7\,Tev, \quad {h\chi_1}^2 \approx 0.02, \quad \Gamma_\mu \approx 3\times 10^{-19}\,GeV \\ m_\mu = 0.105\,GeV, \quad \tan\beta = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \approx \frac{m_t}{m_b} \approx 34 \longrightarrow \sin\beta \approx 1 \end{aligned} \tag{5-24}$$

Usando cotas del proceso $b \longrightarrow s\,\gamma$ se obtiene una cota para la masa del Higgs cargado de $m_{H^+} \gtrsim 800\,GeV$ [93].
Tomando valores para las masas de m_{H^+} y $m_N \approx 1\,TeV$, el valor aproximado para $f(\widetilde{b})$ se puede tomar del orden de $f(\widetilde{b}) \approx 0.1$, de manera que

$$Br(\mu \longrightarrow e\gamma) \approx 1.93\times 10^{-6}(h_{2e}^{\nu e}\,h_{2\mu}^{\nu\mu})^2 \tag{5-25}$$

Usando la cota superior experimental

$$Br(\mu \longrightarrow e\gamma) \leqslant 4.2\times 10^{-13} \tag{5-26}$$

Por tanto, esta predicción del modelo permite poner cotas superiores a los acoples del modelo las cuales sean consistentes con los datos experimentales actuales:

$$h_{2e}^{\nu e}\,h_{2\mu}^{\nu\mu} \leqslant 3.3\times 10^{-3} \tag{5-27}$$

esto permite acotar los acoples de Yukawa los cuales son de un orden tal que

$$h_{2e}^{\nu e} \approx h_{2\mu}^{\nu\mu} \leqslant 5.7\times 10^{-2}. \tag{5-28}$$

5.3.3. Decaimiento en 3-Cuerpos

Para reducir el número de parámetros del modelo y hacer un análisis más sencillo, se consideró la contribución más importante para el decaimiento de un leptón en tres cuerpos con cambio de sabor. Este decaimiento tiene una amplitud de la forma

$$A \approx \sum_{k=h,H,A^0\ldots} (\overline{l_i}\,V\,l_j) \quad \cdot\frac{1}{{m_{H_k}}^2}\cdot \quad (\overline{l'}\,V\,l'') \tag{5-29}$$

pero para la suma sobre Higgses neutros solo se consideró la contribución del Higgs del Modelo Estándar.
Al elevar al cuadrado la amplitud, es decir, se eleva al cuadrado la suma anterior de manera que se tendría términos proporcionales a

$$\frac{1}{{m_{H_k}}^4}, \frac{1}{{m_{h_{SM}}}^2 {m_{H_k}}^2} \tag{5-30}$$

donde el primer término corresponde a la contribución de cada Higgs, donde la contribución de los otros Higgses respecto a h_{SM} es del orden de

$$(\frac{m_h}{m_{H_k}})^4 \tag{5-31}$$

Si consideramos $m_k \approx 1\,TeV$ entonces la contribución de nueva física respecto al h_{SM} es del orden de 10^{-4}. En relación al término de interferencia, la segunda fracción de la ecuación (5-30), la contribución comparada con la del h_{SM} es del orden de

$$\frac{m_{h_{SM}}^2}{{m_{H_k}}^2} \approx 10^{-2}. \tag{5-32}$$

Por lo anterior, solo se tendrá en cuenta para la amplitud del *Branching Ratio* con cambio de sabor la contribución con bosón intermediario del Modelo Estándar

$$(\overline{l_i}\, V\, l_j) \quad \cdot \frac{1}{{m_{h_{SM}}}^2} \cdot \quad (\overline{l'}\, V\, l''). \tag{5-33}$$

Hay dos fracciones de decaimiento con doble supresión de cambio de sabor:

$$\begin{aligned} &\tau \longrightarrow \mu\, e\, \mu \\ &\tau \longrightarrow e\, \mu\, e \end{aligned} \tag{5-34}$$

y las otras fracciones de decaimiento solo tienen una supresión debido al cambio de sabor:

$$\begin{aligned} &\tau \longrightarrow \mu\, \mu\, \mu, \;\; \tau \longrightarrow \mu\, e\, e \\ &\tau \longrightarrow e\, e\, e, \;\; \tau \longrightarrow e\, \mu\, \mu \\ &\mu \longrightarrow e\, e\, e \end{aligned} \tag{5-35}$$

Al diagonalizar la matriz 4×4 del sector cargado de los leptones, ecuaciones (2-60), (2-66), (2-71), el cambio de base se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{e}_{L(R)} &= V_{L,SM} \vec{e}^{\,0}_{L(R)} + \vec{q}_{L(R)} E^0_{L(R)} \\ E_{L(R)} &= -\vec{q}_{L(R)} \vec{e}^{\,0}_{L(R)} + E^0_{L(R)} \end{aligned} \tag{5-36}$$

Así, se reescribe el Lagrangiano de Yukawa con la interacción del h_{SM}, dado que $V_{L(R),SM}$ es cuasi-unitaria, y los cambios de sabor provenientes de la rotación $\vec{e}_{L(R)}$, $\vec{e}^{\,0}_{L,R}$ son del orden de cero. Los cambios de sabor con h_{SM} son de la forma

$$-\mathcal{L}_Y \approx (q_{11} \overline{e}^{\,0\,e}_L + q_{21} \overline{e}^{\,0\,\mu}_L) \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} h_{SM} E^0_R + h.c. \tag{5-37}$$

De la masa del electrón e y del leptón exótico E tenemos:

$$\Lambda \approx 2 \times 10^2 \, \upsilon_\chi, \qquad m_E \approx \frac{H_1}{\sqrt{2}} \, \upsilon_\chi \tag{5-38}$$

Por tanto, de la matriz 4×4 de los leptones cargados se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{q}_R &\approx \begin{pmatrix} \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_\chi \Lambda} \\ \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_\chi^2} \\ \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_\chi \Lambda} \end{pmatrix} \approx \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_\chi^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} 10^{-2} \\ 6 \\ \frac{1}{2} 10^{-2} \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{m_t m_\tau}{m_E^2} \times 10^{-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 18 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5-39}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y \approx & \frac{3}{2} \frac{q_{11} \sin\beta}{\sqrt{2}} \, \frac{1}{m_E^2 \, (GeV)} \, \overline{e}(12 P_L + P_R) \mu \, h_{SM} + \; h.c. \\ & + \frac{3}{2} \frac{q_{21} \sin\beta}{\sqrt{2}} \, \frac{1}{m_E^2 \, (GeV)} \, \overline{e} P_R \tau + \frac{3}{2} \frac{q_{11} \sin\beta}{\sqrt{2}} \, \frac{1}{m_E^2 \, (GeV)} \, \overline{\mu} P_R \tau + \; h.c. \end{aligned} \tag{5-40}$$

Volviendo a la razón de decaimiento de los leptones cargados, los decaimientos con doble supresión por cambio de sabor de leptón cargado van como

$$\frac{1}{m_E^8} \tag{5-41}$$

y los leptones que decaen con una sola supresión por cambio de sabor de leptón cargado van como

$$\frac{1}{m_E^4}, \tag{5-42}$$

como se ilustra en la tabla **4-4**.
En aras de simplificar el espacio de parámetros, se consideró $q_{11} \approx q_{21} \approx 1$ y las aproximaciones $\upsilon_1 \approx m_t$ y $\upsilon_2 \approx m_\tau$.

6. Conclusiones

El presente modelo con una simetría horizontal $U(1)_X$ es libre de anomalías incluyendo campos fermiónicos singletes adicionales al Modelo Estándar, como dos quarks exóticos tipo down y uno tipo up y en el sector leptónico dos leptones cargados exóticos, un neutrino derecho y un neutrino de Majorana por familia (neutrino electrónico, muónico y tauónico). Para obtener un *ansatz* de masa se introdujo una simetría Z_2. Para dar masa al sector up y down se introducen dos dobletes de Higgs y para romper la simetría $U(1)_X$ un singlete escalar.
La masa del electrón, quark up, down y strange son cero a nivel árbol pero éstas se generan mediante Lagrangianos efectivos. Para las masas de los neutrinos activos o izquierdos se implementa un mecanismo $See-Saw$ inverso ($Inverse\ Seesaw\ Mechanism$) al introducir ν_R, N lo cual implica diagonalizar una matriz 9×9. El modelo explica satisfactoriamente la oscilación de neutrinos obteniendo correctamente el Δm^2 y la matriz $PMNS$ [32].
Los *ansatz* de masa introducidos y la simetría horizontal $U(1)_X$ prácticamente desacoplan el leptón tau (τ) y no se generan cambios de sabor de leptón cargado, por esta razón los procesos radiativos son nulos cuando circulan Higgses neutros en el loop. Solo la contribución del bosón cargado $W^{\pm}$ circulando dentro del loop produce los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$. Estas razones de decaimiento son del mismo orden, es decir,

$$Br(\tau \longrightarrow e(\mu)\,\gamma) \leqslant 10^{-8} \tag{6-1}$$

el cual está a 5 ordenes de magnitud por debajo de la cota superior experimental
En el presente modelo por primera vez se escribe el vértice de interacción $W-N-l$ de nueva física en función de los parámetros de la oscilación de neutrinos, lo cual restringe enormemente el número de parámetros de nueva física y haciendo la predicción más clara.
Para los decaimientos $\mu \longrightarrow e\,\gamma$ el factor de forma más importante es del loop donde circula el Higgs cargado $H^{\pm}$ y depende de los vértices $H^{+}-N-\mu$, $H^{+}-N-e$. Estos vértices generan una dependencia del orden

$$F_{2R}^{H^{\pm}}\, m_{\mu} \approx m_N \tag{6-2}$$

en cambio los otros factores de forma para el intercambio de Higgs dentro del loop son proporcionales a la masa del leptón muón (μ). Por esta razón $F_{2R}^{H^{\pm}}$ da el orden de magnitud correcto.

Ahora bien, para el decaimiento a tres cuerpos se mostró que la amplitud más importante proviene de un bosón intermediario correspondiente al Higgs del Modelo Estándar. Los decai-

mientos con doble supresión de sabor de leptón cargado predicen una razón de decaimiento proporcional a $\frac{1}{m_E^8}$ y los que tienen solo una supresión de sabor de leptón cargado son del orden de $\frac{1}{m_E^4}$.

Para los decaimientos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$, $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ se hace prácticamente una predicción dado que los parámetros libres se escriben en función de la oscilación de neutrinos. La nueva física está en el v.e.v. $\upsilon_\chi \approx 7\,TeV$, valor consistente con la cota de m_E de LHC, y tomado para obtener el orden correcto de la masa de los neutrinos activos [32].

Para el decaimiento $\mu \longrightarrow e\,\gamma$ los Yukawas de nueva física que están en el loop son $h_{2e}^{\nu e}$ y $h_{2\mu}^{\nu\mu}$ y usando la cota superior experimental se encontró que

$$h_{2e}^{\nu e}\,h_{2\mu}^{\nu\mu} \leqslant 5 \times 10^{-3}. \tag{6-3}$$

Ahora bien, los decaimientos de tres cuerpos dependen de los cambios de sabor de nueva física en los vértices. Dichos cambios de sabor dependen de Λ y υ_χ correspondientes a la escala de la teoría efectiva que da masa a los fermiones ligeros (fermiones del Modelo Estándar) y la escala que rompe la simetría $U(1)_X$. A partir de la masa del electrón se encuentra la predicción $\Lambda \approx 10^2\,\upsilon_\chi$. Para simplificar el análisis se cambió m_E por υ_χ dependiendo de un Yukawa que se toma del orden de 1 (ecuación (2-78)).

Como se mostró anteriormente, los parámetros de nueva física de los procesos $\tau \longrightarrow \mu\,\gamma$ y $\tau \longrightarrow e\,\gamma$ dependen de la oscilación de neutrinos y de m_N. En cambio, los parámetros de los decaimientos a tres cuerpos de nueva física dependen de los acoples de Yukawa q_{11} y q_{21} relacionados con el cambio de sabor generado por $e - E$, ecuaciones (2-57) y (2-59), pero sin perdida de generalidad se tomaron del orden de 1. Dichas reglas de Feynman van como $\frac{1}{\upsilon_\chi}$ el cual se cambio por $\frac{1}{m_E}$ para el análisis numérico. Cabe aclarar que es una forma *naive* de hacer las cosas, y además, las partículas exóticas adquieren masa a esta escala de rompimiento de simetría. Las diferencias están marcadas por los acoples de Yukawa. Un ejemplo interesante es la escala *electroweak* (electrodébil), donde $\upsilon \approx 243\,GeV$, sin embargo, la masa del quark top es aproximadamente de $174\,GeV$ y la masa del bosón de gauge neutro Z_0 es $91\,GeV$. Como la masa del leptón exótico m_E es un parámetro libre, ésta puede tomar diferentes valores arriba de la escala de los TeV o incluso por debajo de los TeV. Vemos que el quark bottom adquiere masa a la escala *electroweak*, sin embargo su masa es del orden de los $5\,GeV$

Finalmente, es importante mencionar que en el modelo utilizado en la presente tesis, no hay una relación directa de parámetros para los decaimientos $l_i \longrightarrow l_j\,\gamma$ y $l_i \longrightarrow l_j\,l'\,l''$.

A. Anexo: Diagonalización por bloques

Un matriz compuesta por bloques de la forma

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & D \end{pmatrix}, \tag{A-1}$$

donde A, C y D representan bloques de la matriz puede ser diagonalizada a través de una rotación unitaria, que satisface la relación $VV^\dagger = 1$. V se escribe de la forma [87]

$$V \approx \begin{pmatrix} I & F \\ -F^T & I \end{pmatrix}, \tag{A-2}$$

donde I es la matriz identidad y F una rotación que satisface la condición $F<<1$. Tomando el producto $V^\dagger M^2 V$, y considerando sólo los términos lineales en F, se obtiene

$$V^\dagger M^2 V = \begin{pmatrix} A - CF^T - FC^T & C + AF - FD \\ C^T + F^T A - DF^T & D + C^T F + F^T C \end{pmatrix}. \tag{A-3}$$

En consecuencia, para que los términos no-diagonales sean cero se debe satisfacer que

$$C + AF - FD = 0, \tag{A-4}$$

lo cual se cumple siempre que la condición jerárquica $A<<C<<D$ sea cierta. Con esta condición es posible despreciar el término AF de la Ecuación (A-4) y obtener

$$F \approx CD^{-1}. \tag{A-5}$$

Así, la matriz diagonalizada toma la forma

$$V^\dagger M^2 V \approx \begin{pmatrix} A - CD^{-1}C^T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \tag{A-6}$$

B. Anexo: Reglas de Feynman - Descripción Complementaria

Las reglas de Feynman que se tienen en cuenta para el computo de los procesos a dos cuerpos se presentan a continuación:

B.0.1. Reglas para Acoples con el Bosón Escalar h_{SM}

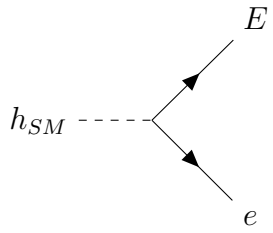


Figura B-1.: Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe como $-i(a^i P_L + b^i P_R)$

$$-i\frac{\sin\beta\cos\theta_{e\mu}}{\sqrt{2}}P_L \tag{B-1}$$

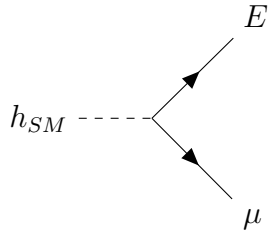


Figura B-2.: Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe como $-i(a^i P_L + b^i P_R)$

$$-i\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\cos\theta_{e\mu}P_L + \frac{2h\sin\theta_{e\mu}m_t\cos\beta}{\sqrt{2}m_E}P_R\right) \tag{B-2}$$

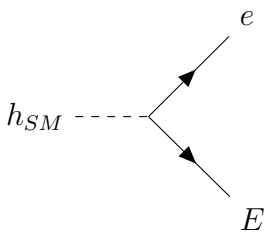


Figura B-3.: Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$

$$-i \sin\beta \frac{\cos\theta_{e\mu}}{\sqrt{2}} P_R \tag{B-3}$$

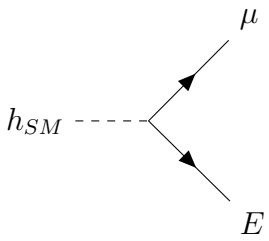


Figura B-4.: Vértice Escalar (bosón de Higgs) con Violación de Sabor de Leptón Cargado. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^j P_R + b^j P_L)$

$$-i \left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \cos\theta_{e\mu} P_R + \frac{2h \sin\theta_{e\mu} m_t \cos\beta}{\sqrt{2} m_E} P_L \right) \tag{B-4}$$

No hay una regla de Feynman $\tau - h - E$ debido a que debió estar muy suprimida. La simetría $U(1)_X \otimes \mathcal{Z}_2$ desacopló parcialmente el leptón tau de los otros leptones. Los acoples debieron ser por las rotaciones pero quedan muy suprimidos.

B.0.2. Reglas para Acoples con el Bosón Escalar Cargado $H^{\pm}$

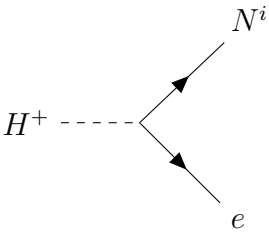


Figura B-5.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^i P_L + b^i P_R)$

$$-i\left(\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}P_L - \frac{H\upsilon_2}{2h_{\chi_1}}\frac{\sin\beta}{\upsilon_\chi}\sin\theta_{e\tau}P_R\right) \tag{B-5}$$

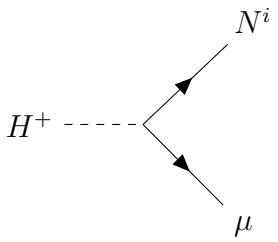


Figura B-6.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^iP_L + b^iP_R)$

$$-i\left(\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}P_L - \frac{h\sin\beta\upsilon_2}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi}\sin\theta_{e\tau}P_R\right) = -i\left(\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}P_L - \frac{\sin\beta m_\tau}{m_{H^\pm}}\sin\theta_{e\tau}P_R\right) \tag{B-6}$$

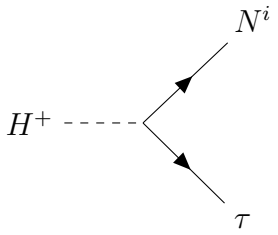


Figura B-7.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^iP_L + b^iP_R)$

$$i\frac{H\upsilon_2\sin\beta}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi}\cos\theta_{e\tau}P_R \tag{B-7}$$

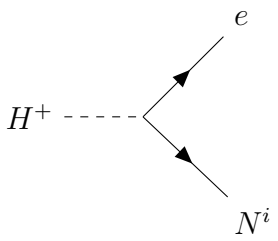


Figura B-8.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^jP_R + b^jP_L)$

$$-i\left(\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}P_R - \frac{H\upsilon_2}{2h_{\chi_1}}\frac{\sin\beta}{\upsilon_\chi}\sin\theta_{e\tau}P_L\right) \tag{B-8}$$

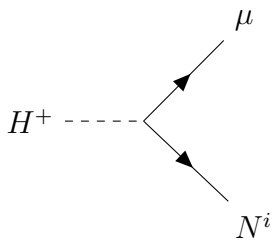


Figura B-9.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^jP_R + b^jP_L)$

$$-i\left(\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}P_R - \frac{\sin\beta m_\tau}{m_{H^\pm}}\sin\theta_{e\tau}P_L\right) \tag{B-9}$$

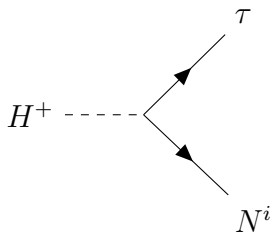


Figura B-10.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón escalar cargado $H^{\pm}$. La regla de Feynman general se escribe $-i(a^jP_R + b^jP_L)$

$$i\frac{H\upsilon_2\sin\beta}{2h_{\chi_1}\upsilon_\chi}\cos\theta_{e\tau}P_L \tag{B-10}$$

B.0.3. Reglas para Acoples con el Bosón Z

El factor de $V^T_{L,SM}\vec{q}^T_L \approx \frac{m_t}{m_E}$ en cambio el factor de $V^T_{R,SM}\vec{q}^T_R \approx \frac{m_t}{m_E}\,\frac{m_\mu}{m_E}$ quedaría supremamente suprimido en un factor del orden de

$$\frac{0.1\,Gev}{900\,GeV} \approx 10^{-4}. \tag{B-11}$$

Por tanto, las corrientes neutras de A_μ derechas las suprimimos y solo dejamos las corrientes izquierdas

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\cos\theta_W}\left(-\frac{1}{2}+x\right)\overline{e}_L V_{L,SM}^T \overline{q}_L^T \gamma_\mu E_L Z^\mu \tag{B-12}$$

en donde $x = \sin^2\theta_W$

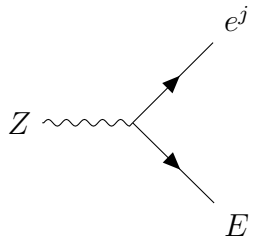


Figura B-11.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge neutro Z

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\frac{m_t}{m_E}\left(-\frac{1}{2}+x\right)\mathrm{Re}^j_{\vec{e}\ E\ Z}\,\gamma_\mu P_L \tag{B-13}$$

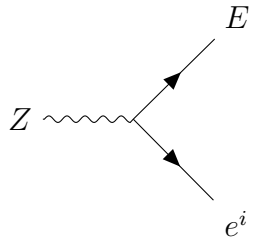


Figura B-12.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge neutro Z

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\frac{m_t}{m_E}\left(-\frac{1}{2}+x\right)\mathrm{Re}^i_{\vec{e}\ E\ Z}{}^T\,\gamma_\mu P_L \tag{B-14}$$

en donde el vértice $\tau - E - Z$ está desacoplado, el supraíndice denota $i = e, \mu$, y se define

$$\mathrm{Re}^i_{\vec{e}\ E\ Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sin\theta_{e\mu} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B-15}$$

B.0.4. Reglas para Acoples con el Bosón $W^{\pm}$

Del Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e^0}^i_L\gamma_\mu\nu_L^{0\,i}W^{mu-} + h.c. \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e}_L V^\dagger_{L,SM}\gamma_\mu W^{\mu-}\nu_L^{0\,i} + h.c. \\ &- \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e}_L\gamma_\mu V^\dagger_{L,SM}\frac{V_\nu}{h_{\chi_1}}\frac{\sqrt{2}}{\upsilon_\chi}m_D^T N_L W^{\mu-} + h.c.\end{aligned} \tag{B-16}$$

en donde $N_L = N_{1L} + N_{2L}$, se tiene los acoples,

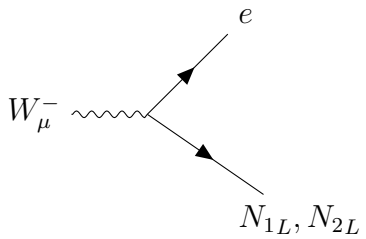


Figura B-13.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge cargado W^-

$$\begin{aligned}-ig(V^\dagger_{L,SM}V_\nu)\frac{m_D^T}{h_{\chi_1}\upsilon_\chi}\gamma_\mu P_L &= -igU_{PMNS}\frac{m_D^T}{h_{\chi_1}\upsilon_\chi}\gamma_\mu P_L \\ &= -\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma_\mu P_L\frac{\upsilon_2}{h_{\chi_1}\upsilon_\chi}R^\dagger_{W\,l}\end{aligned} \tag{B-17}$$

Cabe recordar que $(V^\dagger_{L,SM}V_\nu) = U_{PMNS}$.

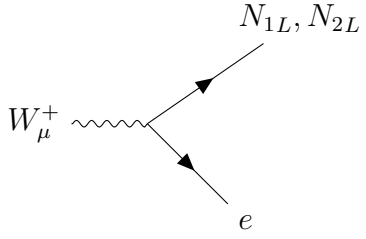


Figura B-14.: Vértice con Violación de Sabor de Leptón Cargado acoplando el bosón de gauge cargado W^-

$$\begin{aligned}-ig\frac{m_D}{h_{\chi_1}}(V^\dagger_{L,SM}V_\nu)^\dagger\gamma_\mu P_L &= -ig\frac{m_D}{h_{\chi_1}}U_{PMNS}{}^\dagger\gamma_\mu P_L \\ &\equiv -\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma_\mu P_L\frac{\upsilon_2}{h_{\chi_1}\upsilon_\chi}R_{W\,l}\end{aligned} \tag{B-18}$$

Cabe recordar que $R_{W\,l} = \widetilde{m}_D U^{\dagger}_{PMNS}$, en donde $(V^{\dagger}_{L,SM} V_{\nu}) = U_{PMNS}$ y

$$\widetilde{m}_D = \begin{pmatrix} h^{\nu e}_{2e} & h^{\nu e}_{2\mu} & 0 \\ h^{\nu \mu}_{2e} & h^{\nu \mu}_{2\mu} & 0 \\ h^{\nu \tau}_{2e} & h^{\nu \tau}_{2\mu} & 0 \end{pmatrix} \tag{B-19}$$

Bibliografía

[1] Roel Aaij, C Abellán Beteta, Thomas Ackernley, Bernardo Adeva, Marco Adinolfi, Hossein Afsharnia, Christine Angela Aidala, Salvatore Aiola, Ziad Ajaltouni, Simon Akar, et al. Test of lepton universality in beauty-quark decays. *arXiv preprint arXiv:2103.11769*, 2021.

[2] Roberto Martínez. *Teoría Cuántica de Campos*. Universidad Nacional de Colombia, 2007.

[3] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.

[4] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.

[5] Voja Radovanovic. *Problem book in quantum field theory*. Springer, 2006.

[6] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.

[7] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.

[8] Antonio Pich. The standard model of electroweak interactions. *arXiv preprint arXiv:1201.0537*, 2012.

[9] Sheldon L Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear physics*, 22(4):579–588, 1961.

[10] A Salam. Elementary particle theory, nobelsymposium No. 8. *ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksell*, 1969.

[11] Steven Weinberg. A model of leptons. *Physical review letters*, 19(21):1264, 1967.

[12] Andrzej Buras. *Gauge Theories of Weak Decays*. Cambridge University Press, 2020.

[13] Moo-Young Han and Yoichiro Nambu. Three-triplet model with double SU(3) symmetry. *Physical Review*, 139(4B):B1006, 1965.

[14] Murray Gell-Mann. The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry. 1961.

[15] Chien-Shiung Wu, Ernest Ambler, Raymond W Hayward, Dale D Hoppes, and Ralph Percy Hudson. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Physical review*, 105(4):1413, 1957.

[16] Enrico Fermi. Versuch einer theorie der β-strahlen. i. *Zeitschrift für Physik*, 88(3-4):161–177, 1934.

[17] Julian Schwinger. A theory of the fundamental interactions. *Ann. phys*, 2(407):34, 1957.

[18] H. Georgi. *Weak Interactions and Modern Particle Theory*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 2009.

[19] Peter W Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13(16):508, 1964.

[20] Hideki Yukawa. On the interaction of elementary particles. i. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17:48–57, 1935.

[21] Carlo Giunti and Chung W Kim. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.

[22] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford university press, 1994.

[23] Ferruccio Feruglio. Pieces of the flavour puzzle. *The European Physical Journal C*, 75(8):1–18, 2015.

[24] Michael Thomas Hedges, Mu2e Collaboration, et al. The mu2e experiment—searching for charged lepton flavor violation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1045:167589, 2023.

[25] Robert H Bernstein and Peter S Cooper. Charged lepton flavor violation: an experimenter's guide. *Physics Reports*, 532(2):27–64, 2013.

[26] Michel Hernández Villanueva. Experimental review of lepton flavor violation searches. *arXiv preprint arXiv:2208.02723*, 2022.

[27] Fabiola Fortuna, Alejandro Ibarra, Xabier Marcano, Marcela Marín, and Pablo Roig. Indirect upper limits on $\mathrm{i} \to \mathrm{j}\,\gamma\,\gamma$ from $\mathrm{i} \to \mathrm{j}\,\gamma$. *Physical Review D*, 107(1):015027, 2023.

[28] Y Amhis, Sw Banerjee, E Ben-Haim, F Bernlochner, A Bozek, C Bozzi, M Chrząszcz, J Dingfelder, S Duell, M Gersabeck, et al. Averages of b-hadron, c-hadron, and τ-lepton properties as of summer 2016. *The European Physical Journal C*, 77(12):1–335, 2017.

[29] Lorenzo Calibbi and Giovanni Signorelli. Charged lepton flavour violation: an experimental and theoretical introduction. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 41(2):71–174, 2018.

[30] James Hirschauer Griso, Elliot Lipeles, Zhen Liu, Nausheen R Shah, and Lian-Tao Wang. Physics beyond the standard model at energy frontier. *arXiv preprint arXiv:2209.13128*, 2022.

[31] R Martinez, J Nisperuza, F Ochoa, and JP Rubio. Some phenomenological aspects of a new U(1)' model. *Physical Review D*, 89(5):056008, 2014.

[32] SF Mantilla, R Martinez, and F Ochoa. Neutrino and C P-even higgs boson masses in a non-universal $U(1)'$ extension. *Physical Review D*, 95(9):095037, 2017.

[33] JS Alvarado, SF Mantilla, R Martinez, and F Ochoa. A non-universal $U(1)_X$ extension to the standard model to study the B meson anomaly and muon $g-2$. *arXiv preprint arXiv:2105.04715*, 2021.

[34] Antonio Pich. Flavour physics and CP violation. *arXiv preprint arXiv:1112.4094*, 2011.

[35] LHCb collaboration. Test of lepton universality in beauty-quark decays. *Nature Physics*, 18(3):277–282, 2022.

[36] R. L. Workman and Others. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.

[37] K Uno, K Hayasaka, K Inami, I Adachi, H Aihara, DM Asner, H Atmacan, T Aushev, R Ayad, V Babu, et al. Search for lepton-flavor-violating tau-lepton decays to γ at Belle. *Journal of High Energy Physics*, 2021(10):1–16, 2021.

[38] Bernard Aubert, Y Karyotakis, JP Lees, V Poireau, E Prencipe, X Prudent, V Tisserand, J Garra Tico, E Grauges, M Martinelli, et al. Searches for lepton flavor violation in the decays $\tau^{\pm}\rightarrow e^{\pm}\gamma$ and $\tau^{\pm}\rightarrow \mu^{\pm}\gamma$. *Physical Review Letters*, 104(2):021802, 2010.

[39] AM Baldini, Y Bao, E Baracchini, Carlo Bemporad, F Berg, M Biasotti, Gianluigi Boca, M Cascella, PW Cattaneo, G Cavoto, et al. Search for the lepton flavour violating decay $\mu^+e^+\gamma$ $\mu^+e^+\gamma$ with the full dataset of the MEG experiment: MEG collaboration. *The European Physical Journal C*, 76:1–30, 2016.

[40] U Bellgardt, G Otter, R Eichler, L Felawka, C Niebuhr, HK Walter, W Bertl, N Lordong, J Martino, S Egli, et al. Search for the decay $\mu^+ \longrightarrow e^+e^+e^-$. *Nuclear Physics B*, 299(1):1–6, 1988.

[41] K Hayasaka, K Inami, Y Miyazaki, K Arinstein, V Aulchenko, T Aushev, AM Bakich, A Bay, K Belous, V Bhardwaj, et al. Search for lepton-flavor-violating τ decays into three leptons with 719 million produced τ^+ τ^- pairs. *Physics Letters B*, 687(2-3):139–143, 2010.

[42] AM Baldini, F Cei, C Cerri, S Dussoni, L Galli, M Grassi, D Nicolo, F Raffaelli, F Sergiampietri, G Signorelli, et al. MEG upgrade proposal. *arXiv preprint arXiv:1301.7225*, 2013.

[43] A Blondel, A Bravar, M Pohl, S Bachmann, N Berger, M Kiehn, A Schöning, D Wiedner, B Windelband, P Eckert, et al. Research proposal for an experiment to search for the decay $\mu \to eee$. *arXiv preprint arXiv:1301.6113*, 2013.

[44] J Kaulard, C Dohmen, H Haan, W Honecker, D Junker, G Otter, M Starlinger, P Wintz, J Hofmann, W Bertl, et al. Improved limit on the branching ratio of μe conversion on Titanium. *Physics Letters B*, 422(1-4):334–338, 1998.

[45] RJ Barlow. The PRISM/PRIME project. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 218(1):44–49, 2011.

[46] COMET collaboration, R Abramishvili, G Adamov, RR Akhmetshin, A Allin, JC Angélique, V Anishchik, M Aoki, D Aznabayev, I Bagaturia, et al. Comet Phase-I technical design report. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(3):033C01, 2020.

[47] J-C Angélique, C Cârloganu, W da Silva, A Drutskoy, M Finger, DN Grigoriev, T Kachelhoffer, F Kapusta, Y Kuno, P Lebrun, et al. COMET-A submission to the 2020 update of the European Strategy for Particle Physics on behalf of the COMET collaboration. *arXiv preprint arXiv:1812.07824*, 2018.

[48] Vincenzo Cirigliano, Adam Falkowski, Martín González-Alonso, and Antonio Rodríguez-Sánchez. Hadronic τ decays as new physics probes in the LHC era. *Physical Review Letters*, 122(22):221801, 2019.

[49] Niklaus Berger, Mu3e Collaboration, et al. The mu3e experiment. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 248:35–40, 2014.

[50] RJ Abrams, D Alezander, G Ambrosio, N Andreev, CM Ankenbrandt, DM Asner, D Arnold, A Artikov, E Barnes, L Bartoszek, et al. Mu2e conceptual design report. *arXiv e-prints*, pages arXiv–1211, 2012.

[51] Harald Fritzsch and Zhi-Zhong Xing. Flavor symmetries and the description of flavor mixing. *Physics Letters B*, 413(3-4):396–404, 1997.

[52] Harald Fritzsch. Weak-interaction mixing in the six-quark theory. *Physics Letters B*, 73(3):317–322, 1978.

[53] TP Cheng and Marc Sher. Mass-matrix ansatz and flavor nonconservation in models with multiple Higgs doublets. *Physical Review D*, 35(11):3484, 1987.

[54] A Carcamo, R Martinez, and J-A Rodriguez. Different kind of textures of Yukawa coupling matrices in the two Higgs doublet model type III. *The European Physical Journal C*, 50(4):935–948, 2007.

[55] Carlos E. Diaz, S. F. Mantilla, and R. Martinez. Fermion mass hierarchy from non-universal Abelian extensions of the standard model. *Phys. Rev. D*, 98:015038, Jul 2018.

[56] RE Marshak and Rabindra N Mohapatra. Quark-lepton symmetry and $B - L$ as the $U(1)$ generator of the electroweak symmetry group. *Physics Letters B*, 91(2):222–224, 1980.

[57] Joy Ganguly, Janusz Gluza, and Biswajit Karmakar. Common origin of θ_{13} and dark matter within the flavor symmetric scoto-seesaw framework. *Journal of High Energy Physics*, 2022(11):1–40, 2022.

[58] Stephen McCormick. First law of black hole mechanics as a condition for stationarity. *Physical Review D*, 90(10):104034, 2014.

[59] Ernest Ma. Suitability of A_4 as a family symmetry in Grand Unification. *Modern Physics Letters A*, 21(39):2931–2935, 2006.

[60] Federica Bazzocchi, Luca Merlo, and Stefano Morisi. Fermion masses and mixings in a S_4 based model. *Nuclear Physics B*, 816(1-2):204–226, 2009.

[61] F Bazzocchi, S Kaneko, and S Morisi. A susy A_4 model for fermion masses and mixings. *Journal of High Energy Physics*, 2008(03):063, 2008.

[62] Ferruccio Feruglio, Claudia Hagedorn, and Robert Ziegler. A realistic pattern of lepton mixing and masses from S_4 and CP. *The European Physical Journal C*, 74:1–13, 2014.

[63] Kenji Hashimoto and Hiroshi Okada. Lepton flavor model and decaying dark matter in the binary icosahedral group symmetry. *arXiv preprint arXiv:1110.3640*, 2011.

[64] Gui-Jun Ding and Jia-Feng Liu. Lepton flavor violation in models with A_4 and S_4 flavor symmetries. *Journal of High Energy Physics*, 2010(5):1–31, 2010.

[65] Ernest Ma, Nicholas Pollard, Rahul Srivastava, and Mohammadreza Zakeri. Gauge B-L model with residual Z_3 symmetry. *Physics Letters B*, 750:135–138, 2015.

[66] J Barranco, F Gonzalez Canales, and A Mondragon. Universal mass matrix for quarks and leptons and CP violation. *Physical Review D*, 82(7):073010, 2010.

[67] Chang-Yuan Yao and Gui-Jun Ding. Lepton and quark mixing patterns from finite flavor symmetries. *Physical Review D*, 92(9):096010, 2015.

[68] Takaaki Nomura and Hiroshi Okada. Quark and lepton model with flavor specific dark matter and muon $g-2$ in modular A_4 and hidden $U(1)$ symmetries. *arXiv preprint arXiv:2304.13361*, 2023.

[69] Manuel Meucci. MEG II experiment status and prospect. *arXiv preprint arXiv:2201.08200*, 2022.

[70] Qing-Hong Cao, Shaaban Khalil, Ernest Ma, and Hiroshi Okada. Observable T_7 Lepton Flavor Symmetry at the Large Hadron Collider. *Physical Review Letters*, 106(13):131801, 2011.

[71] Yithsbey Giraldo, R Martínez, Eduardo Rojas, and Juan C Salazar. A minimal axion model for mass matrices with five texture-zeros. *arXiv preprint arXiv:2304.07406*, 2023.

[72] JS Alvarado, SF Mantilla, R Martinez, F Ochoa, and Cristian Sierra. A gauged non-universal $U(1)_X$ model to study muon $g-2$ and B meson anomalies. Technical report.

[73] JS Alvarado, MA Bulla, DG Martinez, and R Martinez. Explaining muon $g-2$ anomaly in a non-universal $U(1)_X$ extended SUSY theory. *arXiv preprint arXiv:2010.02373*, 2020.

[74] Yithsbey Giraldo, Roberto Martínez, Eduardo Rojas, and Juan C Salazar. Flavored axions and the flavor problem. *The European Physical Journal C*, 82(12):1131, 2022.

[75] YA Garnica, SF Mantilla, and R Martinez. From Peccei Quinn symmetry to mass hierarchy problem. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 48(9):095002, 2021.

[76] JS Alvarado, Carlos E Diaz, and R Martinez. A $U(1)_X$ extension to the MSSM with three families. *arXiv preprint arXiv:1909.02891*, 2019.

[77] R Martinez and SF Mantilla. Mass problem in the Standard Model. In *EPJ Web of Conferences*, volume 182, page 02084. EDP Sciences, 2018.

[78] Carlos E Diaz, SF Mantilla, and R Martinez. Fermion mass hierarchy from nonuniversal Abelian extensions of the Standard Model. *Physical Review D*, 98(1):015038, 2018.

[79] R Martinez, F Ochoa, and JM Quimbayo. B meson decay anomaly with a nonuniversal $U(1)$ extension. *Physical Review D*, 98(3):035036, 2018.

[80] AE Cárcamo Hernández and R Martinez. Fermion mass and mixing pattern in a minimal $T7$ flavor 331 model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(4):045003, 2016.

[81] AE Cárcamo Hernández and R Martinez. A predictive 3-3-1 model with A_4 flavor symmetry. *Nuclear Physics B*, 905:337–358, 2016.

[82] Roberto Martinez, Jorge Nisperuza, Freddy Ochoa, Juan Pablo Rubio, and CF Sierra. Scalar coupling limits and diphoton Higgs decay from LHC in an $U(1)$ model with scalar dark matter. *Physical Review D*, 92(3):035016, 2015.

[83] R Martinez, J Nisperuza, F Ochoa, and JP Rubio. Scalar dark matter with CERN-LEP data and Z search at the LHC in an $U(1)$ model. *Physical Review D*, 90(9):095004, 2014.

[84] AE Cárcamo Hernández, E Cataño Mur, and R Martinez. Lepton masses and mixing in $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ models with a S_3 flavor symmetry. *Physical Review D*, 90(7):073001, 2014.

[85] David Berenstein and Samuel Pinansky. Minimal quiver Standard Model. *Physical Review D*, 75(9):095009, 2007.

[86] Shaaban Khalil. TeV-scale gauged B-L symmetry with inverse Seesaw mechanism. *Physical Review D*, 82(7):077702, 2010.

[87] Walter Grimus and Luís Lavoura. The Seesaw mechanism at arbitrary order: disentangling the small scale from the large scale. *Journal of High Energy Physics*, 2000(11):042, 2001.

[88] Andreas Crivellin, Saereh Najjari, and Janusz Rosiek. Lepton flavor violation in the Standard Model with general dimension-six operators. *Journal of High Energy Physics*, 2014(4):1–31, 2014.

[89] Nilendra G Deshpande and M Nazerimonfared. Flavor-changing electromagnetic vertex in a non-linear R_ξ gauge. *Nuclear Physics B*, 213(3):390–408, 1983.

[90] Ivan Esteban, Maria Conceptión González-García, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, and Albert Zhou. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 2020(9):1–22, 2020.

[91] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.

[92] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.

[93] Mikołaj Misiak and Matthias Steinhauser. Weak radiative decays of the B meson and bounds on $M_{H^\pm}$ in the Two-Higgs-Doublet Model. *The European Physical Journal C*, 77:1–9, 2017.