GRUPO DE HOMOTOPÍA Y CUBIERTAS;

UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

TRABAJO DE AÑO SABÁTICO

1 de Agosto de 1999 - 31 de Julio del 2000

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE DE MEDELLÍN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLIN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

Presentado por:

Débora María Tejada Jiménez

Profesora Asociada

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Medellín, Julio, 2000

UNAL-Medellín
6 4000 00116668 8

I
514.2
T34

CONTENIDO

Página

INTRODUCCIÓN

Capítulo

1. EL GRUPO FUNDAMENTAL 4

1.1. Definición.
1.2. Homomorfismo Inducido.
1.3. Grupos Fundamentales de Espacios Homotópicamente Equivalentes.

2. EL CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL 21

2.1. Teorema de Van Kampen.
2.2. Cálculo del Grupo Fundamental en algunos ejemplos.
2.3. El Grupo Fundamental de un Nudo.

3. CUBIERTAS 60

3.1. Definición y Ejemplos de Cubiertas.
3.2. Teoremas de Clasificación de Cubiertas.
3.3. Cubiertas Regulares.

116688

4. GRUPO FUNDAMENTAL Y CUBIERTAS 94

4.1. Grupo de Monodromía y Construcción de Cubiertas.

4.2. Cubiertas Ramificadas y Preguntas.

4.3. La Acción de un Grupo sobre un Conjunto.

BIBLIOGRAFÍA 117

INTRODUCCIÓN

El grupo fundamental de un espacio topológico es una de las herramientas más importantes con las que cuenta un topólogo para poder distinguir espacios topológicos. El objetivo central de este trabajo es el de estudiar dicho grupo, sus propiedades y las principales técnicas que existen para calcularlo.

Dedicamos nuestro primer capítulo a la definición de dicho grupo. Veremos que ésta es sencilla e intuitivamente entendible. Para calcular el grupo fundamental de un espacio dado, existen diferentes técnicas. La más conocida proviene de la aplicación del Teorema de Van Kampen. Esta técnica la desarrollamos en el capítulo segundo, donde, además, mostramos abundantes ejemplos que nos enseñan en la práctica cómo hacer los cálculos. Otra técnica proviene de la aplicación de la Teoría de Cubiertas, la cual desarrollaremos extensivamente en los Capítulos 3 y 4.

Sin temor a equivocarnos, podríamos decir que el estudio de las 3-variedades ha sido el principal objeto de trabajo de los topólogos del Siglo XX. Alrededor de este estudio se encuentran problemas que han permanecido abiertos por más de un siglo, como por ejemplo, la famosa conjetura de Poincaré o la clasificación de las 3-variedades.

Aunque nuestro objetivo principal para estudiar la Teoría de Cubiertas es el de aprender una técnica para el cómputo del grupo fundamental, es importante resaltar la importancia de esta teoría en otros aspectos. Por ejemplo, ella soporta la Teoría de las Cubiertas Ramificadas, la cual a su vez, tiene aplicaciones en el estudio de las 3-variedades y de la Teoría de Nudos. Algunos ejemplos, dados en los Capítulos 3 y 4, corresponden a ejemplos de Nudos o de Cubiertas Ramificadas.

Como la Topología es ante todo una rama de la matemática de tipo visual, he considerado de gran importancia acompañar los textos con muchos dibujos cuyo objetivo es el de ayudarle a aclarar las ideas al lector. Es importante observar que estos dibujos no son pruebas de los hechos que se afirman en el texto. El lector, encontrará a lo largo de todo el recorrido muchas preguntas y/o ejercicios, que le permitirán su participación activa en la construcción de los conceptos y en la completación de detalles en las pruebas de los teoremas.

Este trabajo, es el primer paso de un proyecto más amplio del profesor José María Montesinos, de la Universidad Complutense de Madrid. Algunas de las partes del presente trabajo, están basadas en las notas desarrolladas por el profesor Montesinos durante sus cursos de Topología Algebraica, dados en distintas oportunidades en Madrid y en Zaragoza. Mi trabajo ha sido el de complementarlas con mis propias notas, reordenarlas y editarlas tal cual las presento en este trabajo de año sabático.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi gratitud a la Universidad Nacional de Colombia Sede de Medellín por la confianza depositada en mí para la realización de este trabajo de año sabático. Parte de este trabajo se realizó en la Universidad de Texas en San Antonio, donde tuve la oportunidad de trabajar con el profesor Nikos Salingaros, en temas relacionados con la Arquitectura y fui financiada en parte por la Fundación Alfred P. Sloan. Agradezco especialmente a los profesores Nikos Salingaros y Alfonso Castro de dicha Universidad por haberme apoyado en la culminación de este trabajo. Parte de los gastos de mi estada en San Antonio fueron financiados por el premio Colciencias: *"Mejor grupo de Investigación en Matemáticas"*.
Quiero manifestar mi especial agradecimiento al profesor José María Montesinos por permitirme utilizar sus notas y comenzar a desarrollar su proyecto. Las observaciones hechas por mis alumnos de los cursos de Topología Algebraica fueron muy útiles en la escritura del presente trabajo. A todos ellos les doy las gracias. Aprecio enormemente la ayuda de Cecilia Vallejo en el levantamiento de parte de este texto. Finalmente, son mis agradecimientos para mi esposo Jorge Cossio, mi hija Pilar y toda mi familia, quienes me apoyaron emocionalmente durante la ejecución del presente trabajo.

1. EL GRUPO FUNDAMENTAL

En la Sección 1.1 de este capítulo, estudiaremos la definición del Grupo Fundamental de un espacio topológico. Las principales propiedades del Grupo Fundamental son estudiadas en las secciones siguientes. El lector deberá completar muchos detalles que quedan pendientes, ya que el tratamiento que le damos al tema es algo intuitivo. Los primeros capítulos del libro de Massey [8] complementan el tema.

1.1. Definición.

Definición 1.1.1. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ funciones continuas, si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$, donde I es el intervalo cerrado $[0, 1]$, decimos que f y g son *funciones homotópicas* (lo que denotamos por $f \underset{H}{\sim} g$) y que H es una *homotopía* de f a g.

"*Intuitivamente, podemos visualizar a H como una deformación suave de la función f en la función g, la cual se realiza en una unidad de tiempo.*"

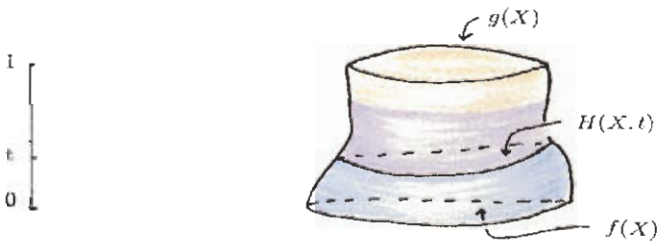


Figura 1

Definición 1.1.2. Si además, existe un subconjunto A de X tal que $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo a en A y todo t en $I = [0, 1]$, decimos que f y g son *homotópicas con respecto a A* (o relativas a A) y que H es una *homotopía* entre f

y g, *relativa a* A, lo que denotamos por $f \underset{H}{\sim} g$ $(rel\ A)$.

"*Intuitivamente, podemos pensar que la imagen del conjunto A permanece fija durante la deformación H*".

Proposición 1.1.3. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia.*

i) "Propiedad reflexiva". $(f \sim f)$

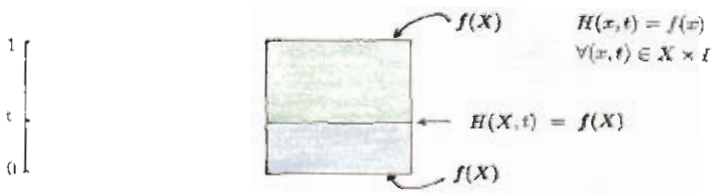


Figura 2

ii) "Propiedad simétrica". $(f \sim g \Longrightarrow g \sim f)$

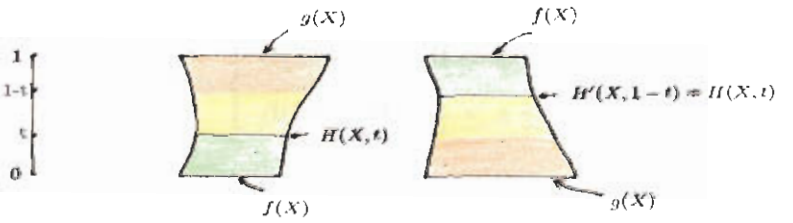


Figura 3

iii) "Propiedad transitiva". ($f \sim g$ y $g \sim h \Longrightarrow f \sim h$)

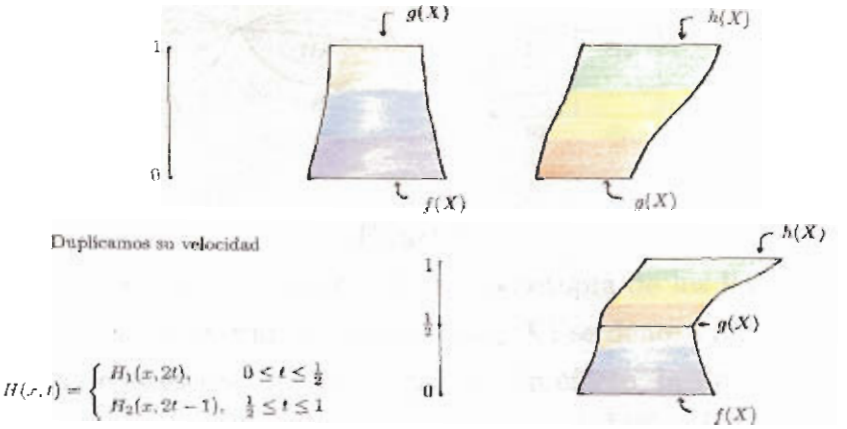


Figura 4

Notación 1.1.4. La clase de equivalencia de una función f la denotamos por $[f]$.

Definiciones 1.1.5. Sea X un espacio topológico, una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ es llamada un *camino en* X con *punto inicial* $\alpha(0)$ y *punto final* $\alpha(1)$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ decimos que α es *un lazo de* X *basado en* x_0.

Si α y β son dos caminos tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, podemos definir la operación *composición* de los caminos α y β por:

$$\alpha\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

"*Intuitivamente, esta operación nos dice que primero recorremos el camino α en media unidad de tiempo y que a continuación recorremos el camino β en la otra media unidad de tiempo. Note que la velocidad de recorrido de cada camino es el doble.*"

Notación 1.1.6. Escribiremos $\alpha \sim \beta(rel\{0,1\})$ si α y β son dos caminos homotópicos con homotopía relativa a los extremos $\{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

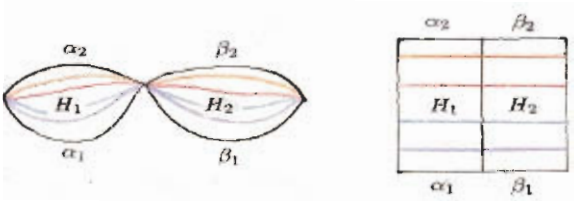


Figura 5

Notación 1.1.7. El conjunto de las clases de homotopía de los lazos de un espacio topológico X basados en un punto *base* x_0 ($x_0 \in X$) se denota por $\Pi_1(X, x_0)$. Este puede ser dotado de la estructura de un grupo. En efecto, la Figura 5 nos muestra que se puede definir una operación en $\Pi_1(X, x_0)$ por $[\alpha]\,[\beta] = [\alpha\beta]$.

Ejercicio 1.1.8. Probar que esta operación está bien definida.

Veamos que el conjunto de clases de homotopía de lazos, $\Pi_1(X, x_0)$, es un grupo con esta operación.

i) "Ley asociativa".

Figura 6

Ejercicio 1.1.9. Teniendo en cuenta la Figura 6 deduzca una homotopía entre $([\alpha_1][\alpha_2])[\alpha_3]$ y $[\alpha_1]([\alpha_2][\alpha_3])$. *Clave:* Contéstese primero: ¿Qué indica la gráfica cinemáticamente, es decir, cómo se deforman los caminos en una unidad de tiempo?

ii) "Elemento neutro". Sea $e : [0,1] \to X$ la función constante tal que $e(s) = x_0$, para todo $s \in [0,1]$.
La Figura 7 siguiente nos permite deducir que la clase $[e]$ es el elemento neutro. En efecto, basta definir la homotopía

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2s}{t+1}), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(t+1) \\ x_0, & \frac{1}{2}(t+1) \leq s \leq 1, \end{cases}$$

luego $[\alpha][e] = [\alpha]$. Similarmente, obtenemos $[e][\alpha] = [\alpha]$.

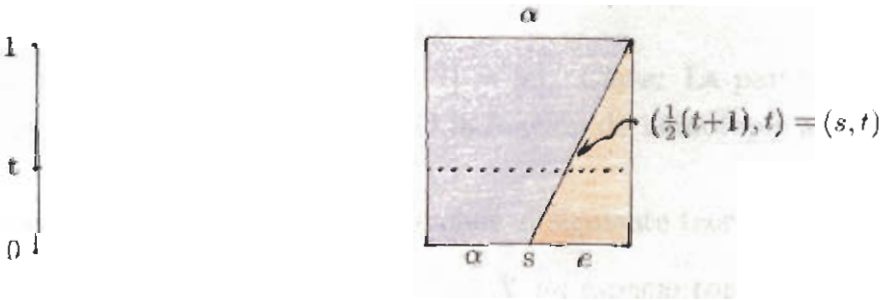


Figura 7

iii) "Elemento inverso". Sea $\alpha : [0,1] \to X$ un lazo basado en $x_0 \in X$, definimos otro un lazo $\alpha^{-1} : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(s) = \alpha(1-s)$.
Ejercicios 1.1.10.
a) Interprete cinemáticamente lo que se describe en la Figura 8.

Figura 8

b) De la figura anterior deduzca que $[\alpha][\alpha^{-1}] = [e]$. *Clave:* La parte sombreada cae sobre x_0 y a lo largo de las diagonales D la función de homotopía se considera constante.

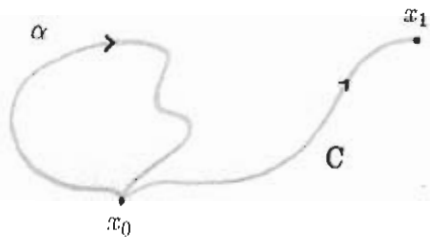
Teniendo en cuenta lo anterior, podemos concluir el siguiente teorema:

Teorema 1.1.11. *(Teorema de Poincaré.) Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$, el conjunto de clases de lazos basados en x_0, junto con la composición de lazos, es un grupo.*

Definición 1.1.12. Este grupo es llamado el *grupo fundamental del espacio X basado en x_0* (también es llamado el primer grupo de homotopía de X o el grupo de Poincaré).

Ejercicios 1.1.13.

a) Sean X un espacio topológico, x_0 y x_1 elementos de X, si existe un camino $C : [0,1] \to X$ con punto inicial x_0 y punto final x_1, pruebe que los grupos $\Pi_1(X, x_0)$ y $\Pi_1(X, x_1)$ son isomorfos. *Clave:* Considere la gráfica:



$$\Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$$
$$\alpha \mapsto C^{-1}\alpha C$$

Figura 9

b) Proponga una conjetura de cúal puede ser $\Pi_1(\mathbb{R}, (0, \cdots, 0))$ y trate de probar que su conjetura es cierta.

c) Proponga una conjetura de cúal puede ser $\Pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, (0,0))$ y trate de probar su conjetura.

d) Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que $X = A \cup B \cup C \cup D \cup E$, donde

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$,

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -1, -2 \leq y \leq 0\}$,

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, y = -2\}$,

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{1}{2}\pi, -2 \leq y \leq 0\}$,

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x < \frac{1}{2}\pi, y = x \; sen \frac{1}{x}\}$.

Proponga una conjetura de cuál puede ser $\Pi_1(X, (-1, -2))$ y trate de probarla.

Notación 1.1.14. Según el literal a) del ejercicio anterior, si X es arco conexo (es decir, cualquier par de puntos en X pueden ser unidos con un camino) y si no hay lugar a confusión el grupo fundamental se denotará simplemente por $\Pi_1(X)$ y el isomorfismo inducido por C por $\mathcal{I}_C$. Nótese que este isomorfismo no es canónico, ya que depende del camino escogido.

Ejercicios 1.1.15.

a) Sean C y C' dos caminos en X con los mismos extremos x_0, x_1. Probar que existe una homotopía relativa a $\{x_1\}$ entre C y C_1.

b) ¿Será que el resultado vale si la homotopía es relativa a los dos extremos?

c) Piénsese qué relación tienen los isomorfismos inducidos por C y C', cuando ellos son homotópicos con relación al conjunto $\{x_0, x_1\}$ y cuando no lo son.

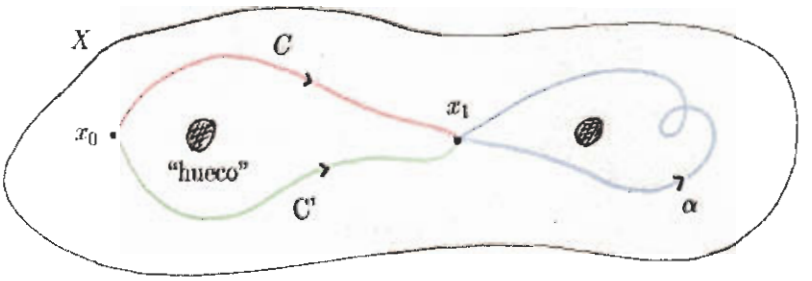


Figura 10

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico. Si X es arco conexo y $\Pi_1(X) = \{e\}$ decimos que X es *simplemente conexo.*

Ejemplos 1.1.17.

a) Si $E \subset R^n$ es convexo (es decir, para todo $x, y \in E$ el segmento de recta formado por los puntos de la forma $(1-t)x + ty$ $(0 \leq t \leq 1)$ está contenido en E), entonces es simplemente conexo.

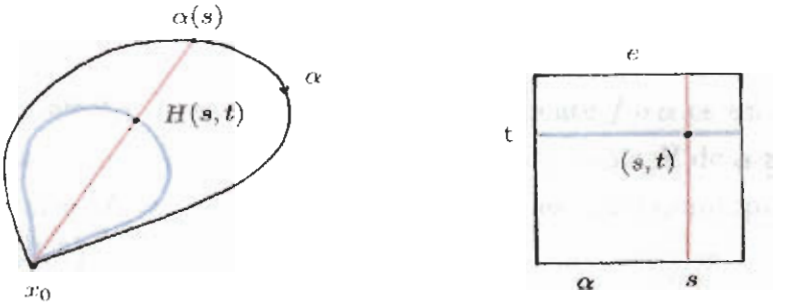


Figura 11

"*Cinemáticamente vemos que el lazo α lo podemos retraer llevando los puntos $\alpha(s)$ a lo largo del segmento que une $\alpha(s)$ con x_0*". Formalmente expresamos este hecho por medio de la homotopía $H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$.

b) Veremos que la esfera S^2 es un espacio simplemente conexo, aunque no es convexo en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios 1.1.18.

a) Sean $E \subset R^n$ convexo, $x, y \in E$. Si $\alpha, \beta : [0,1] \to E$ son dos caminos que unen a x con y, pruébese que $\alpha \cong \beta$ $(rel\{0,1\})$.

b) Probar que la afirmación anterior es cierta si E es simplemente conexo.

c) Defina dos caminos α y β en $\mathbb{R}^2$ tales que α comienza en $(-1,0)$, termina en $(1,0)$ y recorre el intervalo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0 \text{ y } -1 \leq x \leq 1\}$, β tiene los mismos extremos de α, pero recorre la semicircunferencia $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1, 0 \leq y\}$. Establezca una homotopía entre estos dos caminos relativa a sus extremos.

1.2. Homomorfismo inducido.

A continuación veremos la relación existente entre los grupos fundamentales de espacios que tienen definida entre ellos una función continua.

Teorema 1.2.1. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua, $x_0 \in X$. Si definimos $f_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, f(x_0))$ por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ para $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, entonces f_* es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. En efecto, f_* es bien definido. Claramente $f \circ \alpha$ es un lazo basado en $f(x_0)$ y además si $[\alpha] = [\alpha_1]$ entonces existe una homotopía H de α a α_1 relativa a $\{0, 1\}$. Si definimos $H' = f \circ H$, es fácil ver que H' es una homotopía de $f \circ \alpha$ a $f \circ \alpha'$ relativa a $\{0, 1\}$.

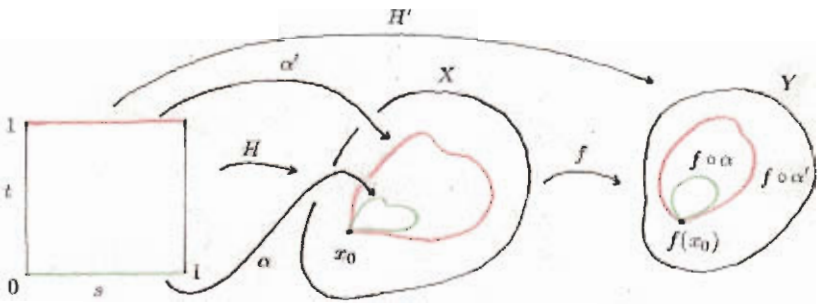


Figura 12

Además, f_* respeta la composición de lazos, es decir $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta])$. En efecto, si $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$ entonces $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\beta]) = [f \circ (\alpha\beta)]$ y $f_*([\alpha])f_*([\beta]) = [f \circ \alpha][f \circ \beta]$.

Pero,

$$f \circ (\alpha\beta)(s) = f(\alpha\beta(s)) = \begin{cases} f(\alpha(2s)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta(2s-1)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f \circ \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f \circ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = [f \circ \alpha][f \circ \beta],$$

luego f_* es un homomorfismo. $\square$

Definición 1.2.2. El homomorfismo f_* se llama el *homomorfismo inducido* por f.

La proposición siguiente nos da la relación existente entre los homorfismos inducidos por funciones continuas y homotópicas.

Teorema 1.2.3. *Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ funciones continuas homotópicas, con homotopía H, entonces $g_* = \mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} \circ f_*$, donde $H_{x_0}(t) : I \to Y$ es el camino tal que $t \mapsto H(x,t)$.*

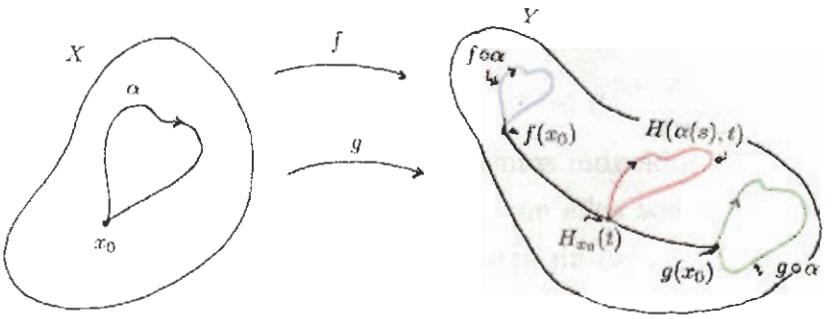


Figura 13

Demostración. En efecto, sea $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, entonces $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} \circ f_*[\alpha] = \mathcal{I}_{H_{x_0}(t)}(f_*[\alpha]) = \mathcal{I}_{H_{x_0}(t)}[f \circ \alpha] = \left[H_{x_0}(t)^{-1}\right][f \circ \alpha]\left[H_{x_0}(t)\right] \overset{H'}{\sim} [g \circ \alpha] = g_*[\alpha]$, donde H' es la homotopía ilustrada en el diagrama de la Figura 14, la cual es relativa a $\{g(x_0\}$. $\square$

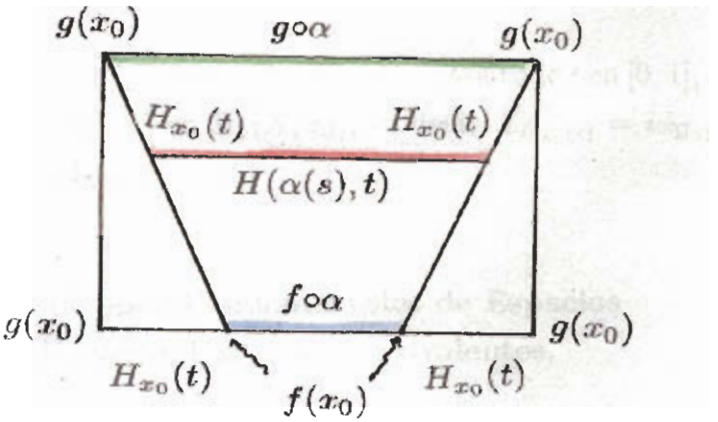


Figura 14

Esta proposición quiere decir que los homomorfismos inducidos por funciones homotópicas son casi lo mismo, en otras palabras, que ellos son equivalentes, salvo isomorfismo. En el Ejercicio 1.2.4 b) *iv)* se muestra un caso en el cual los homomorfismos son exactamente iguales.

Ejercicios 1.2.4.

a) Dé la definición estricta de H' y describa cinemáticamente su significado.

b) Probar las siguientes propiedades del homomorfismo inducido. Sean X, Y, Z espacios topológicos, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : X \to Y$ funciones continuas.

i) $(id_X)_* = id_{\Pi_1(X,x_0)}$.

ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

iii) Si f es un homeomorfismo entonces $f_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

iv) Si $f \sim h(rel\{x_0\})$, entonces $f_* = g_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, f(x_0))$ (o sea que el homomorfismo inducido es invariante bajo homotopía relativa al conjunto $\{x_0\}$).

Corolario 1.2.5. *Si $f : X \longrightarrow X$ es una función continua homotópica a la función identidad (id_X) de X por medio de una homotopía H, tal que $H_{x_0}(t) = x_0$, para todo t en $[0, 1]$. Entonces $f_* = id_{\Pi_1(X,x_0)}$.*

En efecto, $(id_X)_* = id_{\Pi_1(X,x_0)}$ y como $H_{x_0}(t) = x_0$, para todo t en $[0, 1]$, $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)}[\alpha] = [x_0][\alpha][x_0] = [\alpha]$, para todo $[\alpha]$ en $\Pi_1(X, x_0)$, es decir, $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} = id_{\Pi_1(X,x_0)}$, luego $f_* = \mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} \circ (id_X)_* = id_{\Pi_1(X,x_0)}$. $\square$

1.3. Grupos Fundamentales de Espacios Homotópicamente Equivalentes.

Definición 1.3.1. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua, decimos que f es una *equivalencia de homotopía* si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$. En este caso se dice que los espacios X e Y son *homotópicamente equivalentes* o que tienen el *mismo tipo de homotopía* (ésto lo denotamos por $X \cong Y$).

Si X y Y son espacios topológicos homotópicamente equivalentes, es natural preguntarse por la relación existente entre sus grupos fundamentales. Observemos primero que los homomorfismos inducidos por las funciones continuas que producen la equivalencia de los espacios, son isomorfismos, aunque no necesariamente uno inverso del otro.

Si $X \cong Y$, entonces existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$. Ahora, como $g \circ f \sim id_X$ entonces $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} \circ (g \circ f)_* = (id_X)^* = id_{\Pi_1(X,x_0)}$ luego $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)} \circ (g * \circ f_*) = id_{\Pi_1(X,x_0)}$. Como en esta identidad, tanto $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)}$ como $id_{\Pi_1(X,x_0)}$ son isomorfismos, queda claro que, necesariamente, f_* es inyectivo y que g_* es sobreyectivo. Similarmente, $f \circ g \sim id_Y$ implica que f_* es sobreyectivo y que g_* es inyectivo, es decir tanto f_* como g_* son isomorfismos. Obsérvese que si $\mathcal{I}_{H_{x_0}(t)}$ no es trivial entonces $f_*^{-1} \neq g_*$. Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 1.3.2. *Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces el homomorfismo inducido $f_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.*

Ejercicios 1.3.3

a) Sea X un espacio contractible. Probar que X es arco conexo y que $\Pi_1(X) = \{e\}$.

b) ¿Será que si $\Pi_1(X, x_0) = \{e\}$, para algún $x_0 \in X$, entonces necesariamente X es arco conexo? (compárese con la Definición 1.1.16).

Definición 1.3.4. Un espacio X se llama *contractible* si es homotópicamente equivalente a un punto.

Sea A subconjunto del espacio X. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$, para todo a en A, se llama una *retracción* de X. El conjunto A lo llamamos *retracto* de X.

Si una retracción de X es homotópica a la función identidad de X, decimos que A es un *retracto de deformación débil*, si la homotopía entre la retracción y la identidad es relativa al conjunto A, se dice que A es un *retracto de deformación fuerte.*

Nótese que si X es un espacio contractible, ésto significa que existe un punto $x_0 \in X$, tal que la función constante $C : X \to X, x \mapsto x_0$, para todo x en X, es homotópicamente equivalente a la identidad de X. En efecto, si $X \cong \{x_1\}$, $x_1 \in X$, entonces existen $f : X \to \{x_1\}$ y $g : \{x_1\} \to X$ tales que $f \circ g \sim id_{\{x_1\}}$ y $g \circ f \sim id_X$. Ahora, si $g(x_1) = x_0$, claramente $g \circ f$ es la función constante $e : X \to X, x_1 \to x_0$, para todo x en X. Pregúntese ¿qué pasaría si no se tiene la condición $g(f(x_0)) = x_0$? ¿Cómo sería f_*?

Ejemplos 1.3.5.

a) Todo $E \subset \mathbb{R}^n$ convexo es contractible. (Probarlo!)

b) Sean $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ dos círculos centrados en el origen, de radios r_1 y r_2, respectivamente. Sea $A = \{(x, y)/r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$ el anillo comprendido entre ellos y sea $B = C_1 \cup C_2 = \partial A$ (frontera de A). Se puede probar que cualquier círculo C de centro el origen y radio r_0, $r_1 \leq r_0 \leq r_2$ es un retracto de deformación fuerte de A. En efecto, sea $r : A \to C$ tal que $\overrightarrow{(x, y)} \mapsto r_0 \frac{\overrightarrow{(x,y)}}{|(x,y)|}$ y sea $H : A \times I \to A$ definida por

$$H((x, y), t) = (1 - t)\overrightarrow{(x, y)} + tr_0 \frac{\overrightarrow{(x, y)}}{|(x, y)|}, \quad (x, y) \in A, t \in I.$$

Claramente, H es una homotopía entre r e id_A, relativa al círculo C.

Por otro lado, se puede ver que la función $r : B \to C_1$, donde $\overrightarrow{(x,y)} \mapsto r_1 \frac{\overrightarrow{(x,y)}}{|(x,y)|}$, es una retracción de B. Sin embargo, ésta no es retracto de deformación. ¿Por qué ?

Teorema 1.3.6. *Si A es un retracto de deformación fuerte de X, entonces la inclusión $i : A \to X$ induce un isomorfismo de $\Pi_1(A,a)$ en $\Pi_1(X,a)$, para todo $a \in A$.*

Demostración. Sea $r : X \to A$ una retracción tal que $r \sim id_X (rel\ A)$. Obsérvese que $r \circ i = id_A$ luego $r_* \circ i_* = id_{\Pi_1(A,a)}$, es decir, r_* es sobreyectiva e i_* es inyectiva. Y como r es homotópica a la identidad de X y, además, $i \circ r = r$ (pues i es sólo la inclusión), entonces $i \circ r \sim id_X (rel\ A)$, luego $i_* \circ r_* = id_{\Pi_1(X,a)}$ y así i_* es también sobreyectiva, quedando probado el teorema. $\square$

Obsérvese que para probar que i_* es inyectiva no se necesita el hecho de que r sea retracto de deformación fuerte.

En otras palabras, este teorema nos dice, que el grupo fundamental de un espacio es isomorfo al de cualquier retracto de deformación fuerte de él. Esta propiedad será utilizada muchas veces en el cálculo de los grupos fundamentales. Por ejemplo, del Ejemplo 1.3.5 b) se podrá concluir que el grupo fundamental de una región anular es isomorfo al grupo fundamental de un círculo.

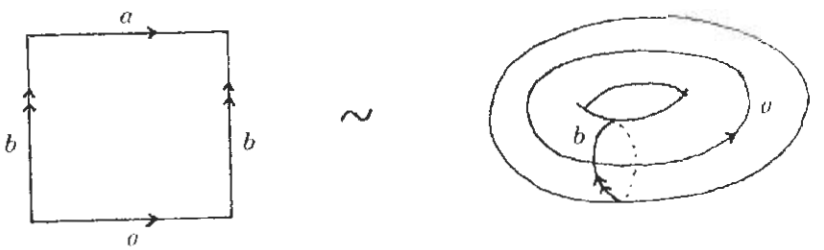


Figura 15 a)

Ejercicios 1.3.7.

a) El cuadrado de la Figura 15 a), con sus lados identificados como lo indican las flechas, es llamado un toro y denotado por T o por T^2. Probar que el lazo a de dicha figura, es un retracto de T. ¿Será que es retracto de deformación fuerte?

b) Sean X e Y espacios topólogicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Probar que
$\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$.

Clave: Completar este esquema de solución. Sean $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones canónicas. Definimos $F = p_{1*} \times p_{2*}$, es decir,
$F : \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$, con $[\alpha] \mapsto (p_{1*}([\alpha]), p_{2*}([\alpha]))$.

• Probar que F es un homomorfismo de grupos bien definido.

• "F es sobreyectiva". En efecto, sean $[\alpha_1] \in \Pi_1(X, x_0)$ y $[\alpha_2] \in \Pi_1(Y, y_0)$, definimos un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) por $\alpha : I \to X \times Y$, con $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Probar que $F([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$ (ver Figura 15 b).

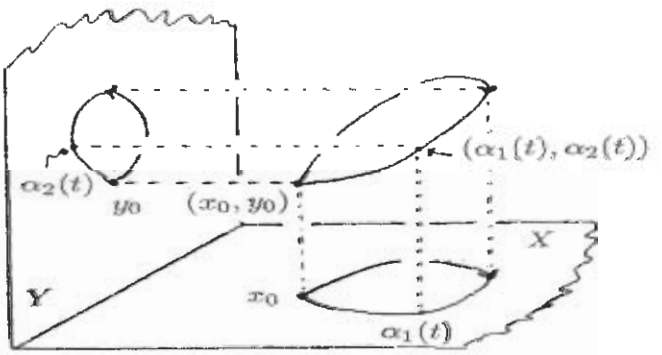


Figura 15 b)

• "F es inyectiva". Sean $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$, supóngase que $F[\alpha] = F[\beta]$, entonces $([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \beta])$, luego existen homotopías $H_1 : I \times I \to X$ y $H_2 : I \times I \to Y$ tales que $p_1 \circ \alpha \underset{H_1}{\simeq} p_1 \circ \beta$ y $p_2 \circ \alpha \underset{H_2}{\simeq} p_2 \circ \beta$.

Defínase $H : I \times I \to X \times Y$ por $H(s,t) = (H_1(s,t), H_2(s,t))$. Pruébese que H es una homotopía entre α y β, relativa a $\{0,1\}$.

c) Probar que X es simplemente conexo si y sólo si X es arco conexo y cualquier función continua $f : S^1 \to X$ se puede extender a una función continua $\bar{f} : D^2 \to X$. (Recuerde que $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ y $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

oooo

2. EL CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL

Para calcular el Grupo Fundamental de un espacio topológico existen diversas técnicas. Una de las mas útiles es el Teorema de Egbert Van Kampen. En la primera sección enunciaremos 2 versiones de este teorema, de las cuales sólo haremos un esquema de su demostración. Como el Teorema de Van Kampen está intimamente ligado con el concepto algebraico de grupos libres, dedicaremos dos subsecciones para recordar algunas definiciones y teoremas relacionados con estos grupos. En las Secciones 2.2 y 2.3, a través de muchos ejemplos, aprenderemos como utilizar dicho teorema para calcular el Grupo Fundamental.

2.1. Teorema de Van Kampen.

2.1.1 Preliminares Algebraicos necesarios para la primera versión del Teorema de Van Kampen.

Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, $E = \bigcup_{i\in I} G_i$ y
$W(E) = \{w/w$ es una sucesión finita de elementos de E$\}$. Los elementos de $W(E)$ son llamados *palabras*.

Si $w \in W(E)$ y $w = a_1a_2\ldots a_n$, $a_i \in E$, su *longitud* $\ell(w)$ es n. Denotamos por w_0 la sucesión vacía, en este caso $\ell(w_0) = 0$. El conjunto de palabras de longitud 1 se identifica con el conjunto E, y así podemos pensar a E como subconjunto de $W(E)$. Si definimos en $W(E)$ la siguiente ley de composición (asociativa) $ww' = (a_1\ldots a_n)(a'_1\ldots a'_k) = a_1\ldots a_na'_1\ldots a'_k$, entonces $W(E)$ dotado de esta operación y con unidad w_0 es un semigrupo.

Ahora, si aceptamos los siguientes cambios o "jugadas":

i) $ae_ib \to ab$, e_i unidad de G_i.

ii) $axyb \to azb$, $x, y \in G_i$ y $xy = z$,

podemos definir una relación de equivalencia en $W(E)$ por $w \sim w'$ si y sólo si se puede pasar de w a w' por medio de un número finito de jugadas de la forma anterior. El conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $W(E)/w_0$, el cual, claramente resulta ser un grupo.

Ejercicio 2.1.1.1. Probar la afirmación anterior.

Este grupo lo denotamos con $\underset{i\in I}{*} G_i$ y lo llamamos el *producto libre de los* G_i. Nótese que cada grupo G_i se puede identificar de forma natural con un subgrupo del producto libre $\underset{i\in I}{*} G_i$. Su elemento neutro lo denotamos por $\bar{w}_0$.

Una palabra w se llama *reducida* si:

a) Ningún a_i es unidad.

b) Nunca dos letras consecutivas pertenecen al mismo G_i.

Ejercicios 2.1.1.2. (Para algebristas.)

a) Probar que cada clase de equivalencia tiene exactamente una palabra reducida.

b) Probar la propiedad universal del producto libre de grupos, es decir probar el teorema siguiente:

Teorema 2.1.1.3. *Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, G un grupo, $h_i : G_i \to G$ un homomorfismo de grupos para cada $i \in I$, entonces existe un homomorfismo $h : \underset{i\in I}{*} G_i \to G$, que extiende cada uno de los h_i.*

Teorema 2.1.1.4. *(Primera versión del Teorema de Van Kampen)*
Sean $X = X_1 \cup X_2$, $A \cup B = X_1 \cap X_2$ donde:
i) X_1, X_2, A y B son arco conexos y abiertos en X.
ii) $A \cap B = \phi$.
iii) $\Pi_1(X_2) = \Pi_1(A) = \Pi_1(B) = \{e\}$.
Entonces $\Pi_1(X) \simeq \Pi_1(X_1) * \mathbb{Z}$.

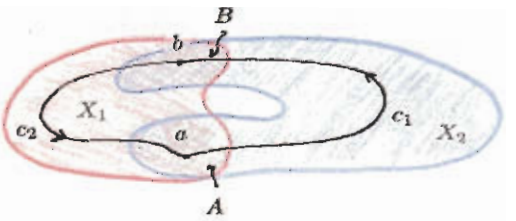


Figura 16

Esquema de la demostración. Sean $a \in A$, $b \in B$, c_1 un camino de X_2 que une a con b y c_2 un camino de X_1 que une b con a. Definimos $c = c_1 c_2$.

Sea a un punto base para X, entonces $[c] \in \Pi_1(X, a)$. Definimos $h : \Pi_1(X_1) * \mathbb{Z} \to \Pi_1(X)$ el homomorfismo inducido por los homomorfismos $i_* : \Pi_1(X_1) \to \Pi_1(X)$ y $\mathbb{Z} \to \Pi_1(X)$, $\gamma \to c$, donde $i : X_1 \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica y γ es un generador de $\mathbb{Z}$. Probaremos que h es un isomorfismo.

En efecto, diremos que un *camino es pequeño* (c.p.) si está totalmente contenido en X_1 o en X_2. Para cada $x \in X$ escogemos un c.p. (denotado por $d(x)$) que unirá x con

$$\begin{cases} a & \text{si} \quad x \in A \quad \text{y} \quad d(x) \quad \text{está contenido en } A \\ b & \text{si} \quad x \in B \quad \text{y} \quad d(x) \quad \text{está contenido en } B \\ a & \text{si} \quad x \notin A \cup B \quad \text{y} \quad d(x) \quad \text{está contenido en } X_i, \quad \text{si} \quad x \in X_i. \end{cases}$$

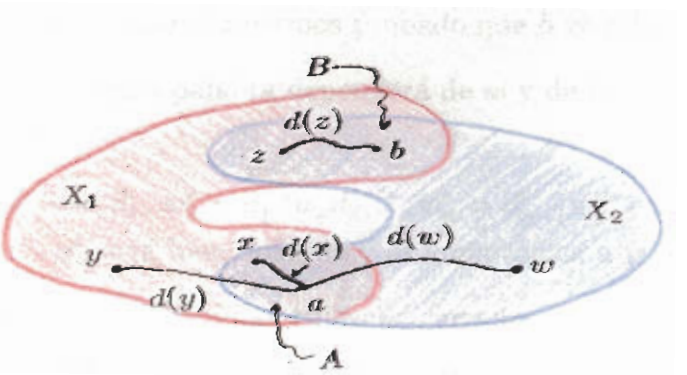


Figura 17

Sea w uu lazo de X basado en a. Dividimos w en un número finito de c.p. $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Su existencia se garantiza por la compacidad de I. Sean t_i, t_{i+1} los extremos de w_{i+1}, $i = 0, \cdots, n$. Denotaremos por d_i el c.p. $d(t_i)$, para todo $i = 0, \cdots, n$.

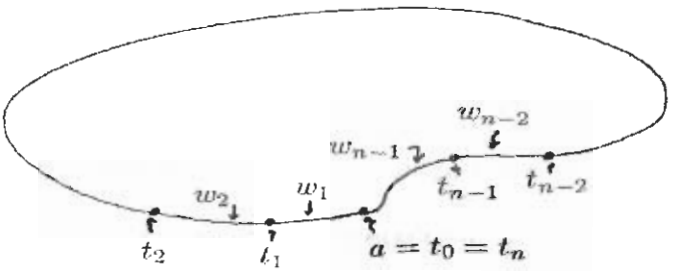


Figura 18

Vamos a construir una palabra que denotaremos $M(w,s)$ en $\Pi_1(X_1) * \mathbb{Z}$ tal que $h(M(w,s)) = w$ y de esta manera habremos probado que h es sobreyectiva.

Construcción de $M(w,s)$. Esta palabra dependerá de w y de la subdivisión en c.p. de w que llamaremos s.

Paso a. Definimos $w_1' = w_1 d_1$, $w_2' = d_1^{-1} w_2 d_2, \ldots w_n' = d_{n-1}' w_n$, entonces, dados w y s la palabra $w_1' w_2' \ldots w_n'$ está bien definida y es homotópica a w.

Paso b. De la lista $w_1' w_2' \ldots w_n'$ eliminamos los w_i' cerrados homotópicos a un punto en X_1 ó en X_2. Así, todos los lazos contenidos en X_2 quedan también eliminados, pues X_2 es simplemente conexo. Si w_i' conecta a b con a en X_2, entonces w_i' es homotópico al camino c_1^{-1} en X_2, entonces $w_i' \sim c_2 c_2^{-1} c_1^{-1} = c_2 c^{-1}$ (en X) y reemplazamos w_i' por $c_2 c^{-1}$ en la lista.

Si w_i' conecta el punto a con b en X_2, entonces $w_i' \sim c_1$ en X_2 y así $w_i' \sim c_1 c_2 c_2^{-1} = c c_2^{-1}$ y se reemplaza a w_i' por $c c_2^{-1}$.

Así w resulta ser un producto de caminos totalmente contenidos en X_1 o, en su defecto, por factores de la forma c ó c^{-1}.

Si en el proceso de eliminación de los w_i' se eliminaron todos, ponemos $M(w,s) = w_0$ en caso contrario:

Paso c. Juntamos los caminos consecutivos de X_1 que aparecen en la palabra w, éstos deben formar un lazo, pues los antecede y precede un elemento de la forma c ó c^{-1} que son lazos basados en a, este lazo contenido en X_1 lo reescribimos con una sola letra, por ejemplo α.

De esta forma la lista se convierte en una sucesión de lazos α_i de X_1 basados en a y de elementos de la forma c ó c^{-1}.

$M(w,s)$ será la palabra reducida de $W(E)/w_0$ (con $E = \Pi_1(X_1) \cup \mathbb{Z}$) escribiendo cada lazo α_i basado en a como $[\alpha_i] \in \Pi(X_1)$ y cada c por γ y c^{-1} por γ^{-1}.

Luego $h(M(w,s)) = [w]$ y entonces h es sobreyectiva.

Probemos ahora que h es inyectiva. Para conseguir ésto, observemos que $h(M(w,s)) = [w]$. Si probamos que $M(w,s)$ no depende de la subdivisión s, ni del representante de clase de $[w]$ y que, además, toda palabra reducida debe ser de la forma de $M(w,s)$, habremos probado la inyectividad.

Nótese que si existíese una palabra R, reducida que no fuera de la forma de $M(w,s)$ tendríamos que $M(h(R),s)$ sería una palabra reducida diferente a R, pero $h(R) = h(M(h(R),s))$ luego h no podría ser inyectiva. Buscando este fin probaremos algunas propiedades:

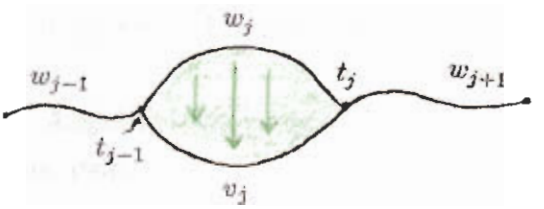


Figura 19

i) Si en $w = w_1 \cdots w_j \cdots w_n$ reemplazamos a w_j por v_j cuando w_j sea homotópico a v_j $(rel\{0,1\})$, entonces $M(w,s)$ no cambia. Probar esta afirmación. (*Clave*: Revisar los Pasos a, b y c y mostrar que dicho cambio no afecta a $M(w,s)$). Ver Figura 19.

ii) Si $w = w_1 w_2 \cdots w_i w_{i+1} \cdots w_n$ lo cambiamos por $w = w_1 w_2 \cdots w_i v w_{i+1} \cdots w_n$, donde v es un lazo basado en t_i (c.p.) completamente contenido en X_1 o en X_2 y homotópico a un punto (nulhomotópico) entonces $M(w,s)$ no cambiará pues de todas maneras esa parte se elimina en el Paso b.

Obsérvese que i) y ii) implican que $M(w,s)$ no depende del representante de clase.

iii) Si s' es una subdivisión obtenida de s subdividiendo el camino w_i en $w_i v_i$, entonces $M(w,s') \sim M(w,s)$ en $W(E)$. Es decir, $M(w,s)$ no depende de la subdivisión. Probar la anterior afirmación.

iv) Toda palabra reducida de $W(E)/w_0 = \Pi_1(X_1) * \mathbb{Z}$, es de la forma $M(w,s)$ (es decir, proviene de un lazo w y de una subdivisión s), pues necesariamente es de la forma $\gamma^{\pm n_1}[\alpha_1]\gamma^{\pm n_2}[\alpha_2]\gamma^{\pm n_3}\ldots$, $(n_i \in \mathbb{Z})$ y bastará tomar

$$w = (c_1c_2)^{\pm n_1}\alpha_1(c_1c_2)^{\pm n_2}\alpha_2(c_1c_2)^{\pm n_3}\ldots,$$

donde todos los elementos son c.p., y así, tomaremos ésta como la subdivisión s.

Ahora si $w = h(M(w,s)) = 1 \in \Pi_1(X)$ es porque $M(w,s) \sim w_0$, pues en caso contrario sería de la forma descrita en iv) y tendría términos no triviales y, por tanto, $w \neq 1$. Luego h es inyectiva. $\square$

Ejercicio 2.1.1.5.

a) Probar el **Corolario:** $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

b) Sea $X = A \cup B$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$. Calcular su grupo fundamental.

2.1.2. Preliminares Algebraicos necesarios para la segunda versión del Teorema de Van Kampen.

Sea E como en los Preliminares Algebraicos 2.1.1. Sean $\{(S_j, T_j)\}_{j\in J} \subset W(E) \times W(E)$, $R = \{S_j = T_j\}_{j\in J}$ un conjunto de relaciones. Permitiremos la siguiente clase de cambios o "jugadas" entre palabras.

iii) $a\ S_j\ b \leftrightarrows a\ T_j\ b$,

y decimos que $w \overset{R}{\simeq} w'$ si y sólo si se puede pasar de w a w' por un número finito de jugadas del tipo i) y ii) (Preliminares Algebraicos A) y del tipo iii). La clase del w_0 la denotaremos con w_R.

El conjunto de clases de equivalencia $W(E)/w_R$ es un grupo que denotamos con $*G_i/w_R$ y llamamos *el grupo cociente por R*.

Nótese que si se tienen conjuntos de relaciones equivalentes, por ejemplo, $R : \{S_j = T_j\}_{j\in J}$ y $R' = \{S_j T_j^{-1} = w_R\}_{j\in J}$, entonces $w \overset{R}{\simeq} w' \Longleftrightarrow w \overset{R'}{\simeq} w'$.

El producto libre $*_i\mathbb{Z}_i$ tal que $\mathbb{Z}_i \cong \mathbb{Z}$, para todo i, se llama *grupo libre*.

Teorema 2.1.2.1. *Sea G un grupo generado por $\{a_i\}_{i\in I}$, entonces existe un epimorfismo de grupos $h : *\mathbb{Z}_i \to G$ tal que $1_i \to a_i$ y, además, $* \mathbb{Z}_i/_{Kerh} \cong G$, donde $Kerh$ es el conjunto de relaciones.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.1.3. existe el homomorfismo h el cual es sobreyectivo, ya que todos los generadores de G pertenecen a $Im(h)$. □

Una *presentación* de un grupo consiste en exhibir los generadores del grupo junto con el conjunto de relaciones que cumplan entre ellos. Si G es generado por $a_1, a_2, \cdots$ con relaciones $S_1 = T_1, S_2 = T_2, \cdots$ una presentación para G es $< a_1, a_2, \cdots : S_1 = T_1, S_2 = T_2 \cdots >$. Por ejemplo, $< a : a^2 = e >$ es una presentación del grupo cíclico de orden 2, $\mathbb{Z}_2$.

Nota. En general un grupo admite diferentes presentaciones.

Ejercicio 2.1.2.2. Buscar distintas presentaciones para el grupo D_6, grupo dihedral de orden 6.

Es natural preguntarse cuándo dos palabras son equivalentes, es decir, ¿cuándo $w \overset{R}{\simeq} w'$? Con relación a esta pregunta aparece lo que hoy se conoce como *el problema de la palabra*: "Hallar un algoritmo que decida cuándo dos palabras son equivalentes". La respuesta a este problema en general es negativa.

Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, que se entienden diferentes, según el subíndice, H un grupo tal que para cada i en I existe un monomorfismo $j_i : H \hookrightarrow H_i < G_i$. Si $\mathcal{I} = \{j_i(a) = j_k(a) | a \in H, i, k \in I\}$ es un conjunto de relaciones en $\underset{i}{*}G_i$, el cociente $\underset{i}{*}G_i/\mathcal{I}$ se llama el *producto amalgamado* por H. Nótese que el símbolo $=$ en la definición de $\mathcal{I}$ es de orden formal.

Notación 2.1.2.3. Si $I = \{1, 2\}$, el producto amalgamado $\underset{i}{*}G_i/\mathcal{I}$ lo denotamos simplemente por $G_1 \underset{H}{*} G_2$.

Ejercicio 2.1.2.4. Probar que $\mathcal{I}$ es un subgrupo normal de $\underset{i\in I}{*} G_i$.

Si identificamos $j_i(a)$ con a para todo $a \in H$ y todo i en I y si $\underset{i\in I}{\cup} G_i = E$, entonces $G_i \cap G_j = H$ para todo $i \neq j$. Ahora, si tomamos $W(E)$ basta usar las jugadas i) y ii) de los Preliminares Algebraicos 2.1.1 para obtener la relación de equivalencia que define el cociente $\underset{i}{*}G_i/\mathcal{I}$, ya que la jugada iii) definida al comienzo de esta sección, está contenida al hacer las identificaciones $j_i(a) = a$.

Para G_i definimos la relación de equivalencia $a \overset{H}{\sim} b \iff ab^{-1} \in H$. De esta manera, G_i queda partido en clases a derecha H_g con respecto a H. Y E queda partido en clases disjuntas. Para cada clase diferente con respecto a H se toma un representante f. La colección de representantes la llamamos F.

Si $g \in E - H$, entonces existe $f \in F$ tal que $g = hf$. En particular un elemento de la forma fh será igual a un elemento $h'f'$ y si $f \in F \cap G_i$ entonces $fh \in G_i$ luego $h'f' \in G_i$ y así $f' \in F \cap G_i$. Es decir, tenemos $fh = h'f'$ lo que es cierta forma de "permutación" dentro de G_i. Esta "permutación" permite reducir las palabras.

Decimos que $w = hf_1 \cdots f_r$ es *F-reducida* si $h \in H$ y f_i, f_{i+1} no pertenecen a un mismo G_j para todo i entre 1 y $r - 1$.

Teorema 2.1.2.5. *Cada $\mathcal{I}$-clase contiene exactamente una palabra F-reducida.*

Ejercicio 2.1.2.6. Probar el teorema anterior (para algebristas).

Podemos entonces identificar el cociente $*G_i/\mathcal{I}$ con el conjunto de palabras F-reducidas.

Teorema 2.1.2.7. *Si para todo $i \in I$, existe un homomorfismo $h_i : G_i \to G$ tal que $h_i|_H = h_j|_H$, $i \neq j$, entonces existe un homomorfismo $h : \underset{i}{*}G_i/\mathcal{I} \to G$.*

Ejercicio 2.1.2.8. Definir h.

Teorema 2.1.2.9. *(Segunda versión del Teorema de Van Kampen, versión clásica.) Sean $X_1, X_2, X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2$ arco conexos y abiertos en $X_1 \cup X_2$, sea $a \in X_1 \cap X_2$ el punto base y para $i = 1, 2$, sean $k_i : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_i$, $j_i : X_i \hookrightarrow X_1 \cap X_2$ las inclusiones canónicas. Si $\mathcal{I} = \{k_{i_*}[\alpha] = k_{j_*}[\alpha], [\alpha] \in \Pi_1(X_1 \cap X_2)\}$, entonces*

$$\Pi_1(X_1 \cup X_2) = \Pi_1(X_1) * \Pi_1(X_2)/_{\mathcal{I}} = \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1\cap X_2)}{*} \Pi_1(X_2)$$

Esquema de la demostración. Sea $h : \Pi_1(X_1) * \Pi_1(X_2) \to \Pi_1(X_1 \cup X_2)$ tal que $h|_{\Pi_1(X_i)} = j_{i,*}$. Se puede ver que h es sobreyectiva con kernel igual al subgrupo $\mathcal{I}$. Probar la anterior afirmación. *Clave*: Desarrolle los siguientes pasos:

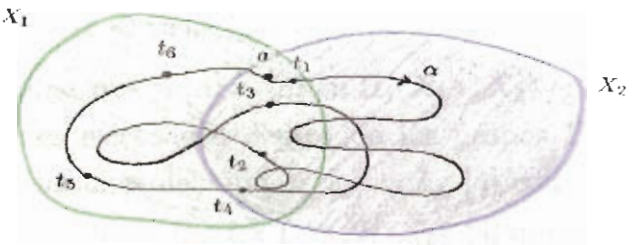


Figura 20

1) Tome α un lazo en $X_1 \cup X_2$.

2) Subdivida a α en caminos w_i de tal modo que cada camino esté completamente contenido en X_1 o en X_2, esta clase de caminos los llamamos pequeños (c.p.). Recuerde que X_1, X_2 son abiertos y que I es compacto.

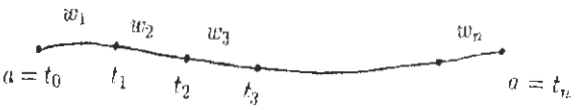


Figura 21

3) Sea d_i un camino que una a t_i con a, de modo que sea c.p.

4) d_0 y d_n son el lazo constante basado en a.

5) Defina $w_i' = d_{i-1} w_i d_i^{-1}$. Note que w_i' es c.p.

6) Descomponga α en w_i'.

7) Se tiene entonces que $[\alpha] = h([w_1'][w_2'] \cdots [w_n'])$ donde $[w_i'][w_2'] \cdots [w_n'] \in \Pi_1(X_1) * \Pi_2(X_2)$, luego h es sobreyectiva.

8) Nótese que si α y β son lazos contenidos en X_1 y X_2, respectivamente. Y si γ es un lazo en $X_1 \cap X_2$ y $[\alpha] = [\gamma]$ como elementos de $\Pi_1(X_1)$ y $[\beta] = [\gamma]$ como elementos de $\Pi_1(X_2)$, trivialmente se tiene que $[\alpha] = [\beta]$ como elementos de $\Pi_1(X_1 \cup X_2)$.

9) Aún se debe probar que si $[\alpha] = [\beta]$ en $\Pi_1(X_1 \cup X_2)$ entonces existe un número finito de operaciones efectuadas dentro de los grupos $\Pi_1(X_1)$ y $\Pi_1(X_2)$ o que provienen de las relaciones del tipo $k_{i_*}[\gamma] = k_{j_*}[\gamma]$ con $[\gamma] \in \Pi_1(X_1 \cap X_2)$ Para probar este numeral, tómese $H : I \times I \to X_1 \cup X_2$ tal que $\alpha \overset{H}{\sim} \beta$. Y subdivida $I \times I$ en una rejilla de pequeños cuadrados de modo que cada cuadrado caiga completamente en X_1 o en X_2 bajo la aplicación H. Ver Figura 22.

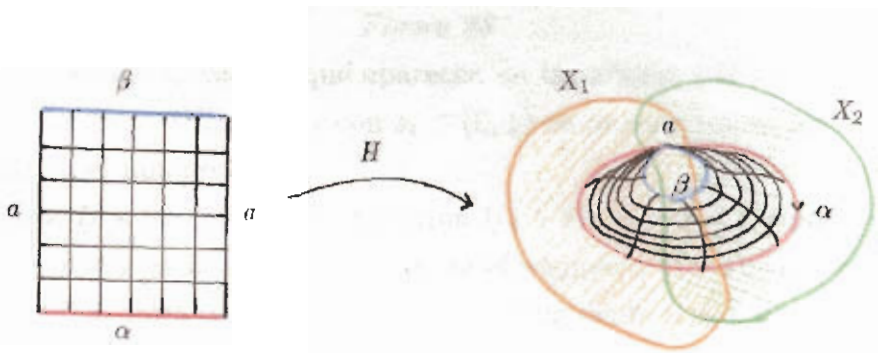


Figura 22

Y ahora extienda H de la siguiente manera: tómese el cubo $I \times I \times I$, defina $H' : I^3 \to X_1 \cup X_2$ tal que $H'|_{\text{base del cubo}} = H$. Si (s_1, s_2) es un vértice de la rejilla de $I \times I$, tomamos $H'|_{(s_1,s_2)\times I}$ como un camino que una $H(s_1, s_2)$ con a y

de tal modo que esté contenido en X_i si $H(s_1, s_2) \in X_i$ o contenido en $X_1 \cap X_2$ si $H(s_1, s_2) \in X_1 \cap X_2$.

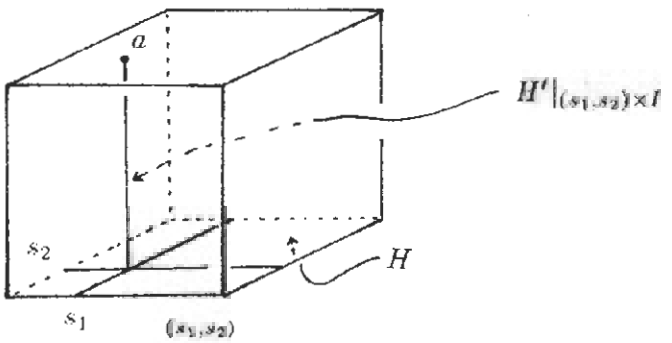


Figura 23

Obsérvese que las subdivisiones que aparecen en las aristas $\{0\} \times I \times \{0\}$ y $\{1\} \times I \times \{0\}$, y los caminos $H'|_{(s_1,s_2)\times I}$ con $s_i \in \{0, 1\}$ se pueden tomar para expresar a α y a β como en el numeral 6.

Extienda ahora H a las paredes de la forma $((1-t)v + tw) \times I$, donde v y w son vértices consecutivos en la rejilla, es decir, en el segmento $(1-t)v + tw$ no hay otro vértice de la rejilla. Para esta extensión utilice el siguiente truco, llamado extensión por proyección solar. Ver Figura 24.

A lo largo de cada línea l la función H' se define constante. Y por un truco similar, defina H' en los prismas cuyos vértices son consecutivos dos a dos en forma cíclica. Observe que la imagen bajo H' de cada uno de estos prismas estará completamente contenida en X_1 o en X_2. Ver Figura 25.

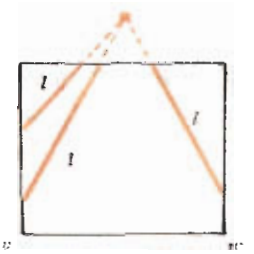


Figura 24

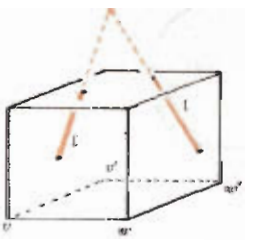


Figura 25

Finalmente, utilice a H' para efectuar un número finito de operaciones del tipo que se describen al comienzo del numeral 9. $\square$

El Teorema de Van Kampen es una herramienta muy útil en el cómputo del grupo fundamental. La segnnda versión del Teorema de Van Kampen nos dice, *"intuiti-*

vamente", que si se pegan dos espacios X_1 y X_2 a lo "largo" de un conjunto A, los lazos que "vivían" en A, tomado como subconjunto de X_1, deben coincidir con los mismos lazos de A cuando se considera como subconjunto de X_2.

2.2. Cálculo del Grupo Fundamental en algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1. Sea $S^1 \vee S^1$ el espacio formado por dos círculos pegados por un punto. Y sean X_1 y X_2 como en la figura:

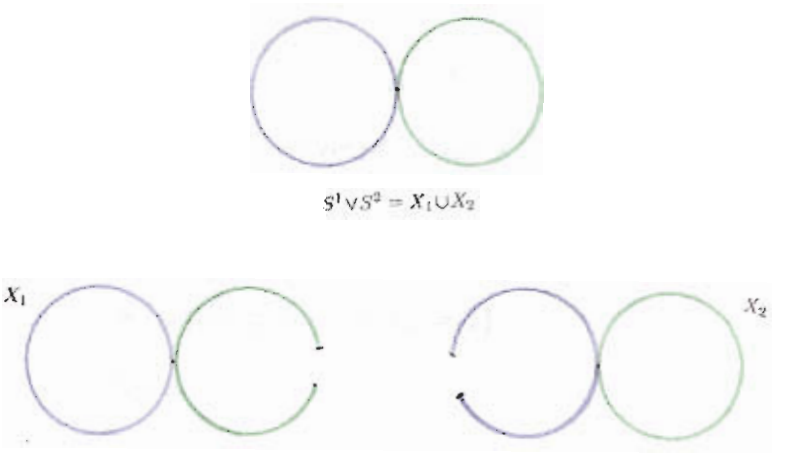


Figura 26

Luego $X_1 \cong X_2 \cong S^1$ y $\Pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z} \cong \Pi_1(X_2)$. Por otro lado $X_1 \cap X_2$ es contractible a un punto. Luego $\Pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} \underset{\{0\}}{*} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Obsérvese que el grupo fundamental de $S^1 \vee S^1$ es isomorfo al grupo fundamental del espacio X del Ejercicio 1.1.5.b).

Ejercicio 2.2.2. Generalizar el literal anterior, es decir, calcular $\Pi_1(\bigvee_k S^1)$ para k círculos con un mismo punto común.

Ejemplo 2.2.3. $\Pi_1(S^2) \cong \{0\}$. Sean X_1 y X_2 como lo indica la figura:

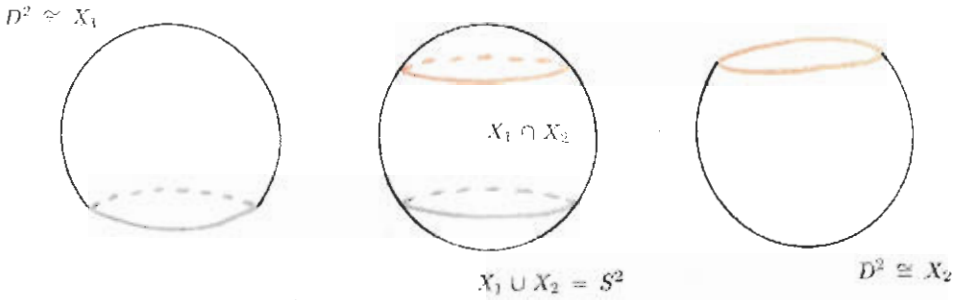


Figura 27

Entonces $X_1 \simeq X_2 \simeq D^2$ y S^1 es retracto de $X_1 \cap X_2$. Luego $\Pi_1(X_1 \cup X_2) \cong \{0\} \underset{\mathbb{Z}}{*} \{0\} \cong \{0\}$.

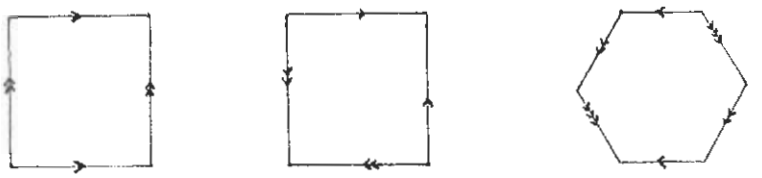
Ejemplo 2.2.4. $\Pi_1(S^n) = \{0\}$ para $n \geq 2$, donde
$S^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

Ejercicio 2.2.5. Calcularlo!

Nota 2.2.6. Es bien conocido que una variedad conexa, compacta y sin frontera de dimensión 2, es decir, una **superficie cerrada**, es una esfera, una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. (La suma conexa de dos superficies se obtiene al quitarles a cada una un disco y después pegarlas a lo largo de la frontera de los discos que se quitaron, ver Figura 32.) En la literatura se pueden encontrar diferentes demostraciones de este resultado, siendo una de las más conocidas la que aparece en Massey [8] (consultar también [12]). El esquema de tal demostración, consiste en establecer que toda superficie cerrada se puede construir identificando (o "pegando") por parejas los lados de un polígono que tiene un número par de lados.

En el Ejercicio 3.7 a), del capítulo anterior, dijimos que un Toro se puede considerar

como un cuadrado con sus lados identificados convenientemente. Igualmente, los polígonos de la Figura 28 representan distintas superficies. Las flechas y letras que aparecen sobre los lados de los polígonos indican cómo se identifican los lados. Obsérvese que las Figuras 28 (a) y 28 (c) muestran que una misma superficie puede obtenerse de distintas maneras.



a) Toro b) Esfera c) Toro

Figura 28

Ejemplo 2.2.7. Grupo fundamental de un toro.

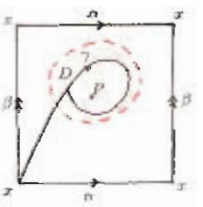


Figura 29

Si $T = S^1 \times S^1$ ya sabemos (Ejercicio 3.7 b) del Capítulo 1) que $\Pi_1(S^1 \times S^1) \cong \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Utilizando Van Kampen, probemos el mismo resultado:

Sean $X_1 = T - \{p\}$, donde p es un punto en T, $X_2 = \overset{\circ}{D}$ disco abierto que contenga a p. Ver Figuras 29 y 30. S^1 es retracto de deformación fuerte de $X_1 \cap X_2$ y $S^1 \vee S^1$ es retracto de deformación fuerte de X_1. Luego $\Pi_1(T) \cong \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1 \cap X_2)}{*} \Pi_1(X_2) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{*} \{0\}$.

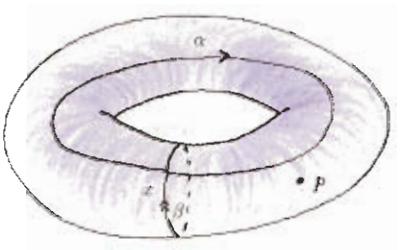


Figura 30

Sean α y β generadores de $\Pi_1(X_1)$ y γ generador del grupo $\Pi_1(X_1 \cap X_2)$.

Nota 2.2.8. Mientras no haya lugar a confusión, la clase de un lazo se denotará con la misma letra que el lazo sin colocar los corchetes.

Como T es arco conexo, sin pérdida de generalidad, podemos tomar como punto base al punto x (ver la figuras). Vemos que $k_{1*}(\gamma) = \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta$ y $k_{2*}(\gamma) = e$, donde $(k_i : X_1 \cap X_2 \to X_i)$, $i = 1, 2$, luego $\Pi_1(T) =< \alpha, \beta : \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta >= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el cual es un grupo libre donde los generadores conmutan.

Ejercicio 2.2.9. Calcular $\Pi_1(S^2)$ utilizando la representación de S^2 como un polígono de dos lados (dígono) identificados como lo indica la figura siguiente.

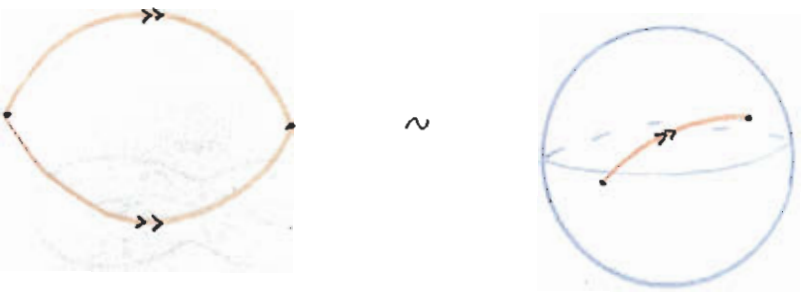


Figura 31

Ejemplo 2.2.10. Grupo fundamental de la suma conexa de 2 toros.

Sea $T\#T = (S^1 \times S^1)\#(S^1 \times S^1)$ la suma conexa de dos toros. La suma conexa de dos superficies se obtiene al quitarles a cada una un disco y después pegarlas a lo largo de la frontera de los discos que se quitaron (ver figura).

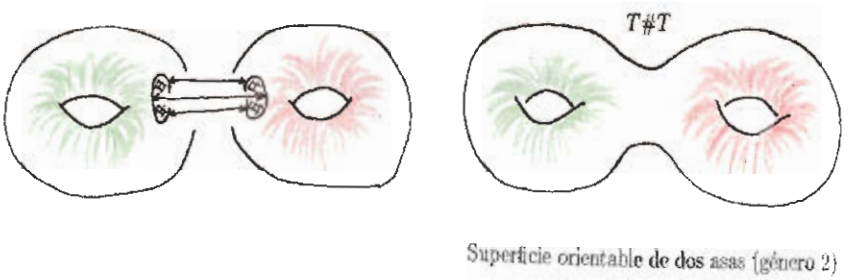


Figura 32

Esta suma conexa de dos toros la podemos representar por un octágono con sus lados identificados por parejas:

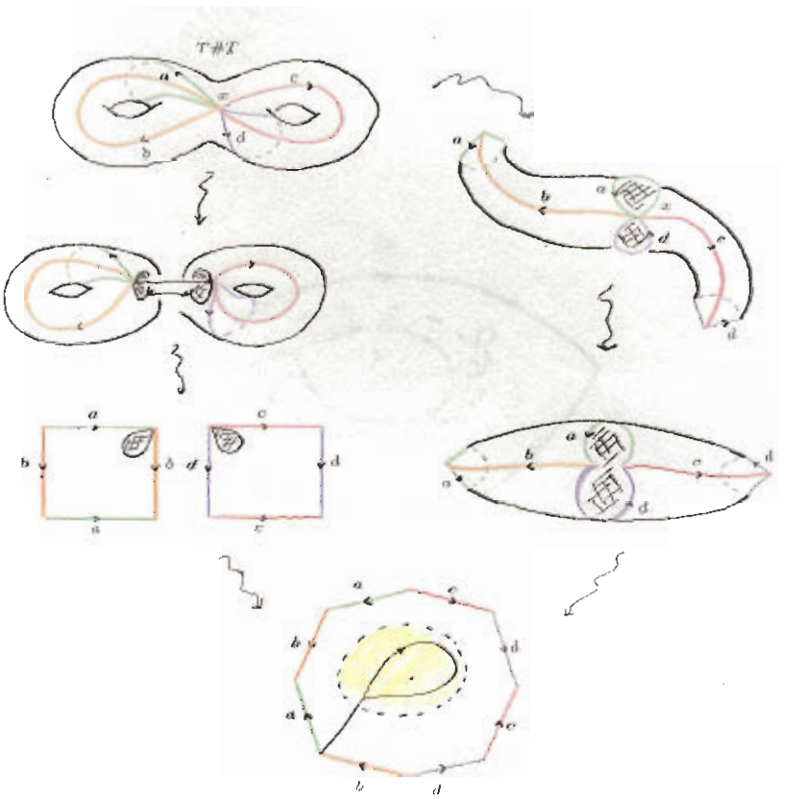


Figura 33

Sean $p \in \overset{\circ}{D}$, $X_1 = (T\#T) - p$, entonces $\bigvee_4 S^1$ es retracto de deformación fuerte de X_1 Y si $X_2 = \overset{\circ}{D}$, S^1 es retracto de deformación fuerte de $X_1 \cap X_2$. Además, si a, b, c, d son generadores de $\Pi_1(X_1)$ y f es generador de $\Pi_1(X_1 \cap X_2)$ entonces $k_{1_*}(f) = bab^{-1}a^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. Así pues, $\Pi_1(T\#T) = \Pi_1(X_1 \cup X_2) \cong \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1 \cap X_2)}{*} \Pi_1(X_2)$ $\cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{*} \{0\} =< a, b, c, d : bab^{-1}a^{-1}cdc^{-1}d^{-1} >$.

Ejercicio 2.2.11.
¿Cuál es el grupo fundamental de la suma conexa de n toros?
Ejemplo 2.2.12. El grupo fundamental de superficies no orientables.
Calculemos el grupo fundamental del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$, $\Pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Consideramos el plano proyectivo como un disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$ cuyos puntos de la frontera diametralmente opuestos se han identificado por parejas. También se puede considerar como el dígono de la Figura 34 con sus lados identificados como lo indican las flechas.

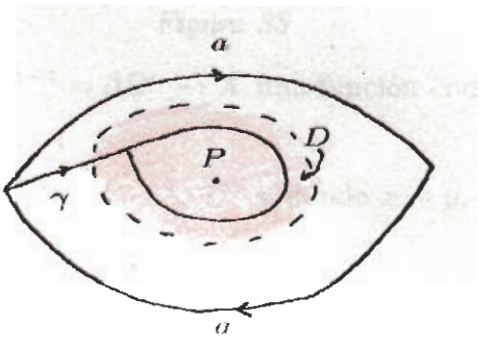


Figura 34

Sean $X_1 = \mathbb{R}P^2 - \{p\}$, donde $p \in$ disco $D \subset P$, $X_2 = \overset{\circ}{D}$. Entonces S^1 es retracto de deformación fuerte de $X_1 \cap X_2$ y también de X_1. (¿Por qué?). Luego $\Pi_1(\mathbb{R}P^2) = \Pi(S^1) \underset{\Pi_1(S^1)}{*} \{0\} \cong \langle a/a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.
Ejercicio 2.2.13. ¿Cuál es el grupo fundamental de una suma conexa de k planos proyectivos?
Ejemplo 2.2.14. Grupo fundamental de un espacio al cual se le adiciona una n-celda, ($\cong D^n$).

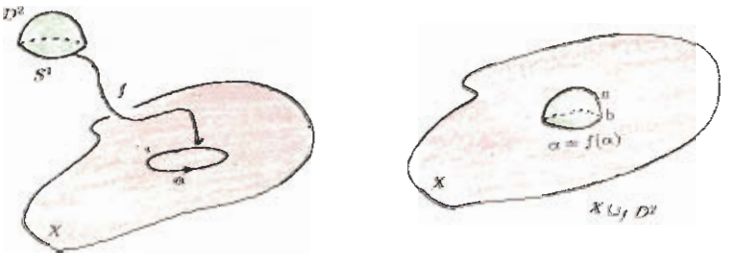


Figura 35

Sean X un espacio y $f : S^{n-1} = \partial D^n \to X$ una función continua. Consideremos el siguiente espacio cociente:

$X \cup D^n/\sim$, el cual denotamos por $X \underset{f}{\cup} D^n$ y donde $x \sim y$, si $x = f(y)(x \in X, y \in S^{n-1} = \partial D^n$.

Caso $n = 1$. Por el Primer Teorema de Van Kampen $\Pi(X \underset{f}{\cup} D^1) \cong \Pi_1(X) * \mathbb{Z}$.

Caso $n = 2$. Tómese X_1 y X_2 como lo muestra la Figura 36.

Figura 36

Entonces X es un retracto de deformación fuerte de X_1 luego $\Pi_1(X_1) = \Pi_1(X)$.

Ejercicio 2.2.15. Defina una retracción $r : X_1 \to X$.

Sea $X_2 = D^2$, luego $\Pi_1(X_2) \cong \{0\}$ y si $X_1 \cap X_2$ es el anillo entre los "paralelos" a y b de la figura, entonces $\Pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora, si m es un generador de $\Pi_1(S^1)$, $k_{1_*}(m) = \alpha = [f_*(m)]$, donde α es $f(S^1) = f(\partial D^2)$. Luego $\Pi_1(X \underset{f}{\cup} D^2) \cong \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1 \cap X_2)}{*} \Pi_1(X_2) \cong \Pi_1(X) \underset{\mathbb{Z}}{*} \{0\} = \langle$generadores de $X : \alpha\rangle$.

Caso $n \geq 3$.

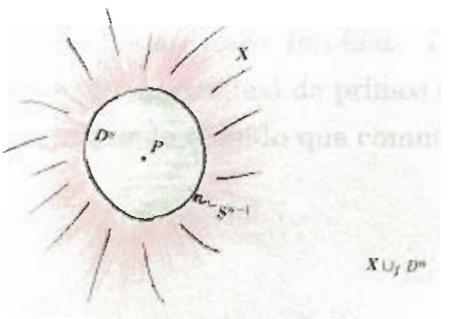


Figura 37

Sea $X_1 = (X \underset{f}{\cup} D^n) - p$, donde $(p \in \overset{\circ}{D^n})$ entonces X es un retracto de deformación fuerte de X_1, luego $\Pi_1(X) \cong \Pi_1(X_1)$ (nótese que X está pegado al exterior de D^n). Y si $X_2 = \overset{\circ}{D^n}$, entonces $\Pi_1(X_2) \cong \{0\}$. Por otro lado, S^{n-1} es un retracto de deformación fuerte de $X_1 \cap X_2$, luego $\Pi(X_1 \cap X_2) \cong \{0\}$ para $n \geq 3$, y así $\Pi_1(X \underset{f}{\cup} D^n) \cong \Pi_1(X) \underset{\{0\}}{*} \{0\} \cong \Pi_1(X)$, luego el grupo fundamental no cambia.

Ejercicios 2.2.16.

a) Defina para este caso una retracción $r : X_1 \to X$.

b) Mostrar que $\Pi_1(\vee_{i=-\infty}^{\infty} S^1) \cong *_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}$ grupo libre con conjunto de generadores $\mathbb{Z}$.

c) ¿Cuál es $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1 \times \{0\})$?

d) Muestre que para todo $n \geq 2$ existe un monomorfismo del grupo libre con n generadores en el grupo libre con 2 generadores.

2.3. El Grupo Fundamental de un Nudo.

Definiciones 2.3.1. Un subconjunto N de $S^3 \cong \mathbb{R}^3 + \infty$ homeomorfo a S^1 es llamado un *nudo*, el *grupo del nudo* N es el grupo fundamental de su complemento, es decir, $\Pi_1(S^3 - N)$. Decimos que dos nudos N y N' son *equivalentes* si existe un homeomorfismo de S^3 en S^3 que envía a N en N' (si N y N' fuesen orientados, al homeomorfismo se le exigirá además que preserve la orientación). Un nudo se llama *trivial* si es equivalente al círculo $S^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 + \infty$.

Ejemplo 2.3.2. Grupo fundamental de nudos toroidales.

Un nudo equivalente a un nudo que esté contenido en un toro $T^2 \cong S^1 \times S^1$ (recuerde que el toro es una superficie!) se llama *nudo toroidal.* Los nudos toroidales se clasifican (ver [10]) según parejas (no ordenadas) de primos entre sí. Por ejemplo, a la pareja de primos $\{3, 2\}$ le corresponde el nudo que comunmente es conocido con el nombre de trébol.

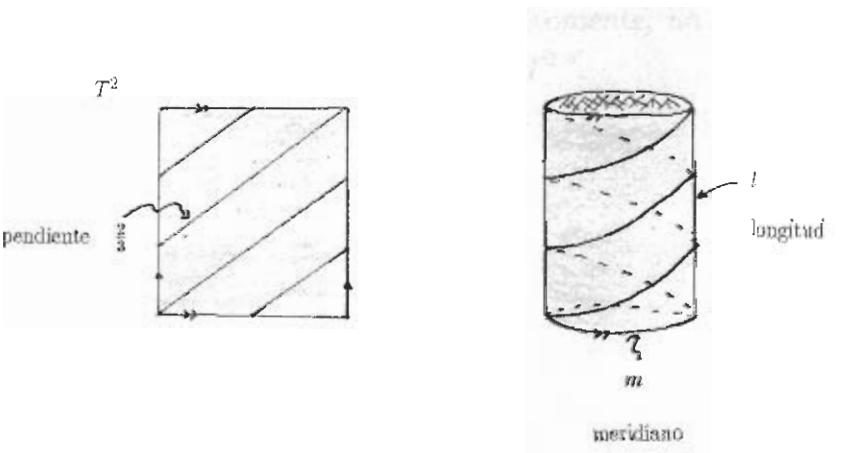


Figura 38

Obsérvese que se dan tres vueltas en el sentido del meridiano m y dos en el sentido de la longitud ℓ. En la figura vemos dos presentaciones gráficas del trébol, denotado

por $\{3,2\}$.

Figura 39

Ejercicio 2.3.2.1. Dibujar los nudos $\{5,2\}, \{5,3\}$.

Calculemos ahora $\Pi_1(S^3 - \{3,2\})$. Para esto utilizaremos la propiedad de S^3 que nos dice que dado un toro T^2 contenido en S^3, entonces $S^3 = X \cup Y$, donde X e Y son toros macizos tales que $X \cap Y = T^2$. *"Intuitivamente, un toro T^2 divide a S^3 en dos toros macizos, uno dentro y otro fuera de T^2".*

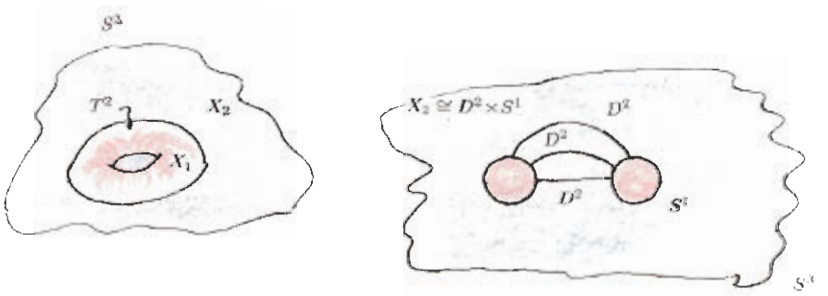


Figura 40

Ejercicios 2.3.2.2.

a) Piense lo que significa la anterior propiedad; visualice los toros y describa con palabras o haga un dibujo de lo que está "viendo".

b) ¿Será que una esfera S^2 divide a S^3 en dos regiones y cada una de ellas es una bola maciza D^3? Trate de explicar su respuesta, así sea con un dibujo.

c) ¿Será que un doble toro $T\#T$ divide a S^3 en dos regiones y cada una de ellas es un doble toro macizo? Trate de explicar su respuesta, así sea con un dibujo.

Ahora, si $X_1 = X - \{3,2\}$ y $Y_1 = Y - \{3,2\}$, entonces $S^3 - \{3,2\} = X_1 \cup Y_1$ y $X_1 \cap Y_1 = T^2 - \{3,2\}$.

Como X_1 es un toro macizo al cual se le ha quitado sólo una curva superficial, entonces S^1 es un retracto de deformación de X_1 y así $\Pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}$. Denotemos con la letra A a su generador (ver Figura 41). Similarmente, $\Pi_1(Y_1) \cong \mathbb{Z}$ y sea B su generador (ver Figura 42).

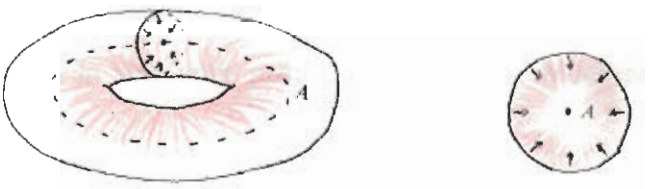


Figura 41

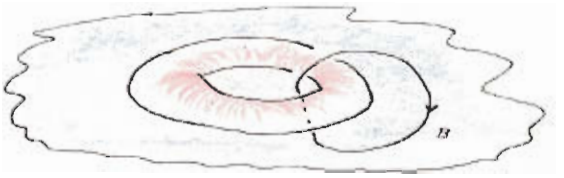


Figura 42

Por otro lado, como $T^2-\{3,2\}$ es un anillo (¿Por qué?), entonces $\Pi_1(T^2-\{3,2\}) \cong \mathbb{Z}$ y llamemos α su generador, $\alpha \sim 3m+2\ell$. Se vé entonces que al inyectar a α dentro de X_1, es decir, considerándolo como elemento de X_1, lo que contribuye el meridiano se anula, quedando $2\ell \sim 2A$. Similarmente, α inyectado en Y_1 se convierte en $3B$.

Tenemos entonces que: $\Pi_1(S^3-\{3,2\}) \cong \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1\cap Y_1)}{*} \Pi_1(Y_1) \cong \langle A,B : 2A = 3B\rangle$, donde $k_{1_*}(\alpha) = 2A$ y $k_{2_*}(\alpha) = 3B$. En notación multiplicativa $\langle A,B : A^2 = B^3\rangle$

En general se puede probar que para un nudo $\{p,q\}$ $(mcd\ (p,q) = 1)$ entonces $\Pi_1(S^3-\{p,q\}) \cong \langle A,B : A^q = B^p\rangle$.

Ejercicio 2.3.2.3.

Nótese que en el anterior razonamiento los conjuntos X_1 y X_2 no son abiertos, como lo exige el Teorema de Van Kampen. Pruebe que estos conjuntos se podrían redefinir, para que cumplan las condiciones de dicho teorema.

Ejemplo 2.3.3. El grupo fundamental de un nudo cualesquiera.

Consideremos un nudo N contenido en $\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Queremos calcular el grupo del nudo N, $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N)$.

Supongamos que tenemos la siguiente proyección plana de N sobre el plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

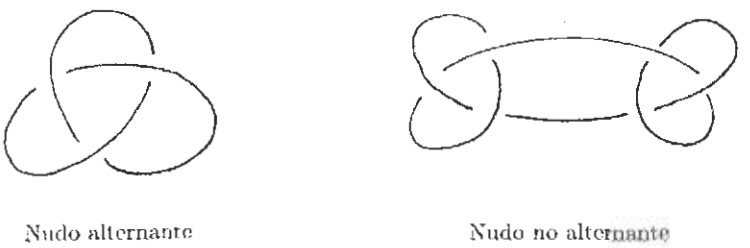


Figura 43

A continuación colocamos puntos sobre el nudo de la siguiente manera:

- Si cuando estamos recorriendo el nudo, dos cruces seguidos se alternan, es decir, uno se pasa por debajo y a continuación el otro se pasa por arriba o viceversa, entre estos cruces colocamos un solo punto.

- Si por el contrario los cruces no se alternan, colocaremos dos puntos entre los cruces.

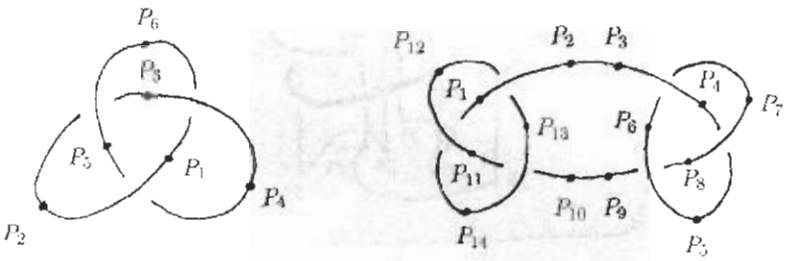


Figura 44

Ahora, comenzando por un arco que pase por encima de un cruce, engrosamos alternadamente porciones del nudo así:

Figura 45

Habrá entonces tantos segmentos gruesos como delgados a lo largo del nudo. Ahora, reemplazamos cada segmento delgado de N, por ejemplo, el limitado por los puntos P_i y P_{i+1}, por la curva obtenida al unir la proyección del segmento sobre el plano $z = 0$, con los segmentos que unen los puntos P_i y P_{i+1} del nudo con sus respectivas proyecciones P'_i y P'_{i+1}. En el caso del trébol, y mirándolo lateralmente, éste quedaría así:

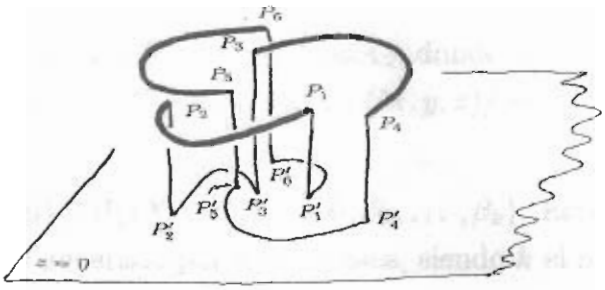


Figura 46

Claramente, el nudo obtenido después de esta deformación, es equivalente al nudo inicial, el cual seguiremos denotando por N.

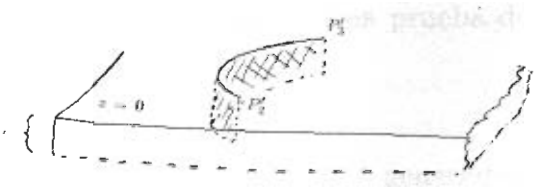


Figura 47

Ahora las curvas que están sobre el plano $z = 0$ las deformaremos estirándolas hacia abajo en forma de lámina una distancia ϵ, en otras palabras los planos $z = k, -\epsilon < k < 0$ $(\epsilon > 0)$ son copias del plano $z = 0$, incluyendo las curvas.

Sea N' el conjunto formado por la unión del nudo N con estas láminas. $\mathbb{R}^3 - N'$ es entonces homeomorfo a $\mathbb{R}^3 - N$. Bastará pues, calcular $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N')$ para obtener el grupo del nudo N.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^3 - N' = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = \{(x, y, z)/z > -\epsilon\} - N'$, $X_2 = \{(x, y, z)/z < 0\} - N'$ y $X_1 \cap X_2 = \{(x, y, z)/-\epsilon < z < 0\} - N'$.

Claramente, $\Pi_1(X_2) = \{0\}$ y $\Pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \rangle$. Este último grupo, no es más que el grupo libre generado por k elementos, siendo k el número de láminas o número de segmentos delgados en la Figura 45.

Ejercicio 2.3.3.1.

a) Definir un homeomorfismo entre F y G, donde $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ y } -0.5 \leq y \leq 0.5\}$

b) Visualice los conjuntos X_1 y X_2 y escriba una prueba de que $\Pi_1(X_2) = \{0\}$ y $\Pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \rangle$.

Veremos ahora que $\Pi_1(X_1)$ es libre generado por k generadores, donde k es también el número de curvas más gruesas superiores de la Figura 45. En efecto, si $A = \{(x, y, z) | z > 0\} - N'$, se puede ver que A es homeomorfo a X_1. Calculemos entonces $\Pi_1(A)$.

Sea $B = \{(x, y, z) | z > 0\} - \cup_{i=1}^{k} C_i$, donde $C_i = \{(x, y, z) | x = i, y^2 + z^2 = 1\}$. Es decir, B es el semiespacio superior al cual se le han quitado k semicircunferencias.

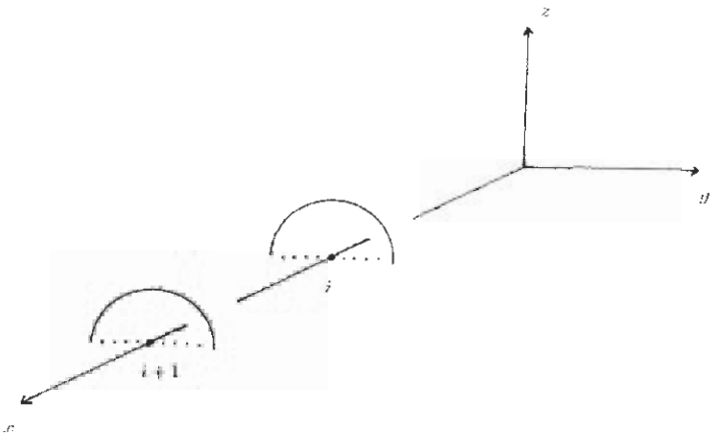


Figura 48

Ahora, si B' es el conjunto $\{(x,y,z)/y=0, z>0\} - \cup_{i=1}^{k} C_i$, B' es un semiplano con k huecos en los puntos de coordenadas $\{(i,1,0)\}_{i=1}^{k}$ y por tanto su grupo fundamental es libre y está generado por k elementos. Además, es posible ver que B' es un retracto de deformación fuerte de B.

Ejercicio 2.3.3.2. Probar la última afirmación. *Clave:* Cierre a B como un libro con lomo el eje x.

Si denotamos por x_i, $1 \leq i \leq k$, las curvas gruesas de la Figura 46 y por α_i el generador de $\Pi_1(X_1)$ correspondiente a x_i, tenemos entonces $\Pi_1(X_1) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$. Así pues, $\Pi_1(\mathbb{R} - N') \cong \Pi_1(X_1) \underset{\Pi_1(X_1 \cap X_2)}{*} \Pi_1(X_2) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle \underset{\langle \beta_1, \ldots, \beta_k \rangle}{*} \langle e \rangle$.

Debemos ver entonces cómo se inyectan los β_i en el grupo $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ para encontrar las relaciones en $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N')$.

En la Figura 45 observamos, que para las líneas delgadas sólo hay dos posibilidades

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

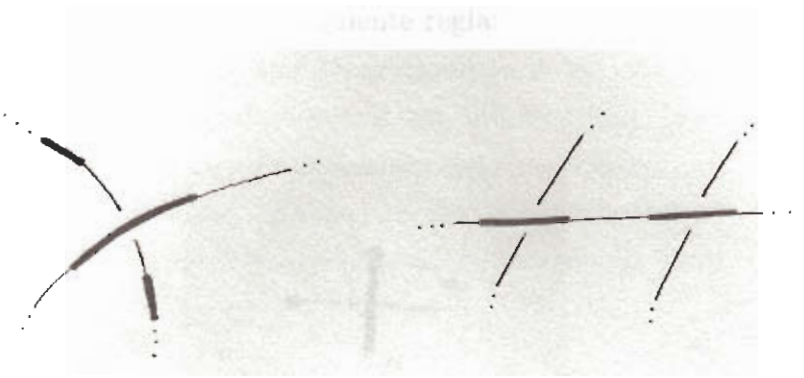


Figura 49 a) *Figura 49 b)*

o hay una línea gruesa que la cruza superiormente o no la hay.

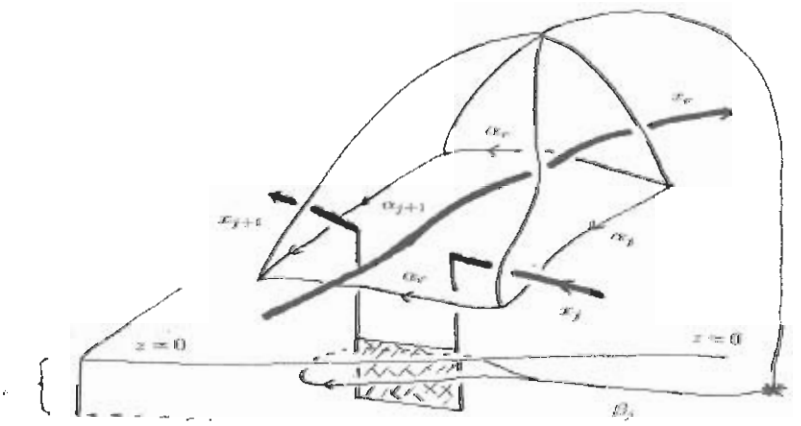


Figura 50

Consideremos el caso detallado en la Figura 49 a), el cual llamaremos Caso a).

La Figura 50 nos muestra que $\beta_j = \alpha_j \alpha_r \alpha_{j+1}^{-1} \alpha_r^{-1}$.

Nota: Los α_i se orientan según la siguiente regla:

Figura 51

En el Caso b) (detallado en la Figura 49 b)), $\beta_j = \alpha_j e \alpha_{j+1}^{-1} e^{-1}$ luego $\beta_j = \alpha_j \alpha_{j+1}^{-1}$. Ver figura siguiente.

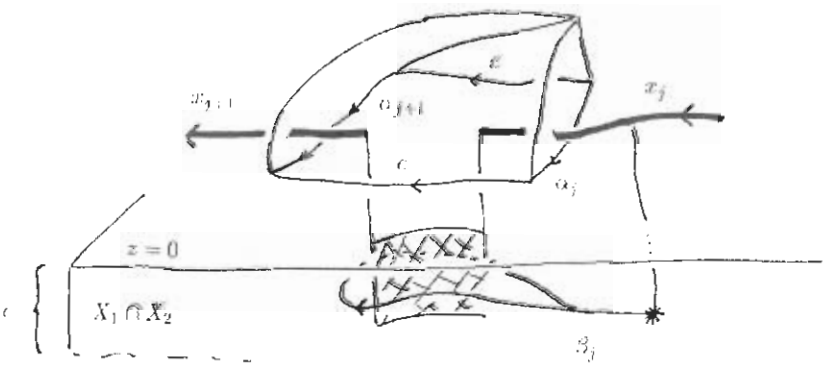


Figura 52

Ahora, como los β_j se inyectan en $\Pi_1(X_2)$ en e. En cualquiera de los dos casos, a)

ó b), la relación que aparece la llamaremos r_j. Tendremos entonces que:

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - N') = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k : r_1, \ldots, r_k \rangle.$$

Esta presentación la podemos simplificar eliminando las relaciones que entran por el Caso b) y con cada una de ellas se elimina, también, uno de los generadores que en ella intervienen, quedando sólo relaciones del tipo $\alpha_j \alpha_r \alpha_{j+1}^{-1} \alpha_r^{-1}$ (Caso a)).
Además es posible probar que una cualquiera de las relaciones r_i depende de las otras, o sea que podemos eliminar por ejemplo la relación r_k. Para ver esto, bastaría tomar un lazo β en $X_1 \cap X_2$ que rodee todas las láminas.

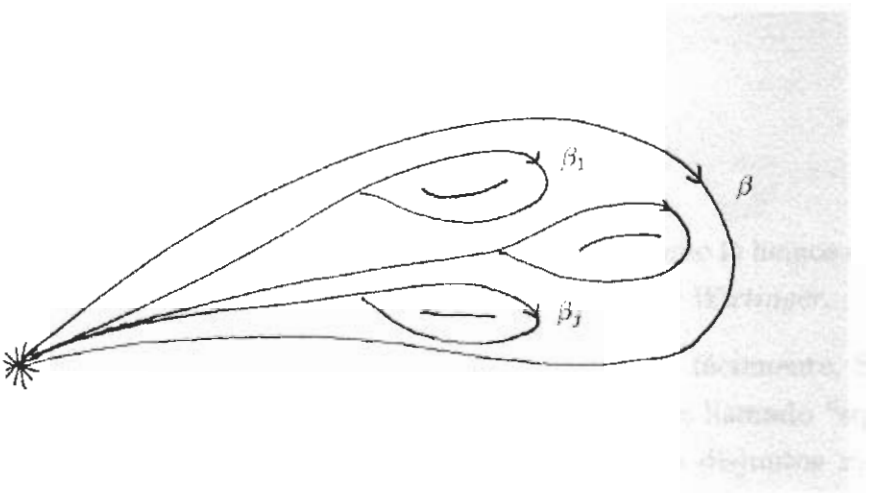


Figura 53

Claramente, β es un producto de todos los β_i (o de sus inversos), pero además β, así escogido, se inyecta en e en $\Pi_1(X_1)$. Ver la Figura 54.
Lo que implica que el producto de las r_i es trivial y, por lo tanto, una de estas relaciones se puede eliminar quedando una presentación con una relación menos que el número de generadores.

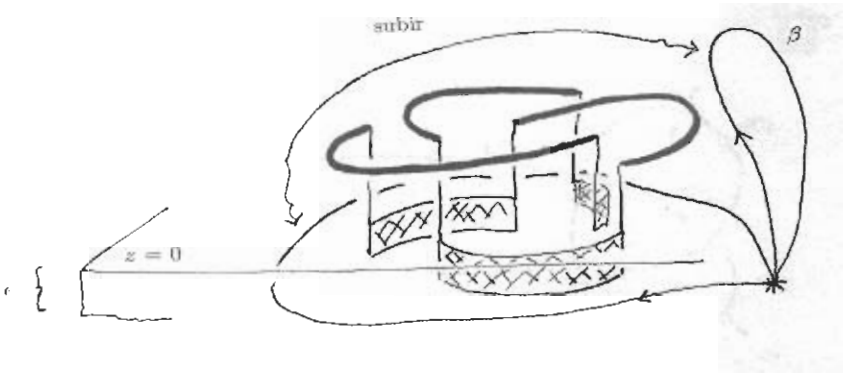


Figura 54

Definición 2.3.3.3.
La presentación del grupo fundamental de un nudo, obtenida como lo hemos descrito en los párrafos anteriores, es conocida como la *presentación de Wirtinger.*

A continuación describiremos cómo encontrar esta presentación fácilmente. Supongamos que tenemos el nudo orientado de la Figura 55, el cual es llamado "square". Observamos que su dibujo está hecho por una serie de arcos disjuntos x_i. Por cada uno de estos arcos tendremos un generador del grupo fundamental α_i que lo pensaremos basado en un punto suspendido sobre el dibujo, y que pasa debajo del arco en la dirección derecha-izquierda con respecto a la orientación fijada en el nudo. El α_i lo ilustraremos sólo con una pequeña flecha.

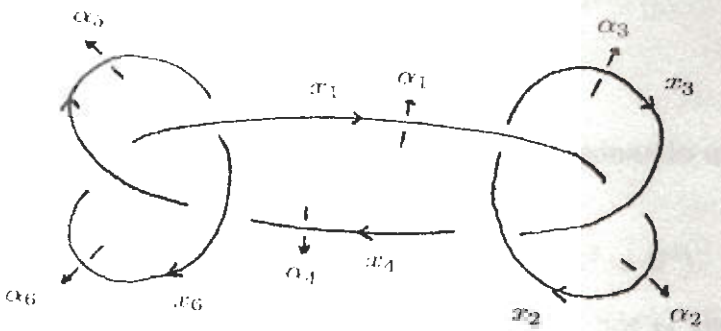


Figura 55

Y ahora cada cruce del diagrama nos proporcionará una relación, la cual dependerá del tipo de cruce, así:

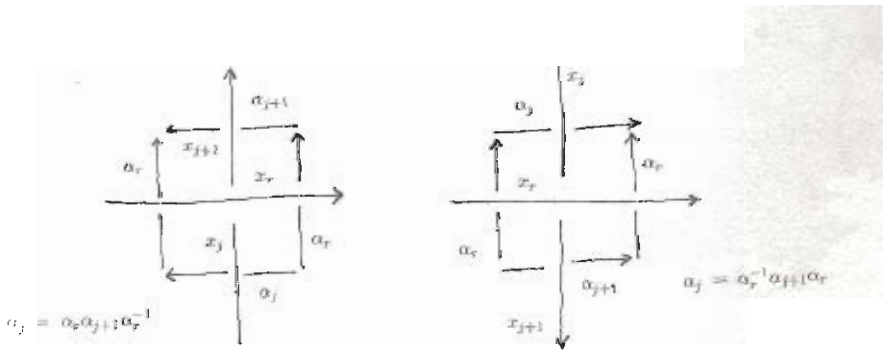


Figura 56

Teniendo en cuenta lo anterior, una presentación para el nudo N "square" será:

$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \ : \ \alpha_5\alpha_1^{-1}\alpha_6^{-1}\alpha_1, \ \alpha_2\alpha_1\alpha_3^{-1}\alpha_1^{-1}, \ \alpha_1\alpha_3\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}, \ \alpha_3\alpha_2\alpha_4^{-1}\alpha_2^{-1}, \ \alpha_4\alpha_6^{-1}\alpha_5^{-1}\alpha_6, \ \alpha_6\alpha_5^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_5\rangle$.

Como una de las relaciones puede ser eliminada, se obtendrá una presentación del grupo con 6 generadores y sólo 5 relaciones.

Ejercicios 2.3.3.4.

a) Encuentre una presentación de Wirtinger para el trébol.

b) Muestre que esta presentación puede ser simplificada eliminando un generador y dejando sólo una relación.

c) Compare esta presentación con la ya obtenida; $\langle A, B : A^2 = B^3 \rangle$.

d) Teniendo en cuenta la presentación encontrada en b), utilice el Teorema de Van Kampen para calcular otra presentación para el nudo "square".

Nota 2.3.3.5.

El problema de decidir cuándo dos presentaciones dadas representan el mismo grupo en general no tiene solución. Sin embargo, en el caso de grupos de nudos, el polinomio de Alexander puede indicar cuándo dos presentaciones distintas no representan el mismo grupo, ya que este polinomio puede ser computado tomando como base cualquier presentación de un grupo de un nudo (ver [3]).

Ejercicio 2.3.3.6. Dado el siguiente nudo K:

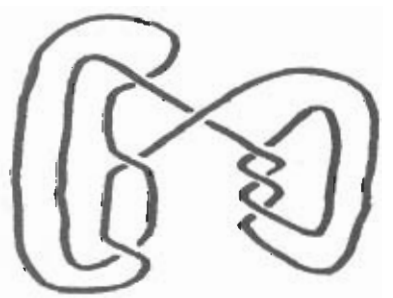


Figura 57

Encuentre la presentación de Wirtinger para K y muestre que esta se puede simplificar hasta encontrar una que tenga solamente 4 generadores y 3 relaciones.

Ejemplo 2.3.4. El grupo fundamental de los nudos de número de túnel uno.

Definiciónes 2.3.4.1. Dado un nudo K en S^3, decimos que una curva $T : [0,1] \to S^3$ es un *túnel para el nudo* K si T es una función continua, $T|_{(0,1)}$ es inyectiva y tal que $T([0,1]) \cap K = \{T(0), T(1)\}$. Diremos que un nudo K admite un *número de túnel* n si existen n túneles T_i que hacen que $S^3 - V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$ sea homeomorfo a un cuerpo de $n+1$ asas, donde $V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$ es una vecindad abierta y tubular de $K \cup (\cup_{i=1}^n T_i)$ y, además, no existen $n-1$ túneles que hagan a $S^3 - V(K \cup (\cup_{i=1}^n T_i))$ homeomorfo a un cuerpo de $n+1$ asas. El mínimo entre todos los números de túnel que admite un nudo es llamado *el número de túnel del nudo.* Ver [7].

El nudo trivial es el único nudo de número de túnel 0. Obsérvese que un nudo de número de túnel n es también un nudo de túnel $n+1$, pues basta colocarle un túnel en forma trivial.

En la figura siguiente mostramos que el nudo 9_{45} es un nudo de número de túnel uno. La figura muestra que existe un homeomorfismo entre los complementos de $9_{45} \cup T$ y de $S^1 \vee S^1$. Podemos, entonces, decir que el grupo $\Pi_1(9_{45})$ es isomorfo al grupo cociente $\Pi_1(9_{45} \cup T)/ <$ *relación que "mata" al túnel* $>$ que a su vez es isomorfo al cociente $\Pi_1(S^1 \vee S^1)/ <$ *relación que "mata" al túnel* $>$. Un argumento similar es válido para cualquier nudo de número de túnel uno. O sea que, teóricamente, un nudo de número de túnel uno debe admitir una presentación con sólo dos generadores y una sóla relación. Esto quiere decir que si se tiene, por ejemplo, la presentación de Wirtinger del nudo 9_{45} es posible hacer simplificaciones algebraicas para reducir el número de generadores a dos y el número de relaciones a una sola.

Ejercicio 2.3.4.2. Sin mirar el párrafo que sigue, trate de encontrar dicha presentación para el nudo 9_{45}, a partir de la presentación de Wirtinger.

Como se habrá dado cuenta el lector, en la práctica, no es sencillo encontrar dicha presentación. A continuación mostraremos el truco para poder encontrarla. La clave de todo está en seguir paso a paso la misma serie se dibujos de la Figura 58. Con cada paso, denotado con el mismo número del dibujo correspondiente, iremos

transformando la presentación del grupo fundamental hasta obtener la transformación deseada.

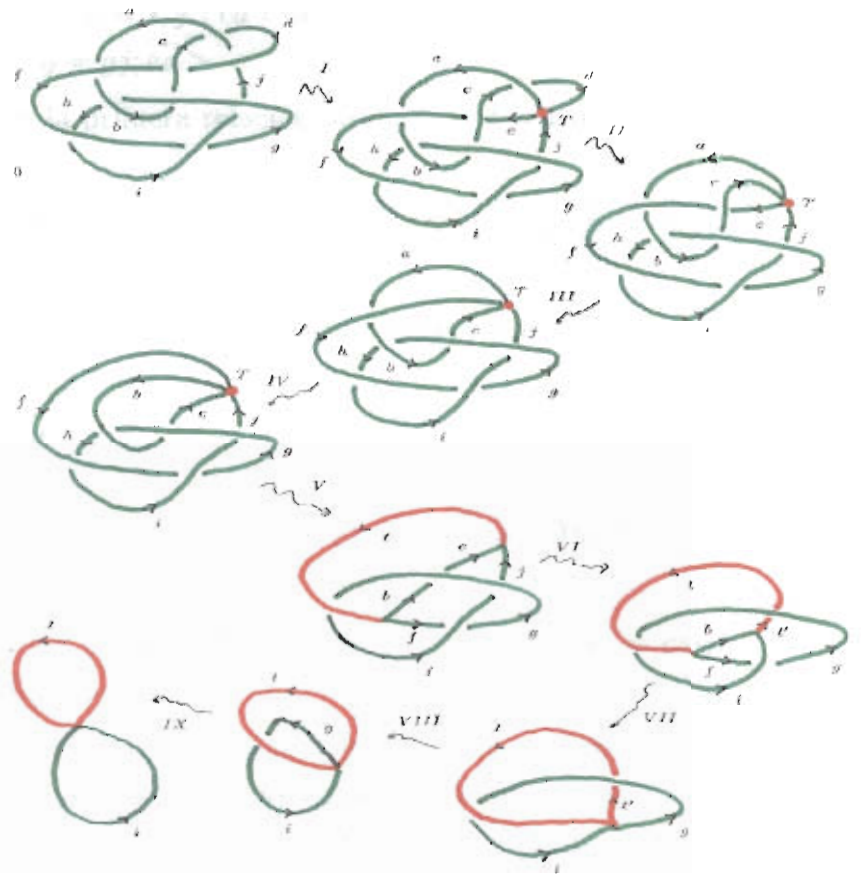


Figura 58

Paso 0. La presentación de Wirtinger para el nudo 9_{45} es la siguiente:

$< a, b, c, d, f, g, h, i, j : ca = ad; bf = fa; gb = bh; bg = gc; fc = cd; jd = da; hf = fi; fi = ig; ig = gj >$

Paso I. Colocamos el túnel colapsado en el cruce correspondiente a la relación $jd = da$, agregamos el generador e, sustituimos dicha relación por $jd = ea$ y a d por e en la relación $fc = cd$. Tenemos entonces la presentación del grupo fundamental del complemento de $K \cup T$:

$< a, b, c, d, e, f, g, h, i, j : ca = ad; bf = fa; gb = bh; bg = gc; fc = ce; jd = ea; hf = fi; fi = ig; ig = gj >$

Para obtener de nuevo una presentación del grupo del nudo, debemos añadir la relación $e\overline{d}$ que es la que anula el efecto del túnel, así obtenemos:

$< a, b, c, d, e, f, g, h, i, j : ca = ad; bf = fa; gb = bh; bg = gc; fc = ce; jd = ea; hf = fi; fi = ig; ig = gj; e\overline{d} >$

Paso II. De la primera relación obtenemos $d = \overline{a}ca$, lo que nos permite eliminar el generador d.

$< a, b, c, e, f, g, h, i, j : bf = fa; gb = bh; bg = gc; fc = ce; j\overline{a}c = e; hf = fi; fi = ig; ig = gj; j\overline{a}c = e; e\overline{a}ca >$.

Paso III. De la penúltima relación tenemos $e = j\overline{a}c$ lo que permite eliminar el generador e.

$< a, b, c, f, g, h, i, j : bf = fa; gb = bh; bg = gc; f = cj\overline{a}; hf = fi; fi = ig; ig = gj; j\overline{a}c\overline{a}ca >$.

Paso IV. De la primera relación obtenemos $a = \overline{f}bf$ y así eliminamos el generador a.

$< b, c, f, g, h, i, j : gb = bh; bg = gc; f = cj\overline{fb}f (\Leftrightarrow bf = cj); hf = fi; fi = ig; ig = gj; j\overline{fb}fc\overline{fb}f\overline{c}\overline{f}bf >$.

Paso V. Con el movimiento de apertura del túnel introducimos un nuevo generador t, agregamos la relación $t = bf$ y reemplazamos bf (resp. $\overline{fb}$) por t (resp. por $\overline{t}$) cada vez que aparezca. Y despejando h de la primera relación ($h = \overline{b}gb$) lo eliminamos como generador.

$< b, c, f, g, i, j, t : t = bf; bg = gc; t = cj; \overline{b}gt = fi; fi = ig; ig = gj; j\overline{t}fc\overline{t}f\overline{c}\overline{f}t >$

Paso VI. Introducimos un nuevo generador t', añadimos la relación $t' = bi$ y sustituimos bi por t' cada vez que aparezca. En este mismo paso eliminamos los generadores c (utilizando $c = \overline{g}bg$ de la segunda relación) y j (utilizando $j = \overline{g}ig$ de la penúltima relación).

$< b, f, g, i, t, t' : t' = bi, t = bf; t = \overline{g}t'g; \overline{b}gt = fi; fi = ig; \overline{g}ig\overline{t}f\overline{g}bg\overline{t}f\overline{g}\overline{b}g\overline{f}t >$.

Paso VII. Utilizando $f = ig\bar{i}$ (de la penúltima relación) y $b = t\bar{f} = ti\bar{g}\bar{i}$ (de la segunda relación) eliminamos los generadores f y b.
$< g, i, t, t' : t' = ti\bar{g}, t = \bar{g}t'g; gt = ti; \bar{g}ig\bar{t}ig\bar{i}\bar{g}ti\bar{g}\bar{i}g\bar{t}ig\bar{i}\bar{g}ig\bar{i}\bar{t}gi\bar{g}\bar{i}t >$.
Paso VIII. Con la primera relación, $t' = ti\bar{g}$, eliminamos a t'.
$< g, i, t : t = \bar{g}ti; gt = ti; \bar{g}ig\bar{t}ig\bar{i}\bar{g}ti\bar{g}\bar{i}g\bar{t}ig\bar{i}\bar{g}ig\bar{i}\bar{t}gi\bar{g}\bar{i}t >$.
Paso IX. Despejando a g de la primera relación $g = ti\bar{t}$ lo eliminamos. Observése que al hacer el reemplazo en la segunda relación, ésta queda redundante y por eso no la escribimos.
$< i, t : \bar{t}i\bar{t}i\bar{t}i\

3. CUBIERTAS

Dedicamos este capítulo al estudio de la Teoría de Cubiertas. En la Sección 1 damos su definición, mientras que en las las Secciones 2 y 3 estudiamos las propiedades que nos relacionan esta teoría con el cálculo del grupo fundamental.

3.1. Definición y Ejemplos de Cubiertas.

Por simplicidad, supondremos que todos los espacios son arco-conexos y localmente arco-conexos. Recordemos que un espacio X se dice localmente arco-conexo si para todo x en X y para toda vecindad abierta de V_x de x existe una vecindad abierta U_x de x, arco-conexa tal que $U_x \subset V_x$.

Sean $\widetilde{X}$ y X espacios topológicos, diremos que una función sobreyectiva y continua $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es una *cubierta*, si para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, donde U_i es una componente arco-conexa y $p/U_i : U_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo, para todo i en I. La situación anterior la expresamos diciendo que U está *parejamente cubierto*. A menudo, el espacio $\widetilde{X}$ es también llamado *cubierta* o *espacio recubridor*.

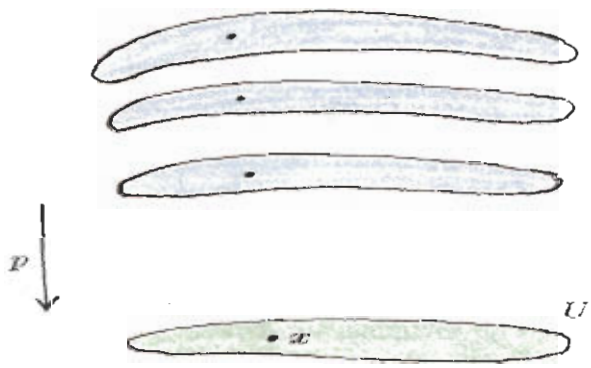


Figura 59

"Intuitivamente, vemos que tenemos una copia del entorno U de x por cada elemento de la fibra $p^{-1}(x)$".

Ejemplos 3.1.1

Sea X un espacio topológico.

a) La función identidad $Id : X \to X$, tal que $x \mapsto x$, para todo x en X, es una cubierta.

b) Sea $\widetilde{X} = X \times [0,1]$ con la topología producto y sea $p : \widetilde{X} \to X$ tal que $(x,r) \mapsto x$, entonces p no es una cubierta. ¿Por qué no lo es?

c) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ y sea $p : S^1 \to S^1$ tal que $z \mapsto z^k$ entonces p es una cubierta.

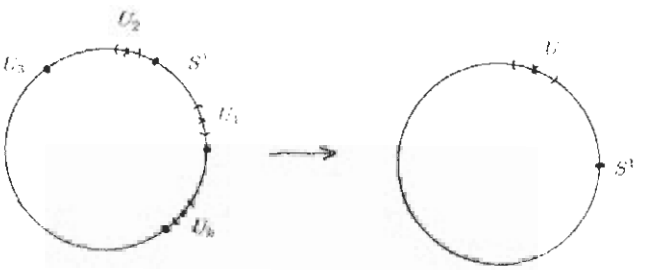


Figura 60 a)

"Intuitivamente, la circunferencia S^1 se enrolla sobre sí misma k veces" (ver Figura 60 a). En esta cubierta cada fibra tiene tiene k elementos

d) Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ tal que $t \mapsto e^{2\pi i t}$. *"Intuitivamente, la recta $\mathbb{R}$ se enrolla sobre S^1 infinitas veces"* (ver Figura 60 b). En esta cubierta cada fibra es infinita.

e) Si $p : \widetilde{X} \to X$ y $p' : \widetilde{X}' \to X'$ son cubiertas, entonces la función $p \times p' : \widetilde{X} \times \widetilde{X}' \to X \times X'$, producto canónico, es una cubierta. Probarlo!

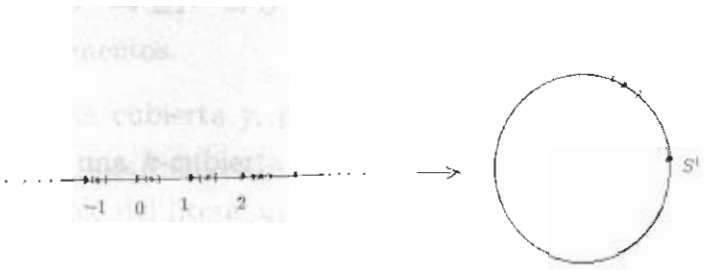


Figura 60 b)

Así pues, si p es la cubierta del literal d), ésta nos permite definir una cubierta natural de $\mathbb{R}^2$ sobre $S^1 \times S^1$ (un toro).

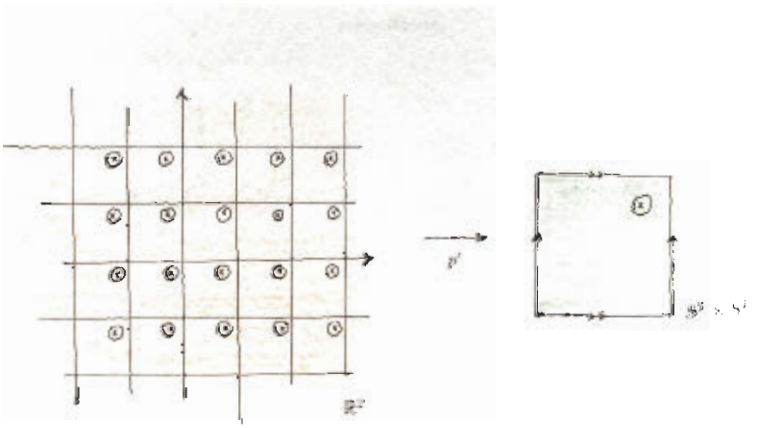


Figura 61

Más exactamente, $p' : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, donde $(s,t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ es una cubierta del toro. En esta cubierta cada fibra es infinita.

f) Recordemos que el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se obtiene al identificar los puntos antipodales en una esfera S^2 ($\mathbb{R}P^n$ se construye de forma similar a partir de S^n), es decir, $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$, donde $\vec{x} \sim \vec{y}$ si y sólo si $\vec{x} = -\vec{y}$ ó $\vec{x} = \vec{y}$. Tenemos entonces una función cociente $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2 \cong S^2/\sim$ la cual es una cubierta. En esta cubierta cada fibra tiene 2 elementos.

Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una cubierta y, para todo x en X, el cardinal[1] de su fibra es k, decimos que p es una k-cubierta y la denotamos por $p : \widetilde{X} \xrightarrow{k:1} X$. Tenemos entonces que el ejemplo del literal c) es una k-cubierta y que el del literal e) es una 2-cubierta.

g) La gráfica siguiente nos permite visualizar una 2-cubierta de el toro sobre el toro, la función sería $p : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1; (z, w) \mapsto (z^2, w)$.

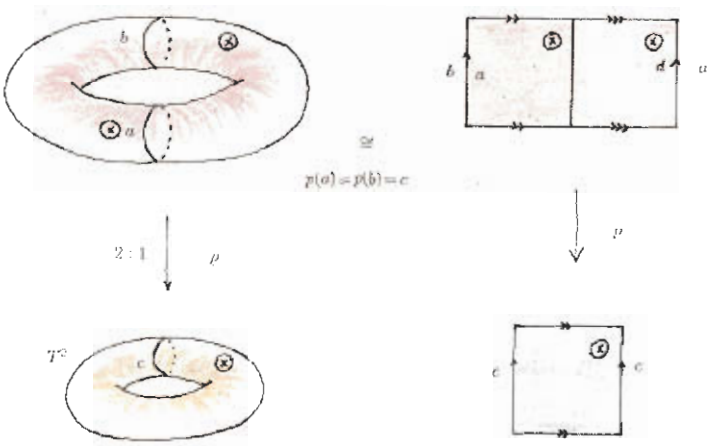


Figura 62

h) La gráfica siguiente nos permite visualizar una 3-cubierta de $T^2\#T^2\#T^2\#T^2$

[1] En realidad, dada una cubierta, se puede probar que el cardinal de sus fibras es constante (ver Seifert y Threlfall [12]).

sobre $T^2\#T^2$. Allí, los meridianos verdes caen sobre m_1 y los amarillos sobre m_2.

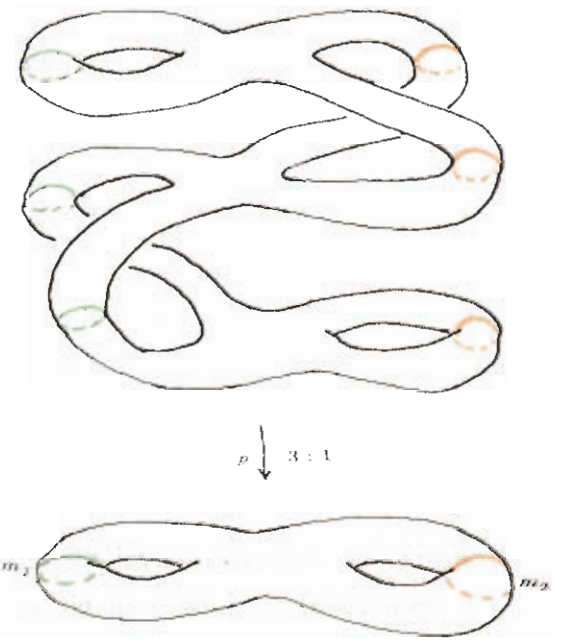


Figura 63

Ejercicio 3.1.2. Describa la anterior 3-cubierta por medio de polígonos.

3.2. Teoremas de Clasificación de las Cubiertas.

En esta sección desarrollaremos los resultados principales de la Teoría de Cubiertas. Veremos, por ejemplo, los teoremas de levantamiento de caminos y de homotopías, así como los teoremas que nos caracterizan las cubiertas.

Definición 3.2.1. Decimos que 2 cubiertas $p : \widetilde{X} \to X$ y $p' : \widetilde{X}' \to X$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $\phi : \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\phi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Figura 64

Nuestro objetivo por el momento será el de caracterizar las cubiertas de un espacio X y distinguirlas entre sí. Veremos cómo los grupos fundamentales de $\widetilde{X}$ y de X juegan un papel principal en este proceso. Con el fin de estudiar las relaciones que aparecen entre estos grupos, estndiaremos los teoremas de levantamiento de caminos y de homotopías.

En particular, el teorema de levantamientto de caminos nos dice cómo son las preimágenes de un camino de X, cuando la función es una cubierta.

Teorema 3.2.2. *(Levantamiento de caminos.) Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta, $\alpha : I \to X$ un camino con $\alpha(0) = x_0$. Para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un único camino $\overline{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\overline{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ y $p \circ \overline{\alpha} = \alpha$. (Ver Figura 65.)*

Demostración. Como para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x que es parejamente cubierta, consideremos el recubrimiento abierto $\{U_x\}_{x \in X}$ de X. Así pues, $\left\{\alpha^{-1}(U_x)\right\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de I y, como I es compacto, sea ϵ el número de Lebesgue[1] para este recubrimiento. Consideremos entonces una parti-

[1] Un número real $\epsilon > 0$ se llama el número de Lebesgue para un recubrimiento abierto $\{G_i\}$ de un espacio métrico X, si todo subconjunto A de X cuyo diámetro es menor que ϵ está contenido en algún G_i. Se puede probar que en un espacio métrico compacto, todo recubrimiento abierto tiene un número de Lebesgue.

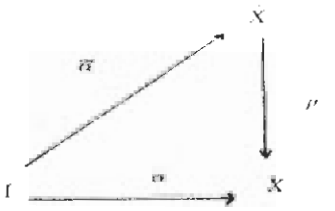


Figura 65

ción $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ tal que $t_i - t_{i-1} < \epsilon$. Así, para $i = 1, \cdots, n$, $[t_{i-1}, t_i]$ estará contenido en algún $\alpha^{-1}(U_x)$. Denotemos este último por $\alpha^{-1}(U_{x_i})$. Es decir, $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{x_i}$.

A continuación definiremos el camino $\overline{\alpha}$, inductivamente, por partes. Ver Figura 66. Como $\alpha([t_0, t_1]) \subset U_{x_1}$ y U_{x_1} es parejamente cubierto, existe U_1 vecindad de $\tilde{x}_0$, tal que $p/U_1 : U_1 \to U_{x_1}$ es un homeomorfismo. Definimos entonces $\overline{\alpha}$ para los $t \in [t_0, t_1]$ por $\overline{\alpha}(t) = (p/U_1)^{-1} \circ \alpha(t)$. Llamemos $\tilde{x}_1 = \overline{\alpha}(t_1)$; obsérvese que $p(\tilde{x}_1) = \alpha(t_1)$. Sea ahora U_2 la vecindad de $\tilde{x}_1$ en $\widetilde{X}$ tal que $p/U_2 : U_2 \to U_{x_2}$ es un homeomorfismo, definimos entonces $\overline{\alpha}$ para los $t \in [t_1, t_2]$ por $\overline{\alpha}(t) = (p/U_2)^{-1} \circ \alpha(t)$. Queda entonces $\overline{\alpha}$ definido para $[t_0, t_2]$.

Supongamos ahora que $\overline{\alpha}$ está definido para $[t_0, t_i]$, sea $\tilde{x}_i = \overline{\alpha}(t_i)$, el cual es una preimagen de $\alpha(t_i)$ (por p). Sea U_{i+1} la vecindad de $\tilde{x}_i$ en $\widetilde{X}$ tal que $p/U_{i+1} : U_{i+1} \to U_{x_{i+1}}$ es un homeomorfismo. Definimos a $\overline{\alpha}$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ por $\overline{\alpha}(t) = (p/U_{i+1})^{-1} \circ \alpha(t)$. Quedando $\overline{\alpha}$ definido para el intervalo $[t_0, t_{i+1}]$. Así pues, en n pasos quedará $\overline{\alpha}$ definido para todo el intervalo $[t_0, t_n] = [0, 1]$.

Obsérvese que la función $\overline{\alpha}$ es bien definida y contimua.

Ejercicio 3.2.3. ¿Por qué ?

Además, $p \circ \overline{\alpha} = \alpha$ pues si $t \in [t_{i-1}, t_i] \subset [0, 1]$ entonces: $\overline{\alpha}(t) = (p/U_i)^{-1} \circ \alpha(t)$ para

$t \in [t_{i-1}, t_i]$. Luego $p/U_i \circ \overline{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ pero la función p/U_i coincide con p en su dominio.

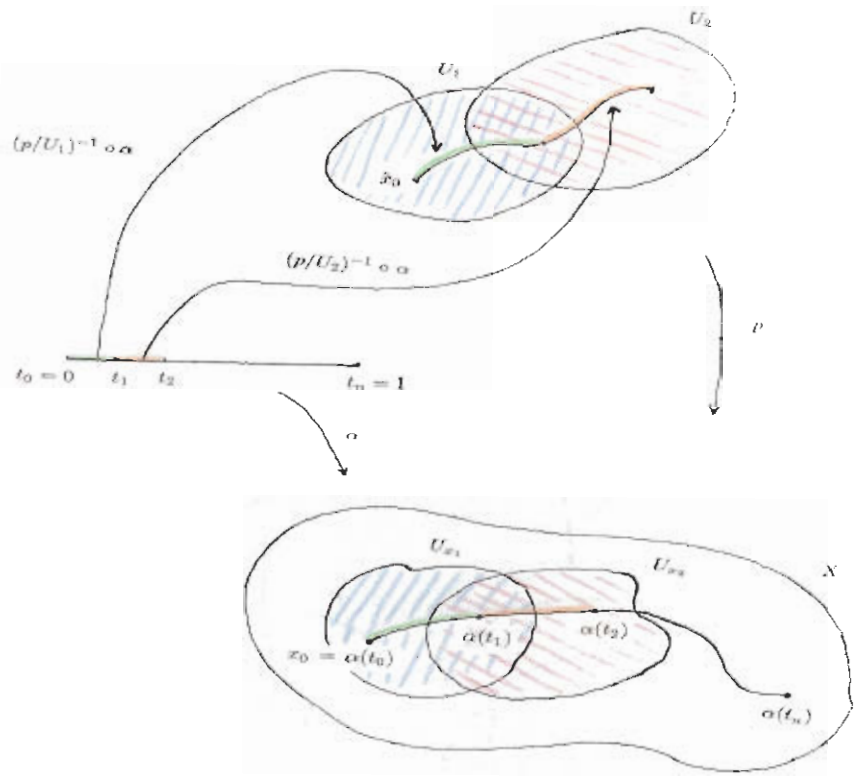


Figura 66

Ejercicio 3.2.4. Probar la unicidad del levantamiento.

Con este ejercicio queda terminada la prueba del teorema. □

"Intuitivamente, el teorema de levantamiento de caminos nos dice que si estamos situados sobre $\tilde{x}_0$, el cual es una preimagen del elemento x_0, hay una sola manera

continua de desplazarse en $\widetilde{X}$ de tal manera que en todo tiempo $t \in [0,1]$ la posición que se ocupe en $\widetilde{X}$ sea preimagen del punto $\alpha(t)$.

Es natural preguntarse si al levantar caminos homotópicos sus levantamientos son homotópicos. La respuesta nos la da el siguiente teorema:

Teorema 3.2.5. *(Levantamiento de homotopías.) Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta. Si α, α' son dos caminos de X tales que $\alpha \sim \alpha'(rel\{0,1\})$, y si $x_0 = \alpha(0)$ y $p(\tilde{x}_0) = x_0$ entonces los levantamientos de α y α', $\overline{\alpha}$ y $\overline{\alpha}'$, tales que $\overline{\alpha}(0) = \overline{\alpha}'(0) = \tilde{x}_0$, son homotópicos $(rel\{0,1\})$. En particular $\overline{\alpha}(1) = \overline{\alpha}'(1)$.*

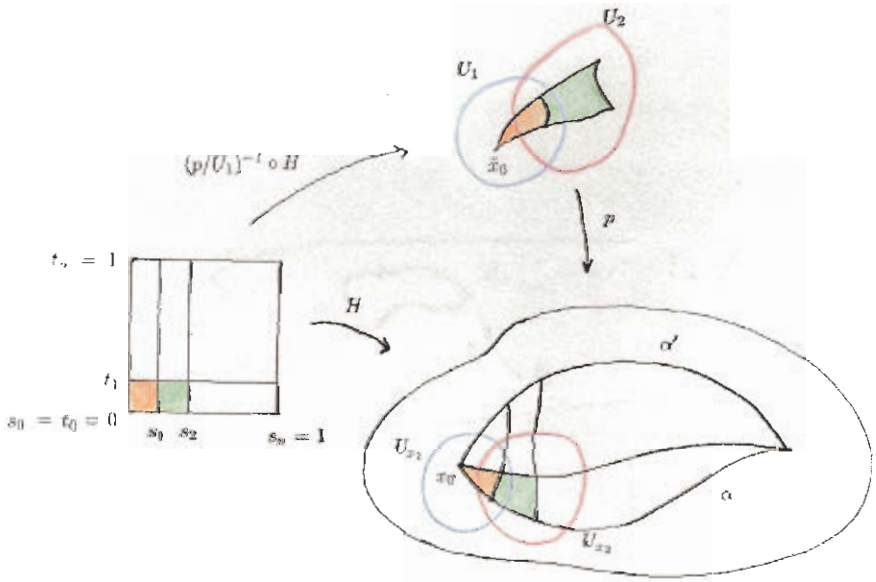


Figura 67

Idea de la prueba. Con el fin de construir una homotopía entre $\overline{\alpha}$ y $\overline{\alpha}'$, se utiliza la homotopía existente entre α y α', y se levanta utilizando las mismas ideas de la prueba del teorema anterior. Ver la Figura 67. $\square$

Ejercicios 3.2.6.

a) Completar detalles de la prueba del teorema anterior.

b) Considere algunos de los ejemplos dados al comienzo del capítulo. En cada uno de ellos, proponga un camino y/o lazo en el espacio base y luego levántelo comenzando en diferentes puntos. Haga lo mismo con caminos y/o lazos homotópicos.

El teorema siguiente nos muestra la relación existente entre los grupos fundamentales de los espacios $\widetilde{X}$ y X.

Teorema 3.2.7. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta con $p(\tilde{x}_0) = x_0$, entonces $p_* : \Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \Pi_1(X, x_0)$ es un monomorfismo y si $\tilde{x}_0'$ es otro punto en la fibra de x_0 entonces $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ y $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0')$ son subgrupos conjugados en el grupo $\Pi_1(X, x_0)$. Es más, de esta manera se obtienen todos los conjugados del subgrupo $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

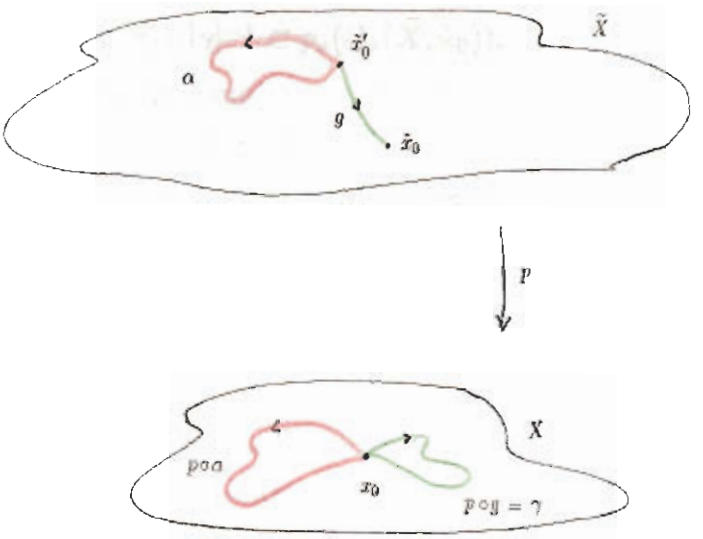


Figura 68

Demostración. Comenzamos la prueba con el ejercicio siguiente.

Ejercicio 3.2.8. Pruébese que $p_* : \Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \Pi_1(X, x_0)$ es inyectivo y por lo tanto es un monomorfismo.

Sean ahora $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$. Sea $[\alpha] \in \Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0')$. Veamos que $p_*([\alpha])$ se puede escribir como $[\gamma]\,[\beta]\,[\gamma^{-1}]$, donde $[\beta] \in p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ y $[\gamma] \in \Pi_1(X, x_0)$. Como $\widetilde{X}$ es arco conexo, sea $g : I \to \widetilde{X}$ un camino tal que $g(0) = \tilde{x}_0'$ y $g(1) = \tilde{x}_0$, entonces $g^{-1}\alpha g$ es un lazo en $\widetilde{X}$ basado en $\tilde{x}_0$, luego $p_*([g^{-1}\alpha g]) \in p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$. Sea $p_*([g^{-1}\alpha g]) = [\beta]$. Por otro lado, como g es un camino que comienza y termina en preimágenes del mismo punto x_0, entonces $p \circ g$ será un lazo en X basado en x_0, el cual llamaremos γ. Es claro que $[\beta] = p_*\,[g^{-1}\alpha g] = [p \circ (g^{-1}\alpha g)] = [(p \circ g^{-1})(p \circ \alpha)(p \circ g)] = [p \circ g^{-1}]\,[p \circ \alpha]\,[p \circ g] = [\gamma^{-1}]\,p_*([\alpha])\,[\gamma]$, luego $p_*([\alpha]) = [\gamma]\,[\beta]\,[\gamma^{-1}]$.

Por tanto $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset [\gamma]p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0'))[\gamma]^{-1}$. Realmente, se puede mostrar que la contención en el otro sentido es, también, cierta, es decir, son subgrupos conjugados en $\Pi_1(X, x_0)$. Veamos que éstos son todos los conjugados, es decir que si $[\gamma] \in \Pi_1(X, x_0)$, podemos encontrar $\tilde{x}_0'$ preimagen de x_0 tal que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0')) = [\gamma]^{-1}\,p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))\,[\gamma]$. En efecto, si levantamos a γ comenzando en $\tilde{x}_0$, tomaremos $\tilde{x}_0' = \overline{\gamma}(1)$, ver la parte b) del ejercicio siguiente.

Ejercicios 3.2.9.

a) Probar que $[\gamma]p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0'))[\gamma]^{-1} \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.

b) Probar que si $\tilde{x}_0' = \overline{\gamma}(1)$ entonces
$p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0')) = [\gamma]^{-1}\,p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))\,[\gamma]$.

Con estos ejercicios se termina la prueba del teorema. □

Ejercicio 3.2.10. Utilizando el Ejercicio 3.2.8. de este capítulo, probar de nuevo el Ejercicio 2.2.16. d) de la segunda sección del capítulo anterior.

Hemos visto pues, que para cada cubierta $p : \widetilde{X} \to X$, la clase $\{p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\}$ (con $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$) queda asociada a ella. Esta es una clase completa de conjugación de subgrupos de $\Pi_1(X, x_0)$. Veremos, más adelante, que las clases de cubiertas equivalentes están caracterizadas por la clase de conjugación que determinan.

Ejemplo 3.2.11. Sea $X = S^1$. Sabemos que $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es abeliano, cada subgrupo de $\mathbb{Z}$ es normal en $\mathbb{Z}$ y por lo tanto su clase de conjugación no tiene sino un único elemento; en realidad él mismo. Así pues, sea $n \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Al subgrupo

$n\mathbb{Z}$ le corresponde la cubierta $\varphi_n : S^1 \to S^1$ ($S^1 \subset \mathbb{C}$) tal que $z \mapsto z^n$ para $z \in \mathbb{C}$ y para $n = 0$ tenemos: $\varphi_0 : \mathbb{R} \to S^1$ con $t \mapsto e^{z\pi it}$. Y cualquier "otra" cubierta sobre S^1 deberá ser equivalente a una de las anteriores.

Ejercicios 3.2.12. Describa cubiertas para el toro T^2 correspondientes a los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$.

b) $2\mathbb{Z} \times \{0\}$.

c) $\{0\} \times \{0\}$.

Hemos visto que podemos levantar caminos y homotopías, nos preguntamos ahora por condiciones necesarias y suficientes para levantar una función. El teorema siguiente nos da la respuesta.

Teorema 3.2.13. *(Levantamiento de funciones continuas.) Sean $\widetilde{X}, X, Y$ espacios topológicos*[1]*, $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta, $f : Y \to X$ una función continua, $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces f admite un único levantamiento $\overline{f} : Y \to \widetilde{X}$, con $\overline{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ si y sólo si $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $\overline{f}$ es un levantamiento de f, entonces $p \circ \overline{f} = f$, es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Figura 69

[1] *Recordemos que estamos suponiendo que todo espacio topológico es arco-conexo y localmente arco-conexo.*

Luego el diagrama inducido

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\overline{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Figura 70

también conmuta, y así $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) = p_*(\overline{f}_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ y veamos que f admite un levantamiento de Y a $\widetilde{X}$. Sea $y \in Y$, queremos definir $\overline{f}(y)$. Sea $\alpha : I \to Y$ uu camino que une a y_0 con y, así pues $f \circ \alpha$ es un camino en X que une a $x_0 = f(y_0)$ con $f(y)$. Sea $\overline{f \circ \alpha} : I \to \widetilde{X}$ el levantamiento de $f \circ \alpha$ que comienza en $\tilde{x}_0$. Definamos $\overline{f}(y) = \overline{f \circ \alpha}(1)$. Veamos que $\overline{f} : Y \to \widetilde{X}$ está bien definida. En efecto, dado α, $\overline{f \circ \alpha}(1)$ es ńnico. Veamos entonces que $\overline{f}(y)$ no depende de la escogencia del camino α.

Sea $\alpha' : I \to Y$ otro camino que une a y_0 con y. Veamos que $\overline{f \circ \alpha}(1) = \overline{f \circ \alpha'}(1)$. Consideremos el lazo $\alpha(\alpha')^{-1}$, éste es un lazo en Y, basado en y_0. Así pues, $f_*([\alpha(\alpha')^{-1}]) = [f \circ (\alpha(\alpha')^{-1})] = [(f \circ \alpha)(f \circ (\alpha')^{-1}]$, y como $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$, entonces existirá $\beta : I \to \widetilde{X}$, lazo basado en $\tilde{x}_0$, tal que $[(f \circ \alpha)(f \circ (\alpha')^{-1})] = p_*([\beta])$. Luego $[p \circ \beta] = [(f \circ \alpha)(f \circ \alpha')^{-1}]$, es decir, $p \circ \beta \sim (f \circ \alpha)(f \circ \alpha')^{-1}$, y al levantarlos tendremos que $\beta = \overline{p \circ \beta} = \overline{(f \circ \alpha)(f \circ \alpha')^{-1}}$. Por la unicidad del levantamiento, tendremos que al levantar el lazo $(f \circ \alpha)(f \circ (\alpha')^{-1})$ se produce un lazo (un camino cerrado) pues es homotópico al lazo β, luego nece-

sariamente $\overline{f \circ \alpha}(1) = \overline{f \circ \alpha'}(1)$.

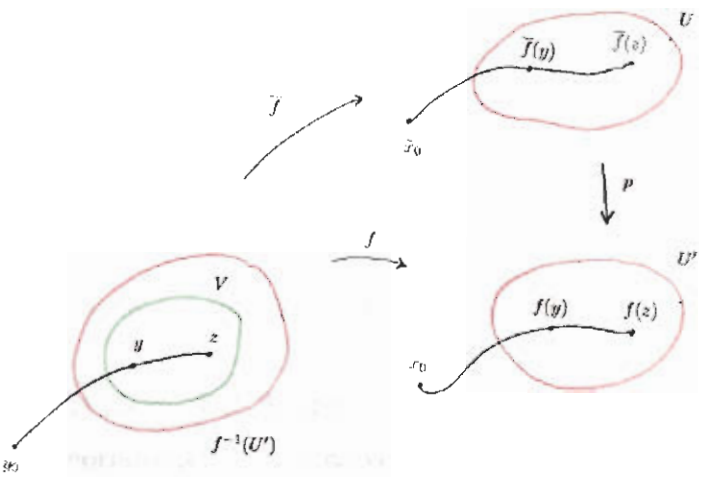


Figura 71

Debemos probar que $\overline{f}$ es continua. Sea $y \in Y$ y U una vecindad abierta de $\overline{f}(y)$, probemos que existe V vecindad abierta de y tal que $\overline{f}(V) \subset U$. Sin pérdida de generalidad podemos escoger a U de tal manera que $p(U) = U'$ sea parejamente cubierta y U sea la componente arco-conexa de $p^{-1}(U')$ que contiene a $\overline{f}(y)$. Así $p/U : U \xrightarrow{\sim} U'$ es un homeomorfismo, y también U' es abierto en X (Ejercicio 3.2.14 b). Como $f : Y \to X$ es continua $f^{-1}(U')$ es abierto en Y y contiene a y. Como Y es localmente arco-conexo, sea $V \subset f^{-1}(U')$ la componente arco-conexa que contiene a y. Esta es abierta! (Ejercicio 3.2.14 d).

Ejercicios 3.2.14.

a) Pruébese que $\overline{f}(V) \subset U$.

b) Pruebe que toda cubierta es una función abierta.

c) Pruebe la unicidad del levantamiento $\overline{f}$.

d) Probar que las componentes arco-conexas de un subconjunto abierto de un es-

pacio localmente arco-conexo son abiertas.

Con estos ejercicios queda terminada la prueba □

El teorema siguiente nos caracteriza las cubiertas equivalentes. En particular, nos dice que a cubiertas equivalentes les corresponde la misma clase de conjugación.

Teorema 3.2.15. *Sean $p : \widetilde{X} \to X$, $p' : \widetilde{X}' \to X$ cubiertas. Entonces p y p' son equivalentes si y sólo si*

$$A := \left\{p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))/\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\right\} = \left\{p'_*(\Pi_1(\widetilde{X}', \tilde{x}'_0))/\tilde{x}'_0 \in (p')^{-1}(x_0)\right\} =: A'$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si p y p' son equivalentes, existe un homeomorfismo $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ tal que $p' \circ h = p$, luego si $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = p'_*(\Pi_1(\widetilde{X}', h(\tilde{x}_0))$, pero $h(\tilde{x}_0) \in (p')^{-1}(x_0)$ luego $A \subset A'$. Similarmente $A' \subset A$.

($\Leftarrow$) Aplicaremos el Teorema 3.2.13 varias veces:

Primera vez: Como $p'_*(\Pi_1(\widetilde{X}', \tilde{x}'_0)) = p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ para algún $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(p'(\tilde{x}'_0))$ entonces para la cubierta $p : \widetilde{X} \to X$ y la función continua $p' : \widetilde{X}' \to X$ existe un único levantamiento $\varphi : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$ con $\varphi(\tilde{x}'_0) = \tilde{x}_0$ tal que $p \circ \varphi = p'$.

Segunda vez: Simétricamente existe un único levantamiento $\psi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ con $\psi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ tal que $p' \circ \psi = p$.

Tercera vez: Luego $p \circ (\varphi \circ \psi) = p' \circ \psi = p$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[ur, "\varphi \circ \psi"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Figura 72

conmuta, y por la unicidad del levantamiento de p, necesariamente $\varphi \circ \psi = id_{\widetilde{X}}$, luego φ es sobre y ψ es inyectiva.

Cuarta vez: Similarmente $\psi \circ \varphi = id_{\widetilde{X}'}$, es decir, ψ es sobre y φ inyectiva.

Luego φ es un homeomorfismo, y como $p \circ \varphi = p'$ entonces las cubiertas son equivalentes. $\square$

Definición 3.2.16. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta, una *superposición* (o una *transformación de cubierta*) *de* p es un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}$ tal que $p \circ \varphi = p$, es decir, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Figura 73

conmuta.

Ejercicio 3.2.17.

a) Probar que el conjunto de las superposiciones de p es un grupo, el cual denotamos por $Sup(p)$.

b) Encontrar el grupo de las superposiciones de las cubiertas definidas en los Ejemplos 1.1 c), d), e) y g).

La proposición que sigue nos dice que que si una superposición fija un elemento, los fija todos.

Proposición 3.2.18. *Si* $\varphi \in Sup(p)$ *y* $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$ *para algún* $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, *entonces* $\varphi = id_{\widetilde{X}}$.

Demostración. Obsérvese que $\widetilde{X}$ es conexo (es arco-conexo) y que $A = \{\tilde{x}/\tilde{x} = \varphi(\tilde{x})\}$ es abierto y cerrado en $\widetilde{X}$ luego $A = \emptyset$ ó $A = \widetilde{X}$, pero por hipótesis $A \neq \emptyset$. Entonces, necesariamente, $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, luego $\varphi = id_{\widetilde{X}}$. $\square$

Ejercicio 3.2.19. Probar que A es abierto y cerrado en $\widetilde{X}$.

Sabemos que a cubiertas equivalentes les corresponde la misma clase de conjugación. Nos preguntamos ahora, si dada una clase de conjugación se le puede asociar una cubierta. En lo que sigue trataremos de dar respuesta a este problema.

Teorema 3.2.20. *Sean $p : \widetilde{X} \to X$ y $p' : \widehat{X} \to X$ cubiertas tales que $p'_*(\Pi_1(\widehat{X}, \hat{x}_0)) \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ $(p'(\hat{x}_0) = p(\tilde{x}_0) = x_0)$ entonces el levantamiento $\overline{p}' : \widehat{X} \to \widetilde{X}$ de p' con $\overline{p}'(\hat{x}_0) = \tilde{x}_0$ es una cubierta. (Es decir, la cubierta p' factoriza en dos cubiertas; p y $\overline{p}'$).*

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
\widehat{X} \arrow[ur, "\overline{p}'"] \arrow[r, "p'"'] & X
\end{tikzcd}$$

Figura 74

Demostración. Veamos que $\overline{p}'$ es sobreyectiva. Sea $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, probemos que existe $\hat{x} \in \widehat{X}$ tal que $\overline{p}'(\hat{x}) = \tilde{x}$. Sea $\alpha : I \to \widetilde{X}$ tal que $\alpha(0) = \tilde{x}_0$ y $\alpha(1) = \tilde{x}$; sea $\beta = p \circ \alpha : I \to X$ la imagen del camino α bajo p, es decir, β es un camino en X que comienza en x_0 y termina en $p(\tilde{x}) = x$. Como $p' : \widehat{X} \to X$ es cubierta, sea $\gamma : I \to \widehat{X}$ el levantamiento de β que comienza en $\hat{x}_0$. Luego, $\overline{p}' \circ \gamma : I \to \widetilde{X}$ es un camino que comienza en $\overline{p}' \circ \gamma(0) = \overline{p}'(\hat{x}_0) = \tilde{x}_0$. Además, $p \circ \overline{p}' \circ \gamma = p' \circ \gamma = \beta$, es decir, $\overline{p}' \circ \gamma$ es otro levantamiento de β. Como tanto α como $\overline{p}' \circ \gamma$ son levantamientos

de β que comienzan en el mismo punto, ellos son iguales y por lo tanto $\tilde{x} = \alpha(1) = \overline{p}' \circ \gamma(1) = \overline{p}'(\gamma(1))$, luego $\overline{p}'$ es sobreyectiva.

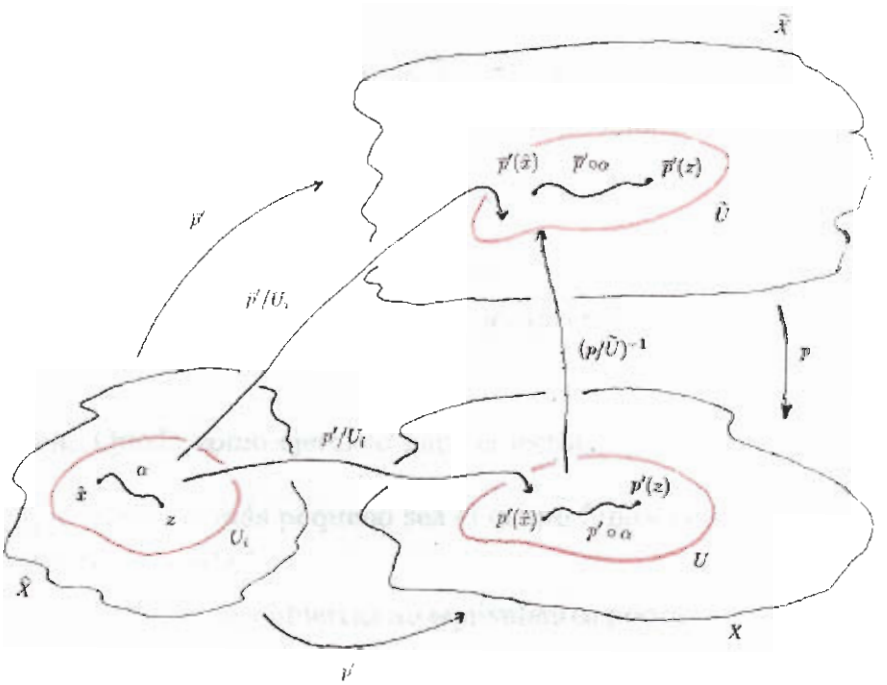


Figura 75

Vamos ahora a probar que para $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ existe una vecindad parejamente cubierta por $\overline{p}'$. Sea U_1 una vecindad de $x = p(\tilde{x})$ parejamente cubierta por p' y U_2 una vecindad de x parejamente cubierta por p. Sea U la componente arco-conexa (que contiene a x) de $U_1 \cap U_2$. Ésta es abierta. Claramente U es parejamente cubierta por p y p'.

Sea $\widetilde{U}$ la componente arco-conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\tilde{x}$. Veamos que $\widetilde{U}$ es parejamente cubierta por $\overline{p}'$. En efecto, mostremos que $(\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U}) \subset (p')^{-1}(U)$. Sea $z \in (\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U})$, entonces $\overline{p}'(z) \in \widetilde{U}$, luego $p \circ \overline{p}'(z) \in U$, es decir, $p'(z) \in U$ y así

$z \in (p')^{-1}(U)$.
Luego, si $(p')^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, veamos que $(\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup_{i \in J} U_i$, donde $J \subset I$. Sea U_i tal que $U_i \cap (\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U}) \neq \emptyset$, mostremos que $U_i \subset (\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U})$.
Sea $z \in U_i$ y sea $\hat{x} \in U_i$, tal que $(\overline{p}')(\hat{x}) \in \widetilde{U}$. Como U_i es arco-conexa, sea α un camino que une $\hat{x}$ con z, luego $\overline{p}' \circ \alpha$ es un camino que une $\overline{p}'(\hat{x})$ con $\overline{p}'(z)$ y como $\overline{p}'(\hat{x}) \in \widetilde{U}$ que es una componente arco-conexa, necesariamente $\overline{p}'(z) \in \widetilde{U}$, pues $\overline{p}' \circ \alpha$ es un levantamiento del camino $p' \circ \alpha$ que está completamente contenido en U. Luego $z \in (\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U})$.
Así pues, $(\overline{p}')^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup_{i \in J} U_i$, ahora $(\overline{p}'/U_i) = ((p/\widetilde{U})^{-1} \circ (p'/U_i)) : U_i \to \widetilde{U}$, luego $\overline{p}'/U_i$ es homeomorfismo, ya que es composición de homeomorfismos. □

Corolario 3.2.21. *Sea $\widehat{X}$ simplemente conexo. Si $p' : \widehat{X} \to X$ es una cubierta, entonces para toda cubierta $p : \widetilde{X} \to X$ el levantamiento $\overline{p}' : \widehat{X} \to \widetilde{X}$ de p' es una cubierta.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector.

Obsérvese que mientras más pequeño sea el grupo fundamental del espacio recubridor, éste está *"más arriba"*.
Ejercicio 3.2.22. ¿Cuántas cubiertas no equivalentes podrá tener el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$?

Definición 3.2.23. Una cubierta (o espacio recubridor) con grupo fundamental trivial se llama *Cubierta Universal.*

Ejemplos 3.2.24. La función $p : \mathbb{R} \to S^1$ tal que $t \mapsto e^{2\pi i t}$ es una cubierta universal para S^1 pues $\mathbb{R}$ es simplemente conexo.
Observamos que en este caso, el grupo de las transformaciones de cubierta $Sup(p)$ es cíclico infinito, generado por la traslación entera

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{h} \mathbb{R}. \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

Es decir, $Sup(p) \cong \mathbb{Z}$ luego $Sup(p) \cong \Pi_1(S^1)$.

Más adelante veremos que en general si p es la cubierta universal de un espacio X entonces el grupo de superposiciones de X, $Sup(p)$, es homomorfo al grupo $\Pi_1(X, x_0)$.
Por otro lado, observamos que si $p : S^1 \to S^1$ es la función tal que $z \mapsto z^2$ entonces el grupo $Sup(p)$ es cíclico de orden 2, generado por $\gamma : S^1 \to S^1$ $(z \mapsto -z)$ es decir, $Sup(p) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \Pi_1(S^1)/p_*(\Pi_1(S^1))$, pues p_* lleva un lazo a dos veces el mismo lazo.
Una pregunta natural es si el grupo de superposiciones será siempre isomorfo al cociente de grupos $\Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$?
Veremos que el resultado es cierto, siempre que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ sea un subgrupo normal en el grupo $\Pi_1(X, x_0)$.

Definición 3.2.25. Una cubierta $p(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ se llama *cubierta regular* si el subgrupo $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ es normal en el grupo $\Pi_1(X, x_0)$.

Queremos ahora enfrentar el problema de encontrar la cubierta asociada a una clase de conjugación.

Definición 3.2.26. Un espacio X se dice *semilocalmente simplemente conexo* (o semilocalmente 1-conexo) abreviado S.S.C. si para todo $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que el homomorfismo $i_* : \Pi_1(V, x) \to \Pi_1(X, x)$ inducido por la inclusión $i : V \hookrightarrow X$ es trivial.

Observación. Esta noción es más débil que la noción de ser localmente simplemente conexo (L.S.C.), la cual exige que para todo $x \in X$ exista una base local de vecindades simplemente conexas para el punto x. Es decir, L.S.C. $\Longrightarrow$ S.S.C. También es cierto que ser simplemente conexo implica S.S.C.
Ejemplo 3.2.26.
b) Claramente, toda variedad es L.S.C., luego también es S.S.C.
a) Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ siendo S_n una circunferencia centrada en el punto $\frac{1}{n}$ de radio $\frac{1}{n}$. Sea $X = A \times I/\sim$ $(I = [0, 1])$, donde se identifican todos los puntos de segunda coordenada 1 a un solo punto. Ver Figura 76. En este ejemplo X es S.S.C., ya que es S.C., pero no es L.S.C.

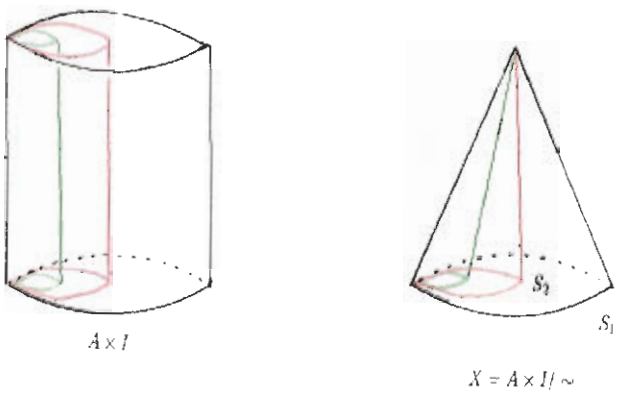


Figura 76

Ejercicio 3.2.27. Encuentre un espacio que sea S.S.C. pero que no sea simplemente conexo, ni L.S.C.

Teorema 3.2.28. *Si X admite una cubierta universal $p : \widetilde{X} \to X$ entonces X es S.S.C.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad de x parejamente cubierta, y sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $\widetilde{U}$ la componente arco-conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\tilde{x}$, tenemos entonces que $p/\widetilde{U} : \widetilde{U} \to U$ es un homeomorfismo y entonces diagrama ilustrado en la Figura 77 conmuta.
Luego $(p/\widetilde{U})^{-1} \circ i$ es un levantamiento de $i : U \to X$ y así
$i_*(\Pi_1(U, x)) \leq p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{0\}$, luego i_* es trivial. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[ur, "(p/\tilde{U})^{-1} \circ i"] \arrow[r, "i"'] & X
\end{tikzcd}$$

Figura 77

Veremos que la condición de ser S.S.C., la cual es necesaria para la existencia de la cubierta universal es suficiente para la existencia de una cubierta asociada a un subgrupo.

Teorema 3.2.29. *Sea X un espacio S.S.C. Sea $x_0 \in X$. Dado un subgrupo H de $\Pi_1(X, x_0)$ existen un espacio $\widetilde{X}$ y una cubierta $p : \widetilde{X} \to X$ tal que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$, donde $p(\tilde{x}_0) = x_0$.*

Demostración.

"*Construcción de X*".

Sea P el conjunto de todos los caminos en X que comienzan en x_0. Definimos en P la relación: $\alpha \sim \beta$ si y sólo si α y β terminan en el mismo punto y la clase $[\alpha\beta^{-1}] \in H$, fácilmente se ve que ésta es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 3.2.30 a).

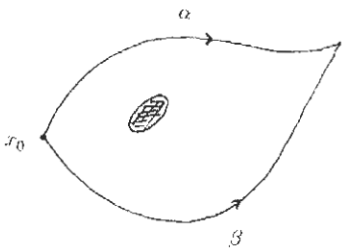


Figura 78

Sea $\widetilde{X} = P/\sim$. La clase de equivalencia del camino α, según esta relación, la denotaremos por $\overline{\alpha}$. Definimos $p : \widetilde{X} \to X$ por $p(\overline{\alpha}) = \alpha(1)$. Como X es arco-conexo, p es sobreyectiva, además claramente está bien definida, ya que si $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ luego $\alpha \sim \beta$ y $\alpha\beta^{-1} \in H$ entonces $\alpha(1) = \beta(1)$.

Debemos, ahora, asignarle al conjunto $\widetilde{X}$ una topología de tal modo que $p : \widetilde{X} \to X$ sea una cubierta.

Una base para $\widetilde{X}$.

Sea $\overline{\alpha} \in \widetilde{X}$, y sea U una vecindad abierta de $\alpha(1)$, definimos

$$B(U, \overline{\alpha}) = \{\overline{\alpha.w}/w \text{ es un camino que comienza en } \alpha(1) \text{ y está contenido en } U\}.$$

Claramente $B(U, \overline{\alpha})$ es no vacío pues $\overline{\alpha}$ es uno de sus elementos.

Observación: "$\overline{\beta} \in B(U, \overline{\alpha}) \Longrightarrow B(U, \overline{\beta}) = B(U, \overline{\alpha})$". En efecto, si $\overline{\beta} \in B(U, \overline{\alpha})$ entonces $\overline{\beta} = \overline{\alpha.w}$, para algún w que comienza en $\alpha(1)$ y está en U. Luego $\beta \sim \alpha.w$, es decir, $[\beta(\alpha w)^{-1}] \in H$.

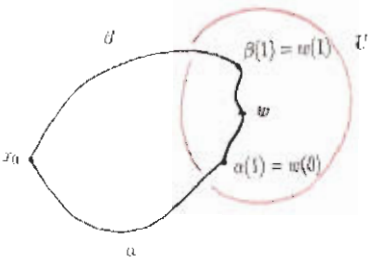


Figura 79

Sea ahora $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\beta})$, entonces $\gamma \sim \beta.w'$, con w' comenzando en $\beta(1)$ y contenido en U (ver Ejercicio 3.2.30 b). Luego $\gamma \sim \alpha.w.w'$, pero $\overline{\alpha.w.w'} \in B(U, \overline{\alpha})$, es decir $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\alpha}) \therefore B(U, \overline{\beta}) \subset B(U, \overline{\alpha})$.

Ahora, como $\beta \sim \alpha w$ veamos que $\beta w^{-1} \sim \alpha$ y así $\overline{\alpha} \in B(U, \beta)$. En efecto w^{-1} comienza en $\beta(1)$ y w^{-1} está contenido en U y además $\left[(\beta w^{-1})\alpha^{-1}\right] \in H$ pues $\left[(\beta w^{-1})\alpha^{-1}\right] = \left[\beta w^{-1}\alpha^{-1}\right] = \left[\beta(\alpha w)^{-1}\right] \in H$, entonces si $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\alpha})$, por un razonamiento similar al anterior, se prueba que $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\beta})$. Luego "$\overline{\beta} \in B(U, \overline{\alpha}) \Longrightarrow B(U, \overline{\beta}) = B(U, \overline{\alpha})$" y queda probada la observación.

Sea $\mathcal{B} = \{B(U, \overline{\alpha}) / \overline{\alpha} \in \widetilde{X}$ y U es una vecindad de $\alpha(1)\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base abierta de $\widetilde{X}$ (ver Ejercicio 3.2.30 c). Es claro que $\cup B(U, \overline{\alpha}) = \widetilde{X}$, en efecto, sea $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\alpha}) \cap B(V, \overline{\beta})$, esto implica que $U \cap V \neq \emptyset$. Ahora, $B(U, \overline{\gamma}) = B(U, \overline{\alpha})$ y $B(V, \overline{\gamma}) = B(V, \overline{\beta})$. Luego $B(U \cap V, \overline{\gamma}) \subset B(U, \overline{\alpha}) \cap B(V, \overline{\beta})$, es decir, $B(U \cap V, \overline{\gamma}) \subset B(U, \overline{\gamma}) \cap B(V, \overline{\gamma})$ luego $\mathcal{B}$ es una base.

Probemos que $\widetilde{X}$ es arco-conexo con esta topología. Sea $c : I \to X$ $(t \mapsto x_0)$ el lazo trivial en X, basado en x_0. Mostraremos que para todo $\overline{\alpha} \in \widetilde{X}$ existe un camino que une $\overline{\alpha}$ con $\overline{c}$. Sea entonces $\overline{\alpha} \in \widetilde{X}$, donde $\alpha : I \to X$ es tal que $\alpha(0) = x_0$. Definimos una familia ("continua") de caminos en X por $\alpha_t : I \to X$ $(t' \mapsto \alpha(t.t'))$. Obsérvese que los α_t son caminos que comienzan en x_0 y terminan en $\alpha(t)$.

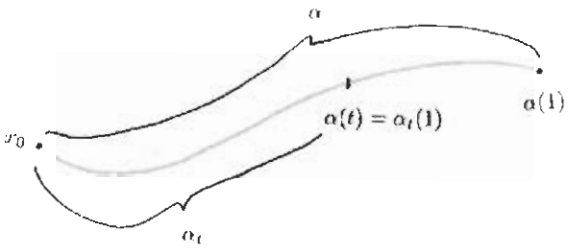


Figura 80

Sea ahora $A_1 : I \to \widetilde{X}$ tal que $t \mapsto \overline{\alpha}_t$, entonces $A_1(0) = \overline{c}$, $A_1(1) = \overline{\alpha}$ y A_1 es continua (ver Ejercicio 3.2.30 d). Luego $\widetilde{X}$ es arco-conexo.

Veamos ahora que $\widetilde{X}$ es localmente arco-conexo. Basta ver que todos los elementos de la base $\mathcal{B}$ son arco-conexos. Sea $\overline{\alpha} \in \widetilde{X}$, y consideremos $B(U, \overline{\alpha})$ para U una vecindad abierta cualquiera de $\alpha(1)$. Sea $\overline{\gamma} \in B(U, \overline{\alpha})$, entonces $\overline{\gamma} = \overline{\alpha.w}$ para un w que comience en $\alpha(1)$ y esté en U. Definimos $w_t : I \to X$ tal que $t' \mapsto w(tt')$ y $A_2 : I \to \widetilde{X}$ tal que $t \mapsto \overline{\alpha w_t}$. Es claro que $A_2(0) = \overline{\alpha}$, que $A_2(1) = \overline{\alpha w} = \overline{\gamma}$ y que A_2 es continua. Luego $B(U, \overline{\alpha})$ es arco-conexo.

"Continuidad de $p : \widetilde{X} \to X$ $(\overline{\alpha} \mapsto \alpha(1))$.

Por la definición de la base, p es continua, pues si U es un entorno de $\alpha(1)$ que contiene a $p(\overline{\alpha}) = \alpha(1)$ entonces $p(B(U, \overline{\alpha})) \subset U$ y $\overline{\alpha} \in B(U, \overline{\alpha})$.

"p es cubierta".

Aquí es donde necesitamos el hecho de que X sea S.S.C.

Sea $x \in X$, y sea U un entorno arco-conexo de x tal que $i_* : \Pi_1(U, x) \to \Pi_1(X, x)$ es trivial. Veamos que U es parejamente cubierto. Obsérvese primero que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\overline{\alpha} \in p^{-1}(x)} B(U, \overline{\alpha})$. En efecto, si $\overline{\beta} \in p^{-1}(U)$, $\beta(1) \in U$, como U arco-conexo, sea w un camino en U que una $\beta(1)$ con x y sea $\alpha = \beta w$ entonces $[\beta] = [\alpha w^{-1}]$ luego $\overline{\beta} = \overline{\alpha w^{-1}}$, es decir, $\overline{\beta} \in B(U, \overline{\alpha})$ con $\overline{\alpha} \in p^{-1}(x)$. La otra contención es trivial (ver

Ejercicio 3.2.30 d).

Veamos que si $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}' \in p^{-1}(x)$ y $\overline{\alpha} \neq \overline{\alpha}'$ entonces $B(U, \overline{\alpha}) \neq B(U, \overline{\alpha}')$. En efecto, si $B(U, \overline{\alpha}) = B(U, \overline{\alpha}')$, probemos que $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}'$. Esto es cierto, pues si $\overline{\alpha} = \overline{\alpha' w'}$ y $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha w}$ para w' camino en U que comienza en $\alpha'(1) = x$ y w camino en U que comienza en $\alpha(1) = x$ y, además, $\alpha(1) = w'(1) = x = \alpha'(1) = w(1)$, luego w es un lazo basado en x, completamente contenido en U, luego es trivial en X y así:

$$\left[\alpha' \alpha^{-1}\right] = \left[\alpha'(\alpha w)^{-1}\right] \in H,$$

pues $\overline{\alpha'} = \overline{\alpha w}$, entonces $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}$.

Luego la familia $\{B(U, \overline{\alpha})\}_{\overline{\alpha} \in p^{-1}(x)}$ es una familia de abiertos disjuntos (nótese que si se interceptaran, serían iguales) arco-conexos, luego cada uno es una componente arco-conexa de $p^{-1}(U)$.

Ahora $p/B(U, \overline{\alpha}) : B(U, \overline{\alpha}) \to U$ con $\overline{\alpha} \in p^{-1}(x)$ es continua y sobreyectiva (ver Ejercicio 3.2.30 f.). De manera análoga al razonamiento anterior, utilizando el hecho de que los lazos de U son triviales en X, se prueba que p es inyectiva (ver Ejercicio 3.2.30 f). Además, claramente (ver Ejercicio 3.2.30 g), por la definición de la base $\mathcal{B}$, p es abierta, luego $p/B(U, \overline{\alpha})$ es un homeomorfismo y así U es parejamente cubierto.

Finalmente, veamos que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. Sea $\tilde{x}_0 = \overline{c}$ siendo $c : I \to X$ $(t \mapsto x_0)$ el lazo trivial en X basado en x_0. Sea $[\alpha] \in H$. Podemos definir el lazo $A_1 : I \to \widetilde{X}$ tal que $t \mapsto \overline{\alpha}_t$, como antes, donde $A_1(0) = \overline{c}$ y $A_1(1) = \overline{\alpha}$, como $[\alpha] \in H$, entonces $\left[\alpha c^{-1}\right] \in H$ y así $\alpha \sim c$, es decir, $\overline{\alpha} = \overline{c}$ luego A_1 es un lazo, y además $p_*([A_1]) = [\alpha]$, luego $H \subset p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Sea $[\beta] \in p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$, entonces $[\beta] = [p \circ B]$, para algún $B : I \to \widetilde{X}$ lazo basado en $\tilde{x}_0$, entonces existe β' homotópico a β tal que $\beta' = p \circ B$, es decir B es un levantamiento de β' y como $B' : I \to \widetilde{X}$ $(t \mapsto \overline{\beta}'_t)$, donde $\beta'_t : I \to X$ con $t' \mapsto \beta'(tt')$, es otro levantamiento de β' que comienza en $\tilde{x}_0 = c$, necesariamente $B = B'$ y como B es lazo con $B(0) = \overline{c} = B(1) = B'(1) = \overline{\beta}' = \overline{\beta}$, entonces $\left[\beta c^{-1}\right] \in H$, pero $\beta c^{-1} \cong \beta$, es decir, $[\beta] \in H$. Queda entonces probado que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. $\square$

Ejercicios 3.2.30. Completar los siguientes detalles de la prueba anterior.

a) Probar que la relación " $\sim$ " dada, es una relación de equivalencia.

b) ¿Por qué $\overline{\gamma}$ es igual a $\overline{\alpha.w.w'}$?

c) Probar el siguiente:

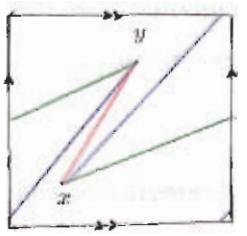
Teorema de Existencia de Bases. *Sea X un conjunto, $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces existe una topología T en X tal que $\mathcal{B}$ es una base para T si:*
i) $X = \cup\mathcal{B}$.
ii) Si $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$ existe $W \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.
Conversamente, si (X, T) es un espacio topológico y $\mathcal{B}$ es una base de T entonces las Condiciones i) y ii) se verifican.

d) Probar la continuidad de A_1.
e) Probar que $\bigcup_{\overline{\alpha} \in p^{-1}(x)} B(U, \overline{\alpha}) \subset p^{-1}(U)$.
f) Probar que $p/_{B(U,\overline{\alpha})}$ es biyectiva.
g) Probar que $p : \widetilde{X} \to X$ es abierta.

Corolario 3.2.31. *Sea X un espacio topológico.*
a) Si X admite una cubierta universal, ésta es única salvo equivalencia.
b) Si X es S.S.C., entonces X admite una cubierta universal.

Demostración. Queda como ejercicio para el lector.

Observación 3.2.32. Para la cubierta universal, el grupo H es $\{e\}$, y entonces, los elementos de la cubierta universal son clases de caminos que comienzan en un punto base $\tilde{x}_0$. Y dos caminos, de éstos, que terminen en un mismo punto pertenecerán a la misma clase si y sólo si son homotópicos con relación a los extremos. Por lo anterior, la cubierta universal $\widetilde{X}$ de un espacio X no es más que las distintas formas de alcanzar los puntos de X saliendo del punto base x_0. En la Figura 81 a) vemos en el toro tres caminos diferentes (no homotópicos) que conectan x con y, mientras que en la Figura 81 b) vemos los levantamientos de dichos caminos a la cubierta universal del toro.
Ejercicio 3.2.33.
a) Probar que si X es un espacio simplemente conexo y $p : \widetilde{X} \to X$ es una cubierta de X, entonces p es un homeomorfismo de $\widetilde{X}$ en X.



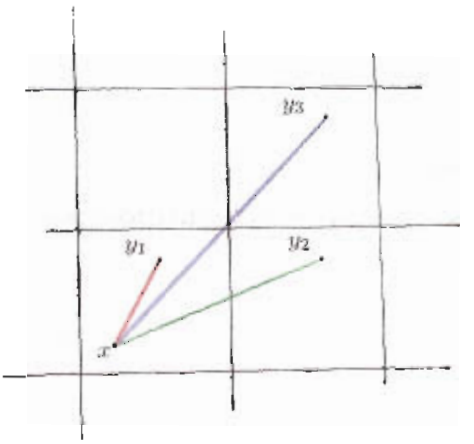


Figura 81 a) *Figura 81 b)*

b) Sean X, Y, Z espacios topológicos, $p : X \to Y, q : X \to Z$ cubiertas y $r : Y \to Z$ una función continua. Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Z & & Y \arrow[ll, "r"] \end{tikzcd}$$

Figura 82

conmuta, entonces $r : Y \to Z$ es una cubierta. (Compárese con el Teorema 3.2.20).

c) (Continuación del Ejercicio 3.2.12.)

Describa cubiertas para T^2 correspondientes a los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

i) $H = \langle(1,0)\rangle < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ii) $H = \langle(1,1)\rangle < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

iii) Compare la cubierta encontrada en el literal a) con la cubierta encontrada en b). Si ellas son equivalentes, encuentre un homeomorfismo entre los espacios recubridores.

iv) Describa cubiertas universales para S^1, T, $\mathbb{R}P^2$.

Recordemos que en el ejemplo dado a continuación de la Definición 3.2.23, nos preguntabamos por la relación existente entre el grupo de superposiciones de una cubierta, $p : \widetilde{X} \to X$, y los grupos $\Pi_1(X, x)$ y $\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$. Por el momento, el Teorema 3.2.7 sólo nos dice que $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) \cong \Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$.

3.3. Cubiertas Regulares.

Teniendo en la mira esta pregunta, debemos desarrollar, todavía algunos conceptos necesarios para poder responderla. Primero que todo consideremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.3.1. Definimos una 3-cubierta de la botella de Klein (K) en sí misma (ver Figura 83 a)) y tal que cada rectángulo de la primera botella de Klein (K_1) cae sobre la segunda botella (K_2) en forma "natural". En otras palabras, en la primera botella se identifican los puntos por medio de una traslación de orden 3 y al hacer esta identificación obtenemos la segunda botella de Klein.

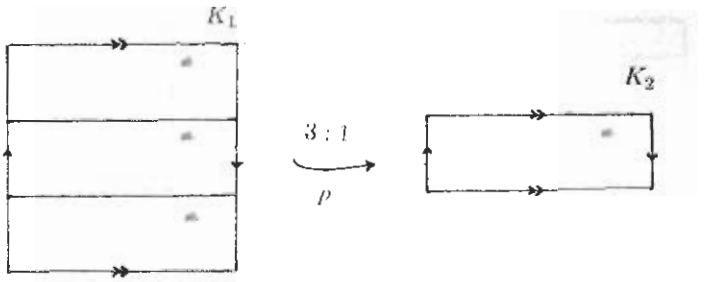


Figura 83 a)

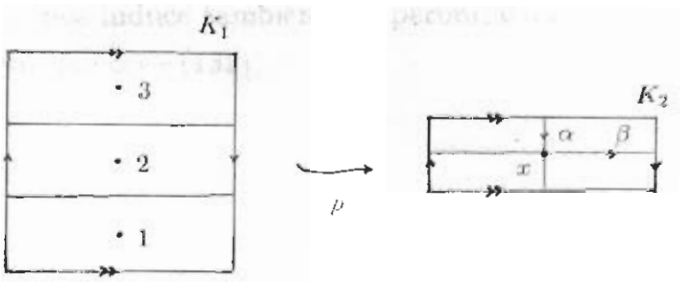


Figura 83 b)

Sea x un punto base en K_2, entonces $p^{-1}(x) = \{1, 2, 3\} \subset K_1$. Observamos que si levantamos el lazo β comenzando en 1, obtenemos un camino $\overline{\beta}_1 : I \to K_1$ tal que $\overline{\beta}_1(0) = 1$ y $\overline{\beta}_1(1) = 3$ (ver Figura 84).

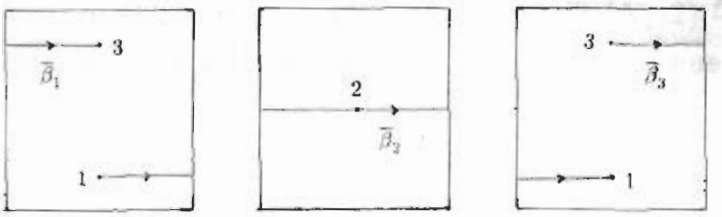


Figura 84

Similarmente, $\overline{\beta}_2$ es un levantamiento de β comenzando en 2 y terminando en 2 y $\overline{\beta}_3$ es un levantamiento de β comenzando en 3 y terminando en 1 (ver Figura 84). Obtenemos así, para el lazo β, una permutación del conjunto $\{1, 2, 3\}$ inducida por los distintos levantamientos de β. Más específicamente, $\beta \mapsto (13)$.

Por su parte el lazo α nos induce también una permutación del conjunto $\{1, 2, 3\}$. En la Figura 85 vemos que $\alpha \mapsto (132)$.

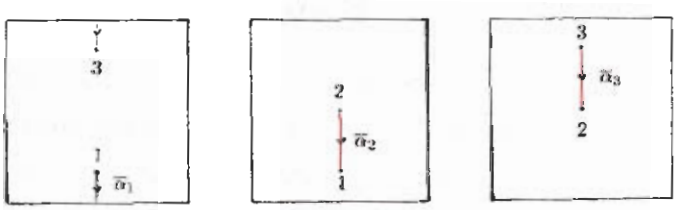


Figura 85

Por otro lado, veamos cuál es la imagen de cada grupo $\Pi_1(K_1, j)$, $j = 1, 2, 3$, bajo

el homomorfimo inducido p_*.

Sean a_1, a_2, a_3 lazos basados en los puntos $1, 2$ y 3, respectivamente, y tales que su imagen es la misma. Y sean b_1, b_2, b_3 lazos basados en $1, 2$ y 3 como lo indica la Figura 86. Entonces a_i, b_i son generadores del grupo $\Pi_1(K_1, i)$ y se puede ver que $\Pi_1(K_1, 1) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(K_2, x)$ es tal que $a_1 \mapsto \alpha^3$ y $b_1 \mapsto \beta\alpha^2$, $\Pi_1(K_1, 2) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(K_2, x)$ es tal que $a_2 \mapsto \alpha^3$ y $b_2 \mapsto \beta$ y $\Pi_1(K_1, 3) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(K_2, x)$ es tal que $a_3 \mapsto \alpha^3$ y $b_3 \mapsto \beta\alpha^{-2}$.

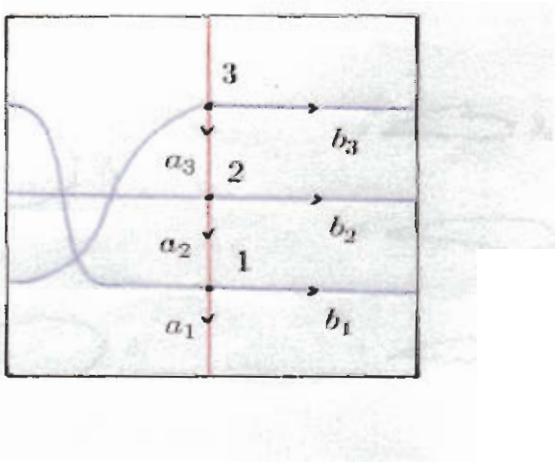


Figura 86

Observamos que, para todo i, $i = 1, 2, 3$, $p_*(\Pi_1(K_1, i))$ no es un subgrupo normal, pues de lo contrario tendríamos $p_*(\Pi_1(K_1, 1)) = p_*(\Pi_1(K_1, 2)) = p_*(\Pi_1(K_1, 3))$, pero ésto no es cierto, ya que el levantamiento de β que comienza en 1 no es un lazo. Se tiene entonces que $\beta \notin p_*(\Pi_1(K_1, 1))$, pero por otro lado vemos que $\beta \in p_*(\Pi_1(K_1, 2))$.

Recordemos que una cubierta $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ es regular si el subgrupo $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ es normal en el grupo $\Pi_1(X, x_0)$, así pues la 3-cubierta $p : K_2 \to K_1$ no es una cubierta regular. En particular, ésto nos muestra que el grupo fundamen-

tal de la botella de Klein no es abeliano.

Las consideraciones anteriores insinúan que la siguiente propiedad caracteriza las cubiertas regulares:

Proposición 3.3.2. *Una cubierta $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ es regular si y sólo si cada vez que se tiene un lazo β (basado en $x \in X$) y uno de sus levantamientos es un lazo, entonces todos los otros levantamientos de β son lazos.*

Demostración. Dejamos la prueba como ejercicio para el lector.

Ejercicio 3.3.3. Observe la figura:

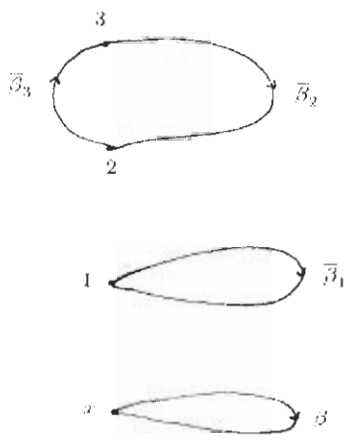


Figura 87 a)

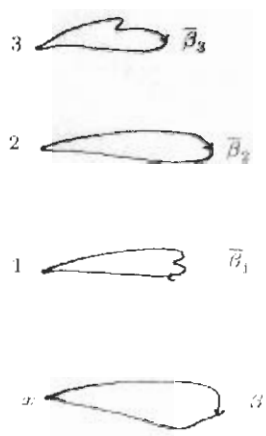


Figura 87 b)

Identificar si los levantamientos descritos en la figura anterior pueden ocurrir en cubiertas regulares o no.

Una propiedad más general que la anterior proposición es la siguiente:

Si $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ es una cubierta, entonces $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) \subset p_*(\Pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_1))$ si y sólo si cada vez que para un lazo β (basado en x) su levantamiento comenzando en $\tilde{x}$ es un lazo, entonces su levantamiento comenzando en $\tilde{x}_1$ es también un lazo.

En contraposición a las cubiertas regulares tenemos el otro caso extremo: Para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existe un lazo β (basado en x) que al levantarlo es lazo solamente en $\tilde{x}$. En este caso, el cardinal de la clase de conjugados de $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))$ es igual al grado de la cubierta.

Ejercicio 3.3.4. Probar esta afirmación.

oooo

4. GRUPO FUNDAMENTAL Y CUBIERTAS

Con el fin de dar una técnica para la construcción de Cubiertas, en la Sección 1 de este capítulo, generalizamos la situación estudiada en el Ejemplo 3.3.1 del capítulo anterior. La Sección 2 introduce las Cubiertas Ramificadas, las cuales tienen su importancia en el estudio de las variedades y en la última sección se completa la relación existente entre las Cubiertas y el Grupo Fundamental.

4.1. Grupo de Monodromía y Construcción de Cubiertas.

Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta, $*$ el punto base en X. Llamaremos *homomorfismo de monodromía* o la *monodromía de la cubierta* p a la función:

$$\begin{aligned} \omega_p : \Pi_1(X,*) \to & \qquad \Sigma_{p^{-1}(*)} \\ [\alpha] \mapsto & \qquad \omega_p[\alpha] : p^{-1}(*) \to p^{-1}(*) \\ & \qquad\qquad \tilde{x} \mapsto \overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1), \qquad (\tilde{x} \in p^{-1}(*)), \end{aligned}$$

donde $\Sigma_{p^{-1}(*)} = \{f : p^{-1}(*) \to p^{-1}(*)/f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, $\Sigma_{p^{-1}(*)}$ es el grupo de las permutaciones de los elementos de la fibra de $*$, y $\overline{\alpha}_{\tilde{x}}$ es el levantamiento de α comenzando en $\tilde{x}$. El subgrupo $\omega_p(\Pi_1(X,*))$ se llama el *grupo de monodromía de la cubierta* p.

La unicidad de los levantamientos nos permite:

Ejercicio 4.1.1.

a) Demostrar que $\omega_p[\alpha]$ es biyectiva.

b) Demostrar que $\omega_p([\alpha][\beta]) = \omega_p[\alpha] \circ \omega_p[\beta]$, es decir que ω_p es un homomorfismo de grupos.

Obsérvese que si p es una cubierta regular $\omega_p[\alpha]$ fija algún punto si y sólo si $\omega_p[\alpha]$ es la identidad, pues si $\omega_p[\alpha]$ fija un punto, ésto quiere decir que el levantamiento de α en ese punto es un lazo, luego en todos los demás tendrá que ser, también, un lazo.

En el Ejemplo 3.3.1 la monodromía de la cubierta, $\omega_p : \Pi_1(K_1,*) \to \Sigma_3$(donde Σ_3 es el grupo simétrico de tres elementos), es tal que $\alpha \mapsto (132)$, $\beta \mapsto (13)$. Aquí comprobamos de nuevo que p no es regular pues $\omega_p[\beta]$ fija el elemento 2 pero no el resto de los elementos.

Por otro lado si $\tilde{x} \in p^{-1}(*)$, se tiene que

$$\begin{aligned} p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) &= \{[\alpha] \in \Pi_1(X, *)/\omega_p[\alpha](\tilde{x}) = \tilde{x}\} = B \\ &= \omega_p^{-1}(St(\tilde{x})) \leq \Pi_1(X, *) \end{aligned}$$

donde $St(\tilde{x})$ es el *estabilizador* de $\tilde{x}$, es decir,

$$S_t(\tilde{x}) = \{f \in \Sigma_{p^{-1}(*)}/f(\tilde{x}) = \tilde{x}\}.$$

Además, como $\widetilde{X}$ es arco-conexo, el homomorfismo de monodromía es *transitivo*, es decir, en el grupo de monodromía $\omega_p(\Pi_1(X, *))$ siempre hay una permutación que lleva un punto dado a otro.

Ejercicios 4.1.2.

a) Probar la anterior afirmación.

b) Calcular la monodromía para los Ejemplos 3.3.1.1 a), d), g), h) e i) del capítulo anterior.

Ejemplo 4.1.3. **Aplicación.**

A continuación describiremos cómo construir una cubierta sobre una esfera perforada en 4 puntos.

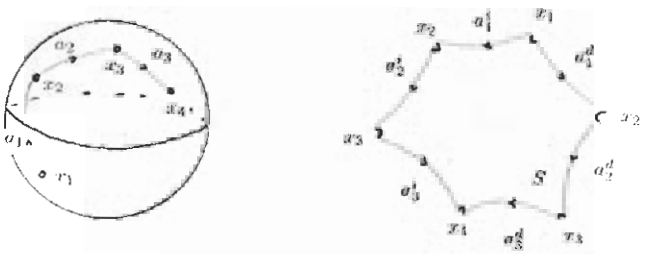


Figura 88

Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S^2$ y sea $X = S^2 - \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Queremos construir un espacio $\widetilde{X}$ y una cubierta $p : \widetilde{X} \to X$.

Sean a_i $(i = 1, 2, 3)$ caminos en S^2 tales que a_i une los puntos x_{i-1} y x_i y $a_i(\overset{\circ}{I}) \cap a_j(\overset{\circ}{I}) = \emptyset$ (si $i \neq j$), donde $\overset{\circ}{I}$ es el interior del intervalo $I = [0, 1]$. Cortamos a X a lo largo de los caminos a_1, a_2 y a_3. El espacio resultante es homeomorfo a un exágono S (sin vértices). En la Figura 88, los superíndices i y d en los lados a_i indican la posición (izquierda o derecha) de S con respecto a la orientacion de la flecha del a_i.

Observamos que $\Pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, donde el lazo α_i corta el camino a_i de izquierda a derecha una única vez y no corta ningún otro camino a_j. Estos lazos los describimos en la siguiente gráfica:

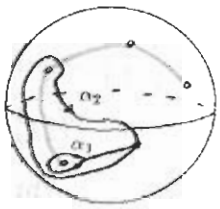


Figura 89

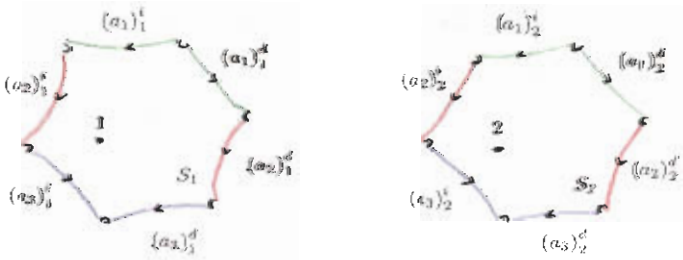


Figura 90

Supongamos que queremos que la cubierta tenga dos hojas, entonces tomamos dos réplicas de S, las cuales distinguimos por sus subíndices. Ver Figura 90.
Para construir $\widetilde{X}$ identificamos los lados de los polígonos S_i $(i = 1, 2)$ según la regla siguiente:

$$(a_1)_1^i \longleftrightarrow (a_1)_2^d \ , \ (a_2)_1^i \longleftrightarrow (a_2)_1^d \ , \ (a_3)_1^i \longleftrightarrow (a_3)_2^d,$$
$$(a_1)_2^i \longleftrightarrow (a_1)_1^d \ , \ (a_2)_2^i \longleftrightarrow (a_2)_2^d \ , \ (a_3)_2^i \longleftrightarrow (a_3)_1^d.$$

Si observamos los subíndices exteriores vemos que al lado a_1 le corresponde la permutación (12), al lado a_2 le corresponde id y al lado a_3 le corresponde (12). Ahora, en la forma en que escogimos los lazos α_i, se establece una correspondencia entre el lazo α_i y el camino a_i, así pues, lo que tenemos es una función del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ en Σ_2, que induce una representación:

$$\begin{aligned} \omega : \Pi_1(X, *) &\to \Sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \alpha_1 &\mapsto (12) \\ \alpha_2 &\mapsto id \\ \alpha_3 &\mapsto (12), \end{aligned}$$

la cual es justamente la monodromía de la 2-cubierta $p : \widetilde{X} \to X$, donde $\widetilde{X} = S_1 \cup S_2/_{\cong}$ consiste de los exágonos S_1 y S_2 con sus lados identificados según la regla dada; la función p es tal que $p = p_1 \cup p_2/\cong$, donde $p_i : S_i \to S/_{\cong}$ es la proyección natural, es decir, $p_i(x)$ es justamente el punto de S^2 correspondiente antes del corte. Obsérvese que la esfera S^2, perforada, se puede ver como el exágono S con los lados identificados. Por eso denotamos la esfera perforada como por $S/_{\cong}$. De esta manera p_1 y p_2 coinciden en los lados que se identifican, quedando p bien definida y, por otro lado, es claro que es una cubierta, ¿por qué?
¿Qué es $\widetilde{X}$?

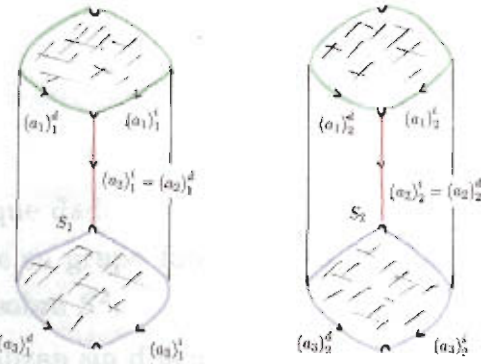


Figura 91

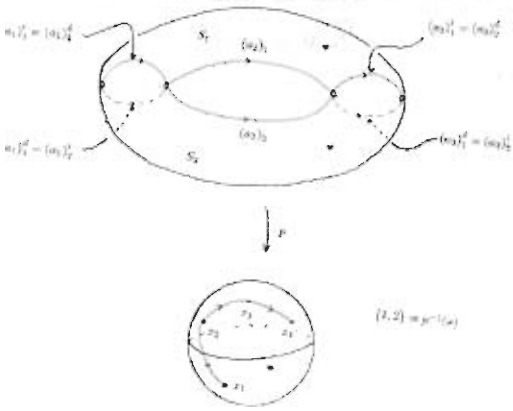


Figura 92

$\widetilde{X}$ es un toro perforado en cuatro puntos. Ver Figuras 91 y 92.

Ejercicio 4.1.4. Compruebe que la monodromía de p es justamente

$$\begin{aligned} \omega : \Pi_1(X) &\to \Sigma_2 \\ \alpha_1 &\mapsto (12) \\ \alpha_2 &\mapsto id \\ \alpha_3 &\mapsto (12). \end{aligned}$$

Así pues, hemos visto que dada una esfera perforada en cuatro puntos, junto con una representación ω de su grupo fundamental en el grupo simétrico Σ_2 se puede construir una cubierta sobre S^2.

Estas técnicas se generalizan sin dificultad para una esfera perforada en k puntos y una representación de su grupo fundamental en Σ_n. Ver, por ejemplo la referencia [13].

Ejercicio 4.1.5.

a) Construya una cubierta con las siguientes características:

i) 2 hojas sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

ii) 3 hojas sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

iii) 4 hojas sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

b) En cada caso anterior, identifique la variedad $\widetilde{X}$ perforada que se obtiene. *Clave: Deduzca una fórmula para poder calcular la característica de Euler de la superficie que se obtendría si le taparamos los huecos a* $\widetilde{X}$.

4.2. Cubiertas Ramificadas y Preguntas.

Resumiendo, hemos visto que dada una esfera perforada en k puntos, a cada representación de su grupo fundamental en el grupo simétrico de n elementos le corresponde una cubierta $f : \widetilde{X} \to S^2 - \{x_1, \cdots, x_k\}$ de grado n, donde $\widetilde{X}$ es una superficie perforada y orientable, la cual es conexa si y sólo si la representación es transitiva.

Definición 4.2.1. Dadas las superficies $\widetilde{Y}$ y Y, diremos que una función $g : \widetilde{Y} \to Y$ es una **cubierta ramificada de grado** n si existe $K \subset Y$, K finito, tal que $g|_{Y-K}$

es una cubierta de grado n, y el cardinal de la preimagen de cada punto en K es menor que n. El conjunto K se llama el **conjunto de ramificación** de f.

Es claro que cada vez que tengamos una cubierta del tipo de $f : \widetilde{X} \to S^2 - \{x_1, \cdots, x_k\}$ será posible extenderla de manera natural a una cubierta ramificada $f : \widetilde{Y} \to S^2$, simplemente "tapando los huecos". Esta será entonces, una cubierta ramificada de grado n con conjunto de ramificación $\{x_1, \cdots, x_k\}$.

Nos preguntamos entonces si es posible obtener por este método todas las superficies orientables. La respuesta a esta pregunta es **Sí**, ya que Alexander (ver [1]) demostró que *toda n-variedad orientable y cerrada es una cubierta ramificada sobre S^n*. Así pues, si tenemos una superficie orientable $\widetilde{Y}$, tenemos también una cubierta ramificada $f : \widetilde{Y} \to S^2$, y sus puntos de ramificación junto con su monodromía suministrarán entonces los datos que necesitamos para reproducir la superficie $\widetilde{Y}$.

Otras preguntas son:

(1) Teniendo fijo el número n de capas ¿se podrán construir todas las superficies orientables? La respuesta es afirmativa para $n = 2$. En efecto, *toda superficie orientable de género g es una cubierta ramificada de grado 2 sobre S^2*. Para mostrar ésto, basta seleccionar $k = 2g + 2$ puntos sobre la esfera y elegir una representación $p : \Pi_1(S^2 - \{x_1, \cdots, x_{2g+2}\}) \to \Sigma_2$ conveniente.

Ejercicio 4.2.2. Encuentre una representación conveniente, y calcule la característica de Euler para la superficie obtenida, con el fin de probar que su representación si sirve.

Una pregunta simétrica a la anterior es:

(2) Manteniendo fijo el número k de puntos seleccionados sobre la esfera ¿se podrán construir todas las superficies orientables? La respuesta a esta pregunta es también afirmativa para $k = 6$. En efecto, *toda superficie orientable de género g es una cubierta ramificada con 6 puntos ramificación.*

Ejercicio 4.2.3. Encuentre una representación conveniente, y calcule la característica de Euler para la superficie obtenida, con el fin de probar que su representación si sirve.

Podemos también preguntarnos por la construcción de una superficie específica. Más concretamente:

(3) ¿Podremos construir S^2 como cubierta ramificada sobre cualquier conjunto de

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

k puntos? La respuesta es de nuevo afirmativa.

Ejercicio 4.2.4. Para cada k (mayor que 1) encuentre una representación conveniente, y calcule la característica de Euler de la superficie obtenida, con el fin de probar que ésta es una esfera.

Dejamos al lector las siguientes preguntas:

Preguntas 4.2.5.

¿Será afirmativa la respuesta a la Pregunta (1) para $n = 3$, etc?; ¿será afirmativa la respuesta a la Pregunta (2) para $k = 3$, etc?; ¿qué restricciones necesitaremos imponer sobre k para que la respuesta a la Pregunta (3) sea afirmativa cuando reemplazamos la esfera por un toro, un doble toro, etc?; dado n ¿cuál es el número mínimo k para el cual se puede obtener una superficie de género dado?; dado un número k ¿cuál es el número mínimo n para el cual se puede obtener una superficie de género dado?

Hemos visto pues, como la monodromía ω permitió la construcción de la cubierta; **la monodromía no es más que la regla de pegamiento de los lados!**

Vamos a ver que, efectivamente, el homomorfismo de monodromía determina la cubierta. En efecto, recordemos que una cubierta viene determinada por la clase de conjugación de $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))$; y la monodromía también determina la clase de conjugación, dada por

$$\{\omega_p^{-1}(St(\tilde{x}_i))/\tilde{x}_i \in p^{-1}(*)\} = \{p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_i))/\tilde{x}_i \in p^{-1}(*)\}.$$

Obsérvese que si ω y ω' son homomorfismos conjugados, es decir, existe $g \in \Sigma_{p^{-1}(*)}$, tal que

$$\omega'[\alpha] = g\omega[\alpha]g^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Pi_1(X, *),$$

entonces las cubiertas determinadas por ω y ω' son equivalentes.

Ejercicio 4.2.6. ¿Por qué son equivalentes?

Ejercicico 4.2.7. Dada una cubierta ramificada. Investigar cómo es la preimagen de una vecindad pequeña de un punto que pertenece al conjunto de ramificación.

4.3. La Acción de un Grupo sobre un Conjunto.

Con el fin de estudiar más a fondo el grupo de superposiciones, $Sup(p)$, de una cubierta $p : \widetilde{X} \to X$, recordaremos lo que es la acción de un grupo sobre un conjunto

y algunas otras nociones algebraicas relacionadas con la noción de acción de un grupo.

Definición 4.3.1. Un grupo G se dice que *actúa sobre un conjunto E por la izquierda* (resp. por la derecha) si existe una función $G \times E \to E$ definida por $(g, x) \mapsto g \cdot x$ (resp., $E \times G \to E$; $(x, g) \mapsto x \cdot g$) y tal que para todo $x \in E$ y $g_1, g_2 \in G$ se verifican las condiciones:
1. $e \cdot x = x$ (e es identidad) (resp., **1'**, $x \cdot e = x$), es decir, el elemento neutro fija todos los elementos x de E, pero esto no quiere decir que sea el único que lo haga.
2. $g_1 g_2 \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ (resp., **2'**. $x \cdot g_1 g_2 = (x \cdot g_1) \cdot g_2$).
Nótese que la diferencia de la acción a derecha está principalmente en las propiedades **2** y **2'** pues cuando $g_1 g_2$ actúa sobre el elemento x por la izquierda, primero se pone a actuar a g_2 sobre x, pero cuando $g_1 g_2$ actúa por la derecha sobre x, primero se pone a actuar a g_1 sobre x.
Ejemplos 4.3.2.
1) Σ_3 actúa por la izquierda sobre $\{1, 2, 3\} = I_3$, así:

$$\begin{aligned} &\Sigma_3 \times I_3 \to I_3 \\ &\quad (\alpha, i) \mapsto \alpha \cdot i = \alpha(i), \qquad (\alpha, i) \in \Sigma_3 \times I_3 \end{aligned}$$

2) $\mathbb{Z}_2$ actúa por la izquierda sobre S^n.
Sea $\mathbb{Z}_2 = \{1, g\}$, donde $g^2 = 1$. Definimos la acción por:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n \\ &\quad (1, x) \mapsto 1 \cdot x = x, \\ &\quad (g, x) \mapsto g \cdot x = -x; \qquad (-x \text{ es la antípoda de } x) \end{aligned}$$

para $(1, x), (g, x) \in \mathbb{Z}_2 \times S^n$. Obsérvese que $gg \cdot x = g \cdot (g \cdot x) = g \cdot (-x) = -(-x) = x = 1 \cdot x$
3) $\mathbb{Z}$ actúa sobre $\mathbb{R}$ a la izquierda. En efecto, sea

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto x + 1 = T(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

entonces T es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ y $\langle T\rangle \cong \mathbb{Z}$ (notése que $T^{-1}(x) = x - 1$ y se entiende $T^0 = id$). Definimos la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(T, x) \mapsto T \cdot x = T(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) Si G actúa por la izquierda sobre un conjunto E con $G \times E \to E$ definida por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, entonces G actúa por la derecha sobre E con la acción $E \times G \to E$ definida por $(x \cdot g) \mapsto x \cdot g = g^{-1} \cdot x$.
Ejercicio 4.3.3. Demostrar la última afirmación.
5) Sea H un subgrupo de un grupo G. La función $H \times G \to G$ tal que $(h, g) \mapsto h \cdot g = h\ g\ h^{-1}$, es una acción a izquierda de H sobre el conjunto G. Esta acción recibe el nombre de *conjugación* (a izquierda). Por otro lado, la función $G \times H \to G$, donde $(g, h) \mapsto g \cdot h\ := h^{-1}gh$, es una acción a derecha de H sobre G.
6) Si $E = \{K/K$ es subgrupo de $G\}$ y H es un subgrupo de G. La función $H \times E \to E$, donde $(h, K) \mapsto h \cdot K := hKh^{-1}$, es una acción a izquierda de H sobre E.
7) Si K es subgrupo de G y $E = \{gK/g \in G\}$ es el conjunto de clase laterales a izquierda de K y si H es otro subgrupo de G, la función $H \times E \to E$ con $(h, gK) \mapsto h \cdot gK := hgK$, es una acción a derecha de H sobre E, la cual es llamada *translación a derecha o acción por translación.*
Obsérvese que si G es un grupo que actúa sobre un conjunto E por la izquierda, se induce una representación $\varphi :\ G \to \Sigma_E$ tal que $g \mapsto \varphi_g = \varphi(g)$ y $\varphi_g : E \to E$ con $x \mapsto g \cdot x$, donde $\Sigma_E = \{$permutaciones de $E\}$.
En efecto, $\varphi_g \in \Sigma_E$ pues $\varphi_{g^{-1}}$ es su función inversa. Y si $g_1, g_2 \in G$, entonces para todo $x \in E$. $\varphi_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2 \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x)$. Luego φ es un homomorfismo de grupos. (Se tiene algo similar cuando la acción es por la derecha).
8) *La monodromía induce una acción.* Veamos ahora que dada una cubierta $p : \widetilde{X} \to X$, su monodromía, $\omega_p : \Pi_1(X, *) \to \Sigma_{p^{-1}(*)}$ define de manera "natural" una acción a derecha del grupo $\Pi_1(X, *)$ sobre la fibra $p^{-1}(*)$ así:

$$\begin{aligned} p^{-1}(*) \times \Pi_1(X, *) &\to p^{-1}(*) \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \omega_p([\alpha])(\tilde{x}) = \overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1), \end{aligned}$$

donde $\overline{\alpha}_{\tilde{x}}$ es el levantamiento de α comenzando en $\tilde{x}$.

En efecto, veamos que sí es una acción.

a) $\tilde{x}\cdot[e] = \omega_p([e])(\tilde{x}) = \overline{e}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$, ya que $\overline{e}_{\tilde{x}}$ es el *lazo* constante ($\overline{e}_{\tilde{x}}(s) = \tilde{x}$, $\forall s \in I$).

b) $\tilde{x} \cdot ([\alpha]\,[\beta]) = \omega_p([\alpha]\,[\beta])(x) = \omega_p([\alpha\beta])(\tilde{x}) = (\overline{\alpha\beta})_{\tilde{x}}(1) = \overline{\beta}_{\overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1)$
$= \omega_p([\beta])(\overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) = \omega_p([\beta])(\omega_p([\alpha])(\tilde{x})) = \omega_p([\beta])(\tilde{x}\cdot[\alpha]) = (\tilde{x}\cdot[\alpha]\cdot[\beta])$.

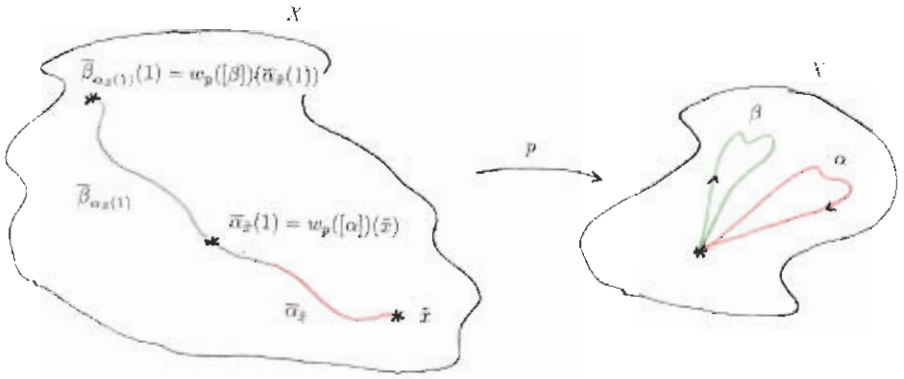


Figura 93

Definiciones 4.3.4. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto E a izquierda.

1) Si $\varphi : G \to \Sigma_E$ $(g \mapsto \varphi_g)$ es un monomorfismo, se dice que G actúa *efectivamente* sobre E. *En otras palabras, el único elemento de G que deja fijos todos los elementos de E (por su acción) es la identidad e de G.*

2) Decimos que G actúa *libremente* sobre E si $g \cdot x = x$ para algún $g \in G$ y algún $x \in E$ necesariamente $g = e$. Es decir, que el único elemento de G que tiene puntos fijos es e.

3) Decimos que G actúa *transitivamente* si para todo $x, y \in E$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. *"Intuitivamente, ésto nos dice que podemos pasar de cualquier elemento x a cualquier otro elemento y, por medio de la acción".*

4) Dado $x \in E$, el conjunto $\{g \cdot x \in E / g \in G\} = \mathcal{O}_x$ se llama la *órbita* de x. *Dicho*

de otra manera, la órbita de x es el recorrido que hace x bajo la acción de todos los elementos de G.

5) Dado x en E, el conjunto $\{g \in G/g \cdot x = x\}$ se llama el *estabilizador de x* o *grupo de isotropía de x*. Lo denotamos por $St(x)$ o $Iso(x)$. *Este es el conjunto de todos los elemenetos de G que no mueven a x.*

Ejercicios 4.3.5. Probar las siguientes afirmaciones:

a) La relación: "$x \sim y \Longleftrightarrow (\exists g \in G)(g \cdot x = y)$" es de equivalencia y sus clases de equivalencia son precisamente las órbitas de los elementos.

b) Si G actúa transitivamente sobre E, entonces para todo $x \in E$ la órbita $\mathcal{O}_x$ es todo el conjunto E.

c) El estabilizador $St(x)$ es un subgrupo de G.

d) Si G actúa libremente sobre E, entonces para todo $x \in E$, $St(x) = \{e\}$.

e) El cardinal de la órbita de un elemento $x \in E$ es igual al índice $[G : St(x)]$, o sea que es igual al cardinal del conjunto de todas las clases laterales de $St(x)$ en G.

Clave: Considere la aplicación $gSt(x) \mapsto g \cdot x$.

En la acción definida en el Ejemplo 4.3.2. 8) anterior; si $\tilde{x} \in p^{-1}(*)$ entonces el grupo de isotropía de $\tilde{x}$ es:

$$\begin{aligned} St(\tilde{x}) = Iso(\tilde{x}) &= \{[\alpha] \in \Pi_1(X,*)/\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}\} \\ &= \{[\alpha] \in \Pi_1(X,*)/\omega_p([\alpha])(\tilde{x}) = \tilde{x}\} = \omega_p^{-1}(St(\tilde{x})) \\ &= p_*(\Pi_1(\widetilde{X},\tilde{x})). \end{aligned}$$

Donde debemos tener cuidado con la notación $St(x)$, ya que el primer $St(\tilde{x})$ que aparece en las ecuaciones anteriores, es el estabilizador según la acción, mientras que el segundo $St(\tilde{x})$ es el conjunto $\{f \in \Sigma(p^{-1}(*))/f(\tilde{x}) = \tilde{x}\}$ (que es el mismo definido después del Ejercicio 4.1.1 de este capítulo).

Ahora, como $\widetilde{X}$ es arco-conexo, se tiene que la acción considerada es transitiva, luego para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(*)$ su órbita $\mathcal{O}_{\tilde{x}}$ es $p^{-1}(*)$ y además el cardinal de $p^{-1}(*)$, es decir, el grado de p es igual al número de clases laterales del subgrupo $Iso(\tilde{x})$ en $\Pi_1(X,*)$. En otras palabras:

$$\textbf{El grado de la cubierta } = [\Pi_1(X,*) : Iso(\tilde{x})] = \Big[\Pi_1(X,*) : \ p_*(\Pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}))\Big].$$

Definiciones 4.3.6.

1) Si G es un grupo que actúa por la izquierda sobre dos conjuntos E_1 y E_2, diremos que una función $f : E_1 \to E_2$ es *G-equivariante por la izquierda* si el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G\times E_1 \arrow[r, "I_G\times f"] \arrow[d] & G\times E_2 \arrow[d] \\
E_1 \arrow[r, "f"] & E_2
\end{tikzcd}$$

$$(g,x) \longmapsto (g,f(x))$$

$$g.x \longmapsto g.f(x) = f(g.x)$$

Figura 94

2) Se dice que una función $f : E_1 \to E_2$, G-equivariante, es un *isomorfismo por la izquierda* si existe $f' : E_2 \to E_1$, G-equivariante, tal que $f \circ f' = Id_{E_2}$ y $f' \circ f = Id_{E_1}$. En este caso se dice que E_1 *es isomorfo a* E_2 *por la acción de* G *a izquierda.*

Ejercicio 4.3.7.

Sea G un grupo que actúa transitivamente a derecha sobre el conjunto E_1. Sea $E_2 = \{Iso(x)g/g \in G\} = G/Iso(x)$ (el conjunto de clases laterales a derecha del estabilizador de x en G) con x fijo en E_1.

Considere la aplicación $G \to E_1$ tal que $g \mapsto x \cdot g$. Ésta es sobreyectiva, y, además, $x \cdot g_1 = x \cdot g_2 \Longleftrightarrow x \cdot g_1 g_2^{-1} = x \Longleftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in Iso(x)$.

Luego podemos inducir una aplicación $f_x : E_2 \to E_1$ tal que $Iso(x)g \mapsto x \cdot g$.

a) Prúebese que f_x es bien definida, es G-equivariante y es un isomorfismo bajo la acción de G a la derecha. Nótese que f_x depende de la elección de x. Probar

también que si $y \in E_1$, entonces los grupos $Iso(x)$ e $Iso(y)$ son conjugados.
b) Probar que en general se tiene que si $y \in \mathcal{O}_x$ entonces el grupo $Iso(x)$ es conjugado con el grupo $Iso(y)$.
Volvamos ahora a la acción inducida por la monodromía y considerada al comienzo de esta sección. Por el ejercicio anterior vemos que $p^{-1}(*)$ es isomorfo al espacio de clases laterales

$$\Pi_1(X,*)/Iso(\tilde{x}) = \Pi_1(X,*)/p_*(\Pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}))$$

bajo la acción de $\Pi_1(X,*)$ a derecha, obteniendo de nuevo que **el número de hojas de la cubierta p es igual al índice del subgrupo $p_*(\Pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}))$ en $\Pi_1(X,*)$.**
Sea $Aut_G(p^{-1}(*))$ el grupo de automorfismos de $p^{-1}(*)$ bajo la acción de G. El teorema siguiente nos relaciona el grupo, de superposiciones de p, $Sup(p)$, con la acción de G.

Teorema 4.3.8. *El grupo de superposiciones de una cubierta $Sup(p)$ es isomorfo al grupo $Aut_{\Pi_1(X,*)}(p^{-1}(*))$.*

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \bullet|_{p^{-1}(*)} : Sup(p) &\longrightarrow Aut_{\Pi_1(X,*)}(p^{-1}(*)), \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_{p^{-1}(*)} \end{aligned}$$

mostremos que ésta es bien definida y que es un isomorfismo de grupos.
i) "$\bullet|_{p^{-1}(*)}$ *es bien definida*".
Claramente, si $\varphi \in Sup(p)$ entonces $\varphi|_{p^{-1}(*)}$ es una biyección. Veamos que es $\Pi_1(X,*)$-equivariante. En efecto, sea $[\alpha] \in \Pi_1(X,*)$ y sea $\tilde{x} \in p^{-1}(*)$. Probemos que $\varphi|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x}\cdot[\alpha]) = \varphi|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x})\cdot[\alpha]$. En efecto, $\varphi|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x}\cdot[\alpha]) = \varphi|_{p^{-1}(*)}(\overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) = \varphi(\overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) = (\varphi \circ \overline{\alpha}_{\tilde{x}})(1) = \overline{\alpha}_{\varphi(\tilde{x})}(1) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [\alpha] = \varphi|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x}) \cdot [\alpha]$. Obsérvese que $\varphi \circ \overline{\alpha}_{\tilde{x}}$ es el levantamiento de α comenzando en $\varphi(\tilde{x})$.

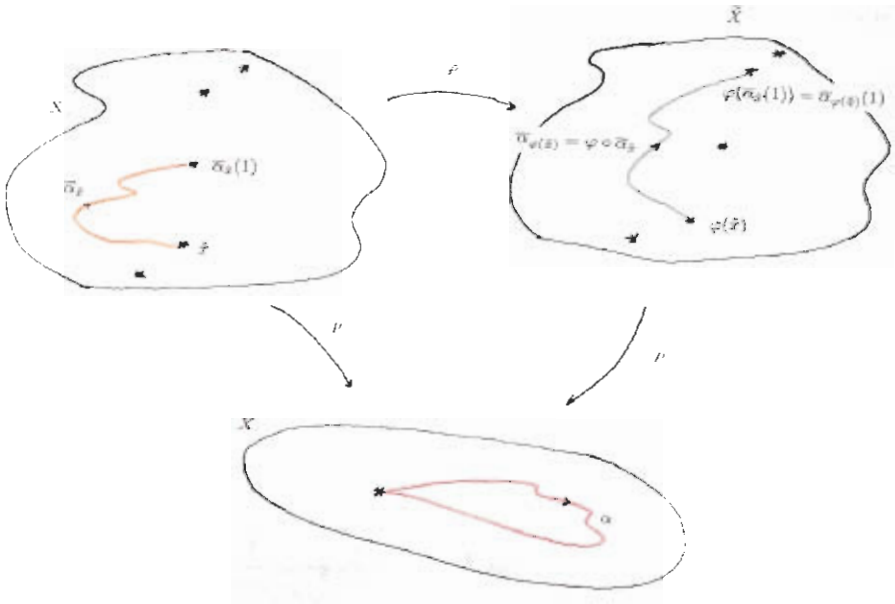


Figura 95

luego $\varphi|_{p^{-1}(*)}$ es $\Pi_1(X,*)$-equivariante y, además, por ser biyectiva, se ve fácilmente que es un automorfismo de $p^{-1}(*)$ bajo la acción de $\Pi_1(X,*)$, es decir, $\varphi|_{p^{-1}(*)} \in Aut_{\Pi_1(X,*)}(p^{-1}(*))$. Luego $\bullet|_{p^{-1}(*)}$ es bien definida.

ii) "$\bullet|_{p^{-1}(*)}$ *es un homomorfismo.*"

Claramente $(\varphi \circ \psi)|_{p^{-1}(*)} = \varphi|_{p^{-1}(*)} \circ \psi|_{p^{-1}(*)}$.

iii) $\bullet|_{p^{-1}(*)}$ *es inyectiva*".

Supongamos $\varphi_1|_{p^{-1}(*)} = \varphi_2|_{p^{-1}(*)}$. Veamos que $\varphi_1 = \varphi_2$. En efecto, si $\tilde{x} \in p^{-1}(*)$, $\varphi_1|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x}) = \varphi_2|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x})$, luego

$$\left(\varphi_1|_{p^{-1}(*)}\right)^{-1} \circ \varphi_2|_{p^{-1}(*)}(\tilde{x}) = \tilde{x},$$

entonces $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(\tilde{x}) = \tilde{x}$ y por la Proposición 2.18, del capítulo anterior, se tendrá que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = id_{\tilde{X}}$. Luego $\varphi_2 = \varphi_1$.

iv) "$\bullet|_{p^{-1}(*)}$ *es sobreyectiva*".

Sea $f \in Aut_{\Pi_1(X,*)}(p^{-1}(*))$, entonces f es $G-$equivariante y $f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{x}) \cdot [\alpha]$. Primero que todo veamos que $Iso(\tilde{x}) = Iso(f(\tilde{x}))$, lo que nos permitirá probar la sobreyectividad. Sea $[\alpha] \in Iso(\tilde{x}) \Longleftrightarrow \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} \Longleftrightarrow f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{x})$ y como f es $G-$ equivariante, esto es equivalente a $f(\tilde{x}) \cdot [\alpha] = f(\tilde{x}) \Longleftrightarrow [\alpha] \in Iso(f(\tilde{x}))$.

Así pues $p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) = Iso(\tilde{x}) = Iso(f(\tilde{x})) = p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, f(\tilde{x}))$ y aplicando dos veces el teorema del levantamiento de funciones continuas (Teorema 2.13, capítulo anterior) existen φ_1 y φ_2 tales que los diagramas siguientes conmutan.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, f(\tilde{x})) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "p"] & (X, *) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, f(\tilde{x})) \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[r, "p"] & (X, *) \end{tikzcd}$$

$\varphi_1(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ $\qquad$ $\varphi_2(f(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Figura 96

es decir, $p \circ \varphi_1 = p$ y $p \circ \varphi_2 = p$, luego $p \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = p \circ \varphi_1 = p$ y como $\varphi_2 \circ \varphi_1(\tilde{x}) = \tilde{x}$ y necesariamente, por la uniciad del levantamiento $\varphi_1 \circ \varphi_2 = Id_{\widetilde{X}}$. Similarmente, $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_{\widetilde{X}}$, luego $\varphi_1 \in Sup(p)$.

Veamos que $\varphi_1|_{p^{-1}(*)} = f$. Sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(*)$. Como la acción es transitiva, existe $[\alpha] \in \Pi_1(X, *)$ tal que $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}_0$. Entonces $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \varphi_1(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = \varphi_1(\overline{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) = (\overline{\alpha}_{\varphi_1(\tilde{x})}(1)) = \overline{\alpha}_{f(\tilde{x})}(1) = f(\tilde{x}) \cdot [\alpha] = f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{x}_0)$, luego $\varphi_1|_{p^{-1}(*)} = f$.

Y así $\bullet|_{p^{-1}(*)}$ es sobreyectiva. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[ur, "Id_{\tilde{X}}"] \arrow[r, "p"'] & (X, *)
\end{tikzcd}$$

Figura 97

Antes de ver el teorema que nos relacionará el grupo de superposiciones de una cubierta $p : \widetilde{X} \to X$ con el grupo fundamental del espacio X, necesitamos ver otro resultado de teoría de grupos.

Proposición 4.3.9. *Sean $E \times G \to E$ una acción transitiva a derecha sobre el conjunto E; H el grupo de isotropía de $x_0 \in E$. Si $N(H) = \{g \in G / gHg^{-1} = H\}$ es el normalizador de H. Entonces el grupo $Aut_G(E)$ es isomorfo al grupo cociente $N(H)/H$.*

Demostración. Se trata de definir una función $\Phi : N(H) \to Aut_G(E)$ que sea homomorfismo de grupos y cuyo kernel sea precisamente H. Para esto, dado $g \in N(H)$ tenemos que poder escoger un único elemento φ_g de $Aut_G(E)$. Obsérvese que si $\varphi \in Aut_G(E)$, entonces $Iso(x) = Iso(\varphi(x))$, para todo $x \in E$.

Ejercicio 4.3.10. Pruebe la anterior afirmación.

Por otro lado, veamos que si $x, y \in E$ son tales que $Iso(x) = Iso(y) = H'$, entonces existe un único $\varphi \in Aut_G(E)$ tal que $\varphi(x) = y$.

Por el Ejercicio 4.3.7 las funciones $f_x : G/H' \to E$ tal que $H'g \mapsto x \cdot g$ y $f_y : G/H' \to E$ con $H'g \mapsto y \cdot g$ son biyectivas y G-equivariantes. (Realmente son isomorfismos bajo la acción de G.)

Sea $\varphi = f_y \circ f_x^{-1}$, entonces $\varphi(x) = f_y \circ f_x^{-1}(x) = f_y(f_x^{-1}(xe)) = f_y(He) = y \cdot e = y$. Además φ es G-equivariante (composición de G–equivariantes!) y es un automorfismo.

"Unicidad de φ".

Sea $\psi \in Aut_G(E)$ tal que $\psi(x) = y$. Sea $z \in E$, como la acción es transitiva, existe $g \in G$ tal que $x \cdot g = z$, así pues, $\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g = y \cdot g = \psi(x) \cdot g = \psi(x \cdot g) = \psi(z)$, donde la segunda y quinta desigualdades son ciertas por la equivarianza de φ y de ψ, respectivamente. Luego $\varphi = \psi$.

Por otro lado, sea $x_0 \in E$, $H = Iso(x_0) = \{h \in G / x_0 \cdot h = x_0\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} Iso(x_0) = Iso(x_0 \cdot g) &\Longleftrightarrow H = \{h \in G / (x_0 \cdot g) \cdot h = x_0 \cdot g\} \\ &\Longleftrightarrow H = \{h \in G / x_0 \cdot ghg^{-1} = x_0\} \\ &\Longleftrightarrow H = \{h \in G / ghg^{-1} \in H\} \\ &\Longleftrightarrow H = \{h \in G / h \in g^{-1}Hg\} \\ &\Longleftrightarrow H = g^{-1}Hg \Longleftrightarrow g \in N(H). \end{aligned}$$

Podemos entonces definir una función $\Phi : N(H) \to Aut_G(E)$ por $\Phi(g) = \varphi_g$, donde φ_g es el único automorfismo que existe tal que $\varphi_g(x_0) = x_0 \cdot g$.

"Sobreyectividad".

Esta aplicación es sobreyectiva, pues si $\varphi \in Aut_G(E)$, $Iso(x_0) = Iso(\varphi(x_0))$ (por la observación que hicimos al comienzo del teorema) y como la acción es transitiva, existe $g' \in G$ tal que $x_0 \cdot g' = \varphi(x_0)$, pero como $Iso(x_0) = Iso(x_0 \cdot g')$ entonces $g' \in N(H)$ y necesariamente $\Phi(g') = \varphi$.

"Homomorfismo de grupos".

Sean $g_1, g_2 \in N(H)$. Veamos que $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Bastará probar que $\varphi_{g_1 g_2}(x_0) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x_0)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi_{g_1 g_2}(x_0) &= x_0 \cdot (g_1 g_2) = (x_0 \cdot g_1) \cdot g_2 = \varphi_{g_1}(x_0) \cdot g_2 \\ &= \varphi_{g_1}(x_0 \cdot g_2) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x_0)) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x_0). \end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.11.
a) Probar que si $\varphi_{g_1g_2}(x_0) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x_0)$ entonces $\varphi_{g_1g_2}(x) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x)$, para cualquier otro x en E.
b) Probar que el Kernel de Φ es exactamente H.
Luego, $N(H)/H \cong Aut_G(E)$. $\square$

Corolario 4.3.12. *Si $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, *)$ es una cubierta, entonces*

$$Sup(p) \cong N(p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})))/p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})).$$

Demostración. Aplíquese el Teorema 4.3.8 y la Proposición 4.3.9. $\square$

Corolario 4.3.13. *Si $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, *)$ es una cubierta regular, entonces*

$$Sup(p) \cong \Pi_1(X, *)/p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})).$$

Demostración. En este caso $N(p_*(\Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))) = \Pi_1(X, *)$. $\square$

Ejemplo 4.3.14. Sea $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X} = X = S^1$ y tal que $z \mapsto z^n (n \in \mathbb{Z})$. Entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} = N(n\mathbb{Z})$ y $p_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = n\mathbb{Z}$. Según el corolario, $Sup(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ y, en efecto, geométricamente lo podemos ver claramente, ya que el grupo $Sup(p)$ es generado por una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

Corolario 4.3.15. *Si $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, *)$ es una cubierta universal, entonces $Sup(p)$*
$\cong \Pi_1(X, *)$ y el orden de $\Pi_1(X, *)$ es igual al grado de la cubierta.

El Corolario 4.3.13 nos muestra la relación que estábamos buscando entre el grupo de superposiciones de la cubierta y el grupo fundamental del espacio base.
La importancia del Corolario 4.3.15 está en que éste nos da una forma de calcular el grupo fundamental de un espacio cuando se conoce su cubierta universal.
Ejemplos 4.3.16.
1) En el Ejemplo 3.3.1 de la botella de Klein, $p_*(\Pi_1(K_1, 2)) = \langle \alpha^3, \beta \rangle$. Utilizando la monodromía $\omega_p : \Pi_1(K_2, *) \to \Sigma_3$ $(\alpha \mapsto (132), \beta \mapsto (13))$, se tiene $\omega_p(p_*(\Pi_1(K_1, 2))$ $= \omega_p(\langle \alpha^3, \beta \rangle) = \langle (132)^3, (13) \rangle = \langle (13) \rangle$. Como $\langle (13) \rangle$ no es un subgrupo normal en

Σ_3 y, además, no hay un subgrupo intermedio entre $\langle(13)\rangle$ y Σ_3, se tiene entonces que $N(\langle(13)\rangle) = \langle(13)\rangle$, luego $N(\langle(13)\rangle)/\langle(13\rangle) \cong \{e\}$, y como ω_p es un homomorfismo se tiene que $N(p_*(\Pi_1(K_1, 2)))/p_*(\Pi_1(K_1, 2)) \cong \{e\}$, por el teorema de correspondencia de subgrupos normales. Es decir, la cubierta no admite superposiciones no triviales. Luego $Sup(p) \cong \{e\}$.

2) Sea $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ tal que $t \mapsto (sent, cost)$. Esta es la cubierta universal de S^1.

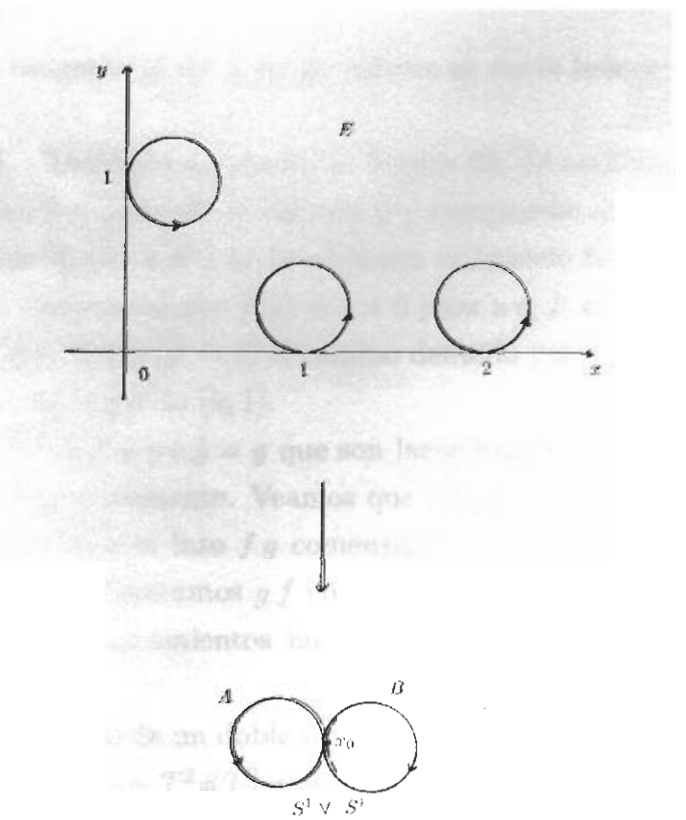


Figura 98

Ejercicio 4.3.17. Pruébese que $Sup(p) = \langle T \rangle \cong \mathbb{Z}$, donde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $x \mapsto x + 1$. De donde $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Encontrando el mismo resultado que obtuvimos al aplicar la primera versión del Teorema de Van Kampen.

3) Sea $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ definida por $x \mapsto \overline{x}$, donde $\overline{x} = \{x, -x\}$. p es la cubierta universal de $\mathbb{R}P^2$ y como ésta tiene sólo dos hojas, necesariamente $Sup(p) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \Pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

4) La función $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ tal que $(s, t) \mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$ es la cubierta universal del toro $S^1 \times S^1$ y $Sup(p) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle T, U \rangle$, donde $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es tal que $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ y $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es tal que $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

5) El grupo $\Pi_1(S^1 \vee S^1)$ no es conmutativo. En efecto, considere la Figura 98. Y sea $p : E \to A \vee B$ tal que:

a) "Eurolla" al eje x alrededor del círculo A enviando los enteros siempre en x_0.

b) "Enrolla" el eje y alrededor del círculo B enviando los enteros siempre en x_0.

c) Cada círculo tangente al eje x en un entero, se envía homeomórficamente sobre el círculo B.

d) Cada círculo tangente al eje y en un entero, se envía homeomórficamente sobre el círculo A.

Ejercicio 4.3.18. Teniendo en cuenta la Figura 98, dé coordenadas a los espacios E y $A \vee B$, defina formalmente la función p y compruebe que ella es una cubierta.

Veamos ahora que $\Pi_1(S^1 \vee S^1)$ no es abeliano utilizando la teoría de cubiertas.

Sea $\tilde{f} : I \to E$ el camino tal que $\tilde{f}(s) = s \times 0$ para $s \in I$, el cual comienza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 0)$ y sea $\tilde{g} : I \to E$ el camino definido por $\tilde{g}(s) = 0 \times s$ que va desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(0, 1)$.

Consideremos $p \circ \tilde{f} = f$ y $p \circ \tilde{g} = g$ que son lazos basados en x_0 y que rodean a los círculos A y B, respectivamente. Veamos que $[f]\,[g] \neq [g]\,[f]$ en $\Pi_1(S^1 \vee S^1)$.

En efecto, si levantamos el lazo $f\,g$ comenzando en $(0, 0)$, obtenemos un lazo que termina en $(1, 0)$ y si levantamos $g\,f$ comenzando en el mismo $(0, 0)$, éste termina en $(0, 1)$, luego los levantamientos no pueden ser homotópicos, lo que hace que $[f]\,[g] \neq [g]\,[f]$.

6) El grupo fundamental de un doble toro $\Pi_1(T^2 \# T^2)$ no es abeliano y por lo tanto es diferente de $\Pi(T^2)$. Sea $T^2 \# T^2$ el octágono siguiente:

Figura 99

Considere la composición de funciones continuas que describimos gráficamente en la Figura 100.

Tenemos entonces una función continua γ de $T^2\#T^2$ en $S^1 \vee S^1$ que es subconjunto de $T^2\#T^2$ que deja fijo a $S^1 \vee S^1$, es decir, es un retracto (no es de deformación!) de $T^2\#T^2$. Por la primera parte de la prueba del Teorema 4.3.3 (la cual no necesita que el retracto sea de deformación) se tiene que la inyección $i : S^1 \vee S^1 \hookrightarrow T^2\#T^2$ induce un monomorfismo $i_* : \Pi_1(S^1 \vee S^1) \to \Pi_1(T^2\#T^2)$. Esto prueba que $\Pi_1(T^2\#T^2)$ no puede ser conmutativo. Concluimos también que el grupo fundamental de un toro, el cual es conmutativo, no es isomorfo al grupo fundamental de una suma conexa de dos toros, es decir, $\Pi_1(T^2) \not\cong \Pi_1(T^2\#T^2)$.

Ejercicios 4.3.19.

a) ¿Por qué γ no puede ser un retracto de deformación fuerte de $T^2\#T^2$?

b) Sabiendo que $\Pi_1(\bigvee_n S') \cong (\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n})$ no es conmutativo, pruebe que

$\Pi_1(\underbrace{T^2\# \cdots \#T^2}_{n})$ no es conmutativo.

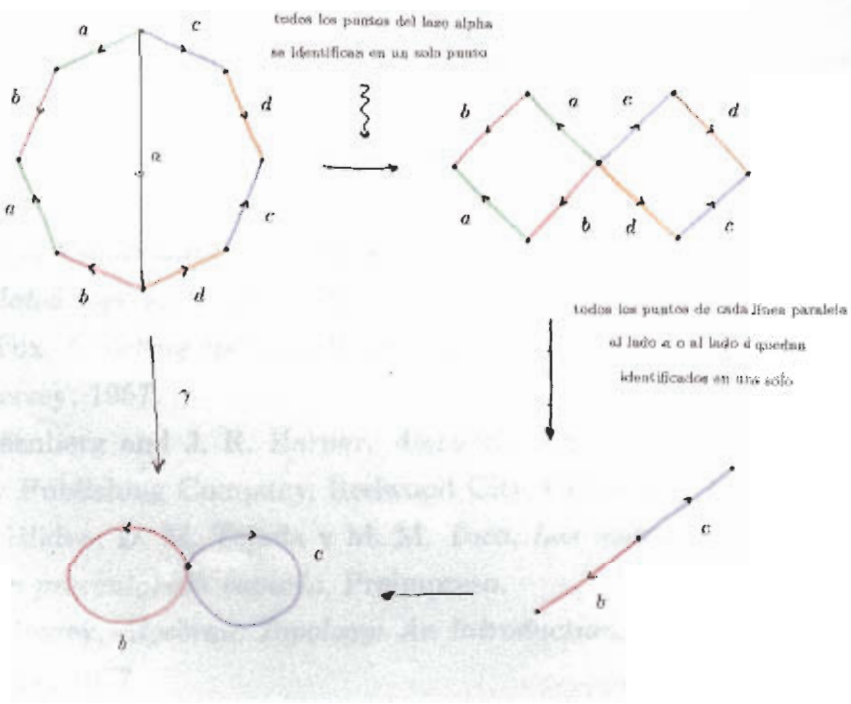


Figura 100

c) Encuentre el grupo de superposiciones de las siguientes cubiertas:

i) $p : S^1 \longrightarrow S'$, donde $z \longmapsto z^n$ para n entero mayor que 0.

ii) $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$, donde $(x, y) \longmapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iv})$.

iii) $p : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$, donde $(z, w) \longmapsto (z^2, w^3)$.

iv) Para la cubierta del Ejemplo 1.3. de este capítulo.

---

oooo

BIBLIOGRAFÍA

1. J. W. Alexander, *Note on Riemann spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 370-372.
2. I. Berstein and A. Edmonds, *On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1979), 87-123.
3. R. H. Crowell and R. H. Fox, *An introduction to knot theory*, Ginn, Boston, New York, 1963.
4. R. H. Fox, *Construction on simply connected 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
5. R. H. Fox, *Covering spaces with singularities*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.
6. M. Greenberg and J. R. Harper, *Algebraic Topology. A first course*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1981.
7. H. M. Hilden, D. M. Tejada y M. M. Toro, *Los nudos de número de túnel uno admiten presentación capicúa*, Preimpreso.
8. W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1967.
9. J. M. Montesinos, *Una nota a un teorema de Alexander*, Revista Matemática Hispanoamericana **32** (1972), 167-187.
10. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley, California, 1976.
11. J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.
12. H. Seifert y W. Threlfall, *Lecciones de Topología*, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas, Madrid, 1951.
13. D. M. Tejada, *Construcción de 3-variedades y cubiertas ramificadas*, Lecturas Matemáticas **18 No 1** (1997), 3-21.