Múltiples Soluciones Radiales para una EDP Cuasilineal

Alexander Sierra Giraldo

Tesis de maestría presentada como requisito para optar por el título de

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director:
Sigifredo de Jesús Herrón Osorio

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Medellín, Colombia

Marzo 6 de 2026

Índice

Agradecimientos

Especial agradecimiento a los jurados, profesores Carlos Vélez y José Manuel Jiménez, por la revisión cuidadosa del manuscrito, lo cual mejoró notablemente el contenido del mismo. Debo agradecer al profesor Sigifredo Herrón, cuya guía y apoyo fueron fundamentales en mi desarrollo académico y en la escritura de este documento; sin su paciencia y ayuda, no lo habría logrado.

A mis colegas de carrera, Kenny y Cristhian, que me acompañaron en todas las tribulaciones que surgen al estudiar matemáticas. Su compañía y amistad fueron fundamentales en todo el proceso.

A mi familia, que me apoya siempre incondicionalmente.

Y a Mekata, mi gata, que nunca me dejó estudiando solo, hasta que no tuvo más fuerzas para hacerlo.

Resumen

Múltiples soluciones radiales para una EDP cuasilineal

Se demuestra la existencia de infinitas soluciones radiales para un problema con el p-Laplaciano; con condición de frontera nula y de tipo Dirichlet. El dominio considerado es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$. El Teorema 2.5 es un aporte personal al trabajo. Además, se completan los detalles de las ideas de Joseph A. Iaia en [Joseph A. Iaia. Radial solutions to a p-laplacian dirichlet problem. *Applicable Analysis*, 58(3):335–350, 1995].

Palabras clave: p-Laplaciano, solución radial, cuasilineal.

Abstract

Multiple radial solutions to a quasilinear PDE

We prove the existence of infinitely many radial solutions to a p-Laplacian problem; with a null boundary Dirichlet condition. The considered domain is the unit ball in $\mathbb{R}^N$. Theorem 2.5 is a personal contribution. Besides, we complete the details of the ideas of Joseph A. Iaia in [Joseph A. Iaia. Radial solutions to a p-laplacian dirichlet problem. *Applicable Analysis*, 58(3):335–350, 1995].

Key words: p-Laplacian, radial solution, quasilinear.

1. Introducción

Consideremos $u : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de varias variables, siendo A una bola centrada en el origen. Si para $x, y \in A$ se cumple $u(x) = u(y)$ siempre que $|x| = |y|$, entonces decimos que u es una función radialmente simétrica, o para abreviar, una función radial. Así, podemos ver a u como función de una sola variable $u(r) = u(|x|)$, con $r = |x|$.

Este tipo de funciones son de gran utilidad en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales, pues bajo ciertas condiciones se pueden obtener soluciones para una ecuación diferencial parcial a partir de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

Planteemos el problema principal que se abordará en esta tesis: consideremos un entero $N \geq 2$ y constantes $1 < q + 1 < p < N$.

El operador diferencial Δ_p es conocido como el *p-Laplaciano* y se define, para $p > 1$, por

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \equiv \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Notemos que el caso $p = 2$ corresponde al operador lineal Laplaciano. En este sentido el operador p-Laplaciano es una generalización del caso lineal Δ.

Llamemos Ω a la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^N$, definimos el espacio de Sobolev con condición de Dirichlet homogénea como

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}},$$

donde

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

En realidad, esta definición se aplica a conjuntos abiertos no vacíos. Este espacio es un espacio de Banach reflexivo y coincide con el conjunto de funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ cuya traza sobre $\partial\Omega$ es nula (véase, por ejemplo, [1]).

Consideremos el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \Delta_p u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Se dice que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una *solución débil* del problema (1) si

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega |u|^{q-1}u\,\varphi\,dx, \tag{2}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esta formulación se motiva multiplicando la ecuación por $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, integrando en Ω y aplicando integración por partes, esto es

$$\int_\Omega \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi\, dx = \int_{\partial\Omega} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot \hat{n}\varphi\, dx - \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla\varphi\, dx,$$

teniendo en cuenta la condición de frontera y un argumento de densidad. Está bien documentado (ver [9]) que las soluciones débiles se obtienen como puntos críticos del funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} dx, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Enunciamos el teorema principal a probar en esta tesis:

Teorema 1.1. El problema (1) tiene un número infinito de soluciones débiles radiales $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

De hecho, se demuestra que, dado $k \in \mathbb{N}$, existe una solución débil $u \in C^1(\overline{\Omega})$ que es radial y tiene exactamente k ceros interiores en $[0, 1]$.

En esta tesis nos concentramos en soluciones regulares. Con esto en mente, al problema se le añade una condición inicial para garantizar suavidad: pensemos, por ejemplo, en el caso $N = 2$. Si u es solución del problema (1), su gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ cuyos conjuntos de nivel son circunferencias.

Es necesario que en el origen la gráfica deba verse "suave". Pensando a u en función del radio, si $r = 0$ y $u'(0) \neq 0$, al momento de graficar la superficie en tres dimensiones, gracias a la simetría radial basta revolucionar la curva anterior $(r, u(r))$ alrededor del eje vertical, generando un pico en el origen. Así, adicionamos la condición $u'(0) = 0$ para garantizar lo deseado.

Como estamos interesados en soluciones radiales, la ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria.

Lema 1.2. Sea $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y radialmente simétrica. Escribimos u' como la derivada de u con respecto a la variable $r = |x|$ viéndola como función radial. Supongamos que la función

$$r \mapsto |u'(r)|^{p-2}u'(r),$$

es diferenciable en $(0, 1)$.

Entonces el $p-$Laplaciano de u satisface la ecuación

$$\Delta_p u(x) = \frac{1}{r^{N-1}} \cdot (r^N |u'|^{p-2} \frac{u'}{r})'$$

para todo $x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Demostración. Tomando $r = |x|$ con $0 \neq x \in \Omega$,

$$\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}) = (u' \cdot r_{x_1}, \ldots, u' \cdot r_{x_N}) = (\frac{x_1}{r} u', \ldots, \frac{x_N}{r} u') = \frac{u'}{r} x.$$

Como $\frac{1}{r}x$ es unitario,

$$|\nabla u|^{p-2} = \big| u' \frac{x}{r} \big|^{p-2} = |u'|^{p-2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \nabla \cdot (|u'|^{p-2} \frac{u'}{r} x) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \big(|u'|^{p-2} \frac{u'}{r} x_i \big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|u'|^{p-2} \frac{u'}{r}) x_i + |u'|^{p-2} \frac{u'}{r} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^2}{r} (|u'|^{p-2} \frac{u'}{r})' + |u'|^{p-2} \frac{u'}{r} \right) \\
&= \frac{r^2}{r} (|u'|^{p-2} \frac{u'}{r})' + |u'|^{p-2} \frac{u'}{r} \cdot N \\
&= \left((|u'|^{p-2} \frac{u'}{r})' \cdot r^N \right) \cdot \frac{1}{r^{N-1}} + (|u'|^{p-2} \frac{u'}{r} \cdot (r^N)') \cdot \frac{1}{r^{N-1}} \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \cdot (r^N |u'|^{p-2} \frac{u'}{r})'.
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora, consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{N-1}} \cdot (r^N |u'|^{p-2} \frac{u'}{r})' + |u|^{q-1} u = 0 \quad \text{en} \quad (0,1), \\ \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Decimos que $u \in C^1[0,1]$ es una solución del problema (3) si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) La función $r \mapsto |u'(r)|^{p-2}u'(r)$ es diferenciable en $(0,1)$;

(ii)
$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)\,ds \quad \forall r \in (0,1);$$

(iii) $u'(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

La teoría clásica de regularidad para problemas con el p-Laplaciano, bajo la hipótesis $1 < q + 1 < p < N$ y la suavidad del dominio Ω, garantizan que las soluciones u del problema (1) satisfacen $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para cierto $\alpha \in (0,1)$. Véase [12] y [8].

Por tanto, como estamos interesados en hallar soluciones radiales del problema (1), basta buscar soluciones para el problema (3). Esto está justificado en el Teorema 2.10 de [2].

Sin embargo, resolver este problema directamente está, por ahora, fuera de nuestro alcance. La condición de frontera es restrictiva, por lo que primero trabajaremos con el problema con una condición inicial.

Verificaremos que este nuevo problema tiene solución única definida en todo radio positivo, y luego veremos qué tan regular es esta solución.

En seguida estudiaremos cómo se comportan los ceros de la solución, y demostraremos cómo la condición inicial influye en la cantidad de ceros en el intervalo $[0,1]$, el objetivo de interés.

El contenido de esta tesis está basado en la idea principal presentada en [7] escrita por J. Iaia. A medida que avancemos, nos daremos cuenta que en este trabajo se añaden, con mucho detalle, algunos resultados o procedimientos que Iaia omite en su escrito. Estos detalles no son triviales y su adecuada presentación exige un esfuerzo importante, el cual constituye un aporte significativo. Un ejemplo de esto es el asunto de la extensión global de una solución y para ello combinamos nuestros razonamientos con ideas tomadas de [11] o de [3], según las condiciones iniciales. Vale mencionar también que el Teorema 2.5 es un aporte personal de este trabajo, el cual es crucial en la prueba del Teorema 3.12.

Finalizamos esta introducción mencionando brevemente la importancia del operador diferencial p-Laplaciano. Este operador está involucrado en aplicaciones relevantes en diversos campos de la física y la ingeniería. En primer lugar, se ha utilizado en modelamiento de flujos no lineales en medios porosos, como en la filtración de gases o líquidos, donde el flujo depende de un gradiente no lineal de presión. Un ejemplo destacado de este enfoque se encuentra en el trabajo de Girg, Kotrla y Švandová [5], donde se describe su implementación en simulaciones por dinámica de fluidos computacional para medios porosos complejos. Como una segunda aplicación, el p-Laplaciano aparece en modelos que describen el comportamiento de materiales no newtonianos, la elasticidad no lineal, e incluso procesos geofísicos como el desplazamiento de glaciares. En estos contextos, su uso permite capturar con mayor fidelidad el comportamiento mecánico de medios no homogéneos y con respuesta no lineal a tensiones externas, como se describe en el modelo ecológico con difusión propuesto por Rasouli en [10]. Otras aplicaciones pueden encontrarse en el libro [4] y referencias allí presentadas.

2. Preliminares

Enunciamos en esta sección algunos teoremas clásicos de análisis que se utilizan a lo largo del documento.

Teorema 2.1 (Punto Fijo de Banach)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $T : X \to X$ es una contracción, entonces existe un único $x \in X$ tal que $Tx = x$.

Teorema 2.2 (Punto Fijo de Schauder)**.** Sea $K \subseteq X$ compacto y convexo, donde X es un espacio de Banach real. Si $T : K \longrightarrow K$ es un operador compacto (es decir, envía conjuntos acotados en precompactos), entonces tiene un punto fijo.

Teorema 2.3 (Arzelà-Ascoli)**.** Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones continuas real-valuadas definidas sobre un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si la sucesión es uniformemente acotada y uniformemente equicontinua, entonces tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Como consecuencia del Teorema del Valor Medio y del Teorema 2.3, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.4. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones real-valuadas y diferenciables definidas sobre un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si las sucesiones $\{f_n\}_n$ y $\{(f_n)'\}_n$ son uniformemente acotadas, entonces $\{f_n\}_n$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Teorema 2.5. Sean $F : \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ una función continua, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, \infty)$ y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si F es localmente Lipschitz en su segunda y tercera variables, entonces existen I, intervalo cerrado centrado en t_0, y una función $y \in C^1(I)$ tal que

(i) $y(t) > 0$ y $y'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) y' es diferenciable en I.

(iii) y satisface

$$\begin{cases} y'' = F(t, y, y'), \quad \forall t \in I, \\ \\ y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Además, y es la única función en $C^1(I)$ que cumple todas las condiciones anteriores.

Demostración. Como F es localmente Lipschitz en su segunda y tercera variable, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ y constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que $U_1 = (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$, $U_2 = (\alpha - \varepsilon_2, \alpha + \varepsilon_2)$ y $U_3 = (\beta - \varepsilon_3, \beta + \varepsilon_3)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$ y $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ respectivamente, y se cumple que

$$|F(t, r_1, s_1) - F(t, r_2, s_1)| \leq c_1 |r_1 - r_2|,$$

y

$$|F(t, r_1, s_1) - F(t, r_1, s_2)| \leq c_2 |s_1 - s_2|,$$

para todo $t \in U_1$, $r_1, r_2 \in U_2$ y $s_1, s_2 \in U_3$.

Sean $R = \frac{1}{4} \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ y $M = \text{máx}_{(t,r,s) \in \bar{U_1} \times \bar{U_2} \times \bar{U_3}} |F(t, r, s)|$, que está bien definido al ser F continua, y tomemos cualquier $\varepsilon > 0$ que cumpla

$$\varepsilon \leq \text{mín} \left\{ R, \frac{R}{2|\beta|} \right\},$$

y

$$\varepsilon^2 + \varepsilon < \text{mín} \left\{ \frac{R}{M+1}, \frac{1}{\text{máx}\{c_1, c_2\} + 1} \right\}.$$

Sea $B = \{y \in C^1[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \mid \|y - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_1 \leq R\}$, una bola cerrada de radio R en el espacio completo de funciones $C^1[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ dotado con la norma $\| \cdot \|_1 = \| \cdot \|_\infty + \| \cdot' \|_\infty$.

Definamos el operador $T : B \to B$ como

$$Ty(t) = \alpha + \beta(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} F(r, y, y') \, dr \, ds.$$

La razón por la cual se define así es porque se puede verificar que, integrando y derivando, una función y es solución del problema (4) si y sólo si

$$y(t) = \alpha + \beta(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} F(r, y, y') \, dr \, ds,$$

con lo que buscamos puntos fijos de este operador.

Veamos que, en efecto, el operador T está bien definido: primero, es claro que $T(B) \subseteq C^1[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ por el Teorema Fundamental del Cálculo.

Por otro lado, si $y \in B$ entonces

$$\|y' - \beta\|_\infty \leq \|y - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_1 \leq R < \varepsilon_3,$$

y por la desigualdad triangular reversa, para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$|y(t) - \alpha| - |\beta(t - t_0)| \leq R,$$

con lo que

$$\begin{aligned}
|y(t) - \alpha| &\leq R + |\beta(t - t_0)| \\
&\leq R + |\beta|\varepsilon \\
&\leq R + \frac{R}{2} \\
&\leq \frac{3R}{2} \\
&< \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

De esta manera, $(y(t), y'(t)) \in U_2 \times U_3$.

Con esto en mente,

$$\begin{aligned}
\big|(Ty)'(t) - \beta\big| &= \left| \int_{t_0}^{t} F(r, y, y')\, dr \right| \\
&\leq M|t - t_0| \\
&\leq M\varepsilon,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\big|Ty(t) - (\alpha + \beta(t - t_0))\big| &= \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} F(r, y, y')\, dr\, ds \right| \\
&\leq M\varepsilon|t - t_0| \\
&\leq M\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\|Ty - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_1 \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon) \leq R,$$

con lo que $Ty \in B$.

Ahora bien, si $y, x \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
|(Ty)'(t) - (Tx)'(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(r, y, y') - F(r, x, x')|\, dr \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (|F(r, y, y') - F(r, y, x')| \\
&\qquad\qquad + |F(r, y, x') - F(r, x, x')|)\, dr \\
&\leq (c_2\|x' - y'\|_\infty + c_1\|x - y\|_\infty)\varepsilon,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}|Ty(t) - Tx(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} |F(r,y,y') - F(r,x,x')|\,dr\,ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} (|F(r,y,y') - F(r,y,x')| \\ &\qquad\qquad + |F(r,y,x') - F(r,x,x')|)\,dr\,ds \\ &\leq (c_2\|x' - y'\|_\infty + c_1\|x - y\|_\infty)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|Ty - Tx\|_1 &\leq \text{máx}\{c_1, c_2\}(\|x - y\|_\infty + \|x' - y'\|_\infty)(\varepsilon^2 + \varepsilon) \\ &= \text{máx}\{c_1, c_2\}(\varepsilon^2 + \varepsilon)\|x - y\|_1,\end{aligned}$$

en donde $\text{máx}\{c_1, c_2\}(\varepsilon^2 + \varepsilon) < 1$ por la elección de ε.

Por el Teorema 2.1, T tiene un único punto fijo en B. Llamémoslo y.

Antes de proseguir con la unicidad, es importante observar que, tomando cualquier ε de menor tamaño, el resultado de punto fijo sigue siendo cierto.

Ahora, consideremos otra función $w \in C^1[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ que cumpla las condiciones (i), (ii) y (iii).

Por continuidad de w y su derivada, existe $\delta > 0$ tal que

$$|w(t) - \alpha| < \frac{R}{4},$$

y

$$|w'(t) - \beta| < \frac{R}{4},$$

para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

De esta manera, trabajando con la norma en el espacio $C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ se cumple que

$$\begin{aligned}\|w - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_1 &= \|w - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_\infty + \|w' - \beta\|_\infty \\ &\leq \|w - \alpha\|_\infty + \|\beta(t - t_0))\|_\infty + \|w' - \beta\|_\infty \\ &\leq \frac{R}{4} + |\beta|\delta + \frac{R}{4} \\ &\leq \frac{R}{2} + |\beta|\varepsilon \\ &\leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \\ &= R.\end{aligned}$$

Esto es, $w \in B' = \{x \in C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mid \|x - (\alpha + \beta(t - t_0))\|_1 \leq R\}$.

Como $y \in B'$ también, y ambas funciones y y w son puntos fijos del operador T ahora definido sobre B' al satisfacer la ecuación integral asociada, entonces deben coincidir en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ por la unicidad del punto fijo.

Llamemos $S = \{\rho \in (0, \varepsilon] \mid w(t) = y(t)\ \forall t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]\}$, el cual es no vacío pues $\delta \in S$. Sea $s = \sup S$. Supongamos que $s < \varepsilon$. Tenemos pues que en el punto $t^+ = t_0 + s$ las funciones w y y coinciden. Sean $\alpha^+ = y(t^+)$ y $\beta^+ = y'(t^+)$. Como en particular $t^+ \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ y $y \in B$, entonces $\alpha^+ \in U_2$ y $\beta^+ \in U_3$, con lo que $\alpha^+ > 0$ y $\beta^+ \neq 0$.

Consideremos el problema con datos en t^+:

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x'), \\ x(t^+) = \alpha^+, \\ x'(t^+) = \beta^+. \end{cases}$$

Tanto y como w son soluciones del problema en el intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Ahora bien, el argumento de punto fijo aplicado anteriormente y la equivalencia de y y w cerca de t_0 no dependía del punto inicial, sino únicamente de la continuidad de F y la condición de que F fuese localmente Lipschitz en sus dos últimas variables. Por lo tanto, existe $\eta > 0$ tal que y y w coinciden en $[t^+ - \eta, t^+ + \eta]$.

Un argumento análogo se puede hacer para $t^- = t_0 - s$, permitiendo agrandar el intervalo en donde $y \equiv w$. Pero esto es absurdo, pues s es el mayor radio en donde esto ocurre.

Necesariamente $s = \varepsilon$, y como la elección de w fue arbitraria, y es la única solución del problema (4) en $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

$\square$

3. Existencia, unicidad y regularidad de las soluciones del P.V.I.

En este capítulo nos enfocaremos en resultados que garanticen la existencia y unicidad de soluciones locales y veremos que estas se pueden extender de manera global.

Sea $1 < k \in \mathbb{R}$. Consideremos la función $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_k(r) = \begin{cases} |r|^{k-2}r, & \text{si} \quad |r| > 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad r = 0. \end{cases}$$

Afirmación 3.1. Φ_k es continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostración. La continuidad es inmediata observando que $|\Phi_k(r)| = |r|^{k-1}$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Para la diferenciabilidad, si $r \neq 0$ en un cómputo directo vemos

$$\frac{d}{dr}\Phi_k(r) = (k-2)|r|^{k-3}\frac{r}{|r|}r + |r|^{k-2} = (k-1)|r|^{k-2}.$$

□

Se puede verificar que $(\Phi_k)^{-1} = \Phi_{k'}$, donde k' es el conjugado de Hölder de k. Además, cabe resaltar que cuando $k \geq 2$ tenemos diferenciabilidad en todo $\mathbb{R}$.

Así, reescribiendo (3) y tomando condiciones iniciales generales obtenemos el problema

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{N-1}} \cdot (r^{N-1}\Phi_p(u'))' + \Phi_{q+1}(u) = 0 \quad \text{en} \quad (r_0, \infty), \\ \\ \qquad u(r_0) = d, \quad u'(r_0) = d'. \end{cases} \tag{5}$$

Si tenemos una solución u con suficiente regularidad, y suponiendo, por ahora, la integrabilidad de las funciones involucradas si $r_0 = 0$, podríamos llegar a la condición necesaria

$$u = d - \int_{r_0}^{r} \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right)dt,$$

de donde, derivando, llegaríamos nuevamente a que u cumple 5, con lo que tendríamos una equivalencia.

Lo anterior motiva la definición del operador $T : B_R^\varepsilon(d) \to B_R^\varepsilon(d)$ dado por

$$Tu(r) = d - \int_{r_0}^{r} I_u(t)\, dt,$$

con $R, \epsilon > 0$ adecuados y

$$B_R^\varepsilon(d) := \{u \in C[r_0, r_0 + \varepsilon] \big| \|u - d\| \leq R\},$$

sabiendo que $C[r_0, r_0 + \varepsilon]$ es el espacio de funciones de valor real continuas definidas en $[r_0, r_0 + \varepsilon]$, dotado de la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\sup}$ y además

$$I_u(t) := \begin{cases} \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right), & \text{si} \quad t \neq r_0, \\ \\ -d', & \text{si} \quad t = r_0. \end{cases}$$

Proposición 3.2. Sean $r_0 > 0$, $d > 0$ y $d' \in \mathbb{R}$; ó $r_0 = 0$, $d > 0$ y $d' = 0$. Existen $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ tales que el operador $T : B_R^\varepsilon(d) \to B_R^\varepsilon(d)$ tiene un único punto fijo.

Demostración. Sea $R = \frac{d}{2}$ y por ahora consideremos $\varepsilon \in (0, 1)$. A lo largo de la prueba nos daremos cuenta de los refinamientos necesarios para ε.

Lo primero que debemos verificar es la buena definición del operador T. Para ello, tomemos $u \in B_R^\varepsilon(d)$ y veamos que I_u es una función continua en $[r_0, r_0 + \varepsilon]$. Observemos que

$$0 < \frac{d}{2} \leq u(r) \leq \frac{3d}{2} < 2d \ \ \forall r \in [r_0, r_0 + \varepsilon],$$

con lo que u no se anula y por tanto $\Phi_{q+1}(u(s))$ es una función continua y positiva en $[r_0, r_0 + \varepsilon]$.

Es claro que si $r_0 > 0$, la función I_u es continua, con lo que el único problema está, posiblemente, en $t = r_0$ cuando $r_0 = 0$. Afortunadamente,

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds\right)\right| &= \left|\Phi_{p'}\left(\int_0^t \frac{s^{N-1}}{t^{N-1}}\Phi_{q+1}(u)\,ds\right)\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{s^{N-1}}{t^{N-1}}\Phi_{q+1}(u)\,ds\right|^{p'-1} \\
&\leq \left(\int_0^t \left|\frac{s^{N-1}}{t^{N-1}}\Phi_{q+1}(u)\right|\,ds\right)^{p'-1} \\
&\leq \left(\int_0^t u(s)^q\,ds\right)^{p'-1} \\
&\leq \left((2d)^q\int_0^t 1\,ds\right)^{p'-1} \\
&= \left((2d)^q t\right)^{p'-1} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $t \to 0^+$, teniéndose lo deseado.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $Tu \in C[r_0, r_0+\varepsilon]$. Debemos ver que la función Tu está en $B_R^{\varepsilon}(d)$:

$$\begin{aligned}
|Tu(r) - d| &\leq \int_{r_0}^r \left|\int_{r_0}^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right|^{p'-1} dt \\
&\leq \int_{r_0}^r \left(\int_{r_0}^t |u|^q\,ds + |d'|^{p-1}\right)^{p'-1} dt \\
&\leq \int_{r_0}^r \left((2d)^q(t-r_0) + |d'|^{p-1}\right)^{p'-1} dt \\
&\leq \left((2d)^q\varepsilon + |d'|^{p-1}\right)^{p'-1} (r-r_0) \\
&\leq \left((2d)^q\varepsilon + |d'|^{p-1}\right)^{p'-1} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como la última línea tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$, podemos tomarlo suficientemente pequeño y así concluir que

$$|Tu(r) - d| \leq R.$$

Ahora bien, queremos aplicar el Teorema 2.1 al operador T. Sabiendo que $B_R^{\varepsilon}(d)$ es un subconjunto cerrado del espacio normado completo

$(C[r_0, r_0+\varepsilon], \|\cdot\|_{\sup})$, entonces también es completo. Restaría probar que T es una contracción.

Sean u, $v \in B_R^\varepsilon(d)$, y definamos la función

$$G(h,t) := I_{(hu+(1-h)v)}(t), \quad (h,t) \in [0,1] \times [r_0, r_0+\varepsilon].$$

Notemos que $hu+(1-h)v$ es una combinación lineal convexa, y por lo tanto pertenece a $B_R^\varepsilon(d)$.

Fijemos $t \in (r_0, r_0+\varepsilon]$. Si $h_0 \in [0,1]$ y $\{h_n\}_n$ es una sucesión en $[0,1]$ tal que $h_n \to h_0$ cuando $n \to \infty$, entonces para $s \in [r_0, t]$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|s^{N-1}\Phi_{q+1}(h_n u(s) + (1-h_n)v(s))| &= s^{N-1}|h_n u(s) + (1-h_n)v(s)|^q \\
&\leq s^{N-1}(h_n|u(s)| + (1-h_n)|v(s)|)^q \\
&\leq s^{N-1}(h_n(2d) + (1-h_n)(2d))^q \\
&= s^{N-1}(2d)^q.
\end{aligned}$$

Como $\int_{r_0}^t s^{N-1}(2d)^q\, ds = \frac{(2d)^q}{N}(t^N - r_0^N) < \infty$, podemos utilizar el teorema de la convergencia dominada y la continuidad de las funciones Φ_{q+1} y $\Phi_{p'}$ para concluir que

$$\begin{aligned}
G(h_n,t) = \Phi_{p'}&\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_{r_0}^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(h_n u + (1-h_n)v)\, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right) \\
\to&\Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_{r_0}^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(\lim_{n\to\infty}(h_n u + (1-h_n)v)\, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right) \\
=& \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_{r_0}^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(h_0 u + (1-h_0)v)\, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right) \\
=& G(h_0,t).
\end{aligned}$$

Probemos ahora la diferenciabilidad de $G(\cdot,t)$ en $(0,1)$.

Afirmación 3.3. Si llamamos $\chi(h,s) := s^{N-1}\Phi_{q+1}(h_n u(s) + (1-h_n)v(s))$, $(h,s) \in D = [0,1] \times [r_0,t]$, entonces $\frac{\partial}{\partial h}\chi(h,s)$ existe en D. Además, ambas $\chi(h,s)$ y $\frac{\partial}{\partial h}\chi(h,s)$ son continuas en D.

Demostración. Es suficiente ver la continuidad en cada variable, ya que luego se puede utilizar un argumento clásico $\epsilon/3$.

$\chi(h,s)$ es continua en cada variable por la continuidad del producto, de $s \mapsto s^{N-1}$, de Φ_{q+1} y de la combinación lineal.

Por otro lado, $hu + (1-h)v \in B_R^{\varepsilon}(d)$, y así$\Phi_{q+1}(hu(s) + (1-h)v(s))$ tiene derivada parcial con respecto a h para todo $(h,s) \in D$, y así

$$\frac{\partial}{\partial h}\chi(h,s) = qs^{N-1}(hu(s) + (1-h)v(s))^{q-1}(u(s) - v(s)),$$

la cual es, nuevamente, continua en cada variable. $\square$

La anterior afirmación nos permite decir que $\frac{d}{dh}\int_{r_0}^{t} \chi(h,s)\,ds$ existe y es

$$\int_{r_0}^{t} \chi_h(h,s)\,ds,$$

para todo $h \in (0,1)$, usando la diferenciación bajo el signo integral.

Quisiéramos utilizar la regla de la cadena para computar $\frac{d}{dh}G(h,t)$; sin embargo, debemos verificar previamente que el argumento de $\Phi_{p'}$ no se anula, ya que p' puede ser menor que 2.

Sea $w \in B_R^{\varepsilon}(d)$. Si $d' \leq 0$, es claro que $\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w)\,ds - r_0^{N-1}\Phi_p(d')$ es positivo. Si $d' > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w)\,ds - r_0^{N-1}\Phi_p(d')\right| &\geq r_0^{N-1}\Phi_p(d') - \left|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w)\,ds\right| \\ &\geq r_0^{N-1}(d')^{p-1} - \int_{r_0}^{t} t^{N-1}|w|^q\,ds \\ &\geq r_0^{N-1}(d')^{p-1} - (r_0+\varepsilon)^{N-1}(2d)^q \int_{r_0}^{t} 1\,ds \\ &\geq r_0^{N-1}(d')^{p-1} - (r_0+1)^{N-1}(2d)^q\varepsilon.\end{aligned}$$

Si ε se toma tal que $\varepsilon < \frac{r_0^{N-1}(d')^{p-1}}{2(r_0+1)^{N-1}(2d)^q}$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w)\,ds - r_0^{N-1}\Phi_p(d')\right| &\geq r_0^{N-1}(d')^{p-1} - (r_0+1)^{N-1}(2d)^q\varepsilon \\ &\geq \frac{1}{2}(r_0^{N-1}(d')^{p-1}) > 0. \qquad (6)\end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}G(h,t) = &\left(\int_{r_0}^{t} \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1}\Phi_{q+1}(hu + (1-h)v)\,ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1}\Phi_p(d')\right)^{p'-2} \\ &\cdot \frac{(p'-1)}{t^{N-1}} \int_{r_0}^{t} s^{N-1}q(hu + (1-h)v)^{q-1} \cdot (u-v)\,ds.\end{aligned}$$

Cuando $t = r_0$, $G(h, r_0) \equiv 0$. Las propiedades de continuidad y diferenciabilidad demostradas resultan triviales en este caso.

Así, las hipótesis del teorema del valor medio se cumplen para $G(h, t)$ con t fijo. Existe $y \in (0, 1)$ de tal manera que

$$\frac{d}{dh} G(h, t)\Big|_{h=y} = G(1, t) - G(0, t).$$

Ahora, acotemos $\frac{d}{dh} G(h, t)$. Como $1 < q + 1 < p < N$, veamos qué sucede cuando el 2 está antes, entre y después de $q + 1$ y p:

Caso 1): $q + 1 < p \leq 2$. En este caso, $2 \leq p'$ y $q < 1$. Teniendo en cuenta el signo de los exponentes y si $r_0 > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh} G(h, t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}} \left| \int_{r_0}^{t} s^{N-1} \Phi_{q+1}(hu + (1-h)v)\, ds - r_0^{N-1} \Phi_p(d') \right|^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_{r_0}^{t} s^{N-1} (hu + (1-h)v)^{q-1} \cdot |u - v|\, ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[\int_{r_0}^{t} s^{N-1} (2d)^q\, ds + r_0^{N-1} |d'|^{p-1} \right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u - v\| \int_{r_0}^{t} s^{N-1} \left(\frac{d}{2}\right)^{q-1} ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}} \left[(2d)^q (r_0 + 1)^{N-1} \varepsilon + r_0^{N-1} |d'|^{p-1} \right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u - v\| \left(\frac{d}{2}\right)^{q-1} (r_0 + 1)^{N-1} \varepsilon \\
&= C_1(q, p, r_0, d, d', \varepsilon) \|u - v\|,
\end{aligned}$$

con $C_1(q, p, r_0, d, d', \varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Si $r_0 = 0$, las cuentas cambian un poco:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds\right|^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_0^t s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_0^t s^{N-1}(2d)^q\,ds\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\int_0^t s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}(2d)^{q(p'-2)}\left[\frac{t^N}{N}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\frac{t^N}{N} \\
&= C_1(q,p,d,N)t^{p'-1}\|u-v\| \\
&\le C_1(q,p,d,N,\varepsilon)\|u-v\|,
\end{aligned}
$$

donde la constante C_1 cumple lo mismo.

Caso 2): $q+1<2<p$. Aquí, $p'<2$ y $q<1$. Para $d'>0$, utilizando (6)

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_{r_0}^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds - r_0^{N-1}\Phi_p(d')\right|^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_{r_0}^t s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\frac{1}{2}(r_0^{N-1}(d')^{p-1})\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\int_{r_0}^t s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\frac{1}{2}(r_0^{N-1}(d')^{p-1})\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon \\
&= C_2(q,p,r_0,d,d',\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}
$$

Si $d' \leq 0$ y $r_0 > 0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_{r_0}^{t} s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q} ds + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\| \int_{r_0}^{t} s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1} ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^{q}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\| \left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon \\
&= C_2(q,p,r_0,d,d',\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}
$$

Si $r_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_{0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds\right|^{p'-2} \\
&\qquad \times \int_{0}^{t} s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_{0}^{t} s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q} ds\right]^{p'-2} \|u-v\| \int_{0}^{t} s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q-1} ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left(\frac{d}{2}\right)^{q(p'-2)}\left[\frac{t^N}{N}\right]^{p'-2} \|u-v\| \left(\frac{d}{2}\right)^{q-1}\frac{t^N}{N} \\
&= C_2(q,p,d,N)t^{p'-1}\|u-v\| \\
&\leq C_2(q,p,d,N,\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}
$$

Caso 3): $2 \leq q+1 < p$**.** Finalmente, tenemos $p' < 2$ y $1 < q$, con lo que se intercambian las cotas.

Si $d' > 0$, utilizando nuevamente (6) tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds - r_0^{N-1}\Phi_p(d')\right|^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_{r_0}^{t} s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\frac{1}{2}(r_0^{N-1}(d')^{p-1})\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}(2d)^{q-1}\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\frac{1}{2}(r_0^{N-1}(d')^{p-1})\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|(2d)^{q-1}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon \\
&= C_3(q,p,r_0,d,d',\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Si $d' \le 0$ y $r_0 > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_{r_0}^{t} s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_{r_0}^{t} s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^{q}\,ds + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|\int_{r_0}^{t} s^{N-1}(2d)^{q-1}\,ds \\
&\le \frac{q(p'-1)}{(r_0)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^{q}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon + r_0^{N-1}|d'|^{p-1}\right]^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \|u-v\|(2d)^{q-1}(r_0+1)^{N-1}\varepsilon \\
&= C_3(q,p,r_0,d,d',\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Si $r_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dh}G(h,t)\right| &= \frac{q(p'-1)}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left|\int_0^t s^{N-1}\Phi_{q+1}(hu+(1-h)v)\,ds\right|^{p'-2} \\
&\qquad \cdot \int_0^t s^{N-1}(hu+(1-h)v)^{q-1}\cdot|u-v|\,ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_0^t s^{N-1}\left(\frac{d}{2}\right)^q ds\right]^{p'-2}\cdot\|u-v\|\int_0^t s^{N-1}(2d)^{q-1}\,ds \\
&\leq \frac{q(p'-1)}{(t)^{\frac{N-1}{p-1}}}\left(\frac{d}{2}\right)^{q(p'-2)}\left[\frac{t^N}{N}\right]^{p'-2}\cdot\|u-v\|(2d)^{q-1}\frac{t^N}{N} \\
&= C_3(q,p,d,N)t^{p'-1}\|u-v\| \\
&\leq C_3(q,p,d,N,\varepsilon)\|u-v\|.
\end{aligned}
$$

Así, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que $|\frac{d}{dh}G(h,t)| < C\|u-v\|$ para todo $(h,t) \in [0,1]\times[r_0, r_0+\varepsilon]$.

Finalmente, para $r \in [r_0, r_0+\varepsilon]$,

$$
\begin{aligned}
|Tu(r)-Tv(r)| &= \left|\int_{r_0}^r (I_u(t)-I_v(t))\,dt\right| \\
&= \left|\int_{r_0}^r (G(1,t)-G(0,t))\,dt\right| \\
&\leq \int_{r_0}^r |\frac{d}{dh}G(y,t)|\,dt \\
&\leq C\|u-v\|\int_{r_0}^r 1\,dt \\
&\leq C\|u-v\|\varepsilon \\
&= C'\|u-v\|,
\end{aligned}
$$

donde $C' > 0$ es una constante que depende de ε y cumple $C' \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Así, se puede escoger ε tal que $C' < 1$. De esta manera queda probado que T es una contracción.

Por el Teorema 2.1, existe un único $u \in B_R^\varepsilon(d)$ para el cual $Tu = u$. $\square$

Observación 3.4. Dentro de la prueba de la anterior proposición podemos verificar que, si ε cumple el resultado, entonces cualquier $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ también lo satisface.

Teorema 3.5. Existe $\varepsilon > 0$ tal que el P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{N-1}} \cdot (r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty), \\ \\ \qquad u(0) = d > 0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

tiene una única solución local en $C^1[0,\varepsilon]$.

Demostración. Por la proposición anterior, existen $\varepsilon > 0$, $R > 0$ y un único $u \in B_R^\varepsilon(d)$ que cumple

$$u(r) = d - \int_0^r I_u(t)\,dt, \quad \forall r \in [0,\varepsilon].$$

Notemos que $u(0) = d$. Además, recordemos que al inicio de la prueba de la Proposición 3.2 vimos que $I_u(t)$ es continua en $[0,\varepsilon]$. Por el teorema fundamental del cálculo, u es de clase C^1 y

$$u'(r) = -I_u(r),$$

lo cual implica que $u'(0) = 0$. Si $r \in (0,\varepsilon]$,

$$u'(r) = -I_u(r) = -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds\right) < 0,$$

recordando que $s \mapsto s^{N-1}\Phi_{q+1}(u(s))$ es también una función continua y positiva en $(0,\varepsilon]$. Aprovechando la imparidad de las funciones Φ_k

$$\begin{aligned} \Phi_p(u') &= -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds \\ \Longleftrightarrow r^{N-1}\Phi_p(u') &= -\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds. \end{aligned}$$

Nuevamente por el Teorema Fundamental del Cálculo, la función $r^{N-1}\Phi_p(u')$ es de clase $C^1(0,\varepsilon]$ y

$$\begin{aligned} &(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -r^{N-1}\Phi_{q+1}(u) \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}\Phi_p(u'))' + \Phi_{q+1}(u) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + |u|^{q-1}u = 0, \end{aligned}$$

que demuestra la existencia.

Finalmente, con un razonamiento similar al utilizado en la prueba del Teorema 2.5, pero usando en los argumentos el espacio $C[0,\varepsilon]$, se puede verificar la unicidad. □

Proposición 3.6. Sea $u \in C^1[r_0, b]$ una solución del problema (5), donde $0 \leq r_0 < b < \infty$. Si $1 < p \leq 2$, entonces u es de clase $C^2[r_0, b]$. En otro caso, sólo se puede afirmar que u es de clase C^2 en el abierto

$$U = \{r \in [r_0, b] \mid u'(r) \neq 0\}.$$

Demostración. Sabemos que $r^{N-1}\Phi_p(u')$ es $C^1[r_0, b]$ y

$$(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -r^{N-1}\Phi_{q+1}(u).$$

De esta manera, $\Phi_p(u') = \frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}\Phi_p(u'))$ también lo es. Utilizando la regla del producto,

$$\begin{aligned}(\Phi_p(u'))' &= \frac{1-N}{r^N}r^{N-1}\Phi_p(u') - \frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}\Phi_{q+1}(u)) \\ &= \frac{1-N}{r}\Phi_p(u') - \Phi_{q+1}(u).\end{aligned}$$

Si $1 < p \leq 2$, entonces $p' \geq 2$, con lo que $\Phi_{p'}$ es $C^1(\mathbb{R})$. Componiendo, $u' = \Phi_{p'}(\Phi_p(u'))$ es $C^1[r_0, b]$. Es decir, u es de clase $C^2[r_0, b]$.

Ahora bien, supongamos que $p > 2$. Sea $r \in U$. Por continuidad de la derivada, u' no se anula alrededor de r. De esto, nuevamente, $u' = \Phi_{p'}(\Phi_p(u'))$ es continuamente diferenciable alrededor de r por la regla de la cadena. $\square$

Lema 3.7. Sea $u \in C^1[0, b]$ una función que satisface la ecuación diferencial

$$(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -r^{N-1}\Phi_{q+1}(u),$$

en $(0, b]$ donde $0 < b < \infty$. Si $u(r_0) = u'(r_0) = 0$ para algún $r_0 \in (0, b]$, entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que u no es idénticamente 0 alrededor de r_0. Sea $\{t_n\}_n$ una sucesión alrededor de r_0 tal que $t_n \to r_0$ cuando $n \to \infty$ y $u(t_n) \neq 0$ para cada n. Por el teorema del valor medio, para cada n existe r_n entre r_0 y t_n tal que $u'(r_n) = u(t_n)/(t_n - r_0) \neq 0$. Entonces la sucesión $\{r_n\}_n$ converge también a t. Notemos que, en cualquier caso, $r_n \neq 0, b$ para todo n.

Para $r \in \mathbb{R}$, sea

$$H(r) = -\int_0^r \Phi_{q+1}(s)\, ds.$$

Observemos que H es una función no positiva que se anula sólo en $r = 0$, y por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dr}H(u(r)) = -\Phi_{q+1}(u(r))u'(r).$$

Por la proposición anterior, para cada n existe $\delta_n > 0$ tal que si $B_n \subseteq U = \{b \geq r \geq 0 \mid u'(r) \neq 0\}$ es la bola cerrada de radio δ_n centrada en r_n, entonces la función u es de clase $C^2(B_n)$. Reescribiendo la ecuación diferencial para $r \in B_n$,

$$\begin{aligned}
&\frac{(N-1)}{r}\Phi_p(u') + (\Phi_p(u'))' = -\Phi_{q+1}(u)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(N-1)}{r}\Phi_p(u') + (p-1)|u'|^{p-2}u'' = -\Phi_{q+1}(u)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(N-1)}{r}\Phi_p(u')u' + (p-1)\Phi_p(u')u'' = -\Phi_{q+1}(u)u'\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(N-1)}{r}v + \frac{(p-1)}{p}p\Phi_p(u')u'' = -\Phi_{q+1}(u)u'\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(N-1)}{r}v + \frac{(p-1)}{p}v' = -\Phi_{q+1}(u)u',
\end{aligned}$$

donde, en B_n, $v = \Phi_p(u')u' = |u'|^p > 0$ y por lo tanto $v' = p\Phi_p(u')u''$.

Encontrando v como solución (local, en B_n) e integrando por partes

$$\begin{aligned}
\frac{(p-1)}{p}v(r)\cdot r^{\frac{p(N-1)}{p-1}} - \frac{(p-1)}{p}v(r_n)\cdot(r_n)^{\frac{p(N-1)}{p-1}} &= \int_{r_n}^{r}(H(u(t)))'\cdot t^{\frac{p(N-1)}{p-1}}\,dt\\
&= H(u(t))r^{\frac{p(N-1)}{p-1}} - \frac{p(N-1)}{p-1}\int_{r_n}^{r}H(u(t))\cdot t^{\frac{p(N-1)}{p-1}-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Sean $B_n^+ = [r_n, r_n+\delta_n]$ y $m_n = \min_{B_n^+} H(u(r))$. Como u' no se anula en B_n, entonces u no es idénticamente cero allí. Por lo tanto, $m_n < 0$. Llamemos $x_n \in B_n^+$ al elemento tal que $m_n = H(u(x_n))$.

Observemos que no puede suceder el caso $r_0 \in [r_n, x_n]$, pues esto implica $r_0 \in B_n$ y por lo tanto $u'(r_0) \neq 0$, lo cual no es cierto. Así, r_0 es mayor a x_n ó menor a r_n, y esto para cada n. Si $r_0 > x_n$, entonces

$$\int_{r_n}^{x_n} t^{-1}\,dt < \int_{r_n}^{r_0} t^{-1}\,dt.$$

Si $r_n > r_0$, al ser t^{-1} decreciente en los positivos,

$$\begin{aligned}
\int_{r_n}^{x_n} t^{-1}\,dt &\leq \int_{r_n}^{r_n+\delta_n} t^{-1}\,dt\\
&\leq \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} t^{-1}\,dt\\
&< \int_{r_0}^{r_n} t^{-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Con esto en mente,

$$\begin{aligned}
\frac{(p-1)}{p}v(x_n) &= m_n + \frac{p(N-1)}{p-1}\int_{r_n}^{x_n}(-H(u(t)))\cdot(\frac{t}{x_n})^{\frac{p(N-1)}{p-1}}t^{-1}\,dt \\
&\quad + \frac{(p-1)}{p}v(r_n)\cdot(\frac{r_n}{x_n})^{\frac{p(N-1)}{p-1}} \\
&\leq m_n - m_n\frac{p(N-1)}{p-1}\int_{r_n}^{x_n} t^{-1}\,dt + \frac{(p-1)}{p}v(r_n) \\
&\leq -m_n\Big(-1+\frac{p(N-1)}{p-1}\Big|\int_{r_n}^{r_0} t^{-1}\,dt\Big|\Big) + \frac{(p-1)}{p}v(r_n),
\end{aligned}$$

donde los tres términos que dependen de n tienden a 0. Tomando un N suficientemente grande para que $-m_N < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{p(N-1)}{p-1}\Big|\int_{r_N}^{r_0} t^{-1}\,dt\Big| < 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{(p-1)}{p}v(r_N) < \frac{1}{2}$, tendríamos

$$\begin{aligned}
\frac{(p-1)}{p}v(x_N) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-1+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\Big)+\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0,
\end{aligned}$$

generando una contradicción, ya que $v(x_N) > 0$.

De esta manera, $u \equiv 0$ alrededor de r_0. Veamos que, en realidad, $u \equiv 0$ en todo el intervalo $[0, b]$: trabajemos a la izquierda de r_0, pues el razonamiento a derecha es completamente análogo.

Sea $m = \sup A$, donde $A = \{\varepsilon \in (0, r_0] \mid u \equiv 0 \text{ en } (r_0 - \varepsilon, r_0]\}$, no vacío, y supongamos $r_0 \neq m$. Por propiedad de aproximación y regularidad de la solución, $u(r_0 - m) = u'(r_0 - m) = 0$. Lo anterior implica que, alrededor de $r_0 - m$ también se cumple $u \equiv 0$. Es decir, existe $M > m$ tal que $u \equiv 0$ en $[r_0, r_0 - M)$, contradiciendo el hecho de que m es el supremo de A.

Necesariamente se debe cumplir que $m = r_0$. $\square$

Observación 3.8. El lema anterior sigue siendo válido aun cuando $u \in C^1[0,\infty)$.

Corolario 3.9. Sea $u \in C^1[0, b)$ una función no nula que satisface la ecuación diferencial

$$(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -r^{N-1}\Phi_{q+1}(u),$$

en $(0, b)$ donde $0 < b \leq \infty$. Si $r_0 \in (0, b)$ es un cero de u', entonces es un cero aislado.

Demostración. Supongamos que existe $\{r_n\}_n \subseteq (0,b)$ tal que $u'(r_n) = 0$ para todo n y $r_n \to r_0$ cuando $n \to \infty$. Como u satisface la ecuación diferencial,

$$0 = (r_n)^{N-1}\Phi_p(u'(r_n)) - (r_0)^{N-1}\Phi_p(u'(r_0)) = -\int_{r_0}^{r_n} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds,$$

para cada n.

Si u no se anulara entre r_0 y r_n entonces, por continuidad, no cambiaría de signo; esto haría que la integral anterior fuese distinta de 0. Así, para cada n existe x_n entre r_0 y r_n tal que $u(x_n) = 0$.

Observemos que $x_n \to r_0$ cuando $n \to \infty$. Nuevamente por continuidad, $u(r_0) = 0$. Por el lema anterior, $u \equiv 0$. Absurdo. □

Queremos demostrar que nuestra solución local se puede extender a una global. Para ello, definimos una función de energía correspondiente a la ecuación diferencial y con su ayuda veremos el acotamiento de las soluciones.

Corolario 3.10. Sea $u \in C^1[0,b)$ una función no nula que satisface la ecuación diferencial

$$(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -r^{N-1}\Phi_{q+1}(u),$$

en $(0,b)$ donde $0 < b \leq \infty$. Definamos la función de energía E asociada a la solución u, dada por

$$E(r) = \frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u(r)|^{q+1}. \tag{8}$$

Entonces E es diferenciable en $U = \{r \in [0,b) \mid u'(r) \neq 0\}$ y decreciente en $[0,b)$, y por lo tanto u y u' son acotadas.

Demostración. Supongamos que u es no nula. Sea $r_0 > 0$ tal que $u'(r_0) \neq 0$ pues, de no existir, u sería constante y no satisfaría la ecuación diferencial. Por la proposición anterior, u' es continuamente diferenciable alrededor de r_0. Teniendo en cuenta que si $k > 1$

$$(|r|^k)' = k\Phi_k(r),$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E'(r) &= (p-1)\Phi_p(u')u'' + \Phi_q(u)u' \\
&= (p-1)\Phi_p(u')u'' - (\Phi_p(u'))'u' + \frac{1-N}{r}\Phi_p(u')u' \\
&= (p-1)\Phi_p(u')u'' - (p-1)|u'|^{p-2}u'u'' + \frac{1-N}{r}\Phi_p(u')u' \\
&= (p-1)\Phi_p(u')u'' - (p-1)\Phi_p(u')u'' + \frac{1-N}{r}|u'|^p \\
&= -\frac{N-1}{r}|u'|^p < 0,
\end{aligned}
$$

para todo r cercano a r_0.

Ahora bien, si $r_0 > 0$ es un cero de u', sabemos que es aislado. Queremos ver que a su alrededor E es decreciente. Para ello, consideremos $x < r_0 < y$ lo suficientemente cercanos, y sean $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ sucesiones tales $x < x_n < r_0 < y_n < y$ y $x_n, y_n \to r_0$ cuando $n \to \infty$.

Como en $[x, r_0)$ E es diferenciable y decreciente, $E(x_n) \leq E(x)$. Lo mismo sucede para y, obteniendo $E(y) \leq E(y_n)$. Pasando al límite obtenemos lo deseado: $E(y) \leq E(r_0) \leq E(x)$. Utilizando la transitividad, logramos probar que E es decreciente en su dominio.

Esto es, $E(r) \leq E(0)$ para todo $r \in [0, b)$. □

Observación 3.11. Si $u \in C^1[0, b)$ es solución del problema (7), entonces $|u| \leq d$ y $|u'|^p \leq \frac{p}{(p-1)(q+1)}d^{q+1}$.

Más aun, si $u \in C^1[0, b)$ satisface el problema (5) con $d = d' = 0$ y suponemos que u es no nula, tendríamos $|u| \leq d = 0$, un absurdo.

Es decir, la única solución que satisface el problema con condiciones iniciales nulas es la función nula.

Teorema 3.12. Para cada $d > 0$ existe una única solución $u \in C^1[0, \infty)$ del problema (7).

Demostración. Definamos

$$A = \{r > 0 \mid \text{ el problema (7) tiene una única solución local en } C^1[0, r]\}.$$

Por el Teorema 3.5, $A \neq \emptyset$. Sea $r_0 = \sup A$. Supongamos que $r_0 < \infty$.

Consideremos una sucesión $\{r_n\}_n \subseteq A$, creciente, que converge a r_0. Para cada n, existe una única solución u_n del P.V.I. 7 en $C^1[0, r_n]$. Así, $u_n = u_{n+1}$

en $[0, r_n]$. De lo anterior, la función $u(r) = u_i(r)$ cuando $0 \leq r \leq r_i$ está bien definida en $[0, r_0)$ y además es solución del problema (7). Nuestra intención es extenderla al intervalo cerrado.

Utilizando el teorema fundamental del cálculo y el acotamiento de u' dado por el corolario anterior,

$$|u(r_n) - u(r_m)| = \left| \int_{r_m}^{r_n} u' \, dr \right| \leq |r_m - r_n| M.$$

Así, $\{u(r_n)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Llamemos $\alpha = \lim_{n\to\infty} u(r_n)$ y definamos $u(r_0) = \alpha$, haciendo que u sea continua en el intervalo.

Por otro lado, al u satisfacer la ecuación diferencial,

$$(r_n)^{N-1} \Phi_p(u'(r_n)) = -\int_0^{r_n} r^{N-1} \Phi_{q+1}(u) \, dr \to -\int_0^{r_0} r^{N-1} \Phi_{q+1}(u) \, dr,$$

cuando $n \to \infty$. Como Φ_p tiene inversa continua, $\{u'(r_n)\}_n$ es convergente. Sea $\beta = \lim_{n\to\infty} u'(r_n)$. Si definimos $u(r_0) = \beta$ entonces u es solución del P.V.I. (7) en $C^1[0, r_0]$. Más aún, es única: si existiese otra solución $v \in C^1[0, r_0]$, entonces para $0 \leq r < r_0$, $v(r)$ debe coincidir con algún u_n, y por lo tanto con u. Para $r = r_0$, basta replicar el argumento anterior para ver que $v(r_0) = \alpha$ y $v'(r_0) = \beta$.

De esta manera, $u \in C^1[0, r_0]$ es la única solución del problema (7).

Haciendo $d = \alpha$ y $d' = \beta$, si $\alpha \neq 0$, entonces se puede aplicar la Proposición 3.2 (de ser $\alpha < 0$, basta usar el razonamiento con $-u$) para encontrar $\varepsilon > 0$ de tal manera que el problema tenga única solución local en $C^1[r_0, r_0 + \varepsilon]$, y así extender a u, contradiciendo el hecho de que r_0 es el supremo de A.

El caso $\alpha = 0 = \beta$ es imposible por el Lema 3.7.

Finalmente, para $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ veremos primero la existencia utilizando el Teorema 2.2.

Sabemos que encontrar una solución alrededor de r_0 es equivalente a encontrar un punto fijo del operador

$$Tu(r) = -\int_{r_0}^{r} \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_{r_0}^{t} s^{N-1} \Phi_{q+1}(u) \, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1} \Phi_p(\beta) \right) dt,$$

definido sobre un espacio métrico completo.

Sean $R > |\beta|$ y $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{R^{p-1} - |\beta|^{p-1}}{R^q}\}$. Si definimos $B_R^\varepsilon(0)$ como en la Proposición 3.2, entonces $T : B_R^\varepsilon(0) \to B_R^\varepsilon(0)$ está bien definida. En efecto, para $w \in B_R^\varepsilon(0)$, por argumentos ya realizados sabemos que $Tw \in C[r_0, r_0+\varepsilon]$, y si $r \in [r_0, r_0+\varepsilon]$,

$$\begin{aligned}
|Tw(r)| &\leq \int_{r_0}^{r} \left| \frac{1}{t^{N-1}} \int_{r_0}^{t} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w)\, ds - \left(\frac{r_0}{t}\right)^{N-1} \Phi_p(\beta) \right|^{p'-1} dt \\
&\leq \int_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{t^{N-1}} |w|^q \int_{r_0}^{t} s^{N-1}\, ds + \left|\frac{r_0}{t}\right|^{N-1} |\beta|^{p-1} \right)^{p'-1} dt \\
&\leq \int_{r_0}^{r} \left(|w|^q (t-r_0) + |\beta|^{p-1} \right)^{p'-1} dt \\
&\leq \left(|w|^q \varepsilon + |\beta|^{p-1} \right)^{p'-1} \varepsilon \\
&\leq \left(R^q \left(\frac{R^{p-1} - |\beta|^{p-1}}{R^q} \right) + |\beta|^{p-1} \right)^{p'-1} \\
&= (R^{p-1})^{p'-1} \\
&= R.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que T es un operador compacto. Consideremos $\{w_n\}_n$ una sucesión en $B_R^\varepsilon(0)$. Para cada n y $r \in [r_0, r_0+\varepsilon]$, replicando las cuentas anteriores,

$$\begin{aligned}
|(T(w_n))'(r)| &= \left| \Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_{r_0}^{r} s^{N-1}\Phi_{q+1}(w_n)\, ds - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{N-1} \Phi_p(\beta) \right) \right| \\
&\leq \left(|w|^q \varepsilon + |\beta|^{p-1} \right)^{p'-1} \leq R.
\end{aligned}$$

Es decir, tanto $\{T(w_n)\}_n$ como $\{(T(w_n))'\}_n$ son uniformemente acotadas. Por el Corolario 2.4, $\{T(w_n)\}_n$ tiene una subsucesión convergente, con lo que se satisfacen las hipótesis del teorema de punto fijo de Schauder, y por lo tanto T tiene al menos un punto fijo.

Ahora bien, sea $w \in B_R^\varepsilon(0)$ un punto fijo de T. Para simplificar la notación, llamemos u a la función $u\chi_{[0,r_0]} + w\chi_{[r_0,r_0+\varepsilon]}$, que es $C^1[0, r_0+\varepsilon]$ y satisface

$$\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}\Phi_p(u'))' + \Phi_{q+1}(u) = 0,$$

en todo su dominio.

Notemos que alrededor de r_0, u es de clase C^2 y $u'(r_0) = \beta \neq 0$. Por el Teorema de la Función Inversa, existe una función v de clase C^2 alrededor de 0 tal que v y u son inversas. En particular, $v > 0$ y $u(v(t)) = t$ para todo t suficientemente cercano a 0. Si derivamos con respecto a la variable t,

$$u'(v(t)) \cdot v'(t) = 1,$$

de donde reemplazando $t = 0$, obtenemos

$$v'(0) = \frac{1}{u'(v(0))} = \frac{1}{u'(r_0)} = \frac{1}{\beta}.$$

Derivando nuevamente,

$$u'(v(t)) \cdot v''(t) + u''(v(t)) \cdot (v'(t))^2 = 0.$$

Sabemos que,

$$(p-1)|u'|^{p-2}u'' = (\Phi_p(u'))' = \frac{1-N}{r}\Phi_p(u') - \Phi_{q+1}(u),$$

para todo r en una vecindad de r_0. Despejando u'' y reemplazando en la igualdad previa,

$$\begin{aligned}
u'(v(t)) \cdot v''(t) &= \frac{(v'(t))^2}{p-1}\left[\frac{N-1}{v(t)}u'(v(t)) + |u'(v(t))|^{2-p}\Phi_{q+1}(u(v(t)))\right] \\
\iff v''(t) &= \frac{(v'(t))^2}{p-1}\left[\frac{N-1}{v(t)} + \Phi_p((u'(v(t)))^{-1})\Phi_{q+1}(u(v(t)))\right] \\
\iff v''(t) &= \frac{(v'(t))^2}{p-1}\left[\frac{N-1}{v(t)} + \Phi_p(v'(t))\Phi_{q+1}(t)\right],
\end{aligned}$$

con lo que tendríamos

$$(p-1)v'' = (N-1)\frac{(v')^2}{v} + (v')^{p+1}\Phi_{q+1}(t) = F(t, v, v').$$

Bastaría ver que F es localmente Lipschitz en su segunda y tercera variable en $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ para invocar la unicidad proporcionada por el Teorema 2.5. Comprobémoslo:

Fijemos $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Consideremos $U_1 = (t_0 - 1, t_0 + 1)$, $U_2 = (\frac{t_2}{2}, 2t_2)$ y $U_3 = (t_3 - \frac{|t_3|}{2}, t_3 + \frac{|t_3|}{2})$. Para $t \in U_1$, $s \in U_3$ y $x_1, x_2 \in U_2$ tenemos

$$\begin{aligned}
|F(t, x_1, s) - F(t, x_2, s)| &\leq (N-1)(s)^2\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| \\
&= (N-1)(s)^2\left|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right| \\
&\leq (N-1)(2t_3)^2\frac{4}{(t_2)^2}|x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Ahora, para $t \in U_1$, $s_1, s_2 \in U_3$ y $x \in U_2$ se cumple que

$$\begin{aligned}
|F(t,x,s_1) - F(t,x,s_2)| &\le \frac{N-1}{x}|(s_1)^2 - (s_2)^2| + |t|^q|(s_1)^{p+1} - (s_2)^{p+1}| \\
&= \frac{N-1}{x}|s_1 + s_2||s_1 - s_2| + |t|^q|(p+1)h^p||s_1 - s_2|,
\end{aligned}$$

para algún h entre s_1 y s_2 por el Teorema del Valor Medio, con lo que $h \in U_3$. Así,

$$\begin{aligned}
|F(t,x,s_1) - F(t,x,s_2)| &\le \frac{N-1}{x}|s_1 + s_2||s_1 - s_2| + |t|^q|(p+1)h^p||s_1 - s_2| \\
&\le \frac{2(N-1)}{t_2}4|t_3||s_1 - s_2| + (p+1)(|t_1| + 1)^q(2|t_3|)^p|s_1 - s_2|,
\end{aligned}$$

y tendríamos lo deseado.

De lo anterior, v satisface, localmente, un problema de valor inicial que, por el Teorema 2.5, tiene solución única local. Necesariamente v es única y, consecuentemente, su inversa u también lo es. Es decir, r_0 no es el supremo de A, lo cual es absurdo.

En todos los posibles casos llegamos a una contradicción; por consiguiente, $\sup A = \infty$. Esto es, el problema (7) tiene una única solución global. □

Lema 3.13. Sea $u(r,d)$ una solución del problema (7) con condición inicial $d > 0$. Entonces u tiene un número infinito de ceros. Más aún, todo cero de u es un cero simple y aislado, y entre dos ceros consecutivos hay un único extremo local.

Demostración. Supongamos que u nunca se anula. Como $u(0) = d > 0$, u no puede cambiar de signo debido a la continuidad. Es decir, $u(r) > 0$ para todo r. Sabemos que

$$-r^{N-1}|u'|^{p-2}u' = \int_0^r s^{N-1}|u|^{q-1}u\,ds > 0,$$

con lo que $u'(r) < 0$ para todo $r > 0$; es decir, u es estrictamente decreciente. De esto,

$$\begin{aligned}
-|u'|^{p-2}u' = \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}|u|^{q-1}u\,ds &\ge \frac{|u(r)|^{q-1}u(r)}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\,ds \\
&= \frac{r|u|^{q-1}u}{N}.
\end{aligned}$$

Sabiendo los signos correspondientes, tenemos que

$$\begin{aligned}
-(-u')^{p-2}u' \geq \frac{r}{N}u^{q-1}u \Longrightarrow (-u')^{p-1} \geq \frac{r}{N}u^q& \\
\Longrightarrow -u'u^{\frac{-q}{p-1}} \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}& \\
\Longrightarrow -\frac{p-1}{p-(q+1)}\left(u^{\frac{p-(q+1)}{p-1}}\right)' \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}&.
\end{aligned}$$

Integrando en $(0, r)$, obtenemos

$$-\frac{p-1}{p-(q+1)}\left[u^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}}\right] \geq \frac{p-1}{p}\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Despejando,

$$\begin{aligned}
u^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} &\leq -\frac{p-(q+1)}{p}\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} \\
\Longrightarrow u^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} &\leq d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - \frac{p-(q+1)}{p}\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para todo $r > 0$, tomando un r suficientemente grande el lado derecho es negativo, generando una contradicción, pues asumimos $u > 0$.

Necesariamente $u \leq 0$ en algún punto. Si se anula en un radio, acabamos; si es negativo, por continuidad se debe anular en algún punto intermedio. Es decir, u tiene al menos un cero.

Llamemos $z_1 > 0$ al primer cero de u. En efecto, este primer cero está bien definido: por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $u(r) > \frac{d}{2} > 0$ para todo r entre 0 y δ. Entonces el ínfimo del conjunto $A = \{r > 0 \mid u(r) = 0\} \neq \emptyset$ está bien definido al ser este acotado inferiormente por δ. Tomando cualquier sucesión $\{r_k\}_k$ de elementos de A que converjan al ínfimo, $0 = u(r_k) \to u(\inf A)$. Es decir, A contiene a su ínfimo, con lo que este elemento es el primer cero de u.

Queremos ver que z_1 es un cero simple. Para ello, simplemente observemos que

$$-|u'(z_1)|^{p-2}u'(z_1) = \frac{1}{z_1^{N-1}}\int_0^{z_1} s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\, ds > 0.$$

Además, la desigualdad anterior implica que $u'(z_1) < 0$. Por ser u de clase C^1, existe $\delta > 0$ tal que $u'(r) < 0$ si $z_1 - \delta < r < z_1 + \delta$. En este intervalo u

es estrictamente decreciente. Como z_1 es un cero, no puede existir otro cero allí; por lo tanto, z_1 es un cero aislado.

Ahora supongamos que no existe un cero de u mayor que z_1. Esto implica la existencia de un punto de mínimo local (pues u es negativa a la derecha cercana de z_1) mayor a z_1. En efecto, de no existir tal mínimo local, tenemos $u'(r) \leq 0$ para todo $r > z_1$, ya que de lo contrario habría un cambio de signo en la derivada, continua, de negativo a positivo.

De esto, u es decreciente a partir de z_1, y es acotada por el corolario anterior.

Con estas propiedades, vemos que $0 > \lim_{r\to\infty} u(r) = L > -\infty$. Por otro lado, como u' también es acotada,

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{\Phi_p(u')}{r} = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{r^N}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds.$$

Utilizando L'Hôpital, concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} -\frac{1}{r^N}\int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\,ds &= -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{Nr^{N-1}} r^{N-1}\Phi_{q+1}(u) \\
&= -\lim_{r\to\infty} \frac{\Phi_{q+1}(u)}{N} \\
&= \frac{-(-L)^{q-1}L}{N} \\
&= \frac{|L|^q}{N},
\end{aligned}$$

contradiciendo $L \neq 0$.

Necesariamente u tiene un mínimo local evaluado en un radio mayor a z_1. Llamemos m_1 al primer radio que satisface esto. Nuevamente, decir que es el primero tiene sentido y la justificación es análoga a la realizada con z_1 ($u' < 0$ alrededor de z_1 y continuidad de u').

Integrando en (m_1, r), u satisface

$$\begin{aligned}
& -r^{N-1}\Phi_p(u') + (m_1)^{N-1}\Phi_p(u'(m_1)) = \int_{m_1}^r s^{N-1}|u|^{q-1}u\,ds \\
\iff & -r^{N-1}\Phi_p(u') = \int_{m_1}^r s^{N-1}|u|^{q-1}u\,ds < 0.
\end{aligned}$$

Esto es, $u' > 0$ en (m_1, ∞), o que es lo mismo, $-u$ es decreciente a partir de

m_1. Así,

$$r^{N-1}(u')^{p-1} = \int_{m_1}^{r} s^{N-1}(-u)^q\,ds \geq (-u(r))^q \int_{m_1}^{r} s^{N-1}\,ds$$
$$= (-u)^q \frac{1}{N}(r^N - m_1^N).$$

Para radios que cumplan $r \geq 2^{\frac{1}{N}} m_1 > m_1$ se tiene que

$$r^{N-1}(u')^{p-1} \geq (-u)^q \frac{1}{N}(r^N - m_1^N) \geq (-u)^q \frac{1}{2N}(r^N)$$
$$\Longrightarrow u'(-u)^{\frac{-q}{p-1}} \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}}$$
$$\Longleftrightarrow\ -\frac{p-1}{p-(q+1)}\left((-u)^{\frac{p-(q+1)}{p-1}}\right)' \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{(2N)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Integrando en $(2^{\frac{1}{N}} m_1, r)$:

$$-\frac{p-1}{p-(q+1)}\left[(-u)^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - (-u(2^{\frac{1}{N}} m_1))^{\frac{p-(q+1)}{p-1}}\right]$$
$$\geq \frac{p-1}{p(2N)^{\frac{1}{p-1}}}\left[r^{\frac{p}{p-1}} - (2^{\frac{1}{N}} m_1)^{\frac{p}{p-1}}\right].$$

Despejando,

$$(-u)^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} \leq (-u(2^{\frac{1}{N}} m_1))^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - \frac{p-(q+1)}{p(2N)^{\frac{1}{p-1}}}\left[r^{\frac{p}{p-1}} - (2^{\frac{1}{N}} m_1)^{\frac{p}{p-1}}\right].$$

Tomando r suficientemente grande, el lado derecho es negativo, pero $-u$ es una función positiva en (m_1, ∞), lo cual es absurdo.

Necesariamente u tiene un cero $z > z_1$. Llamemos z_2 al cero más pequeño que cumple ser mayor que z_1, el cual se prueba que está bien definido recurriendo a ideas anteriores.

Afirmamos que existe un único punto crítico en el intervalo (z_1, z_2). En efecto, la continuidad de u garantiza al menos un mínimo local en el intervalo. Llamemos m_1 al primero de ellos. Este no puede ser mayor o igual a z_2. Si hubiese otro punto crítico t, este debe cumplir $t > m_1$. Sabiendo que u no cambia de signo en (z_1, z_2), tenemos que

$$0 = -t^{N-1}|u'(t)|^{p-2}u'(t) + (m_1)^{N-1}|u'(m_1)|^{p-2}u'(m_1) = \int_{m_1}^{t} s^{N-1}|u|^{q-1}u\,ds$$
$$< 0,$$

lo cual es una contradicción.

Todos los procedimientos anteriores se pueden repetir para z_2, viéndose que es un cero simple y aislado, pudiéndose luego demostrar la existencia del tercer cero z_3 y el único punto crítico entre ellos m_2.

Inductivamente se demuestra que la solución u tiene ceros $z_1 < z_2 < z_3 < \cdots$, aislados, simples y con un único extremo local entre ellos; lo deseado. □

Este lema será fundamental en la prueba del Teorema 1.1 un poco más tarde. Por el momento, lo utilizaremos para ver que, en cierto caso, las soluciones no tienen la "suficiente" regularidad.

Corolario 3.14. Sea $u \in C^1[0,\infty)$ una solución del problema (7). Si $p > 2$, entonces u no es C^2 en los puntos donde su derivada se anula.

Demostración. Si u fuese de clase C^2 en un radio r_0 tal que $u'(r_0) = 0$ y sabiendo que Φ_p es $C^1(\mathbb{R})$, podemos aplicar la regla de la cadena y obtener

$$\frac{1-N}{r}\Phi_p(u') - \Phi_{q+1}(u) = (\Phi_p(u'))' = \Phi_p'(u')u'' = (p-1)|u'|^{p-2}u''.$$

Evaluando en r_0,

$$\Phi_{q+1}(u(r_0)) = 0,$$

lo que implica $u(r_0) = 0$, contradiciendo el lema anterior. □

Notemos que dependiendo de la condición inicial d en el problema (7) tenemos una única solución $u = u(r,d)$. Quisiéramos que al tomar condiciones iniciales cercanas unas de las otras, las respectivas soluciones también estén cerca. A esto se le conoce como dependencia continua de las condiciones iniciales y, en efecto, se cumple para nuestro caso.

Teorema 3.15. Si $\{d_k\}_k$ es una sucesión de reales positivos tal que $d_k \to d_0 > 0$, entonces las respectivas soluciones u_k del problema (7) con condición inicial d_k convergen uniformemente a u_0, la solución del problema con condición inicial d_0, en todo compacto de $[0,\infty)$.

Demostración. Supongamos que esto es falso. Existe $M \subseteq [0,\infty)$ un compacto no vacío tal que $u_k \nrightarrow u_0$ uniformemente en M. Esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $k \geq n$ y $r \in M$ tales que

$$|u_k(r) - u_0(r)| \geq \varepsilon.$$

Para cada n natural, tomemos u_{k_n} y r_n y construyamos dos sucesiones que satisfagan

$$|u_{k_n}(r_n) - u_0(r_n)| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Para no sobrecargar la notación, $u_{k_n} = u_n$.

Como $\{d_k\}_k$ es convergente, es acotada. Por las energías correspondientes,

$$\frac{p-1}{p}|u_k'(r)|^p + \frac{1}{q+1}|u_k(r)|^{q+1} \leq \frac{|d_k|^{q+1}}{q+1} \leq C,$$

para un $C > 0$. Esto implica que las sucesiones $\{u_k\}_k$ y $\{u_k'\}_k$ están uniformemente acotadas.

Por compacidad, existe $0 < b < \infty$ tal que $M \subseteq [0, b]$. Aplicando el Corolario 2.4, hay una subsucesión $\{u_{n_j}\}_j$ que converge uniformemente a una función, llamémosla u, en el intervalo $[0, b]$. Sabemos que para $r \in (0, b]$,

$$u_{n_j}' = -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u_{n_j})\, ds\right).$$

Por la convergencia uniforme de u_{n_j} y la continuidad de $\Phi_{p'}$ y Φ_{q+1}, el lado derecho de la igualdad anterior converge a

$$v(r) := -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}\Phi_{q+1}(u)\, ds\right).$$

Por otro lado, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$u_{n_j}(r) - d_{n_j} = \int_0^r u_{n_j}'\, ds.$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$, el lado izquierdo converge a $u(r) - d_0$, mientras que el lado derecho, por el Teorema de la Convergencia Dominada (recordemos que $\{u_{n_j}'\}_j$ es uniformemente acotada) tenemos que

$$\int_0^r u_{n_j}'\, ds \to \int_0^r \lim_{j\to\infty} u_{n_j}'\, ds = \int_0^r v\, ds.$$

Juntando las igualdades y derivando, $u'(r) = v(r)$. Además, cuando $r \to 0^+$

$$u(0) - d_0 = \int_0^0 v\, ds = 0 \quad \therefore \quad u(0) = d_0,$$

y sabiendo que

$$0 = u_{n_j}'(0) \to v(0),$$

tenemos $u'(0) = v(0) = 0$.

Es decir, u satisface el problema (7) con condición inicial $u(0) = d_0$. Por la unicidad de la solución, $u = u_0$ en $[0, b]$.

Lo anterior implica que $u_{n_j} \to u_0$ uniformemente en M, con lo que existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que si $j \geq N$, entonces

$$|u_{n_j}(r) - u_0(r)| < \varepsilon,$$

y esto para todo $r \in M$. En particular, si $j = N$ y $r = r_{n_N}$, tendríamos

$$|u_{n_N}(r_{n_N}) - u_0(r_{n_N})| < \varepsilon,$$

que contradice la desigualdad (9).

Necesariamente $u_k \to u_0$ uniformemente en compactos de $[0, \infty)$. $\square$

4. Comportamiento de los ceros dependiendo de la condición inicial

La prueba del teorema principal requiere el uso de cuatro lemas. En la sección pasada ya probamos uno, el Lema 3.13. En esta sección enunciamos y demostramos los tres restantes.

Lema 4.1. Si $d > 0$ es suficientemente grande, entonces $u(r,d)$, la solución del problema (7), no tiene ceros en $[0,1]$.

Demostración. Utilizaremos algunas de las ideas empleadas en la prueba del Lema 3.13.

Tomando $k \in (0,1)$, tenemos $0 < kd < d$. Como u es decreciente en $(0, z_1)$, sea $r_{k,d} \in (0, z_1)$ el radio donde donde $u(r_{k,d}) = kd$. Integrando sobre $(0,r)$, con $r \in (0, z_1)$,

$$\begin{aligned}
-|u'|^{p-2}u' &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}|u|^{q-1}u\, ds \\
\Longleftrightarrow (-u')^{p-1} &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}u^q\, ds \\
\Longrightarrow (-u')^{p-1} &\leq \frac{d^q}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1}\, ds \\
\Longrightarrow -u' &\leq \frac{d^{\frac{q}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} r^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$d - kd = \int_0^{r_{k,d}} -u'(s)\, ds \leq \frac{d^{\frac{q}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_0^{r_{k,d}} s^{\frac{1}{p-1}} ds = \frac{(p-1)d^{\frac{q}{p-1}}}{pN^{\frac{1}{p-1}}} (r_{k,d})^{\frac{p}{p-1}},$$

y de esta manera,

$$(1-k)d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} \leq \frac{(p-1)}{pN^{\frac{1}{p-1}}} (r_{k,d})^{\frac{p}{p-1}}.$$

Como el lado izquierdo tiende a infinito cuando $d \to \infty$, $r_{k,d} \to \infty$ también. Es decir, el primer cero de $u(r,d)$ está por fuera de $[0,1]$ para d suficientemente grande. $\square$

El siguiente lema va de la mano con la dependencia continua de las condiciones iniciales. Recordando que estamos intentando encontrar soluciones con un número fijo de ceros interiores en $[0, 1]$, ¿qué pasa con los ceros interiores de la solución si perturbo un poco la condición inicial? Lo que deseamos, en un principio, es que no haya una disonancia muy grande en su cantidad. Pero, ¿qué tanto podemos acotar el error?

Lema 4.2. Sea $d > 0$. Supongamos que $u(r, d)$ es la solución del problema (7). Supongamos, además, que $u(1, d) = 0$ y tiene k ceros interiores en $[0, 1]$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo d' que cumpla $d - \delta < d' < d$ se tiene que la solución $u(r, d')$ del problema (7) con condición inicial d' tiene a lo sumo $k + 1$ ceros interiores en $[0, 1]$.

Demostración. Razonemos por el absurdo. Si no existiera tal δ, podríamos encontrar una sucesión $\{d_i\}_i \subset (0, d)$ estrictamente creciente tal que $d_i \to d$ y las soluciones respectivas $u_i(r) := u(r, d_i)$ tienen, como mínimo, $k+2$ ceros interiores en $[0, 1]$. Denotemos $u(r) := u(r, d)$.

Por la dependencia continua de las condiciones iniciales, $u_i(r) \to u(r)$ uniformemente en compactos de $[0, \infty)$. Trabajemos en el intervalo $[0, 2]$.

Veamos primero que $u_i'(r) \to u'(r)$ uniformemente en $[0, 2]$: como toda u_i y u satisfacen la ecuación diferencial en el problema (7),

$$\left|\Phi_p(u') - \Phi_p(u_i')\right| = r^{1-N}\left|\int_0^r s^{N-1}(\Phi_{q+1}(u_i) - \Phi_{q+1}(u))\right|,$$

donde el lado derecho tiende a 0 uniformemente en $[0, 2]$, justificándose con la dependencia continua de las condiciones iniciales, $u_i(r) \to u(r)$ en $[0, 2]$, y la continuidad de Φ_{q+1}.

Como la inversa $\Phi_{p'}$ también es continua, tenemos lo deseado.

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, k + 1\}$. Llamemos z_j al $j-$ésimo cero de u. Observemos que $z_j \in (0, 1]$ para todo j. Como los ceros de u son simples, sin pérdida de generalidad supongamos que $c = u'(z_j) > 0$. Por continuidad de u', existe $\delta_j > 0$ tal que

$$|u'(r) - c| < \frac{c}{2},$$

para todo $r \in [z_j - \delta_j, z_j + \delta_j]$. Lo anterior implica que en dicho intervalo se cumple

$$u'(r) > \frac{c}{2} > 0.$$

Utilizando la convergencia uniforme de las derivadas, existe $i_j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_j$ y todo $r \in [0, 2]$ se tiene que

$$|u_i'(r) - u'(r)| < \frac{c}{4},$$

con lo que para $r \in [z_j - \delta_j, z_j + \delta_j]$,

$$u_i'(r) > u'(r) - \frac{c}{4} > \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4}.$$

Es decir, u_i es estrictamente creciente en $[z_j - \delta_j, z_j + \delta_j]$.

De esta manera, si $i \geq i_j$ entonces u_i puede tener a lo sumo un cero en $(z_j - \delta_j, z_j + \delta_j)$, con $j \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$.

Sin pérdida de generalidad, los δ_j se pueden tomar lo suficientemente pequeños para que los intervalos sean disjuntos dos a dos.

Llamemos $A_0 = [0, z_1 - \delta_1]$, $A_1 = [z_1 + \delta_1, z_2 - \delta_2]$,..., $A_k = [z_k + \delta_k, 1 - \delta_{k+1}]$. Sea $A = A_0 \cup \cdots \cup A_k$, un compacto. Observemos que $u(r) \neq 0$ para todo $r \in A$. Así, si $m = \text{mín}_{r \in A} |u(r)|$, necesariamente $m > 0$. Por la convergencia uniforme, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$ se cumple

$$|u_i(r) - u(r)| < \frac{m}{2},$$

en el intervalo $[0, 2]$. En particular, si $r \in A$, utilizando la desigualdad triangular reversa obtenemos

$$|u_i(r)| > |u(r)| - \frac{m}{2} \geq \frac{m}{2}.$$

Ahora bien, sea $N = \text{máx}\{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}$. Si $i \geq N$, entonces u_i no se anula en A, y tiene a lo sumo un cero en cada intervalo $(z_j - \delta_j, z_j + \delta_j)$. Como u_i tiene por lo menos $k+2$ ceros en $(0, 1)$ por hipótesis, entonces debe haber un intervalo $(z_j - \delta_j, z_j + \delta_j)$ que contiene por lo menos dos ceros, una contradicción. □

Ya vimos qué sucedía al tomar condiciones iniciales muy grandes. ¿Qué podría suceder si se toman muy pequeñas? Como vimos en la sección pasada, si $d = 0$ entonces la única solución es $u \equiv 0$. Así, inferimos que los ceros de las soluciones se van acercando al origen.

Lema 4.3. Sea $z_k(d)$ el $k-$ésimo cero de $u(r, d)$, solución de (7). Entonces $z_k(d) \to 0$ cuando $d \to 0$.

Demostración. Sea $m_k = m_k(d)$ el único extremo local en el intervalo (z_k, z_{k+1}).

El resultado se tiene para el primer cero z_1: en la prueba del Lema 3.13, obtuvimos la desigualdad

$$u^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} \leq d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - \frac{p-(q+1)}{p} \frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}},$$

para $r \in (0, z_1)$. Tomando límite cuando $r \to z_1$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}} - \frac{p-(q+1)}{p} \frac{(z_1)^{\frac{p}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}} \\ \Longrightarrow (z_1)^{\frac{p}{p-1}} &\leq \frac{pN^{\frac{1}{p-1}}}{p-(q+1)} d^{\frac{p-(q+1)}{p-1}}. \end{aligned}$$

Viendo que el lado derecho tiende a 0 cuando $d \to 0$, se tiene el resultado.

Ahora bien, supongamos que el k-ésimo cero $z_k(d)$ tiende a cero cuando $d \to \infty$, donde $k \geq 1$. Sea $y = |u|^\alpha$, con $\alpha = \frac{p-(1+q)}{p-1} > 0$. Observemos que, además, $1 = \frac{p-1}{p-1} > \alpha$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u' < 0$ en (z_k, m_k). Así,

$$y' = \alpha|u|^{\alpha-1} \frac{u}{|u|} u' = \alpha|u|^{\alpha-2} uu'. \tag{10}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y'' &= [\alpha(\alpha-2)|u|^{\alpha-3} \frac{u}{|u|} u'] uu' + \alpha|u|^{\alpha-2}[u'u' + uu''] \\ &= \alpha(\alpha-2)|u|^{\alpha-4}|u|^2(u')^2 + \alpha|u|^{\alpha-2}[(u')^2 + uu''] \\ &= \alpha(\alpha-1)|u|^{\alpha-2}(u')^2 + \alpha|u|^{\alpha-2}uu'' \\ &\leq \alpha|u|^{\alpha-2}uu''. \end{aligned} \tag{11}$$

Recordando que la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$|u'|^{p-2}[(p-1)u'' + \frac{N-1}{r}u'] + |u|^{q-1}u = 0,$$

si multiplicamos por u a ambos lados obtenemos

$$|u'|^{p-2}[(p-1)u''u + \frac{N-1}{r}u'u] + |u|^{q+1} = 0.$$

Queremos la ecuación equivalente en términos de y. Despejando, $|u| = y^{\frac{1}{\alpha}}$ y de (10)

$$u' = \frac{y'}{\alpha|u|^{\alpha-2}u} \Longrightarrow |u'| = \frac{|y'|}{\alpha|u|^{\alpha-1}} = \frac{|y'|}{\alpha y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

Luego, utilizando (11)

$$\begin{aligned}
0 &= |u'|^{p-2}[(p-1)u''u + \frac{N-1}{r}u'u] + |u|^{q+1} \\
&= |u'|^{p-2}\frac{|u|^{2-\alpha}}{\alpha}[(p-1)u''u|u|^{\alpha-2}\alpha + \frac{N-1}{r}u'u|u|^{\alpha-2}\alpha] + |u|^{q+1} \\
&\geq |u'|^{p-2}\frac{|u|^{2-\alpha}}{\alpha}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + y^{\frac{q+1}{\alpha}} \\
&= \left[\frac{|y'|}{\alpha y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right]^{p-2}\frac{y^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{\alpha}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + y^{\frac{q+1}{\alpha}} \\
&= \frac{|y'|^{p-2}}{\alpha^{p-1}}y^{\frac{2-\alpha}{\alpha}+\frac{(1-\alpha)(p-2)}{\alpha}}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + y^{\frac{q+1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Así,

$$0 \geq |y'|^{p-2}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + \alpha^{p-1}y^{\frac{(q+1)+(\alpha-2)+(\alpha-1)(p-2)}{\alpha}}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
(q+1)+(\alpha-2)+(\alpha-1)(p-2) &= q+1+\alpha-2+\alpha p-2\alpha-p+2 \\
&= (q+1)-p+\alpha(p-1) \\
&= (q+1)-p+p-(q+1) = 0,
\end{aligned}$$

con lo que

$$0 \geq |y'|^{p-2}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + \alpha^{p-1}.$$

Como habíamos asumido que $u' < 0$ en (z_k, m_k), por justificaciones anteriores tenemos que $u < 0$ allí también. Esto implica que $y' > 0$. Si hacemos el cambio de variable $v = |y'|^{p-1} = (y')^{p-1}$,

$$v' = (p-1)(y')^{p-2}y''.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq |y'|^{p-2}[(p-1)y'' + \frac{N-1}{r}y'] + \alpha^{p-1} \\
&= v' + \frac{N-1}{r}v + \alpha^{p-1} \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}[r^{N-1}v' + (N-1)r^{N-2}v + r^{N-1}\alpha^{p-1}] \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}[(r^{N-1}v)' + r^{N-1}\alpha^{p-1}].
\end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por r^{N-1} e integrando sobre $(r, m_k) \subseteq (z_k, m_k)$,

$$m_k^{N-1} v(m_k) - r^{N-1} v + \frac{\alpha^{p-1}}{N}(m_k^N - r^N) \leq 0. \tag{12}$$

Sabiendo que $u'(m_k) = 0$, tenemos que

$$v(m_k) = (y'(m_k))^{p-1} = (\alpha |u(m_k)|^{\alpha-2} u(m_k) u'(m_k))^{p-1} = 0.$$

Como $r < m_k$, entonces $\frac{m_k^N}{r^N} > \frac{m_k}{r}$. De esto,

$$\frac{m_k^N}{r^N} - 1 > \frac{m_k}{r} - 1 \Longrightarrow \frac{m_k^N}{r^{N-1}} - r > m_k - r.$$

Utilizando lo anterior y (12),

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{p-1}}{N}(m_k - r) \leq \frac{\alpha^{p-1}}{N}\left(\frac{m_k^N}{r^{N-1}} - r^N\right) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\alpha^{p-1}}{N}(m_k^N - r^N) \leq v = (y')^{p-1} \\ \Longrightarrow \frac{\alpha}{N^{\frac{1}{p-1}}}(m_k - r)^{\frac{1}{p-1}} \leq y'. \end{aligned}$$

Integrando nuevamente sobre (r, m_k) y tomando límite $r \to z_k^+$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{N^{\frac{1}{p-1}}} \frac{p-1}{p}(m_k - z_k)^{\frac{p}{p-1}} &\leq y(m_k) - y(z_k) \\ &= y(m_k) \\ &= (-u(m_k))^{\alpha} \\ &\leq d^{\alpha}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad está justificada gracias al acotamiento de u probado en el Corolario 3.10.

Tomando $d \to 0^+$, tenemos que $m_k - z_k \to 0$. Por hipótesis, $z_k \to 0$, con lo que necesariamente $m_k \to 0$.

Integrando la ecuación diferencial sobre $(m_k, r) \subseteq (m_k, z_{k+1})$, por cómputos anteriores sabemos que $u' > 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |u'|^{p-2} u' &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{m_k}^{r} s^{N-1} |u|^{q-1}(-u)\, ds \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{m_k}^{r} s^{N-1} (-u)^q\, ds \\ &\geq \frac{(-u)^q}{r^{N-1}} \int_{m_k}^{r} s^{N-1}\, ds \\ &= \frac{(-u)^q}{r^{N-1}} \frac{r^N - m_k^N}{N}, \end{aligned}$$

ya que $-u$ es decreciente. Esto es, llamando $w = -u$

$$
\begin{aligned}
(u')^{p-1} &\geq \frac{(-u)^q}{r^{N-1}} \frac{r^N - m_k^N}{N} \\
\iff (-w')^{p-1} &\geq \frac{w^q}{N} \frac{r^N - m_k^N}{r^{N-1}} \\
\iff -w' w^{\frac{-q}{p-1}} &\geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \left(r - \frac{m_k^N}{r^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Integrando nuevamente,

$$
- \int_{m_k}^{r} w' w^{\frac{-q}{p-1}} \, ds \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds. \tag{13}
$$

Aplicando integración por partes con $\theta = w^{\frac{-q}{p-1}}$ y $d\lambda = w' ds$,

$$
\begin{aligned}
\int_{m_k}^{r} w' w^{\frac{-q}{p-1}} \, ds &= (w \cdot w^{\frac{-q}{p-1}}) \Big|_{m_k}^{r} - \int_{m_k}^{r} \frac{-q}{p-1} w^{\frac{-q-p+1}{p-1}} \cdot w w' \, ds \\
&= (w^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}) \Big|_{m_k}^{r} + \frac{q}{p-1} \int_{m_k}^{r} w^{\frac{-q}{p-1}} w' \, ds.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{p-1-q}{p-1} \left(\int_{m_k}^{r} w' w^{\frac{-q}{p-1}} \, ds \right) = (w^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}) \Big|_{m_k}^{r}.
$$

Reemplazando en (13),

$$
\begin{aligned}
\frac{1-p}{p-(1+q)} (w^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}) \Big|_{m_k}^{r} &\geq \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
\iff (w^{\frac{p-(1+q)}{p-1}}) \Big|_{m_k}^{r} &\leq \frac{p-(1+q)}{1-p} \frac{1}{N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
\iff w^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} - (w(m_k))^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} &\leq \frac{p-(1+q)}{(1-p) N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{r} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $r \to (z_{k+1})^-$ y acotando $w(m_k)$ con d,

$$
\begin{aligned}
d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} &\leq \frac{p-(1+q)}{(1-p) N^{\frac{1}{p-1}}} \int_{m_k}^{z_{k+1}} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
\iff \frac{(p-1) N^{\frac{1}{p-1}}}{p-(1+q)} d^{\frac{p-(1+q)}{p-1}} &\geq \int_{m_k}^{z_{k+1}} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.
\end{aligned}
$$

Acotemos inferiormente la integral del lado derecho:

$$\begin{aligned}
\int_{m_k}^{z_{k+1}} \left(s - \frac{m_k^N}{s^N - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds &= \int_{m_k}^{z_{k+1}} \left(\frac{s^N - m_k^N}{s^N - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
&\geq \int_{m_k}^{z_{k+1}} (s - m_k)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
&= \frac{p-1}{p}(s - m_k)^{\frac{p}{p-1}} \Big|_{m_k}^{z_{k+1}} \\
&= \frac{p-1}{p}(z_{k+1} - m_k)^{\frac{p}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Tomando $d \to 0^+$,

$$0 \geq \lim_{d \to 0^+} \frac{p-1}{p}(z_{k+1} - m_k)^{\frac{p}{p-1}} \geq 0,$$

con lo que $z_{k+1} - m_k \to 0$. Pero sabemos que $m_k \to 0$, obligando a que $z_{k+1} \to 0$, lo que se quería demostrar. $\square$

5. Prueba del teorema principal

La idea para probar el teorema es sencilla ya teniendo todo el conocimiento previo, mostrándonos el comportamiento de las soluciones: si necesito un número predeterminado de ceros, puedo intentar reducir la condición inicial lo suficiente para tener una solución que lo cumpla. Si no le atinamos de inmediato, los lemas nos propician herramientas para que, al perturbar un poco la condición, no nos alejemos mucho de los ceros que teníamos.

Queremos ir paso a paso mediante un razonamiento inductivo, y la clave está en tomar condiciones iniciales definidas como ínfimos, para que así al irlas reduciendo no nos encontremos en un caso previo y tengamos la certeza de tener, por lo menos, una cantidad de ceros predeterminados en cada iteración.

Probemos el Teorema 1.1.

Demostración del Teorema 1.1. Definamos, para $k \geq 0$, el conjunto

$$A_k := \{d > 0 : u(r, d) \text{ tiene exactamente } k \text{ ceros interiores en } [0, 1]\}.$$

En el caso $k = 0$, por el Lema 4.1 podemos asegurar que $A_0 \neq \emptyset$. Llamemos $d_0 = \text{ínf}\, A_0 \geq 0$. Supongamos que $d_0 = 0$, y sea $\{h_j\}_j$ una sucesión decreciente de elementos en A_0 que converge a d_0. Por el Lema 4.3, $z_1(d_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Sin embargo, esto implica que para algún j suficientemente grande, $z_1(d_j) \in [0, 1]$, contradiciendo $d_j \in A_0$. De esta manera, d_0 es positivo.

Para todo $d \in A_0$, tenemos $u(r, d) > 0$ en $[0, 1)$. Por dependencia continua de las condiciones iniciales, $0 \leq u(r, d_0)$ en $[0, 1)$. Como los ceros son simples, si $u(r, d_0)$ se anulara en el intervalo, debería haber un cambio de signo. Por lo tanto, $z_1(d_0) \geq 1$ y $d_0 \in A_0$. Por continuidad, $u(1, d_0) \geq 0$. Supongamos que es positivo: existe $\delta > 0$ tal que $|u(r, d) - u(r, d_0)| < M/2$ para todo $r \in [0, 1]$ siempre que $|d - d_0| < \delta$, donde $M = \text{mín}_{r\in[0,1]}\, u(r, d_0) > 0$. Esto es, tomando un d suficientemente cerca, pero menor que d_0,

$$0 < \frac{M}{2} \leq u(r, d),$$

en todo $[0, 1]$. Absurdo, pues d_0 es el ínfimo de A_0.

Concluimos que $u(1, d_0) = 0$, probando el teorema para $k = 0$.

Ahora, veamos que $d_1 = \text{ínf}\, A_1$ está bien definido. Para d suficientemente cerca, por la izquierda, a d_0, $u(r, d)$ tiene, a lo sumo, $0+1 = 1$ ceros interiores, recurriendo al Lema 4.2. Como d_0 es el mínimo de A_0, necesariamente $u(r, d)$ tiene un cero interior. Es decir, A_1 es no vacío, y $d_1 < d_0$.

Más aún, $d_1 \neq 0$. En efecto, de no ser así, podemos encontrar $d \in A_1$ tan cercano a $d_1 = 0$ que cumpla que $z_2(d) \in (0, 1)$ utilizando el Lema 4.3, generando una contradicción.

Veamos que la cantidad de ceros interiores de $u(r, d_1)$ es de exactamente 1: por ser $d_1 < d_0$, no puede no tener ceros interiores, con lo que tiene mínimo uno. Veamos que $z_2(d_1) = 1$. Supongamos que $z_2(d_1) > 1$. Utilizando ideas de la prueba del Lema 4.2, podemos encontrar $\rho_1, \rho_2 > 0$ tales que si d es lo suficientemente cercano a d_1 por la izquierda, entonces $u(r, d)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(z_1(d_1) - \rho_1, z_1(d_1) + \rho_1) \subseteq (0, 1)$, estrictamente creciente en $(z_2(d_1) - \rho_2, z_2(d_1) + \rho_2) \subseteq (1, 2)$ y no se anula en $[0, z_1(d_1) - \rho_1]$ ni en $[z_1(d_1) + \rho_1, z_2(d_1) - \rho_2]$. De lo anterior, $u(r, d)$ tiene un único cero en $(0, 1)$, lo que implicaría que d_1 no es el ínfimo de A_1.

Supongamos ahora que $z_2(d_1) < 1$. Tomemos $d \in A_1$ lo suficientemente cerca a d_1. Un argumento con intervalos alrededor de los ceros $z_1(d_1)$ y $z_2(d_1)$, similar a como se razonó en la prueba del Lema 4.2, permite verificar que $z_1(d)$ debe estar en $(z_1(d_1) - \rho_1, z_1(d_1) + \rho_1)$. Además, en $[z_2(d_1) + \rho_2, 1 - \delta]$, con δ lo suficientemente pequeño (puede ser 0), se cumple que $u(r, d) > 0$. Al saber que entre $z_1(d)$ y $z_2(d)$ la solución $u(r, d)$ es negativa, se debe cumplir que $z_2(d) < 1$, contradiciendo el hecho de que $d \in A_1$.

Concluimos que $z_2(d_1) = 1$, y así, $d_1 \in A_1$ y $u(1, d_1) = 0$.

De manera completamente análoga se prueba la existencia de $d_2 = \text{ínf}\, A_2$ de manera que $0 < d_2 < d_1 < d_0$, $d_2 \in A_2$ y $u(1, d_2) = 0$.

El razonamiento se puede aplicar inductivamente, y se logra ver que para todo valor de $k \geq 0$ se cumple el teorema. $\square$

Referencias

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[2] Alfonso Castro, Jorge Cossio, Sigifredo Herrón, and Carlos Vélez. Infinitely many radial solutions for a p-laplacian problem with negative weight at the origin. *Electronic Journal of Differential Equations*, Special Issue 01:101–114, 2021.

[3] Jorge Cossio, Sigifredo Herrón, and Carlos Vélez. Infinitely many radial solutions for a p-laplacian problem p-superlinear at the origin. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376:741–749, 2011.

[4] J.I. Díaz. *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries: Elliptic equations*, volume I of *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries*. Pitman, 1985.

[5] Petr Girg, Lukáš Kotrla, and Anežka Švandová. The p-laplacian: phenomenological modelling of the flow in porous media and cfd simulations, 2024.

[6] Sigifredo Herrón and Emer Lopera. Signed radial solutions for a weighted p-superlinear problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(24):1–13, 2014.

[7] Joseph A. Iaia. Radial solutions to a p-laplacian dirichlet problem. *Applicable Analysis*, 58(3):335–350, 1995.

[8] Gary M. Lieberman. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis*, 12:1203–1219, 1988.

[9] L. Nirenberg. Variational and topological methods in nonlinear problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4(3):267–302, 1981.

[10] S. H. Rasouli. An ecological model with the p-laplacian and diffusion. *International Journal of Biomathematics*, 09(01):1650008, 2016.

[11] Wolfgang Reichel and Wolfgang Walter. Radial solutions of equations and inequalities involving the p-laplacian. *Journal of Inequalities and Applications*, 1:47–71, 1997.

[12] Peter Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *Journal of Differential Equations*, 51:126–150, 1984.