

Fórmulas explícitas y cuerpos p -ádicos

JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

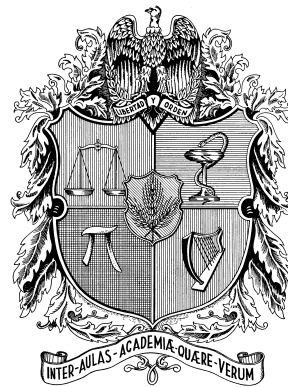
2020

Fórmulas explícitas y cuerpos p -ádicos

JOSÉ ANDRÉS QUINTERO CAMPO
MATEMÁTICO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO
MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DIRECTOR
JOHN JAIME RODRIGUEZ, PH. D
DOCTOR EN MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2020

Título en español:

Fórmulas explícitas y cuerpos p -ádicos.

Título en inglés:

Explicit Formulae and p -adic fields.

Resumen: El estudio de la fórmulas explícitas ha sido abordado muy extensamente a lo largo de los años, produciendo como resultado profundas conexiones entre la teoría de números, el análisis armónico y el álgebra conmutativa, entre otras áreas de las matemáticas. En este trabajo estaremos principalmente interesados en revisar la fórmula explícita Haran, haciendo una exposición desde sus bases conceptuales y herramientas teóricas involucradas.

Abstract: Explicit formulae has been extensively studied through the years, producing deep connections between number theory, harmonic analysis and commutative algebra, among other branches of mathematics. In this work we will be mainly interested in reviewing the explicit formula of Haran, given an exposition from its conceptual bases and theoretical tools.

Palabras clave: Fórmulas explícitas, función zeta, p -ádicos, adeles, núcleo de Riesz.

Keywords: Explicit formulae, zeta function, p -adic, adeles, Riesz kernel.

Agradecimientos

Especialmente, quiero agradecer a mi madre, María, por todo su apoyo y afecto, el cual fue fundamental para sacar adelante este trabajo en tiempos de crisis. Agradezco también al profesor John Jaime Rodríguez, por su colaboración, su paciencia, y su valiosos comentarios acerca del trabajo. Y finalmente, quiero expresar toda mi gratitud a mis amigos José David Beltrán y Carlos Uzcátegui, que han sido también una importante fuente de apoyo a lo largo de mis estudios de maestría.

Introducción

Todo el desarrollo matemático de las fórmulas explícitas tiene su origen en el trabajo de teoría analítica de números de Bernhard Riemann, el cual fue condensado en un artículo de pocas páginas y cuyo título traducido al español, es *Sobre la cantidad de números primos menores que una magnitud dada*. En él se sientan las bases de la demostración del teorema de los números primos, y se introduce la función zeta de Riemann como un objeto fundamental dentro de la teoría números.

Sin embargo, antes de hablar sobre las ideas de Riemann, es necesario mencionar algunos precedentes importantes. El primero de ellos fue el que estableció Euler en el siglo XVIII, cuando demostró que

$$\sum_p \frac{1}{p} \rightarrow +\infty,$$

cuando p recorre los primos. De esta forma Euler prueba nuevamente que los números primos son infinitos, pero esta vez usando métodos analíticos. Aún más, Euler además parece escribir de forma casi críptica que

$$\sum_p \frac{1}{p} = \log \log \infty,$$

lo que hoy se entiende como la afirmación de que $\sum_{p \leq n} p^{-1}$ crece de forma similar a $\log(\log n)$.

Este resultado encontrado por Euler, admite una interpretación bastante reveladora cuando pensamos en general, en las series de la forma

$$\sum_{k \in X} \frac{1}{k},$$

con $X \subseteq \mathbb{Z}^+$. En el caso en el que $X = \mathbb{Z}^+$, obtenemos la serie armónica, la cual sabemos diverge de forma parecida a $\log n$. Sin embargo, en el caso en el que X es el conjunto de cuadrados, pese a que tiene la misma cardinalidad de \mathbb{Z}^+ , sus elementos están más “espaadamente” distribuidos, lo que hace que la serie converja, y de hecho sabemos que lo hace al valor $\pi^2/6$. Es decir, que en el caso de los números primos, estos son más densos que los cuadrados, pero a la vez son lo suficientemente escasos como para que la serie diverja a la velocidad de $\log(\log n)$, muy por debajo de la serie armónica. De esta forma gracias a Euler, obtuvimos cientos de años después de la prueba de Euclides de la infinitud de los primos, la primera pista sobre cómo están distribuidos los números primos, y las herramientas necesarias con las que podemos dilucidar dicha cuestión.

Ya a principios del siglo XIX, Gauss y Legendre, de forma independiente, inspirados por el trabajo de Euler y respaldados con el cálculo de tablas, conjeturaron la siguiente mejora del teorema de Euclides:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x = 1$$

donde $\pi(x)$ es el número de primos menores que x . Esto significa que para valores grandes de x , el promedio de primos disminuye tanto como $1/\log x$, a la vez que la cantidad de primos crece de forma parecida a $x/\log x$. De hecho, Legendre propuso la función

$$\frac{x}{\log x + A}$$

con $A = -1,08366$, como una buena aproximación de $\pi(x)$ para valores grandes de x .

Es en este contexto en el que se desarrollan las ideas de Riemann, que más que aproximación o una estimación asintótica, buscaba dar con una fórmula exacta para $\pi(x)$. El punto de partida de Riemann fue la factorización encontrada por Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

válida cuando $\Re(s) > 1$, y con p recorriendo los primos. En su trabajo Riemann introduce la notación $\zeta(s)$ para la función de variable compleja que define la serie $\sum n^{-s}$ cuando es convergente, y extiende el dominio de la función a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, encontrando además la ecuación funcional

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

en donde $\Gamma(s)$ es la función gamma de Euler. Ya de vuelta al producto encontrado por Euler para la función $\zeta(s)$, Riemann propone despejar usando la maquinaria del análisis complejo, la función $\pi(x)$ en términos de $\zeta(s)$. Para ello se vale de la función auxiliar

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n},$$

para la que encuentra la fórmula

$$F(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t} - \log 2,$$

donde $Li(x)$ es el logaritmo integral, y ρ recorre los ceros no reales de $\zeta(s)$, ordenados de acuerdo al valor absoluto de sus partes imaginarias. Al final Riemann despeja de $\pi(x)$ en términos de una serie que involucra a $F(x)$, con lo que obtiene así una fórmula exacta para contar los primos.

Posteriormente al trabajo de Riemann, otras fórmulas fueron encontradas, similares a las que satisface $F(x)$ en relación a los ceros de la función $\zeta(s)$, y que hoy llamamos *fórmulas explícitas*. Especialmente notable es el aporte de Weil, quien generaliza este tipo de expresiones para funciones L de Dirichlet asociadas a cuerpos de números algebraicos (funciones L de Hecke, ver [11]). La fórmula que Weil encontró para una función $L(s)$ definida a partir de un cuerpo numérico k , tiene la forma

$$\sum_{\rho} \Phi(\rho) = \sum_{\mathfrak{p}} V_{\mathfrak{p}}(f) + A,$$

donde ρ recorre los ceros complejos de $L(s)$; \mathfrak{p} recorre los ideales primos del anillo de enteros de k ; $V_{\mathfrak{p}}(f)$ es una expresión que depende de \mathfrak{p} ; A recoge otras expresiones que involucran a f , y finalmente $\Phi(s)$ es la transformada integral de f

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx.$$

De especial importancia es en el trabajo de Weil, el uso de adeles e ideles. Sin embargo, en [2] Haran presenta una fórmula explícita para la función zeta de Riemann, que explota en mucho mayor medida el lenguaje adélico. En esta fórmula nos centraremos, y básicamente consiste en una expresión de la forma

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} T(\tilde{f})(q) = \sum_{\rho} \widehat{f}(\rho) - \widehat{f}(1) - \widehat{f}(0),$$

donde ρ nuevamente recorre los ceros no triviales de $\zeta(s)$; $\widehat{f}(s)$ es la transformada de Mellin de $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$; T es un operador lineal sobre un cierto espacio vectorial de funciones en los ideles, y finalmente \tilde{f} es una codificación de f como una función en dicho espacio vectorial.

Dos cosas son fundamentales en la fórmula explícita de Haran: una es que la codificación que se hace de $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ como función en ideles, es de tal forma que $\widehat{f}(s)$ coincide con la transformada de Mellin adélica de \tilde{f} , lo que hace que la fórmula se pueda enunciar completamente usando el lenguaje de adeles; y la otra cosa es que la construcción del operador lineal T involucra de forma vital al núcleo de Riesz, tanto en su versión clásica, como en las versiones p -ádicas definidas por Haran. Revisar estos detalles y demostrar la fórmula de Haran es el objetivo de este trabajo.

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Transformada de Fourier	9
1.2. Transformada de Mellin	12
1.3. Función Gamma	15
1.4. Función zeta de Riemann	21
2. Cuerpos p-ádicos y adeles	27
2.1. Números p -ádicos	27
2.2. Anillo de adeles	31
2.3. Integración y transformada de Fourier	33
2.4. Distribuciones	35
2.5. Transformada de Mellin	35
3. Fórmula explícita	39
3.1. Funciones zeta locales	39
3.2. Núcleo de Riesz	41
3.3. Fórmula explícita de Weil	46
3.4. Fórmula explícita de Haran	52
Bibliografía	62

Capítulo 1

Preliminares

Siguiendo un enfoque básico, presentaremos las herramientas conceptuales del análisis real y complejo, justas y necesarias para abordar el estudio de las fórmulas explícitas. Intentaremos ser lo más completos posibles y solo supondremos algo de familiaridad con la teoría de la medida y el lenguaje de las distribuciones, mas no ningún resultado avanzado o especializado. Lo mismo exigimos en el caso del análisis complejo, no usaremos ningún teorema avanzado y solo con teoría básica haremos la construcción de la función gamma y zeta de Riemann (ver [1]).

1.1. Transformada de Fourier

Recordemos que la transformada de Fourier de una función f en $L^1(\mathbb{R})$, se define como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

Como consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx, \end{aligned}$$

siempre que $xf \in L^1$. Así, por inducción se tiene que si $x^k f \in L^1$ para todo entero no negativo k , entonces $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Una forma en la que esto se logra, es cuando consideramos las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que para cada j, k enteros positivos

$$\sup_x |x^j f^{(k)}(x)| < +\infty.$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la anterior condición, decimos entonces que $f(x) + ig(x)$ es un función de Schwartz, y denotamos el conjunto de tales funciones como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Este conjunto se puede dotar de una estructura de espacio vectorial topológico muy bien descrita en [8], siendo las distribuciones temperadas los funcionales lineales continuos de este espacio.

Teorema 1.1.1. *Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.*

Demostración. En efecto, vemos primero que la transformada de Fourier se puede ver en este caso como una integral compleja

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi + \xi^2)} dx \\ &= e^{-\pi \xi^2} \int_{\mathcal{J}(s)=\xi} e^{-\pi s^2} ds.\end{aligned}$$

Si consideramos por lo tanto la integral de línea sobre el rectángulo con vértices

$$\{\pm R, \pm R + i\xi\},$$

entonces por el Teorema de Cauchy al tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ resulta

$$\int_{\mathcal{J}(s)=\xi} e^{-\pi s^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Es decir, que $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. □

Teorema 1.1.2. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx$$

Demostración. Vemos primero que si $g \in L^1$, entonces cada sección de $F(x, \xi) = g(\xi) f(x) e^{-2\pi i \xi x}$ está en L^1 , ya que $|F(x, \xi)| = |g(\xi)| |f(x)|$. Luego al aplicar el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx.\end{aligned}$$

Esto es útil porque si en particular $g_h(\xi) = e^{-\pi h \xi^2} e^{2\pi i \xi a}$ para algún a fijo, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi h \xi^2} e^{2\pi i a \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi h \xi^2} e^{2\pi i (a-x)\xi} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\pi \frac{(a-x)^2}{h}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-\pi \frac{x^2}{h}} dx.\end{aligned}$$

En este punto podemos tratar la integral

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\pi \frac{(a-x)^2}{h}} dx$$

directamente haciendo algunos cálculos, pero al final, al estar $f(x+a) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ podemos empaquetar muchas cuentas usando la teoría de distribuciones. Más precisamente, las funciones g_h tienden a la δ de Dirac en el sentido de las distribuciones, cuando $h \rightarrow 0$. Por lo tanto podemos formal y tranquilamente escribir

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-\frac{\pi x^2}{h}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \delta(x) dx \\ &= f(0+a) = f(a). \end{aligned}$$

Finalmente contrastamos el límite anterior con el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi h \xi^2} e^{2\pi i a \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi} d\xi,$$

el cual se tiene por el teorema de la convergencia dominada, debido a que para $h > 0$

$$\left| \widehat{f}(\xi) e^{-\pi h \xi^2} e^{2\pi i a \xi} \right| \leq \left| \widehat{f}(\xi) \right|$$

y $\widehat{f} \in L^1$.

Es decir, hemos probado que para a arbitrario,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi} d\xi = f(a).$$

□

Teorema 1.1.3 (Fórmula de sumación de Poisson). *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

Demostración. Afirmando primero que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, con f real, entonces

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

converge uniformemente sobre compactos. En efecto, si $|x| \leq r$, por las condiciones de decaimiento de f se puede encontrar una constante M_r y una sucesión $\{c_n\}_n$ tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)| \leq M_r \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n < +\infty.$$

Como las derivadas de f también se encuentran en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la convergencia uniforme sobre compactos también se da para

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f^{(k)}(x+n).$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Resulta entonces que F es periódica y que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que su

serie de Fourier converge. En particular, al evaluar la serie de Fourier en cero tenemos

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i k x} dx \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k).
 \end{aligned}$$

Luego, por la definición de $F(0)$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

□

1.2. Transformada de Mellin

Antes de definir la transformada de Mellin, revisaremos unos cuantos resultados del análisis complejo tomados de [1]. Recordamos también la notación de la O grande, con la que decimos que $f(s) = O(g(s))$ cuando existe una constante M tal que $|f(s)| \leq M |g(s)|$, generalmente cuando $|s|$ es lo suficientemente grande, aunque también se usan otras condiciones. De hecho es común escribir $f(s) = O_x(g(s))$ cuando M y g dependen de algún parámetro x .

Teorema 1.2.1. *Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones holomorfas que convergen uniformemente a f en cada subconjunto compacto de un abierto Ω , entonces f es holomorfa en Ω .*

Demostración. Como $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones holomorfas, en particular es una sucesión de funciones continuas. Por lo tanto ya la convergencia uniforme preserva la continuidad, es decir que f es continua. Sea ahora T un camino cerrado contenido en Ω , nuevamente por la convergencia uniforme sobre T , tenemos el límite

$$\int_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n.$$

Como cada f_n es holomorfa el Teorema de Cauchy nos garantiza que cada $\int_T f_n$ se anula, y por lo tanto

$$\int_T f = 0.$$

Así, el Teorema de Morera nos permite concluir que f es holomorfa. □

Teorema 1.2.2. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente a una función holomorfa f , en cada subconjunto compacto de un abierto Ω . Entonces $f'_n(s) \rightarrow f'(s)$ para todo $s \in \Omega$.*

Demostración. Sea $s \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe un disco cerrado $\overline{D}(s; \delta) \subseteq \Omega$ para algún $\delta > 0$. Sabemos por la fórmula integral de Cauchy que

$$f'_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(s; \delta)} \frac{f_n(z)}{(z-s)^2} dz.$$

Luego, por la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}_n$, y siendo $|z-s|$ constante en la frontera del disco, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(s; \delta)} \frac{f_n(z)}{(z-s)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(s; \delta)} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz = f'(s).$$

□

Teorema 1.2.3. *Si $F(s, x)$ es continua en $\Omega \times [a, b]$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y F holomorfa en s , entonces*

$$f(s) = \int_a^b F(s, x) dx$$

es holomorfa.

Demostración. Sea T un camino cerrado contenido en Ω . Como $F(s, x)$ es continua entonces es medible y

$$\int_T \int_a^b |F(s, x)| dx ds < +\infty.$$

Luego por el Teorema de Fubini y el Teorema de Cauchy

$$\int_T \int_a^b F(s, x) dx ds = \int_a^b \int_T F(s, x) ds dx = 0.$$

Concluimos entonces por el Teorema de Morera que $f(s)$ es analítica. □

Teorema 1.2.4. *Sea $f : [0, +\infty)$ una función acotada, continua a tramos y con $f(x) = O_t(x^{-t})$ para cada $t > 0$. Entonces para todo s con $\Re(s) > 0$ existe*

$$\mathcal{M}^s(f) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$$

y define una función holomorfa.

Demostración. Sean $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ reales positivos tales que f es continua en los intervalos (x_k, x_{k+1}) para cada $k < n$, además de serlo en $[0, a)$ y $[b, +\infty)$. Por el Teorema 1.2.3 sabemos que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)x^{s-1} dx$$

define para cada $k < n$ una función entera, por lo que nos centramos entonces en las integrales sobre $[0, a)$ y $[b, +\infty)$. Primero vemos que $\int_0^a f(x)x^{s-1} dx$ existe para $s = \sigma + it$ con $\sigma > 0$, puesto que

$$\int_0^a |f(x)x^{s-1}| dx \leq M \frac{a^\sigma}{\sigma}$$

para alguna constante M , la cual existe porque f es acotada. De hecho, para s con $\delta \leq \Re(s) \leq d$ el mismo cálculo nos arroja que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a f(x)x^{s-1}dx - \int_{1/n}^a f(x)x^{s-1}dx \right| &\leq \int_0^{1/n} |f(x)x^{s-1}| dx \\ &\leq \frac{Md}{n^\delta} \end{aligned}$$

lo que significa que siempre que $\delta > 0$

$$\int_{1/n}^a f(x)x^{s-1}dx \rightarrow \int_0^a f(x)x^{s-1}dx,$$

siendo además esta convergencia uniforme para cualquier compacto contenido en $\{s : \Re(s) > 0\}$. De esta forma, como tenemos una sucesión de funciones holomorfas por el Teorema 1.2.3, concluimos por el Teorema 1.2.1 que $\int_0^a f(x)x^{s-1}dx$ define una función holomorfa en $\{s : \Re(s) > 0\}$.

Con esto hemos garantizado la existencia y analiticidad de $\int_0^b f(x)x^{s-1}dx$, y de forma parecida podemos hacer lo mismo con

$$\int_b^\infty f(x)x^{s-1}dx,$$

ya que para cada compacto T contamos con la estimación

$$\int_b^{b+n} |f(x)x^{s-1}| dx = O_T(n^{-1}).$$

□

Teorema 1.2.5. Si $f \in C_0^1(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$\mathcal{M}^s(f(x)x^a) = -\frac{\mathcal{M}^s(f'(x)x^{a+1})}{s+a}$$

Demostración. Integración por partes. □

Teorema 1.2.6 (Fórmula de inversión de Mellin). Sea $a > 0$ y $f \in C^\infty([0, +\infty))$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{M}^s(f)x^{-s} ds,$$

si $f(x) = 0$ si $x > x_0$ para cierto x_0 , y f sea constante cerca al origen.

Demostración. En general, si f es medible y $\mathcal{M}^{a+it}(f)$ existe, entonces a través del cambio de variable $x = e^y$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{a+it}(f) &= \int_0^\infty f(x)x^a x^{it} \frac{dx}{x} \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(e^y)e^{ay} e^{ity} dy. \end{aligned}$$

Observamos ahora que cuando $|y|$ es lo suficientemente grande, o bien $f(e^y)e^{ay}$ se anula, o

$$f(e^y)e^{ay} = Ce^{ay}$$

para algún C . Así, como $a > 0$, entonces $f(e^y)e^{ay}$ se encuentra de forma inmediata en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, y por lo tanto, $\mathcal{M}^{a+it}(f)$ también está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como función de t , al ser la transformada de Fourier inversa de $f(e^y)e^{ay}$. Luego por el Teorema 1.1.2

$$f(e^y)e^{ay} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^{a+it}(f)e^{-ity} dt,$$

aunque si $x = e^y$, nos queda que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^{a+it}(f)x^{-a-it} dt.$$

Es decir, que haciendo $s = a + it$ (esto es, con $\frac{ds}{dt} = i$), concluimos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{M}^s(f)x^{-s} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^{a+it}(f)x^{-a-it} dt \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Una observación importante que podemos hacer, es que tanto la transformada de Fourier como la transformada de Mellin se pueden escribir como

$$\int_G f(x)\chi(x, s)dx$$

donde G es un grupo abeliano, que en el caso de la transformada de Mellin es \mathbb{R}^+ , y en el caso de la transformada de Fourier es el grupo aditivo de \mathbb{R} , siendo en ambos casos $\chi(x, s)$ una familia de homomorfismos $G \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizados por s . Esto es algo que se puede entender mejor usando el lenguaje de los grupos abelianos localmente compactos y la dualidad de Pontryagin.

1.3. Función Gamma

La forma estándar de definir la función gamma de Euler, es definiéndola primero en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$, usando una integral impropia, y luego haciendo una continuación analítica con ayuda de una ecuación funcional. Este enfoque lo podemos encontrar en [1] y [7].

Sin embargo, aquí optamos por otro camino, que es definir la función gamma de forma más parecida a como lo hizo Euler, es decir, con un producto infinito. Evitaremos usar teoría avanzada del análisis complejo, como los teoremas de factorización de Weierstrass y Hadamard, con frecuencia usados en el estudio de la función gamma y la función zeta de Riemann. En vez de esto, haremos algo parecido a lo que se encuentra en el capítulo 5 de [1], en donde se obtiene la factorización de $x^{-1} \sin x$ usando métodos elementales de variable compleja.

Lema 1.3.1. *Sea $\{f_k\}_k$ una sucesión de funciones complejas uniformemente acotadas, y para la que existe una sucesión de reales $\{c_k\}_k$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty \quad \text{y} \quad |f_k(s) - 1| \leq c_k$$

entonces $\prod_{k=1}^n f_k(s)$ converge uniformemente.

Demostración. Sea

$$F_n = \prod_{k=1}^n f_k(s),$$

reescribimos $F_n(s)$ como

$$F_n(s) = F_1(s) + \sum_{k=1}^{n-1} \{F_{k+1}(s) - F_k(s)\}.$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |F_{k+1}(s) - F_k(s)| &= \sum_{k=1}^{n-1} |f_{k+1}(s)F_k(s) - F_k(s)| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} |F_k(s)| |f_{k+1}(s) - 1| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} M |f_{k+1}(s) - 1| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} c_k \end{aligned}$$

Luego por el criterio M de Weierstrass tenemos que F_n converge uniformemente. \square

Lema 1.3.2. *Ocurre que*

$$(1-s)e^s - 1 = O(s^2)$$

cuando $s \rightarrow 0$.

Demostración. Observamos que al ser $f(w) = e^w$ holomorfa en cero, entonces para algún C

$$\left| \frac{e^w - 1}{w} \right| \leq C,$$

siempre que $1 < |w| \leq 1$. O, lo que es lo mismo $|e^w - 1| \leq C|w|$ para todo w tal que $|w| \leq 1$. De esta forma para s lo suficiente pequeño en módulo se tiene que

$$\begin{aligned} |(1-s)e^s - 1| &= \left| e^{\log(1-s)+s} - 1 \right| \\ &\leq C |\log(1-s) + s| \\ &\leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|s|^n}{n}. \end{aligned}$$

Si además, suponemos que $|s| \leq 1/2$, encontramos que $|(1-s)e^s - 1| \leq 2C|s|^2$. \square

Teorema 1.3.3. *Denotando por γ a la constante de Euler-Mascheroni, tenemos que el producto*

$$se^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

converge siempre a una función entera cuyo recíproco cuando existe lo denotamos por $\Gamma(s)$.

Demostración. Observamos que si $|s| \leq a$, entonces por el Lema 1.3.2 existe una constante b tal que

$$\left| \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} - 1 \right| \leq \frac{ab}{k^2}$$

para todo entero positivo k . Luego, como

$$ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

entonces por el Lema 1.3.1 tenemos que el producto

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

converge uniformemente en cada compacto, y por el Teorema 1.2.1 se tiene que su límite es una función entera. \square

Proposición 1.3.4. *Para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{s+k} \right)$$

Demostración. Consideramos los productos parciales

$$F_n(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}}.$$

Para s con $\Re(s) > 0$, $F_n(s)$ es analítica y no se anula para ningún n . Por lo que siendo F_n de la forma

$$\prod_{k=1}^n f_k(s)$$

consideramos el cociente

$$\frac{F'_n(s)}{F_n(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(s)}{f_k(s)}$$

que en este caso es, al ser la derivada de $\left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k+s} e^{\frac{s}{k}}$, la función

$$\left(\frac{-k e^{\frac{s}{k}}}{(k+s)^2} + \frac{e^{\frac{s}{k}}}{k+s} \right) \frac{k+s}{k e^{\frac{s}{k}}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{s+k}$$

tenemos que

$$\frac{F'_n(s)}{F_n(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{s+k} \right),$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{F'_n(s)}{F_n(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} + s \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(s+k)}.$$

Así, finalmente no es difícil ver usando los Teorema 1.2.2 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(s)}{F_n(s)} = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)},$$

con lo que se llega a lo que se quería probar. \square

Teorema 1.3.5. *Se tiene que*

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} n^s$$

y además que $\Gamma(s) = s\Gamma(s+1)$.

Demostración. Reescribimos el producto como

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} n^s = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}} n^s.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}} n^s &= \prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}} e^{s \log n} \\ &= e^{-s(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)} \end{aligned}$$

Luego, como se tiene el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma,$$

entonces por continuidad existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}} n^s = e^{-s\gamma}.$$

Así, tenemos por lo tanto que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} n^s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}} n^s \\ &= \Gamma(s) \end{aligned}$$

Una vez probada la primera parte del enunciado, vemos que ya que existe el límite de

$$\frac{1}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} n^s = \frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+s},$$

entonces al cambiar a s por $s+1$, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{n^{s+1}}{s+1} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+(s+1)} &= n^{s+1} \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(2+s)} \cdot \frac{2}{(3+s)} \cdots \frac{n}{(n+1+s)} \\ &= n^s \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{2}{(2+s)} \cdot \frac{3}{(3+s)} \cdots \frac{n}{(n+s)} \cdot \frac{n}{n+1+s} \\ &= \left(\frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+(s+1)} \right) \frac{n}{n+1+s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1+s} = 1$$

para todo s , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s+1}{k}\right)^{-1} n^{s+1} = \frac{\Gamma(s)}{s},$$

con lo que se verifica la ecuación funcional $\Gamma(s) = s\Gamma(s+1)$. \square

Corolario 1.3.6. *Tenemos los siguientes valores notables*

i) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

ii) $\Gamma'(1) = -\gamma$

iii) $\Gamma'(1/2) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \log 2)$.

Demostración. Para ver i) hacemos uso del producto de Wallis. En efecto, al hacer $s = 1/2$ tenemos por el Teorema 1.3.5

$$\Gamma(1/2) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \\ &= 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Veamos ahora ii) y iii). En efecto, primero por la propiedad telescópica

$$\begin{aligned} \Gamma'(1) &= \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= -\gamma. \end{aligned}$$

Y luego

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}} &= -\gamma - 2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= -\gamma - 2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \\ &= -\gamma - 2 + 2(1 - \log 2) \\ &= -\gamma - \log 2. \end{aligned}$$

\square

Teorema 1.3.7. Para s con $\Re(s) > 0$ se cumple que

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}^s(e^{-t}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Demostración. Por el Teorema 1.2.4 sabemos que $\mathcal{M}^s(e^{-t})$ existe y que es una función holomorfa de s cuando $\Re(s) > 0$. Además, la integración por partes nos da para $\varepsilon > 0$ que

$$\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^s dt = [-e^{-t} t^s]_\varepsilon^{1/\varepsilon} + s \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Por lo tanto al tomar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ encontramos que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^s dt = s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

esto es $\mathcal{M}^{s+1}(e^{-t}) = s\mathcal{M}^s(e^{-t})$.

Por simplicidad denotamos $\Gamma_0(s) = \mathcal{M}^s(e^{-t})$. La idea ahora es hallar la continuación analítica de $\Gamma_0(s)$. Para ello observamos que siempre que $\Re(s) > -1$ y $s \neq 0$, entonces

$$\frac{\Gamma_0(s+1)}{s}$$

es holomorfa, coincidiendo además con $\Gamma_0(s)$ cuando $\Re(s) > 0$. De hecho, en general, si n es un entero positivo y

$$s \in \{s \in \mathbb{C} : -n < \Re(s)\} \setminus \{0, -1, \dots, -n\},$$

entonces

$$\frac{\Gamma_0(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

es una continuación analítica de $\Gamma_0(s)$. Así, como n puede ser arbitrario, eso quiere decir que hemos encontrado una continuación analítica de $\Gamma_0(s)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

Por otra parte un sencillo cálculo directo arroja que

$$\Gamma_0(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

lo que implica junto con la ecuación funcional $\Gamma_0(s) = s^{-1}\Gamma_0(s+1)$, que $\Gamma_0(s)$ tiene un polo simple en el origen. Usando recursivamente la ecuación funcional se obtiene también que $\Gamma_0(s)$ tiene polos simples en todos los enteros negativos.

Solo resta por lo tanto ver que $\Gamma_0(s) = \Gamma(s)$. Para ello vemos que la función

$$\Gamma_0(s) s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

es entera, puesto que todos los polos simples de $\Gamma_0(s)$ se cancelan con los ceros del producto infinito. Además, para cualquier complejo $s \notin \mathbb{Z}$ siempre podemos encontrar un entero n tal que $1 < \Re(s+n) < 2$, por lo que usando que $\Gamma_0(s)$ y $\Gamma(s)$ satisfacen la misma ecuación funcional encontramos que

$$\frac{\Gamma_0(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\Gamma_0(s+n)}{\Gamma(s+n)}.$$

Ahora, como $\Gamma_0(s)/\Gamma(s)$ es en particular continua en el intervalo $[1, 2]$, entonces para $s = \sigma + it$ con $\sigma \notin \mathbb{Z}$, existe alguna constante M tal que

$$\left| \frac{\Gamma_0(s)}{\Gamma(s)} \right| = \left| \frac{\Gamma_0(s+n)}{\Gamma(s+n)} \right| \leq \left| \frac{\Gamma_0(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma+n)} \right| \leq M.$$

De hecho no es difícil ver que en el límite el cociente $\Gamma_0(s)/\Gamma(s)$ se hace 1 cuando s es entero, por lo que llegamos a que

$$\Gamma_0(s)se^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

es una función entera y acotada. Luego por el Teorema de Liouville se tiene que es constante e igual a 1 en este caso. Con lo que concluimos la demostración. \square

1.4. Función zeta de Riemann

En esta sección convergen prácticamente todos los resultados de las secciones anteriores.

Proposición 1.4.1. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge cuando $\Re(s) > 1$, y define una función holomorfa en su dominio de convergencia, que denotamos como $\zeta(s)$.

Demostración. Veamos primero que si $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \\ &< 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n x^{-\sigma} dx \\ &= 1 + \int_1^{\infty} x^{-\sigma} dx = 1 + (\sigma - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego hay convergencia uniforme sobre los compactos que están contenidos en $\{s : \Re(s) > 1\}$, y por el Teorema 1.2.1 $\zeta(s)$ es analítica. \square

Teorema 1.4.2 (Euler). *Para $\Re(s) > 1$, se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

con p recorriendo los primos.

Demostración. En efecto, al desarrollar el producto

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \leq N} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots)$$

por la convergencia absoluta los términos resultantes se pueden organizar de cualquier forma, quedando una serie de la forma

$$\sum \frac{1}{(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k})^s},$$

la cual, por el teorema fundamental de la aritmética coincide con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ cuando $N \rightarrow \infty$. \square

Antes de enunciar el siguiente teorema, definimos la función de Von Mangolt, denotada como $\Lambda(n)$, que es igual a un número primo p , si el argumento es una potencia entera de p , y en caso contrario es igual a cero.

Teorema 1.4.3. *Si $\Re(s) > 1$, entonces*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Demostración. Observamos primero que si numeramos los primos $\{2, 3, 5, \dots, p_n, \dots\}$, entonces el hecho de que

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} (1 - p^{-s}) = 1$$

implica por el Teorema 1.4.2 que

$$\left| \frac{1}{\zeta'(s)} \right| > 0.$$

Además, si s es tal que $1 \leq \Re(s) \leq r$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - p_n^{-s} - 1| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-r} < \zeta(r).$$

Esto significa por el Teorema 1.3.1, que

$$\frac{1}{F_m(s)} = \prod_{p_n=1}^m (1 - p_n^{-s})$$

converge uniformemente a $1/\zeta(s)$ en cada compacto de $\{s : \Re(s) > 1\}$. Luego por el Teorema 1.2.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{ds} \frac{1}{F_n(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{F_n'(s)}{F_n(s)^2} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)^2}.$$

Sin embargo, ya que también $F_n(s) \rightarrow \zeta(s)$. Se da entonces al multiplicar las derivadas $1/F_n(s)$ por $F_n(s)$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{F_n'(s)}{F_n(s)} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

De esta forma, como a su vez

$$\begin{aligned}
 \frac{F'_n(s)}{F_n(s)} &= \sum_{k=1}^n (1 - p_k^{-s}) \frac{d}{ds} (1 - p_k^{-s})^{-1} \\
 &= - \sum_{k=1}^n (1 - p_k^{-s})^{-1} \log p_k \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_k^{-js} \right) \log p_k \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_k^{-js} \Lambda(p_k^j) \right).
 \end{aligned}$$

Esta última parte, usando el hecho de que hay convergencia absoluta y que por lo tanto se pueden reorganizar los términos, la podemos reescribir como

$$-\frac{F'_n(s)}{F_n(s)} = \sum_{k \leq p_n} \frac{\Lambda(k)}{k^s}.$$

Así, haciendo tender a n al infinito, llegamos a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

□

Teorema 1.4.4. *La función $\zeta(s)$ admite una continuación analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ que además satisface la ecuación funcional*

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Demostración. A través del cambio de variable $t = \pi n^2 x$, y usando el Teorema 1.3.7, vemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}} n^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \\
 &= \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{\frac{s}{2}} n^s},
 \end{aligned}$$

siempre que $\Re(s) > 0$. Vemos también que si $s = \sigma + iu$, entonces

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{\sigma}{2}-1} dx,$$

por lo que si además, $\sigma > 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 \pi^{-\frac{\sigma}{2}} \zeta(\sigma) \Gamma(\sigma/2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma/2)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}} n^{\sigma}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{\sigma}{2}-1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \right) x^{\frac{\sigma}{2}-1} dx,
 \end{aligned}$$

pudiendo intercambiar el signo de integral con el de la sumatoria gracias al teorema de la convergencia monótona.

De esta forma, aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que si $\Re(s) > 1$, se tiene la identidad

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(s/2) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \right) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Esto motiva a definir para cada $x \in \mathbb{R}^+$, la función $g_x(t) = e^{-\pi x t^2}$. De inmediato observamos que por el Teorema 1.1.1

$$\begin{aligned} \widehat{g}_x(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x t^2} e^{-2\pi i t \xi} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi u^2} e^{-\frac{2\pi i \xi}{\sqrt{x}} u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{x}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto al aplicar la fórmula de sumación de Poisson (Teorema 1.1.3) encontramos que

$$\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\frac{\pi n^2}{x}}.$$

Esta relación se expresa de forma más compacta al usar la notación

$$\vartheta(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x},$$

quedando como

$$2\vartheta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right),$$

para todo $x > 0$. Ya con esta una nueva notación escribimos

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(s/2) = \int_0^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

y aplicando de la ecuación funcional encontrada para $\vartheta(x)$ vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx &= \int_1^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \vartheta(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1+s}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Es decir, que para un complejo s con $\Re(s) > 1$, se tiene que

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(s/2) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \vartheta(x) x^{\frac{1+s}{2}} dx.$$

En este punto nos detenemos para hacer ciertas consideraciones sobre el lado derecho de igualdad. Primero, definimos para cada entero positivo n , la función $\phi_n(x)$ que es cero en $[0, 1)$ y $e^{-\pi n^2 x}$ si $x > 1$. Así, por el Teorema 1.2.4 vemos que al fijar a real, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s(\phi_n(x)x^{a+1}) &= \int_0^\infty \phi_n(x)x^{a+1}x^{(s-a)-1}dx \\ &= \int_1^\infty e^{-\pi n^2 x}x^s dx \end{aligned}$$

es analítica para todo s tal que $\Re(s) > a$. Como a es se puede tomar arbitrariamente, resulta entonces que

$$\int_1^\infty e^{-\pi n^2 x}x^s dx$$

es una función entera para cada n . Además, si $s \in \{w \in \mathbb{C} : -r \leq \Re(w) \leq r\}$ para algún $r \in \mathbb{Z}^+$ fijo, vemos también que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty |\mathcal{M}^s(\phi_n(x)x)| &\leq \sum_{n=1}^\infty \mathcal{M}^n(\phi_n(x)x) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty e^{-\pi n^2 x}x^r dx \\ &= \int_1^\infty \vartheta(x)x^r dx = \pi^{-r+1}\zeta(2(r+1))\Gamma(r+1) < +\infty \end{aligned}$$

Luego por el criterio M de Weierstrass $\sum \mathcal{M}^s(\phi_n(x)x)$ converge uniformemente en todo compacto, y se concluye usando el Teorema 1.2.1 que

$$\sum_{n=1}^\infty \mathcal{M}^s(\phi_n(x)x) = \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty e^{-\pi n^2 x}x^s dx = \int_1^\infty \vartheta(x)x^s dx.$$

es una función entera. De esto se deduce que de hecho existe $F(s)$ entera tal que cuando $\Re(s) > 1$.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(s/2) = \frac{1}{s(s-1)} + F(s),$$

Lo que da una continuación analítica para $\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(s/2)$, y en particular para $\zeta(s)$. Finalmente observamos que $F(s)$ queda invariante por la sustitución $s \rightarrow 1-s$, por lo que se satisface la ecuación funcional enunciada. \square

Teorema 1.4.5. *Para todo entero negativo n se tiene que $\zeta(2n) = 0$.*

Demostración. De la ecuación funcional encontrada para la función zeta de Riemann podemos observar para todo entero positivo,

$$\pi^{-n-\frac{1}{2}}(2n+1)!\zeta(2n+1) > 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{s \rightarrow -n} |\Gamma(s)\zeta(2s)| < \infty,$$

pese a que $\Gamma(s)$ tiene un polo en cada entero negativo. Esto quiere decir que $\zeta(2n)$ debe anularse para cada entero negativo n . \square

Estos ceros de la función $\zeta(s)$ son denominados ceros triviales y no aportan ninguna información relevante.

Puede observarse que $|\zeta(s)| > 0$ si $\Re(s) > 1$, debido al Teorema 1.4.2. Así por la ecuación funcional si $\zeta(\rho) = 0$ y ρ no es un cero trivial, entonces $1 \leq \Re(\rho) \leq 1$. Como mencionamos en la primera sección, los ceros no triviales de la función zeta de Riemann guardan una estrecha relación con la distribución de los números primos, siendo la naturaleza de esta cuestión tan profunda que precisamente uno de los siete problemas del milenio planteados por el Instituto Clay de Matemáticas, es determinar si todos los ceros de la función zeta tienen parte real $\frac{1}{2}$, como Riemann conjeturó. Algunos de estos ceros son aproximadamente

$$\frac{1}{2} + 14,13472i, \quad \frac{1}{2} + 25,01085i, \quad \frac{1}{2} + 30,42487i \dots$$

Aunque existe una enorme evidencia computacional que respalda la hipótesis de Riemann, existen también argumentos teóricos en favor de la hipótesis de Riemann, y es que la función $\zeta(s)$ de Riemann se ha generalizado de muchas formas. Una de ellas consiste en asociarle a curvas algebraicas sobre cuerpos finitos, una función zeta análoga. La hipótesis de Riemann formulada en este contexto resultó ser cierta, lo que fue probado gracias a los trabajos de Grothendieck y Deligne (ver [3])

Finalmente, enunciamos un lema técnico cuya prueba se encuentra en [7].

Lema 1.4.6. *La cantidad de ceros de $\zeta(s)$ en la franja $\{s : T \leq \Im(s) \leq T+1\}$ es $O(\log n)$, y además, siempre que $\frac{-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$, y que $T > 0$, tenemos que*

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma \pm iT)}{\zeta(\sigma \pm iT)} \right| = O(\log T) + O\left((\log T) \sup_{\zeta(\rho)=0} \frac{1}{|T - \Im(\rho)|} \right).$$

Una consecuencia inmediata de este lema, es que se puede construir una sucesión de reales positivos $\{T_n\}_n$ tales que

$$\frac{C}{\log T_n} < |T_n - \Im(\rho)|$$

para todo ρ tal que $\zeta(\rho) = 0$, y tal que $T_n \rightarrow \infty$. Es decir, que $\{T_n\}_n$ satisface que

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma \pm iT_n)}{\zeta(\sigma \pm iT_n)} \right| \leq O\left((\log T_n)^2 \right)$$

para todo $\frac{-1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$. Esta sucesión será usada en el capítulo 3.

Capítulo 2

Cuerpos p -ádicos y adeles

El análisis sobre cuerpos p -ádicos, junto con el estudio de sus propiedades algebraicas y topológicas, han sido extensamente abordados en la literatura. Aquí solo enunciaremos y trataremos las propiedades más básicas, haciendo solo un par de comentarios acerca de la conexión que existe entre los números p -ádicos y el análisis complejo. Esta conexión fue de hecho el punto de partida histórico que llevó a Kurt Hensel a introducir los números p -ádicos finalizando el siglo XIX.

2.1. Números p -ádicos

El cuerpo de los números racionales usualmente resulta inadecuado en muchas situaciones. Desde el punto de vista del análisis matemático no es un espacio métrico completo, y desde el punto de vista del álgebra no contiene soluciones de ecuaciones algebraicas como $x^2 = 2$. Una solución parcial a esto es completar métricamente a \mathbb{Q} con el valor absoluto, con lo que se obtiene \mathbb{R} , que es un cuerpo ordenado completo y también arquimediano, esto es, que para todo x real existe un entero tal que $n > x$. De hecho, \mathbb{R} es un cuerpo arquimediano maximal, en el sentido de que contiene a todos los demás cuerpos arquimedianos (ver [9][4]).

Sin embargo, existe algo así como un “universo” de cuerpos no arquimedianos que surgen al poner otro valor absoluto sobre \mathbb{Q} . Por valor absoluto vamos a entender en general, una norma sobre \mathbb{Q} como \mathbb{R} -espacio vectorial que además es un homomorfismo multiplicativo, es decir, que $|ab| = |a||b|$ para cualquier par de racionales a, b . Naturalmente, el valor absoluto usual es el ejemplo paradigmático de valor absoluto entendido según la definición anterior, pero como ya advertimos, no es el único.

Dado un número primo p , definimos la norma p -ádica de un racional a no nulo, como

$$|a|_p = p^{-l},$$

donde l es un entero tal que $a = p^l \frac{m}{n}$ y $(p, m) = (p, n) = 1$, definimos también $|0|_p = 0$. Por el Teorema fundamental de la aritmética la norma p -ádica está bien definida y se verifica además que es un valor absoluto, en particular, satisface que para cualquier par de racionales x, y

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

No es difícil ver que la métrica inducida por una norma p -ádica hace a las operaciones de cuerpo continuas, por lo que al completar \mathbb{Q} con dicha norma se obtiene al extender

por continuidad las operaciones, un cuerpo normado completo que denominamos cuerpo p -ádico y que denotamos como \mathbb{Q}_p . Usualmente se dice que p puede ser ∞ , denotando a \mathbb{R} como \mathbb{Q}_∞ y al valor absoluto usual de un real a como $|a|_\infty$.

Volviendo a la discusión de la propiedad arquimediana, esta se puede reescribir en términos de valores absolutos, diciendo que para todo x existe un entero tal que $|x|_p < |n|_p$. De esta forma \mathbb{Q}_∞ es arquimediano, mientras que \mathbb{Q}_p cuando p es primo no lo es porque $|n|_p \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Puede parecer que hay muchos más valores absolutos sobre \mathbb{Q} , sin embargo un resultado clásico muy conocido nos dice que las normas p -ádicas son esencialmente los únicos valores absolutos que hay.

Teorema 2.1.1 (Ostrowski). *Una métrica no trivial para \mathbb{Q} proveniente de un valor absoluto es siempre equivalente a alguna norma p -ádica o al valor absoluto usual.*

Demostración. Ver [5]. □

Un enfoque alternativo a la caracterización métrica que nos da el Teorema de Ostrowski, es el que Weil plantea en [11]. Weil propone un enfoque más topológico en el que parte de la existencia de un cuerpo localmente compacto, usando luego su medida de Haar aditiva para construir una norma. Al final Weil prueba que si la característica del cuerpo es cero, entonces dicho cuerpo es isomorfo a una extensión finita de \mathbb{Q}_p para algún primo p o a \mathbb{Q}_∞ o \mathbb{C} . Este orden de ideas se invierte un poco al partir de una métrica, y algo que debemos ver nosotros es precisamente que \mathbb{Q}_p es localmente compacto.

Teorema 2.1.2. *El conjunto*

$$\mathbb{Z}_p = \overline{B}(0; 1) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\},$$

se descompone de forma única en p bolas disjuntas de radio $1/p$.

Demostración. Afirmamos que \mathbb{Z}_p se puede descomponer como la unión disjunta de los siguientes conjuntos

$$\overline{B}(0; p^{-1}), \overline{B}(1; p^{-1}), \dots, \overline{B}(p-1; p^{-1}).$$

Esto se puede ver porque si $|x|_p \leq 1$, entonces al ser \mathbb{Q}_p la completación de \mathbb{Q} con la norma p -ádica, existe un racional q tal que $|x - q|_p \leq p^{-1}$, lo que significa que

$$|q|_p = |q - x + x|_p \leq \max\{|q - x|_p, |x|_p\} \leq 1.$$

De esta forma, si $q = a/b$ para algún par de enteros a y b con $(b, p) = 1$, entonces la congruencia

$$a \equiv bt \pmod{p}$$

tiene como solución $t = au$ con u el inverso de b módulo p . Además se puede escoger a t de forma que $0 \leq t < p$, por lo que se consigue así que

$$|q - t|_p = \left| \frac{a - bt}{b} \right|_p \leq \frac{1}{p}.$$

Así, dado que por la ultrametricidad, todos los puntos de una bola p -ádica son su centro, entonces

$$x \in \overline{B}(t; p^{-1}).$$

La unicidad de la descomposición está en que los elementos del conjunto $\{0, 1, \dots, p-1\}$ distan $1/p$ entre sí, por lo que cada uno debe estar en una bola de radio $1/p$, siendo cada uno de ellos, nuevamente por la ultrametricidad, los centros de esas bolas. □

En realidad, la bola $\overline{B}(0; p^{-n})$ se puede ver como el conjunto de los elementos $p^n x$ con $|x|_p \leq 1$, y que denotamos como $p^n \mathbb{Z}_p$. Visto de esta forma, del teorema anterior obtenemos la consecuencia siguiente:

Corolario 2.1.3. *Para cada entero positivo n tenemos la descomposición*

$$p^n \mathbb{Z}_p = \bigcup_{a=0}^{p-1} (ap^n + p^{n+1} \mathbb{Z}_p).$$

Teorema 2.1.4. $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ es un cuerpo localmente compacto.

Demostración. Es suficiente con ver que para todo $a \in \mathbb{Q}_p$ la bola

$$\overline{B}(a; 1) = a + \overline{B}(0; 1)$$

es compacta. Es decir, que es suficiente con ver que $\mathbb{Z}_p = \overline{B}(0; 1)$ es compacto. En efecto, ya que \mathbb{Z}_p es un cerrado y \mathbb{Q}_p es completo, entonces \mathbb{Z}_p es también completo. Además, aplicando inductivamente el Teorema 2.1.2 y el Corolario 2.1.3 tenemos que para cada entero positivo n , \mathbb{Z}_p se descompone en p^n bolas de radio p^{-n} . Esto significa que dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger $p^{-k} < \varepsilon$, y un conjunto F de p^k elementos de forma que para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ existe $u \in F$ tal que

$$|u - x|_p \leq p^{-k} < \varepsilon.$$

Esto es lo que significa que \mathbb{Z}_p sea totalmente acotado, por lo que al ser también completo resulta por lo tanto compacto. \square

La descomposición del Corolario 2.1.3 es muy importante y será usada en el cálculo de integrales p -ádicas, junto con el hecho de que la norma p -ádica solo toma como valores además del cero, potencias de p con exponente entero. Por el momento una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.3 es que para cualquier x

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k + v$$

con $|v|_p \leq p^{-n}$, y con $0 \leq a_k \leq p-1$, únicamente determinados para cada k . Es decir, que considerando el límite se obtiene la siguiente representación

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k.$$

con $0 \leq a_k \leq p-1$ para todo k . Esta representación se puede extender aún más, ya que si en general $|x|_p = p^m$, entonces

$$\begin{aligned} x &= p^{-m} p^m x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k p^k. \\ &= \frac{a_{-m}}{p^m} + \cdots + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots \end{aligned}$$

En este punto encontramos una similitud entre los elementos de \mathbb{Q}_p y las series de Laurent desarrolladas en torno a un punto a del plano complejo, las cuales lucen de la forma

$$\sum_{k=-m}^{\infty} c_k (s-a)^k = \frac{c_{-m}}{(s-a)^m} + \cdots + c_0 + c_1 (s-a) + c_2 (s-a)^2 + \cdots$$

Como mencionábamos al inicio del capítulo, fue Hensel quien descubrió que se podía imitar esta construcción de análisis complejo para obtener un nuevo cuerpo numérico hasta entonces sin explorar.

Es importante señalar, que en general la estructura de \mathbb{Z}_p es muy rica; es un espacio topológico compacto, Hausdorff, totalmente desconexo, y de hecho, homeomorfo a Cantor, pero también por la ultrametricidad de la norma p -ádica, \mathbb{Z}_p resulta ser un subgrupo aditivo de \mathbb{Q}_p , que es además un anillo local, con el grupo de unidades

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$$

como su único ideal maximal.

Como último teorema de esta sección, tenemos una fórmula que involucra todas las completaciones p -ádicas y que es muy importante al hacer cálculo en los adeles.

Teorema 2.1.5. *Para cada $q \in \mathbb{Q}^\times$*

$$\prod_{p \leq \infty} |q|_p = 1,$$

o equivalentemente

$$\sum_{p \leq \infty} \text{ord}_p(q) = 0,$$

siendo $\text{ord}_p(q) = \log_p |q|_p$.

Demostración. La prueba es esencialmente el teorema fundamental de la aritmética. \square

Una analogía con el análisis complejo que aquí solo esbozaremos, es que los números primos son como los puntos de la esfera de Riemann

$$\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

El caso $p = \infty$, corresponde precisamente al punto ∞ de la esfera. Los números racionales son en esta analogía, las funciones meromorfas sobre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, que burdamente hablando, son funciones meromorfas definidas en \mathbb{C} , que además cuentan con un valor definido de forma continua en el punto ∞ .

Supongamos por lo tanto que f es una función holomorfa en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. En particular, se trata de una función continua sobre un compacto, por lo que f es acotada, y por el teorema de Liouville $f(z)$ es constante en el plano complejo. Es decir, que por la continuidad en ∞ tenemos que f es constante en toda $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Si ahora f tiene una cantidad finita de polos y ceros dentro de \mathbb{C} , esto significa que podemos escribir a f en el plano complejo como

$$f(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_n)^{k_n} g(z),$$

con $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, y $g(z)$ analítica en \mathbb{C} y sin ceros. Sin embargo, la ausencia de ceros de $g(z)$ significa que tanto $g(z)$ como $1/g(z)$ son holomorfas, por lo que si una de ellas no está acotada, entonces la otra tiende a cero cuando $z \rightarrow \infty$, es decir, que alguna de ellas está acotada. De esta forma, nuevamente por el teorema de Liouville, $g(z)$ es constante, y por consiguiente hay alguna constante c para la que

$$f(z) = c(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_n)^{k_n}.$$

Por ejemplo, la función $f(z) = z^2$ se puede ver como una función analítica en el plano complejo, que al extenderla a $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ haciendo $f(\infty) = \infty$, resulta meromorfa con polo doble en ∞ . Lo mismo ocurre con $f(z) = 1/z$, que tendría un polo simple en el origen y un cero en ∞ . De hecho, en general se da que si f es una función meromorfa sobre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, el números de polos y ceros es el mismo. Esto se puede ver muy intuitivamente considerando la integral

$$\int_{\partial D(0;R)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

en donde $D(0; R)$ es el disco centrado en el origen con radio R . Esta integral da la diferencia del números ceros y polos de f que yacen en el interior del disco. Luego, pensando ahora así en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ como una esfera, resulta que a medida que R crece la frontera de $D(0; R)$ se va contrayendo sobre el punto ∞ . De esta forma la intuición nos dice que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial D(0;R)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

al volverse el contorno de integración un punto. Este límite significa que f tiene tantos ceros como polos en \mathbb{C} , lo que implica a su vez que el número de ceros es finito. En efecto, como el conjunto de ceros de una función meromorfa es discreto, entonces, cualquier sucesión $\{z_n\}_n$ en el plano complejo tal que $f(z_n) = 0$, con cada término de la sucesión distinto, no puede estar contenida en un compacto sin acumularse debido al Teorema de Bolzano-Weierstrass. Esto quiere decir que $|z_n| \rightarrow \infty$, y por lo tanto que $f(\infty) = 0$. Pero ya que infinitos ceros implica infinitos polos, $f(\infty)$ no puede ser cero si estos polos al igual que los ceros, aparecen en cada vecindad de ∞ .

Concluimos por lo tanto que si f es una función meromorfa sobre $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, entonces f de hecho resulta ser una función racional en \mathbb{C} , y además tiene tantos ceros como polos, esto es, que

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0,$$

donde p recorre los puntos de la esfera de Riemann, y $\text{ord}_p(f)$ es el orden del cero o polo que tenga f en p . Con esto obtenemos un análogo del teorema 2.1.5, y es que si $a \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = (z - a)^{\text{ord}_a(f)} h(z)$, con $h(z)$ una función analítica en a y $h(a) \neq 0$, lo que hace aún más notoria la analogía.

2.2. Anillo de adeles

La idea con la que se define el espacio de adeles, es poder capturar en una misma estructura las diferentes completaciones p -ádicas de los racionales. Esto se logra de una buena forma a través de un producto cartesiano restringido. Así, definimos el conjunto de adeles racionales como

$$\mathbb{A} = \{(a_p)_p \in \prod_{p < \infty} \mathbb{Q}_p : a_p \in \mathbb{Z}_p \text{ salvo para un número finito de términos}\} \times \mathbb{Q}_\infty.$$

Con la adición y multiplicación componente a componente dotamos a \mathbb{A} de una estructura de anillo conmutativo. Las unidades de \mathbb{A} son llamadas *ideles*, siendo el grupo multiplicativo \mathbb{A}^\times conocido como el *grupo de ideles*. Los ideles se caracterizan como las sucesiones $(\lambda_p)_p$ tales que $\lambda_p \neq 0$ para todo p , y además, tales que $|\lambda_p| = 1$, esto es, con $\lambda_p \in \mathbb{Z}_p^\times$, pero salvo para un número finito de términos.

La topología en \mathbb{A} se puede definir tomando como vecindades básicas de 0, los conjuntos $\prod_{p \leq \infty} V_p$ en los que V_∞ es una vecindad del 0 en \mathbb{R} , y V_p para $p < \infty$ es también una vecindad de 0 en \mathbb{Q}_p , pero en a lo sumo un número finito de casos, siendo $V_p = \mathbb{Z}_p$ en el resto de casos. De esta forma \mathbb{A} como anillo topológico es localmente compacto, lo cual no se puede garantizar si no se considera el producto restringido.

Algo que también resulta al construir \mathbb{A} es que obtenemos una copia de \mathbb{Q} vía el isomorfismo canónico

$$r \mapsto (r, r, r, \dots, r, \dots),$$

que está bien definido porque si r es racional entonces $|r|_p = 1$ para casi todos los primos p . A la imagen de dicho isomorfismo se le llama el conjunto de *adeles principales*, y se puede demostrar además que es un conjunto discreto de \mathbb{A} , por lo que juega un papel análogo al que juega \mathbb{Z} en \mathbb{Q} .

Un resultado fundamental acerca de los ideles, y que necesitaremos en al final del capítulo, es el siguiente:

Teorema 2.2.1. *Los ideles admiten una descomposición como la unión disjunta*

$$\mathbb{A}^\times = \bigcup_q qP$$

con q recorriendo los racionales no nulos, y con $P = \mathbb{R}^+ \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^\times$.

Demostración. Observamos que P es un subgrupo de \mathbb{A}^\times , y que tratándose de grupos abelianos, existe el cociente \mathbb{A}^\times/P . Consideramos por lo tanto el homomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{A}^\times/P$ tal que para cada q ,

$$q \mapsto [(q, q, \dots)] = (q, q, \dots)P.$$

Afirmamos que este homomorfismo es inyectivo. En efecto, supongamos que

$$(q, q, \dots)P = P,$$

esto significa que en particular

$$(q, q, \dots) = (q, q, \dots) \cdot (1, 1, \dots) \in P,$$

lo que a su vez implica que $|q|_p = 1$ para todo p primo. Por lo tanto, escribiendo q como a/b con a y b enteros y $\gcd(a, b) = 1$, vemos que si $q \neq 1$, entonces hay algún primo p_0 que divide a a , pero que no divide a b , lo que hace que $|q|_{p_0} = |a/b|_{p_0} < 1$, contrario al hecho de que $q \in P$.

Solo resta ver que la sobreyectividad del homomorfismo. Para ello vemos que $[(x_p)_p] \in \mathbb{A}^\times/P$, entonces ya que $|x_p|_p = 1$ para todo primo p exceptuando un número finito de casos, tomamos aquellos primos p_1, \dots, p_n tales que $|x_{p_i}|_{p_i} \neq 1$ y consideramos el racional

$$r = |x_{p_1}|_{p_1} \cdots |x_{p_n}|_{p_n}.$$

Para este racional r vemos que por la forma en la que se ha construido satisface que $|r|_p = |x_p|_p^{-1}$ para todo p primo, lo que implica que

$$(r, r, \dots) \cdot (x_\infty, x_2, \dots) = (rx_\infty, rx_2, \dots) \in P.$$

siempre que $x_\infty > 0$. Luego

$$(x_p)_p = (s^{-1}, s^{-1}, \dots) \cdot (sx_\infty, sx_2, \dots) \in (s^{-1}, s^{-1}, \dots)P,$$

para $s = rx_\infty |x_\infty|^{-1}$, con lo que queda probado el isomorfismo.

Finalmente, como identificamos a q el idele principal (q, q, \dots) , tenemos que el cociente \mathbb{A}^\times/P , nos da la partición descrita. \square

2.3. Integración y transformada de Fourier

Ya que \mathbb{Q}_p y \mathbb{Q}_p^\times son grupos topológicos localmente compactos, disponemos por el Teorema de Haar de una medida invariante bajo traslaciones y única salvo por reescalamientos. En el caso de \mathbb{Q}_p vamos a considerar siempre la medida tal que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

y en el caso del grupo multiplicativo \mathbb{Q}_p^\times , la medida de Haar que usaremos es tal que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} dx = 1.$$

Teorema 2.3.1. *Para toda f integrable*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = |q|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(qx)dx$$

Demostración. Sea μ la medida canónica de Haar para \mathbb{Q}_p , esta es, aquella para la que $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. Consideramos la medida ν sobre \mathbb{Q}_p definida como

$$\nu(X) = \mu(\{qx : x \in X\}).$$

Esta nueva medida ν es invariante ante traslaciones, por lo que resulta que $\nu(X) = \lambda\mu(X)$. Para encontrar λ hacemos el cálculo sabiendo que para algún entero α se tiene que $|q|_p = p^\alpha$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} d\nu = \int_{|x|_p \leq p^\alpha} d\mu = p^\alpha.$$

Es decir que $\lambda = p^\alpha = |q|_p$.

Vemos finalmente, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx &= \int_{\mathbb{Q}_p} f(qx)d\nu \\ &= |q|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(qx)dx. \end{aligned}$$

Esto se puede verificar directamente para funciones simples, y luego se puede extender el resultado por densidad. \square

Si $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ definimos la transformada de Fourier como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) e^{2\pi i \{\xi x\}_p} dx,$$

en donde $\{t\}_p$, es parte fraccionaria de t , es decir, que si $t = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k p^k$ para algún entero $m > 0$, entonces

$$\{t\}_p = \sum_{k=-m}^1 a_k p^k.$$

En caso contrario, cuando $t \in \mathbb{Z}_p$, tenemos que $\{t\}_p = 0$. Observamos también que de cualquier forma, $\{t\}_p$ es un número racional, y además $\{t+s\}_p \equiv \{t\}_p + \{s\}_p \pmod{\mathbb{Z}}$.

Como en el caso real, también contamos con un punto fijo para transformada de Fourier p -ádica.

Teorema 2.3.2. *La función $\phi_p(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)$ es un punto fijo de la transformada de Fourier p -ádica.*

Demostración. En efecto, partimos de que

$$\widehat{\phi}_p(\xi) = \int_{\mathbb{Z}_p} e^{2\pi i \{\xi x\}_p} dx.$$

Para $\xi \in \mathbb{Q}_p$ con $|\xi|_p \leq 1$ vemos que $|\xi x|_p \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$ y por lo tanto $\{\xi x\}_p = 0$. Así

$$\widehat{\phi}_p(\xi) = \int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$$

si $\xi \in \mathbb{Z}_p$.

Ahora, cuando $|\xi|_p > 1$ sabemos que

$$\xi = \frac{a_0}{p} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} + t = \frac{a}{p^n} + t$$

para algún $t \in \mathbb{Z}_p$, y enteros a, a_1, \dots, a_n , con $\gcd(a, p) = 1$. De forma similar, si $x \in \mathbb{Z}_p$ entonces x se escribe como

$$x = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{n-1} p^{n-1} + t'$$

con $t' \in p^n \mathbb{Z}_p$. O mejor aún,

$$x = k + t'$$

con $0 \leq k \leq p^n - 1$. De esta forma

$$\{\xi x\}_p = \left\{ \left(\frac{a}{p^n} + t \right) (k + t') \right\}_p \equiv \left\{ \frac{ak}{p^n} \right\}_p + \left\{ \frac{a}{p^n} t' + kt + tt' \right\}_p \equiv \left\{ \frac{ak}{p^n} \right\}_p,$$

módulo \mathbb{Z} , ya que $ap^{-n}t' + kt + tt' \in \mathbb{Z}_p$.

Ahora, no es difícil ver que $akp^{-n} = \{akp^{-n}\}_p + [akp^{-n}]$, donde $[akp^{-n}]$ es la parte entera de akp^{-n} , que ahora es número racional. Así

$$e^{2\pi i akp^{-n}} = e^{2\pi i_p \{akp^{-n}\}_p + [akp^{-n}]} = e^{2\pi i \{akp^{-n}\}_p},$$

con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{Z}_p} e^{2\pi i\{\xi x\}_p} dx &= \sum_{k=0}^{p^n-1} \int_{k+p^n\mathbb{Z}} e^{2\pi i\{\xi x\}_p} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{p^n-1} \int_{p^n\mathbb{Z}} e^{2\pi i\{akp^{-n}\}_p} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{p^n-1} e^{2\pi iakp^{-n}} \int_{p^n\mathbb{Z}} dx \\
 &= \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^n-1} e^{2\pi iakp^{-n}} \\
 &= \frac{1}{p^n} \frac{e^{2\pi ia} - 1}{e^{2\pi iap^{-n}} - 1} = 0.
 \end{aligned}$$

Esto es, $\widehat{\phi}(\xi) = 0$ si $|\xi|_p > 1$ como queríamos ver. \square

2.4. Distribuciones

En el primer capítulo comentamos brevemente el espacio de Schwarz sobre los reales. Sin embargo, en el último capítulo trabajaremos más con el espacio de funciones test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y con su versión p -ádica. Para definir el espacio de funciones test p -ádico, al no disponer de diferenciabilidad decimos que una función de soporte compacto $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ está en el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ si es *localmente constante*, esto es, si para cada $a \in \mathbb{Q}_p$ existe un entero $l \geq 0$ tal que

$$f(a+h) = f(a)$$

siempre que $|h|_p \leq p^{-l}$.

De forma similar a como ocurre con los reales, $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ cuenta con una estructura de espacio vectorial topológico descrita en [5]. Las distribuciones son por lo tanto los funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, que por la topología dada son cualquier funcional lineal $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ en \mathbb{R} .

El espacio de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ lo definimos como el espacio de funciones $f + ig$ con $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, y cuando hablemos del núcleo de Riesz lo usaremos. También, cuando tratemos con \mathbb{Q}_p^\times el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^\times)$ se obtiene mutatis mutandis.

El espacio de funciones test $\mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$ es definido como el subespacio del producto tensorial

$$\bigotimes_{p \leq \infty} \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^\times)$$

en el que los tensores elementales $\bigotimes_p f_p$ son tales que salvo para un número finito de índices, f_p es la función indicadora de \mathbb{Z}_p^\times , que denotamos como $\omega_p(x)$. En la práctica, $\bigotimes_p f_p$ se interpreta simplemente como un producto de funciones.

2.5. Transformada de Mellin

En esta sección mostraremos un resultado muy importante, que es que la transformada de Mellin de una función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ se puede codificar como una transformada de Mellin en

los adeles. Para ello definimos las funciones radiales p -ádicas, que son funciones $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$ si $|x|_p = |y|_p$. De esta forma, decimos que f es una función radial en los adeles o ideles, si es una combinación lineal de funciones radiales p -ádicas. También, si $a = (a_p)_p$ es un idele, definimos

$$|a| = \prod_p |a_p|_p,$$

que en realidad es un producto finito.

Proposición 2.5.1. *Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, entonces para todo $s \in \mathbb{C}$*

$$\int_{\mathbb{A}^\times} |f(x)| |x|^s d^\times x < +\infty.$$

Demostración. Vemos primero que si $x = (x_p)_p$ es un idele, y

$$f(x) = \prod_p f_p(x),$$

entonces

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| |x_p|^s d^\times x < +\infty$$

para todo p , puesto que para cada p , $f_p(x_p)$ es una función de continua de soporte compacto. Ahora, como para casi todo p , $f_p(x) = \omega_p(x)$, entonces para un conjunto finito de primos $X = \{p_1, \dots, p_n\}$

$$\int_{\mathbb{A}^\times} |f(x)| |x|^s d^\times x \leq \prod_{p \in X} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x_p)| |x_p|^s d^\times x < +\infty.$$

□

Lema 2.5.2. *Para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, con f radial, existe un conjunto de racionales*

$$F = \{q_1, \dots, q_n\}$$

tal que para todo $x \in P$, $f(qx) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}^\times \setminus F$.

Demostración. Sabemos que dada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, suponiendo que f corresponde a un tensor elemental, existe un conjunto finito $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ de números primos, tales que si $x = (x_p)_p \in \mathbb{A}^\times$,

$$f(x) = f_\infty(x_\infty) f_{p_1}(x_{p_1}) \cdots f_{p_m}(x_{p_m}) \prod_{p \notin X} \omega_p(x_p).$$

Como cada f_p es de soporte compacto, tenemos entonces para ciertos $M, \varepsilon > 0$ que si $u = (u_p)_p \in \mathbb{A}^\times$ y $f(u) \neq 0$, entonces para todo p se da que

$$\varepsilon < |u_p|_p < M.$$

Por lo tanto, si $x \in P$, entonces, ya que $|x_p|_p = 1$ para todo p primo, se tiene luego que si $f(qx) \neq 0$ entonces

$$\varepsilon < |q|_p < M$$

para todo $p < \infty$. Además de esto, necesariamente

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$. De otra forma $\omega_p(qx) = 0$ para algún primo $p \notin X$, con lo que $f(qx) = 0$. Luego el conjunto de racionales tales que $f(qx) \neq 0$ para algún $x \in P$, es un subconjunto de

$$F = \{p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}, \varepsilon < p_i^{\alpha_i} < M\},$$

el cual es finito. Así, exceptuando un número finito de casos, esto es, para todo $q \in \mathbb{Q}^\times \setminus F$, y para todo x , $f(qx) = 0$. Naturalmente si f es una combinación lineal de tensores elementales, entonces el resultado se mantiene. \square

Teorema 2.5.3. *Para todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, con f radial*

$$\int_{\mathbb{A}^\times} f(x) |x|^s d^\times x = \int_0^\infty \tilde{f}(u) u^s \frac{du}{u},$$

para alguna $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, obtenida de forma canónica.

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, y por la invarianza multiplicativa de $d^\times x$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}^\times} f(x) |x|^s d^\times x &= \sum_q \int_{qP} f(x) |x|^s d^\times x \\ &= \sum_q \int_P f(qx) |q|^s |x|^s d^\times x \end{aligned}$$

como q es racional distinto de cero, sabemos por el Teorema 2.1.5 que

$$|q| = \prod_p |q|_p = 1,$$

y por lo tanto, al ser $\sum_q f(qx)$ en realidad una suma finita en P , por el lema anterior, entonces intercambiando los signos de sumatoria e integral llegamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}^\times} f(x) |x|^s d^\times x &= \sum_q \int_{qP} f(qx) |x|^s d^\times x \\ &= \int_P \left(\sum_q f(qx) \right) |x|^s d^\times x \\ &= \int_P \tilde{f}(x) |x|^s d^\times x \end{aligned}$$

Ahora, si la tupla $x = (u, x_2, \dots, x_p, \dots) \in P$ mantiene a u fijo, entonces la función $\tilde{f}(x) = \sum f(qx)$ permanece idéntica independientemente de los valores de cada x_p con $p < \infty$, es decir que está solo en función u . Esto se puede ver porque f es radial; en efecto, si $x \in P$, entonces $|x_p|_p = 1$ para cada p finito, y por lo tanto $|qx_p|_p = |q|_p$, con lo que se tiene que

$$\begin{aligned} f(qx) &= f_\infty(qu) \prod_{p < \infty} f_p(qx_p) \\ &= f_\infty(qu) \prod_{p < \infty} f_p(q) \\ &= C_q f_\infty(qu). \end{aligned}$$

con C_q una constante para cada q , y suponiendo por supuesto que f corresponde a un tensor elemental. De esta forma, notando $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(u)$, al integrar vemos

$$\begin{aligned} \int_P \tilde{f}(u) |x|^s d^\times x &= \int_0^\infty \tilde{f}(u) u^s \frac{du}{u} \int_{\mathbb{Z}_2^\times} |x|_2^s d^\times x \cdots \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^s d^\times x \cdots \\ &= \int_0^\infty \tilde{f}(u) u^s \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Además, como

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u) &= \sum_q f(q(u, 1, \dots, 1, \dots)) \\ &= \sum_q C_q f_\infty(qu) \end{aligned}$$

es una combinación lineal finita, y en particular de funciones $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, entonces \tilde{f} está también $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. \square

Capítulo 3

Fórmula explícita

Una vez descritas las herramientas que necesitamos del análisis complejo y el análisis p -ádico, estamos en condiciones de abordar las fórmulas explícitas para la función zeta de Riemann. La primera fórmula explícita que trataremos conecta los ceros de función zeta de Riemann con los números primos, vía la transformada de Mellin sobre funciones reales. Esta fórmula se revisará a la luz de análisis p -ádico, concluyendo así con una fórmula más sofisticada, que es la encontrada por Haran.

3.1. Funciones zeta locales

Definimos para cada $p \leq \infty$ la función zeta local p -ádica como la transformada Mellin

$$\zeta_p(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \phi_p(x) |x|^s d^\times x,$$

siendo $\phi_\infty(x) = e^{-\pi x^2}$ y $\phi_p(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)$ para $p < \infty$.

Teorema 3.1.1. *Tenemos que*

$$\zeta_\infty(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s/2)$$

y para $p < \infty$ que

$$\zeta_p(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$$

Demostración. Recordemos que cuando se trata de \mathbb{R}^\times la medida $d^\times x = |x|^{-1} dx$, y que de forma similar $|x|_p^{-1} dx$ resulta también una medida de Haar para \mathbb{Q}_p^\times cuando $p < \infty$, por el teorema 2.3.1. En este último caso normalizamos la medida de Haar haciendo

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} d^\times x = 1.$$

Por el teorema de Haar sabemos que $d^\times x = \lambda |x|_p^{-1} dx$, por lo tanto

$$1 = \int_{|x|_p=1} d^\times x = \lambda \int_{|x|_p=1} dx = \lambda \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

esto es, $\lambda = (1 - p^{-1})^{-1}$. Así pues, realizamos la prueba separando el caso arquimediano.

Caso $p = \infty$:

Haciendo un el cambio de variable $y = \pi x^2$ encontramos que

$$\begin{aligned}\zeta_\infty(s) &= 2 \int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s-1)} \frac{dy}{2\sqrt{\pi y}} \\ &= \pi^{\frac{s}{2}-1} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s/2)\end{aligned}$$

Caso $p < \infty$:

$$\begin{aligned}\zeta_p(s) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) |x|^s d^\times x \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s \frac{dx}{|x|} \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{n=1}^\infty p^{-n(s-1)} \int_{|x|=p^{-n}} dx.\end{aligned}$$

Esto es, dada la invarianza de la medida de Haar aditiva de los cuerpos p -ádicos, encontramos que

$$\int_{|x|_p=p^{-n}} dx = \sum_{a=1}^{p-1} \int_{ap^n+p^{n+1}\mathbb{Z}_p} dx = \sum_{a=1}^{p-1} \int_{p^{n+1}\mathbb{Z}_p} dx = \frac{p-1}{p^{n+1}}$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\zeta_p(s) &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{n=1}^\infty p^{-n(s-1)} \int_{|x|=p^{-n}} dx \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{n=1}^\infty p^{-ns} (1-p^{-1}) \\ &= (1-p^{-s})^{-1}\end{aligned}$$

□

El anterior cálculo de las funciones $\zeta_p(s)$ no solamente nos da un representación explícita de ellas, sino que además nos permite inferir de forma inmediata su analiticidad cuando $\Re(s) > 0$. Aún más, otro hecho que salta a la vista es que es el cálculo de $\zeta_p(s)$ cuando $p < \infty$ corresponde a los factores del producto de Euler para la función zeta de Riemann, es decir, que

$$\zeta(s) = \prod_{p < \infty} \zeta_p(s),$$

cuando $\Re(s) > 1$. Aquí el planteamiento en términos de ideles resulta revelador, y es que si recordamos la construcción de los elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, se hace tentador completar el producto de Euler añadiendo como factor la función $\zeta_\infty(s)$. Esta función zeta “completada” que denotamos como $\zeta_*(s)$, al ser extendida analíticamente a través de $\zeta(s)$, hace que la ecuación funcional presentada en el teorema se escriba elegantemente como

$$\zeta_*(s) = \zeta_*(1-s).$$

De hecho, todo tiene mucho más sentido cuando consideramos para $x = (x_\infty, \dots, x_p, \dots) \in \mathbb{A}^\times$, la función en los ideles $\phi(x) = \prod_{p \leq \infty} \phi_p(x_p)$, para la cual se verifica cuando $\Re(s) > 1$, que

$$\int_{\mathbb{A}^\times} \phi(x) |x|^{s-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\infty(x) |x|^{s-1} dx \prod_{p < \infty} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |x|_p^s d^\times x_p = \zeta_*(s).$$

Una presentación muy detallada de la función zeta de Riemann planteada desde los adeles e ideles la podemos encontrar en [10].

3.2. Núcleo de Riesz

En el caso real y de una variable definimos el núcleo de Riesz para $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$, como

$$R^\alpha(x) = \frac{1}{\rho(\alpha)} |x|^{\alpha-1}$$

con

$$\rho(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}-\alpha} \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((1-\alpha)/2)}.$$

Una forma de extender esta definición del núcleo de Riesz, sustituyendo además a α por una variable compleja s , es a través del siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Para cada $s \in H = \{s \in \mathbb{C} : -1 < \Re(s) < 1\}$ existe un única distribución temperada R^s tal que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la función*

$$F_\phi(s) = R^s(\phi)$$

es holomorfa en H , y además cuando $0 < \Re(s) < 1$

$$F_\phi(s) = \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) |x|^{s-1} dx.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $\phi(x) = f(x) + ig(x)$, y con f y g reales. Tratamos primero el caso en el que $g(x) = 0$ para todo x . Observamos entonces que dado que $\sup_x |x^n f(x)| < +\infty$ para cada n , tenemos que se satisfacen las condiciones del teorema 1.2.4. Existen luego las transformadas de Mellin $\mathcal{M}^s(f(x))$ y $\mathcal{M}^s(f(-x))$ cuando $\Re(s) > 0$, las cuales definen además funciones holomorfas de s . Así,

$$\begin{aligned} h_\phi(s) &= \mathcal{M}^s(f(x)) + \mathcal{M}^s(f(-x)) \\ &= \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx + \int_0^\infty f(-x) x^{s-1} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(x) |x|^{s-1} dx \end{aligned}$$

resulta una función holomorfa de s cuando $\Re(s) > 0$. De esta forma

$$\frac{h_\phi(s)}{\rho(s)} = \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^\infty f(x) |x|^{s-1} dx$$

está definida y es holomorfa en $\{s : 0 < \Re(s) < 1\}$.

Sin embargo, por un lado tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\rho(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s/2)} = 0,$$

y por otro la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^{-1} dx$ diverge. Por lo tanto para encontrar la continuación analítica de $h_{\phi}(s)(\rho(s))^{-1}$ debemos buscar otra representación en H . Observamos ahora que cuando $\Re(s) > 0$

$$\int_{-1}^1 f(0) |x|^{s-1} dx = \frac{2f(0)}{s},$$

y por lo tanto, usando que $s\Gamma(s/2) = \Gamma(s/2 + 1)$, reescribimos $h_{\phi}(s)(\rho(s))^{-1}$ como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^{s-1} dx &= \frac{1}{\rho(s)} \int_{-1}^1 \{f(x) - f(0)\} |x|^{s-1} dx \\ &+ \frac{2f(0)}{s\rho(s)} \\ &+ \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{-1} f(x) |x|^{s-1} dx + \frac{1}{\rho(s)} \int_1^{\infty} f(x) |x|^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{\rho(s)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^s dx \\ &+ \frac{f(0)\pi^{-\frac{1}{2}+s}\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2 + 1)} \\ &+ \frac{1}{\rho(s)} \int_{|x|>1} f(x) |x|^{s-1} dx \end{aligned}$$

Esta nueva expresión para $h_{\phi}(s)(\rho(s))^{-1}$ define una función analítica en H ; primero porque

$$\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2 + 1)}$$

define una función analítica, básicamente por el teorema 1.3.3, y por otra parte como $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, entonces el cociente $\{f(x) - f(0)\} |x|^{-1}$ se encuentra acotado, por lo que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^s dx &= \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^{(s+1)-1} dx \\ &+ \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \frac{f(-x) - f(0)}{|x|} |x|^{(s+1)-1} dx. \end{aligned}$$

Esto es, $\int_{-1}^1 \{f(x) - f(0)\} |x|^{s-1} dx$ es una suma de transformadas de Mellin de funciones acotadas seccionalmente continuas, y por lo tanto holomorfas cuando $\Re(s+1) > 0$, que es lo que ocurre cuando $s \in H$. Esto mismo ocurre con el término

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(s)} \int_{|x|>1} f(x) |x|^{s-1} dx &= \frac{1}{\rho(s)} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) f(x) x^{s-1} dx \\ &+ \frac{1}{\rho(s)} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) f(-x) x^{s-1} dx \end{aligned}$$

que de hecho define una función entera de s porque para cualquier a real

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(s)} \int_{|x|>1} f(x) |x|^{s-1} dx &= \frac{1}{\rho(s)} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) f(x) x^a x^{(s-a)-1} dx \\ &+ \frac{1}{\rho(s)} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) f(-x) x^a x^{(s-a)-1} dx \end{aligned}$$

y nuevamente porque f está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De esta forma obtenemos una continuación analítica de $h_\phi(s)(\rho(s))^{-1}$ en H .

Ahora, cuando $0 < \Re(s) < 1$ tenemos en general para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que

$$\begin{aligned} F_\phi(s) &= \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) |x|^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^{s-1} dx + \frac{i}{\rho(s)} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) |x|^{s-1} dx \end{aligned}$$

lo que sería entonces una combinación lineal de funciones holomorfas en $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < 1\}$, cuya continuación analítica a H para cada término ya sabemos cómo encontrar. Así, queda definido $R^s(\phi) = F_\phi(s)$ en H , siendo la unicidad y la linealidad de R^s consecuencia de la unicidad de las extensiones analíticas.

Por último vemos que R^s además de transformación lineal es continua en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cada s . Para ello vemos que si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones reales tal que $f_n \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces en particular se da para $s = \sigma + it \in H$ fijo, que

$$\sup_x |x^{2+\sigma-1} f_n(x)| \rightarrow 0$$

lo que significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$

$$\int_{|x|>1} |f_n(x)| |x|^{s-1} dx \leq 2\varepsilon \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 2\varepsilon.$$

Por otra parte también tenemos que

$$\sup_x |f'_n(x)| \rightarrow 0$$

lo que significa que para $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N'$, se da por el valor medio que

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^s \right| dx \leq \int_{-1}^1 |f'(y)| |x|^s dx \leq 2\varepsilon(\sigma + 1)^{-1}.$$

Por lo tanto, siendo σ fijo por supuesto, vemos que se cumple que $R^s(f_n) \rightarrow 0$. Esto es, R^s es continua en cero y por linealidad continua en todo $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Así queda probado que $R^s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. \square

Inspirados en el caso real, presentamos la versión no arquimediana del núcleo de Riesz. Para ello observamos que por el teorema 3.1.1 podemos reescribir la función $1/\rho(s)$ como

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{\zeta_\infty(1-s)}{\zeta_\infty(s)}$$

Esto da la idea para definir el núcleo de Riesz p -ádico.

Teorema 3.2.2. *Para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1 + 2\pi ik \log(1/p) : k \in \mathbb{Z}\}$ con $p < \infty$, existe una única distribución R_p^s tal que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ la función*

$$F_\phi(s) = R_p^s(\phi)$$

es holomorfa en H , y además cuando $0 < \Re(s) < 1$

$$F_\phi(s) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Q}_p} \phi(x) |x|^{s-1} dx.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$, vemos primero que de hecho cuando $0 < \Re(s) < 1$

$$\begin{aligned} |F_\phi(s)| &= \left| \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \right| \left| \int_{\mathbb{Q}_p} \phi(x) |x|^{s-1} dx \right| \\ &\leq M \left| \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \right| \int_K dx \end{aligned}$$

Esto es $F_\phi(s)$ esta definida para cada $0 < \Re(s) < 1$. Reescribimos ahora a $F_\phi(s)$ como

$$\begin{aligned} F_\phi(s) &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Q}_p} \phi(x) |x|^{s-1} dx \\ &= \frac{\zeta_p(1-s)\phi(0)}{\zeta_p(s)} \int_{|x| \leq 1} |x|^{s-1} dx + \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left\{ \int_{|x| \leq 1} \{\phi(x) - \phi(0)\} |x|^{s-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x| > 1} \phi(x) |x|^{s-1} dx \right\} \end{aligned}$$

Esta nueva expresión define una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1 + 2\pi i k \log(1/p) : k \in \mathbb{Z}\}$. Primero porque al ser ϕ localmente constante en cero, entonces $\phi(x) - \phi(0)$ se anula cuando $|x|_p \leq p^{-l}$ para algún $l > 0$, lo que significa que $\{|x|_p : x \in \text{supp} \phi\}$ es un conjunto finito y por lo tanto

$$\int_{|x| \leq 1} \{\phi(x) - \phi(0)\} |x|^{s-1} dx = \sum_j p^{j(s-1)} \int_{|x|=p^j} \{\phi(x) - \phi(0)\} dx$$

con j recorriendo un número finito de índices. Lo mismo ocurre con

$$\int_{|x| > 1} \phi(x) |x|^{s-1} dx,$$

esto es, que resulta una combinación lineal de potencias $p^{j(s-1)}$ con j entero. Así

$$F_\phi(s) = \frac{\zeta_p(1-s)\phi(0)}{\zeta_p(s)} \sum_j C_j p^{j(s-1)}$$

para ciertas constantes complejas C_j y con j nuevamente recorriendo una cantidad finita de enteros. De esta forma $F_\phi(s)$ tiene sentido cuando en $\zeta_p(1-s)$

$$p^{-1+s} \neq 1,$$

es decir, cuando $s \neq \{1 + 2\pi i k \log(1/p)\}$, siendo en este caso holomorfa para cada s . \square

El núcleo de Riesz satisface una serie de propiedades muy importantes, una de ellas es que si consideramos para cada y la función $\phi(x+y)$, entonces $R^\alpha(\phi(x+y))$ resulta una función test de y para cada α fijo, satisfaciéndose además la siguiente relación de semigrupo

$$R^\beta(R^\alpha(\phi(x+y))) = R^{\alpha+\beta}(\phi).$$

Por comodidad notaremos el resultado que arroja $R^\alpha(\phi(x+y))$ como $(R^\alpha * \phi)(y)$, y solo probaremos un caso particular de lo que hemos comentado, que es lo siguiente:

Teorema 3.2.3. Para cada $p \leq \infty$, si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ entonces

$$R_p^0(f) = f(0)$$

Demostración. Caso $p = \infty$:

Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con M tal que $|f'(x)| \leq M$ y c tal que $f(x) = 0$ si $|x| > c$. Como $R_\infty^s(f)$ es holomorfa como función de s , en particular es una función continua, por lo que $R_\infty^{1/n}(f) \rightarrow R_\infty^0(f)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, vemos que

$$\begin{aligned} R_\infty^{1/n}(f) &= \frac{1}{\rho(1/n)} \int_{|x| \leq c} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^{1/n} dx \\ &+ \frac{2f(0)c^{1/n}}{\rho(1/n)n}. \end{aligned}$$

En particular el término

$$\left| \int_{|x| \leq c} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} |x|^{1/n} dx \right| \leq 2Mc,$$

luego, como $\rho(n^{-1})^{-1} \rightarrow 0$ cuando n crece, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_\infty^{1/n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0)c^{1/n} \pi^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \Gamma((n-1)/2n)}{\Gamma(1/2n + 1)} = f(0),$$

esto es, $R_\infty^0(f) = f(0)$.

caso $p < \infty$:

Imitamos el caso arquimediano, en este caso, también existe $c > 1$ tal que para todo s real con $s > 1$

$$\begin{aligned} R_p^s(f) &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{|x|_p \leq c} f(x) |x|_p^{s-1} dx \\ &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{|x|_p \leq c} \{f(x) - f(0)\} |x|_p^{s-1} dx \\ &+ \frac{f(0)\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{s-1} dx + \frac{f(0)\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{1 < |x| \leq c} |x|_p^{s-1} dx \end{aligned}$$

Ahora, como f continua y de soporte compacto, entonces $f(x) - f(0) \leq M$ para alguna constante M . Además, como también la norma toma un número finito de valores fuera de la vecindad donde $f(x) - f(0)$ se anula, entonces tenemos que

$$\int_{|x|_p \leq c} \{f(x) - f(0)\} |x|_p^{s-1} dx \leq M \sum_{j=k}^l p^{-j}$$

lo que significa

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{|x|_p \leq c} \{f(x) - f(0)\} |x|_p^{s-1} dx = \frac{\zeta_p(1-0)}{\zeta_p(0)} = 0$$

y por lo misma razón

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0)\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{1 < |x| \leq c} |x|_p^{s-1} dx = 0.$$

Por lo tanto podemos concluir que $R_p^0(f)$ es igual a

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} R_p^s(f) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0)\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{s-1} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0)\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} f(0) \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(1)} = f(0). \end{aligned}$$

□

El anterior resultado se puede reescribir así

Corolario 3.2.4. Para cada $p \leq \infty$

$$(R_p^0 * f)(y) = f(y).$$

3.3. Fórmula explícita de Weil

El objetivo de esta sección es mostrar lo que denominamos como la fórmula explícita de Weil, que es un caso particular de la fórmula original de Weil cuando la función L que se considera es la función zeta de Riemann (ver [6]). Además, también se usará para la fórmula explícita, una clase más restrictiva de funciones: Las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto. Esta restricción nos permite probar el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. Para cada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ las sumas parciales

$$\sum_{\zeta_*(a+it)=0, |t| \leq n} \mathcal{M}^{a+it}(f) = 0$$

convergen absolutamente.

Demostración. Sabemos que en la franja $\{s : n \leq \Im(s) \leq n+1\}$ la cantidad de ceros de $\zeta(s)$ es $O(\log n)$. Sin embargo al ser $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ podemos aplicar indefinidamente el teorema, lo que nos da que para alguna constante C

$$|\mathcal{M}^s(f)| \leq \frac{C}{|s|^k}$$

para cualquier k entero y siempre $0 \leq \Re(s) \leq 1$. De esta forma se puede ver por ejemplo, que

$$\sum_{\zeta_*(a+it)=0, |t| \leq n} \mathcal{M}^{a+it}(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C \log n}{n^3} < +\infty.$$

□

La conclusión del teorema anterior no siempre se da con las funciones con las que Weil trabaja, dándose la convergencia en general solo si se ordenan las sumas parciales como enunciamos en el teorema.

Teorema 3.3.2. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, y σ un número real con $\sigma > 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} -\frac{\zeta(s)}{\zeta'(s)} \mathcal{M}^s(f) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f(n) < +\infty.$$

Demostración. Primero, si $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos usando la fórmula inversión de Mellin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f(x))}{n^s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \left(\int_0^\infty f(x) \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{dx}{x} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \left(\int_0^\infty f(nu) u^s \frac{du}{u} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \mathcal{M}^s(f(nx)) ds \\ &= f(n) \end{aligned}$$

Observamos ahora que si $s = \sigma + it$ con σ constante, entonces para $M > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{M}^s(f) \sum_{n=1}^k \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| &= |\mathcal{M}^s(f)| \left| \sum_{n=1}^k \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| \\ &\leq \left| \frac{M}{s^2} \right| \sum_{n=1}^k \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \end{aligned}$$

y como

$$\left| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds}{|s|^2} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sigma^2 + t^2} \right| < \infty,$$

por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \mathcal{M}^s(f) \sum_{n=1}^k \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)}{n^s} ds \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \Lambda(n) f(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f(n). \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Teorema 3.3.3. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, y σ un número real con $\sigma > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} -\frac{\zeta'_\infty(s)}{\zeta_\infty(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \frac{1}{2} (\log 4\pi + \gamma) f(1) \\ &+ \int_1^\infty \left\{ f(x) - \frac{f(1)}{x} \right\} \frac{dx}{x - x^{-1}} \end{aligned}$$

Demostración. Calculamos la representación en series del integrando, usando la ya conocida para $\Gamma'(s)/\Gamma(s)$. De esta forma, al ser

$$-\frac{\zeta'_\infty(s)}{\zeta_\infty(s)} = \frac{1}{2}(\log \pi + \gamma) + \frac{1}{s} - s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(s+2n)}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2n(2n + \sigma + it)|} &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 2n\sigma} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

Además, al haber una constante $M > 0$ tal que $|\mathcal{M}^s(f)| \leq \left|\frac{M}{s^3}\right|$ con σ constante, entonces para cada entero positivo k

$$|\mathcal{M}^s(f)s| \sum_{n=1}^k \left| \frac{1}{2n(s+2n)} \right| \leq \frac{M}{24} \left(\frac{\pi}{|s|} \right)^2$$

De esta forma, como

$$\left| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds}{|s|^2} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sigma^2 + t^2} < +\infty$$

tenemos entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)s}{2n(s+2n)} ds = \int_{\Re(s)=\sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^s(f)s}{2n(s+2n)} \right) ds.$$

Observamos ahora que

$$\frac{s}{2n(s+2n)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{s+2n},$$

además de esto, consideramos para cada entero $n \geq 0$ la función

$$F_n(x) = - \int_x^{\infty} f(t)t^{-(2n+1)} dt$$

para $x \in (0, \infty)$. F_n está bien definida porque el integrando es suave y de soporte compacto, por lo que se trata de una integral definida, no de una integral impropia. Vemos también que $f(x) = F'_n(x)x^{2n+1}$, y que $\mathcal{M}^s(F_n(x)x^{2n})$ está definida por lo menos para $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1$, esto debido a que $F_n(x)$ se anula a partir de cierto punto, y $F_n(x)$ y x^δ con $\delta > 0$, están acotadas en $(0, \infty)$. Luego por el teorema 1.2.5, encontramos usando la fórmula de

inversión de Mellin, que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)s}{2n(s+2n)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)}{2n} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)}{s+2n} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)}{2n} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \mathcal{M}^s(F_n(x)x^{2n}) ds \\
&= \frac{f(1)}{2n} + F_n(1) \\
&= \frac{f(1)}{2n} - \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{2n+1}} dx \\
&= \int_1^\infty \frac{f(1)}{x^{2n+1}} dx - \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{2n+1}} dx \\
&= \int_1^\infty \frac{f(1) - f(x)}{x^{2n}} \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Nuevamente, la idea ahora es usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar el signo de la integral con el de la sumatoria. Para ello observamos primero que si $f(1) - f(x) = -f'(\xi)(x-1)$ para $x > 1$ y con $\xi \in (1, x)$, entonces como f' también resulta acotada, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\{f(1) - f(x)\} \left(\frac{1}{1-x^{-2}} - 1 \right) &= \frac{f(1) - f(x)}{x^2 - 1} \\
&\leq \frac{C(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&\leq \frac{C}{x+1}
\end{aligned}$$

Así, como $\int_1^\infty C(1+x)^{-1}x^{-1}dx = C \log 2$, entonces al usar series geométricas (se tiene que $0 < x^{-1} < 1$ en $(1, \infty)$), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|f(1) - f(x)|}{x} \sum_{n=1}^k \frac{1}{x^{2n}} &\leq \frac{|f(1) - f(x)|}{x(x^2 - 1)} \\
&\leq \frac{C}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

De esta forma llegamos usando el teorema de la convergencia dominada, a que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty \frac{f(1) - f(x)}{x^{2n}} \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \{f(1) - f(x)\} \left(\frac{1}{1-x^{-2}} - 1 \right) \frac{dx}{x}.$$

Volviendo ahora a la cuenta general, observamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma} \frac{\mathcal{M}^s(f)}{s} ds = \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{x}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$\int_1^\infty f(1) \left(1 - \frac{1}{1+x^{-1}} \right) \frac{dx}{x} = f(1) \log 2,$$

entonces sumando y restando $f(1) \log 2$, llegamos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} -\frac{\zeta'_\infty(s)}{\zeta_\infty(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \frac{1}{2}(\log 4\pi + \gamma)f(1) \\ &+ \int_1^\infty \left\{ \frac{f(x)}{1-x^{-2}} - \frac{f(1)x^{-1}}{1-x^{-2}} \right\} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

la cual es, salvo por un arreglo algebraico, la fórmula que queríamos probar. \square

Teorema 3.3.4. *Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces*

$$\mathcal{M}^0(f) + \mathcal{M}^1(f) - \sum_{\zeta_*(s)=0} \mathcal{M}^s(f) = \sum_p V_p(f)$$

con

$$V_p(f) = \log p \sum_{n \neq 0} f(p^n) \min(1, p^n)$$

si $p < \infty$, y

$$V_\infty(f) = (\gamma + \log 4\pi)f(1) + \int_1^\infty \left\{ f(x) + \frac{1}{x}f(x^{-1}) - \frac{2}{x}f(1) \right\} \frac{dx}{x-x^{-1}}.$$

Demostración. Observamos primero que si Q es un rectángulo cuyos vértices son

$$c+iT, c-iT, 1-c+iT, 1-c-iT,$$

con c y T reales positivos, $c > 1$, y Q dado de tal forma que su intersección con el conjunto de ceros de $\zeta_*(s)$ esté contenida en el interior de Q , entonces por el principio del argumento tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds = \mathcal{M}^0(f) + \mathcal{M}^1(f) - \sum_{\zeta_*(s)=0, |\Im(s)| \leq T} \mathcal{M}^s(f),$$

esto debido también a que los ceros y polos de $\zeta_*(s)$ se encuentran dentro de la franja $0 \leq \Re(s) \leq 1$, siendo los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad, $\mathcal{M}^0(f)$ y $\mathcal{M}^1(f)$, los términos que corresponden al polo simple de la función gamma, y al polo simple de la función zeta de Riemann respectivamente.

Ahora, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c+iT}^{1-c-iT} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{1-c+iT} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c-iT}^{c-iT} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \end{aligned}$$

la idea es que las integrales sobre los lados horizontales de Q , tiendan a cero cuando T sea cada vez más grande. El límite sin embargo no puede ser continuo ya que la rectas

$\mathfrak{J}(s) = T$ y $\mathfrak{J}(s) = -T$ pudieran intersectar algún cero de $\zeta(s)$, por lo que consideramos la sucesión $\{T_n\}_n$ del lema 1.4.6, para la que

$$\left| \frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \right| \leq M (\log T_n)^2$$

para algún $M > 0$ y siempre que $-\frac{1}{2} \leq \Re(s) \leq \frac{3}{2}$ y siempre que $|\mathfrak{J}(s)|$ coincida con T_n . De esta forma, bajo dichas condiciones tenemos

$$\left| \frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) \right| \leq M' \frac{(\log T_n)^2}{T_n^3} \leq \frac{M'}{T_n}.$$

Por lo tanto, si Q_n es el rectángulo en donde $T = T_n$, con c constante y suponiendo sin pérdida de generalidad que $c < 3/2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_n} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_n}^{c+iT_n} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c+iT_n}^{1-c-iT_n} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ O(1/T_n) \end{aligned}$$

Es decir, que existe el límite cuando n tiende a infinito, esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_n} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c+i\infty}^{1-c-i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds \end{aligned}$$

Es decir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c+i\infty}^{1-c-i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} - \sum_{\substack{\zeta_*(s)=0, |\mathfrak{J}(s)| \leq T}} \mathcal{M}^s(f) \\ &+ \mathcal{M}^0(f) + \mathcal{M}^1(f). \end{aligned}$$

Así al hacer el cambio de variable $s \mapsto 1-s$ en una de las integrales vemos usando la ecuación funcional de $\zeta_*(s)$, que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^s(f) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} -\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} \mathcal{M}^{1-s}(f) ds = - \sum_{\zeta_*(s)=0} \mathcal{M}^s(f) + \mathcal{M}^0(f) + \mathcal{M}^1(f).$$

Sin embargo no es difícil verificar por un cambio de variable que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{1-s}(f) &= \int_0^\infty f(x) x^{1-s} dx \\ &= \int_0^\infty f(x^{-1}) x^s dx \\ &= \mathcal{M}^s(f(x^{-1}) x^{-1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya que

$$\frac{\zeta'_*(s)}{\zeta_*(s)} = \frac{\zeta'_\infty(s)}{\zeta_\infty(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

entonces los teoremas 3.3.3 y 3.3.2 nos llevan al resultado deseado. \square

3.4. Fórmula explícita de Haran

En esta última sección mostraremos la fórmula explícita de Haran, y lo haremos reescribiendo la fórmula de Weil para la función zeta de Riemann, quedando establecida completamente en el lenguaje de adeles.

Teorema 3.4.1. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces*

$$\begin{aligned} 2 \int_1^\infty \left\{ f(x) + \frac{1}{x} f(x^{-1}) - \frac{2}{x} f(1) \right\} \frac{dx}{x - x^{-1}} &= \int_{|1-x|>1} \frac{f(|x|)}{|1-x|} dx \\ &+ \int_{|1-x|\leq 1} \frac{f(|x|) - f(1)}{|1-x|} dx \\ &- f(1) \log 4 \end{aligned}$$

Demostración. Ver apéndice. □

Teorema 3.4.2. *Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, y $f|_p \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ definida como $f|_p(x) = f(|x|_p)$, entonces*

$$V_p(f) = -\frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0}$$

Demostración. Caso $p = \infty$:

Para $s \neq 0$ tenemos usando la fórmula para la continuación analítica del núcleo de Riesz, que

$$\begin{aligned} (R_\infty^{-s} * f|_\infty) (1) &= -\frac{2 f|_\infty(1)}{s\rho(-s)} + \frac{1}{\rho(-s)} \left\{ \int_{|x|\leq 1} \frac{f|_\infty(1-x) - f|_\infty(1)}{|x|} |x|^{-s} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x|>1} f|_\infty(1-x) |x|^{-s-1} dx \right\} \end{aligned}$$

Así, al derivar tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (R_\infty^{-s} * f|_\infty) (1) &= f(1) \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{s\rho(-s)} \right) \\ &+ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho(-s)} \right) \left\{ \int_{|x|\leq 1} \frac{f(|1-x|) - f(1)}{|x|} |x|^{-s} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x|>1} f(|1-x|) |x|^{-s-1} dx \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho(-s)} \frac{d}{ds} \left(\int_{|x|\leq 1} + \int_{|x|>1} \right) \end{aligned}$$

Nos fijamos en que

$$\begin{aligned}
 -2 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s\rho(-s)} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma((1+s)/2)}{\Gamma(1-s/2)} \right) \\
 &= \pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma((1+s)/2) \frac{\Gamma'(1-s/2)}{2\Gamma(1-s/2)^2} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(1-s/2)} \frac{d}{ds} \left(\pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma((1+s)/2) \right) \\
 &= \pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma((1+s)/2) \frac{\Gamma'(1-s/2)}{2\Gamma(1-s/2)^2} \\
 &- \pi^{-\frac{1}{2}-s} \log \pi \frac{\Gamma((1+s)/2)}{\Gamma(1-s/2)} + \frac{\pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma'((1+s)/2)}{2\Gamma(1-s/2)}
 \end{aligned}$$

Por lo que usando los valores notables del corolario tal encontramos

$$\begin{aligned}
 -2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s\rho(-s)} \right) &= -\frac{1}{2}\gamma - \log \pi - \frac{1}{2}\gamma - \log 2 \\
 &= -(\gamma + \log 2\pi)
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho(-s)} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s\rho(-s)} \right) \\
 &= s \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s\rho(-s)} \right) + \frac{1}{s\rho(-s)}
 \end{aligned}$$

lo que significa que

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho(-s)} \right) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s\rho(-s)} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{-\frac{1}{2}-s} \Gamma((1+s)/2)}{\Gamma(1-s/2)} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que $1/\rho(-s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$, entonces al ensamblar todos los cálculos

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{ds} (R_\infty^{-s} * f|_\infty)(1) \Big|_{s=0} &= (\gamma + \log 2\pi) f(1) \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \int_{|x| \leq 1} \frac{f(|1-x|) - f(1)}{|x|} dx \right. \\
 &\left. + \int_{|x| > 1} f(|1-x|) |x|^{-1} dx \right\}
 \end{aligned}$$

El cambio de variable $x \rightarrow 1-x$ y el teorema 7 nos lleva a la igualdad deseada.

Caso $p < \infty$:

Usamos la fórmula para la continuación analítica para el caso no arquimediano. Esta es

$$\begin{aligned}
 \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) &= \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(1)} f(1) + \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \left\{ \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f|_p(1-x) - f|_p(1)}{|x|_p} |x|_p^{-s} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|x|_p > 1} f|_p(1-x) |x|_p^{-s-1} dx \right\} \\
 &= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-(1+s)}} f(1) + \frac{1-p^s}{1-p^{-(1+s)}} \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|1-x|_p) - f(1)}{|x|_p} |x|_p^{-s} dx \\
 &\quad + \frac{1-p^s}{1-p^{-(1+s)}} \int_{|x|_p > 1} f(|1-x|_p) |x|_p^{-s-1} dx
 \end{aligned}$$

De forma parecida al caso arquimediano al derivar el término

$$\frac{1-p^s}{1-p^{-(1+s)}} \frac{d}{ds} \left(\int_{|x|_p \leq 1} + \int_{|x|_p > 1} \right)$$

se anula cuando $s = 0$ por el factor $(1-p^{-s})$. De esta forma no es difícil ver

$$\begin{aligned}
 - \frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0} &= \frac{(1-p^{-1})p^{-(1+s)} \log p}{(1-p^{-(1+s)})^2} \Big|_{s=0} f(1) \\
 &\quad + \frac{p^s \log p}{1-p^{-(1+s)}} \Big|_{s=0} \left\{ \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|1-x|_p) - f(1)}{|x|_p} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|x|_p > 1} f(|1-x|_p) |x|_p^{-1} dx \right\}
 \end{aligned}$$

lo que se reduce

$$\begin{aligned}
 - \frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0} &= \frac{p^{-1} \log p}{1-p^{-1}} f(1) + \frac{\log p}{1-p^{-1}} \left\{ \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|1-x|_p) - f(1)}{|x|_p} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|x|_p > 1} f(|1-x|_p) |x|_p^{-1} dx \right\}
 \end{aligned}$$

En este punto hacemos el cambio de variable $x \rightarrow 1-x$, pero teniendo en cuenta que $|1-x|_p \leq \max\{1, |x|_p\}$ entonces la bola cerrada $\overline{B(0;1)} = \overline{B(1;1)}$, y por lo tanto sus complementos también. Esto significa que tras el cambio de variable encontramos

$$\begin{aligned}
 \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|1-x|_p) - f(1)}{|x|_p} dx + \int_{|x|_p > 1} f(|1-x|_p) |x|_p^{-1} dx &= \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|x|_p) - f(1)}{|1-x|_p} dx \\
 &\quad + \int_{|x|_p > 1} f(|x|_p) |1-x|_p^{-1} dx
 \end{aligned}$$

además, ya que $f(|x|_p) - f(1)$ se anula para todo $|x|_p = 1$, y que $|1-x|_p = |x|_p$ si $|x|_p \leq 1$,

tenemos en particular que

$$\begin{aligned}
 \int_{|x|_p \leq 1} \frac{f(|x|_p) - f(1)}{|1 - x|_p} dx &= \int_{|x|_p < 1} \frac{f(|x|_p) - f(1)}{|1 - x|_p} dx \\
 &= \int_{|x|_p < 1} \frac{-f(1)}{|1 - x|_p} dx + \int_{|x|_p < 1} \frac{f(|x|_p)}{|1 - x|_p} dx \\
 &= -f(1) \int_{p\mathbb{Z}_p} dx + \int_{|x|_p < 1} \frac{f(|x|_p)}{|1 - x|_p} dx \\
 &= -f(1)p^{-1} + \int_{|x|_p < 1} \frac{f(|x|_p)}{|1 - x|_p} dx
 \end{aligned}$$

al ensamblar este último cálculo en la cuenta general vemos que -

$$-\frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0} = \frac{\log p}{1 - p^{-1}} \left\{ \int_{|x|_p < 1} \frac{f(|x|_p)}{|1 - x|_p} dx + \int_{|x|_p > 1} f(|x|_p) |1 - x|_p^{-1} dx \right\}$$

Por lo que usando que las normas p -ádicas solo tienen como valores potencias de p , y que f es de soporte compacto, llegamos que

$$-\frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0} = \frac{\log p}{1 - p^{-1}} \left\{ \sum_{n < 0} f(p^n) \int_{|x|_p = p^n} dx + \sum_{n > 0} \frac{f(p^n)}{p^n} \int_{|x|_p = p^n} dx \right\}$$

Usando ahora que

$$\int_{|x|_p = p^n} dx = \sum_{a=1}^{p-1} \int_{ap^{-n} + p^{-n+1}\mathbb{Z}_p} dx = \sum_{a=1}^{p-1} \int_{p^{-n+1}\mathbb{Z}_p} dx = \frac{p-1}{p^{-n+1}}$$

si n es un entero negativo, y que

$$\int_{|x|_p = p^n} dx = \sum_{a=1, \text{mcd}(a,b)=1}^{p-1} \int_{a/p^n + \mathbb{Z}_p} dx = \sum_{a=1, \text{mcd}(a,b)=1}^{p-1} \int_{\mathbb{Z}_p} dx = p^n - p^{n-1}$$

De esta forma obtenemos finalmente

$$-\frac{d}{ds} \left(R_p^{-s} * f|_p \right) (1) \Big|_{s=0} = \log p \left\{ \sum_{n < 0} f(p^n) p^n + \sum_{n > 0} f(p^n) \right\}.$$

□

Teorema 3.4.3. *Sea ω_p la función característica de \mathbb{Z}_p^\times , entonces*

$$c_p(s) = (R_p^{-s} * \omega_p) (1) = 1 + \frac{(p^s - 1)(1 - p^{-s})}{p - p^{-s}}$$

Demostración. Observamos primero que por ser las normas p -ádicas ultramétricas para

$p < \infty$, todas las bolas tienen el mismo centro, esto es $\overline{B(0;1)} = \overline{B(1;1)}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1)} &= \int_{|x|_p \leq 1} |x|^{s-1} dx \\ &= \int_{|x|_p \leq 1} |1-x|^{s-1} dx \\ &= \int_{|x|_p < 1} |1-x|^{s-1} dx + \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |1-x|^{s-1} dx \\ &= \int_{|x|_p < 1} |1-x|^{s-1} dx + \int_{\mathbb{Q}_p} \omega_p(x) |1-x|^{s-1} dx \end{aligned}$$

De esta forma, siendo $|1-x|_p = 1$ cuando $|x|_p < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} \omega_p(x) |1-x|^{s-1} dx &= \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1)} - \int_{|x|_p < 1} dx \\ &= \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1)} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Así, cuando $\Re(s) > 0$ encontramos que

$$\begin{aligned} (R_p^s * \omega_p)(1) &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Q}_p} \omega_p(x) |x|^{s-1} dx \\ &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left\{ \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1)} - \frac{1}{p} \right\} \\ &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(1)} - \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)p} \\ &= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1+s}} - \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-1+s})p} \end{aligned}$$

Como está formula da también una continuación analítica para $(R_p^s * \omega_p)(1)$ cuando $\Re(s) > 0$, tenemos entonces que

$$(R_p^{-s} * \omega_p)(1) = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}} - \frac{1-p^s}{(1-p^{-1-s})p}$$

para todo $-s$ en el que el núcleo de Riesz esté definida. \square

Lema 3.4.4. *Para todo $p \leq \infty$ se da que*

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (R_p^{-s} * \varphi)(1) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{c_p(s)} (R_p^s * \varphi)(1).$$

Lema 3.4.5. *Tenemos para cada $p \leq \infty$ que si $\phi(x) = \varphi(qx)$, entonces*

$$(R_p^{-s} * \varphi)(q) = |q|_p^s (R_p^{-s} * \phi)(1).$$

Demostración. Observe que para todo $p \leq \infty$, cuando $\Re(s) > 1$, entonces por el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned} (R_p^s * \varphi)(q) &= \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x-q) |x|^{s-1} dx \\ &= |q|_p^s \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(q(x-1)) |x|^{s-1} dx \\ &= |q|_p^s (R_p^s * \phi)(1) \end{aligned}$$

Luego usando la unicidad de la continuación analítica la igualdad se preserva. \square

Finalmente, denotamos a

$$\frac{1}{c_p^{(s)}} (R_p^{-s} * f)(v)$$

por $(\Delta_p^s f)(v)$, y a su vez, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$, definimos para un idele $a = (a_p)_p$, la función de variable compleja

$$(\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(a) = \prod_{p \leq \infty} (\Delta_p^s \varphi_p)(a),$$

cuando φ es producto de funciones $\varphi_p \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^\times)$. Por linealidad se puede definir $(\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(a)$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$.

Teorema 3.4.6. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$ radial, entonces*

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) = \sum_{\zeta_*(s)=0} \mathcal{M}^s(\varphi) - \mathcal{M}^0(\varphi) - \mathcal{M}^1(\varphi).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^\times)$ una función radial y representada además por un tensor elemental, tenemos entonces que para $x = (x_p)_p \in \mathbb{A}^\times$

$$\varphi(x) = \prod_p \varphi_p(x_p)$$

debemos tener presente siempre que en realidad se trata de un producto finito. Así, para un racional q distinto de cero

$$(\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) = \prod_p (\Delta_p^s \varphi_p)(q),$$

que nuevamente se trata de un producto finito gracias a las constantes normalización. De esta forma usando el teorema 3.4.5

$$(\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) = \prod_p (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1).$$

Calculomos entonces

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \prod_p (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1),$$

esto es, aplicando iterativamente la regla del producto y evaluando en cero, con lo que encontramos lo siguiente usando además que $\Delta_v^0 \varphi_v = \varphi_v$,

$$\frac{d}{ds} (\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) \Big|_{s=0} = \sum_p \left\{ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \prod_{v \neq p} \varphi_v(q) \right\}$$

En este punto llevamos ya un cálculo intermedio, así que observemos ahora que si consideramos la canonización de $\tilde{\varphi}$ dada por el teorema 2.5.3, encontramos para $p < \infty$

$$\tilde{\varphi}(|x_p|_p) = \sum_q \varphi \left(q \left(|x_p|_p, 1, \dots, 1, \dots \right) \right)$$

o lo que es exactamente lo mismo ya que $|x_p| = 1$ por estar x en los ideales,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(|x_p|_p) &= \sum_q \varphi(q(1, 1, \dots, x_p, \dots, 1, \dots)) \\ &= \sum_q \left\{ \varphi_p(qx_p) \prod_{v \neq p} \varphi_v(q) \right\}\end{aligned}$$

lo que igual se verifica en el caso $p = \infty$.

Ahora, como para cada p

$$A_{pq} = \prod_{v \neq p} \varphi_v(q)$$

resulta constante, tenemos para cada p que $\tilde{\varphi}(|x_p|_p)$ es una combinación lineal

$$\sum_q A_{pq} \varphi_p(qx_p)$$

de $\varphi_p(q \cdot)$, por lo que usando la linealidad de Δ_p^s vemos que

$$\Delta_p^s \tilde{\varphi}|_p = \sum_q A_{pq} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))$$

y por consiguiente

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \tilde{\varphi}|_p)(1) = \sum_q A_{pq} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \right).$$

Es así como al considerar la suma recorriendo p

$$\begin{aligned}\sum_p \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \tilde{\varphi}|_p)(1) &= \sum_p \sum_q A_{pq} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \right) \\ &= \sum_q \sum_p A_{pq} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \right)\end{aligned}$$

en donde

$$\sum_p A_{pq} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \right) = \sum_p \left\{ \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \varphi_p(qx_p))(1) \prod_{v \neq p} \varphi_v(q) \right\},$$

esto es

$$\sum_p \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \tilde{\varphi}|_p)(1) = \sum_q \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q)$$

Finalmente, haciendo un último ajuste tenemos con el lema 3.4.4

$$\begin{aligned}\sum_q \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_{\mathbb{A}^\times}^s \varphi)(q) &= \sum_p \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Delta_p^s \tilde{\varphi}|_p)(1) \\ &= \sum_p \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (R_p^{-s} * \tilde{\varphi}|_p)(1) \\ &= \sum_{\zeta_*(s)=0} \mathcal{M}^s(\tilde{\varphi}) - \mathcal{M}^0(\tilde{\varphi}) - \mathcal{M}^1(\tilde{\varphi})\end{aligned}$$

que es vía el teorema 2.5.3 lo que queríamos probar. \square

Apéndice

Lo siguiente son los cálculos correspondientes al teorema 3.4.1

$$\begin{aligned}
 \int_{|1-x|>1} \frac{f(|x|)}{|1-x|} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{f(-x)}{1-x} dx + \int_2^{\infty} \frac{f(x)}{x-1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{1+x} dx + \int_2^{\infty} \frac{f(x)}{x-1} dx \\
 &= \int_2^{\infty} \frac{f(x)}{1+x} dx + \int_2^{\infty} \frac{f(x)}{x-1} dx \\
 &\quad + \int_0^2 \frac{f(x)}{1+x} dx
 \end{aligned}$$

En particular

$$\int_2^{\infty} \frac{f(x)}{x+1} dx + \int_2^{\infty} \frac{f(x)}{x-1} dx = 2 \int_2^{\infty} \frac{f(x)x^2}{x^2-1} \frac{dx}{x}$$

luego

$$\int_{|1-x|>1} \frac{f(|x|)}{|1-x|} dx = 2 \int_2^{\infty} \frac{f(x)x^2}{x^2-1} \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{f(x)}{1+x} dx.$$

Ahora sumamos y restamos $f(1)(\log 4 - \log 3)$, con el lema 3.4.7

$$\begin{aligned}
 \int_{|1-x|>1} \frac{f(|x|)}{|1-x|} dx &= 2 \int_2^{\infty} \frac{f(x)x^2}{x^2-1} \frac{dx}{x} - 2f(1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)x} \\
 &\quad + 2f(1) \log \frac{2}{\sqrt{3}} + \int_0^2 \frac{f(x)}{1+x} dx \\
 &= 2 \int_2^{\infty} \frac{f(x)x^2 - f(1)}{x^2-1} \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{f(x)}{1+x} dx \\
 &\quad + f(1) \log \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\int_{|1-x|\leq 1} \frac{f(|x|) - f(1)}{|1-x|} dx = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx + \int_1^2 \frac{f(x) - f(1)}{x-1} dx$$

Así que

$$\begin{aligned}
\int_{|1-x|\leq 1} \frac{f(|x|) - f(1)}{|1-x|} dx &+ \int_0^2 \frac{f(x) dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx + \int_1^2 \frac{f(x) - f(1)}{x-1} dx \\
&+ \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+x} + \int_1^2 \frac{f(x) dx}{1+x} \\
&= \int_0^1 \frac{2f(x) - f(1) - f(1)x}{1-x^2} dx \\
&+ \int_1^2 \frac{2f(x)x - f(1)x - f(1)}{x^2-1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{2f(x) - 2f(1)x}{1-x^2} dx + \int_0^1 \frac{f(1)x - f(1)}{1-x^2} dx \\
&+ \int_1^2 \frac{2f(x)x^2 - f(1)x^2 - f(1)x}{x^2-1} \frac{dx}{x} \\
&= 2 \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)x}{1-x^2} dx - f(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\
&+ \int_1^2 \frac{2f(x)x^2 - f(1)x^2 - f(1)x}{x^2-1} \frac{dx}{x} \\
&= 2 \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)x}{1-x^2} dx - f(1) \log 2 \\
&+ 2 \int_1^2 \frac{f(x)x^2 - f(1) dx}{x^2-1} \frac{dx}{x} \\
&- f(1) \int_1^2 \frac{x^2 + x - 2}{x^2-1} \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Ensamblando todas las identidades, y usando el lema 3.4.8, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\int_{|1-x|>1} \frac{f(|x|)}{|1-x|} dx + \int_{|1-x|\leq 1} \frac{f(|x|) - f(1)}{|1-x|} dx &= 2 \int_2^\infty \frac{f(x)x^2 - f(1) dx}{x^2-1} \frac{dx}{x} \\
&+ 2 \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)x}{1-x^2} dx \\
&- f(1) \log 4
\end{aligned}$$

Lema 3.4.7.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x} = \log \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Demostración. Cálculo rutinario

$$\begin{aligned}
\int_2^t \frac{dx}{(x^2-1)x} &= \int_2^t dx \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log(t+1) + \frac{1}{2} \log(t-1) - \log t \\
&+ \log \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{t^2-1}{t^2} \right) + \log \frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

con esto

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{dx}{(x^2-1)x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) + \log \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \log \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.8.

$$\int_1^2 \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \frac{dx}{x} = \log 8 - \log 3$$

Demostración. cálculo directo

□

Bibliografía

- [1] Rami Shakarchi Elias M. Stein. *Complex analysis*, volume Vol.2. of *Princeton lectures in analysis 2*. Princeton University Press, 2003.
- [2] S. Haran. Riesz potentials and explicit sums in arithmetic. *Invent. Math.*, 101:697–703, 1990.
- [3] Shai Haran. *Index theory, potential theory, and the Riemann hypothesis*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1991.
- [4] David Hilbert. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8:180–183, 1900.
- [5] Anatoly Kochubei. *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*. Marcel Dekker, Inc, New York, 2001.
- [6] Carlos Moreno. *Advanced analytic number theory: L-functions*. Mathematical Surveys and Monographs 115. American Mathematical Society, reprint edition, 2005.
- [7] S. J. Patterson. *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*. Cambridge studies in advanced mathematics 14. Cambridge University Press, 1988.
- [8] Valéria de Magalhães Iorio Rafael José Iorio Jr. *Fourier analysis and partial differential equations: An Introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1 edition, 2001.
- [9] Fred Richman. Real numbers and other completions. *Mathematical Logic Quarterly*, 54(1):98–108, 2008.
- [10] Terence Tao. Tate’s proof of the functional equation. <https://terrytao.wordpress.com/2008/07/27/tates-proof-of-the-functional-equation/>, 2008. Accedido 07-08-2020.
- [11] André Weil. Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers. *Comm. Sémin. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]*, 1952(Tome Supplémentaire):252–265, 1952.