

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Entropía Bekenstein-Hawking: una conexión entre la teoría de la información y la termodinámica

Juan Carlos Delgado Ballén

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2024



# Entropía Bekenstein-Hawking: una conexión entre la teoría de la información y la termodinámica

Juan Carlos Delgado Ballén

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de:  
**Magíster en Ciencias - Física**

Director:  
Ph.D. José Robel Arenas Salazar

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2024



*“El corazón es un triángulo equilátero que el círculo del mundo no puede llenar —según los matemáticos— sino que los ángulos se quedan vacíos, anhelando ser llenados.”*

***Thomas Brooks***



# Agradecimientos

Al Señor Jesucristo que me ha dado fortaleza de espíritu para transitar por el camino de la vida y me ha conectado con el Padre Eterno, quien, por Su infinita misericordia y bondad, no ha permitido que me consuma la oscuridad.

Al profesor José Robel Arenas, por haber posibilitado que me sumergiera en la termodinámica de agujeros negros y sus vínculos con la teoría de la información. Agradezco su amabilidad, comprensión y acertada orientación en el desarrollo del presente trabajo.

A mi familia, por la paciencia y el apoyo incondicional.



# Resumen

## **Entropía Bekenstein-Hawking: una conexión entre la teoría de la información y la termodinámica**

Se modela la entropía de Bekenstein-Hawking con base en el conteo de microestados de la radiación Hawking en los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Se muestra la conservación de la información y la entropía tras un proceso de evaporación de un agujero negro por la radiación Hawking vía tunelamiento cuántico.

**Palabras clave:** entropía Bekenstein-Hawking, radiación Hawking, microestados, agujero negro.

# Abstract

## **Bekenstein-Hawking entropy: a connection between information theory and thermodynamics**

The Bekenstein-Hawking entropy is modeled based on the count of microstates of Hawking radiation in Schwarzschild and Reissner-Nordström black holes. The conservation of information and entropy is shown in a process of evaporation of a black hole by Hawking radiation through quantum tunneling.

**Keywords:** Bekenstein-Hawking entropy, Hawking radiation, microstates, black hole.

# Notaciones y convenciones

En el presente documento se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

I. La signatura de la métrica utilizada es  $(-, +, +, +)$ .

II. En relación a las constantes físicas, se establece en la mayoría de resultados que:

$$c = \hbar = G = k_B = 1,$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz,  $\hbar$  la constante de Planck,  $G$  la constante gravitacional y  $k_B$  la constante de Boltzmann.

III. La entropía Bekenstein-Hawking se ha abreviado como  $S_{BH}$ .

# Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Notaciones y convenciones	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamento teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Teoría de la información . . . . .	3
2.1.1. Medición de la información y unidades . . . . .	4
2.1.2. Entropía de Shannon . . . . .	4
2.1.3. Algunas propiedades de relación de la entropía . . . . .	5
2.2. Agujeros negros clásicos . . . . .	6
2.3. Leyes de la mecánica de los agujeros negros y conexión con la termodinámica	10
2.4. Entropía Bekenstein-Hawking . . . . .	12
2.5. Radiación Hawking . . . . .	14
2.6. Preliminares de mecánica cuántica . . . . .	15
2.6.1. La aproximación WKB . . . . .	15
2.6.2. Tunelamiento a través de una Barrera de Potencial . . . . .	17
<b>3. Radiación Hawking en el modelo Parikh y Wilczek</b>	<b>20</b>
3.1. Coordenadas no singulares . . . . .	20
3.2. Geodésicas radiales nulas . . . . .	22
3.3. Tasa de emisión a través del horizonte de eventos . . . . .	22
3.4. Tunelamiento cuántico en la radiación Hawking . . . . .	23
3.5. Efecto túnel en agujeros negros cargados . . . . .	26
<b>4. Información y entropía en la radiación Hawking</b>	<b>28</b>
4.1. Relación entre información y entropía termodinámica . . . . .	28
4.2. Relación entre la entropía de Shannon y la de Boltzmann . . . . .	30
4.3. Conservación de la información y la entropía . . . . .	30

4.3.1.	Preservación de la información y entropía en la radiación Hawking de un agujero negro de Schwarzschild . . . . .	34
4.3.2.	Preservación de la información y entropía en la radiación Hawking de un agujero negro de Reissner-Nordström . . . . .	35
<b>5.</b>	<b>Número de microestados de un agujero negro y su entropía Bekenstein-Hawking</b>	<b>39</b>
5.1.	Agujero negro de Schwarzschild . . . . .	39
5.2.	Agujero negro de Reissner-Nordström . . . . .	41
5.3.	Agujero negro extremo de Reissner-Nordström . . . . .	42
<b>6.</b>	<b>Una mirada a la interpretación de la entropía Bekenstein-Hawking</b>	<b>44</b>
6.1.	Entropía e información del agujero negro y su radiación . . . . .	44
6.2.	Entropía en el proceso de colisión de dos agujeros negros. . . . .	46
6.2.1.	Entropía en la radiación gravitacional . . . . .	47
6.3.	Entropía en el proceso de materia cayendo en un agujero negro . . . . .	47
6.4.	Significado de la entropía en la radiación Hawking . . . . .	48
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A.</b>	<b>Ejemplo cuantificación de la información</b>	<b>52</b>
<b>B.</b>	<b>Demostración con el espectro de emisión de partículas cargadas</b>	<b>55</b>
<b>C.</b>	<b>Correlaciones en la radiación Hawking</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

2-1.	Diagrama de la comunicación planteado por Shannon. ( <i>Tomado de [1]</i> ) . . .	3
2-2.	Fuente de información discreta . . . . .	5
2-3.	Relación entre las entropías. ( <i>Tomado y adaptado de [2]</i> ) . . . . .	6
2-4.	Estructura del Agujero negro de Kerr visto paralelamente a su eje de rotación. ( <i>Tomado de [3]</i> ) . . . . .	9
2-5.	Radiación Hawking. ( <i>Tomado y adaptado de [4]</i> ) . . . . .	14
2-6.	Barrera potencial cuyas regiones clásicamente permitidas son $x < x_1$ y $x > x_2$ . ( <i>Tomado de [5]</i> ) . . . . .	17
3-1.	Diagrama heurístico del proceso de tunelamiento. ( <i>Tomado de [6]</i> ) . . . . .	23
4-1.	Emisión sucesiva de $w_1$ y $w_2$ . ( <i>Tomado y adaptado de [7]</i> ) . . . . .	31
4-2.	Emisión de una partícula con energía $w_T$ . ( <i>Tomado y adaptado de [7]</i> ) . . . . .	32

# Lista de Tablas

2-1. Analogía entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la mecánica de los agujeros negros. . . . .	12
--	----

# Capítulo 1

## Introducción

El universo en que habitamos usualmente es descrito en términos de cantidades físicas como la masa y la velocidad, sin embargo otra cantidad tan importante y un poco menos conocida es la información. Fueron los trabajos de Claude Shannon [1], que le dieron un soporte matemático a la teoría de la información en la cual el *bit* es la unidad fundamental de medida. Con el tiempo la conservación de la información se ha tomado como principio fundamental de la naturaleza [8], que al incorporarlo en la mecánica cuántica se obtiene como resultado la evolución unitaria de un sistema cuántico: *un estado puro evolucionará a otro estado puro, y nunca evolucionará a un estado mixto*. Tanto en mecánica cuántica como en clásica, la información se conserva en un sistema cerrado [9].

Entre los fenómenos físicos que han puesto la información en un escenario relevante, los agujeros negros han sido uno de los más interesantes. A principios de los años 70, Jacobo Bekenstein tomó como base fundamental la teoría de la información y propuso una expresión para la entropía de un agujero negro [10,11], posibilitando un primer acercamiento entre estos objetos y la termodinámica. Poco tiempo después a estos trabajos, Stephen Hawking utilizando mecánica cuántica, descubrió que los agujeros negros deberían emitir partículas en forma de radiación térmica con una temperatura proporcional a la gravedad superficial [12,13] encontrando una expresión para la entropía coherente con la que había hallado Bekenstein. Con este resultado se logra precisar la termodinámica de los agujeros negros, que inicialmente se estableció como una analogía entre las leyes de la dinámica de estos objetos y la termodinámica.

Con el tiempo se mostraría que la evaporación de un agujero negro por medio de la radiación Hawking, ocurre como un proceso irreversible con un incremento de la entropía total [14] y por la naturaleza térmica del espectro de la radiación se tiene que ésta no transmite ninguna información. Así, después de que un objeto caiga en el agujero negro surge la pregunta esencial: ¿a dónde va la información? puesto que se pasa de un estado cuántico puro a uno mezclado. En pocas palabras, el espectro de radiación térmica de un agujero negro descu-

bierto por Hawking, no conserva la entropía ni la información y finalmente conduce a lo que se conoce como *la paradoja de la pérdida de la información*.

Revisiones posteriores al tratamiento original de Hawking encontraron que no se tenía en cuenta el principio de conservación de la energía y a comienzos de este siglo, Wilczek y Parikh proponen la corrección de la radiación Hawking utilizando la conservación de la energía y donde se representa la fuente de radiación como un efecto de tunelamiento cuántico en el cual se obtiene un espectro no térmico para el agujero negro de Schwarzschild [15]. Utilizando este resultado, Zhang *et al.* [16] descubrieron la existencia de correlaciones en la radiación Hawking (tratada como la emisión de partículas no térmicas), lo que implica que estas pueden llevar información fuera del agujero negro y que toda la información se podría recopilar mediante la recolección de estas partículas. Otra consecuencia importante es que la entropía se conserva en el proceso de evaporación y para llegar a este resultado, Zhang *et al.* han calculado la entropía del sistema de radiación obtenido después de la evaporación completa del agujero negro, coincidiendo con la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro inicial. De esta manera se vislumbra una posible solución a la paradoja de la pérdida de la información, desde la perspectiva de la probabilidad y teoría de la información.

El objetivo general del presente trabajo es modelar la entropía de Bekenstein-Hawking con base en la teoría de la información y la termodinámica, tomando como referencia los trabajos de Zhang *et al.* y desarrollos posteriores a él, cuyas investigaciones gravitan entorno a dos problemáticas que han surgido desde los descubrimientos de Hawking y que al sol de hoy continúan abiertas: la paradoja de la información y el significado de la entropía de un agujero negro.

El documento se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 3 se reproduce el fenómeno de la radiación Hawking como tunelamiento cuántico a través del horizonte de eventos del agujero negro con el modelo propuesto por Parikh-Wilczek [15]. El capítulo 4 muestra cómo a partir de la relación entre información y entropía se genera una condición necesaria y suficiente sobre el espectro de emisión, para que el fenómeno de radiación Hawking suceda como un proceso unitario (en particular se demuestra que la tasa de tunelamiento encontrada por Parikh y Wilczek cumple dicha condición). Siguiendo a Cai *et al.* [17], en el capítulo 5 se obtiene la  $S_{BH}$  para los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y el caso extremal de este último, con el conteo de microestados de las respectivas radiaciones Hawking. Con el ánimo de bordear la problemática del significado de la entropía de un agujero negro, en el capítulo 6 se realiza una descripción de la interpretación adoptada por Zhang *et al.* con respecto a  $S_{BH}$ .

# Capítulo 2

## Fundamento teórico

### 2.1. Teoría de la información

Los orígenes de la teoría de la información, se remontan a la publicación en 1948 de *A Mathematical Theory of Communication*. por Claude E. Shannon. El título de este extenso artículo o tratado publicado en *The Bell System Technological Journal*, es muy sugerente: la teoría de la información como disciplina científica estará más relacionada con los aspectos de la cuantificación de la información que con los aspectos de significado que pueda dar lugar un mensaje que llega a distintos receptores. Según Shannon, dichos factores semánticos de la comunicación son irrelevantes para el problema de la ingeniería.

De forma general, un sistema de comunicación está conformado como en la figura 2-1. El objeto de la información es el mensaje, que está constituido por un conjunto organizado de datos procesados.

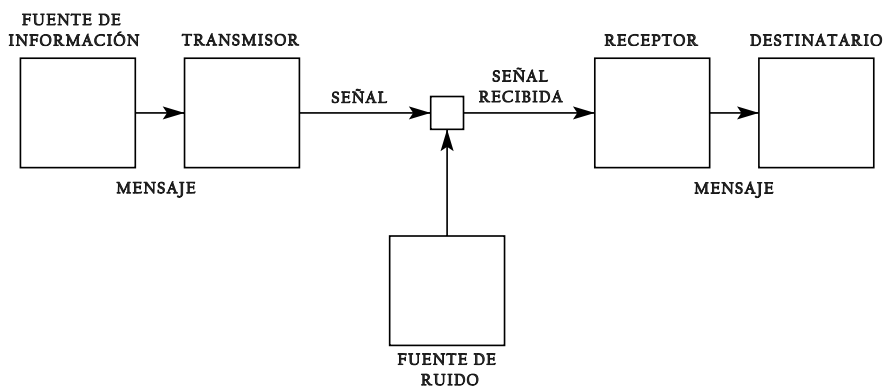


Figura 2-1: Diagrama de la comunicación planteado por Shannon. (Tomado de [1])

### 2.1.1. Medición de la información y unidades

Sea  $E$  un suceso que puede ocurrir con probabilidad  $P(E)$ . Si  $E$  se llega a presentar, entonces se dice que se ha obtenido o recibido

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)} \quad (2-1)$$

unidades de información<sup>1</sup>. Dependiendo de la base del logaritmo que se utilice en la fórmula (2-1), se define la unidad de información:

- Con logaritmo de base 2, la unidad correspondiente de información es el *bit* (abreviación de *binary unit*)

$$I(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)} \quad \text{bits} \quad (2-2)$$

- Con logaritmo natural, la unidad recibe el nombre de *nat* (abreviación de *natural unit*)

$$I(E) = \ln \frac{1}{P(E)} \quad \text{nats} \quad (2-3)$$

- Con logaritmo de base 10, se distingue la unidad de información como el *Hartley*

$$I(E) = \log_{10} \frac{1}{P(E)} \quad \text{Hartleys} \quad (2-4)$$

La conversión entre las distintas unidades queda definida por

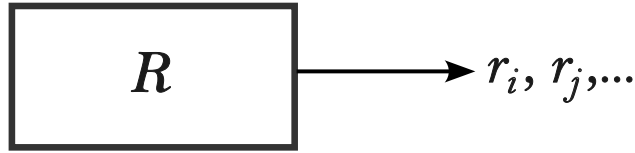
$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x. \quad (2-5)$$

Convencionalmente, el sistema de unidades utilizado en información es el sistema binario donde su unidad fundamental es el *bit*. La condición binaria es la que posee una cualidad biestable, por consiguiente puede existir uno de dos estados: encendido o apagado, sí o no, marca o espacio, magnetizado o desmagnetizado, y así sucesivamente. En el sistema numérico binario esas dos condiciones están representadas por los dígitos 1 y 0.

### 2.1.2. Entropía de Shannon

Considérese una fuente de información  $R$  (figura 2-2) que emite un conjunto de símbolos pertenecientes al alfabeto finito y fijo  $\{r_1, \dots, r_n\}$ , cuyas probabilidades de ocurrencia son respectivamente  $P(r_1), \dots, P(r_n)$ .

<sup>1</sup>En el apéndice A se muestra un ejemplo sencillo de cómo se puede cuantificar en *bits* la información contenida en un mensaje, y se pone en evidencia el sentido de usar la función logaritmo para la medición de la información.



**Figura 2-2:** Fuente de información discreta

De acuerdo con la ecuación (2-1), la cantidad de información que aporta la presencia de cada símbolo viene dada por

$$I(r_i) = \log \left( \frac{1}{P(r_i)} \right). \quad (2-6)$$

Así, la cantidad de información media por símbolo de la fuente es

$$\sum_R P(r_i) I(r_i). \quad (2-7)$$

Esta última magnitud recibe el nombre de entropía de Shannon, cuya forma explícita se obtiene al remplazar (2-6) en (2-7):

$$S(R) = \sum_{i=1}^n P(r_i) \log \left( \frac{1}{P(r_i)} \right) = - \sum_{i=1}^n P(r_i) \log (P(r_i)). \quad (2-8)$$

En términos de probabilidad, esta entropía se puede interpretar de la siguiente manera:

*Supongamos que se conoce el valor de una variable aleatoria  $X$ . La entropía de Shannon de  $X$  cuantifica la cantidad de información que obtenemos, en promedio, cuando conocemos el valor de  $X$ . Una visión alternativa es que la entropía de  $X$  mide la cantidad o la incertidumbre acerca de  $X$  antes de conocer su valor. Estos dos puntos de vista son complementarios, podemos ver la entropía, ya sea como una medida de la incertidumbre antes de conocer el valor de  $X$ , o como una medida de la información de lo mucho que se ha ganado después de conocer el valor de  $X$  [2].*

### 2.1.3. Algunas propiedades de relación de la entropía

Si se tiene dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , surge la pregunta de cómo se relaciona el contenido de información de  $X$  con el contenido de información de  $Y$ . Los siguientes conceptos ayudarán a esclarecer esta situación.

1. **Entropía conjunta:** si se tiene un sistema de las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , la entropía conjunta mide la cantidad de entropía que está contenida en este sistema y se define como:

$$S(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y). \quad (2-9)$$

2. **Entropía condicional:** es una medida de la incertidumbre que se tiene, en promedio, sobre el valor de  $X$ , dado que conocemos el valor de  $Y$ :

$$S(X | Y) = S(X, Y) - S(Y). \quad (2-10)$$

3. **Información mutua:** esta cantidad mide la dependencia estadística entre las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Más precisamente, mide la información o reducción de la incertidumbre de la variable  $X$  debido al conocimiento del valor de  $Y$ :

$$I(X : Y) = S(X) + S(Y) - S(X, Y) = S(X) - S(X|Y). \quad (2-11)$$

La figura 2-3 ilustra las anteriores relaciones:

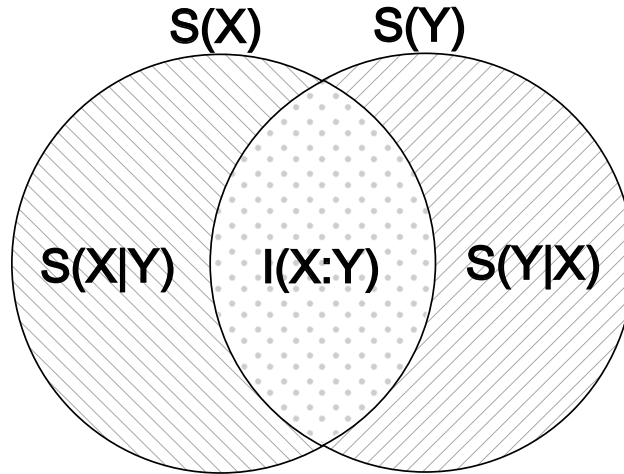


Figura 2-3: Relación entre las entropías. (Tomado y adaptado de [2])

## 2.2. Agujeros negros clásicos

Inicialmente los agujeros negros surgen como una solución matemática a las ecuaciones de la relatividad general de Einstein. Desde un punto de vista formal, un agujero negro es un espacio-tiempo que posee un horizonte (horizonte de eventos), que actúa de tal manera que el exterior del horizonte está incomunicado en relación con el interior, y además tiende a ser asintóticamente una variedad plana donde los efectos gravitatorios son nulos, y el espacio-tiempo adopta la métrica de Minkowski [18]. Ya desde un punto de vista más intuitivo y físico, se pueden definir como una región del espacio-tiempo que contiene una concentración tan elevada de materia que nada puede escapar de su gravedad, ni siquiera la luz.

A diferencia de otros objetos compactos en el universo (tales como las enanas blancas y las estrellas de neutrones que se caracterizan por tener elevadas concentraciones de materia), un

agujero negro resulta ser un objeto muy simple para un observador externo. Se sabe de él todo si se conocen los parámetros: masa, momentum angular y carga eléctrica. Esto último está establecido por un teorema: “el agujero negro no tiene pelo”. La emisión de ondas gravitacionales que acompaña la formación de un agujero negro lo afeita para no dejarle más que su masa ( $M$ ), momentum angular ( $J$ ) y carga eléctrica  $Q$  [19].

Lo anterior sugiere que desde un punto de vista clásico, existen 4 tipos de agujero negro, los cuales fueron bautizados con los nombres de quienes encontraron las soluciones a las ecuaciones de la relatividad general: agujero negro de Schwarzschild (solo depende de  $M$ ), Reissner-Nordström (depende de  $M$  y  $Q$ ), el de Kerr (depende de  $M$  y  $J$ ) y por último el más general que es el de Kerr-Newman (depende de  $M$ ,  $J$  y  $Q$ ).

- **Agujero negro de Schwarzschild:** La primer solución exacta a las ecuaciones de la relatividad general fue encontrada por el alemán Karl Schwarzschild en 1916. Para comprender intuitivamente el significado de esta solución matemática, imaginemos un objeto esférico de masa  $M$  y radio  $r$ . En la medida que  $r$  se reduce, la gravedad del objeto se incrementará, hasta que llega un momento en que su densidad es tan grande, que ni siquiera la luz puede escapar de su gravedad. El valor crítico que debe tomar  $r$  para que esto ocurra se denomina radio de Schwarzschild y se calcula mediante la ecuación

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2-12)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $c$  la rapidez de la luz en el vacío. Un agujero negro de Schwarzschild tiene como característica su horizonte de eventos situado a un radio de Schwarzschild. Cualquier objeto que no rote y no tenga carga, con un radio menor a su radio de Schwarzschild, formaría un agujero negro.

La métrica que corresponde a la solución a este tipo de agujero negro, se le denomina métrica de Schwarzschild la cual está dada en coordenadas polares  $\{t, r, \theta, \phi\}$  [20]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2-13)$$

donde  $d\Omega^2$  es la métrica de una 2-esfera unitaria

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2-14)$$

Entre las propiedades más importantes de la solución de Schwarzschild, se tiene que es esféricamente simétrica, estacionaria<sup>2</sup>, estática<sup>3</sup>, asintóticamente plana y presenta una singularidad coordenada en  $r = 2M$ , la cual puede ser removida por un cambio de coordenadas adecuado [4].

<sup>2</sup>Una solución es estacionaria si es independiente del tiempo.

<sup>3</sup>Un espacio-tiempo es estático si no cambia con el tiempo y adicionalmente es irrotacional.

- **Agujero negro de Reissner-Nordström:** Posterior a la solución encontrada por Schwarzschild, los físicos Hans Reissner y Gunnar Nordström de forma independiente encontraron una solución a las ecuaciones de Einstein que representan el espacio y tiempo de un agujero negro cargado eléctricamente. La métrica relacionada a este tipo de solución esta dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2-15)$$

En esta expresión,  $M$  es interpretada como la masa del agujero y  $Q$  su carga eléctrica total. La estructura de este tipo de agujero resulta un poco más compleja que la del Schwarzschild, dado que se generan dos horizontes de eventos concéntricos (uno interno y otro externo) cuyos radios están definidos por [21]

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (2-16)$$

donde  $r_+$  define el horizonte externo y  $r_-$  el horizonte interno. Se evidencia que  $Q$  no puede aumentar indefinidamente, pues la carga provoca un efecto repulsivo que se opone a la gravedad. Si la repulsión eléctrica supera a la gravedad, el agujero negro se desintegraría y en su lugar se formaría una singularidad desnuda sin horizonte. Por razones teóricas, se presume que no pueden existir singularidades desnudas. Esta conjetura se denomina *censura cósmica* y fue formulada por Penrose en 1969 [3].

De la ecuación (2-16) se deduce que la carga máxima que puede alcanzar el agujero negro es  $Q_{max} = M$ , cuando se alcanza esta carga se habla de un agujero negro Reissner-Nordström *extremal*.

- **Agujero negro de Kerr:** Una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein para un agujero negro en rotación corresponde a la métrica de Kerr, la cual fue encontrada por Roy Kerr en 1963. En coordenadas de *Boyer-Lindquist*, dicha métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2-17)$$

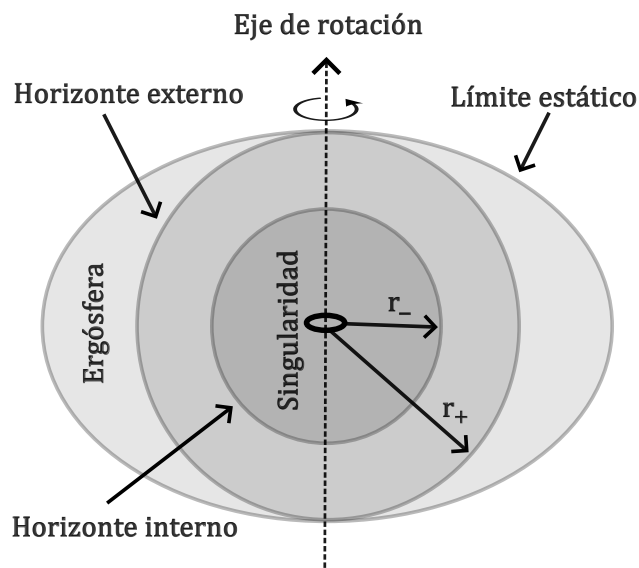
$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta. \quad (2-18)$$

Al igual que el caso anterior, este agujero presenta dos horizontes concéntricos (uno interno y otro externo) los cuales quedan definidos por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2-19)$$

donde el parámetro  $a = J/M$  (momento angular específico).

El horizonte de eventos del espacio-tiempo de Kerr es una superficie tridimensional nula. Sus cortes espaciales tienen la geometría de una esfera distorsionada bidimensional (ver figura 2-4). A diferencia de los anteriores agujeros, la singularidad no es un punto sino un anillo localizado en el plano ecuatorial y adicionalmente tiene una región que se encuentra fuera del horizonte exterior llamada ergósfera. Según el *efecto Lense-Thirring*, la rotación del agujero negro de Kerr arrastra el espacio-tiempo en sus proximidades de tal manera que cualquier objeto ubicado en la ergósfera no puede permanecer estático.



**Figura 2-4:** Estructura del Agujero negro de Kerr visto paralelamente a su eje de rotación. (Tomado de [3])

Un análisis similar al del agujero negro Reissner-Nordström, sugiere que el valor de  $J$  no puede crecer indefinidamente, pues la rotación genera una fuerza centrífuga que se opone a la gravedad. Si la fuerza centrífuga superara a la gravedad, el agujero negro desaparecería y se formaría una singularidad desnuda. El valor máximo que puede alcanzar  $J$  se obtiene de la ecuación (2-19), haciendo  $M^2 - a^2 = 0$ . Cuando el agujero negro alcanza este valor máximo de momentum angular, se denomina agujero negro de Kerr *extremal*.

- **Agujero negro de Kerr-Newman:** Existe una solución generalizando la métrica de Kerr para el caso cuando un agujero negro es eléctricamente cargado. Esta solución se conoce como *métrica de Kerr-Newman*, que en coordenadas Boyer-Lindquist adopta la forma [21]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2(2Mr - Q^2)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\sin}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2-20)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (2-21)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta.$$

En cuanto a la estructura del agujero negro de Kerr-Newman, es similar a la mostrada en la figura 2-4. El horizonte de eventos se localiza en

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \quad (2-22)$$

donde  $M$ ,  $J = aM$  y  $Q$  son la masa, momento angular y carga eléctrica del agujero negro respectivamente. Su área está dada por

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (2-23)$$

### 2.3. Leyes de la mecánica de los agujeros negros y conexión con la termodinámica

A continuación se exponen las leyes de la mecánica para agujeros negros que fueron inicialmente introducidas por J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking y guardan una sorprendente relación con las leyes de la termodinámica.

- **Primera Ley:** Como se vio en secciones anteriores, la métrica de Kerr-Newman es la solución más general con la cual se describe el espacio-tiempo alrededor de un agujero negro rotante y con carga en su estado final de equilibrio. Tomando la ecuación (2-22) y rempazándola en la (2-23), se tiene que el área del horizonte de eventos para este agujero es:

$$A = 4\pi((M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})^2 + a^2) = 4\pi(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}). \quad (2-24)$$

De esta manera, el área queda en función de los parámetros  $M$ ,  $Q$  y  $J$ . Diferenciando la ecuación por medio de la fórmula:

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial M} \right) dM + \left( \frac{\partial A}{\partial Q} \right) dQ + \left( \frac{\partial A}{\partial J} \right) dJ,$$

y luego despejando  $dM$ , se obtiene que:

$$dM = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} \right) dA + \left( \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \right) dQ + \left( \frac{a}{r_+^2 + a^2} \right) dJ$$

$$= \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi dQ + \Omega dJ. \quad (2-25)$$

Esta última fórmula se conoce como la **ecuación de estado** de los agujeros negros, donde  $\kappa$  es conocida como la gravedad superficial,  $\Phi$  se identifica con el potencial eléctrico del agujero negro medido desde el infinito y  $\Omega$  representa la frecuencia angular rotacional.

Teniendo en mente que la energía en el agujero negro está representada en la masa, entonces la ecuación (2-25) guarda una cercana relación con la expresión de la primera ley de la termodinámica:

$$dE = TdS - PdV. \quad (2-26)$$

Así,  $\frac{\kappa}{8\pi}dA$  se puede identificar con  $TdS$  donde la gravedad superficial ( $\kappa$ ) hace las veces de la temperatura ( $T$ ) y el área ( $A$ ) hace las veces de la entropía ( $S$ ).

Siguiendo esta misma analogía, se tendría que la expresión  $\Phi dQ + \Omega dJ$  corresponde a  $-PdV$ , lo cual representa el trabajo hecho sobre el agujero por un agente externo que incrementa la carga y momentum angular del agujero por  $dQ$  y  $dJ$  respectivamente.

- **Segunda Ley:** Hawking demostró que para cualquier proceso que involucre agujeros negros (por ejemplo materia cayendo en un agujero negro, colisión de agujeros negros, etc) el área o las áreas de los agujeros negros tiende a incrementarse, lo que puede ser expresado como

$$\Delta A \geq 0. \quad (2-27)$$

Lo anterior es análogo a la segunda ley de la termodinámica donde se establece que la entropía en un sistema aislado nunca puede decrecer ( $\Delta S \geq 0$ ).

- **Tercera Ley:** Con lo expuesto anteriormente, se definió la gravedad superficial como

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - (Q^2 + a^2)}}{(M + \sqrt{M^2 - (Q^2 + a^2)})^2 + a^2}, \quad (2-28)$$

por lo tanto  $\kappa$  debe tomar un valor estrictamente mayor que cero, pues si  $M^2 < (Q^2 + a^2)$  nos enfrentamos a una solución que no tiene sentido físico y si  $M^2 = Q^2 + a^2$  es una relación límite que no se puede satisfacer o alcanzar por medio de una cantidad finita de procesos, pues como se evidenció con el agujero negro de Reissner-Nordström y Kerr, tanto la carga como el momentum angular no pueden crecer indefinidamente pues por efectos de repulsión y fuerza centrífuga se podría llegar a una singularidad desnuda sin horizonte. De esta manera se llega a la tercera ley: *es imposible reducir la gravedad superficial a cero por un número finito de pasos*, la cual resulta similar a la tercera ley de la termodinámica que afirma la imposibilidad de llevar un sistema al cero absoluto por medio de un número finito de pasos.

La tabla 2-1 resume las anteriores leyes.

Ley	Termodinámica	Agujeros negros
Cero	$T$ es constante en un sistema en equilibrio	$\kappa$ es constante sobre el horizonte de eventos de un agujero negro
Primera	$dE = TdS - PdV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Phi dQ + \Omega dJ$
Segunda	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
Tercera	$T = 0$ no puede ser alcanzado en un número finito de pasos	$\kappa = 0$ no puede ser reducida por un número finito de pasos

**Tabla 2-1:** Analogía entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la mecánica de los agujeros negros.

## 2.4. Entropía Bekenstein-Hawking

La relación entre información y entropía de un sistema físico cerrado se puede expresar como

$$\Delta I = -\Delta S, \quad (2-29)$$

donde  $\Delta I$  indica la información ganada del sistema y  $\Delta S$  corresponde al descenso de la incertidumbre<sup>4</sup>. El bit se define como la información disponible cuando la respuesta a una pregunta de *sí* ó *no* es precisamente conocida (entropía cero). Un bit es numéricamente igual a la entropía máxima que puede ser asociada con una pregunta de sí ó no. La entropía de Shannon (2-8) es máxima para  $p(\text{no}) = p(\text{sí}) = 1/2$ . Entonces, un bit es igual a  $\ln 2$  de información. Transfiriendo lo anterior al contexto de los agujeros negros, se tiene que la captura de una partícula por un agujero negro contiene la misma información con una respuesta a la pregunta de si hay o no captura de ésta. Por la segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros, el área del horizonte de eventos debe aumentar para este último proceso. Así, por lo anterior, puede asociarse la entropía de un agujero negro  $S_{BH}$  con el área racionalizada ( $\alpha$ )<sup>5</sup>:

$$S_{BH} = f(\alpha). \quad (2-30)$$

<sup>4</sup>En el capítulo 3 se muestra como se puede llegar a esta relación.

<sup>5</sup>Área racionalizada  $\alpha = \frac{A}{4\pi}$ , donde  $A$  es el área del horizonte de eventos del agujero negro.

Bekenstein concluyó que la mejor opción es que la función  $f(\alpha)$  sea de la forma [11]:

$$f(\alpha) = \gamma\alpha, \quad (2-31)$$

donde  $\gamma$  es una constante. El siguiente paso que da Bekenstein es definir las unidades adecuadas de esta constante, que al comparar las ecuaciones (2-30) y (2-31) se tiene que deben ser  $(longitud)^{-2}$ . Recurriendo a la mecánica cuántica, la constante queda definida como el inverso de la longitud de Planck <sup>6</sup> ( $l_p$ ) al cuadrado. De este modo

$$S_{BH} = \eta\hbar^{-1}\alpha. \quad (2-32)$$

El incremento mínimo posible en el área del agujero negro por la captura de una partícula de masa  $\mu$  y radio propio  $b$  resulta ser

$$\Delta\alpha = 2\mu b. \quad (2-33)$$

Acotando el valor de  $b$  entre la longitud de Compton y el radio gravitacional ( $\hbar/\mu \leq b \leq 2\mu$ ), se tiene que

$$(\Delta\alpha)_{min} = 2\hbar. \quad (2-34)$$

Luego, el mínimo incremento de entropía generado por la captura de la partícula, a través del horizonte de eventos, será equivalente a la pérdida mínima de información (1 bit), así

$$(\Delta S)_{min} = \eta\hbar^{-1}(\Delta\alpha)_{min} = \ln 2. \quad (2-35)$$

De (2-34) y (2-35) se obtiene que  $\eta = \frac{1}{2} \ln 2$ . Finalmente, reemplazando en (2-32) y utilizando unidades convencionales, se obtiene la expresión para la entropía de Bekenstein-Hawking:

$$S_{BH} = \left(\frac{\ln 2}{8\pi}\right) \frac{kc^3}{G\hbar} A. \quad (2-36)$$

Este resultado presentado por Bekenstein es muy similar al encontrado por Hawking posteriormente [13]:

$$\begin{aligned} S_{BH} &= \frac{kA}{4l_p^2} \\ &= \frac{1}{4}A \quad (\text{en unidades Planck}). \end{aligned} \quad (2-37)$$

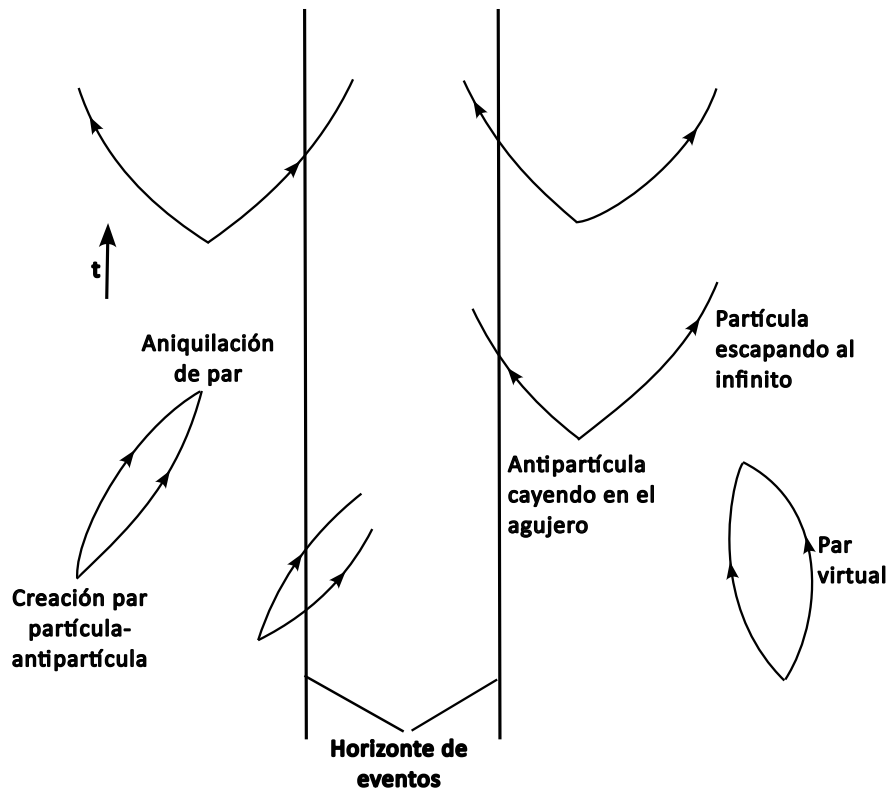
Por lo tanto, se establece que la entropía de un agujero negro es directamente proporcional al área de su horizonte de eventos.

---

<sup>6</sup> $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$ .

## 2.5. Radiación Hawking

Tras un viaje a Moscú en 1973 y por sugerencia de los rusos Yakov B. Zel'dovich y su estudiante A. Starobinsky <sup>7</sup>, Hawking demostró que por efectos cuánticos de los campos de materia en las proximidades de un agujero negro, se produce la creación de pares partícula-antipartícula virtuales. Así, un componente del par de partículas virtuales puede caer en el interior del agujero dejando al otro componente sin pareja para aniquilarse. La partícula o antipartícula abandonada tiempo después puede caer en el agujero o escapar al infinito donde aparecerá como radiación emitida por el agujero negro (ver figura 2-5). Hawking en



**Figura 2-5:** Radiación Hawking. (Tomado y adaptado de [4])

sus resultados encuentra que dicha radiación tiene la naturaleza de un espectro térmico. Sin embargo esto conduce al problema de la pérdida de información, pues a medida que el agujero negro emite radiación se va evaporando completamente sin dejar rastro de la información sobre la materia que lo formó (suponiendo que este se generó por el colapso de una estrella). Por otra parte, la radiación emitida no transporta ninguna información. Es así como esta pérdida de información entra en contradicción con el principio de *evolución unitaria* de la mecánica cuántica y como consecuencia de esta evolución no unitaria, la entropía no se conserva en el proceso de evaporación [14].

<sup>7</sup>Zel'dovich y Starobinsky conjeturaban que utilizando mecánica cuántica se podría mostrar que un agujero negro en rotación debería emitir radiación hasta detener su movimiento rotacional [22].

## 2.6. Preliminares de mecánica cuántica

### 2.6.1. La aproximación WKB

El método de Wenzel-Kramers-Brillouin (WKB), sirve para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales lineales. La aproximación WKB puede ser aplicada a ecuaciones diferenciales con soluciones que tienen coeficientes constantes o varían lentamente. En particular, el método sirve para resolver la ecuación estacionaria unidimensional de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi. \quad (2-38)$$

Para encontrar la solución a esta ecuación por medio de la aproximación WKB, primero se escribe  $\psi$  en la forma

$$\psi(x) = e^{\frac{iS(x)}{\hbar}}, \quad (2-39)$$

donde  $S$  es la acción clásica. Sustituyendo (2-39) en (2-38) se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{i}{\hbar} S'' - \frac{1}{\hbar^2} S'^2 \right) \psi + V\psi = E\psi. \quad (2-40)$$

Dividiendo esta última ecuación entre  $\psi$  y reorganizando términos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{i}{\hbar} S'' - \frac{1}{\hbar^2} S'^2 \right) - (E - V(x)) = 0. \quad (2-41)$$

Teniendo en cuenta que la energía total del sistema es  $E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - V(x)$ , al sustituir en (2-41) y simplificar términos, se obtiene que

$$i\hbar S'' - S'^2 - p^2 = 0. \quad (2-42)$$

El siguiente paso es expandir la acción clásica en series de potencias de  $\hbar$

$$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \dots = S_0(x) + \sum_i \hbar^i S_i(x). \quad (2-43)$$

Al diferenciar esta última ecuación y remplazar en (2-42), se llega a

$$i\hbar(S_0''(x) + \hbar S_1''(x) + \hbar^2 S_2''(x) + \dots) - (S_0'(x) + \hbar S_1'(x) + \hbar^2 S_2'(x) + \dots)^2 - p^2 = 0. \quad (2-44)$$

Desarrollando el cuadrado de la primer derivada de la acción expandida

$$\begin{aligned} (S_0'(x) + \hbar S_1'(x) + \hbar^2 S_2'(x) + \dots)^2 &= [S_0'(x) + (\hbar S_1'(x) + \hbar^2 S_2'(x) + \dots)]^2 \\ &= (S_0'(x))^2 + 2S_0'(x) \sum_{i=1} S_i'(x) \hbar^i + \left( \sum_{i=1} S_i'(x) \hbar^i \right)^2 \\ &= (S_0'(x))^2 + 2S_0'(x) \sum_{i=1} S_i'(x) \hbar^i + \sum_{i=1} (S_i'(x))^2 \hbar^{2i} \\ &\quad + \sum_{i=1} \sum_{j=i+1} 2S_i'(x) S_j'(x) \hbar^{i+j}. \end{aligned} \quad (2-45)$$

De acuerdo con esto último, en la ecuación (2-44) se pueden asociar términos semejantes en función de las potencias de  $\hbar$  para obtener

$$-(p^2 + S_0'^2) + (iS_0'' - 2S_0'S_1')\hbar + (iS_1'' - S_1'^2 - 2S_0'S_2')\hbar^2 + \dots = 0. \quad (2-46)$$

Dado que el lado derecho de la ecuación (2-46) es 0 entonces, al lado izquierdo, el término independiente y los coeficientes que acompañan a las potencias de  $\hbar$  también deben valer cero. Adicionalmente, la aproximación se obtiene al truncar la serie de potencias generada en esta última ecuación hasta el orden lineal en  $\hbar$ . De esta manera, solo se consideran los términos de cero y primer orden.

Así, a partir del término de orden cero se encuentra que

$$\begin{aligned} -(p^2 + S_0'^2) = 0 &\implies S_0'^2 = p^2 \\ &\implies S_0' = \pm p \\ &\implies S_0(x) = \pm \int_{x_0}^x p(x) dx, \end{aligned} \quad (2-47)$$

mientras que del término de primer orden se obtiene

$$\begin{aligned} iS_0'' - 2S_0'S_1' = 0 &\implies iS_0'' = 2S_0'S_1' \\ &\implies ip' = 2pS_1' \\ &\implies \frac{i}{2} \frac{p'}{p} = S_1' \\ &\implies \frac{i}{2} \int \frac{dp}{p} = \int dS_1 \\ &\implies S_1(x) = \frac{i}{2} \ln p. \end{aligned} \quad (2-48)$$

Por lo anterior se llega a que

$$\begin{aligned} S(x) &= S_0(x) + \sum_i \hbar^i S_i(x) \\ &\approx \pm \int_{x_0}^x p(x) dx + \frac{i\hbar}{2} \ln p(x). \end{aligned} \quad (2-49)$$

Por (2-39) y (2-49)

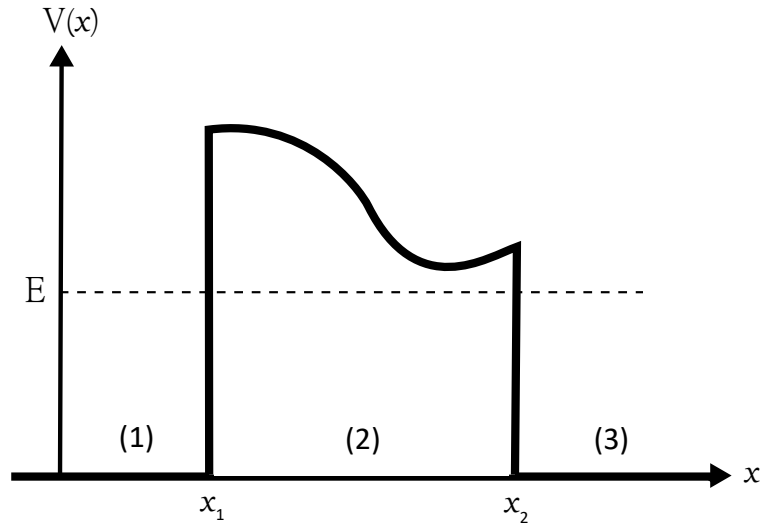
$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{\frac{iS(x)}{\hbar}} \\ &\approx e^{\frac{i}{\hbar} (\pm \int_{x_0}^x p(x) dx + \frac{i\hbar}{2} \ln p(x))} \\ &= e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x) dx - \frac{1}{2} \ln p(x)} \\ &= e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x) dx - \ln \sqrt{p(x)}} \\ &= \frac{C_{\pm}}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x) dx}, \end{aligned} \quad (2-50)$$

Esta última solución funciona cuando  $p(x)$  es real. Si resulta imaginario, la solución aproximada toma la forma

$$\psi(x) \approx \frac{C_{\pm}}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x)| dx}. \quad (2-51)$$

### 2.6.2. Tunelamiento a través de una Barrera de Potencial

Considérese el movimiento de una partícula cuyo momentum es  $k = \sqrt{2mE}$ , la cual incide al lado izquierdo de una barrera de potencial  $V(x)$ , con una energía  $E$  menor al máximo valor del potencial de la barrera (figura 2-6). Desde el punto de vista clásico la partícula no puede



**Figura 2-6:** Barrera potencial cuyas regiones clásicamente permitidas son  $x < x_1$  y  $x > x_2$ . (Tomado de [5])

traspasar o penetrar la barrera de potencial, entonces se reflejará. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, la probabilidad de que la partícula tunele a través de la barrera y emerja al lado derecho (región 3) es diferente de cero. Siguiendo a [5], para estimar dicha probabilidad de tunelamiento se puede hacer uso de la aproximación WKB.

En las regiones (1) y (3) se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= Ae^{ikx/\hbar} + Be^{-ikx/\hbar} \\ \psi_3(x) &= Fe^{ikx/\hbar}, \end{aligned} \quad (2-52)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $F$  son respectivamente las amplitud de la onda incidente, reflejada y transmitida. Si la energía de la partícula es más pequeña que el máximo valor del potencial en la barrera ( $E < V_{max}$ ) y si el potencial  $V(x)$  varia lentamente en función de  $x$ , entonces la función de onda en la región (2) es dada por la aproximación WKB

$$\psi_2(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'}, \quad (2-53)$$

donde  $p(x) = i\sqrt{2m(V(x) - E)}$ . Se puede suponer que la barrera es lo suficientemente ancha<sup>8</sup> para tener que  $D \approx 0$  y por lo tanto

$$\psi_2(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'}. \quad (2-54)$$

La probabilidad para que la partícula atraviese la barrera es dada por el coeficiente de transmisión

$$T = \frac{v_{trans} |\psi_{trans}(x)|^2}{v_{inc} |\psi_{inc}(x)|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2}, \quad (2-55)$$

donde se ha tenido en cuenta que las velocidades de transmisión e incidencia son iguales. Lo que sigue a continuación es operar para expresar  $F$  en términos de  $A$  y poder simplificar el coeficiente de transmisión. Utilizando las relaciones de continuidad sobre  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  y sus respectivas derivadas en los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= \psi_2(x_1) \\ \psi_1'(x_1) &= \psi_2'(x_1), \end{aligned}$$

obteniéndose

$$Ae^{ikx/\hbar} + Be^{-ikx/\hbar} = \frac{C}{\sqrt{\alpha_1}} \quad (2-56)$$

$$\frac{i}{\hbar} (Ae^{ikx/\hbar} - Be^{-ikx/\hbar}) = -\frac{\alpha_1}{\hbar\sqrt{\alpha_1}}, \quad (2-57)$$

donde  $\alpha_1 = i\sqrt{2m(V(x_1) - E)}$ . Procediendo de forma análoga para el punto  $x_2$ , por la continuidad de las funciones de onda, se halla que

$$\begin{aligned} \psi_2(x_2) &= \psi_3(x_2) \\ \psi_2'(x_2) &= \psi_3'(x_2), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{C}{\sqrt{\alpha_2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx} = F e^{ikx_2/\hbar} \quad (2-58)$$

$$-\frac{\alpha_2 C}{\hbar\sqrt{\alpha_2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx} = \frac{ik}{\hbar} F e^{ikx_2/\hbar}, \quad (2-59)$$

donde  $\alpha_2 = i\sqrt{2m(V(x_2) - E)}$ .

Sumando (2-56) y (2-57), se elimina la constante  $B$  y se encuentra que  $C = 2A\sqrt{\alpha_1}e^{ikx_1/\hbar}/(1 - \alpha_1/ik)$ . Al remplazar en (2-58)

$$\frac{F}{A} = \frac{2}{1 - (\alpha_1/ik)} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{ik(x_1 - x_2)/\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x)| dx}, \quad (2-60)$$

---

<sup>8</sup>Si la barrera es muy ancha y/o muy alta, lo cual es equivalente a decir que la probabilidad de tunelamiento es pequeña, entonces el coeficiente  $D$  de la exponencial creciente en la función de onda  $\psi_2(x)$  deberá ser pequeño [23].

entonces

$$\frac{|F|^2}{|A|^2} = \left( \frac{4}{\alpha_2/\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2/k^2} \right) e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx}. \quad (2-61)$$

Por las ecuaciones (2-55) y (2-61), se concluye que

$$T \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx}. \quad (2-62)$$

Si se utiliza la convención de unidades utilizada en el documento y la acción clásica se toma como  $S(x) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$ , entonces la ecuación (2-62) se puede expresar como

$$T \sim e^{-2\text{Im } S}. \quad (2-63)$$

# Capítulo 3

## Radiación Hawking en el modelo Parikh y Wilczek

En el trabajo original de Hawking, sobre la radiación emitida por un agujero negro, se considera un espacio-tiempo estático y no se tiene en cuenta el principio de conservación de la energía. Parikh y Wilczek muestran un modelo donde sí consideran tal conservación y se muestra el fenómeno de la radiación como un proceso de tunelamiento cuántico [15]. A continuación se presenta un esbozo de este importante resultado.

### 3.1. Coordenadas no singulares

Como se mencionó anteriormente, la métrica de Schwarzschild tiene una singularidad coordenada en el horizonte  $r = 2M$ , la cual puede ser removida por un cambio adecuado de coordenadas. Esto último se puede lograr utilizando las coordenadas de Painlevé-Gullstrand [6].

Primero se define un tiempo coordenado  $t_p$  (tiempo Painlevé) como:

$$t_p = t_s + f(r), \tag{3-1}$$

donde  $t_s$  es el tiempo de Schwarzschild y  $f(r)$  es una función cuya estructura se conocerá más adelante, con la imposición de ciertas condiciones sobre el elemento de línea de la métrica. Despejando y derivando la expresión 3-1:

$$\begin{aligned} dt_s &= dt_p - f'(r)dr \\ dt_s^2 &= (dt_p - f'(r)dr)^2 \\ dt_s^2 &= dt_p^2 - 2f'(r)drdt_p + f'(r)^2 dr^2. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Ahora reemplazando en la métrica de Schwarzschild (ecuación 2-13)

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_s^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
&= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt_p^2 - 2f'(r) dr dt_p + f'(r)^2 dr^2) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
&= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_p^2 + 2f'(r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_p dr \\
&\quad + \left( \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - f'(r)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2.
\end{aligned} \tag{3-3}$$

Imponiendo la condición que para tiempo constante las rodajas de tiempo generadas sean planas, entonces:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - f'(r)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 1. \tag{3-4}$$

De la anterior ecuación se obtiene que

$$f'(r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \sqrt{\frac{2M}{r}},$$

por lo tanto<sup>1</sup>

$$f'(r) = \sqrt{\frac{2M}{r}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \tag{3-5}$$

Luego, reemplazando (3-5) en (3-3) se llega a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_p^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt_p dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3-6}$$

Esta última ecuación corresponde a la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Painlevé-Gullstrand, las cuales han permitido remover la singularidad en el horizonte  $r = 2M$ .

---

<sup>1</sup>Integrando  $f'(r)$  se obtiene

$$f(r) = 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}},$$

quedando el tiempo definido en (3-1) como:

$$t_p = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}.$$

### 3.2. Geodésicas radiales nulas

Con la anterior métrica, se puede trabajar las trayectorias que son radiales ( $d\Omega = 0$ ) y nulas ( $ds^2 = 0$ ). De esta manera se obtiene que la ecuación (3-6) se transforma en

$$0 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2. \quad (3-7)$$

Dividiendo la ecuación (3-7) entre  $dt^2$  se llega a una expresión cuadrática en términos de  $\frac{dr}{dt}$

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{dr}{dt} - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) = 0, \quad (3-8)$$

al resolverla se tiene que

$$\frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (3-9)$$

donde  $+/-$  corresponde a las geodésicas salientes/entrantes.

### 3.3. Tasa de emisión a través del horizonte de eventos

Las soluciones generales para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, con coeficientes que varían lentamente, pueden ser aproximadas como

$$\psi(x) \approx \frac{C_{\pm}}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x) dx}, \quad p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}, \quad (3-10)$$

donde  $m$ ,  $E$ ,  $V(x)$  y  $p(x)$  son respectivamente la masa, la energía total, el momentum clásico de la partícula que tunela y el potencial de barrera. La integral en el exponente de la ecuación (3-10), es igual a la acción clásica

$$S(x) = \int_{x_i}^x p(x') dx', \quad (3-11)$$

donde  $S(x)$  toma valor real cuando la partícula está en la región clásicamente permitida ( $E > V(x)$ ) y resulta con valor imaginario cuando la partícula está en una región con  $V(x) > E$ .

En el caso de una partícula tunelando a través del horizonte de eventos de un agujero negro,  $V(x)$  se podría pensar que está asociado con la barrera de energía potencial gravitacional que la partícula debe superar para escapar al infinito. En el modelo propuesto por Parikh y Wilczek, la partícula tunela a través de una barrera de energía la cual está determinada por la propia energía de la partícula [24]. Cuando un agujero negro irradia, pierde energía (masa). Dado que en un agujero negro su energía y radio están relacionados, entonces este debe

contraerse: el horizonte se aleja de su radio original a un nuevo radio más pequeño. Como la contracción depende de la energía de la partícula saliente, en cierto modo, es ella misma la que define la barrera [25]. En el caso de partículas atravesando el horizonte de eventos, la relación entre la probabilidad de tunelamiento de la partícula y la parte imaginaria de la acción es descrita por [15]

$$\Gamma \sim \exp[-2 \text{Im } S]. \quad (3-12)$$

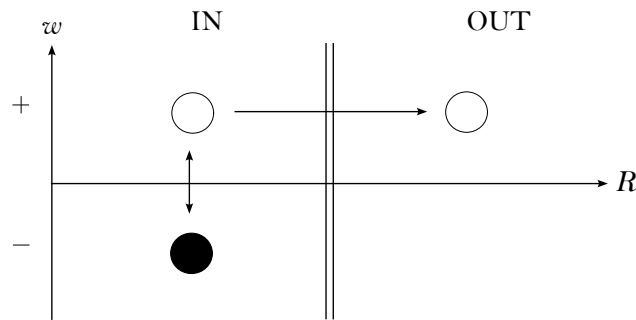
Para una partícula que tunela a través del horizonte de eventos y que viaja a lo largo de las coordenadas radiales, se puede hacer el remplazo  $x' \rightarrow r$  en la ecuación (3-11) para obtener que

$$S = \int_{r_i}^{r_f} p_r dr. \quad (3-13)$$

Esta última ecuación sirve como punto de partida para calcular la tasa de tunelamiento en la radiación Hawking, como se verá a continuación.

### 3.4. Tunelamiento cuántico en la radiación Hawking

La radiación Hawking se puede entender como un proceso en el cual, a causa de fluctuaciones cuánticas del vacío, se produce en el interior del horizonte de eventos del agujero negro de masa  $M$  un par partícula-antipartícula. La partícula<sup>2</sup> dotada de energía positiva  $w$ , cruza (tunela) el horizonte de eventos hacia el exterior desde una posición inicial  $r_{in}$  hasta una posición final  $r_{out}$ . La siguiente figura ilustra este proceso:



**Figura 3-1:** Diagrama heurístico del proceso de tunelamiento. (Tomado de [6])

<sup>2</sup>El tratamiento de la radiación como partículas puntuales se puede justificar teniendo en cuenta que la relación entre la frecuencia de onda detectada por un observador ( $f_{ob}$ ) a cierta distancia del horizonte de eventos y la frecuencia con que ha sido emitida ( $f_{em}$ ), viene dada por

$$f_{em} = \frac{f_{ob}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}.$$

De esta manera, cuando  $r \rightarrow r_g$  la longitud de onda se desplaza hacia el azul.

El descenso de la masa del agujero negro ( $M \rightarrow M - w$ ) va necesariamente acompañado de un descenso en su radio de Schwarzschild ( $R_S = 2M \rightarrow 2(M - w)$ ). Para llegar a la tasa de tunelamiento se debe calcular la parte imaginaria de la acción sobre la región clásicamente prohibida

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr \\ &= \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_0^P dp'_r. \end{aligned} \quad (3-14)$$

El siguiente paso es expresar la variable de momentum en función de la energía utilizando las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{r} = \left. \frac{dH}{dp_r} \right|_r \implies dp_r = \frac{dH}{\dot{r}} \quad (3-15)$$

Con esto último se realiza el cambio de variable en la ecuación (3-14)

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_M^{M-w} \frac{dH}{\dot{r}}, \quad (3-16)$$

donde se ha considerado que si la partícula tunela hacia el exterior del agujero negro entonces este pierde una cantidad de energía  $w$ . Lo siguiente es cambiar las variables de integración de  $H$  a la energía de la partícula  $w$ , teniendo en cuenta que al tomar  $H = M - w' \implies dH = -dw'$

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \int_0^w (-dw') \frac{1}{\dot{r}} \quad (3-17)$$

Kraus y Wilczek [26] mostraron que la partícula de energía positiva saliente siente una fuerza gravitacional efectiva del agujero negro de masa  $M - w$ , y así viaja en las geodésicas del espacio-tiempo que contiene un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M - w$ . Al tener en cuenta esto, se debe hacer el remplazo  $M \rightarrow M - w$  en la métrica del espacio-tiempo que viaja la partícula, lo cual deriva que la ecuación (3-9) tome la forma

$$\dot{r} = 1 - \sqrt{\frac{2(M - w')}{r}}. \quad (3-18)$$

En su movimiento a lo largo de la trayectoria clásicamente prohibida, la partícula saliente tiene como punto inicial  $r = 2M - \epsilon$ , el cual se ubica dentro del horizonte de eventos respecto a su posición inicial, y como punto final (luego de atravesar el horizonte de eventos)  $r = 2(M - w) + \epsilon$  el cual se ubica a las afueras de la posición final del horizonte de eventos, por lo que los límites de la trayectoria de la partícula quedan definidos como

$$\begin{aligned} r_{in} &= 2M - \epsilon \\ r_{out} &= 2(M - w) + \epsilon. \end{aligned} \quad (3-19)$$

Teniendo presente lo anterior y reemplazando (3-18) en (3-17), se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= - \text{Im} \int_{2M}^{2(M-w)} dr \int_0^w \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2(M-w')}{r}}} dw' \\ &= - \text{Im} \int_0^w dw' \int_{2M}^{2(M-w)} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-w')}{r}}}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

De esta manera, para continuar con el cálculo de la parte imaginaria de la acción, se debe primero calcular la integral

$$\int_{2M}^{2(M-w)} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-w')}{r}}},$$

que se puede resolver como una integral de contorno realizando la sustitución  $r = u^2$ , obteniéndose que

$$\int_{2M}^{2(M-w)} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-w')}{r}}} = \int_{u_{in}}^{u_{out}} \frac{2u^2 du}{u - \sqrt{2(M-w')}}, \quad (3-21)$$

por el segundo miembro de la ecuación (3-21), se observa que hay un polo simple en  $u = \sqrt{2(M-w')}$ . Luego, tomando  $u - \sqrt{2(M-w')} = \epsilon e^{i\theta} \implies du = \epsilon i e^{i\theta} d\theta$ , se puede realizar una deformación de contorno y definir la integral sobre un semicírculo en la parte superior del plano complejo, es decir,

$$\begin{aligned} \int_{u_{in}}^{u_{out}} \frac{2u^2 du}{u - \sqrt{2(M-w')}} &= \int_0^\pi \frac{2i\epsilon e^{i\theta} (\epsilon e^{i\theta} + \sqrt{2(M-w')})^2 d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} \\ &= \int_0^\pi 2i(\epsilon e^{i\theta} + \sqrt{2(M-w')})^2 d\theta \\ &= 2i \int_0^\pi (\epsilon e^{i\theta} + \sqrt{2(M-w')})^2 d\theta. \end{aligned}$$

Hallando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  en ambos lados de esta última ecuación

$$\begin{aligned} \int_{u_{in}}^{u_{out}} \frac{2u^2 du}{u - \sqrt{2(M-w')}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ 2i \int_0^\pi (\epsilon e^{i\theta} + \sqrt{2(M-w')})^2 d\theta \right] \\ &= 2i \int_0^\pi (\sqrt{2(M-w')})^2 d\theta \\ &= 4i(M-w') \int_0^\pi d\theta \\ &= 4i\pi(M-w'). \end{aligned} \quad (3-22)$$

Así, retomando el cálculo de la parte imaginaria de la acción ( $\text{Im } S$ ), al remplazar (3-22) en (3-20)

$$\begin{aligned}
\text{Im } S &= -\text{Im} \int_0^w dw' (4\pi i (M - w')) \\
&= -\text{Im} \left[ 4\pi i \int_0^w dw' (M - w') \right] \\
&= 4\pi \int_0^w dw' (M - w') \\
&= 4\pi w \left( M - \frac{w}{2} \right). \tag{3-23}
\end{aligned}$$

Finalmente se llega al coeficiente de transmisión

$$\Gamma \simeq e^{-2\text{Im } S} = e^{-8\pi w \left( M - \frac{w}{2} \right)}. \tag{3-24}$$

### 3.5. Efecto túnel en agujeros negros cargados

El procedimiento descrito en las anteriores secciones se puede extender a agujeros negros cargados, cuya radiación emitida no tiene carga, pues en caso de tenerse en cuenta esta última, los cálculos se vuelven complejos dado que hay que considerar la fuerza electromagnética en las trayectorias. Siguiendo este orden de ideas, el punto de partida será expresar la métrica del agujero negro de Reissner-Nordström en coordenadas de Painlevé, es decir,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3-25}$$

Esta última expresión se logra por medio de la transformación

$$\begin{aligned}
t_R = t + 2\sqrt{2Mr - Q^2} + M \ln \left( \frac{r - \sqrt{2Mr - Q^2}}{r + \sqrt{2Mr - Q^2}} \right) \\
+ \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{2Mr - Q^2}}{Mr} \right). \tag{3-26}
\end{aligned}$$

Luego, la velocidad radial de partículas neutras resulta ser

$$\dot{r} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}. \tag{3-27}$$

La parte imaginaria de la acción para la partícula saliente de energía positiva, incluyendo el efecto de autogravitación, es

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_0^w (-dw') \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M - w')}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}}, \tag{3-28}$$

y utilizando el cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2(M-w')r - Q^2} \\ du &= \frac{-r}{u} dw', \end{aligned}$$

la ecuación (3-28) se transforma en

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{\sqrt{2Mr-Q^2}}^{\sqrt{2(M-w)r-Q^2}} du \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr \frac{u}{r-u}. \quad (3-29)$$

Teniendo en cuenta que por definición el horizonte de eventos se localiza en  $r_H = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ , se terminan de definir los límites de integración en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= \text{Im} \int_{\sqrt{2Mr-Q^2}}^{\sqrt{2(M-w)r-Q^2}} du \int_{M+\sqrt{M^2-Q^2}}^{(M-w)+\sqrt{(M-w)^2-Q^2}} dr \frac{u}{r-u} \\ &= \text{Im} \int_{M+\sqrt{M^2-Q^2}}^{(M-w)+\sqrt{(M-w)^2-Q^2}} dr (-\pi i r) \\ &= -\pi \int_{M+\sqrt{M^2-Q^2}}^{(M-w)+\sqrt{(M-w)^2-Q^2}} r dr \\ &= \pi \frac{r^2}{2} \Big|_{(M-w)+\sqrt{(M-w)^2-Q^2}}^{M+\sqrt{M^2-Q^2}} \\ &= \pi \left[ 2w \left( M - \frac{w}{2} \right) - (M-w) \sqrt{(M-w)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \right], \quad (3-30) \end{aligned}$$

obteniéndose una tasa de emisión

$$\Gamma \simeq e^{-2 \text{Im } S} = e^{-2\pi \left[ 2w \left( M - \frac{w}{2} \right) - (M-w) \sqrt{(M-w)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \right]}. \quad (3-31)$$

Expandiendo en series de potencias de  $w$  el exponente, se encuentra que

$$\Gamma \simeq e^{-\beta_1 w + \beta_2 w^2 + \beta_3 w^3 + \dots} \quad (3-32)$$

donde

$$\beta_1 = 2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}}, \quad (3-33)$$

lo cual indica que en una aproximación de primer orden en  $w$ , el resultado es consistente con la temperatura Hawking ( $T_H$ ) para un agujero negro cargado:

$$T_H = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (3-34)$$

# Capítulo 4

## Información y entropía en la radiación Hawking

A diferencia del espectro de emisión encontrado por S. W. Hawking [13], el correspondiente a la ecuación (3-24) es *no térmico* y consistente con el principio de evolución unitaria de la mecánica cuántica [27]. Trabajando con este espectro de emisión no térmico, Zhang *et al.* [16] mostraron la existencia de correlaciones en la radiación Hawking en la forma de información mutua y la conservación de la entropía tras un proceso de evaporación del agujero negro. Continuando por la línea de investigación de Zhang *et al.*, desarrollos posteriores han determinado una condición necesaria y suficiente para que la información y la entropía se conserven en la radiación Hawking [17]. En la sección (4.3) del presente capítulo, se realiza una exposición de estas últimas ideas.

### 4.1. Relación entre información y entropía termodinámica

Desde la perspectiva de la teoría de la información, la entropía mide la cantidad de incertidumbre de una variable o equivalentemente la cantidad de información que se gana cuando la variable se vuelve conocida. Como plantea Brillouin [28], en un sistema físico lo anterior se puede visualizar con el ejemplo de un gas contenido en un recipiente compuesto por millones de moléculas que se mueven aleatoriamente. En un instante dado, no se tiene idea de las posiciones y velocidades exactas de las partículas (*hay incertidumbre*), la estructura microscópica del sistema es desconocida y solo hay certeza de valores macroscópicos como la temperatura, la presión, el volumen y la composición química, los cuales se pueden medir. A partir de esto se calcula el número de microestados y la entropía del sistema. Dicho cálculo considera el número de las estructuras internas elementales que satisfacen las condiciones macroscópicas. Mientras mayor sea la incertidumbre, mayor serán el número de estructuras internas posibles, la probabilidad y la entropía.

El conocimiento de alguna información adicional del sistema que se está estudiando, como por ejemplo saber como estaba constituido en un momento dado y de ahí conocer la distribución original de las densidades y las velocidades, permite detallar con mayor exactitud la configuración del sistema, disminuir el número de microestados y por ende la probabilidad y entropía. De aquí que se pueda establecer una relación, por lo menos cualitativa, entre información y entropía en un sistema: *un aumento de información conlleva a un descenso de la entropía*. Siguiendo a [29], dicha relación se puede cuantificar y formular de la siguiente manera:

Supongase un problema en el que sean posible obtener  $W_0$  resultados diferentes, cada uno con igual probabilidad, la cual se ha establecido a priori (equivalentemente, un sistema físico que pudiera obtener una diversidad de estructuras microscópicas y donde  $W_0$  es el número total de esas estructuras). La anterior descripción representa la condición inicial del problema en la que no hay información disponible ( $I_0 = 0$ ). Al igual que en el ejemplo del gas, pueden surgir definiciones o mediciones que permitan acotar y disminuir el número de resultados posibles a  $W_1$ . Resumiendo lo anterior, se tiene que:

- **Situación inicial:**  $I_0 = 0$  donde se tienen  $W_0$  casos igualmente probables.
- **Situación final:**  $I_1 > 0$  donde se tienen  $W_1$  casos igualmente probables y  $W_1 < W_0$ .

Por lo tanto, la variación de información en este problema (sistema físico) es

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_0 &= K \ln \frac{1}{P_{W_1}} - 0 \\
 &= K \ln \left( \frac{1}{\frac{1}{W_0}} \right) \\
 &= K \ln \left( \frac{W_0}{W_1} \right) \\
 &= K \ln W_0 - K \ln W_1
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

donde  $K$  es una constante que depende del sistema elegido, así por ejemplo como se vio en el segundo capítulo, para el caso de problemas en los cuales se utilicen los bits  $K = 1/\ln 2$ . En sistemas físicos, una elección adecuada de  $K$  como

$$K = \kappa = 1,38 \times 10^{-19} \quad (\text{constante de Boltzmann}), \tag{4-2}$$

permite comparar y relacionar directamente la información con la entropía termodinámica. Retomando el último ejemplo, cuya cantidad de información se captura con la ecuación (4-1) y replanteando con la constante  $\kappa$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_0 &= \kappa \ln W_0 - \kappa \ln W_1 \\
 &= S_0 - S_1.
 \end{aligned} \tag{4-3}$$

Es así como se puede establecer una relación entre entropía e información (para un sistema físico cerrado), quedando definida por

$$\Delta I = -\Delta S, \quad (4-4)$$

donde  $\Delta I$  denota la información ganada de un sistema por medio de mediciones y  $-\Delta S$  corresponde al descenso de su entropía.

## 4.2. Relación entre la entropía de Shannon y la de Boltzmann

A rasgos generales, la entropía de Shannon

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n \quad (4-5)$$

mide la cantidad de incertidumbre en un sistema cerrado, siendo  $p_n$  la probabilidad para el  $n$ -ésimo resultado. Para un ensamble microcanónico en equilibrio, en el cual todos sus microestados son igualmente probables ( $p_n = p$ ), se puede tomar  $p = 1/\Omega$  con  $\Omega$  denotando el número total de microestados para un sistema cerrado donde se conserva la energía. Así, bajo estas circunstancias, la entropía de Shannon toma la forma

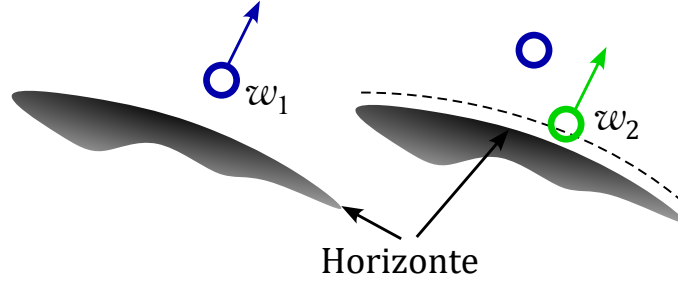
$$\begin{aligned} S &= - \sum_{n=1}^{\Omega} p_n \ln p_n \\ &= - \sum_{n=1}^{\Omega} \left[ \frac{1}{\Omega} \ln \left( \frac{1}{\Omega} \right) \right] \\ &= - \Omega \left[ \frac{1}{\Omega} \ln \left( \frac{1}{\Omega} \right) \right] \\ &= - \ln \left( \frac{1}{\Omega} \right) \\ &= - \ln p. \end{aligned} \quad (4-6)$$

De acuerdo con las leyes de la termodinámica de agujeros negros, un agujero negro y su radiación forman un sistema cerrado que permanece en equilibrio [17]. Por lo tanto su entropía puede ser descrita por la ecuación (4-6) o entropía de Boltzmann.

## 4.3. Conservación de la información y la entropía

Para un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ , su entropía  $S(M)$  depende únicamente de la masa. Tomando la radiación Hawking como la emisión secuencial de partículas con energía  $w_i$ , entonces se pueden considerar dos procesos:

- (a) El agujero negro primero emite una partícula  $w_1$  y luego otra partícula  $w_2$ , como se ilustra en la figura 4-1



**Figura 4-1:** Emisión sucesiva de  $w_1$  y  $w_2$ . (Tomado y adaptado de [7])

Tras la radiación  $w_1$ , la entropía del agujero negro se reduce a  $S(M - w_1)$  y la información que transporta esta partícula es

$$I(w_1) = -[S(M - w_1) - S(M)] = S(M) - S(M - w_1). \quad (4-7)$$

En el caso de dos variables  $x$  y  $y$ , la información condicional  $I(y|x) = I(x, y) - I(x)$  es la información acerca de  $y$  dado que se conoce  $x$  [29]. De esta manera, para la segunda emisión  $w_2$  de radiación Hawking, después de haber sido emitida la primer partícula, se tiene que la entropía del agujero negro desciende a  $S(M - w_1 - w_2)$  y la información transportada por  $w_2$  es

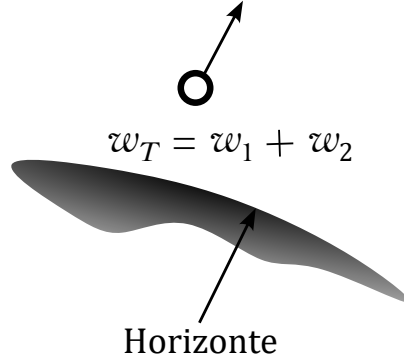
$$\begin{aligned} I(w_2|w_1) &= I(w_1, w_2) - I(w_1) \\ &= -[S(M - w_1 - w_2) - S(M - w_1)] \\ &= S(M - w_1) - S(M - w_1 - w_2). \end{aligned} \quad (4-8)$$

donde  $I(w_1, w_2)$  denota la cantidad total de información transportada por las partículas  $w_1$  y  $w_2$  en un proceso en el cual se ha emitido primero  $w_1$  y luego  $w_2$ . Dicha información puede ser expresada como

$$\begin{aligned} I(w_1, w_2) &= I(w_1) + I(w_2|w_1) \\ &= S(M) - S(M - w_1) + S(M - w_1) - S(M - w_1 - w_2) \\ &= S(M) - S(M - w_1 - w_2). \end{aligned} \quad (4-9)$$

- (b) Se considera otro proceso en el que el agujero negro de masa  $M$  emite una partícula  $w_T$  cuya energía es  $w_1 + w_2$  como se ilustra en la figura 4-2. En este escenario, tanto la masa del agujero negro como su entropía descienden a  $M - w_T$  y  $S(M - w_1 - w_2)$  respectivamente. La información transportada por la partícula con energía  $w_1 + w_2$  viene dada por

$$I(w_1 + w_2) = S(M) - S(M - w_1 - w_2). \quad (4-10)$$



**Figura 4-2:** Emisión de una partícula con energía  $w_T$ . (Tomado y adaptado de [7])

Dado que la cantidad de información de los procesos descritos en (a) y (b) son equivalentes (ecuaciones (4-9) y (4-10)), se puede tomar como *conservación de la información* en la radiación Hawking. Para que esto último suceda, la condición

$$I(w_1, w_2) = I(w_1) + I(w_2|w_1) = I(w_1 + w_2) \quad (4-11)$$

es requerida.

Esta última expresión sirve como punto de partida para encontrar una condición necesaria y suficiente, sobre la tasa de emisión de partículas en la radiación Hawking, para que la entropía e información sean preservadas:

1. Si  $\Gamma(w)$  es la probabilidad o tasa de emisión de la partícula  $w$ , entonces por lo visto en la sección (2.1), la cantidad de información asociada a este evento (o en términos más físicos, la cantidad de información transportada por  $w$ ) será

$$\begin{aligned} I(w) &= \ln \left( \frac{1}{\Gamma(w)} \right) \\ &= -\ln \Gamma(w), \end{aligned}$$

y por (4-6), dicha información se traduce en

$$I(w) = -\ln \Gamma(w) = S(w). \quad (4-12)$$

Aplicando el resultado obtenido en (4-12) a la ecuación (4-11), conduce a que la entropía también se conserve en la emisión de partículas de la radiación Hawking, ya que

$$\begin{aligned} I(w_1) &= S(M) - S(M - w_1) = S(w_1) \\ I(w_2|w_1) &= S(M - w_1) - S(M - w_1 - w_2) = S(w_2|w_1) \\ I(w_1 + w_2) &= S(M) - S(M - w_1 - w_2) = S(w_1 + w_2), \end{aligned} \quad (4-13)$$

pero por definición, la entropía de la emisión de la segunda partícula  $w_2$ , después de haber sido emitida la partícula  $w_1$ , resulta ser  $S(w_2|w_1) = S(w_1, w_2) - S(w_1)$ , entonces

$$S(w_1, w_2) = S(w_2|w_1) + S(w_1). \quad (4-14)$$

De las ecuaciones (4-11), (4-13) y (4-14) se concluye que

$$S(w_1, w_2) = S(w_2|w_1) + S(w_1) = S(w_1 + w_2). \quad (4-15)$$

Esta última ecuación puede ser expresada como

$$\Gamma(w_1, w_2) = \Gamma(w_1)\Gamma(w_2|w_1) = \Gamma(w_1 + w_2). \quad (4-16)$$

En consecuencia, se encuentra que si se asume conservación de la información y la entropía entonces se debe cumplir la condición (4-16).

En un proceso de evaporación de un agujero negro por medio de su radiación Hawking, se tiene que la probabilidad conjunta de todas las emisiones es

$$\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) = \Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_n|w_1, w_2, \dots, w_{n-1}), \quad (4-17)$$

y de forma iterativa se encuentra que

$$\boxed{\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) = \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n)} \quad (4-18)$$

2. Ahora supongamos que la tasa de emisión de radiación Hawking del agujero negro satisface la condición (4-18). Si la masa del agujero negro es  $M$ , y por conservación de la energía se tiene que  $M = \sum_{i=1}^n w_i$ , entonces al hacer uso de la fórmula de Boltzmann para la entropía

$$\begin{aligned} S(M) &= -\ln \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \\ &= -\ln \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n), \end{aligned} \quad (4-19)$$

es decir que la entropía del agujero negro inicial es igual a la entropía de toda la radiación del agujero negro, donde  $\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) = 1/\Omega(w_1, w_2, \dots, w_n)$ , lo cual significa que la entropía e información se conservan en la emisión de radiación Hawking.

Los desarrollos en los numerales 1 y 2 muestran que:

*La información y entropía se conservan en la radiación Hawking si y solo si el espectro de emisión  $\Gamma(w)$  cumple la condición señalada por la ecuación (4-18).*

### 4.3.1. Preservación de la información y entropía en la radiación Hawking de un agujero negro de Schwarzschild

Retomando el espectro de emisión descubierto por Parikh y Wilczek para la radiación Hawking del agujero negro de Schwarzschild, cuya deducción se mostró en el capítulo anterior,

$$\Gamma(w) = e^{-8\pi w \left( M - \frac{w}{2} \right)}, \quad (4-20)$$

basta con verificar que este cumple con la condición (4-18) para tener la conservación de la entropía y la información. La demostración se puede lograr utilizando *inducción matemática*, para lo cual se considera un agujero negro de Schwarzschild con masa  $M$  cuya radiación Hawking consiste en la emisión secuencial, por tunelamiento, de partículas con energía  $w_i$ :

Para  $n = 2$ : corresponde al proceso en el cual se emite primero la partícula  $w_1$  y enseguida la partícula  $w_2$  que esta condicionada<sup>1</sup> a la emisión de  $w_1$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2) &= \Gamma(w_1)\Gamma(w_2|w_1) \\ &= e^{-8\pi w_1(M-w_1/2)} \cdot e^{-8\pi w_2(M-w_1-w_2/2)} \\ &= e^{-8\pi(Mw_1-w_1^2/2+Mw_2-w_1w_2-w_2^2/2)} \\ &= e^{-8\pi(M(w_1+w_2)-\frac{1}{2}(w_1^2+2w_1w_2+w_2^2))} \\ &= e^{-8\pi(M(w_1+w_2)-\frac{1}{2}(w_1+w_2)^2)} \\ &= e^{-8\pi(w_1+w_2)(M-\frac{(w_1+w_2)}{2})} \\ &= \Gamma(w_1 + w_2). \end{aligned} \quad (4-21)$$

Así, el espectro (4-20) cumple la condición (4-18) para la emisión secuencial de dos partículas. Ahora supongamos que  $\Gamma(w)$  cumple la condición para la emisión de  $n$  partículas, es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) &= \Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdot \dots \cdot \Gamma(w_n|w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ &= \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \\ &= e^{-8\pi(w_1+w_2+\dots+w_n)(M-(w_1+w_2+\dots+w_n)/2)} \\ &= e^{-8\pi(\sum_{i=1}^n w_i)(M-(\sum_{i=1}^n w_i)/2)}. \end{aligned} \quad (4-22)$$

---

<sup>1</sup>La probabilidad condicional  $\Gamma(E_i|E_f)$  corresponde a la probabilidad de tunelamiento de una partícula con energía  $E_i$  condicionada a la emisión de radiaciones con energía total  $E_f$  y se define como  $\Gamma(E_i|E_f) = \exp \left[ -8\pi E_i \left( M - E_f - \frac{E_i}{2} \right) \right]$  [16].

Para  $n + 1$ : teniendo en cuenta la hipótesis anterior

$$\begin{aligned}
\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) &= \Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_{n+1}|w_1, w_2, \dots, w_n) \\
&= e^{w_1(M-w_1/2)} \cdot e^{-8\pi w_2(M-w_1-w_2/2)} \dots e^{-8\pi w_{n+1}(M-\sum_{i=1}^n w_i-w_{n+1}/2)} \\
&= e^{-8\pi(\sum_{i=1}^n w_i)(M-(\sum_{i=1}^n w_i)/2)} \cdot e^{-8\pi w_{n+1}(M-\sum_{i=1}^n w_i-w_{n+1}/2)} \\
&= e^{-8\pi(M\sum_{i=1}^n w_i - (\sum_{i=1}^n w_i)^2/2 + Mw_{n+1} - w_{n+1}\sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1}^2/2)} \\
&= e^{-8\pi[(M\sum_{i=1}^n w_i + Mw_{n+1}) - ((\sum_{i=1}^n w_i)^2/2 + w_{n+1}\sum_{i=1}^n w_i + w_{n+1}^2/2)]} \\
&= e^{-8\pi[M\sum_{i=1}^{n+1} w_i - \frac{1}{2}((\sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 + 2w_{n+1}\sum_{i=1}^n w_i + w_{n+1}^2)]} \\
&= e^{-8\pi[M\sum_{i=1}^{n+1} w_i - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2]} \\
&= e^{-8\pi(\sum_{i=1}^{n+1} w_i)(M-(\sum_{i=1}^{n+1} w_i)/2)} \\
&= \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n + w_{n+1}). \tag{4-23}
\end{aligned}$$

De este modo, se concluye que el espectro de emisión dado por la ecuación (4-20) satisface la condición (4-18) y por lo tanto la radiación Hawking del agujero negro de Schwarzschild conserva la entropía e información.

### 4.3.2. Preservación de la información y entropía en la radiación Hawking de un agujero negro de Reissner-Nordström

Como se vio anteriormente, para un agujero negro de masa  $M$  y carga  $Q$ , el espectro de emisión de partículas neutras (modelo Parikh y Wilczek) resulta ser

$$\Gamma(w) = e^{-2\pi[2w(M-w/2) - (M-w)\sqrt{(M-w)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]} \tag{4-24}$$

De forma análoga que en el caso del agujero negro de Schwarzschild, se puede demostrar, por inducción matemática sobre  $n$ , que esta última expresión cumple la condición (4-18):

Para  $n=2$ : corresponde a la emisión de la partícula neutra  $w_1$ , seguida a la emisión de la partícula neutra  $w_2$  dado que ya ha sido emitida  $w_1$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma(w_1, w_2) &= \Gamma(w_1)\Gamma(w_2|w_1) \\
&= e^{-2\pi[2w_1(M-\frac{w_1}{2}) - (M-w_1)\sqrt{(M-w_1)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]} \\
&\quad \times e^{-2\pi[2w_2(M-w_1-\frac{w_2}{2}) - (M-w_1-w_2)\sqrt{(M-w_1-w_2)^2 - Q^2} + (M-w_1)\sqrt{(M-w_1)^2 - Q^2}]} \tag{4-25}
\end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2w_1 \left( M - \frac{w_1}{2} \right) - (M - w_1)\sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2} \\
\sigma_2 &= 2w_2 \left( M - w_1 - \frac{w_2}{2} \right) - (M - w_1 - w_2)\sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} \\
&\quad + (M - w_1)\sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2},
\end{aligned}$$

entonces (4-25) se puede reexpresar como

$$\Gamma(w_1, w_2) = e^{-2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}. \quad (4-26)$$

Luego

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 = & 2w_1 \left( M - \frac{w_1}{2} \right) - (M - w_1) \sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \\ & + 2w_2 \left( M - w_1 - \frac{w_2}{2} \right) - (M - w_1 - w_2) \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} \\ & + (M - w_1) \sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2}. \end{aligned} \quad (4-27)$$

Desarrollando paréntesis, simplificando y reorganizando términos en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 = & 2(w_1 + w_2)M - (w_1 + w_2)^2 - (M - w_1 - w_2) \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} \\ & + M \sqrt{M^2 + Q^2} \\ = & 2(w_1 + w_2) \left( M - \frac{w_1 + w_2}{2} \right) - (M - w_1 - w_2) \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} \\ & + M \sqrt{M^2 + Q^2}. \end{aligned} \quad (4-28)$$

Remplazando (4-28) en (4-26)

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2) = & e^{-2\pi[2(w_1 + w_2)(M - \frac{w_1 + w_2}{2}) - (M - w_1 - w_2) \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 + Q^2}]} \\ = & \Gamma(w_1 + w_2). \end{aligned} \quad (4-29)$$

Ahora supongamos que  $\Gamma(w)$  cumple la condición para la emisión de  $n$  partículas, es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) = & \Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_n|w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ = & \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \\ = & e^{-2\pi[2 \sum_{i=1}^n w_i (M - \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{2}) - (M - \sum_{i=1}^n w_i) \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2}]} \end{aligned} \quad (4-30)$$

Para  $n+1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) = & \\ \Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_{n+1}|w_1, w_2, \dots, w_n) = & \\ e^{-2\pi[2w_1(M - \frac{w_1}{2}) - (M - w_1) \sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2}]} & \\ \times e^{-2\pi[2w_2(M - w_1 - \frac{w_2}{2}) - (M - w_1 - w_2) \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - Q^2} + (M - w_1) \sqrt{(M - w_1)^2 - Q^2}]} & \times \dots \\ \times e^{-2\pi[2w_{n+1}(M - \sum_{i=1}^n w_i - \frac{w_{n+1}}{2}) - (M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1}) \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1})^2 - Q^2} + (M - \sum_{i=1}^n w_i) \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - Q^2}]} & \end{aligned} \quad (4-31)$$

Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) = & \\ & e^{-2\pi[2\sum_{i=1}^n w_i(M - \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{2}) - (M - \sum_{i=1}^n w_i)\sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]} \\ & \times e^{-2\pi[2w_{n+1}(M - \sum_{i=1}^n w_i - \frac{w_{n+1}}{2}) - (M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)\sqrt{(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 - Q^2} + (M - \sum_{i=1}^n w_i)\sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - Q^2}]} \end{aligned} \quad (4-32)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & 2\sum_{i=1}^n w_i \left( M - \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{2} \right) - \left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right)^2 - Q^2} \\ & + M\sqrt{M^2 - Q^2}, \\ \lambda_2 = & 2w_{n+1} \left( M - \sum_{i=1}^n w_i - \frac{w_{n+1}}{2} \right) - \left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right)^2 - Q^2} \\ & + \left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right)^2 - Q^2} \end{aligned}$$

se reexpresa (4-32) como

$$\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) = e^{-2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (4-33)$$

Así,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = & 2\sum_{i=1}^n w_i \left( M - \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{2} \right) - \left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right)^2 - Q^2} \\ & + M\sqrt{M^2 - Q^2} + 2w_{n+1} \left( M - \sum_{i=1}^n w_i - \frac{w_{n+1}}{2} \right) \\ & - \left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right)^2 - Q^2} \\ & + \left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^n w_i \right)^2 - Q^2}. \end{aligned} \quad (4-34)$$

Desarrollando paréntesis, simplificando y reorganizando términos en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = & 2\left( \sum_{i=1}^n w_i + w_{n+1} \right) M - \left( \sum_{i=1}^n w_i + w_{n+1} \right)^2 \\ & - \left( M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} \right)^2 - Q^2} \\ & + M\sqrt{M^2 + Q^2} \\ = & 2\sum_{i=1}^{n+1} w_i \left( M - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i}{2} \right) - \left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right) \sqrt{\left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \right)^2 - Q^2} \\ & + M\sqrt{M^2 + Q^2}. \end{aligned} \quad (4-35)$$

Remplazando (4-35) en (4-33)

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) &= e^{-2\pi[2\sum_{i=1}^{n+1} w_i(M - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i}{2}) - (M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)\sqrt{(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 + Q^2}]} \\ &= \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n + w_{n+1}). \end{aligned} \quad (4-36)$$

Por lo tanto, se concluye que el espectro de emisión dado por la ecuación (4-24) satisface la condición (4-18) y en consecuencia hay conservación de la información y la entropía en la radiación Hawking del agujero negro de Reissner-Nordström.

# Capítulo 5

## Número de microestados de un agujero negro y su entropía Bekenstein-Hawking

En termodinámica, el valor de la entropía de un sistema está relacionado y se puede determinar por el número de sus microestados a que es asequible [30]. Para el caso de un agujero negro, en principio, su número de microestados podría ser calculado directamente de sus estados cuánticos microscópicos. Pero este enfoque resulta difícil de abordar dado que la forma exacta del estado cuántico de un agujero negro necesita de una teoría de la gravedad cuántica que aun está pendiente por establecerse. Sin embargo, a pesar de la complejidad del problema, se han realizado avances y explorando un enfoque diferente al de contar con dicha teoría para poder hallar los microestados de un agujero negro, investigaciones como las del grupo de Cai *et al.* [17] han vislumbrado un camino a través del cual se puede obtener los valores de las entropías de Bekenstein-Hawking para los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström a partir del conteo de los microestados de la radiación Hawking. En el presente capítulo se realiza una descripción de estos desarrollos que permiten calcular tales entropías.

### 5.1. Agujero negro de Schwarzschild

Cai *et al.* relacionan el número de microestados de un agujero negro con su correspondiente radiación Hawking utilizando como argumento el hecho de que para un átomo excitado, su número de microestados se pueden obtener a partir del número de microestados del fotón emitido y la degeneración de niveles de energía respecto al estado basal. La analogía también es respaldada por el hecho de que en teoría de gravedad cuántica, los agujeros negros son tomados como estados altamente excitados. Bajo estas presunciones, la entropía del agujero negro puede ser calculada por medio del conteo de microestados de sus respectivas emisiones

de radiación Hawking, las cuales agotan el agujero negro. Tras este proceso, el espacio-tiempo se vuelve euclidiano (estado fundamental).

Considerando la radiación Hawking como la emisión secuencial de partículas con energía  $w_i$ , después de la primer emisión de energía  $w_1$ , el número de microestados del agujero negro de Schwarzschild cambia de  $\Omega_{\text{inicial}}(M)$  a  $\Omega_{BH}(M - w_1)$ , obteniéndose que

$$\Omega_{\text{inicial}}(M) = \Omega_{\text{radiación}}(w_1) \cdot \Omega_{BH}(M - w_1), \quad (5-1)$$

donde  $\Omega(w_1)$  corresponde al número de microestados de la partícula emitida.

Para la próxima emisión de una partícula  $w_2$ , se tiene que

$$\Omega_{BH}(M - w_1) = \Omega_{\text{radiación}}(w_2) \cdot \Omega_{BH}(M - w_1 - w_2). \quad (5-2)$$

De estas dos últimas ecuaciones se encuentra que tras dos emisiones

$$\Omega_{\text{inicial}}(M) = \Omega_{\text{radiación}}(w_1) \cdot \Omega_{\text{radiación}}(w_2) \cdot \Omega_{BH}(M - w_1 - w_2). \quad (5-3)$$

Continuando con el proceso de radiación, hasta que el agujero negro se agote con  $n$  emisiones, la relación mostrada en la ecuación (5-3) deriva en la siguiente fórmula

$$\Omega_{\text{inicial}}(M) = \prod_{i=1}^n \Omega_{\text{radiación}}(w_i), \quad (5-4)$$

es decir que el número de microestados de un agujero negro puede ser calculado a partir del número de microestados de su respectiva radiación Hawking, lo cual es consistente cuando dicha radiación resulta ser un proceso unitario.

Si la tasa o probabilidad de emisión de  $w$  en la radiación es  $\Gamma(w)$ , entonces el número de microestados de esta radiación se puede expresar como

$$\Omega_{\text{radiación}}(w) = \frac{1}{\Gamma(w)}. \quad (5-5)$$

Al retomar la tasa o probabilidad de emisión de partículas  $w_i$  para la radiación Hawking vista como un fenómeno de tunelamiento cuántico (modelo Parikh y Wilczek), por las ecuaciones (5-4) y (5-5) se encuentra que el número de microestados para el agujero de Schwarzschild de masa  $M$  es

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{inicial}}(M) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(w_i)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_n|w_1, w_2, \cdots, w_n)}, \end{aligned} \quad (5-6)$$

y como se mostró en el capítulo 4 que  $\Gamma(w)$  (ecuación (3-24)) satisface la condición (4-18), entonces

$$\begin{aligned}
\Omega_{\text{inicial}}(M) &= \frac{1}{\Gamma(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)} \\
&= \frac{1}{e^{-8\pi(\sum_{i=1}^n w_i)(M - (\sum_{i=1}^n w_i)/2)}} \\
&= \frac{1}{e^{-8\pi(M)(M - (M)/2)}} \\
&= \frac{1}{e^{-4\pi M^2}} \\
&= e^{4\pi M^2}, \tag{5-7}
\end{aligned}$$

donde  $M = \sum_{i=1}^n w_i$  por conservación de la energía, dado que el agujero negro se evapora tras  $n$  emisiones  $w_i$ .

Este último resultado revela que la entropía del agujero negro es

$$S = \ln \Omega_{\text{inicial}}(M) = 4\pi M^2, \tag{5-8}$$

coincidiendo con el valor encontrado por Hawking [13].

## 5.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

Si se considera la radiación Hawking de un agujero negro de Reissner-Nordström, constituida por partículas que llevan masa ( $w$ ) y carga ( $q$ ), se encuentra que la probabilidad de tunelamiento es [31]

$$\Gamma(w, q) = e^{[\pi(M-w+\sqrt{(M-w)^2-(Q-q)^2})-\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2]}, \tag{5-9}$$

la cual satisface la condición (4-18) como se muestra en el apéndice B. Procediendo de forma análoga a como se hizo en el caso del agujero negro de Schwarzschild, se tiene que el número de microestados para el agujero negro de Reissner-Nordström viene dado por

$$\begin{aligned}
\Omega_{\text{inicial}}(M, Q) &= \prod_{i=1}^n \Omega_{\text{radiación}}(w_i, q_i) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(w_i, q_i)} \\
&= e^{\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2}. \tag{5-10}
\end{aligned}$$

Utilizando este último resultado, se obtiene el valor de entropía

$$S = \ln \Omega_{\text{inicial}}(M, Q) = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \tag{5-11}$$

### 5.3. Agujero negro extremo de Reissner-Nordström

En el capítulo 3 (sección 3.5) se vio que al realizar una aproximación de primer orden en  $w$  para el espectro de emisión de partículas neutras de un agujero negro cargado, se recupera el valor de su temperatura Hawking

$$T_H = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (5-12)$$

Esta expresión muestra que conforme  $M \rightarrow Q$  entonces  $T_H \rightarrow 0$  y  $\Gamma(w) \rightarrow 0$ , es decir, la emisión de partículas se detiene en el límite  $M = Q$ .

De acuerdo con el planteamiento de Cai *et al.*, un agujero negro extremo de Reissner-Nordström puede obtenerse de un agujero negro de Reissner-Nordström (cuya masa y carga son  $M$  y  $Q$  respectivamente) si solo hay emisión de partículas sin carga, dado que en algún momento se llegará a la condición  $(M - \sum_i w_i)^2 - Q^2 = 0$ . Así, a la luz de este modelo, el estado final de una agujero negro de Reissner-Nordström es el agujero negro extremo con masa  $m = M - \sum_i w_i$  y carga  $Q$ , en el cual la emisión de partículas se ha detenido. Luego, el número de microestados para el agujero negro de Reissner-Nordström resulta ser

$$\Omega_{\text{inicial}}(M, Q) = \left[ \prod_{i=1}^n \Omega(w_i) \right] \cdot \Omega_{\text{final}}(m, Q), \quad (5-13)$$

donde  $\Omega_{\text{final}}(m, Q)$  indica el número de microestados para el agujero negro cargado de masa  $m$  y carga  $Q = m$ , cuyo valor no puede ser determinado procediendo como en las anteriores secciones, sino que se debe utilizar la ecuación (5-13) expresándola como

$$\Omega_{\text{final}}(m, Q) = \frac{\Omega_{\text{inicial}}(M, Q)}{\prod_{i=1}^n \Omega(w_i)}. \quad (5-14)$$

En esta última ecuación, el valor del numerador ya es conocido y está dado por la ecuación (5-10). Solo falta calcular el denominador utilizando el espectro de emisión encontrado por Parikh y Wilczek para la emisión neutra del agujero negro cargado (ecuación (4-24)), el cual satisface la condición (4-18). Teniendo en cuenta que  $m = M - \sum_i w_i \implies \sum_i w_i = M - m$ ,

se llega a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \Omega(w_i) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(w_i)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(w_1) \cdot \Gamma(w_2|w_1) \cdots \Gamma(w_n|w_1, w_2, \dots, w_n)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)} \\
&= \frac{1}{e^{-2\pi[2\sum_{i=1}^n w_i(M - \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{2}) - (M - \sum_{i=1}^n w_i)\sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]} } \\
&= \frac{1}{e^{-2\pi[2(M-m)(M - \frac{M-m}{2}) - (M - (M-m))\sqrt{(M - (M-m))^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}]} } \\
&= e^{2\pi(M^2 - m^2 - m\sqrt{m^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2})}. \tag{5-15}
\end{aligned}$$

Por (5-10), (5-14) y (5-15) se obtiene que el número de microestados del agujero negro extremo residual es

$$\begin{aligned}
\Omega_{final}(m, Q) &= \frac{e^{\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}}{e^{2\pi(M^2 - m^2 - m\sqrt{m^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2})}} \\
&= \frac{e^{2\pi(M^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2} - \frac{Q^2}{2})}}{e^{2\pi(M^2 - m^2 - m\sqrt{m^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2})}} \\
&= e^{2\pi(m^2 + m\sqrt{m^2 - Q^2} - \frac{Q^2}{2})} \\
&= e^{\pi(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^2}. \tag{5-16}
\end{aligned}$$

Haciendo uso en esta última expresión de la condición de extremalidad  $Q = m$ , el resultado se simplifica a  $\Omega_{final}(m, Q) = e^{\pi m^2}$  y la entropía del agujero negro extremo de Reissner-Nordström con masa  $m$  y carga  $Q = m$  es

$$S = \ln \Omega_{final}(m, Q) = \pi m^2. \tag{5-17}$$

Resultado que está en acuerdo con el derivado por medio de la teoría de cuerdas [8].

# Capítulo 6

## Una mirada a la interpretación de la entropía Bekenstein-Hawking

Una de las características principales que tiene la entropía de Bekenstein-Hawking, es que resulta ser proporcional al área del horizonte de eventos del agujero negro, lo que la hace diferente a la entropía de la materia ordinaria, por ejemplo la entropía térmica de un gas la cual es proporcional al volumen. Desde su descubrimiento se ha generado toda una línea de investigación para abordar el origen y significado de la  $S_{BH}$ , surgiendo varias propuestas (por ejemplo [32–35]) desde distintas teorías entre las que se encuentran: teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos, teoría de entanglement, entre otras [36]. El mismo Bekenstein dio su punto de vista al respecto y unos pocos años después de su descubrimiento, conjeturó que la entropía de un agujero negro, interpretada en términos de la fórmula de Boltzmann, indicarían las configuraciones o posibles microestados de su estructura y composición interna [37].

Una interesante interpretación es la adoptada por Zhang *et al.* [38]. Ellos proponen que la entropía es la incertidumbre sobre la información de las configuraciones precolapsadas, autocolapsadas e intercolapsadas de la materia que conforma el agujero negro. En escenarios en los cuales involucra agujeros negros, lo anterior puede ser aplicado a la formación, colisión o materia cayendo en estos objetos. En las siguientes líneas se describe y profundiza sobre esta visión de la entropía de Bekenstein-Hawking sugerida por Zhang *et al.*

### 6.1. Entropía e información del agujero negro y su radiación

Como se vio en el capítulo 3, en el modelo propuesto por Parikh y Wilczek, se trata la radiación Hawking como un fenómeno de tunelamiento, obteniéndose que la probabilidad de

emisión viene dada por

$$\Gamma(M; E) \sim \exp \left[ -8\pi E \left( M - \frac{E}{2} \right) \right]. \quad (6-1)$$

Adoptando la notación de  $\mathcal{S}$  para indicar la entropía del agujero negro y  $S$  para indicar la de la radiación, la parte exponencial de la anterior expresión puede ser considerada como el cambio de entropía de un agujero negro<sup>1</sup>

$$\Delta\mathcal{S} = -8\pi E (M - E/2), \quad (6-2)$$

donde el signo negativo representa el descenso de entropía del agujero negro asociado con cada emisión. Esto último significa que la radiación Hawking lleva información, pues un descenso en la entropía implica una reducción de la incertidumbre, o equivalentemente, una ganancia de información. Luego, la entropía llevada por las partículas emitidas es<sup>2</sup>

$$S(E) = -\ln \Gamma(M; E) = +8\pi E (M - E/2), \quad (6-3)$$

donde el signo positivo representa un incremento de la entropía en los alrededores del agujero negro. De esta manera, si se toma el sistema *agujero negro más su radiación Hawking*, la

---

<sup>1</sup>Para llegar a la equivalencia  $\Gamma \sim e^{-2\text{Im } S} = e^{\Delta\mathcal{S}_{BH}}$ , considérese la emisión de una partícula de energía del agujero negro. Denotando el estado inicial y final por los subíndices  $i$  y  $f$  respectivamente,  $P_a$  la probabilidad de obtener el sistema en el macroestado  $a(a = i, f)$  y  $P_{a \rightarrow b}$  la transición de la probabilidad del estado  $a$  a  $b$  ( $a, b = i, f$ ), entonces en el equilibrio térmico

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i P_{i \rightarrow f} - P_f P_{f \rightarrow i} = 0. \quad (*)$$

Por la mecánica estadística, se tiene que la entropía de un estado dado (especificado por sus macroestados) es el logaritmo del total de sus microestados, por lo tanto el número de microestados para el agujero negro sería  $e^{\mathcal{S}_{BH}}$ . Como la probabilidad de obtener un sistema en un macroestado particular es proporcional al número de microestados compatibles para esa configuración, entonces por la condición (\*)

$$e^{\mathcal{S}_i} P_{\text{emisión}} = e^{\mathcal{S}_f} P_{\text{absorción}},$$

donde  $P_{\text{emisión}}$  es la probabilidad de emisión  $P_{i \rightarrow f}$  y  $P_{\text{absorción}}$  es la probabilidad de absorción  $P_{f \rightarrow i}$ . Así, la tasa de tunelamiento está dada por

$$\Gamma = \frac{P_{\text{emisión}}}{P_{\text{absorción}}} = e^{\mathcal{S}_f} - e^{\mathcal{S}_i} = e^{\Delta\mathcal{S}_{BH}},$$

de donde se concluye la correspondencia [39]:

$$\Delta\mathcal{S}_{BH} = -2\text{Im } S.$$

<sup>2</sup>Una razón por la cual se le puede asociar una entropía a cada partícula emitida, es que dicho proceso es probabilístico. En un agujero negro de masa  $M$ , cada emisión de su radiación Hawking por efecto túnel, ocurre con una probabilidad  $\Gamma(M; E)$ . En pocas palabras, la incertidumbre del evento (emisión de una radiación con energía  $E$ ) o información potencial que se puede ganar del evento es  $S(E) = -\ln \Gamma(M; E)$  [38].

entropía no cambia durante todo el proceso (se conserva) y la información es transportada al exterior del agujero negro. Al desarrollar la última ecuación

$$S(E) = 8\pi E (M - E/2) = 8\pi E(M - E) + 4\pi E^2, \quad (6-4)$$

se encuentra que la entropía llevada o transportada por la partícula con energía  $E$  depende también de la masa del agujero negro de tal manera que el sistema total consiste de un agujero negro de masa  $M - E$  y una emisión con energía  $E$ . El primer término en la última expresión de la ecuación (6-4) tiene la forma de la correlación entre el agujero negro y la partícula<sup>3</sup>, mientras que el segundo es similar a la entropía de un agujero negro de masa o energía  $E$ . Con esta lectura de la entropía que se asocia o lleva una partícula emitida por el agujero negro, Zhang *et al.* explican la entropía relacionada con la colisión de dos agujeros negros, materia cayendo en un agujero negro y materia colapsando en agujero negro.

## 6.2. Entropía en el proceso de colisión de dos agujeros negros.

Sean dos agujeros negros de Schwarzschild con masa  $M$  y  $m$  cuyas entropías son  $4\pi M^2$  y  $4\pi m^2$  respectivamente. Asumiendo que están separados por una gran distancia y que están estacionarios, se tiene que para cada uno de ellos la energía cinética y el momentum valen cero. Sin embargo, debido a la atracción gravitacional los dos agujeros comenzarán a aproximarse uno hacia el otro, incrementando su velocidad hasta colisionar y formar un agujero negro más grande. Mientras la conservación de la energía y el momentum se mantiene, la conservación de la entropía no se cumple, pues la entropía final del agujero negro resultante es

$$S_{M+m} = 4\pi(M + m)^2 = 4\pi M^2 + 4\pi m^2 + 8\pi Mm. \quad (6-5)$$

Como se aprecia en esta última ecuación, adicional a las dos entropías iniciales, existe un tercer término  $8\pi Mm$  que mide alguna clase de correlación a causa de la interacción gravitacional. Antes de la colisión, esta correlación constituye información actual que describe la dinámica debida a la fuerza gravitacional. Lo anterior está al alcance de un observador externo, por lo que la entropía de todo el sistema no cambia. Cuando se forma el nuevo agujero negro, dicha correlación es cubierta por su horizonte de eventos, de tal manera que el observador no puede obtener información acerca de la correlación, incrementando la entropía o la incertidumbre con respecto al nuevo agujero negro.

---

<sup>3</sup>En el apéndice C se explica la existencia de correlaciones con el espectro no térmico y la forma matemática que tienen éstas.

### 6.2.1. Entropía en la radiación gravitacional

Aparte de la radiación de Hawking, otro tipo de radiación relacionada con agujeros negros es la debida a la emisión de ondas gravitacionales, la cual se presenta cuando dos de estos objetos colisionan. Surge la inquietud si este tipo de emisión puede transportar la cantidad de información correspondiente al incremento de la entropía cuando se fusionan los agujeros negros de masa  $M$  y  $m$ . Suponiendo que efectivamente todo el incremento de entropía es llevado por la radiación gravitacional, entonces

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{\text{radiación gravitacional}} + \Delta S_{\text{agujero negro}} &= 0 \\
 \Delta S_{\text{radiación gravitacional}} &= -\Delta S_{\text{agujero negro}} \\
 [S(m') - 0] &= -[(S_{M+m-m'}) - (S_M + S_m)] \\
 S(m') &= S_M + S_m - S_{M+m-m'}, \tag{6-6}
 \end{aligned}$$

donde  $m'$  es la energía de la radiación gravitacional.

Por el teorema del área o segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros [40], cuando dos de estos objetos colisionan, el área del horizonte de eventos final es mayor que la suma de las áreas de los horizontes de eventos de cada uno de los agujeros negros involucrados. Dado que en este caso la entropía resulta proporcional al área del horizonte de eventos, entonces se sigue la relación

$$S_{M+m-m'} > S_M + S_m. \tag{6-7}$$

Por las ecuaciones (6-6) y (6-7) se tiene que  $S(m') < 0$ , indicando que la radiación gravitacional no da cuenta de todo el incremento en la entropía del agujero negro fusionado y por lo tanto no puede llevar toda la información respecto a la interacción gravitacional del colapso. Varias correlaciones deben quedar ocultas tras el horizonte de eventos del agujero negro final, a las cuales observadores externos no tienen acceso.

## 6.3. Entropía en el proceso de materia cayendo en un agujero negro

Si materia ordinaria de masa  $m$  y entropía inicial  $S^{(0)}$ , cae en un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ , entonces la entropía resultante en el agujero negro es  $S_{M+m} = 4\pi(M+m)^2 = 4\pi M^2 + 4\pi m^2 + 8\pi Mm$  y el correspondiente cambio neto de entropía en el sistema resulta ser

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= 4\pi m^2 + 8\pi Mm - S^{(0)} \\
 &= (4\pi m^2 - S^{(0)}) + 8\pi Mm. \tag{6-8}
 \end{aligned}$$

Haciendo una lectura de esta última expresión, su estructura sugiere las siguientes etapas en el proceso:

- En la primer etapa, la materia que cae sufre un autocolapso y se transforma en un agujero negro de masa  $m$ , el término  $(4\pi m^2 - \mathcal{S}^{(0)})$  cuantifica la cantidad de información que es inasequible en este proceso de colapso.
- En la segunda etapa, el agujero inicial y el agujero negro originado en el colapso de la materia con masa  $m$ , colisionan y forman un nuevo agujero negro en un proceso de intercolapso. El término  $8\pi Mm$  mide el incremento de entropía causado por la información inasequible acerca de las correlaciones gravitacionales durante la colisión y colapso, ya que las ondas gravitacionales generadas no pueden llevarse todo el incremento de entropía.

## 6.4. Significado de la entropía en la radiación Hawking

La entropía que mide la información llevada por una partícula que tunela (ecuación (6-4)), se puede reexpresar como

$$S(E) = 8\pi E(M - E) + (4\pi E^2 - \mathcal{S}^{(0)}) + \mathcal{S}^{(0)}, \quad (6-9)$$

donde  $\mathcal{S}^{(0)}$  denota la entropía de la partícula (masa) con energía  $E$  antes de la formación del agujero negro. Por lo expuesto en las secciones anteriores, esta última ecuación sugiere que en el proceso de radiación Hawking visto como efecto túnel, adicional a la entropía inherente a la partícula radiada, la correlación entre la radiación y el agujero negro restante  $8\pi E(M - E)$ , generado del proceso de intercolapso, y la entropía del agujero negro restante  $(4\pi E^2 - \mathcal{S}^{(0)})$ , generada por el proceso de autocolapso, también son llevadas al exterior.

Dichas correlaciones que son llevadas afuera del agujero negro a través de su radiación, incluyen correlaciones de todas las partículas emitidas entre sí. Considerando una emisión secuencial de partículas en el orden  $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$  se tiene el siguiente proceso:

1. La entropía de la primer emisión con energía  $E_1$  es

$$S(E_1) = 8\pi E_1(M - E_1) + (4\pi E_1^2 - \mathcal{S}_1^{(0)}) + \mathcal{S}_1^{(0)}, \quad (6-10)$$

donde el término  $8\pi E_1(M - E_1)$  incluye todas las correlaciones entre la partícula  $E_1$  y las demás partículas con energías  $E_2, \dots, E_{n-1}, E_n$ .

2. Dada la primer emisión con energía  $E_1$ , la entropía de la segunda emisión con energía  $E_2$  resulta ser

$$S(E_2|E_1) = 8\pi E_1(M - E_1 - E_2) + (4\pi E_2^2 - \mathcal{S}_2^{(0)}) + \mathcal{S}_2^{(0)}. \quad (6-11)$$

En esta última entropía se diferencian tres términos:  $\mathcal{S}_2^{(0)}$  hace referencia a las configuraciones precolapsadas,  $(4\pi E_2^2 - \mathcal{S}_2^{(0)})$  a las configuraciones autocolapsadas y la correlación  $8\pi E_1(M - E_1 - E_2)$  a las configuraciones intercolapsadas. Cabe notar que

la información acerca de la correlación entre la primer emisión  $E_1$  y la segunda emisión  $E_2$  ya es transportada (llevada) por la primer emisión, por lo que no se tiene en cuenta en la ecuación (6-11).

3. Procediendo de forma análoga para la tercer emisión con energía  $E_3$

$$S(E_3|E_1, E_2) = 8\pi E_3(M - E_1 - E_2 - E_3) + (4\pi E_3^2 - \mathcal{S}_3^{(0)}) + \mathcal{S}_3^{(0)}. \quad (6-12)$$

En esta última ecuación se puede verificar que la correlación entre las emisiones  $E_3$  y  $E_1$ , no se tiene en cuenta porque ya está contabilizada en la entropía de la emisión 2 o ecuación (6-11). Igualmente para la correlación entre las emisiones  $E_1$  y  $E_2$ , la cual ya está capturada en la entropía de la emisión  $E_1$  o ecuación (6-10).

Sumando las entropías descritas en los pasos 1, 2 y 3 del anterior proceso, se llega a que

$$\begin{aligned} & S(E_1) + S(E_2|E_1) + S(E_3|E_1, E_2) \\ &= 8\pi E_1(M - E_1) + 4\pi E_1^2 + 8\pi E_2(M - E_1 - E_2) + 4\pi E_2^2 + 8\pi E_3(M - E_1 - E_2 - E_3) \\ & \quad + 4\pi E_3^2 \\ &= 8\pi(E_1 + E_2 + E_3)M - 4\pi E_1^2 - 8\pi E_2 E_1 - 4\pi E_2^2 - 8\pi E_3 E_1 - 8\pi E_3 E_2 - 4\pi E_3^2 \\ &= 8\pi(E_1 + E_2 + E_3)M - 4\pi(E_1 + E_2 + E_3)^2. \end{aligned} \quad (6-13)$$

Sumando y restando  $4\pi M^2$

$$\begin{aligned} & S(E_1) + S(E_2|E_1) + S(E_3|E_1, E_2) \\ &= 4\pi M^2 + 8\pi(E_1 + E_2 + E_3)M - 4\pi(E_1 + E_2 + E_3)^2 - 4\pi M^2 \\ &= 4\pi M^2 - 4\pi[M^2 - 2(E_1 + E_2 + E_3)M + (E_1 + E_2 + E_3)^2] \\ &= 4\pi M^2 - 4\pi(M - E_1 - E_2 - E_3)^2. \end{aligned} \quad (6-14)$$

Luego  $S(E_1) + S(E_2|E_1) + S(E_3|E_1, E_2) = \Delta S$ , es decir, la entropía asociada a la emisión secuencial de las tres emisiones resulta ser el cambio de entropía en los alrededores del agujero negro. Por otra parte, la expresión  $4\pi(M - E_1 - E_2 - E_3)^2 - 4\pi M^2$  es el cambio de entropía en el agujero negro como consecuencia de las tres emisiones. Así, el desarrollo de ecuaciones (6-14) conlleva a:

$$\Delta S_{\text{radiación}} = -\Delta S_{\text{agujero negro}}. \quad (6-15)$$

Esto implicaría que la radiación Hawking lleva consigo información, de tal forma que en un proceso de evaporación completa del agujero negro tras las emisiones  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , toda la información es llevada al exterior implicando su conservación al igual que la entropía, pues al agotarse el agujero negro se encuentra que

$$\Delta S_{\text{radiación}} = 4\pi M^2 = S_{BH}. \quad (6-16)$$

# Capítulo 7

## Conclusiones

- Se logró reproducir la radiación Hawking como un fenómeno de tunelamiento cuántico, con base en el modelo propuesto por Parikh y Wilczek (capítulo 3) donde se tiene en cuenta la conservación de la energía y el espectro de emisión toma la forma

$$\Gamma \sim e^{-8\pi w(M-w/2)}, \quad (7-1)$$

para la emisión de una partícula con energía  $w$  de un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$  (sección 3.4). Como se muestra en la sección 3.5, el procedimiento para obtener este resultado se puede extender al agujero negro con masa  $M$  y carga  $Q$  (Reissner-Nordström) en un proceso de emisión de partículas neutras y obtener una tasa de emisión

$$\Gamma \sim e^{-2\pi[2w(M-w/2)-(M-w)\sqrt{(M-w)^2-Q^2}+M\sqrt{M^2-Q^2}]}. \quad (7-2)$$

- De acuerdo con la sección 4.3, se pudo desarrollar la completez de los cálculos y demostrar de manera formal que las ecuaciones (7-1) y (7-2) satisfacen la condición

$$\Gamma(w_1, w_2, \dots, w_n) = \Gamma(w_1 + w_2 + \dots + w_n), \quad (7-3)$$

tras un proceso de emisión secuencial de  $n$  partículas. La ecuación (7-3) es una condición que resulta necesaria y suficiente (si y solo si) para que la radiación Hawking suceda como un proceso unitario, es decir, que tanto la entropía y la información se conserven en dicho fenómeno enmarcado en el límite semiclásico.

- Utilizando la condición (7-3), se ha mostrado que el número de microestados de un agujero negro se puede definir en función del número de microestados de su respectiva radiación, y a partir de esto se ha calculado la entropía de Bekenstein-Hawking para los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström (secciones 5.1 y 5.2), lo que ha sido posible al considerar el agujero negro junto con su radiación, un sistema cerrado en equilibrio lo que posibilita que al definir sobre éste la entropía desde la

perspectiva de la teoría de la información (entropía de Shannon), se pueda traducir en la entropía termodinámica (entropía de Boltzmann) [17]. En otras palabras, se ha modelado la entropía de Bekenstein-Hawking conectando la teoría de la información con la termodinámica.

- Cuando la entropía es interpretada como una medida de la incertidumbre o equivalentemente una medida de la información oculta (como se describió en el capítulo 6), se puede inferir que la entropía para un agujero negro, implica que para un observador externo existe incertidumbre acerca de las configuraciones precolapsadas, autocolapsadas e intercolapsadas de la materia que conforman dicho objeto [38]. Así, al considerar un proceso de evaporación completa del agujero negro, toda la información resguardada por el horizonte de eventos podría ser llevada al exterior por medio de la radiación Hawking vía tunelamiento cuántico (sección 6.4). Sin embargo, cabe aclarar que esta última afirmación se enfoca desde un punto de vista cuantitativo (la *cantidad* de información/entropía del agujero negro es equivalente a la *cantidad* de información/entropía relacionada con la respectiva radiación Hawking). Precisar con detalle la forma en que la información se codifica en las correlaciones de la radiación Hawking, es una problemática que deberá ser resuelta por una eventual teoría de la gravedad cuántica.
- En el contexto de los agujeros negros, se ha podido enlazar la entropía definida en la teoría de la información con la entropía termodinámica (sección 4.2): *el universo de la información se conecta con el universo de la materia*. Una conexión que ya es predecible por el solo hecho de que la materia contiene información en su propia estructura, organización y estados cuánticos: *en sus múltiples configuraciones, ella tiene la capacidad de almacenar información*.

# Apéndice A

## Ejemplo cuantificación de la información

En la ciudad **Z** el estado del tiempo se clasifica en: *soleado*, *nublado*, *lluvia*, *tormenta eléctrica*, *niebla*, *bruma*, *chubasco* o *parcialmente soleado*. Suponiendo que los ocho estados son equiprobables, a un habitante de **Z** le llega un mensaje a su celular informándole que el día estará *nublado*.

¿Cuánta información tiene este mensaje?

Shannon consideraba que una forma de medir la información en un mensaje era equivalente a la cantidad de preguntas (con respuesta sí o no) que se necesitaría para averiguar su contenido. Así, para medir la cantidad de información del mensaje del estado del tiempo que le ha llegado al habitante de **Z**, lo más eficiente es hacer una pregunta que divida las posibilidades del estado del tiempo a la mitad. Por ejemplo, se organiza en una lista los 8 estados:

*Soleado*  
*Nublado*  
*Lluvia*  
*Tormenta eléctrica*  
*Niebla*  
*Bruma*  
*Chubasco*  
*Parcialmente soleado*

Tomando como referencia este ordenamiento, se podría preguntar si el estado del tiempo:

*¿se ubica en la mitad superior?*

(★)

Las respuestas a ( $\star$ ) serán **Sí** (que se codifica con el bit 1) o **No** (que se codifica con el bit 0). Al realizar la pregunta ( $\star$ ) por primera vez, se eliminan los cuatro últimos estados y el primer bit de información obtenido será 1:

$$1 = \begin{cases} \text{Soleado} \\ \text{Nublado} \\ \text{Lluvia} \\ \text{Tormenta eléctrica} \end{cases}$$


---


$$\text{Eliminados } \begin{cases} \text{Niebla} \\ \text{Bruma} \\ \text{Chubasco} \\ \text{Parcialmente soleado} \end{cases}$$

Después de que se ha eliminado la mitad inferior, el estado **Nublado** se encuentra en la mitad superior del resto de la lista. Al formular la pregunta ( $\star$ ) por segunda vez, se obtendrá nuevamente un bit 1:

$$1 \begin{cases} 1 \begin{cases} \text{Soleado} \\ 0 \rightarrow \text{Nublado} \end{cases} \\ \text{Lluvia} \\ \text{Tormenta eléctrica} \end{cases}$$

En este último diagrama se observa que el siguiente bit fue 0, pues **Nublado** se encuentra en la parte inferior de los estados restantes. Por lo tanto, se ha utilizado una cadena de tres bits (110), como resultado de realizar la pregunta ( $\star$ ) tres veces, para encontrar o identificar una posibilidad entre un grupo de ocho elementos. El mensaje que recibe el habitante de la ciudad **Z** notificándole sobre el estado del tiempo, contiene 3 bits de información.

Utilizando la operación de potenciación, se tiene que para el anterior ejemplo  $8 = 2^3$ , donde la potencia (número de estados del tiempo) y la base (situación binaria) eran conocidos, mientras que el valor del exponente es el que captura la cantidad de bits que se necesita para identificar un candidato de un conjunto de ocho elementos. Luego, como

$$8 = 2^3 \iff \log_2 8 = 3, \quad (\text{A-1})$$

se tiene que para abordar el problema de cuantificar la información de un mensaje, el empleo de la función logaritmo es pertinente.

Generalizando el anterior ejemplo, el número de bits que se necesitan para identificar determinada elección de un conjunto de  $N$  posibilidades resulta ser

$$I = \log_2 N, \quad (\text{A-2})$$

cuando todas ellas tienen igualdad de oportunidad para ser elegidas. Como  $N = \frac{1}{P}$ , entonces (A-2) se puede reexpresar como:

$$I = \log_2 \frac{1}{P}, \quad (\text{A-3})$$

siendo  $P$  la probabilidad de elegir cada opción.

# Apéndice B

## Demostración con el espectro de emisión de partículas cargadas

A continuación se demostrará que el espectro de emisión

$$\Gamma(w, q) = e^{[\pi(M-w+\sqrt{(M-w)^2-(Q-q)^2})^2-\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2]}, \quad (\text{B-1})$$

cumple la condición

$$\Gamma(w_1, \dots, w_n, q_1, \dots, q_n) = \Gamma(w_1 + \dots + w_n, q_1 + \dots + q_n). \quad (\text{B-2})$$

*Demostración.* La prueba se realiza por inducción sobre  $n$ . Suponiendo  $n = 2$ , corresponde a la emisión de la partícula con masa  $w_1$  y carga  $q_1$ , es decir  $(w_1, q_1)$ , seguida a la emisión de la partícula con masa  $w_2$  y carga  $q_2$ , es decir  $(w_2, q_2)$ . Así

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, q_1, q_2) &= \Gamma(w_1, q_1)\Gamma(w_2, q_2|w_1, q_1) \\ &= e^{[\pi(M-w_1+\sqrt{(M-w_1)^2-(Q-q_1)^2})^2-\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2]} \\ &\quad \times e^{[\pi(M-w_1-w_2+\sqrt{(M-w_1-w_2)^2-(Q-q_1-q_2)^2})^2-\pi(M-w_1+\sqrt{(M-w_1)^2-(Q-q_1)^2})^2]}, \end{aligned}$$

operando las exponenciales y cancelando términos semejantes

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, w_2, q_1, q_2) &= e^{[\pi(M-w_1-w_2+\sqrt{(M-w_1-w_2)^2-(Q-q_1-q_2)^2})^2-\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2]} \\ &= e^{[\pi(M-(w_1+w_2)+\sqrt{(M-(w_1+w_2))^2-(Q-(q_1+q_2))^2})^2-\pi(M+\sqrt{M^2-Q^2})^2]} \\ &= \Gamma(w_1 + w_2, q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Lo anterior muestra que efectivamente el espectro de emisión (B-1) cumple la condición (B-2) para la emisión sucesiva de dos partículas.

Hipótesis de inducción: supongamos que  $\Gamma(w, q)$  cumple la condición para la emisión de  $n$  partículas, es decir, se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(w_1, \dots, w_n, q_1, \dots, q_n) &= \Gamma(w_1, q_1) \cdot \Gamma(w_2, q_2 | w_1, q_1) \cdots \Gamma(w_n, q_n | w_1, \dots, w_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}) \\ &= \Gamma(w_1 + \dots + w_n, q_1 + \dots + q_n) \\ &= e^{[\pi(M - (\sum_{i=1}^n w_i) + \sqrt{(M - (\sum_{i=1}^n w_i))^2 - (Q - (\sum_{i=1}^n q_i))^2})^2 - \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2]}\end{aligned}\tag{B-4}$$

Para  $n+1$ :

$$\begin{aligned}\Gamma(w_1, \dots, w_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}) &= \\ \Gamma(w_1, q_1) \cdot \Gamma(w_2, q_2 | w_1, q_1) \cdots \Gamma(w_{n+1}, q_{n+1} | w_1, \dots, w_n, q_1, \dots, q_n) &= \\ e^{[\pi(M - w_1 + \sqrt{(M - w_1)^2 - (Q - q_1)^2})^2 - \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2]} & \\ \times e^{[\pi(M - w_1 - w_2 + \sqrt{(M - w_1 - w_2)^2 - (Q - q_1 - q_2)^2})^2 - \pi(M - w_1 + \sqrt{(M - w_1)^2 - (Q - q_1)^2})^2]} &\times \dots \\ \times e^{[\pi(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1})^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i - q_{n+1})^2})^2 - \pi(M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2})^2]} &, \end{aligned}$$

y por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\Gamma(w_1, \dots, w_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}) &= \\ e^{[\pi(M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2})^2 - \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2]} & \\ \times e^{[\pi(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1})^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i - q_{n+1})^2})^2 - \pi(M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2})^2]} &.\end{aligned}\tag{B-5}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \left( M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2} \right)^2 - \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2, \\ \mu_2 &= \left( M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1})^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i - q_{n+1})^2} \right)^2 \\ &\quad - \left( M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2} \right)^2,\end{aligned}$$

la ecuación (B-5) se puede expresar como

$$\begin{aligned}\Gamma(w_1, \dots, w_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}) &= e^{\pi\mu_1} \cdot e^{\pi\mu_2} \\ &= e^{\pi(\mu_1 + \mu_2)}.\end{aligned}\tag{B-6}$$

De esta manera, la parte exponencial de la ecuación (B-6) resulta ser

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 = & \left( M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2} \right)^2 - \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2 \\ & + \left( M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1} + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i - w_{n+1})^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i - q_{n+1})^2} \right)^2 \\ & - \left( M - \sum_{i=1}^n w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^n w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^n q_i)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Operando términos semejantes en esta última ecuación y teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^n w_i + w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i$  y  $\sum_{i=1}^n q_i + q_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} q_i$ , entonces

$$\mu_1 + \mu_2 = \left( M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^{n+1} q_i)^2} \right)^2 - \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2. \quad (\text{B-7})$$

Remplazando (B-7) en (B-6)

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1, \dots, w_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}) &= e^{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \\ &= e^{\pi[(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^{n+1} q_i)^2})^2 - (M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2]} \\ &= e^{[\pi(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i + \sqrt{(M - \sum_{i=1}^{n+1} w_i)^2 - (Q - \sum_{i=1}^{n+1} q_i)^2})^2 - \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2]} \\ &= \Gamma(w_1 + \dots + w_n, q_1 + \dots + q_n). \quad \square \end{aligned}$$

# Apéndice C

## Correlaciones en la radiación Hawking

Considerando la probabilidad de emisión no térmica (ecuación (3-24)), Zhang *et al.* [16] mostraron que la radiación Hawking puede llevar información al exterior del agujero negro en forma de correlaciones ente las emisiones secuenciales de energía. Primero se define la función de correlación para la emisión de dos partículas como<sup>1</sup>

$$\chi(w_1, w_2) = \ln \left( \frac{\Gamma(w_1 + w_2)}{\Gamma(w_1)\Gamma(w_2)} \right), \quad (\text{C-1})$$

donde el numerador es la probabilidad de emisión de dos partículas con energías  $w_1$  y  $w_2$  simultáneamente, o de una sola partícula con energía total  $w_1 + w_2$ , del agujero de masa  $M$ . El denominador es el producto de la probabilidad de emisión de las partículas  $w_1$  y  $w_2$ , las cuales ocurren como eventos independientes<sup>2</sup>, por lo que la probabilidad de emisión de una partícula no depende de la energía de la otra partícula. Luego,

$$\begin{aligned} \Gamma(w_1) &= e^{-8\pi w_1 \left( M - \frac{w_1}{2} \right)}, \\ \Gamma(w_2) &= e^{-8\pi w_2 \left( M - \frac{w_2}{2} \right)} \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

---

<sup>1</sup>En general, se puede definir una medida de la correlación entre los eventos  $x$  y  $y$  como

$$\chi(w_1, w_2) = \ln \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} = \ln \frac{P(y|x)}{P(y)}$$

donde

$$P(y|x) = \frac{P(x, y)}{P(x)}$$

es la probabilidad condicional de  $y$  dado  $x$  y  $P(x, y)$  es la probabilidad conjunta de  $x$  y  $y$  [41].

<sup>2</sup>Dados los eventos  $E_1$  y  $E_2$ , son independientes si y solo si  $P(E_1, E_2) = P(E_1)P(E_2)$ . En caso de ser dependientes, la relación que se cumple es  $P(E_1, E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1)$ .

Remplazando estas últimas relaciones en (C-1)

$$\chi(w_1, w_2) = \ln \left( \frac{\exp \left[ -8\pi(w_1 + w_2) \left( M - \frac{w_1 + w_2}{2} \right) \right]}{\exp \left[ -8\pi w_1 \left( M - \frac{w_1}{2} \right) \right] \cdot \exp \left[ -8\pi w_2 \left( M - \frac{w_2}{2} \right) \right]} \right) \\ = 8\pi w_1 w_2 \quad (\text{C-3})$$

Por lo tanto  $\chi(w_1, w_2) \neq 0$ , lo que implica la existencia de correlaciones entre las dos emisiones. Siguiendo con el argumento de Zhang *et al.*, al definir la entropía de las partículas emitidas como  $S(w) = -\ln \Gamma(w)$ , se puede reexpresar la función correlación como

$$\chi(w_1, w_2) = \ln \Gamma(w_1 + w_2) - \Gamma(w_1) - \Gamma(w_2) \\ = S(w_1) + S(w_2) - S(w_1, w_2) \\ = I(w_1 : w_2), \quad (\text{C-4})$$

es decir,<sup>3</sup> la información mutua entre las dos partículas. De esta manera se puede concluir que las correlaciones estadísticas entre dos emisiones es compartida en forma de información mutua entre estas.

---

<sup>3</sup>Para el desarrollo de las ecuación (C-4) se ha hecho uso de la equivalencia  $\Gamma(w_1 + w_2) = \Gamma(w_1, w_2)$  demostrada en el capítulo 4.

# Bibliografía

- [1] C. Shannon. *The mathematical theory of communication*. 1957.
- [2] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] J. Pinochet. Exploring black holes. *arXiv preprint arXiv:2108.01688*, 2021.
- [4] D’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Oxford University Press, 1992.
- [5] N. Zettili. *Quantum Mechanics: concepts and applications*. Wiley, 2009.
- [6] C.H. Fleming. Hawking radiation as tunneling. 2005.
- [7] H. Dong, Q.-y. Cai, X.-f. Liu, and C.P. Sun. One hair postulate for Hawking radiation as tunneling process. *Communications in Theoretical Physics*, 61(3):289, 2014.
- [8] L. Susskind and J. Lindesay. *Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution*. World Scientific, 2004.
- [9] B. Zhang, Q.-y. Cai, M. Zhan, and L. You. Information conservation is fundamental: recovering the lost information in Hawking radiation. *International Journal of Modern Physics D*, 22, 2013.
- [10] J.D. Bekenstein. Black holes and the second law. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:737–740, 1972.
- [11] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, 1973.
- [12] S.W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [13] S.W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [14] W.H. Zurek. Entropy evaporated by a black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1683–1686, Dec 1982.
- [15] M.K. Parikh and F. Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Physical Review Letters*, 85(24):5042–5045, 2000.

- 
- [16] B. Zhang, Q.-y. Cai, L. You, and M.S. Zhan. Hidden messenger revealed in Hawking radiation: a resolution to the paradox of black hole information loss. *Physics Letters B*, 675(1):98–101, 2009.
- [17] Q.-y. Cai, Ch.-p. Sun, and L. You. Information-carrying Hawking radiation and the number of microstate for a black hole. *Nuclear Physics B*, 905:327–336, 2016.
- [18] J. Cano and W. Pulido. La paradoja de la pérdida de información de los agujeros negros. *Momento*, pages 59 – 88, 2019.
- [19] J.R. Arenas. Termodinámica de agujeros negros. *Revista colombiana de astronomía, astrofísica, cosmología y ciencias afines*, 1:11–20, 1999.
- [20] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [21] V. Frolov and A. Zelnikov. *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford University Press, 2011.
- [22] K. Thorne. *Agujeros negros y tiempo curvo*. Ed. Crítica, 1995.
- [23] D. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [24] T. Dobrian. *Hawking Radiation with the WKB and Graviational WKB approximations*. Tesis, University of Colorado Boulder, 2019.
- [25] M. Parikh. A Secret Tunnel Through The Horizon. *International Journal of Modern Physics D*, 13(10):2351–2354, 2004.
- [26] P. Kraus and F. Wilczek. Self-interaction correction to black hole radiance. *Nuclear Physics B*, 433(2):403–420, 1995.
- [27] M. Parikh. Energy conservation and Hawking radiation. *arXiv preprint hep-th/0402166*, 2004.
- [28] L. Brillouin. *La información y la incertidumbre en la ciencia*. UNAM, México, 1969.
- [29] L. Brillouin. *Science and Information Theory*. Academic Press, New York, 1956.
- [30] F. Reif. *Física estadística*. Reverté, Barcelona, 1993.
- [31] J. Zhang and Z. Zhao. Hawking radiation of charged particles via tunneling from the Reissner-Nordström black hole. *Journal of High Energy Physics*, 2005(10):055, 2005.
- [32] L. Bombelli, R.K. Koul, J. Lee, and R.D. Sorkin. Quantum source of entropy for black holes. *Phys. Rev. D*, 34:373–383, 1986.

- 
- [33] V. Frolov and I. Novikov. Dynamical origin of the entropy of a black hole. *Physical Review D*, 48(10):4545, 1993.
- [34] A. Strominger and C. Vafa. Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Physics Letters B*, 379(1-4):99–104, 1996.
- [35] D. He and Q. Cai. Gravitational correlation, black hole entropy, and information conservation. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 60:1–9, 2017.
- [36] D. Fursaev. Can one understand black hole entropy without knowing much about quantum gravity? *arXiv preprint gr-qc/0404038*, 2004.
- [37] J.D. Bekenstein. Black-hole thermodynamics. *Physics Today*, 33(1):24–31, 1980.
- [38] B. Zhang, Q.-y. Cai, M.S. Zhan, and L. You. An interpretation for the entropy of a black hole. *General Relativity and Gravitation*, 43:797–804, 2011.
- [39] B.R. Majhi. *Quantum Tunneling in Black Holes*. Tesis de doctorado, University of Calcuta, India, 2010.
- [40] J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31:161–170, 1973.
- [41] L. Vanzo, G. Acquaviva, and R. Di Criscienzo. Tunnelling methods and Hawking’s radiation: achievements and prospects. *Classical and Quantum Gravity*, 28(18):183001, 2011.