Un examen de los resultados revela que, durante el período de 69 minutos del estudio, el encargado estuvo ocioso 9 minutos y los operarios estuvieron esperando 15 minutos, a pesar del hecho de que el tiempo de servicio promedio fue de 10 minutos y de que en promedio llegó un operario cada 10 minutos. Además, debido al tiempo que tuvieron que esperar los operarios, se formó una cola. Si suponemos, para fines de discusión, que el período de estudio fue lo suficientemente largo como para reflejar las condiciones que han de prevalecer en general, puede calcularse el costo que debe asociarse con los tiempos de ocio y espera. Por ejemplo, la firma puede concluir que el costo del tiempo ocioso del encargado es de $1200 por hora y el del tiempo de espera de los operarios es de $1500 por hora. Estos costos incluirán elementos tales como la tasa de salario, las prestaciones y el tiempo muerto del equipo. Por consiguiente, el costo para el periodo de 69 minutos sería de

Costo =9*($1200/60) + 15*($1500/60) = $555

Si el día de trabajo contiene 480 minutos, el costo diario promedio sería de costo por día = $555*(480/69) = $3861

Ahora se debe considerar si éste representa el mínimo costo posible. Para reducir la longitud de la cola y por consiguiente, el tiempo de espera de los operarios, la firma puede asignar un encargado más al puesto de herramientas. Además, esta reducción sería neutralizada hasta cierto grado por un aumento en el tiempo ocioso de los encargados. Sin embargo, puede ser que el costo total resultante sea inferior al que resulta con un encargado. Debe determinarse si este es el caso, tomando los tiempos necesarios de llegada y servicio indicados en la tabla anterior, determinando los tiempos ociosos y de espera que se presentarán con dos encargados para atender a los operarios y calculando el costo resultante. Esto se repetirá para alternativas que exijan tres o más encargados hasta que se encuentre la alternativa que produzca el costo mínimo.

Métodos de análisis

La anterior ilustración sirve para indicar la naturaleza de los problemas llamados de fila o de espera o cola. En general, la firma encuentra que, al aumentar la capacidad de servicio disponible y, por consiguiente, el costo de servicio, puede reducir la longitud de la fila de espera y por consiguiente, el costo de espera. Para alguna combinación de capacidad de servicio y fila de espera correspondiente, el costo será un mínimo y la labor es determinar dicha combinación.

La labor es difícil, porque con mucha frecuencia variarán los tiempos de servicio y de llegada. Por consiguiente, se necesita determinar los diferentes valores que pueden asumir estos tiempos en un problema dado y estimar la probabilidad de que se presente cada uno. Se han desarrollado enfoques cuantitativos para la solución de los problemas de fila de espera en los cuales se hace alguna suposición con respecto a la naturaleza de la distribución de los tiempos de servicio y llegada. Por ejemplo, una suposición común es la de que es aplicable la distribución de Poisson. Pero la teoría en la que se basan estos métodos es bastante compleja y no hay razón para creer que las distribuciones consideradas difieran muy frecuentemente de las reales. Por estas razones, no consideraremos estos métodos analíticos.

Otro enfoque es la simulación Monte Carlo. Ese método exige estimar, con base en la experiencia pasada, si es posible, las probabilidades de que se presenten los diversos tiempos posibles de servicio y llegada. Luego, en la forma descrita en nuestra discusión anterior de la simulación, puede originarse

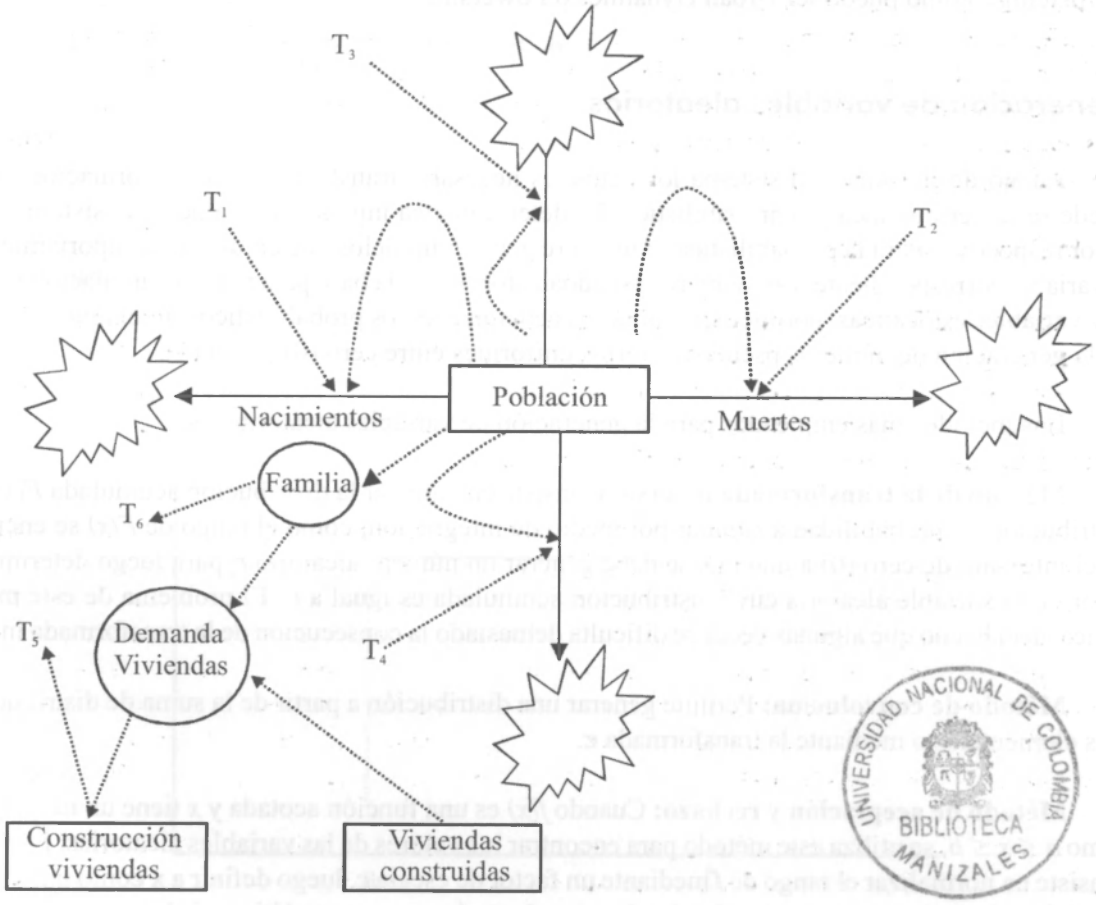
una serie de tiempos de llegada y tiempos de servicio correspondientes. Los tiempos de ocio y espera resultantes, y su costo, pueden calcularse para capacidades de servicio alternativas y puede escogerse la capacidad más económica. Sin embargo, siempre debe tenerse cuidado de generar una serie bastante larga como para obtener una indicación exacta de los efectos a largo plazo de una política determinada.

Un ejemplo de simulación continua

Dinámica de sistemas

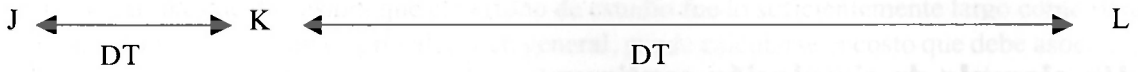
La Dinámica de Sistemas se encarga de estudiar la presencia de algunas características de interés en los sistemas sociales que luego de su interpretación nos van a servir para planificar el modelo más adecuado de acuerdo a sus propiedades.

Ejemplo: A continuación vamos a presentar un problema de poblaciones (nacimientos, muertes), emigración, inmigración, demanda y construcción de viviendas.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Ecuaciones:



POB K = POB J + DT (NAC JK - MUE JK + MIG JK)
D VIV K = FAM K - VIVC K
NAC KL = POB K * T_1
FAM K = POB K / T_0
MIG JK = INM JK - EMI JK
MIG JK = (POB K - POB J) / DT
MIG JK = (POB (t + DT) - POB (t)) / DT

A continuación se corre este programa en un paquete de Simulación especializado en Dinámica de Sistemas, como puede ser Urban Dynamics o Powersim.

Generación de variables aleatorias

Luego de introducir al sistema los datos, es necesario transformarlos en información, la cual puede ser determinística y/o probabilística. La determinística ingresa directamente al sistema con su valor respectivo. Para la probabilística se requiere generar modelos que emulen el comportamiento de la variable correspondiente. Los números pseudoaleatorios son la base para realizar simulaciones donde hay variables estocáticas, porque estos números generan eventos probabilísticos; inicialmente se parte de la generación de números pseudoaleatorios uniformes entre cero (0) y uno (1).

Los métodos más empleados para la generación de variables aleatorias son:

Método de la transformada inversa: Consiste en emplear la distribución acumulada *F(x)* de la distribución de probabilidad a simular por medio de integración; como el rango de *F(x)* se encuentra en el intervalo de cero (0) a uno (1), se debe generar un número aleatorio r_i para luego determinar el valor de la variable aleatoria cuya distribución acumulada es igual a r_i. El problema de este método radica en el hecho que algunas veces se dificulta demasiado la consecución de la transformada inversa.

Método de convolución: Permite generar una distribución a partir de la suma de distribuciones más elementales o mediante la transformada z.

Método de aceptación y rechazo: Cuando *f(x)* es una función acotada y *x* tiene un rango finito, como $a \leq x \leq b$, se utiliza este método para encontrar los valores de las variables aleatorias. El método consiste en normalizar el rango de *f* mediante un factor de escala *c*, luego definir a x como una función lineal de r, después se generan parejas de números aleatorios r_1, r, y por último si el número encontrado

se elige al azar dentro del rango *(a,b)* y $r \leq c \cdot f(x)$ se acepta, en caso contrario se rechaza. El problema de este método es la cantidad de intentos que se realizan antes de encontrar una pareja exitosa.

Método de composición: Con este método la distribución de probabilidad $f(x)$ se expresa como una mezcla o composición de varias distribuciones de probabilidad $f_i(x)$ seleccionadas adecuadamente.

Procedimientos especiales: Existen algunas distribuciones estadísticas de probabilidad en las cuales es posible emplear sus propiedades para obtener expresiones matemáticas para la generación de variables aleatorias en forma eficiente. En varios casos se aplica el Teorema Central del Límite y en otros se utiliza el método directo para encontrar las variables aleatorias.

DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DE PROBABILIDAD CONTINUAS

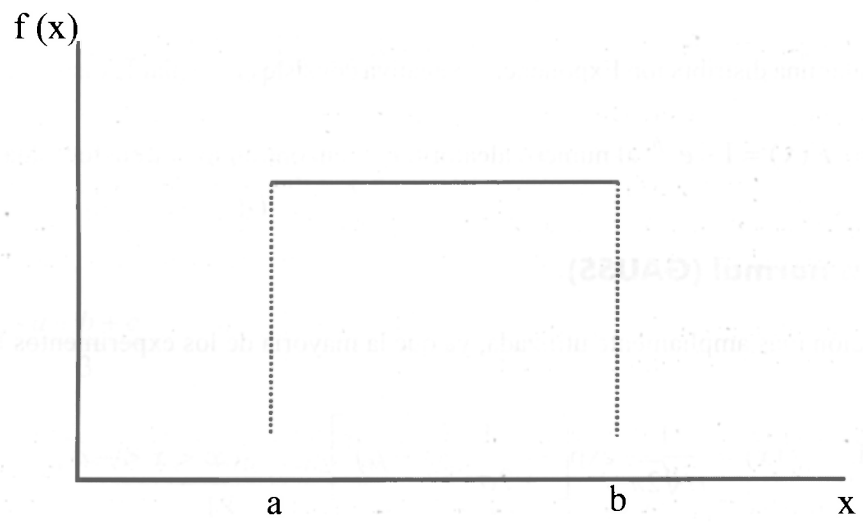
Distribución uniforme

Es una función constante sobre el intervalo que va de *a* a *b* :

Densidad: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ $\quad a \leq x \leq b$

Media: $\dfrac{b+a}{2}$

Varianza: $\dfrac{(b-a)^2}{12}$



Una de las formas para simular una distribución Uniforme sobre el intervalo que va de a a b es usar la transformación inversa de la función de densidad.

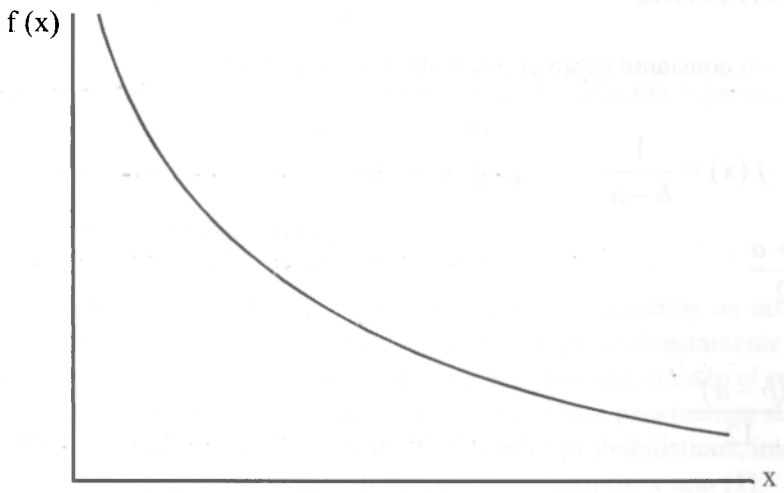
Distribución exponencial negativa

Existen muchas situaciones reales que se comportan como la distribución exponencial, como por ejemplo nacimientos, muertes, accidentes.

Densidad: $f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ $\beta > 0$ $0 \leq x < \infty$

Media: β

Varianza: β^2



Para simular una distribución Exponencial Negativa consiste en igualar la distribución acumulada de esta función $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ al número aleatorio r_i y encontrando la transformada inversa.

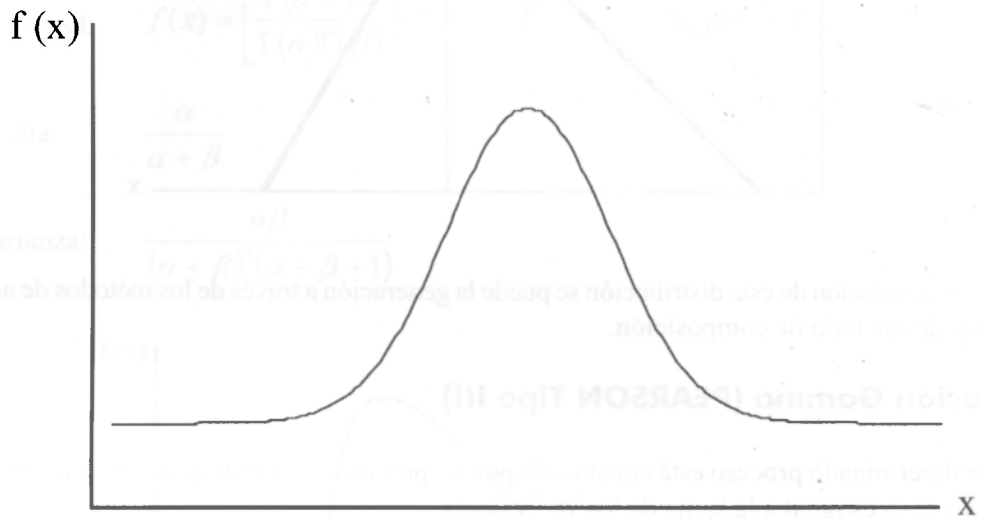
Distribución normal (GAUSS)

Es la función más ampliamente utilizada, ya que la mayoría de los experimentos la referencian.

Densidad: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(x-\mu)^2\right]$ $-\infty < x < +\infty$

Media: μ

Varianza: σ^2



Para simular una distribución Normal se puede emplear el método de convolución o el método directo.

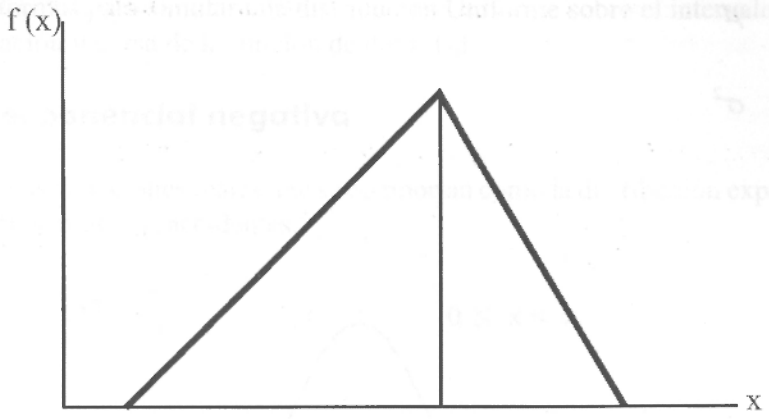
Distribución triangular

Se emplea básicamente en Economía y en aquellos problemas en los cuales se conocen muy pocos o ningún dato.

Densidad:
$$\begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} \overrightarrow{\text{sia}} \leq x \leq b \\[2ex] \dfrac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} \overrightarrow{\text{sib}} < x < c \end{cases}$$

Media: $\dfrac{a+b+c}{3}$

Varianza: $\dfrac{a^2+b^2+c^2+ac-ab-bc}{18}$



Para la simulación de esta distribución se puede la generación a través de los métodos de aceptación y rechazo y del método de composición.

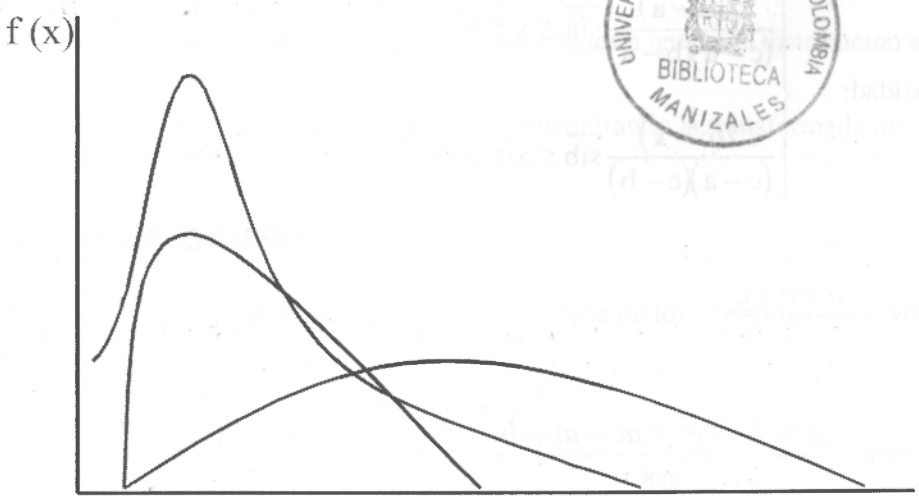
Distribución Gamma (PEARSON Tipo III)

Si un determinado proceso está constituido por α procesos sucesivos y si el tiempo transcurrido para este proceso es igual a la suma de los α valores

Densidad: $f(x) = \left[\frac{1}{\Gamma \alpha \beta^{\alpha}}\right] x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ $0 < x < \infty$

Media: $\alpha\beta$

Varianza: $\alpha\beta^2$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Se puede obtener la simulación de esta distribución a partir del método de convolución.

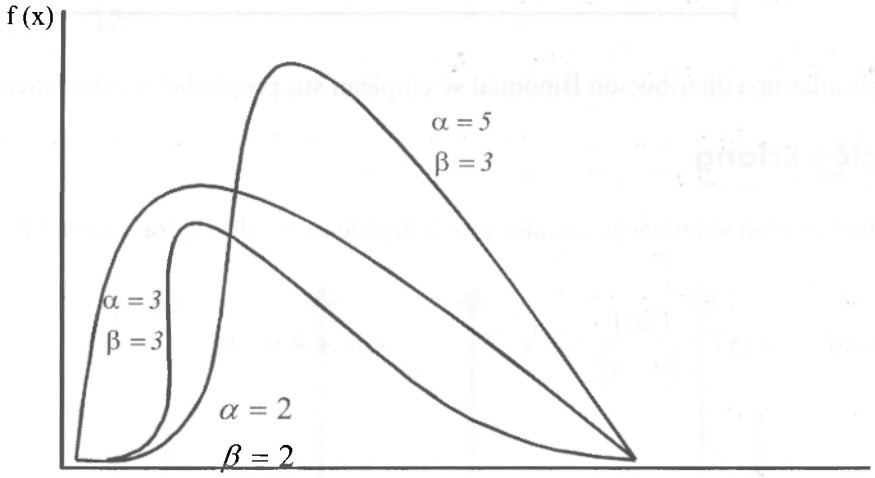
Distribución Beta

Es de bastante aplicación para la solución de problemas de PERT/CPM.

Densidad: $f(x) = \left[\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right] x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $\qquad \alpha, \beta > 0;\ 0 \leq x \leq 1$

Media: $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Varianza: $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$



Para la simulación de variables aleatorias tipo Beta se emplean sus propiedades estadísticas, además del método de aceptación y rechazo.

DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DE PROBABILIDAD DISCRETAS

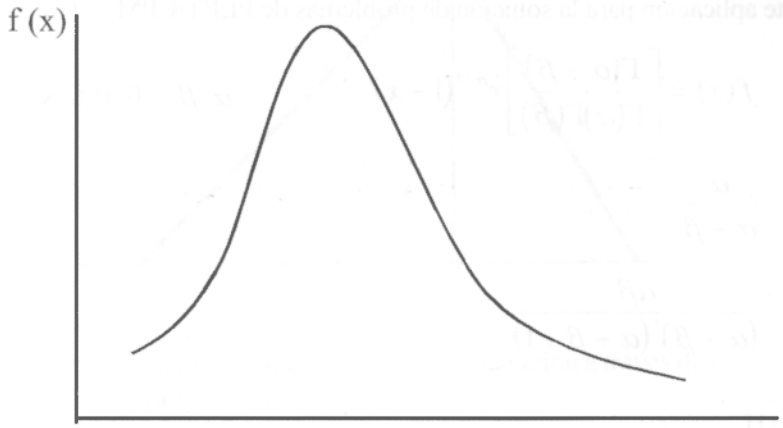
Distribución binomial

Algunos experimentos consisten en la observación e una serie de pruebas idénticas e independientes, las cuales pueden generar uno de dos resultados.

Densidad: $p(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$ $\qquad x = 0,1,2,\cdots\cdots,n$

Media: np

Varianza: $np(1-p)$



Para simular una distribución Binomial se emplean sus propiedades estadísticas.

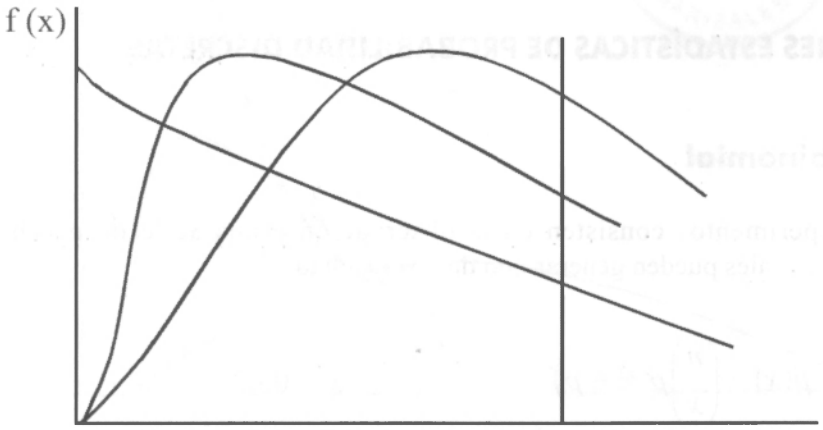
Distribución Erlang

Esta distribución se aplica en algunos problemas de líneas de espera, inicialmente para el caso de telefonía.

Densidad: $f(x) = \dfrac{(\lambda n)^n}{(n-1)!} X^{n-1} e^{-\lambda n x} \qquad x, n, \lambda > 0, \;\; n \in \mathrm{Z}$

Media: $\dfrac{1}{\lambda}$

Varianza: $\dfrac{1}{n\lambda^2}$



Algunas formas para simular una distribución Erlang consisten en emplear los métodos de convolución y el de la transformada inversa.

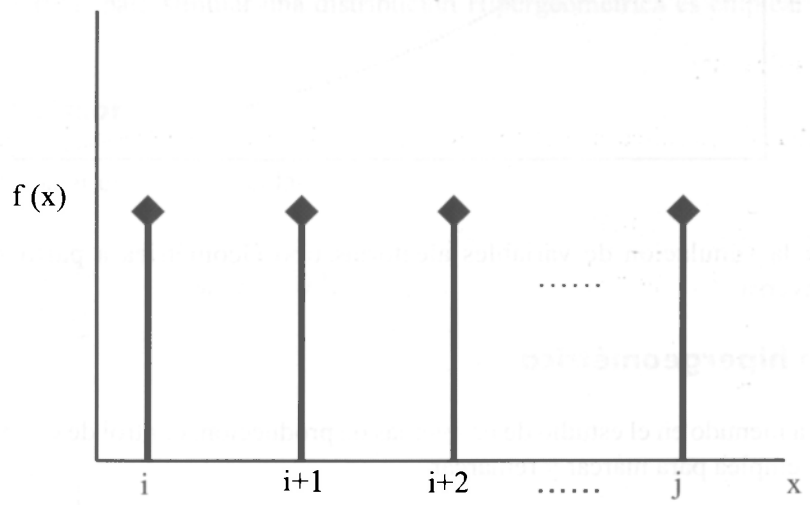
Distribución uniforme

Se utiliza cuando se requiere el empleo de un función constante.

Densidad: $f(x) = \dfrac{1}{j-i+1}$ si $x \in \{i, i+1, \cdots\cdots, j\}$

Media: $\dfrac{i+j}{2}$

Varianza: $\dfrac{(j-i+1)^2 - 1}{12}$



Para la simulación de variables aleatorias tipo Uniforme se emplean sus propiedades estadísticas.

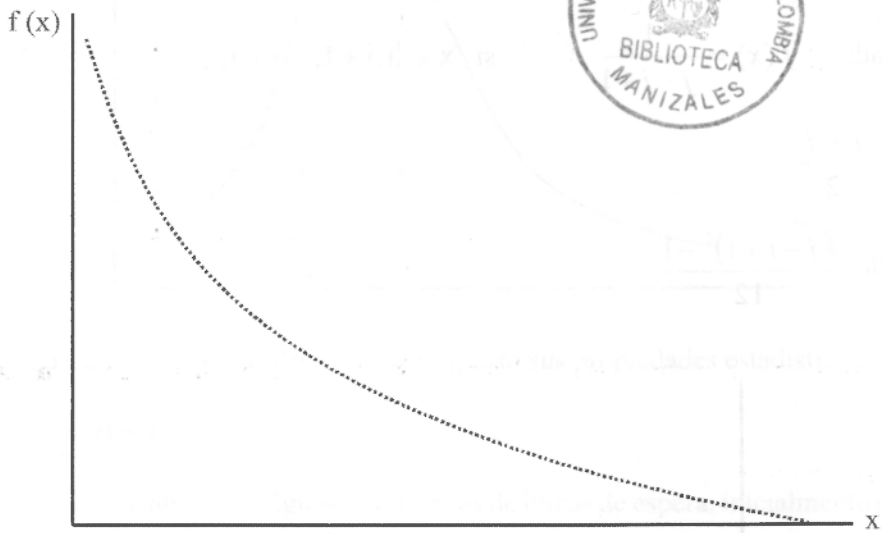
Distribución geométrica

Esta distribución indica exactamente el número de repeticiones del experimento hasta lograr la característica de interés.

Densidad: $f(x) = p(1-p)^x$ si $x \in (0, 1, \cdots\cdots)$

Media: $\dfrac{1-p}{p}$

Varianza: $\dfrac{1-p}{p^2}$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Se genera la simulación de variables aleatorias tipo Geométrica a partir del método de la transformada inversa.

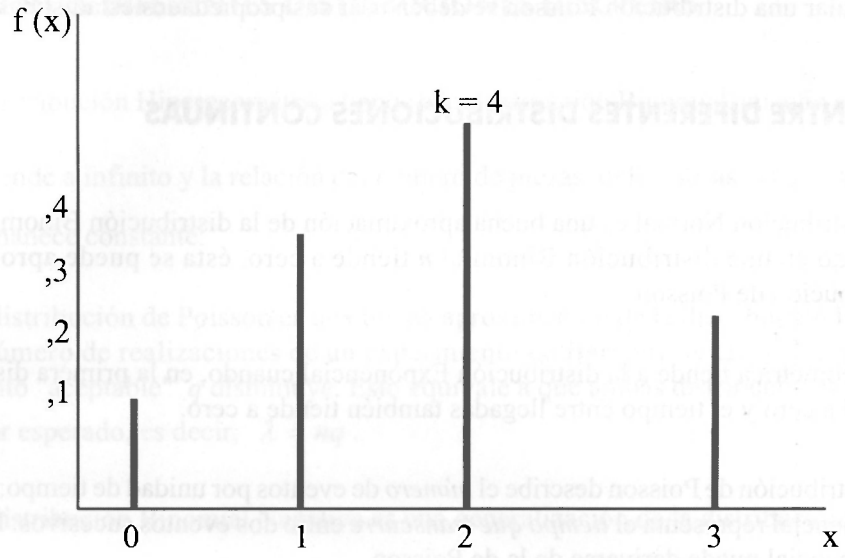
Distribución hipergeométrica

Se utiliza a menudo en el estudio de problemas de producción, control de calidad y la aceptación de muestreo; se emplea para marcar y remarcar.

Densidad: $\dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $\quad 0 < x < Np$, $\quad 0 < n - x < Nq$

Media: np

Varianza: $npq\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$



Una de las formas para simular una distribución Hipergeométrica es emplear sus propiedades estadísticas.

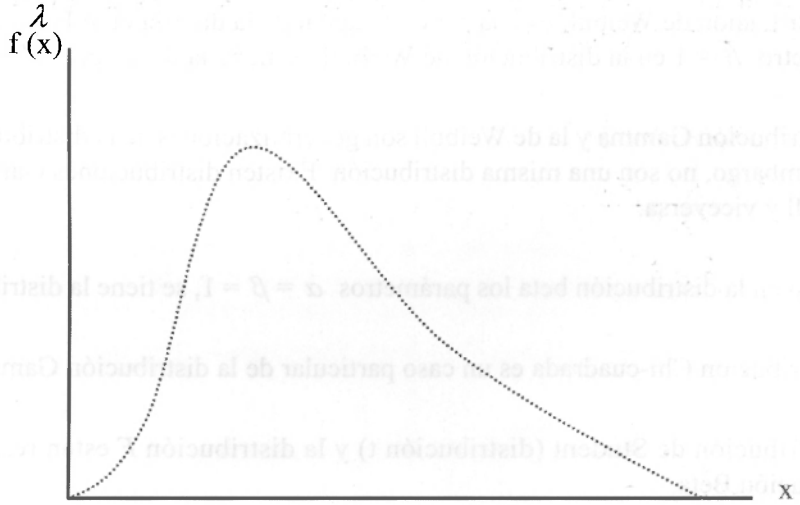
Distribución Poisson

Sirve para trabajar en teoría de colas.

Densidad: $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ si $x \in \{0,1,\cdots\cdots\}$

Media: λ

Varianza: λ



Para simular una distribución Poisson se deben usar sus propiedades estadísticas.

RELACIÓN ENTRE DIFERENTES DISTRIBUCIONES CONTINUAS

a) La distribución Normal es una buena aproximación de la distribución Binomial. Cuando en una distribución Binomial n tiende a cero, ésta se puede aproximar por una distribución de Poisson.

b) La Geométrica tiende a la distribución Exponencial cuando, en la primera distribución q tiende a cero y el tiempo entre llegadas también tiende a cero.

c) La distribución de Poisson describe el *número* de eventos por unidad de tiempo; la distribución exponencial representa el *tiempo que transcurre* entre dos eventos sucesivos. La distribución Exponencial puede derivarse de la de Poisson.

d) La distribución Exponencial es un caso especial de la distribución Gamma. Cuando en la distribución Gamma $\alpha = 1$, se tiene la distribución exponencial. Esto significa que la suma de variables aleatorias independientes que tienen una distribucion Exponencial Negativa, es a su vez una variable aleatoria con distribución Gamma.

e) La distribución de Erlang es una generalización de la distribución Exponencial. Cuando en la distribución de Erlang el parámetro $r = 1$, se tiene la distribución Exponencial.

f) La distribución Gamma es una generalización de la distribución de Erlang y por consiguiente, de la distribución Exponencial. Cuando en la distribución Gamma el parámetro r es una constante, se tiene la distribución de Erlang.

g) La distribución de Weibull es una generalización de la distribución Exponencial. Cuando el parámetro $\beta = 1$ en la distribución de Weibull, se tiene la distribución Exponencial.

h) La distribución Gamma y la de Weibull son generalizaciones de la distribución Exponencial y sin embargo, no son una misma distribución. Existen distribuciones Gamma que no son Weibull y viceversa.

i) Cuando en la distribución beta los parámetros $\alpha = \beta = 1$, se tiene la distribución Uniforme.

j) La distribución Chi-cuadrada es un caso particular de la distribución Gamma.

k) La distribución de Student (distribución t) y la distribución F están relacionadas con la distribución Beta.

RELACIÓN ENTRE DIFERENTES DISTRIBUCIONES DISCRETAS

a) La distribución Hipergeométrica tiende a la distribución Binomial, cuando el tamaño del lote N tiende a infinito y la relación del número de piezas defectuosas entre el total del lote $\frac{a}{N}$ permanece constante.

b) La distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución Binomial cuando el número de realizaciones de un experimento de Bernoulli n crece y la probabilidad del evento "aceptable" q disminuye. Esto equivale a que ambas distribuciones tengan el mismo valor esperado, es decir, $\lambda = nq$.

c) La distribución Binomial Negativa es una generalización de la distribución Geométrica.

d) La distribución Multinomial es una generalización de la distribución Binomial.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON David R. / Sweeney Dennis J. / William Thomas A. Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1993.

AZARANG Mohammad R. / García D. Eduardo. Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos. Mc Graw Hill. México 1996.

BAZARAA S. Mokhtar / Sherali Hanif D. / Shetty C. M. Nonlinear Programming. John Wiley & Sons, Inc. Singapore 1993.

BERGREN Stephen. Algunas Técnicas de la Investigación de Operaciones. Mimeografiado Universidad Tecnológica de Pereira 1976.

BIERMAN Harold Jr. / Bonini Charles P. / Hausman Warren H. Análisis Cuantitativo para los negocios. Mc Graw Hill (Irwin) Colombia 1999.

COSS Bu Raúl. Simulación. Limusa Noriega. México 1992.

DANTZING, George Bernard. Linnear Programming and extensions. Princeton University New Yersey. 1993.

DAVIS Roscoe K. / Mckeown Patrick G. Modelos Cuantitativos para Administración. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1986.

EPPEN G.D. / Gould F.J. / Schmidt C.P / Moore J. H. / Weatherford L. R. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. Pearson. México 1999.

FOGARTY Donald W. / Blackstone John H. / Hoffmann Thomas R Administración de la Producción e Inventarios. Cecsa México 1993.

GARCÍA Cantú Alfonso. Enfoques Prácticos para Planeación y Control de Inventarios. Trillas. México 1996

HILLIER Fredcrick S. / Lieberman Gerald J. Introducción a la Investigación de Operaciones. Mc Graw-Hill México 1996.

JIMÉNEZ Lozano Guillermo. Investigación Operativa I. Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales Departamento de Administración y Sistemas. Manizales 1999.

MATHUR Kamlesh / Solow Daniel. Investigación de Operaciones. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. México 1996.

NASH Stephen G. / Sofer Ariela. Linear and Nonlinear Programming. Me Graw Hill . Singapore 1996.

MONTANO Agustín. Iniciación al Método del Camino Crítico. Trillas. México. 1972.

MORA Escobar Héctor Manuel. Optimización No Lineal y Dinámica. Universidad Nacional de Colombia Sede Santafé de Bogotá D.C. Departamento de Matemáticas y Estadística 2001.

MOSKOWITZ Herbert / Wright Gordon C.Investigación de Operaciones. Prentice/Hall Carvajal Cali 1982.

MURO Sáenz Javier. Práctica de la Investigación Operativa Empresarial. Editorial Labor S.A. Barcelona España 1975.

NAYLOR Thomas H. / Balintfy Joseph L. / Burdick Donald S. / Chu Kong Técnicas de Simulación en Computadoras. Limusa México 1980.

PÉREZ Gutiérrez Luis. Teoría de Colas. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín Facultad de Minas 1987.

PRAWDA Witenberg Juan. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Limusa México 1982 (Tomos 1 y 2).

RYE David E. El Juego Empresarial. Mc Graw Hill Colombia 1999.

SAATY L. Thomas. Elementos de la Teoría de Colas. Aguilar Madrid 1967.

SÁNCHEZ A. Javier I. Introducción a los métodos de ruta crítica PERT y CPM. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín Facultad de Minas 1992.

SHANNON Robert E. Simulación de Sistemas. Trillas. México 1988.

SHELDON M. Ross. Simulación. Pearson. México 1997.

SIM Narasimhan / Dennis W. McLeavey / Peter Billington. Planeación de la Producción y Control de Inventarios. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México 1996.

SCHROEDER Roger G. Administración de Operaciones. Mc Graw-Hill. México 1992.

TAHA Hamdy A. Investigación de Operaciones. Prentice Hall Omega México1998.

VAN Den Berghe R. Modelo de Simulación Gerencial. Universidad Nacional de Colombia Sede Santafé de Bogotá D. C. 1997.

WINSTON Wayne L. Investigación de Operaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1994.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES