



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo

Fernan Diego Velásquez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2012

El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo

Fernan Diego Velásquez

Informe como modalidad de Trabajo Final y requisito parcial para optar al Grado de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Magister José Adán Ramos Valenzuela

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2012

(Dedicatoria o lema)

A mi madre por su apoyo constante a lo largo de mi vida, a mi hermana que siempre estará a mi lado y a mis amigos bohemios que siempre comparten su amistad incondicionalmente.

Resumen

La presente propuesta de enseñanza, diseñada y articulada desde la teoría del aprendizaje significativo, los lineamientos curriculares y estándares de competencia en matemáticas; se convierte en un material de apoyo para los docentes de la educación media del país, estructurado de tal modo que los estudiantes de grado noveno puedan alcanzar competencias básicas como la interpretación, la argumentación y la proposición, así como aquellos procesos formales que implican la abstracción, la generalización y la creatividad para resolver situaciones relacionadas con las sucesiones y las progresiones.

Además de lo anterior, esta unidad didáctica se ha estructurado a partir de aquellos conocimientos previos que deben tener los estudiantes para superar las dificultades que algunas investigaciones señalan (Ursini, S. & Trigueros, M; 1997) en torno a los conceptos de variable y el estudio a nivel universitario de las series. Así, la planificación de los procesos de enseñanza-aprendizaje con diferentes recursos y estrategias didácticas en esta unidad, permite la articulación de conceptos matemáticos, la superación de las dificultades mencionadas y el aprendizaje colaborativo.

Palabras clave: Unidad didáctica, sucesiones, progresiones, reglas de formación, lineamientos curriculares, aprendizaje significativo y constructivismo.

Abstract

This proposal of schooling has been design and articulated, based on the theory of the meaningful learning, the curriculum guidelines and the proficiency standards in mathematics, becomes a support material for teachers of the secondary education, structured in such a manner than the students of the ninth grade will be able to achieve some basics skills as interpretation, argumentation and proposition as part of them. Also the use of formal processes involving formal abstraction, generalization and creativity to resolve issues related with mathematics sequences and progressions.

Furthermore, what had been discuss, this didactic unit was structured from those previous knowledge that all the students must have to overcome the difficulties that the different researches shows (Ursini, S. & Trigueros, M 1997) related to the concepts of variable and the study of the college / university level.

Keywords: Teaching unit, probate, progressions, training rules, curriculum guidelines, significant learning and constructivism.

Contenido

| | Pág. |
|--|-----------|
| Resumen | V |
| Lista de figuras | IX |
| Lista de tablas | X |
| Introducción | 1 |
| 1. Planteamiento del problema | 5 |
| 2. Objetivos | 9 |
| 2.1 Objetivo general | 9 |
| 2.2 Objetivos específicos..... | 9 |
| 3. Marco teórico | 11 |
| 3.1 La teoría del aprendizaje significativo | 11 |
| 3.1.1 Aprendizaje significativo y aprendizaje mecánico | 11 |
| 3.1.2 Aprendizaje por descubrimiento y por recepción..... | 12 |
| 3.1.3 Requisitos para el aprendizaje significativo | 13 |
| 3.1.4 Tipos de aprendizaje significativo | 13 |
| 3.1.5 Aprendizaje de Proposiciones..... | 15 |
| 3.1.6 Principio de la Asimilación..... | 15 |
| 3.2 Red conceptual..... | 17 |
| 3.2.1 Conceptos..... | 17 |
| 3.2.2 Procedimientos | 18 |
| 3.2.3 Actitudes | 19 |
| 3.3 Aspectos evaluativos para la unidad | 20 |
| 3.3.1 Criterios de evaluación | 20 |
| 3.3.2 Habilidades matemáticas | 22 |
| 3.3.3 Estándares básicos de competencias | 22 |
| 4. Actividades de aprendizaje | 27 |
| 4.1 Diagnóstico | 27 |
| 4.2 Razonamiento abstracto | 30 |
| 4.3 Sucesiones | 38 |
| 4.4 Los números poligonales | 43 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 4.5 | Sucesión de Fibonacci | 48 |
| 4.6 | El triángulo de Pascal..... | 48 |
| 4.7 | Actividad de profundización I | 55 |
| 4.8 | Progresiones aritméticas..... | 65 |
| 4.9 | Suma de una progresión aritmética | 70 |
| 4.10 | Notación sigma (Σ) | 59 |
| 4.11 | Progresiones geométricas..... | 62 |
| 4.12 | Actividad de profundización II | 70 |
| 5. | Conclusiones y recomendaciones | 81 |
| 5.1 | Conclusiones | 81 |
| 5.2 | Recomendaciones..... | 82 |
| | Bibliografía | 83 |

Lista de figuras

| | Pág. |
|--|-------------|
| Figura 3-1: Conceptos clave de la teoría del aprendizaje significativo | 14 |
| Figura 3-2: Red conceptual sobre sucesiones y progresiones..... | 20 |
| Figura 4-1: Números triangulares..... | 45 |
| Figura 4-2: Números cuadrados..... | 46 |
| Figura 4-3: Triángulo de Pascal | 51 |
| Figura 4-4: Números hexagonales | 61 |
| Figura 4-5: Números oblongos..... | 63 |
| Figura 4-6: Números tetraédricos..... | 64 |

Lista de tablas

| | Pág. |
|---|-------------|
| Tabla 3-1: Criterios de evaluación para la unidad didáctica | 20 |
| Tabla 3-2: Habilidades matemáticas | 22 |
| Tabla 3-3: Estándares básicos de competencias | 22 |

Introducción

Con el propósito fundamental de articular cada uno de los componentes del Proceso Docente Educativo (PDE), estructurar y planificar las clases (en relación con las funciones didácticas), implementar nuevas herramientas, “estrategias y medios didácticos no convencionales” para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; se realiza el diseño teórico de una Unidad Didáctica.

Una unidad didáctica es un espacio de planificación completa en la que se deben precisar los objetivos, contenidos, las actividades de enseñanza y aprendizaje, la evaluación, los recursos materiales y la organización del espacio y el tiempo, así como aquellas decisiones encaminadas a ofrecer atención a la diversidad de los estudiantes; y debe responder entre otras cosas, a ciertos interrogantes que muchas veces se plantean los docentes: ¿Qué actividades de aprendizaje hay que incluir para la clase? ¿Qué condiciones previas deben considerarse para orientar la clase? ¿Hay un dominio claro y profundo (por parte del docente) del tema que se va a desarrollar? ¿Cómo orientar hacia el objetivo? ¿Cómo asegurar el nivel de partida? ¿Cómo motivar? ¿Cómo distribuir el tiempo en relación con las actividades de clase?, entre otros.

Para estructurar lo anterior en relación con los documentos rectores del Proceso Docente Educativo en el contexto colombiano (La Ley 115 de 1994, los lineamientos y estándares curriculares en matemáticas), se plantea como trabajo final una unidad didáctica sobre las temáticas *Sucesiones y Progresiones* dirigido a estudiantes de grado noveno, a partir de guías de aprendizaje que contienen los siguientes aspectos:

- Introducción al nuevo tema y Orientaciones para el desarrollo de la guía.
- Orientación Hacia el Objetivo (OHO), que puede estar declarado en la guía o en la introducción.

- El contenido, que relaciona los conceptos, los procedimientos y las actitudes a desarrollar en la respectiva sección de clase.
- Estándares relacionados (de acuerdo con lo planteado por el MEN en el área de matemáticas).
- Actividad de repaso o lecturas iniciales para recordar conceptos trabajados anteriormente, con el propósito de Asegurar el Nivel de Partida (ANP).
- Actividades de clase. Se estructuran a partir de una serie de problemas y situaciones problema que orientan al estudiante sobre el tema. Este aspecto corresponde a la elaboración y la asimilación de la nueva materia. En este conjunto de actividades se trabaja la fijación en relación con varias funciones didácticas: Ejercitación, profundización, sistematización y repaso (este componente se trabaja también en las lecturas iniciales de cada guía).
- Socialización de las actividades de clase. Este aspecto no se hace explícito en las guías, pero al finalizar las actividades iniciales, las actividades de clase o simplemente al final de la sección, el docente puede orientar hacia la sistematización para integrar los contenidos y ordenar los conocimientos visualizando la nueva materia como un sistema.

Se propone el desarrollo de la unidad “Sucesiones y Progresiones” a partir de instrumentos de evaluación (guías de aprendizaje, encuesta, evaluaciones diagnósticas, formativas y sumativa) acompañados de materiales didácticos, para promover el desarrollo de habilidades del pensamiento, competencias (interpretativa, argumentativa y propositiva) y orientar al estudiante sobre los conocimientos previos hasta llegar a los procesos avanzados como la abstracción y formalización.

En cuanto a su estructura, el trabajo se fundamenta a partir del planteamiento de un problema teórico y real (ver descripción del problema) relacionado con el aprendizaje de las sucesiones y progresiones. Se declaran los objetivos de carácter educativo e instructivo. Seguidamente se plantean los contenidos de carácter conceptual, procedimental, actitudinal y se elabora una red conceptual; se presenta el modelo de las

guías, los logros, indicadores de logro, criterios de evaluación y actividades relacionados en una tabla. Para finalizar, se describen algunos referentes y aspectos de la evaluación, algunas conclusiones y recomendaciones, los referentes bibliográficos y los anexos.

1.Planteamiento del problema

Uno de los conceptos centrales del tema *Sucesiones y Progresiones* es el de variable. Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que sirva como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados.

El aprendizaje del concepto de variable logrado por los estudiantes a través de su paso por el sistema escolar es poco significativo; aunque son capaces de reconocer el papel que juega la variable en expresiones y problemas muy simples, un ligero aumento en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la búsqueda de soluciones memorizadas o por inspección que no son acordes al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas.

Según Ursini, S. & Trigueros, M (1997), las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores.

A partir de estas dificultades, se hace necesario reconocer la existencia del siguiente problema:

Los estudiantes de grado noveno presentan dificultad para solucionar problemas, reconocer elementos asociados a situaciones de variación (establecer regularidades y patrones de comportamiento), usar distintas formas de representación (recodificar) y llevar a cabo procesos de generalización. Algunos libros de texto por ejemplo, trabajan la unidad a través de problemas de tipo reproductivo, en los cuales el estudiante debe llevar a cabo procesos de abstracción a partir de arreglos numéricos dejando de lado el análisis de otro tipo de temas: Secuencias relacionadas con el razonamiento abstracto, arreglos

de figuras geométricas obtenidas a partir de giros, rotaciones a partir de un eje, movimientos, transformaciones, entre otros.

Esta dificultad no sólo se evidencia en este grado de escolaridad, sino que también se extiende hasta la educación superior: “A los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con *sucesión* y *series*; una posible razón es que no exploramos otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares” (Posada O. & Jaramillo, C.; 2003).

La falta de planificación de los sistemas de clases en relación con las funciones didácticas, impide explorar nuevas alternativas, relacionadas con el trabajo grupal o individual, a través de talleres que fomenten el desarrollo de habilidades matemáticas y capacidades afectivas dentro y fuera del aula, y limita la función de los diferentes instrumentos de evaluación a través de la cuantificación de resultados; es por eso que la evaluación ha sido entendida como un instrumento de “medición” del aprendizaje y ha cumplido un papel selectivo dentro del sistema educativo. En general, los diversos instrumentos de evaluación han tenido uno o varios objetivos (MEN, 1978):

- Decidir sobre la promoción de los alumnos.
- Sancionar a los alumnos (instrumento punitivo).
- Controlar el cumplimiento de los programas.
- Diligenciar formatos y registros académicos.
- Diferenciar los “buenos” estudiantes de los “malos” con base en los datos y promedios estadísticos.
- Cumplir mecánicamente normas y dictámenes.

Desde esta perspectiva, se hace entonces necesario, estructurar e integrar cada uno de los componentes del PDE para mejorar la calidad de la enseñanza, direccionar el sentido de la evaluación, planear las clases, a partir del diseño de nuevos instrumentos que

permitan evidenciar el alcance de las competencias y los estándares de calidad en matemáticas, considerando la evaluación como un juicio valorativo y estimativo elaborado a partir de aspectos cognitivos y afectivos que ayuden a orientar el aprendizaje y teniendo presente que “generar espacios de evaluación, auto-evaluación y co-evaluación equivale a generar procesos de control de calidad para poder seguir un plan de mejoramiento continuo que permita lograr procesos de enseñanza aprendizaje más cualificados” (Rueda, L; 2001).

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Diseñar una unidad didáctica para estudiantes del grado noveno, sobre las sucesiones y progresiones, desde una perspectiva constructivista para la enseñanza de las ciencias.

2.2 Objetivos específicos

- Diseñar actividades utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, que involucren procesos avanzados como la abstracción y la generalización.
- Proponer actividades de aprendizaje potencialmente significativas para el estudio de las sucesiones y progresiones para estudiantes de grado noveno.
- Plantear situaciones problema para la construcción del concepto de variable desde una perspectiva histórica.

3.Marco teórico

3.1 La teoría del aprendizaje significativo

La teoría que nos ocupa como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula (Ausubel; 1973), se constituye en un referente para dar cuenta de los mecanismos por los cuales se lleva a cabo la adquisición y la retención, de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela.

De modo general, se presenta un diagrama (véase figura 3-1) que relaciona algunos aspectos importantes de la teoría del aprendizaje significativo y se explica la significación de cada uno de ellos ejemplificándolos desde el tema de la presente unidad.

3.1.1 Aprendizaje significativo y aprendizaje mecánico

En primer lugar, la idea central de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, D. (1968) se fundamenta en la importancia de conocer los conocimientos previos del estudiante, es decir, aprendemos utilizando aquellos conocimientos preexistentes. Desde esta perspectiva, el autor se refiere a los conocimientos previos aprendidos de forma significativa y no memorística, afirmando que: “El factor más importante que influencia el aprendizaje, es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñense de acuerdo a ello”.

Según Moreira, M. (1993), el aprendizaje significativo es un proceso a través del cual nueva información se relaciona de manera no arbitraria y no literal con un aspecto relevante de la estructura cognitiva del estudiante; es decir, en este proceso la nueva información interactúa con una estructura de conocimiento específica denominada *subsumidor*, existente en la estructura cognitiva de quien aprende, que sirve de *anclaje*

para que el nuevo conocimiento que se adquiere tenga un significado. Por ejemplo, en el aprendizaje de las sucesiones y progresiones los estudiantes pueden utilizar como subsumidores los conceptos básicos del álgebra, las operaciones aritméticas para lograr una diferenciación y un aprendizaje de los tipos de progresiones y construir las reglas de formación respectivas.

Por otra parte Ausubel, D. (1973) define aprendizaje mecánico define el aprendizaje mecánico como aquel que se logra sin interacciones entre el conocimiento preexistente y el nuevo conocimiento, de forma arbitraria y literal. Así por ejemplo, la memorización de fórmulas matemáticas impide la transferencia de conocimientos.

3.1.2 Aprendizaje por descubrimiento y por recepción

En el *aprendizaje por recepción*, el conocimiento se presenta al estudiante en su forma final y sólo se le exige que interiorice o incorpore el nuevo conocimiento de modo que pueda reproducirlo en otras instancias del aprendizaje. En el *aprendizaje por descubrimiento*, lo que va a ser aprendido no se presenta al estudiante en su forma final, sino que debe ser construido por éste antes de ser aprendido e incorporado significativamente en la estructura cognitiva.

El aprendizaje por descubrimiento involucra un ordenamiento de la información e integración con la estructura cognitiva, de manera que se logre el aprendizaje deseado. El aprendizaje por descubrimiento no necesariamente es significativo, pues el hecho de que la nueva información interactúe con la estructura cognitiva previa y exista una disposición para ello del que aprende, esto no implica que lo aprendido por descubrimiento se relacione con aquellos subsumidores específicos.

Las sesiones de clase están caracterizadas por orientarse hacia el aprendizaje por recepción, esta situación motiva la crítica por parte de aquellos que propician el aprendizaje por descubrimiento, pero desde el punto de vista de la transmisión del conocimiento, es injustificado, pues en ningún estadio de la evolución cognitiva del educando, tienen necesariamente que descubrir los contenidos de aprendizaje a fin de que estos sean comprendidos y empleados significativamente. En matemáticas una regla

de formación para una secuencia dada, puede ser aprendida significativamente sin necesidad de descubrirla, es decir, puede dársele de antemano, comprenderla y utilizarla significativamente si en su estructura cognitiva tiene los subsumidores adecuados.

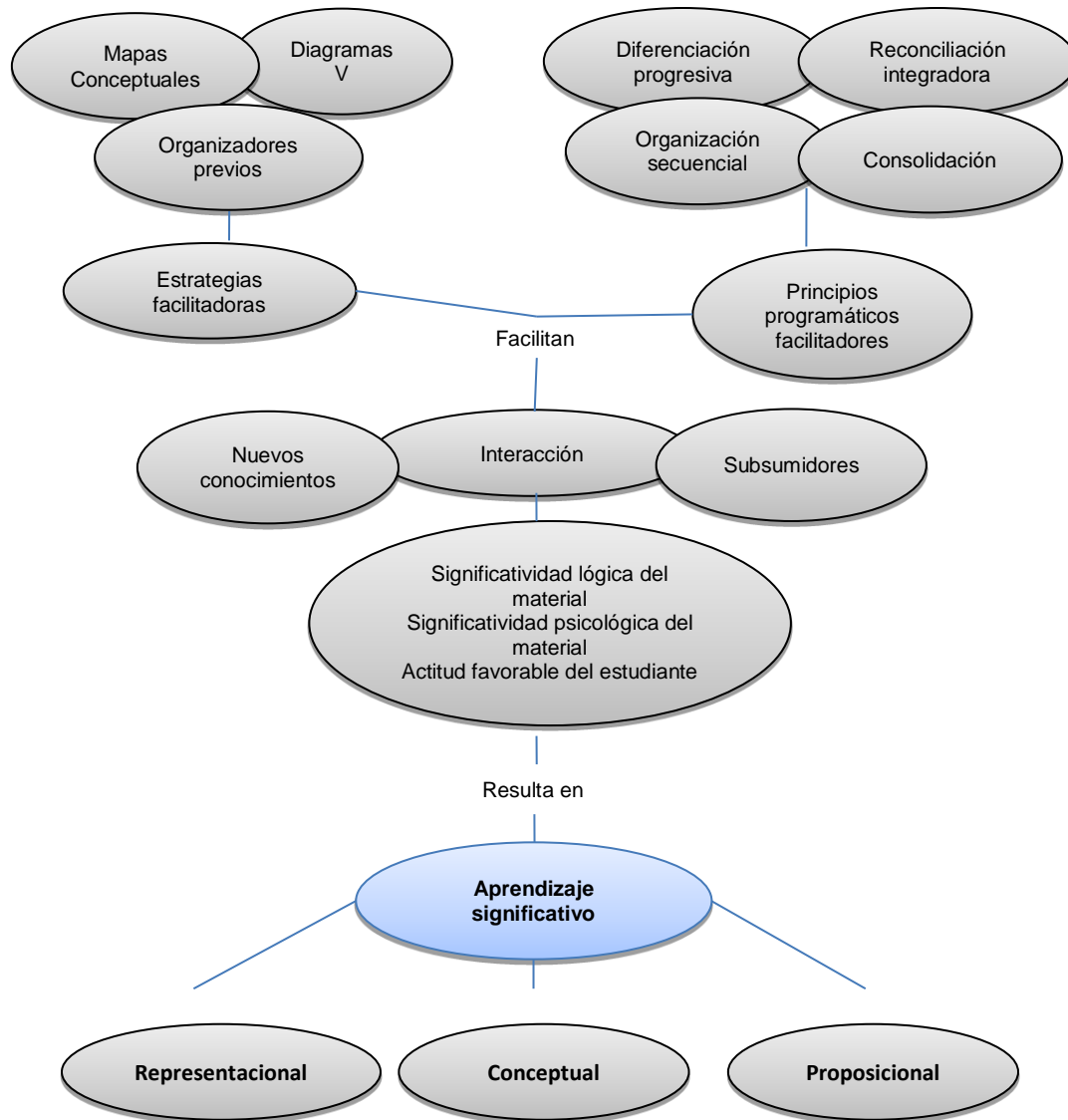
3.1.3 Requisitos para el aprendizaje significativo

Lograr un aprendizaje significativo, el material a estudiar debe ser potencialmente significativo para el estudiante, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria (Ausubel; 1983). Esto implica tal y como afirma Moreira, M. et al. (1993), que el material de aprendizaje se relacione de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra) con alguna estructura cognoscitiva específica del estudiante, la misma que debe poseer "significado lógico" es decir, ser relacionable de forma intencional y sustancial con las ideas correspondientes y pertinentes que se hallan disponibles en la estructura cognitiva del estudiante, este significado se refiere a las características inherentes del material que se va aprender y a su naturaleza.

Siguiendo a este autor, como requisito debe haber una disposición para el aprendizaje significativo, es decir que el estudiante muestre una disposición para relacionar de manera sustantiva y no literal el nuevo conocimiento con su estructura cognitiva. Así independientemente de cuanto significado potencial posea el material a ser aprendido, si la intención del alumno es memorizar arbitraria y literalmente, tanto el proceso de aprendizaje como sus resultados serán mecánicos, de manera inversa, sin importar lo significativo de la disposición del alumno, ni el proceso, ni el resultado serán significativos, si el material no es potencialmente significativo, y si no es relacionable con su estructura cognitiva.

3.1.4 Tipos de aprendizaje significativo

Dentro de la conexión del nuevo conocimiento con el existente en la estructura cognitiva del estudiante, involucra la modificación y evolución del nuevo conocimiento, así como la estructura cognoscitiva relacionada en el aprendizaje. Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo: de representaciones conceptos y de proposiciones (figura 3-1).

Figura 3-1: Conceptos clave de la teoría del aprendizaje significativo

Aprendizaje de Representaciones

Según Ausubel, D. (1983), este aprendizaje consiste en la atribución de significados a determinados símbolos y ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el estudiante cualquier significado al que sus referentes aludan.

Aprendizaje de Conceptos

Los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos" (Ausubel, D. et al.; 1983). Partiendo de ello se puede afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones. Según Moreira, M. et al. (1993), los conceptos son adquiridos a través de dos procesos: *Formación y asimilación*. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa. El aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que el estudiante amplía su vocabulario, pues los atributos de criterio de los conceptos se pueden definir usando las combinaciones disponibles en la estructura cognitiva.

3.1.5 Aprendizaje de Proposiciones

Este tipo de aprendizaje exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones, una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por una palabra para formar una unidad semántica. Una posible alternativa para evidenciar que el estudiante realiza y relaciona estos tipos de aprendizaje significativo, consiste en proponer a los estudiante que después de finalizado el tema realicen un mapa conceptual donde representen relaciones significativas entre los conceptos clave en forma de proposiciones.

El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva.

3.1.6 Principio de la Asimilación

La asimilación es un proceso mediante el cual el nuevo conocimiento se relaciona con aspectos relevantes de la estructura cognitiva, para originar una reorganización de los nuevos y antiguos significados y formar una estructura cognoscitiva diferenciada. Dependiendo como la nueva información interactúa con la estructura cognitiva, las formas de aprendizaje planteadas por la teoría de asimilación son las siguientes.

Aprendizaje Subordinado

Este aprendizaje se presenta cuando la nueva información es vinculada con los conocimientos pertinentes de la estructura cognoscitiva previa del estudiante, es decir cuando existe una relación de subordinación entre el nuevo material y la estructura cognitiva pre existente. El aprendizaje de conceptos y de proposiciones, hasta aquí descritos reflejan una relación de subordinación, pues involucran la subsunción de conceptos y proposiciones potencialmente significativos a las ideas más generales e inclusivas ya existentes en la estructura cognoscitiva.

El aprendizaje subordinado puede a su vez ser de dos tipos: *Derivativo* y *Correlativo*. El primero ocurre cuando el material es aprendido y entendido como un ejemplo específico de un concepto ya existente, confirma o ilustra una proposición general previamente aprendida.

El aprendizaje subordinado es correlativo, "si es una extensión elaboración, modificación o limitación de proposiciones previamente aprendidas" (Ausubel, D. et al.; 1983). En este caso la nueva información también es integrada con los subsunsores relevantes más inclusivos pero su significado no es implícito por lo que los atributos de criterio del concepto incluido pueden ser modificados. Este es el típico proceso a través del cual un nuevo concepto es aprendido.

Aprendizaje Supraordinado

Ocurre cuando una nueva proposición se relaciona con ideas subordinadas específicas ya establecidas, "tienen lugar en el curso del razonamiento inductivo o cuando el material expuesto [...] implica la síntesis de ideas componentes" (Ausubel, D. et al.; 1983).

El hecho que el aprendizaje supraordinado se torne subordinado en determinado momento, nos confirma que ella estructura cognitiva es modificada constantemente; pues el individuo puede estar aprendiendo nuevos conceptos por subordinación y a la vez, estar realizando aprendizajes supraordinados (como en el anterior) posteriormente puede ocurrir lo inverso resaltando la característica dinámica de la evolución de la estructura cognitiva.

Aprendizaje Combinatorio

Este tipo de aprendizaje se caracteriza por que la nueva información no se relaciona de manera subordinada, ni supraordinada con la estructura cognoscitiva previa, sino se relaciona de manera general con aspectos relevantes de la estructura cognoscitiva. Es como si la nueva información fuera potencialmente significativa con toda la estructura cognoscitiva.

3.2 Red conceptual

3.2.1 Conceptos

Sucesiones

- Razonamiento abstracto.
- Término general de una sucesión.
- Los Números Poligonales.
- La Sucesión de Fibonacci.
- El Triángulo de Pascal.

Progresiones aritméticas

- Término general de una progresión aritmética.
- Diferencia de una progresión aritmética.
- Interpolación de medios aritméticos.

- Suma de una progresión aritmética.

Notación sigma

Propiedades de la Sumatoria.

Progresiones geométricas

- Término general de una progresión aritmética.
- Razón de una progresión geométrica.
- Suma de una progresión geométrica.
- Interpolación de medios geométricos.

Los temas centrales sobre los cuales se construye la red conceptual de la presente unidad didáctica son las sucesiones y las progresiones, los cuales se articulan mediante un concepto que es el “término general”; en el caso de las sucesiones hace referencia a fórmulas de recurrencia, por ejemplo, una forma alternativa de analizar la sucesión de Fibonacci es expresando que: Cada término de la sucesión se obtiene a partir de la suma de los dos términos anteriores; así, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

En el estudio de las progresiones aritméticas, geométricas y armónicas también se explicará la forma de encontrar el término general. Por esta razón, el concepto se ubica en el centro de la red, porque enlaza todos los subtemas de la unidad incluyendo las aplicaciones que se extienden al área de la economía, la química, entre otras. Otro de los conceptos centrales de la red es el de suma, que relaciona cada uno de los tipos de progresiones y de él se derivan “la notación sigma” y sus propiedades.

3.2.2 Procedimientos

- Deducir el término general de una sucesión numérica o geométrica y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general.
- Reconocer las progresiones aritméticas, obtener su término general y hallar un término cualquiera, conocidos el primer término y la diferencia.

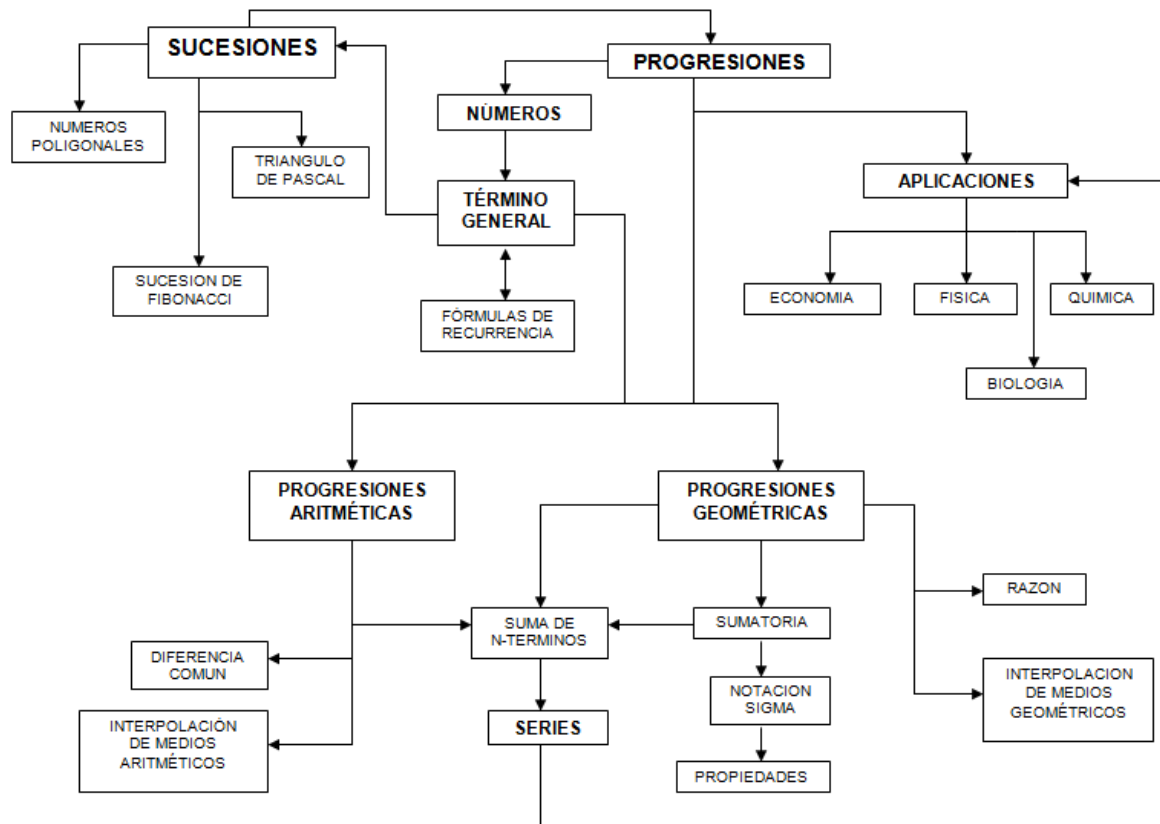
- Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.
- Interpolarse n términos entre dos números dados para obtener una progresión aritmética.
- Determinar si una progresión es geométrica o no, hallar su término general y obtener un término cualquiera conociendo el primer término y la razón.
- Calcular el producto y la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica.
- Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.
- Reconoce la presencia de las sucesiones en contextos reales
- Reconocer el interés compuesto como un caso real de progresión geométrica y resolver problemas donde aparezca este concepto.
- Utilización de las fórmulas de las progresiones para resolver problemas de aplicación.
- Utilización de las fórmulas del interés compuesto y de las anualidades para resolver problemas.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones entre figuras dadas y sus transformadas por los movimientos.
- Codificación y decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico.
- Noción y significado de la variable (como letra y como números generalizados).
- Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas.

3.2.3 Actitudes

- Sensibilidad e interés ante las informaciones y mensajes de tipo numérico.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas.
- Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase.
- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados.

- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos.
- Asume una posición crítica y de respeto frente a las opiniones de los demás compañeros, argumentando su punto de vista.

Figura 3-2: Red conceptual sobre sucesiones y progresiones.



3.3 Aspectos evaluativos para la unidad

3.3.1 Criterios de evaluación

Tabla 3-1: Criterios de evaluación para la unidad didáctica

| CRITERIOS DE EVALUACIÓN | DESCRIPCIÓN |
|-------------------------|---|
| SUPERIOR | <ul style="list-style-type: none"> - Realiza consultas y talleres propuestos en clase. - Obtiene un excelente desempeño en cada una de las pruebas realizadas. - Muestra una actitud positiva que favorece su ritmo de aprendizaje y el de sus compañeros. - Encuentra el término general de o formula de recurrencia para una sucesión. - Logra identificar los elementos y características de una progresión aritmética y geométrica - Aplica lo relacionado con las sucesiones y progresiones en diferentes contextos. |
| ALTO | <ul style="list-style-type: none"> - Realiza consultas y talleres propuestos en clase. - Obtiene un buen desempeño en algunas de las pruebas realizadas. - Muestra una actitud positiva que favorece su ritmo de aprendizaje y el de sus compañeros. Puede manifestar actitud negativa. - Presenta dificultad para encontrar algunas leyes de formación. - Logra identificar algunos elementos y características de una progresión aritmética y geométrica. - Aplica lo relacionado con las sucesiones y progresiones en algunas situaciones. |
| BASICO | <ul style="list-style-type: none"> - Realiza consultas y talleres propuestos en clase. - Obtiene un desempeño medio en las pruebas realizadas. - Muestra una actitud positiva que favorece su ritmo de aprendizaje y el de sus compañeros. Puede manifestar actitud negativa. - Presenta dificultad para encontrar algunas leyes de formación. - Logra identificar algunos elementos y características de una progresión aritmética y geométrica. - No aplica lo relacionado con las sucesiones y progresiones en algunas situaciones. |
| BAJO | <ul style="list-style-type: none"> - Realiza algunas consultas y talleres propuestos en clase. - Obtiene un desempeño bajo en las pruebas realizadas. - Muestra una actitud negativa que desfavorece su ritmo de aprendizaje y el de sus compañeros. - Presenta dificultad para encontrar algunas leyes de formación. - No logra identificar algunos elementos y características de una progresión aritmética y geométrica. - No aplica lo relacionado con las sucesiones y progresiones en algunas situaciones. |

3.3.2 Habilidades matemáticas

A partir de las actividades propuestas y los recursos sugeridos para el desarrollo de éstas, los estudiantes podrán desarrollar habilidades como las que se muestran en la tabla 3-2.

Tabla 3-2: Habilidades matemáticas

| Habilidad \ Actividad | Contar | Definir | Demostrar | Algoritmizar | Calcular | Modelar | Resolver | Ordenar | Razonar | Abstraer | Relacionar | Generalizar | Representar |
|-----------------------|--------|---------|-----------|--------------|----------|---------|----------|---------|---------|----------|------------|-------------|-------------|
| Multicubos | x | | | | | x | x | | x | x | | x | x |
| Torre de hanoi | x | | x | x | x | x | x | X | x | x | x | x | |
| Doblado de papel | | | | | | x | | | x | x | | x | x |
| Números poligonales | x | x | | x | x | x | | | x | x | | x | |
| Triángulo de Pascal | x | | x | x | x | x | | | x | x | | x | |

3.3.3 Estándares básicos de competencias

Para relacionar los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, a saber: Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; los Estándares se han estructurado en cinco pensamientos explicados en la tabla 3-3.

Tabla 3-3: Estándares básicos de competencias

| Pensamiento | Estándares |
|----------------------------|--|
| Numérico y sistemas | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades. ▪ Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética. ▪ Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión geométrica. |

| | |
|--|--|
| numéricos | <ul style="list-style-type: none">▪ Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante progresiones aritméticas y geométricas. |
| Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos | <ul style="list-style-type: none">▪ Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)▪ Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.▪ Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas. |
| Aleatorio y sistemas de datos | <ul style="list-style-type: none">▪ Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos.▪ Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos. |

4.Actividades de aprendizaje

4.1 Diagnóstico

Objetivo: Identificar fortalezas y debilidades relacionadas con los conocimientos previos que se deben adquirir para el trabajo con las sucesiones y progresiones.

Reflexión. Las cuatro velas

Las cuatro velas se quemaban lentamente. El ambiente estaba tan silencioso que se podía oír el diálogo que mantenían. La primera dijo: **Yo soy la paz**, sin embargo las personas no consiguen mantenerme, creo que me voy a apagar y disminuyendo su fuego, rápidamente se apagó.



Dijo la segunda: **Yo soy la fe**, lamentablemente soy superflua, las personas no quieren saber de mí, no tiene sentido permanecer encendida. Cuando terminó de hablar, una brisa pasó suavemente sobre ella y se apagó.

La tercera rápida y triste, se manifestó: **Yo soy el amor**, no tengo fuerzas para seguir encendida. Las personas me dejan a un lado y no comprenden mi importancia, se olvidan hasta de aquellos que están muy cerca y los aman. Sin esperar más, se apagó.

De repente...Entró un niño y vio las tres velas apagadas. Dijo el niño: ¿Qué es esto? Ustedes deberían estar encendidas hasta el final, al decirlo comenzó a llorar. Entonces la cuarta vela habló: no tengas miedo, mientras yo tenga fuego podemos encender las demás velas. **Yo soy la esperanza.**

Con los ojos brillantes, tomó la vela que estaba encendida... y encendió las demás. Que la esperanza nunca se apague dentro de nosotros y que cada uno sea la herramienta que ese niño necesita para mantener la esperanza, la fe, la paz y el amor.

Anónimo

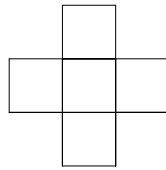
La presente actividad se realizará de forma individual y en ella se pide solucionar cada una de las situaciones planteadas. Seguidamente, se hará una socialización.

Actividad**Duración: 40 min.****Áreas y perímetros**

1. En la figura, el cuadrado interno se obtuvo uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado externo.



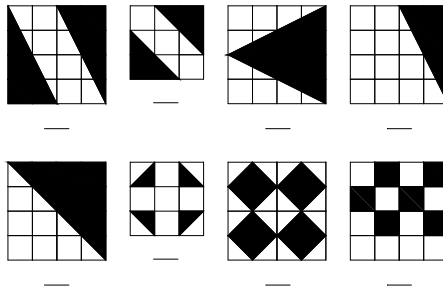
Si el perímetro del cuadrado externo es P , entonces, ¿cuál es el perímetro del cuadrado interno?



2. El área de cada cuadrado es de 25cm^2 . ¿Cuál es el perímetro de la figura?

Fracciones

3.



Escribir para cada figura la fracción que representa el área sombreada.

4. Realiza las siguientes operaciones con fraccionarios:

4.1. $1/3 + 2/13 + 1$; $1/2 + 1/4 + 2/5$; $3/4 + 5/2 + 7/4$

4.2. $(15/7) \cdot (4/3)$; $(12/3) \cdot (2/5) \cdot (1/2)$

4.3. $1/2 - 1/3$; $8/10 - 1/6$; $3/2 - 1/4 - 3/4$

4.4. $(1/2) / (1/4)$; $(1/2) / (2/5)$; $(1/3) / (3/8)$

5. Define con tus propias palabras los siguientes términos: Razonamiento lógico, Secuencia, Sucesión, Regularidad, Variable, Rotación.

6. Muchas actividades que realizamos a diario son secuenciales, describe las acciones que realizas desde que te levantas por la mañana hasta que finaliza el día, Identificando aquellas que son repetitivas.

7. Observe la siguiente secuencia de circunferencias

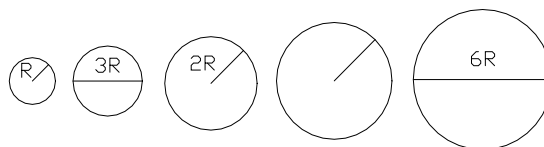


Fig.1. Fig. 2. Fig. 3. Fig.4. Fig. 5.

7.1. ¿Cuál es el radio de la figura 4?

7.2. Se puede observar en la secuencia, que la longitud de una circunferencia ($2\pi r$) cualquiera se incrementa con respecto a la longitud de la anterior. ¿Qué valor tiene dicho incremento?

7.3.Cuál de las siguientes expresiones representa el radio de la circunferencia de una figura n cualquiera

A. $n+(1/2)r$ B. $(n+1)r/2$ C. $n r / 2$ D. $(n+1)r$

7.4. El radio de una circunferencia de la secuencia está dado por la expresión $10r$, ¿en qué posición se encuentra dicha circunferencia?

4.2 Razonamiento abstracto

Objetivo: Identificar regularidades y patrones de comportamiento a través del estudio de secuencias gráficas y numéricas.

Indicadores de desempeño

- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Es independiente al realizar sus trabajos y conoce sus capacidades y limitaciones.

| Contenido | | |
|---|--|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Razonamiento abstracto. Rotaciones. Eje de rotación. Transformaciones. Complementación. Secuencias. • Patrones. • Regularidades. | • Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones entre figuras dadas y sus transformadas por los movimientos. • Utiliza herramientas del razonamiento lógico en la solución de secuencias. | • Sensibilidad e interés ante las informaciones y mensajes de tipo numérico. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |

| | | |
|--|--|--|
| | | <ul style="list-style-type: none"> • Respeto y buen trato hacia el profesor y los compañeros en actividades de clase y extra-clase. |
|--|--|--|

Estándares relacionados

- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, entre otros).
- Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.

Reflexión: ¿y a ti que te toca hacer?

Esta es una historia sobre cuatro personas llamadas: **Todo el mundo, alguien, cualquiera y nadie**. Había un importante trabajo que realizar y **todo el mundo** tenía la seguridad que **alguien** lo haría. **Cualquiera** lo podía haber hecho, pero **nadie** lo hizo. **Alguien** se enojó porque era un trabajo de **todo el mundo**. **Todo el mundo** pensó que **cualquiera** lo podía hacer, pero **nadie** imaginó que **todo el mundo** dejase de hacerlo. Al final, **todo mundo** culpó a **alguien** cuando **nadie** hizo lo que **cualquiera** podría haber hecho.

¿Qué enseñanza te deja la reflexión?

¿Qué es razonamiento abstracto?

Es una actividad que consiste en medir la capacidad existente en una persona para observar, analizar y descubrir elementos de una secuencia. En los problemas relacionados con el razonamiento abstracto, se evalúa la capacidad inductiva y deductiva

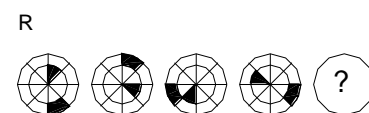
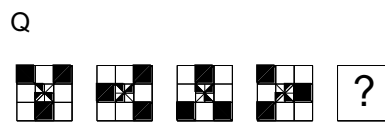
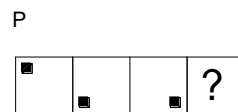
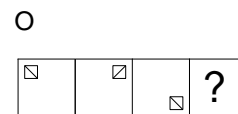
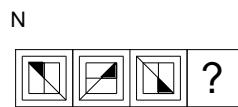
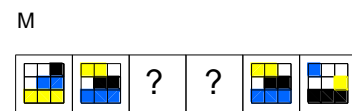
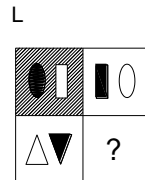
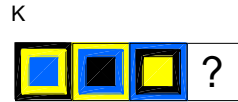
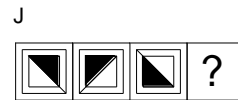
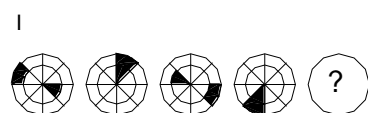
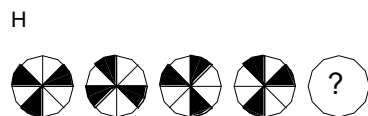
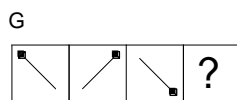
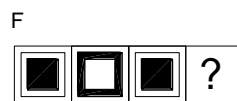
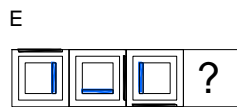
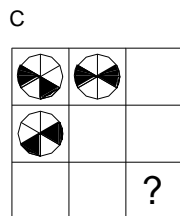
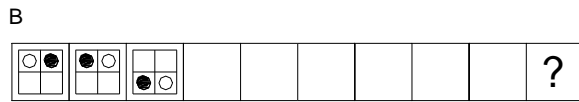
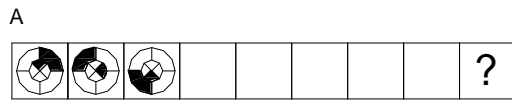
para emplear procesos lógicos y descubrir leyes generales. Las figuras o símbolos utilizados varían progresivamente, bien sea en sentido horizontal o vertical. Algunas casillas aparecen en blanco y otras con un interrogante, para dibujar la figura (número, letra, símbolo) que continua la secuencia.

Para el desarrollo de los siguientes problemas se deben tener en cuenta los **Giros**, de una figura sobre un eje, en sentido horario o contrario a las manecillas del reloj, **movimientos**, relacionados con los cambios de posición en el espacio, **conteo**, cuando se aumenta o disminuye el número de elementos, **transformaciones**, cuando una figura cambia de forma, color o tamaño, **complementación**, cuando a una figura se le pueden agregar o quitar elementos y **secuencia**, cuando se repiten a intervalos determinadas figuras.

Actividad de clase

Duración: 120 min (2 horas)

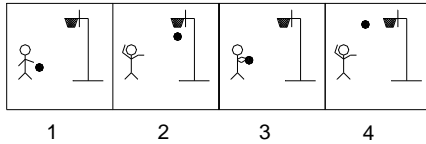
1. Completa las siguientes secuencias dibujando la figura que debe ir en cada uno de los espacios en blanco y en el interrogante.



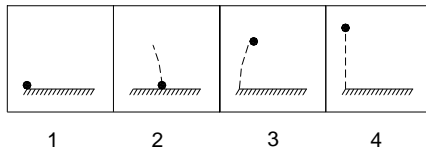
Existen otros tipos de problemas relacionados con el razonamiento abstracto, en los cuales podemos modelar situaciones de la vida cotidiana ó algunos fenómenos físicos sencillos.

2. En la situación A se describe a una persona realizando una jugada de Baloncesto y en la situación B, se describe la caída de un objeto desde cierta altura que comienza a rebotar indefinidamente. Ordena cada una de los movimientos ó secuencia de acciones.

A
LA CANASTA



B
PELOTA DESPUÉS DE CAER



3. Completa las siguientes secuencias² con la letra o el número que debe en el interrogante:

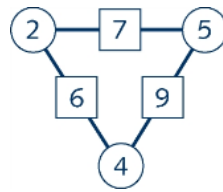
4. Completa las siguientes secuencias con la letra que debe ir en el espacio en blanco.

4.1. I L N W _

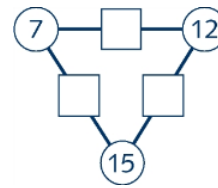
4.2. ECH TRW L__O

4.3. V _ Q M

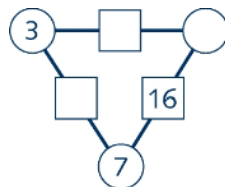
5. Analiza el siguiente diagrama, y de acuerdo con la regla de formación, complete los restantes.



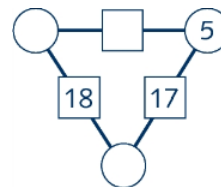
A



B



C



D

Razonamiento abstracto (actividad evaluativa)

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

Apreciado Estudiante. Para profundizar en reconocimiento de regularidades y patrones de comportamiento, se propone el desarrollo de una actividad individual relacionada con las secuencias gráficas y numéricas (Tomado de Estudios psicométricos, Alfred Binet), que deberá solucionarse y entregarse en el tiempo estipulado. En las preguntas 1-6 escriba la letra o número que continua en la secuencia, y las preguntas 7-13 son de selección múltiple con única respuesta, usted deberá elegir la opción que considere correcta en un óvalo. Si marca dos opciones de respuesta en una misma pregunta, esta quedará anulada.

Objetivo: Identificar regularidades y patrones de comportamiento a través del estudio de secuencias gráficas y numéricas.

Indicadores de logro

- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Es independiente al realizar sus trabajos y conoce sus capacidades y limitaciones.

Criterios de evaluación. Los parámetros (solo cuantitativos) que se tendrán en cuenta para evaluar la presente actividad son:

Superior: Soluciona de 11 a 13 problemas planteados

Alto: Soluciona de 8 a 10 problemas planteados

Básico: Soluciona de 5 a 7 problemas planteados

Bajo: Soluciona de 0 a 4 problemas planteados

Actividad sobre secuencias

Duración: 20 min

En las preguntas 1 a 13 completar la secuencia con la ficha que debe ir en cada uno de los espacios en blanco.

1. A D G J ____

2. 1 3 6 10 ____

3. 1 1 2 3 5 ____

4. 21 20 18 15 11 ____

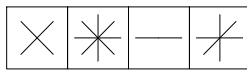
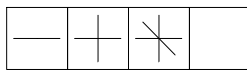
5. 8 6 7 5 6 4 ____

6. 40 35 34 29 28 ____

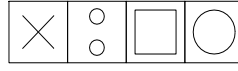
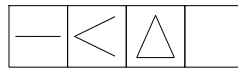
7.

8.

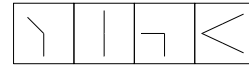
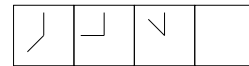
9.



A B C D

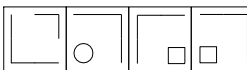
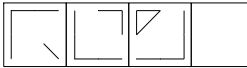


A B C D



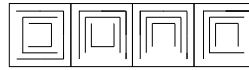
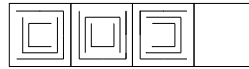
A B C D

10.



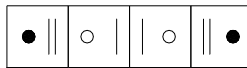
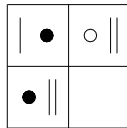
A B C D

11.



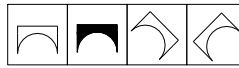
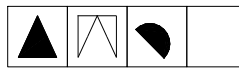
A B C D

12.



A B C D

13.



A B C D

4.3 Sucesiones

Objetivo: Resolver problemas relacionados con las sucesiones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización.

Indicadores de logro

- Propone estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.

| Contenido | | |
|--|--|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Sucesión Términos de una sucesión Término general Fórmulas de recurrencia Reglas de formación Cubo Arista Área Superficial Volumen | <ul style="list-style-type: none"> • Noción y significado de la variable (como letra y como números generalizados). • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. • Codificación y decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico. • Deducir el término general de una sucesión y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general. | <ul style="list-style-type: none"> • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas. • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas. • Asume una posición crítica y de respeto frente a las opiniones de los demás compañeros, argumentando su punto de vista. |

Estándares relacionados

- Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos.
- Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos
- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)

Actividad n°1: Saludos de mano

Duración: 30 min.

- Si todas las personas de este salón se saludaran de mano, ¿cuántos apretones de mano se darían?

Analícemos posibles soluciones:

(a) Se puede proceder de manera experimental y organizar los datos en una tabla, así:

| Personas | Saludos |
|----------|---------|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| ⋮ | ⋮ |
| n | |

1. Completa la tabla.
2. Encuentra una expresión general que permita determinar el número de saludos de manos para cualquier cantidad de personas.
3. ¿Se puede representar la situación gráficamente?
¿Cómo?

(b) ahora, expresemos los datos de la tabla anterior de la siguiente forma:

| Personas | Saludos |
|----------|---------|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2+1 |
| 4 | 3+2+1 |
| 5 | |
| 6 | |
| ⋮ | ⋮ |
| n | |

1. Complete la tabla.
2. Encuentre la expresión general que permita determinar el número de saludos de manos para cualquier cantidad de personas.

Actividad nº2: El mundo de los cubos

Duración: 60 min.

Materiales: Multicubos

Descripción: Material didáctico de forma cúbica elaborado en plástico.

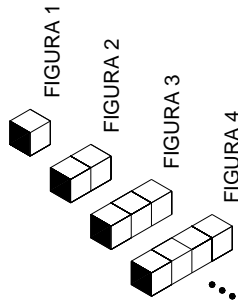
Dimensiones: 3cmx3cmx3cm.

Cantidad: 64 cubitos

Término general de una sucesión

A continuación se plantean varias situaciones. Discute con tus compañeros acerca de cada una de las soluciones.

1. Con ayuda del material didáctico, construye y observa con atención los siguientes cuerpos.



Convención: Se asumirá el volumen como el número de cubos que puede tener un arreglo, es decir, si la figura 3 se ha construido con 5 cubos, el volumen del arreglo es 5.

Sigue agregando un cubo a cada cuerpo y completa la siguiente tabla; donde V representa el volumen (número de cubos) y A.S. es el área superficial de cada arreglo.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|
| V | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ... | 100 |
| A.S | | | | | | | | | | | | | | | | |

1.1. ¿Qué se puede observar?

1.2. ¿Se puede deducir la regla para obtener el área superficial de un cuerpo de esta forma, construido con cualquier cantidad de cubos? ¿Cuál es?

2. Responda las preguntas 2.1. a 2.3. de acuerdo con el siguiente gráfico.

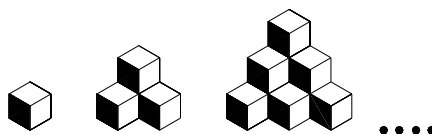


Fig.1. Fig. 2. Fig. 3.

2.1. ¿Cuál será el número de cubos que habrá en la figura 5? _____

2.2. ¿Cuál es el número de cubos no visibles que habrá en la figura 5? _____

2.3. El número de cubos que habrá en la base de la figura 10 es _____

2.4. Encuentra una regla de formación para calcular el número de cubos de cualquier figura. _____

3. Ahora, construye el siguiente arreglo de cubos, completa la tabla que relaciona el número de cubos y el número de caras y responde las preguntas 3.1. y 3.2.

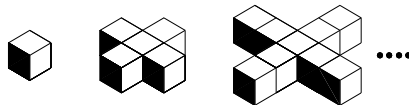


Fig.1. Fig. 2. Fig. 3.

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # de cubos | | | | | | | | | |
| # de caras | | | | | | | | | |

3.1. ¿Cuál será el volumen de la Figura 16? _____

3.2. Describa literalmente, la forma en la cual se puede hallar el término general de esta sucesión de volúmenes:

3.3. ¿Cuál es la regla (algebraica) para obtener el volumen de un cuerpo de esta forma, construido con cualquier cantidad de cubos? _____

3.4. Si ahora la arista de cada cubo mide una unidad, las áreas superficiales de las figuras 1, 2, 3 son respectivamente, 6, 22 y 38 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área superficial de la figura 5? _____

3.5. ¿Cuál es la regla para obtener el área superficial de un cuerpo de esta forma, construido con cualquier cantidad de cubos? _____

4.4 Los números poligonales

Objetivo: Resolver problemas relacionados con las sucesiones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización.

Indicadores de logro

- Propone estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.

| Contenido | | |
|--|---|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Números Poligonales Números Naturales Números Triangulares Números Cuadrados Números Pentagonales Suma Potenciación Ley de formación Término General | <ul style="list-style-type: none"> • Reconoce la presencia de las sucesiones en contextos reales. • Deducir el término general de una sucesión y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general. • Codificación y | <ul style="list-style-type: none"> • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos |

| | | |
|--|--|--|
| | decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico. • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. | y estimaciones numéricas. •Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |
|--|--|--|

Estándares relacionados

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos

Los números poligonales. Actividad adaptada del Grupo Ábaco (2004).

Materiales: Botones, canicas o monedas

Un problema con más de 2.000 años

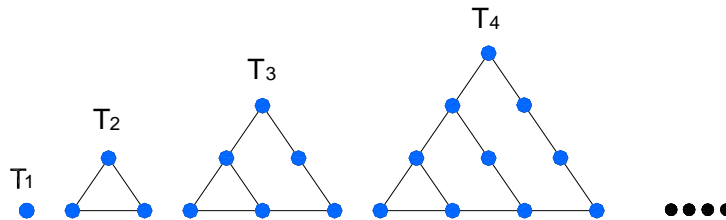
Las expresiones “números triangulares” o “números cuadrados” no son meras metáforas sino que esos números son, efectivamente, ante el espíritu y ante los ojos de los pitagóricos, triángulos y cuadrados. Los números poligonales se remontan al comienzo mismo de la matemática, fueron los pitagóricos los que descubrieron (Siglo VI A de C). Tal vez, la mejor forma de comprender los números poligonales es percatándose que en aquella época los números se representaban mediante guijarros (semillas) que se disponían en una superficie. Algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 guijarros se pueden disponer formando un triángulo, 4 formando un cuadrado, etc., dichos números representan un enlace entre la geometría y la aritmética.

Expresiones y conceptos como números triangulares, números cuadrados, números pentagonales, etc. No sólo conservan su interés histórico, sino que fueron el origen de la teoría de números. Continuada por Eratóstenes y Ampliada por Menelao, quién resumió todas las propiedades de los números pares, impares, primos, perfectos, amigos, poligonales, etc. Y que ha llegado hasta nuestros días. Los números poligonales ejercieron siempre una gran fascinación sobre los matemáticos, pero fue Cauchy quien concluyó con el problema de la descomposición de números enteros en números

poligonales. Demostró que un número cualquiera es como máximo, la suma de tres números triangulares, de cuatro números cuadrados, de cinco números pentagonales,...Matemáticos prestigiosos anteriores a él, entre ellos Gauss, Fermat, y Lagrange habían descubierto casos particulares.

1. Los números triangulares

Figura 4-1: Números triangulares



El primer gráfico (T₁) está formado por un punto, el segundo gráfico (T₂) está formado por tres puntos que forman un _____, si a estos tres puntos les añadimos otros tres (todos en uno de los lados) seguimos teniendo figuras triangulares, y así sucesivamente.

1.1. Dibuja el quinto y el sexto arreglo (T₅ y T₆) y describe el procedimiento realizado

1.2. Completa la siguiente tabla que relaciona los números naturales y los números triangulares.

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|-------|----|
| Nro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | 95 |
| Triangulares | 1 | 3 | 6 | | | | | | | | | | |

1.3. ¿Qué relaciones encuentras en la tabla anterior?

1.4. Encuentra una expresión con la que puedas obtener un número triangular cualquiera. A esta expresión, la llamaremos **ley de formación**.

1.5. Algunas propiedades de los Números Triangulares

- Una anotación en su diario responde a la alegría de haber encontrado una demostración para el caso particular de números triangulares: “Todo número entero es suma de, a lo sumo, tres números triangulares. Por ejemplo: $36=15+15+6$, donde 15 y 6 son números triangulares. Verifica esta propiedad con tres números:

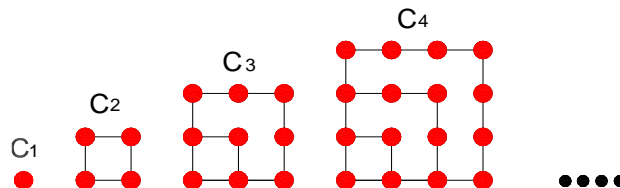
- Algunos números triangulares son producto de tres números enteros consecutivos; cuatro de estos números son 6, 120, 210, 990, etc. Verifica esta propiedad.

Un número triangular

1.6. ¿Qué ocurre si sumamos dos números triangulares consecutivos?

2. Los números cuadrados

Figura 4-2: Números cuadrados



2.1. ¿Cuántos puntos tendrá C4? _____

2.2. Construye los números cuadrados llenando la siguiente tabla (de acuerdo al número de puntos de cada figura)

| | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Cuadrados | 1 | 4 | | | | | |

¡Recuerda!

La expresión $2 \times 2 \times 2 \times 2$, se puede escribir como 2^4 de acuerdo con las propiedades de la potenciación. Similarmente: $3 \times 3 = 3^2 = 9$, $5 \times 5 = 5^2 = 25$

2.3. De acuerdo con la observación anterior, expresa los números cuadrados de la tabla anterior, utilizando la potenciación.

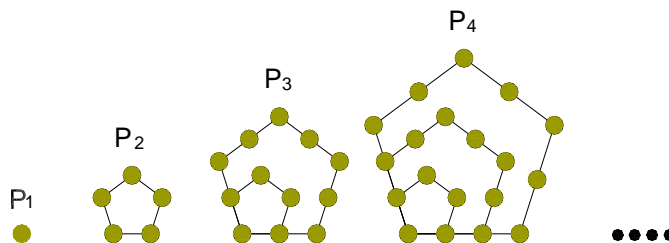
| | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Cuadrados | | | | | | | |

2.4. Ahora, deduce la Ley de formación para encontrar cualquier número cuadrado.

2.5. Algunas propiedades de los Números Cuadrados

- “La suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado”. Representa numérica y gráficamente esta afirmación.
- “Todo número natural se puede expresar como la suma de cuatro cuadrados de números enteros” (teorema demostrado por Lagrange en 1770). Encuentra tres números que cumplan esta afirmación.

3.



3.1. ¿Qué nombre le darías a los números de la **figura 3-1**? _____

3.2. Construye los números cuadrados llenando la siguiente tabla (de acuerdo al número de puntos de cada figura)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| P | 1 | 4 | | | | | |

3.3. ¿Cuál es la ley de formación para un número _____ cualquiera denotado por (P)?

4. Verifica la afirmación de Cauchy que se enunció al principio de la guía, con los siguientes números.

| Número | Suma de los números triangulares | Suma de los números cuadrados | Suma de los números pentagonales |
|--------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 40 | | | |
| 99 | | | |
| 75 | | | |

4.5 Sucesión de Fibonacci

Objetivo: Aplicar y modelar conocimientos aritméticos y geométricos, para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea desde varias perspectivas.

Indicadores de logro

- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.
- Está en capacidad de reconocer la utilidad práctica de las sucesiones y progresiones en su entorno.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.

Materiales: Recortes de fomi de 20mmx10mmx1mm, papel cuadriculado (tamaño carta), lápiz, borrador, regla y compás.

| Contenido | | |
|---|---|--|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Sucesión de Fibonacci Término general ó n-ésimo Fórmulas de recurrencia Espiral (de Fibonacci) Falacia geométrica Fracciones Relación Áurea | <ul style="list-style-type: none"> • Reconoce la presencia de las sucesiones en contextos reales • Codificación y decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico. • Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones entre figuras dadas y sus transformadas por los movimientos. | <ul style="list-style-type: none"> • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |

Estándares relacionados

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)

- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas

Introducción (Adaptado de Suárez, F., Herrera, H. & Monsalve, M.; 2000)

¿Quién era Fibonacci?

Leonardo de Pisa apodado *Fibonacci*, nació alrededor de 1170. En el prefacio de su primera obra "*El Liber Abaci*", escrita en 1202, nos cuenta un poco sobre los comienzos de su carrera como matemático. Cuando aún era un chiquillo, su padre, que estaba al frente de la oficina de aduanas de Argelia, le llamó a su lado y le hizo seguir un breve curso sobre el cálculo proposicional hindú, cuyas ventajas no podían ocultarse a un experto. Así empezó a aficionarse a la matemática.



Utilizó esta experiencia para mejorar las técnicas de cálculo comercial que conocía y extender la obra de escritores matemáticos clásicos, como los matemáticos griegos Diofante y Euclides. Sus escritos sobre matemáticas recreativas, que a menudo los exponía como relatos, se convirtieron en retos mentales clásicos ya en el siglo XIII. Estos problemas entrañaban la suma de sucesiones, como la sucesión de Fibonacci que él descubrió. Ahora, veamos varios ejemplos para visualizar la Sucesión de Fibonacci.

Actividad Nro. 1: El muro de ladrillos

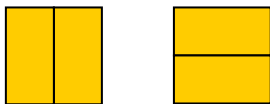
Duración: 30 min.

Si queremos construir un muro de ladrillos, los cuales tienen el tamaño usual en el cual el largo es el doble del ancho, y si la altura del muro debe ser de dos unidades de alto, entonces podemos construir un muro de diferentes formas, dependiendo del largo que lo queramos así:

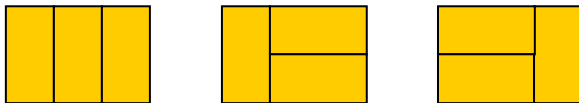
Solo hay una forma de colocar el ladrillo para obtener un muro de 1 unidad de largo, lograda mediante la colocación del ladrillo parado en su parte inferior.



Hay dos formas de colocar los ladrillos para un muro de dos unidades de largo: 2 ladrillos acostados uno sobre el otro y 2 ladrillos parados, uno junto al otro.



Hay 3 formas de colocarlo para un muro de 3 unidades de largo.



¿Cuántas formas hay para lograr un muro de 4 unidades de largo? ____

Sistematicemos el procedimiento en una tabla:

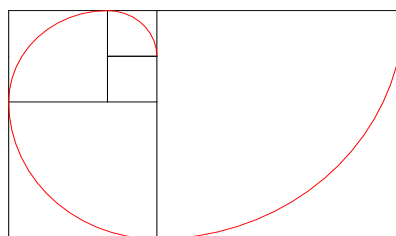
| | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de ladrillos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Nº de formas | | | | | | | | | |

Observa el número de formas que has encontrado para los muros de longitud 1, 2, 3, 4, 5 y 6 unidades. ¿Te parecen familiares? ¿Puedes encontrar alguna relación para esto?

Actividad Nro. 2: La espiral de Fibonacci y la naturaleza

Duración: 15 min.

Ahora construyamos una espiral. Tome una hoja cuadrículada, y ubique el siguiente gráfico en el centro de la hoja.



Descubre bajo qué ley se puede seguir ampliando y hazlo hasta el máximo de la hoja. ¿Vez alguna relación con la sucesión de Fibonacci?

Esta espiral que hemos obtenido seguramente debe serte familiar, la has visto muchas veces en la naturaleza y quizás no eres consciente aún de esto.

Las piñas, disposición de los órganos encargados de las inflorescencias en los girasoles, la disposición de las hojas en las plantas y las conchas de los caracoles presentan una gran relación con la **espiral de Fibonacci**.

Actividad Nro. 3

Duración: 10 min.

Piensa en dos números cualesquiera y construye, empezando con esos números, una sucesión como la de Fibonacci, es decir en la que cada término sea la suma de los dos anteriores. La suma de los diez primeros términos de tu sucesión será once veces el séptimo término. Esto sucede en la sucesión de Fibonacci y en cualquier otra que se construyas de la misma manera.

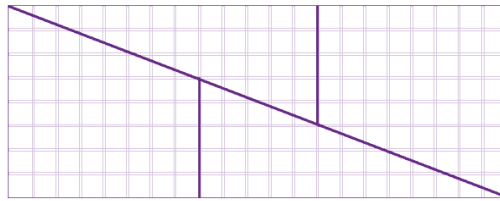
Sucesiones recurrentes. Podemos definir las sucesiones recurrentes como aquellas en las que un término se expresa en función de términos anteriores. La sucesión de Fibonacci es un claro ejemplo de sucesiones recurrentes; hasta ahora no ha sido posible encontrar su expresión general. De manera recurrente podemos expresar esta sucesión como “cada término se obtiene a partir de la suma de los dos términos anteriores”, así:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Actividad Nro. 4: Una falacia geométrica

Duración: 15 min.

Utiliza el papel cuadriculado para trazar un rectángulo cuyos lados midan 8 y 21 unidades de longitud. Recórtalo por las marcas que se muestran en la figura, y con las piezas que queden construye un cuadrado cuyo lado mida 13.



- Calcula el área del rectángulo
- Calcula el área del cuadrado
- ¿Son iguales las áreas?
- ¿Qué está sucediendo?
- ¿Es correcto el resultado que obtuviste?
- ¿Tendrá algo que ver que 8, 13 y 21 sean números consecutivos de la sucesión de Fibonacci?

Actividad Nro. 5: La relación áurea

Duración: 20min.

Considera el siguiente castillo de números fraccionarios:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} & 1 + \frac{1}{1+1} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}} & \dots
 \end{array}$$

Realiza las operaciones que sean necesarias y obtén el valor del castillo cada vez que descendas un escalón. Anota los resultados en la siguiente tabla:

| | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escalón | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Valor | | | | | | | | |

¿Qué regularidades observas en estos números fraccionarios?

Realiza las divisiones en cada caso y compara su valor con el de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61804\dots$

Escribe lo que observas

A este valor se le denomina **relación áurea**.

4.6 El triángulo de Pascal

Objetivo: Identificar regularidades y patrones de comportamiento a través del estudio de secuencias gráficas y numéricas.

Indicadores de logro

- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Propone estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.

| Contenido | | |
|---|---|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Triángulo de Pascal Sucesión Términos de una sucesión Término general ó n-ésimo Números triangulares Sucesión de Fibonacci Álgebra Productos notables Polinomio | <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. • Noción y significado de la variable (como letra y como números generalizados). • Deducir el término general de una sucesión y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general. • Búsqueda de | <ul style="list-style-type: none"> • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones |

| | | |
|--|--|---|
| | propiedades, regularidades y relaciones entre figuras dadas y sus transformadas por los movimientos. | a los problemas planteados. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |
|--|--|---|

Estándares relacionados

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos.

Introducción

Existen muchos conceptos y procedimientos matemáticos que se pueden representar en el triángulo de Pascal. Este triángulo fue descubierto por el matemático italiano Niccolò Fontana (1500-1557), apodado tartaglia, y trabajado también por los chinos; pero fue B. Pascal quién encontró un gran número de propiedades que se podían extraer del triángulo, relacionadas con las sucesiones y el cálculo de probabilidades. A continuación estudiaremos en profundidad varias propiedades de este curioso triángulo, mediante una actividad adaptada de Echavarría, C. & Acevedo, A. (2000).

El triángulo de Pascal

Blaise Pascal nació en Francia en 1623. Fue un niño prodigio, fascinado por las matemáticas. Cuando Pascal tenía 19 años, inventó la primera máquina de calculadora que realmente funcionó. Esto era algo que el matemático Fibonacci había intentado hacer antes, pero no le funcionó.



Uno de los temas que le interesaban a Pascal, era la probabilidad de que un evento ocurriera. Su interés fue impulsado por un apostador, el cuál le pidió a pascal que lo ayudara para adivinar mejor acerca de cuáles resultados tenían la mayor probabilidad de ocurrir cuando se lanzaban dos dados.

Al realizar sus investigaciones, Pascal produjo un arreglo triangular de números que ahora lleva su nombre. El arreglo era conocido por los chinos 300 años antes de Pascal, pero fue el quién lo desarrolló completamente. El triángulo de pascal es un arreglo triangular de filas. Cada fila empieza y termina con un "1". La primera fila contiene sólo el número 1. En la segunda fila se tienen dos elementos, que de acuerdo con lo anterior serán dos unos. A partir de la tercera fila cada número, exceptuando los extremos de la fila, es la suma de los números escritos justamente encima de él.

Actividad de repaso

Duración: 30 min.

- ¿Que son números triangulares?

- Completemos la sucesión que relaciona los números triangulares:

1, 3, 6, __, __, __, __, __,

- ¿Qué es un producto notable? Ejemplifique.

- ¿Qué es un binomio? ¿Y un polinomio? Ejemplifique.

- ¿Qué es un coeficiente?

- Observa y completa la siguiente sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, __, __, __, __,

¿Qué nombre recibe la sucesión anterior? Describe algunas propiedades.

¿En qué áreas del conocimiento y con qué fenómenos de la vida cotidiana podemos asociar esta sucesión?

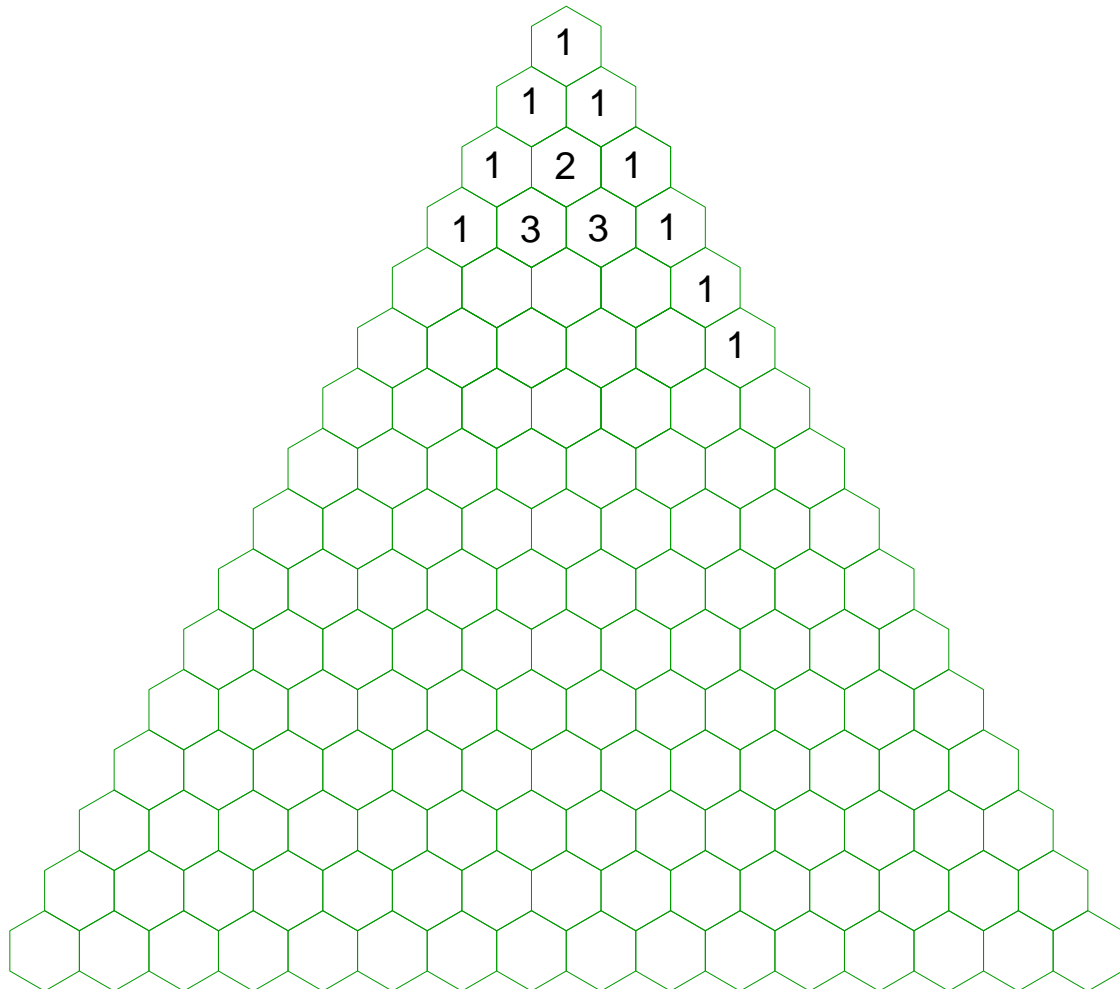
Actividad de clase

Duración: 120 min. (2 horas)

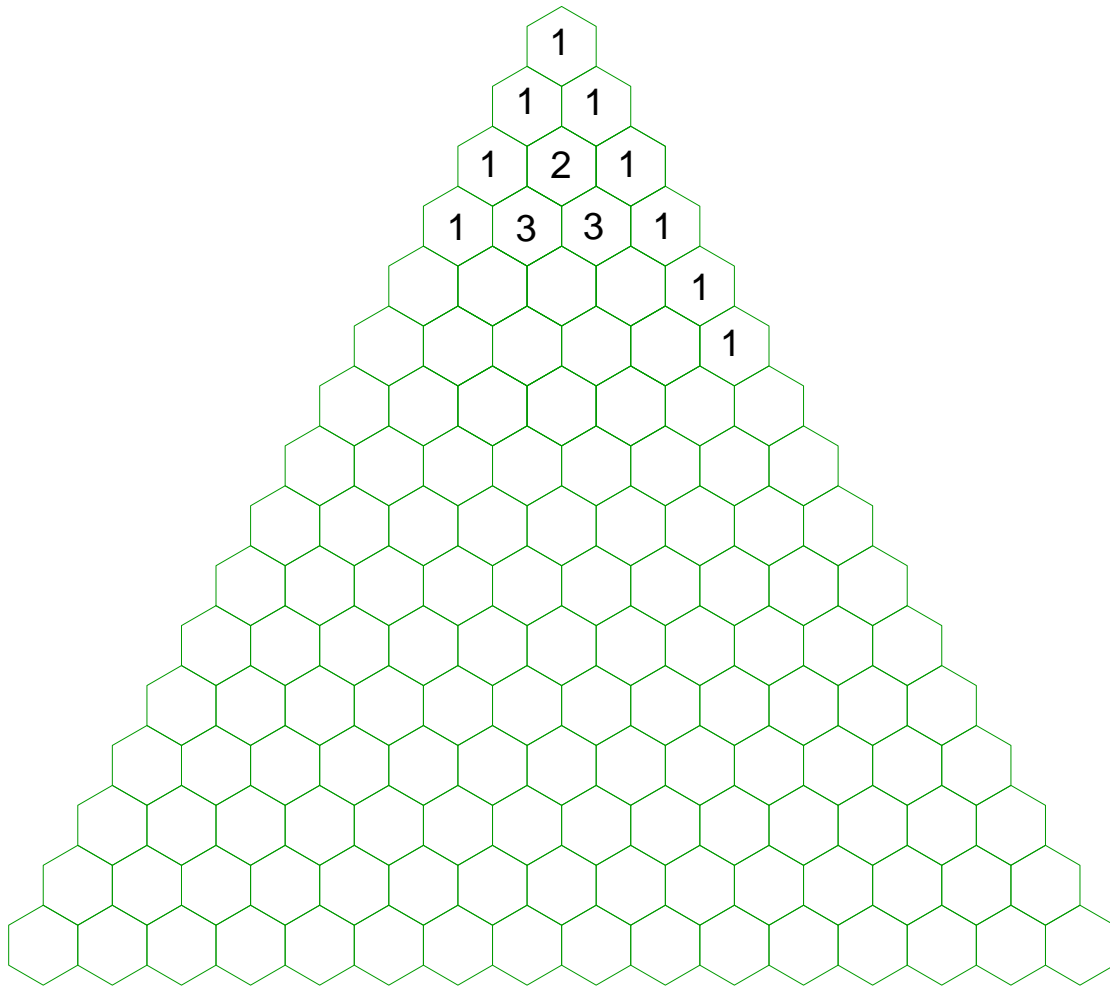
Materiales: Cubos de madera numerados (para construir el triángulo de pascal), colores, lápiz y borrador

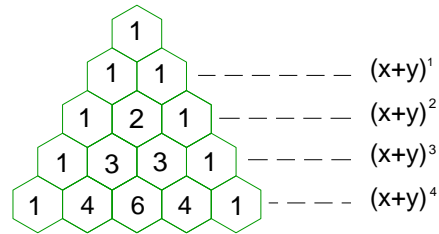
1. En la figura que hay a continuación, ¿puedes encontrar alguna relación entre los números que están allí ubicados? ¿Cuál es?
2. Con la relación que encontraste llena los demás hexágonos que se encuentran en la figura.
3. Después de completar la figura, escoge dos colores y colorea con uno de ellos los números impares y de otro color los números pares. ¿Qué observas?
4. ¿Qué crees que pasaría si coloreamos de un solo color los múltiplos de tres? ¿Y los múltiplos de cinco?
5. Observa la tercera diagonal del triángulo de Pascal, los números que se encuentran allí son: 1, 3, 6,.... ¿Se te hacen familiares dichos números? ¿Cuál es su ley de formación?
6. ¿Puedes encontrar otras secuencias interesantes? Escríbelas.

Figura 4-3: Triángulo de Pascal



7. Cualquier diagonal que empiece en un extremo del triángulo, y de cualquier longitud, cumple la siguiente propiedad: “La suma de todos los números que la integran se encuentra justo debajo del último de ellos, en la diagonal contraria”.





A partir de la segunda fila, el triángulo de Pascal nos muestra los coeficientes que resultan de desarrollar estos productos notables.

A partir de la observación anterior, completa la siguiente tabla y encuentra el término general que nos permitirá desarrollar cualquier binomio.

| Producto notable | Desarrollo a partir del Triángulo de Pascal |
|------------------|---|
| $(x + y)^1$ | $x + y$ |
| $(x + y)^2$ | $x^2 + 2xy + y^2$ |
| $(x + y)^3$ | |
| $(x + y)^4$ | |
| | |
| $(x + y)^6$ | |
| \vdots | \vdots |
| $(x + y)^n$ | |

9. Una forma alternativa de representar el triángulo de pascal

| | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 1 | | | | | | | 1 | |
| 1 | | | | | | | | 1 |

A partir del arreglo anterior, describe un procedimiento para visualizar los primeros términos de la sucesión de Fibonacci

4.7 Actividad de profundización I

Objetivos

- Identificar regularidades y patrones de comportamiento a través del estudio de secuencias gráficas y numéricas.
- Resolver problemas relacionados con las sucesiones, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización.

Indicadores de logro

- Propongo estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Posee capacidad para expresarse con claridad, usando un vocabulario adecuado.

| Contenido | | |
|--|--|--|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Sucesión Números poligonales Números Oblongos Números tetraédricos Números Piramidales Término general ó n-ésimo Fórmulas de recurrencia Triángulo (ángulo) Rectángulo (área) Cubo Vértices Arista Volumen Proporcionalidad Leyes de formación | <ul style="list-style-type: none"> • Deducir el término general de una sucesión y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general. • Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones entre figuras dadas y sus transformadas por los movimientos. • Codificación y decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico. • Noción y significado de | <ul style="list-style-type: none"> • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las |

| | | |
|--|---|---|
| | <p>la variable (como letra y como números generalizados).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. | <p>regularidades que aparecen en conjuntos numéricos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Asume una posición crítica y de respeto frente a las opiniones de los demás compañeros, argumentando su punto de vista. |
|--|---|---|

Estándares relacionados

- Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos.
- Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos
- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas

Reflexión

Cuentan que hubo una vez una reunión de herramientas para arreglar sus diferencias. El martillo ejerció la presidencia, pero la asamblea le notificó que tenía que renunciar. ¿La causa? ¡Hacía demasiado ruido! Y además se pasaba el tiempo golpeando. El martillo aceptó su culpa, pero pidió que también fuera expulsado el tornillo. Dijo que había que darle muchas vueltas para que sirviera de algo. Ante el ataque, el tornillo aceptó también, pero a la vez pidió la expulsión de la lija. Hizo ver que era muy áspera en su trato y siempre tenía fricciones con los demás. Y la lija estuvo de acuerdo, a condición de que fuera expulsado el metro que siempre se la pasaba midiendo a los demás con su medida, como si fuera el único perfecto. En eso encontró el carpintero, se puso el delantal e inició su trabajo. Utilizó el martillo la lija, el metro y el tornillo.

Finalmente la tosca madera se convirtió en un lindo mueble. Cuando la carpintería quedó nuevamente sola, la asamblea reanudó la deliberación. El serrucho tomó la palabra y dijo: “Señores, ha quedado demostrado que tenemos defectos, pero el carpintero trabaja con nuestras cualidades. Eso es lo que nos hace valiosos. Así que no pensemos más en nuestros puntos malos y concentrémonos en la utilidad de nuestros puntos buenos”. La asamblea encontró que el martillo era fuerte, el tornillo unía y daba fuerza, la lija era especial para afinar limar asperezas, y que el metro era preciso y exacto. Se sintieron entonces un equipo capaz de producir muebles de calidad. Se sintieron orgullosos de sus fortalezas y de trabajar juntos.

Nicolás Sierra Echeverry (2001).

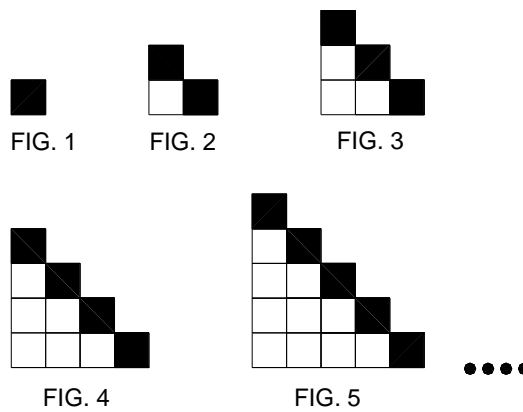
Reflexión

Actividades

Duración: 120 min (2 horas)

Situación Nro. 1

Responda las preguntas 1 a 7 de acuerdo con el siguiente gráfico. Adaptado de Múnera, J. (2000).



1.1. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura 8?

1.2. ¿De qué otra manera podemos expresar el total de mosaicos de cada figura?

1.3. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura 20?

1.4. ¿Cuál será una ley de formación para el total de mosaicos de la figura de cualquier posición?

1.5. ¿Cuántos mosaicos sombreados deberá haber en la figura 100?

1.6. ¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura 20?

1.7. ¿Si unimos cada dos figuras consecutivas de modo que sólo se intercepten en su frontera, que tipo de figuras podemos obtener? Haz una representación de algunas de ellas.

1.7.1. ¿Estas nuevas figuras, cuántos mosaicos tienen respectivamente? ¿A qué clase de números corresponden?

1.7.2. ¿En cada una de estas nuevas figuras cuántos mosaicos sombreados hay? ¿Cuántos habrá en la décima figura? ¿Y en la figura 25?

1.7.3. ¿Cuántos mosaicos blancos deberá haber en la figura 12?

1.7.4. Si una de estas nuevas figuras tiene 64 mosaicos en total, ¿cuántas figuras tiene cada una de las figuras iniciales que la conforman?

Situación Nro. 2. Adaptado de ICFES (2002).

Responde las preguntas 1 a 3 de acuerdo con la siguiente información.

Observa los siguientes dibujos. Se tomó una forma rectangular a la que se le ha ido aumentando una unidad de longitud y una unidad de área por cada lado, conservando la misma forma rectangular.

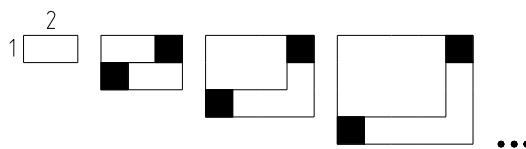


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

2.1. Realiza una representación gráfica de las figuras que van en la 5ª, 6ª y 7ª posición de la secuencia.

2.2. Escriba la relación que se puede establecer entre las respectivas áreas al variar en una unidad las dimensiones.

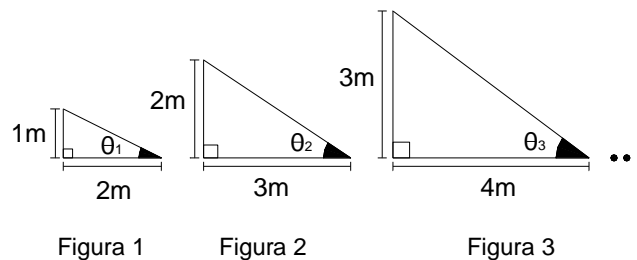
2.3. Al aumentar las dimensiones del rectángulo en una unidad de longitud, ¿en cuántas unidades aumenta el perímetro de la nueva forma rectangular? Argumente su respuesta.

2.4. Al agregar por cada lado una unidad de área, ¿en cuánto aumenta la nueva forma rectangular obtenida con respecto a la inmediatamente anterior?

Situación Nro. 3. Adaptado de ICFES (2001).

Responda las preguntas 1 a 3 de acuerdo con la siguiente información.

Observe la siguiente sucesión de triángulos. Los puntos suspensivos significan que la sucesión de triángulos continúa.



3.1. ¿Cómo se puede determinar la medida de la base de cualquier triángulo n de la sucesión?

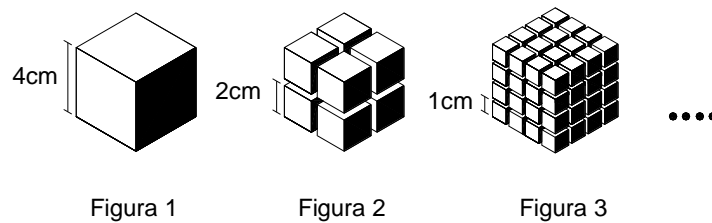
3.2. ¿Se puede inferir que los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ de los triángulos de la sucesión miden lo mismo? Argumenta tu respuesta.

3.3. Proponga un procedimiento para modificar la sucesión de triángulos de tal forma que la medida de los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ sea siempre la misma.

Situación Nro. 4

Responda las preguntas 4.1. a 4.5. de acuerdo con la siguiente información.

Cada figura se forma a partir de un cierto número de cubos, que tendrán de arista la mitad de longitud de la arista de los cubos que componen la figura anterior, como se ilustra a continuación.



4.1. ¿Qué se puede afirmar de la superficie total de la figura 3 en relación con la superficie total de la figura 1?

4.2. A medida que va aumentando el número de cubitos en cada nueva figura, resultan cubos más pequeños; ¿qué podemos afirmar acerca de la superficie y el volumen de estos nuevos cubos?

4.3. ¿Qué ocurre con el volumen de cada nueva figura? Argumente su respuesta

4.4. Responda falso (F) o verdadero (V) en las siguientes afirmaciones. Si es falsa (F) argumente su respuesta.

En la figura 2 se puede afirmar que el número de vértices:

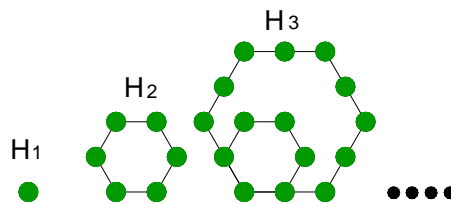
- Es múltiplo del número de cubos que conforman la figura ()
- Es inversamente proporcional al número de cubos que conforman la figura ()
- Es equivalente al número de cubos que conforman la figura elevado al cuadrado ()
- Excede en ocho el número de cubos que conforman la figura ()

¡Más números poligonales!

En secciones anteriores trabajamos con los números triangulares, cuadrados, y pentagonales. Pero existen más clases de números, por ejemplo los números hexagonales, heptagonales, etc. A continuación analizaremos en detalle cada uno de ellos y finalmente se realizará una actividad de sistematización.

1. Los números hexagonales

Figura 4-4: Números hexagonales



1.1. ¿Qué es un número hexagonal?

1.2. ¿Cuántos puntos tendrá H₄? Dibújalos. _____

1.3. Construye los números hexagonales llenando la siguiente tabla (de acuerdo al número de puntos de cada figura)

| | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| hexagonales | 1 | | | | | |

2. De acuerdo con lo visto anteriormente (en la guía N° 4) completa la siguiente tabla que relaciona los números naturales y los poligonales:

| Naturales | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | n |
|--------------|---|---|----|----|---|---|---|---|-----|----|----|----|---|
| Triangulares | 1 | 3 | 6 | | | | | | | | | | |
| Cuadrados | 1 | 4 | | | | | | | | | | | |
| Pentagonales | 1 | 5 | | | | | | | | | | | |
| Hexagonales | 1 | 6 | 15 | 28 | | | | | 153 | | | | |
| Heptagonales | 1 | 7 | | | | | | | | | | | |
| Octagonales | | | | | | | | | | | | | |
| Nonagonales | | | | | | | | | | | | | |
| Decagonales | | | | | | | | | | | | | |

3. Ahora, encontremos una expresión general para los números poligonales, completando la siguiente tabla, donde sistematizaremos toda la información obtenida hasta el momento.

| Tipo de número | Ley de formación | Transformemos la expresión |
|----------------|------------------|----------------------------|
| Triangular | | |
| Cuadrado | | |
| Pentagonal | | |
| Hexagonal | | |
| Heptagonal | | |
| | | |

| | | |
|-------------|--|--|
| Octagonales | | |
| Nonagonales | | |
| Decagonales | | |

En general, los números poligonales son números que se pueden expresar de la forma:

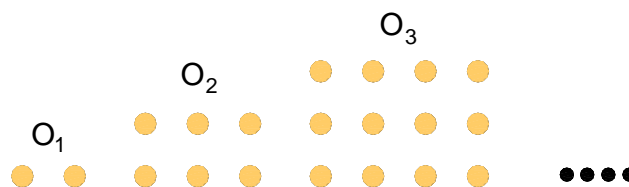
$$n + \frac{n(n-1)b}{2}$$

donde b = prefijo 2. Para los números triangulares el prefijo es *Tri*, es decir: 3.

4. Números oblongos

Existen más números poligonales o **figurados**. Los números **oblongos** por ejemplo, son números rectangulares en los que la dimensión de un lado es una unidad mayor que el otro.

Figura 4-5: Números oblongos



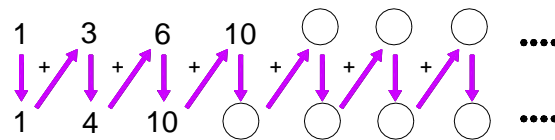
4.1. Dibuja los dos números siguientes ¿Cuáles son?

4.2. Deduce la ley de formación para cualquier número oblongo.

4.3. A partir del segundo número rectangular, pueden descomponerse de varias formas, busca leyes de formación y expresa algebraicamente como se puede obtener el n-esimo número rectangular.

5. Los números tetraédricos. Adaptado de Mesa, O. (1998).

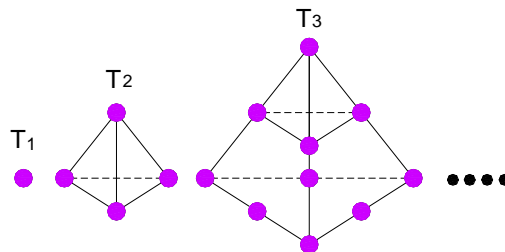
Estos números resultan al sumar iterativamente los números triangulares y representarlos adecuadamente en el espacio. Analicemos el siguiente esquema:



Sigue el procedimiento y escribe dentro del círculo el número que continua la secuencia.

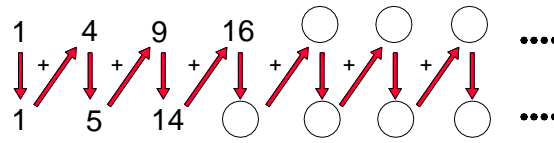
Ahora, observemos la representación gráfica de estos números.

Figura 4-6: Números tetraédricos



5.2. Dibuja el 4to número tetraédrico.

6. Los números piramidales



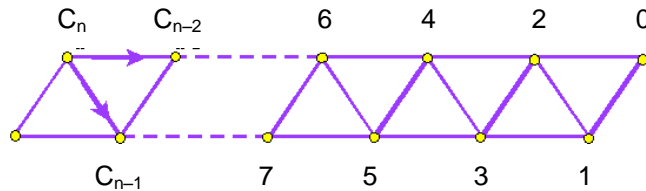
6.1. Sigue el procedimiento y escribe dentro del círculo los números que continúan la secuencia.

6.2. ¿Cuál es la representación gráfica de los números piramidales?

6.3. Dibuja el siguiente número piramidal.

Diferentes caminos

1. Averiguar el número de caminos distintos que se pueden tomar desde los vértices numerados para llegar hasta 0 (no se vale retroceder).



En el esquema se muestra que $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$ (cada término es la suma de los dos anteriores)

2. Según esto la secuencia es: __, __, __, __, __, ...

3. ¿Conoces estos números? ¿A qué sucesión corresponden? _____

4.8 Progresiones aritméticas

Hasta el momento hemos estudiado diferentes tipos de sucesiones, la forma de encontrar su término general o si no es el caso, su fórmula de recurrencia. Ahora, estudiaremos en detalle dos tipos de sucesión: *Las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas*, en la presente guía se trabajarán los conceptos de diferencia, término general e interpolación en una progresión aritmética. Pero antes deberá realizarse una actividad de repaso sobre algunos temas previos para el desarrollo del nuevo tema.

Objetivo: resolver problemas relacionados con las sucesiones, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización.

Indicadores de logro

- Identifica el término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.
- Propone estrategias para solucionar situaciones planteadas.

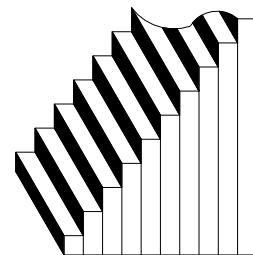
| Contenido | | |
|--|--|--|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Término General Progresión aritmética Diferencia Ecuación perímetro Interpolación Medios Aritméticos | <ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las progresiones aritméticas, obtener su término general y hallar un término cualquiera, conocidos el primer término y la diferencia. • Interpolar n términos entre dos números dados para obtener una progresión aritmética. • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. | <ul style="list-style-type: none"> • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |

Estándares relacionados

- Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades.
- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)

Escalinata de Jacob, Adaptado de Fleming, W. (s.f.)

En el rascacielos que Jacob posee, hay una escalinata que va del nivel del suelo a la cima. El primer escalón tiene 8m de alto. Después de este, cada escalón mide 9m de altura. Describe un procedimiento para calcular la altura de los siguientes 3 escalones. ¿A qué altura estará el escalón 800?



Actividad de repaso

- ¿Que es un polígono regular? Ejemplifica.
- ¿Qué es una sucesión o secuencia matemática?
- ¿Qué es perímetro? ¿Cómo se calcula? Ejemplifica.

- Resuelve las siguientes ecuaciones:

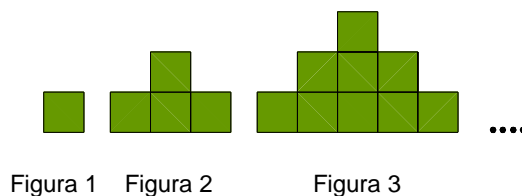
(a) $3n-1 = -1+7/3$ (b) $225n = 2700$ (c) $820n = 10n +30(50-n)$

(d) $\frac{3}{n-1} + 5 = \frac{4-n}{n-1}$ (e) $\frac{3}{2}n - 5 = \frac{3}{2}n + 4(n-1)$

Progresiones aritméticas

Cálculo de la diferencia

1. A partir de la siguiente secuencia de figuras, responder las preguntas 1.1. a 1.4.



1.1. ¿Cuántos cuadrados habrá en la figura 9? ¿Y en la figura 13? _____

1.2. Escriba una expresión que permita calcular el número de cuadrados de cualquier figura de esta forma. _____

1.3. ¿Cuál es el perímetro de la 5ª figura? _____

1.4. Escribe la sucesión que relaciona el perímetro de las primeras 10 figuras:

1, __, __, __, __, __, __, __, __, __,

El primer término es ____

El segundo término se obtiene al sumarle ____ al primer término

El tercer término se obtiene al sumarle ____ al segundo término

El cuarto término se obtiene al sumarle ____ al tercer término

Un procedimiento similar se emplea para obtener el quinto término.

Si observas bien, cada término de esta sucesión se puede obtener a partir del anterior sumando o restando un número fijo, que para este caso es ____

A este número fijo lo llamaremos **diferencia** y lo denotaremos por la letra **d**.

Ahora, podemos definir lo que es una progresión aritmética.

Progresión aritmética: Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada elemento se obtiene sumando al anterior una cantidad fija que denominamos diferencia (d).

2. Identifica cuales de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y determina su diferencia.

(a) 5, 7, 9, 11,

(b) 1, 4, 9, 16,

(c) $1/2, 3/2, 5/2, \dots$

(d) 1, 1, 2, 3, 5, 8,

(e) 1, 3, 6, 10,

(f) 4, 8, 12, 16, 20,

(g) $b+3, b+7, b+11, b+15, \dots$

(h) $m^2/3, 4m^2/3, 7m^2/3, \dots$

2.1. Propone 3 ejemplos de progresiones aritméticas y calcula su diferencia.

Término general de una progresión aritmética

Observemos en la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$. Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$a_6 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$a_n = \underline{\hspace{4cm}}$$

3. Ahora, con los conceptos estudiados hasta el momento soluciona la situación que inicialmente se había planteado sobre “la escalinata de Jacob”.

4. Resuelve los siguientes ejercicios:

- (a) Hallar el décimo término de una progresión aritmética cuyos primeros términos son 4, 11, 18.
- (b) Hallar el 17º de $3/8$, $11/24$,
- (c) Hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que el octavo término es $3/4$ y el noveno término es 1
- (d) Hallar la diferencia de la progresión $-1, \dots, -4$ donde -4 es el décimo término.
- (e) El 92º término de una progresión aritmética es 1050 y el primer término es -42 . Hallar la razón.
- (f) ¿Cuántos términos tiene la progresión $4, 6, \dots, 30$?
- (g) El primer término de una progresión aritmética es $26/5$, el 2º término es 6 y el último término es 18. Hallar el número de términos de la progresión.

5. En una carrera, un hombre avanza en el primer segundo 6m y en cada segundo posterior avanza 25cm más que en el anterior. ¿Cuántos metros avanzó en el octavo segundo? Encuentra una expresión general para calcular la cantidad de metros que avanza el corredor en cualquier segundo.

Interpolación de medios aritméticos

En la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, llamamos **medios aritméticos** a los términos comprendidos entre a_1 y a_n , es decir, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} . **Interpolación de medios aritméticos**, es formar una progresión aritmética conociendo el primero y último término.

4.9 Suma de una progresión aritmética

Como introducción al tema “Sumas de Progresiones Aritméticas”, se hará una lectura inicial para describir la forma en la cual el gran matemático Carl F. Gauss logró sumar de manera ingeniosa los números del 1 al 100 a pesar de su corta edad. Seguidamente, se analiza la expresión general para encontrar esta y otras sumas de progresiones

aritméticas a través de una serie de situaciones. Para analizar lo visto en la sección anterior, se propone inicialmente una actividad de repaso relacionada con progresiones aritméticas.

Objetivo: Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.

Indicadores de logro

- Propongo estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.

| Contenido | | |
|--|---|--|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Sucesión Término general Progresión Aritmética Diferencia Interpolación Suma de una Progresión Aritmética | <ul style="list-style-type: none"> • Deducir el término general de una sucesión y calcular algunos de sus términos, conociendo el término general. • Reconocer las progresiones aritméticas, obtener su término general y hallar un término cualquiera, conocidos el primer término y la diferencia. • Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética. • Interpolar n términos entre dos números dados para obtener una progresión aritmética. • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. | <ul style="list-style-type: none"> • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas. • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |

Estándares relacionados

- Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades.

- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética

Actividad de repaso

Duración: 20 min.

1. Considere las siguientes sucesiones numéricas. Al detectar el patrón de comportamiento llene los espacios en blanco. ¿Qué tienen en común estas tres sucesiones? ¿Encuentre el término general de cada una?

(a) 8, 5, 2, -1, __, __, __, (b) 1, 4, 7, __, __, __, (c) 4, 4.2, 4.4, 4.6, __, __, __,

2. Interpolar 4 medios aritméticos entre -5 y 15. Para solucionar estos ejercicios, halle la diferencia de la progresión, luego, para saber el número de términos, sumamos al primero la diferencia común, y obtenemos el segundo, y sumando la diferencia al segundo obtenemos el tercero, y así sucesivamente hasta llegar a 15. Copie la progresión que ha obtenido. Los números allí, entre -5 y 15 son los medios aritméticos.

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

(a) Si el primer término de una progresión aritmética es $\frac{1}{3}$ y el 19º término es $\frac{121}{12}$, calcula la diferencia.

(b) El 8º término de una progresión aritmética es 57 y la diferencia común es $-\frac{4}{5}$, ¿Cuál es el primer término?

(c) El vigésimo cuarto término de una progresión aritmética es 890 y la diferencia común es 123 ¿cuál es el primer término?

(d) Para que valores de k, los tres números $k-2$, $2k-6$, $4k-8$, en este orden, formarán una progresión aritmética?

(e) Interpolar 6 medios aritméticos entre 7 y 77.

(f) Un cierto pueblo tiene 5.000 habitantes. Si esta población aumenta 5% cada año, ¿Cuál sería la población aproximada, al cabo de 10 años?

Lectura inicial

El pequeño Gauss

Gauss (1777-1855) es, sin duda, uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos. Cuenta la historia, que cuando Gauss tenía solamente 7 años de edad y asistía a la escuela primaria, uno de sus maestros, para castigarlo porque no ponía atención a la clase, le pidió que sumara todos los números del 1 al 100. El maestro pensaba que el niño tardaría varias horas en resolver el problema pero, para su sorpresa, a los cinco minutos de haberle puesto el ejercicio, Gauss le entregó la solución. Sorprendido por la rapidez, el maestro pidió a Gauss que le explicara el procedimiento que había seguido. En lugar de sumar todos los números, uno por uno, Gauss hizo lo siguiente:



Acomodó en una fila todos los números del 1 al 100 y debajo de esa fila acomodó todos los números del 100 al 1. Después sumo las dos filas.

| | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | ... | 98 | 99 | 100 |
| 100 | 99 | 98 | ... | 3 | 2 | 1 |
| 101 | 101 | 101 | ... | 101 | 101 | 101 |

Tenía entonces 100 veces el número 101, así que se dio cuenta que si multiplicaba 100 por 101 obtendría dos veces la suma de todos los números del 1 al 100, por tanto si quería obtener la suma de todos los números del 1 al 100 una sola vez, bastaría con dividir entre 2 el resultado de la multiplicación. Así:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = \frac{(100)(101)}{2} = 5,050$$

Tenía entonces 100 veces el número 101, así que se dio cuenta que si multiplicaba 100 por 101 obtendría dos veces la suma de todos los números del 1 al 100, por tanto si quería obtener la suma de todos los números del 1 al 100 una sola vez, bastaría con dividir entre 2 el resultado de la multiplicación.

Así: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = \frac{(100)(101)}{2}$; ó lo que es lo mismo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = 5.050$$

Ahora, utilizando esta ingeniosa forma de sumar vamos a deducir una expresión general que nos permita calcular la suma de cualquier progresión aritmética conociendo simplemente el primer y último término.

Sugerencia: Lee atentamente el siguiente procedimiento y compárelo con el ejemplo de la lectura inicial.

Supóngase que a_1, a_2, a_3, \dots es una progresión aritmética y sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Escribese esta suma dos veces, una “de ida” y otra “de regreso” y después súmense así:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

Cada grupo de la derecha tiene la misma suma, o sea $a_1 + a_n$.

Por ejemplo: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$.

Hay n de tales grupos y así: $2S_n = n(a_1 + a_n)$, luego: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Donde S_n es la expresión general para calcular la suma de una progresión aritmética.

En el siguiente ejemplo se ha calculado la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética $2n - 1$ (expresión para los números impares).

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

Si se suma el primer término con el último, el resultado es ____

Al sumar el segundo término con el penúltimo, la suma es ____

De igual forma sucede al sumar el tercer término con el tras antepenúltimo, su suma es ____.

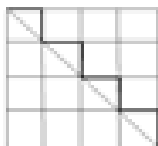
En general, “la suma de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos”.

1. Ahora, describe un procedimiento que te permita calcular la suma $2+4+6+8+\dots+200$ (la suma de los primeros cien números pares) y escribe el valor de la suma.
2. Si el 1° y el 13° términos de una sucesión aritmética son -5 y 19 respectivamente, encuentra el término 40° y calcula la suma de estos primeros términos.
3. Calcula la suma de los primeros cien números impares. Haz lo mismo con los primeros cien pares y compara los valores. ¿Qué observas? (ver ejercicio 1)
4. Calcula el valor de x en la progresión aritmética $1/2, x, 5/6$ y encuentra la suma de los 6 primeros términos.
5. La suma de los 7 primeros términos de una P. A. es 98 y la suma de los primeros 12 términos es 288 . Encuentra la suma de los primeros 20 términos.
6. ¿Cuántos términos debemos tomar de una P. A. cuyo primer término es $1/2$ y cuya diferencia común es $1/3$ para que la suma de los términos sea 48 ?
7. Calcula las siguientes sumas ¡Cuidado al agrupar cada término!

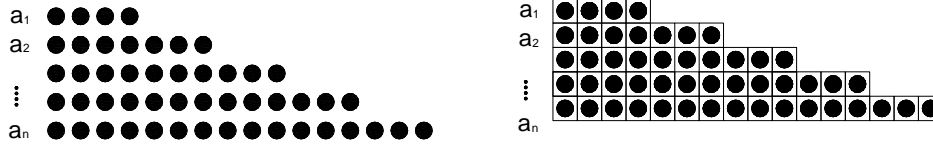
(a) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \dots - 99^2 + 100^2$

(b) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right)$

Los griegos sumaban la sucesión de los números naturales de forma geométrica con un gráfico como el siguiente:



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$



También la suma de los términos de una progresión aritmética cualquiera la hacían gráficamente por analogía con el área del trapecio.

4.10 Notación sigma (Σ)

Objetivo: Resolver problemas relacionados con las sucesiones, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización

Indicadores de logro

- Propongo estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Es independiente al realizar sus trabajos y conoce sus habilidades y limitaciones.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.

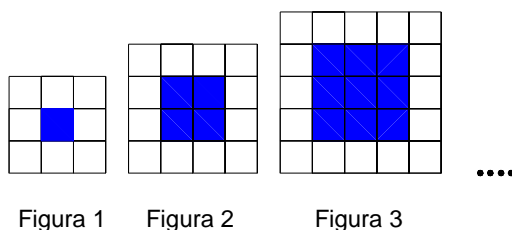
| Contenido | | |
|---|---|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Suma Sucesión Operador Sumatoria Notación sigma Índice Propiedades de la sumatoria | <ul style="list-style-type: none"> • Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética. • Codificación y decodificación entre los lenguajes numérico (tablas), algebraico y gráfico. | <ul style="list-style-type: none"> • Sensibilidad e interés ante las informaciones y mensajes de tipo numérico. • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas. • Valoración de la precisión, |

| | | |
|--|--|--|
| | <ul style="list-style-type: none"> • Noción y significado de la variable (como letra y como números generalizados). | <p>simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. |
|--|--|--|

Estándares relacionados

- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética.
- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
- Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas

Introducción



1. Cada figura está conformada por uno o más cuadrados unitarios y el lado de cada cuadrado mayor construido, se aumenta en una unidad al cuadrado anterior. Siguiendo el patrón descrito en la figura:

- 1.1. ¿Cuál es la cantidad de cuadrados unitarios, en la periferia, que tendrá la figura N° 5?
- 1.2. ¿Cuál es la cantidad de cuadrados unitarios, que no están en la periferia de la figura 15?
- 1.3. Escribe una expresión general que permita determinar el número de cuadrados unitarios (sombreados) de cualquier figura.

Existe una forma abreviada de expresar sumas muy grandes de n sumando o incluso sumas infinitas. La primera palabra de la letra suma es s , y la letra griega para s es Σ (**sigma**). El uso de la letra sigma se debe a Euler, que empezó a utilizarla en 1755 con estas palabras "summam indicabimus signo Σ ". Ahora observemos la nueva simbología que utilizaremos y algunos de sus elementos:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

La variable i es el **índice de suma** al que se le asigna un valor inicial llamado **límite inferior**, m . La variable i recorrerá los valores enteros hasta alcanzar el **límite superior**, n . Necesariamente ha de cumplirse que $m \leq n$. Por ejemplo si queremos expresar la suma de los diez primeros números naturales podemos hacerlo así:

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10$$

2. Encontramos el valor de las siguientes sumatorias:

2.1. $\sum_{i=1}^3 i^2$ 2.2. $\sum_{i=2}^5 \frac{1}{i-1}$ 2.3. $\sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i}$

3. Ahora, Representa con una sumatoria cada una de las siguientes sumas:

3.1. $1+3+5+\dots+19$ 3.2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}$ 3.3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{25}{26}$

3.4. $4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 104^2$ 3.5. $35 + 40 + 45 + \dots + 185$ 3.6. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{17}$

3.7. $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right)$

4. Calcule las siguientes sumas:

$$4.1. \sum_{i=2}^6 i^2 \quad 4.2. \sum_{i=1}^4 \frac{2}{i} \quad 4.3. \sum_{i=1}^{100} (3i + 2) \quad 4.4. \sum_{i=2}^{100} (2i - 3)$$

Encuentre una forma práctica de solucionar los ejercicios 4.3 y 4.4 y describa el procedimiento.

$$4.5. \sum_{i=1}^6 2^i \quad 4.6. \sum_{i=1}^5 (i^2 - 2i) \quad 4.7. \sum_{i=1}^{101} (2i - 6) \quad 4.8. \sum_{i=3}^{102} (3i + 5)$$

$$4.9. \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i} \right) \quad 4.10. \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} \right)$$

4.11 Progresiones geométricas

Objetivos

- Resolver problemas relacionados con las sucesiones, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización
- Calcular la suma y el producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica.

Indicadores de logro

- Propongo estrategias para solucionar situaciones planteadas.
- Identifica el término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.

| Contenido | | |
|--|--|--|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Sucesión Término general Progresión geométrica Suma de una P. G. Razón Progresión decreciente | <ul style="list-style-type: none"> • Determinar si una progresión es geométrica o no, hallar su término general y obtener un término cualquiera conociendo el primer término y la razón. • Calcular el producto y la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. • Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente. • Reconocimiento de regularidades y patrones en secuencias numéricas. | <ul style="list-style-type: none"> • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas. • Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a trabajos de clase. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. |

Estándares relacionados

- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión geométrica.
- Reconoce progresiones geométricas y sus propiedades.

Actividad Nro. 1: Lectura de un poema

*Al doblar la hoja por la mitad
 A la mitad
 Se encuentran dos mitades que son infinitas mitades
 La mitad
 La mitad de la mitad: un cuarto o una mitad más pequeña
 La mitad de la mitad de la mitad: un octavo
 La mitad de la mitad de la mitad de la mitad: un partido de dieciséis.
 La hoja revela el crecimiento de rectángulos decrecientes
 Uno, dos, cuatro, ocho....*

*Dos a la n creciendo
 Mitosis, árbol, cuna.
 Uno sobre dos a la n decreciendo
 Apoptosis, raíz, muerte.
 Doblar y desdoblar: cubrir espacios
 Seguir los números al infinito
 Al centro
 A la verdad
 Desde el mediodía hasta la media noche y viceversa
 De medio en medio o de cuarto en cuarto con un pedazo de tiempo fragmentado en octavas de aire*

descubriendo verdades
comparando cuartos y mitades con octavos
Y octavos con dobles y cuádruples
El cuádruplo de un cuarto es uno
Y así uno es el doble de la mitad

Un rectángulo lleno de rectángulos
infinitos rectángulos que se esfuman al
instante.

Por: Rubén Darío Henao Ciro

1. A partir de la lectura anterior, responde las siguientes preguntas:

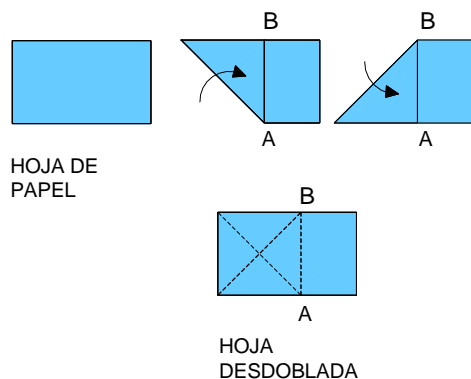
- Inventa un título para el poema leído.
- ¿Qué concepto matemático trata de describir el autor?
- Expresa en lenguaje matemático las frases escritas en los renglones 5 a 9, 14 y 16.

Actividad Nro. 2 (Adaptado de Posada, O. & Jaramillo C.; 2003)

Doblado de papel

Materiales: Tijeras, regla y papel de colores.

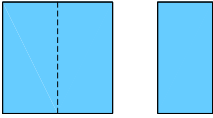
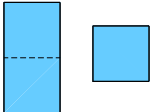
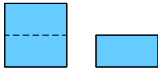


Toma una hoja de papel y realiza los siguientes dobleces:




Después de realizar el procedimiento anterior, corta la hoja en línea recta desde el punto A hasta el punto B. De esta manera, obtenemos una figura cuadrada.

Ahora, supongamos que la medida de nuestro cuadrado es la unidad; luego el área de este es uno.

2. Pasemos a descomponer esta área y completemos la siguiente tabla (en la columna 3 de la tabla, la fracción debe ser equivalente y expresarse en forma de potencias):

| Indicaciones | Fracción tomada | Fracción equivalente |
|---|-----------------|----------------------|
| <p>Del área inicial del cuadrado, tomemos:</p> <p>La mitad:</p>  | <p>_____</p> | <p>_____</p> |
| <p>Del corte anterior, tomemos la cuarta parte:</p>  | <p>_____</p> | <p>_____</p> |
| <p>Tomemos la octava parte:</p>  | <p>_____</p> | <p>_____</p> |
| <p>Continuando el proceso la siguiente fracción es:</p>  | <p>_____</p> | <p>_____</p> |
| <p>Siguiendo en forma reiterada los pliegues obtenemos:</p>  | <p>_____</p> | <p>_____</p> |

| | | |
|--|---|---|
| Finalmente:  | — | — |
|--|---|---|

3. A partir de la tabla anterior responde las siguientes preguntas:

a) Escribe la serie de números fraccionarios que has obtenido en la tabla.

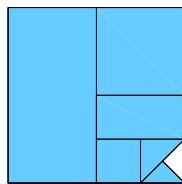
b) ¿Qué tipo de serie es?

c) ¿Cómo podemos interpretar cada término de la serie?

d) ¿Cuál es el término que ocupa la posición Nro. 10?

e) ¿Cómo se representa el n-ésimo término de esta serie?

4. Retomemos cada una de las descomposiciones del área del cuadrado y sumémoslas como en el siguiente gráfico:

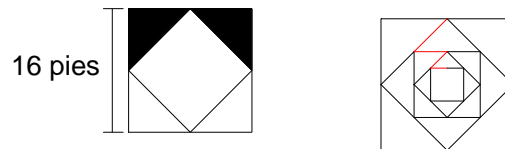


a) Aproximadamente, ¿cuál es la suma de cada una de las áreas recortadas?

b) Escribe una representación matemática para esta serie infinita.

A partir de las conclusiones anteriores soluciona la siguiente situación.

5. Los lados de un cuadrado miden 16 pies, se forma un nuevo cuadrado uniendo los puntos medios de sus lados y se sombrea dos de los triángulos laterales, como se muestra en la siguiente figura.



- 5.1. Si este proceso continúa 5 veces, ¿cuál es el área de la región sombreada?
- 5.2. Siguiendo el patrón y si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál es el área de la región sombreada?
- 5.3. Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál es la suma de la superficie de los distintos cuadrados así formados?
- 5.4. ¿Cuánto mide, cuando llevamos n cuadrados, la longitud de la línea roja? ¿Y si considerásemos a la infinitud de ellos? Realice este procedimiento para las líneas mostradas en la figura de la derecha, luego generalice.

Progresión geométrica: Es una sucesión de números en la que cada uno de los términos, salvo el primero, se obtiene cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor fijo llamado razón.

Término general de una progresión geométrica

Observemos las potencias de 10 que resultan de la sucesión $a_n = 10^{n-1}$.

1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 ,...

Cada término de esta sucesión es igual al anterior multiplicado por 10. Esta sucesión es una **progresión geométrica**. Igualmente la progresión formada en la actividad N° 2 (doblado de papel).

Ahora y Según la definición anterior, en la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$, se verifica:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$a_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ejemplos:

- ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica 3, 6, 12,...?

Solución: La razón se obtiene dividiendo un término por el anterior: $r = 6/3 = 2$.

- ¿Cuál es el quinto término de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 3$?

Solución: Podemos ir hallando cada uno de los términos (2, 6, 18, 54, 162,...) multiplicando cada término por 3. También se puede obtener directamente: $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$;
 $a_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$

Interpolación de medios geométricos

Interpolación de medios geométricos entre dos números dados a y b es formar una progresión geométrica cuyos extremos sean los números a y b .

Ejemplo: Supongamos que queremos interpolar entre 3 y 96 cuatro números a , b , c y d de manera que 3, a , b , c , d , 96 estén en progresión geométrica.

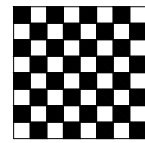
Tenemos que $a_1 = 3$, $a_6 = 96$ y $n = 6$. Aplicando la expresión del término general de una progresión geométrica, se tiene que: $a_6 = a_1 \cdot r^5$; $96 = 3 \cdot r^5$; $32 = r^5$; $r = 2$

Por tanto, la progresión geométrica es: 3, 6, 12, 24, 48, 96.

Suma de una progresión geométrica

La petición del inventor del ajedrez

Hay una antigua leyenda acerca de las sucesiones geométricas y los tableros de ajedrez. Cuando el rey de Persia aprendió a jugar ajedrez, estaba tan contento con el juego que determinó recompensar al inventor, un hombre llamado Sessa. Llamaron a Sessa al palacio, el rey prometió cumplirle cualquier petición que hiciera.



Con un aire de modestia, Sessa astutamente pidió un grano de trigo por el primer cuadrado del tablero de ajedrez, dos por el segundo, cuatro por el tercero y así sucesivamente. El rey estaba divertido con tal petición excéntrica, no obstante llamó a un sirviente y le dijo que consiguiera un costal de trigo y empezara a contar. Para sorpresa del rey pronto se dio cuenta que la petición de Sessa nunca podría ser cumplida. Toda la producción mundial de trigo por un siglo no sería suficiente. Sessa estaba pidiendo en realidad la suma: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$ granos de trigo, es decir, la suma de los primeros 64 términos de la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, ...

(Fleming, W., et al; s. f.).

A continuación se realiza una deducción de una expresión para esta suma y todas las otras que surjan de sumar términos de una progresión geométrica.

Supóngase que a_1, a_2, a_3, \dots es una progresión geométrica de razón $r \neq 1$ y sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Esta expresión puede escribirse como $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1}$. Ahora, multiplicando S_n por r , restando el resultado de S_n y utilizando un poco el álgebra para encontrar la suma, obtenemos:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} \\ rS_n = a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \\ \hline S_n - rS_n = a_1 + 0 + 0 + \dots + 0 - a_1r^n \end{array}$$

$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$, de esta forma obtenemos la expresión: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

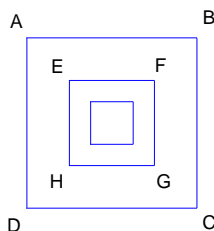
La anterior es la expresión general para calcular la suma de una progresión geométrica.

6. Los tres primeros términos de una progresión geométrica son 1/2, 1/4 y 1. Calcula la suma de los primeros 6 términos.

7. El primer término de una P. G. es 3 y el noveno es 768. ¿Cuál es la suma de los primeros 9 términos?

8. ¿Para qué valores de t los números $t-4$, $t-1$ y $2t-2$, en este orden, forman una progresión geométrica?

9. Observa la siguiente secuencia de cuadrados. El lado del cuadrado ABCD mide x unidades, el lado del cuadrado EFGH mide la mitad del lado del cuadrado ABCD, El lado del siguiente cuadrado mide la mitad del lado anterior. Si el proceso continúa indefinidamente:



9.1. Escribe una expresión algebraica para la suma de las áreas de los cuadrados de la progresión.

9.2. Escribe una expresión algebraica para la suma de todos los perímetros de los cuadrados de la progresión.

4.12 Actividad de profundización II

Objetivos

- Resolver problemas relacionados con las sucesiones, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción y la generalización
- Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.
- Calcular la suma y el producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica.

Indicadores de logro

- Participa con interés de las actividades propuestas en clase.
- Identifica el término general de una progresión aritmética y geométrica.
- Posee capacidad para expresarse con claridad, usando un vocabulario adecuado.
- Retiene y organiza información, se concentra y demuestra habilidad para argumentar la solución de un problema.

| Contenido | | |
|--|--|---|
| Conceptos | Procedimientos | Actitudes |
| Potenciación Leyes de formación Algoritmos Operador Sumatoria Sucesión Progresión geométrica Suma de una P. G. Razón Término general Progresión Aritmética Diferencia Interpolación Suma de una P. A. Diferencia Interpolación Medios Aritméticos | <ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las progresiones aritméticas, obtener su término general y hallar un término cualquiera, conocidos el primer término y la diferencia. • Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética. • Interpolar n términos entre dos números dados para obtener una progresión aritmética. • Determinar si una progresión es geométrica o no, hallar su término general y obtener un término cualquiera conociendo el primer término y la razón. • Calcular el producto y la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica y decreciente. | <ul style="list-style-type: none"> • Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones numéricas. • Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad de los lenguajes numérico, gráfico y geométrico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones. • Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades que aparecen en conjuntos numéricos. • Asume una posición crítica y de respeto frente a las opiniones de los demás compañeros, argumentando su punto de vista. |

Estándares relacionados

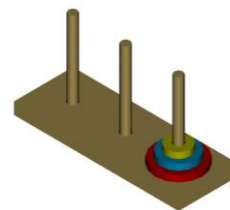
- Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades.

- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética.
- Reconoce progresiones geométricas y sus propiedades.
- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión geométrica.

Introducción

La torre de Hanoi

En 1883 empezó a venderse en Francia un antiguo rompecabezas oriental, rescatado para Occidente por el profesor N. Claus (de Siam) y cuyas primeras referencias eran los escritos del ilustre mandarín Fer-Fer-Tam-Tam. Según una leyenda india, en el Templo de Benarés, bajo el domo que marca el centro del mundo, hay una placa de latón con tres agujas de diamante. Durante la creación, Dios puso sesenta y cuatro discos de oro puro de distinto tamaño en una de las agujas, formando una torre.



Los bramanes llevan generaciones cambiando de lugar, uno a uno, los discos de la torre entre las tres agujas de forma que en ningún momento un disco mayor descansa sobre otro más pequeño. Cuando hayan conseguido trasladar todos los discos a otra aguja su trabajo estará terminado, y la torre y el templo se derrumbarán, y con un gran trueno, el mundo se desvanecerá. La versión simplificada que se vendía en Francia se componía de ocho discos de madera.

En realidad, la Torre de Hanoi y la leyenda india habían sido inventadas por el matemático francés Édouard Lucas (N. Claus de Siam es un anagrama de Lucas d'Amiens). Su compatriota, el escritor Henri de Parville amplió y adornó la leyenda poco tiempo después. A pesar de que el reto planteado es relativamente sencillo, la idea de Lucas ha demostrado ser una de las más fecundas de la historia de las matemáticas recreativas. Si no lo has hecho antes, antes de seguir leyendo tal vez deberías familiarizarte con el rompecabezas y resolverlo por ti mismo. Puedes usar un modelo real o uno de los muchos simuladores que hay disponibles en Internet (mira en los enlaces del final).

Actividad Nro. 1

Duración: 40 min.

Material: Torre de Hanoi

Descripción: Material didáctico de madera con una base rectangular, 8 arandelas (aros) de diferente tamaño y color, y tres barras incrustadas sobre la base para introducir dichas arandelas. El objetivo del juego es pasar los discos hasta la tercera barra que está libre, y con el menor número de movimientos posibles para una cantidad de discos dada. Para

iniciar puede describir un procedimiento de las secuencias de movimientos que realiza y comience con 3 discos.

Reglas

Mover un disco a la vez.

Para cambiar un disco se pueden utilizar las tres barras.

No poner un disco mayor sobre uno menor a él en ningún momento.

1. Llena la siguiente tabla que relaciona los movimientos realizados al pasar los discos a la barra y encuentra el mínimo de movimientos en cada caso.

| | | | | | | | |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº discos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Nº de movimientos | | | | | | | |
| Nº mínimo de movimientos | | | | | | | |

2. Construye un modelo matemático o expresión general o ley de formación que nos permita contestar preguntas como: Si tengo 8 discos, ¿cuál será el mínimo de movimientos que se deben realizar? ¿Y si son 9 discos? ¿Y si tenemos 64 discos?

Actividad Nro. 2: Progresiones aritméticas

3.1. En geometría, los polígonos se clasifican de acuerdo con el número de lados. Si estos polígonos son convexos, también se pueden determinar por la suma de sus ángulos internos. En un triángulo la suma de los ángulos internos es 180° , en un cuadrilátero, en un pentágono 540° . De acuerdo con este análisis complete la siguiente tabla.

| Nombre del polígono regular | Suma de sus ángulos internos (en grados) |
|-----------------------------|--|
| Triángulo | |
| Cuadrado | |
| Pentágono | |
| Hexágono | |
| Heptágono | |
| Octágono | |

| | |
|------------|---|
| Nonágono | |
| Decágono | |
| Undecágono | |
| Dodecágono | |
| ⋮ | ⋮ |
| Eneágono | |

3.2. Encontrar los tres siguientes términos para cada una de las progresiones aritméticas que se dan.

| | | | | | | | |
|----|----|---|----|----|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | | | |
| -5 | -1 | 3 | 7 | 11 | | | |

3.2.1. ¿Cómo encuentras el término que sigue? _____

3.3. En una progresión aritmética el término 1 es 2, el término 2 es 5, el término tres es 8.

3.3.1. ¿Cuál es el valor del término 6? _____

3.3.2. ¿Cuál es el valor del término 8? _____

3.3.3. ¿Cuál es el valor del término 20? _____

Operador sumatorio

Propiedades

$$\text{i. } \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{ii. } \sum_{i=1}^n c = nc \quad n : \text{constante} \quad \text{iii. } \sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$$

3.4. Utiliza las propiedades anteriores para resolver:

A. $\sum_{n=1}^4 (n^2 + 2)$

B. $\sum_{i=1}^3 \sqrt{3}(1/i)$

C. $\sum_{n=1}^3 (n^2 + 2n + 4)$

3.5. Agrupa bajo el operador sumatoria las siguientes expresiones:

A. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{15\sqrt{15}}$ B. $1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots$

Actividad Nro. 2: Progresiones geométricas

4. En una circunferencia de radio R se inscribe un cuadrado y en este una nueva circunferencia y así sucesiva e indefinidamente como se ilustra a continuación.

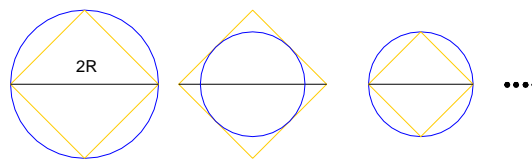


Figura 1. Figura 2 Figura 3.

Escriba una expresión algebraica para la suma de las áreas de los cuadrados de la progresión.

Escriba una expresión algebraica para la suma de todos los perímetros de los cuadrados de la progresión



Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

5. Encuentra el perímetro del copo de nieve de n capas:

6. Considera las siguientes sucesiones numéricas. Al detectar el patrón de comportamiento llene los espacios en blanco. ¿Qué tienen en común estas tres sucesiones? Encuentre el término general de cada una.

6.1. $1/2, 1, 2, 4, _, _, _, \dots$

6.2. $8, 4, 2, 1, _, _, _, \dots$

6.3. 27, 9, 3, 1, __, __, __,

7.

7.1. Interpolar los 5 medios geométricos entre -1 y $-1/64$.

7.2. Interpola 6 medios geométricos entre 4 y 8748.

8. Si usted coloca \$ 1.00, en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, \$ 2.00 en el segundo cuadro, \$ 4.00 en el tercero, \$ 8.00 en el cuarto y así sucesivamente, doblando cada vez la cantidad, determinar lo siguiente:

8.1. Calcular el número de pesos del cuadro Nro. 10, y la cantidad de pesos que se han acumulado.

8.2. Calcular lo indicado anteriormente en el cuadro No. 17.

9. La carpeta de Sierpinski

La carpeta de Sierpinski se forma quitando la novena parte central de un cuadrado de una unidad de lado. Después se suprimen los centros de los ocho cuadrados restantes, que son más pequeños, y así sucesivamente (la figura muestra los tres primeros pasos de este procedimiento).

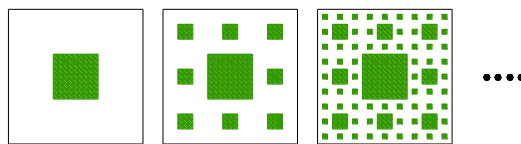


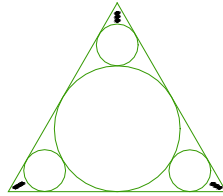
Figura 1

Figura 2

Figura 3

Demuestra que la suma de las áreas de los cuadrados que se quitaron es 1. Calcule primero la suma de los cuadrados sombreados la figura 1 y compárelo con el área del cuadrado unitario, realice el mismo procedimiento para las siguientes figuras.

10. A continuación se representa una cantidad infinita de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca otros círculos y los lados del triángulo. Si los lados del triángulo miden 1, calcula el área que ocupan los círculos.



Aplicaciones de las progresiones

La espiral de Fibonacci y la física

Las espirales de Fibonacci podrían estar relacionadas con la tensión. Los físicos podrían haber dado una respuesta a la recurrente aparición de esta estructura en la naturaleza. La sucesión de Fibonacci –en la cual cada término es la suma de los dos números precedentes– surge regularmente en la naturaleza. Describe el número de pétalos de las margaritas, cómo incrementa la densidad de ramas conforme subimos por el tronco de un árbol, y cómo se organizan las escamas de una piña.

Ahora, habiendo creado la “ingeniería de tensión” para crear espirales con la sucesión de Fibonacci en micro estructuras que crecen en laboratorio, unos físicos de China creen que pueden haber encontrado la razón del porqué de la ubicuidad de esta sucesión, con la pequeña ayuda de un problema físico aparentemente sin relación planteado hace 100 años. (Appl. Phys. Lett. 90 p. 164-102).

La ingeniería de tensión puede usarse para crear micro estructuras sin usar equipos de diseño de alta precisión. En la técnica, un material “núcleo” curvado es cubierto con distintos materiales “cáscara” a una temperatura alta. El compuesto entonces es enfriado mientras se restringe cuidadosamente su geometría, y debido a la diferencia de expansión térmica de cada material, partes selectivas de la cáscara se retuercen bajo la tensión, dando lugar a la formación de patrones.

La ingeniería de tensión puede usarse para crear micro estructuras sin usar equipos de diseño de alta precisión. En la técnica, un material “núcleo” curvado es cubierto con distintos materiales “cáscara” a una temperatura alta. El compuesto entonces es enfriado mientras se restringe cuidadosamente su geometría, y debido a la diferencia de expansión térmica de cada material, partes selectivas de la cáscara se retuercen bajo la tensión, dando lugar a la formación de patrones.

Zexian Cao y sus colegas de la Academia de Ciencias China usaron la ingeniería de tensión para crear micro estructuras de distintas formas de sólo 12 μm de longitud con un núcleo de plata de y

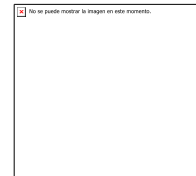


Imagen tomada de Applied Physics Letters.

Cuando Zexian Cao y sus colegas de la Academia de Ciencias de China usaron la “ingeniería de tensión” para crear microestructuras cónicas, encontraron que la tensión estaba concentrada en las regiones que seguían la espiral de Fibonacci. De acuerdo con Cao, la ubicuidad de la serie de Fibonacci en la naturaleza podría por tanto ser consecuencia de una minimización de la tensión.

una cáscara de SiO_2 . Descubrieron que si se establecían las cáscaras en formas esféricas durante el enfriamiento, se formaban en ellas patrones de tensión triangulares. Por otra parte, si se establecían en formas cónicas, aparecían patrones de tensión en espiral. Estos patrones espirales eran "espirales de Fibonacci", esto es, espirales que tienen sus dimensiones gobernadas por la sucesión de Fibonacci.


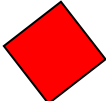
Los biólogos han sospechado desde hace tiempo que las ramas de los árboles y otras ocurrencias de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza son simples reacciones para la minimización de la tensión, pero hasta ahora no se había encontrado ninguna prueba concreta. "Nuestro experimento usando materiales puramente inorgánicos proporciona la prueba para este principio".

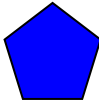
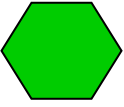




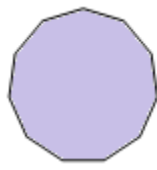
Cao añade que usar la ingeniería de tensión para crear patrones de Fibonacci podría tener también aplicaciones en fotónica: "Las espirales de Fibonacci son un entramado especial; Yo diría que son tanto desordenadas como ordenadas. Si los puntos de entramado fuesen algunos materiales de un auténtico "dieléctrico", podría proporcionar un nuevo cristal fotónico que muestre algunas propiedades interesantes".

Tomado de Astroseti.org.

Algo de geometría

La siguiente tabla relaciona diferentes polígonos regulares, el número de lados, el número de segmentos que salen de cada vértice, el total de segmentos que salen de todos los vértices y el número de diagonales del polígono. Se pide completar la tabla de acuerdo a lo anterior y observar regularidades entre cada columna para encontrar reglas de formación para cualquier tipo de polígono ya sea regular o irregular y convexos.

| Polígono | Número de lados | Número de segmentos que salen de cada vértice | Total de segmentos que salen de todos los vértices | Número de diagonales del polígono |
|---|-----------------|---|--|-----------------------------------|
|  | | | | |
|  | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |
|  | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

| | | | | |
|--|---|--|--|--|
| | n | | | |
|--|---|--|--|--|

Nunca digas todo lo que sabes, nunca hagas todo lo que puedes, nunca creas todo lo que oyes, nunca gastes todo lo que tienes, nunca juzgues todo lo que ves, ... Porque quién dice todo lo que sabe, hace todo lo que puede, cree todo lo que oye, gasta todo lo que tiene, y juzga todo lo que ve,...Un día dirá lo que no conviene, hará lo que no debe, creará lo que no es, gastará lo que no puede y juzgará lo que no es.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

- Para el diseño de una unidad didáctica, se debe tener en cuenta el contexto en el cual se desenvuelve el estudiante, la planificación del tiempo, la utilización de diferentes estrategias didácticas; pensando en la relación que debe haber entre los conocimientos previos del estudiante y sus ritmos de aprendizaje, para lograr aprendizajes más significativos.
- El desarrollo de cada una de las actividades planteadas, permite la adquisición de habilidades y competencias matemáticas tales como: Interpretar, argumentar, demostrar, calcular, modelar, resolver problemas, ordenar, razonar, abstraer, relacionar, generalizar, representar, entre otras. Así, este material es potencialmente significativo, puesto que tiene un significado lógico, estructura, organización, ejemplos, y un lenguaje adecuado para ser aprendido por los estudiantes, que de acuerdo al grado de escolaridad deben tener nociones básicas de geometría, álgebra, aritmética, lógica, entre otras áreas.
- Igualmente, de acuerdo con Moreira. M. et al. (2001), una unidad de enseñanza potencialmente significativa, contempla evaluaciones formativas, recursivas y sumativas (véase figura 3-4). Las últimas no se plantean en la presente unidad y queda a juicio de cada docente su diseño pues las dinámicas de una clase, las necesidades de aprendizaje y el contexto varían.
- La estructuración de las guías de la unidad didáctica desde un enfoque histórico y epistemológico permite un mayor aprendizaje de los conceptos y expresiones matemáticas relacionadas con las sucesiones y progresiones, porque el estudiante

puede comprender aspectos esenciales de la construcción del conocimiento, sus aplicaciones y alcances en otras áreas del conocimiento.

5.2 Recomendaciones

- Esta Unidad Didáctica ésta sujeta a los cambios que los docentes crean oportunos de acuerdo al contexto, y al currículo donde se pueda aplicar, además de las sesiones de trabajo que se sugieren y en los niveles donde se va a aplicar.
- La revisión bibliográfica sobre las sucesiones y series pueden ser objeto de investigación en el aula y ampliación por parte de los docentes. Así por ejemplo, diferentes investigaciones a nivel universitario (Ursini, S. & Trigueros, M. et al., 2006) señalan las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de variable, los procesos de generalización y el estudio de las series en cálculo integral.
- Para el desarrollo de esta unidad pueden efectuarse variaciones en cuanto al orden y presentación de los temas, pues para cada uno de ellos en las respectivas guías contemplan actividades que llevan gradualmente al estudiante hacia la adquisición del nuevo conocimiento.
- Aunque en dos guías de aprendizaje se realiza una deducción formal de expresiones matemáticas para las progresiones aritméticas y geométricas, no debe obligarse al estudiante a memorizarlas, pues el aprendizaje mecánico solo permite una reproducción a corto plazo y desde el punto de vista cognitivo, las informaciones son interiorizadas prácticamente sin interacción con conocimientos previos.

Bibliografía

- (s.f.). Obtenido de http://www.indexnet.santillana.es/secundaria/recursos/PAyPC/mates/pc_matematicas_practica.doc
- Alvarez, C., & Gonzalez, E. (1998). *Lecciones de Didáctica General*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Diez, L. (1976). *Matemáticas operativas primer año de universidad*. Medellín.
- Echavarría, C., & Acevedo, A. (2000). *El triángulo de Pascal*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Fleming, W. (s.f.). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*.
- Grupo Ábaco. (2004). *Los Números Poligonales*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Mayo de 2004. p. 1-5. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Henao, R. (s.f.). *¿Cómo Motivar el Estudio de las Matemáticas?* Medellín.
- Henao, R. (2006). *¿Cómo Enseñar Matemáticas Escolares?* Medellín.
- Londoño, N. (1996). *Un modelo de Situación Problema en la Enseñanza de las Matemáticas*. Medellín.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Bogotá.
- MEN. (2001). *Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas y Lenguaje*. Bogotá.
- Mesa, O. (1998). *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas*. Medellín.
- Moreira, M. (1993). *La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel*. Sao Pablo: Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul.
- Múnera, J. (s.f.). Las situaciones problema como fuente de matematización. *Cuadernos Pedagógicos*, 25-35.
- Posada, O., & Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar el papel. *Educación y Pedagogía*, 19-23.
- Rueda, L. (2001). *Apreciación del aprendizaje en la Formación Profesional*. Medellín.

- Stewart, J. (1999). *Cálculo: Conceptos y contextos*. Internacional Thomson Editores, S. A.
- Suarez, F., Herrera, H., & Monsalve, M. (2000). *Sucesión de Fibonacci*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación matemática*, 5-38.