UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLIN
FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN MATEMATICAS

RELACION ENTRE LA TEORIA DE GRADO Y LA TEORIA DE PUNTOS CRITICOS

Por

Sigifredo Herrón Osorio

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el titulo de Magister en Matemáticas.

Director : Jorge Cossio B.

Mayo de 1995

RELACION ENTRE LA TEORIA DE GRADO Y LA TEORIA DE PUNTOS CRITICOS

Sigifredo Herrón Osorio

APROBADO:

Jorge Cossio B.

Director

Alfonso Castro

Jurado

Pedro Isaza

Jurado

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS, contrato RC 168-93.

A mi esposa María Eugenia y mis hijos Meggie y Welmer.

CONTENIDO

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es estudiar la relación entre la teoría de grado y la teoría de puntos críticos. Teorías éstas que han demostrado ser herramientas muy útiles en el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

La teoría de grado ha sido ampliamente utilizada en el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales, por medio de ella se han desarrollado métodos que permiten obtener información sobre la existencia, el número de soluciones y la naturaleza de las soluciones. La teoría de bifurcación, por ejemplo, constituye hoy en día un área de investigación amplia que se apoya fuertemente en la teoría de grado para su desarrollo. También, la teoría de grado permite obtener teoremas de punto fijo, de gran importancia en las aplicaciones.

La teoría de puntos críticos constituye otra herramienta importante en el estudio de ecuaciones diferenciales, ya que en muchas aplicaciones encontrar la solución de una ecuación diferencial se reduce a encontrar los puntos críticos de un funcional asociado con la ecuación. Existen al menos dos clases de métodos para encontrar puntos críticos de funcionales: la teoría de minimax y la teoría de Morse. La teoría de minimax se inició con los trabajos de Ljusternik y Schnirelman en 1929 y tiene como uno de sus principales resultados el denominado Teorema del paso de la montaña, el cual será de gran utilidad en el presente trabajo. La teoría de Morse constituye una aproximación hacia una teoría global de puntos críticos, se inició con los trabajos de Morse en 1934 y tiene en el llamado Lema de Morse una de sus principales herramientas, el cual nos será de mucha utilidad en la investigación del grado de un punto crítico del tipo paso de la montaña.

En este trabajo se presentan dos teoremas, los Teoremas A y B, que muestran una interesante relación existente entre la teoría de grado y la teoría de puntos críticos. El primer teorema establece que el grado del gradiente de un cierto funcional en un punto crítico es uno ; más exactamente :

Teorema A. *Sea U un abierto de un espacio de Hilbert H y $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ tal que $\nabla f = I - F$ donde $F \in C(U, H)$ es compacto. Supongamos que para algún $\beta \in \mathbb{R}$, el conjunto $V := f^{-1}(-\infty, \beta)$ es acotado y $\overline{V} \subset U$. Supongamos, además, que existen números reales $\alpha < \beta$, $r > 0$ y un $x_0 \in U$ tales que*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] \subset \overline{B}(x_0, r) \subset U \quad y \quad \nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in f^{-1}[\alpha, \beta].$$

Entonces

$$d(\nabla f, V, 0) = 1.$$

Este resultado fue obtenido por Herbert Amann en [1]. Un primer corolario del Teorema A nos dice que el grado del gradiente de un funcional coercivo en una bola de radio suficientemente grande es uno. Krasnosel'skii en [11] demostró el mismo corolario para el caso $H = \mathbb{R}^N$. Por otra parte, Castro y Lazer en [3] obtuvieron el mismo resultado para el caso $H = \mathbb{R}^N$, bajo la hipótesis adicional $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y con un número finito de puntos críticos. Otra consecuencia del Teorema A, tal vez la más importante por su aplicación, afirma que el grado del gradiente de un funcional C^1 en un punto de mínimo local es uno. Rabinowitz en [15], demostró este último corolario suponiendo que $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, su prueba se basó en el método de reducción de Lyapunov-Schmidt. Otros dos corolarios al Teorema A nos permitirán mostrar la fuerza de la teoría de grado, al encontrar nuevos puntos críticos de funcionales a los cuales se les conoce la existencia de otros puntos críticos.

El segundo teorema que estudiaremos nos permite calcular el grado en un punto crítico del tipo paso de la montaña.

Teorema B. *Sea U un abierto no vacío de un espacio de Hilbert H y $\Phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ tal que $\nabla\Phi$ tiene la forma identidad menos compacto. Supongamos que para todo punto crítico u^* de Φ, el primer valor propio λ_1 de $\Phi''(u^*) \in \mathcal{L}(H)$ es simple siempre* *que* $\lambda_1 = 0$. *Si* $u_0 \in U$ *es un punto crítico aislado del tipo paso de la montaña entonces el grado local del gradiente de* Φ *en* u_0 *es* -1.

Este teorema fue demostrado por Hofer en [10]. Hofer muestra, en otros trabajos sobre operadores potenciales que preservan una estructura de orden, como utilizarlo para obtener resultados de existencia y multiplicidad en ecuaciones diferenciales parciales. Independientemente de Hofer, Tian [17] y Dancer [4] obtuvieron resultados semejantes. Sin embargo, la prueba dada por Hofer tiene la ventaja de ser más geométrica.

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el Capítulo 1 se presentan los preliminares o requisitos que serán utilizados en la demostración de los Teoremas A y B. Se incluyen allí los principales elementos de la teoría de grado en dimensión finita (grado de Brouwer), de la teoría de grado en dimensión infinita (grado de Leray-Schauder), una aplicación a ecuaciones diferenciales de la teoría de grado y, por último, el Teorema del paso de la montaña y el Lema de Morse. En el Capítulo 2 se demuestra el Teorema A y sus corolarios más importantes. Y en el último capítulo se prueba inicialmente un teorema de existencia de puntos críticos del tipo paso de la montaña debido a Hofer y posteriormente se demuestra el teorema B.

Sólo me resta agradecer a Jorge Cossio, mi director de tesis, por sus TEX-enseñanzas para elaborar este trabajo y su valiosa colaboración durante el desarrollo del mismo.

Sigifredo Herrón O.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

El propósito fundamental de este capítulo es presentar un resumen de los principales resultados de la teoría de grado y de la teoría de puntos críticos, que serán utilizados en los Capítulos 2 y 3 en el estudio del grado en un punto de mínimo y en un punto crítico del tipo paso de la montaña (ver Teoremas A y B). En la sección 1 se establecen los conceptos básicos de la teoría de grado en dimensión finita (grado de Brouwer). Como en el Capítulo 2 se hace uso intensivo del grado en dimensión infinita, en la sección 2 se presenta el grado de Leray-Schauder. Posteriormente, en la sección 3, se muestra una aplicación del grado de Leray-Schauder a ecuaciones diferenciales; y por último, en la sección 4, se incluyen el Teorema del paso de la montaña y el Lema de Morse, herramientas de mucha utilidad en la investigación del grado de un punto crítico del tipo paso de la montaña.

§ 1. Teoría de grado en espacios de dimensión finita

Inicialmente se define la noción de grado para funciones de clase C^1 en un abierto acotado de R^N respecto a un punto regular y se muestran algunos ejemplos. Seguidamente se introducen los elementos necesarios para definir el grado de una función continuamente diferenciable en el mismo abierto, con respecto a un punto singular, así como la extensión a funciones continuas y se demuestran las propiedades más importantes. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones topológicas que se desprenden de las propiedades del grado.

En lo sucesivo Ω representará un abierto acotado de R^N y $\partial\Omega$ su frontera.

Definición 1.1 Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : det\, f'(x) = 0\}$ es el conjunto de los puntos críticos de f.

Definición 1.2 Un punto $y \in R^N$ se denomina un valor regular de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \varnothing$ y un valor singular si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq \varnothing$.

Definición 1.3 Sea $M(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones entre los espacios topológicos X y Y. Dos funciones $f, g \in M(X,Y)$ se dicen homotópicas si existe una aplicación continua $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$.

Enunciamos a continuación, sin demostración, el Teorema de Sard (ver [7] p.13).

Teorema 1.4. *Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, G un abierto tal que $\overline{G} \subset \Omega$. Entonces el conjunto $f(S_f(G))$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^N$.*

Definición del grado de Brouwer.

Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \notin f(\partial\,\Omega)$ un valor regular de f. El grado de f en Ω respecto a y, $d(f, \Omega, y)$, se define como

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Omega} sign\, det\, f'(x) \tag{1.1}$$

Si $f^{-1}(y) = \varnothing$, definimos $d(f, \Omega, y) = 0$.

La suma en (1.1) es finita pues el conjunto $f^{-1}(y) \cap \Omega$ es finito. En efecto, si dicho conjunto fuera infinito, como $\overline{\Omega}$ es compacto entonces tendría un punto límite que llamaremos $x_0 \in \overline{\Omega}$. Luego existiría una sucesión $(x_n) \subset f^{-1}(y)$ de elementos distintos que converge a x_0 tal que $f(x_n) = y$ para todo n. Por la continuidad de f, $f(x_0) = y$. Como y no está en la imagen de la frontera de Ω, se tiene que $x_0 \notin \partial\,\Omega$. Por tanto $x_0 \in \Omega \cap f^{-1}(y)$. Al ser y regular, $det\, f'(x_0) \neq 0$. Por el Teorema de la función inversa existe un abierto $\omega \subset \Omega$ que contiene a x_0 tal que f es inyectiva allí. De la convergencia de (x_n), se tiene la existencia de un natural k tal que $(x_n) \subset \omega\ \forall n \geq k$. Luego $f(x_n) = y\ \forall n \geq k$, esto contradice el hecho de que f es uno a uno en ω, lo cual demuestra la afirmación.

Ejemplos.

(a) Sea $I : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ la aplicación identidad. Claramente $I \in C^1(\overline{\Omega})$, $\det I'(x) = 1$, I es biyectiva. Luego

$$d(I, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & y \in \Omega \\ 0 & y \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(b) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^2$. Del análisis complejo se sabe que f es analítica y satisface las ecuaciones de Cauchy- Riemann. Podemos interpretar f así:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que } f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Luego

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \neq 0$$

si $(x,y) \neq (0,0)$. Como $z^2 = p \neq 0$ tiene 2 raíces, entonces $d(f, \Omega, p) = 2$.
Similarmente se demuestra que si $f(z) = z^n$ entonces $d(f, \Omega, p) = n$.

El grado respecto a un valor singular.

Estableceremos a continuación algunos lemas técnicos con el ánimo de aplicarlos en la construcción de la definición del grado en puntos singulares.
Sea $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$. Supongamos que y es un valor regular de f. Luego $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. Por el Teorema de la función inversa, existen vecindades $V(x_i)$ tal que $V(x_i) \subset \Omega$, f es uno a uno en cada vecindad, $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i)$ y además estas vecindades son disjuntas dos a dos, ya que los x_i son puntos aislados.
Sea $\varphi = f - y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$. Claramente $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Nótese que $\varphi(x_i) = 0$, por tanto $\varphi(V(x_i))$ es una vecindad de cero para todo i. Además, existe $\eta > 0$ tal

que $B(0,\eta) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \varphi(V(x_i))$. Finalmente, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \geq \delta \quad \forall x \in \overline{\Omega} - \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i). \tag{1.2}$$

Con estas ideas en mente podemos introducir el siguiente lema.

Lema 1.5. *Sean f, η , δ y φ como arriba, y $\gamma = min\{\eta, \delta\}$. Sea $\Phi \in C^{\infty}(0,\infty) \cap C[0,\infty)$ tal que sop $\Phi \subset (0,\gamma)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|x|)\, dx = 1. \tag{1.3}$$

Entonces

$$d(f,\Omega,y) = \int_{\Omega} \Phi(|f(x)-y|)\, det f'(x)\, dx.$$

Prueba: Ver [7] p. 15.

El siguiente lema es fundamental para extender la definición de grado a puntos singulares, se conoce con el nombre de los siete epsilons y establece que dos funciones próximas en $C(\overline{\Omega})$ tienen el mismo grado, siempre que y esté suficientemente separado de la imagen de la frontera de Ω.

Lema 1.6. *Sean $y \in \mathbb{R}^N$ un valor regular de $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, y $\epsilon > 0$. Supongamos que*

$$|f_i(x) - y| \geq 7\epsilon \qquad i = 1,2; \quad x \in \partial\Omega \tag{1.4}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.5}$$

Entonces

$$d(f_1,\Omega,y) = d(f_2,\Omega,y).$$

Prueba: Ver [7] p. 16.

La misma conclusión del lema anterior se da en el siguiente lema para dos puntos regulares cercanos que verifiquen las condiciones del lema de los siete epsilons.

Lema 1.7. *Sean $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $q_i \in \mathbb{R}^N$ con i=1,2. Sea $\epsilon > 0$. Supongamos que*

$$|f_i(x) - q_j| \geq 7\epsilon \quad i,j = 1,2 \quad x \in \partial\Omega \tag{1.6}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \quad x \in \overline{\Omega} \tag{1.7}$$

$$|q_1 - q_2| < \epsilon \tag{1.8}$$

y los puntos q_1 y q_2 son valores regulares. Entonces $d(f_1, \Omega, q_1) = d(f_2, \Omega, q_2)$.

Prueba: Ver [7] p. 18.

Disponemos ya de los elementos necesarios para construir la definición del grado para funciones $f \in C^1$ respecto a un valor singular $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$. Por el Teorema de Sard, $f(S_f(\Omega))$ tiene medida cero y por lo tanto su complemento, $\complement f(S_f(\Omega))$, es denso en $\mathbb{R}^N$. Luego existe una sucesión $(y_n) \subset \complement f(S_f(\Omega))$ tal que $y_n \to y$. Es claro que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \notin f(\partial\Omega)$ $\forall\, n \geq n_0$. Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, y_n)$$

existe y es independiente de la escogencia de la sucesión (y_n).
Como los y_n son valores regulares, por el Lema 1.7 , con $f_1 = f_2 = f$, tenemos $d(f, \Omega, y_{n_0}) = d(f, \Omega, y_n)$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia dicho límite existe.

Sea (t_n) otra sucesión tal que $t_n \to y$, con t_n valores regulares de f y $t_n \notin f(\partial\Omega)$ para cada $n \geq k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema 1.7 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f,\Omega,y_n) = d(f,\Omega,t_n) \quad \forall\, n \geq n_1$ y así hemos probado que el límite es independiente de la sucesión (y_n).

Definición 1.8 Sea $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$ un valor singular. Se define el grado de f en Ω respecto a y, como

$$d(f,\Omega,y) := \lim_{n\to\infty} d(f,\Omega,y_n),$$

donde (y_n) es una sucesión de valores regulares que converge a y.

El próximo lema es la versión del lema de los siete epsilons para puntos singulares.

Lema 1.9. *Sean $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N$ un valor singular y $\epsilon > 0$. Supongamos que*

$$|f_i(x) - y| \geq 8\epsilon \qquad x \in \partial\Omega \tag{1.9}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.10}$$

Entonces

$$d(f_1,\Omega,y) = d(f_2,\Omega,y).$$

Prueba: Ver [7] p. 19.

Construiremos a continuación la definición del grado para funciones continuas respecto a puntos $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$.

Sean $f \in C(\overline{\Omega}, R^N)$, $y \notin f(\partial\Omega)$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass existe una sucesión $(f_n) \subset C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que f_n converge uniformemente a f

en $\overline{\Omega}$. Además existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin f_n(\partial\Omega)$ para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Por los Lemas 1.6 y 1.9 aplicados a (f_n) tenemos que $d(f_{n_0}, \Omega, y) = d(f_n, \Omega, y))\ \forall\, n \geq n_0$, lo cual garantiza que el límite existe. Además si (g_n) es otra sucesión con las mismas características que (f_n), por el mismo lema $d(f_n, \Omega, y) = d(g_n, \Omega, y)$, es decir el límite es independiente de la selección de la sucesión (f_n).

Definición 1.10. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$. Sea (f_n) una sucesión tal que $(f_n) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y que convege uniformemente a f en $\overline{\Omega}$. Se define el grado de f en Ω respecto a y de la siguiente manera

$$d(f, \Omega, y) := \lim_{n \to \infty} d(f_n, \Omega, y).$$

Propiedades del grado de Brouwer.

Teorema 1.11 (existencia). *Sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \notin f(\partial\Omega)$. Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ entonces existe un $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = y$.*

Prueba: Por reducción al absurdo. Supongamos que $\forall\, x \in \Omega\ f(x) \neq y$. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - y| > \epsilon$. Por el Teorema de aproximación de Weierstrass, existe $(f_n) \subset C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, y se tiene para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$\epsilon < |f(x) - y| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y| < \frac{\epsilon}{2} + |f_n(x) - y| \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\therefore \quad |f_n(x) - y| > \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para}\ n \geq n_0,\ x \in \Omega.$$

Luego $x \notin f_n^{-1}(y) \quad \forall\, x \in \Omega$ y $n \geq n_0$. Esto implica que $d(f_n, \Omega, y) = 0$ para $n \geq n_0$. Si n tiende a ∞, entonces $d(f, \Omega, y) = 0$ lo cual contradice la hipótesis. ■

La segunda propiedad es un criterio muy importante para saber cuándo dos funciones tienen el mismo grado.

Teorema 1.12 (Invarianza bajo homotopía). *Sea* $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ *una homotopía de* f *y* $g \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $H(x,t) \neq y$ *para* $x \in \partial\Omega$ *y* $t \in [0,1]$. *Entonces* $d(H,\Omega,y)$ *es constante en [0,1]. En particular se tiene que* $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$.

Prueba : Veamos que la aplicación $t \to d(H(\cdot,t),\Omega,y)$ es continua, lo cual demuestra el teorema.

Por la continuidad uniforme de H, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $|H(x,t_1) - H(x,t_2)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Por otra parte, como $y \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ entonces $|H(x,t) - y| > 9\epsilon$ para cada $t \in [0,1]$ y cada $x \in \partial\Omega$. Existen sucesiones (f_{1n}) y (f_{2n}) en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tales que $f_{1n}(x) \to H(x,t_1)$ uniformemente y $f_{2n}(x) \to H(x,t_2)$ uniformemente en $\overline{\Omega}$. Como en la prueba del Teorema 1.11, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$9\epsilon < |H(x,t_1) - y| \leq |H(x,t_1) - f_{1n}(x)| + |f_{1n}(x) - y| < \epsilon + |f_{1n}(x) - y|,$$

es decir,

$$|f_{1n}(x) - y| > 8\epsilon \quad n \geq n_0, \ x \in \partial\Omega.$$

Similarmente $|f_{2n}(x) - y| > 8\epsilon$.

Finalmente, para $x \in \overline{\Omega}$

$$|f_{1n}(x) - f_{2n}(x)| \leq |f_{1n}(x) - H(x,t_1)| + |H(x,t_1) - H(x,t_2)| + |H(x,t_2) - f_{2n}(x)| < \epsilon.$$

Aplicando bien sea el Lema 1.6 o el Lema 1.9 según sea y regular o singular a f_{in} $(i = 1,2)$ se concluye $d(f_{1n},\Omega,y) = d(f_{2n},\Omega,y)$ para $n \geq n_0$. Cuando $n \to \infty$, de la definición 1.10 se obtiene que $d(H(\cdot,t_1),\Omega,y) = d(H(\cdot,t_2),\Omega,y)$. Hemos probado que si $|t_1 - t_2| < \delta$ entonces $|d(H(\cdot,t_1),\Omega,y) - d(H(\cdot,t_2),\Omega,y)| < \epsilon$. Por lo tanto la aplicación es continua y como tiene valores en $\mathbb{Z}$, entonces $d(H(\cdot,t),\Omega,y)$ es constante en $[0,1]$. ■

Enunciamos a continuación, sin demostración, otra propiedad importante del grado. El lector interesado en la prueba le sugiero ver [13] p. 26. Esta propiedad afirma que si se descompone el dominio en dos abiertos disjuntos, la suma de los grados en cada abierto es igual al grado de la función en todo el dominio.

Teorema 1.13 (Escisión). *Si Ω_1 es un abierto con $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ y $y \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\,\Omega)$, entonces*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega - \overline{\Omega}_1, y).$$

Dos consecuencias de las propiedades.

Teorema 1.14. *Sean $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \partial\,\Omega$, $y \notin f(\partial\,\Omega)$. Entonces $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$.*

Prueba : Basta simplemente aplicar la propiedad de invarianza del grado bajo homotopía, a la función $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x). \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.15 (Punto fijo de Brouwer). *Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < 1\}$. Si $f : \overline{B} \to \overline{B}$ es continua, entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $f(x) = x$.*

Prueba: Debemos garantizar que f tiene un punto fijo en ∂B o en B. Supongamos que f no tiene puntos fijos en ∂B. Sea $H : \overline{B} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definida por $H(x,t) = x - tf(x)$. H es una homotopía continua de I y $I - f$. Es fácil ver que $H(x,t) \neq 0$ para $x \in \partial B$ y $t \in [0,1]$. Como $0 \in B$, por la invarianza bajo homotopía, tenemos

$$d(I, B, 0) = d(I - f, B, 0) = 1 \neq 0$$

Luego por el teorema de existencia f tiene un punto fijo en B. ■

§ 2. Teoría de grado en espacios de dimensión infinita

En ecuaciones diferenciales los espacios de funciones en los cuales se trabaja son, generalmente, espacios de dimensión infinita. De allí surgió la necesidad de generalizar el concepto de grado a espacios de dimensión infinita. Este se conoce como el grado de Leray-Schauder. Este concepto se define para operadores de la forma $I-f$ donde f es un operador compacto. La idea consiste en aproximar f por medio de operadores de rango finito, lo cual nos permite encontrar un espacio de dimensión finita donde podemos aplicar el grado de Brouwer.
Inicialmente se enuncia un teorema de densidad, básico en la construción de esta teoría. Seguidamente se presentan las condiciones que permiten definir el grado de Leray-Schauder de un operador definido en un abierto acotado de un espacio de Banach. El grado de Leray-Schauder tiene las mismas propiedades del grado de Brouwer y sus demostraciones son consecuencia directa de la definición.

Sea E un espacio de Banach real y $\Omega \subset E$ un abierto acotado. El siguiente teorema nos dice que un operador compacto, T, se puede aproximar por un operador de rango finito. Su demostración se puede ver en [5] p. 55.

Teorema 2.1. *Sea Ω abierto y acotado y $T : \overline{\Omega} \to E$ compacto. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon : \overline{\Omega} \to E$ de rango finito tal que*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x) - T_\epsilon(x)\| \leq \epsilon.$$

Consideremos ahora un operador $T : \overline{\Omega} \to E$ compacto, y sea $y \in E - (I-T)(\partial\,\Omega)$. Veamos que existe $\alpha > 0$ tal que $dist\left(y, (I-T)(\partial\,\Omega)\right) \geq \alpha$. En efecto, si no fuera cierto, entonces existiría una sucesión $(x_n) \subset \partial\,\Omega$ tal que $\|y-(I-T)(x_n)\| \to 0$. Por la compacidad de T existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $T(x_{n_k})$ converge, digamos, $T(x_{n_k}) \to y_0$. Ahora

$$\|x_{n_k} - y_0 - y\| \leq \|y + T(x_{n_k}) - x_{n_k}\| + \|y_0 - T(x_{n_k})\| \to 0,$$

es decir $x_{n_k} \to y_0 + y$. Como $\partial\Omega$ es cerrado, $y_0 + y \in \partial\Omega$. Finalmente, la continuidad de T implica que $y_0 = T(y_0 + y)$ y así $y \in (I-T)(\partial\Omega)$, lo cual es una contradicción.

Vamos enseguida a garantizar la existencia de un subespacio de dimensión finita en el cual se puede hablar del grado de Brouwer. Para $T : \overline{\Omega} \to E$ dado, por el teorema anterior existe $T_\alpha : \overline{\Omega} \to E$ de rango finito tal que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x) - T_\alpha(x)\| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Sea $E_\alpha := \langle T_\alpha(\overline{\Omega}), y\rangle$, el subespacio generado por la base de $T_\alpha(\overline{\Omega})$ y y. Sea $\Omega_\alpha := \Omega \cap E_\alpha$. Ω_α es un abierto acotado en E_α, que es un espacio de dimensión finita. Ahora $d\left((I - T_\alpha)|_{\overline{\Omega}_\alpha}, \Omega_\alpha, y\right)$ tiene sentido, es decir podemos hablar del grado de Brouwer, ya que primero, $(I-T_\alpha)(\overline{\Omega}_\alpha) \subset E_\alpha$ y segundo porque $y \notin (I-T_\alpha)(\partial\Omega_\alpha)$. Efectivamente para $x \in \partial\Omega_\alpha$, se tiene

$$\|x - T_\alpha(x) - y\| \geq \|x - T(x) - y\| - \|T_\alpha(x) - T(x)\| \geq \|x - T(x) - y\| - \frac{\alpha}{2}.$$

Puesto que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$ y $\partial\Omega_\alpha \subset \partial\Omega$ se concluye que

$$\|x - T_\alpha(x) - y\| \geq \alpha - \tfrac{\alpha}{2} > 0.$$

Enunciamos el siguiente teorema que nos permitirá definir el grado en dimensión infinita.

Teorema 2.2 (Reducción). *Sean X_n, X_m espacios normados tales que $dim\, X_m = m < dim\, X_n = n$. Sean $\Omega \subset X_n$ un abierto acotado, $f : \overline{\Omega} \to X_m$ continua, $y \in X_m - (I - f)(\partial\Omega)$. Entonces*

$$d(I - f, \Omega, y) = d\big((I - f)|_{\overline{\Omega\cap X_m}}, \Omega \cap X_m, y\big)$$

Prueba: Ver [5] p. 29.

Ahora sí, disponemos de los elementos que nos permiten definir el grado de Leray-Schauder.

Definición 2.3 Sea E un espacio de Banach real, $\Omega \subset E$ un abierto acotado, $f : \overline{\Omega} \to E$ compacto y $y \in E - (I - f)(\partial\Omega)$. Sea f_ϵ como en el Teorema 2.1 y $\overline{E}$ un subespacio finitodimensional que contenga a $\langle f_\epsilon(\overline{\Omega}), y\rangle$ y $\Omega_\epsilon := \Omega \cap \overline{E}$. Se define el grado de Leray-Schauder, así

$$d(I - f, \Omega, y) = d\Big((I - f_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\epsilon}}, \Omega_\epsilon, y\Big).$$

Demostremos ahora que la definición anterior es independiente de la escogencia de f_ϵ. En efecto, sean f_ϵ y $\tilde{f}_\epsilon$ como en la definición previa. Sean E_μ, E_η los subespacios de dimensión finita correpondientes a $\tilde{f}_\epsilon$ y f_ϵ respectivamente.
Sea $E_\delta := \langle E_\mu, E_\eta\rangle$, el generado por las bases de E_μ y E_η , $\Omega_\mu = \Omega \cap E_\mu$, $\Omega_\eta = \Omega \cap E_\eta$, $\Omega_\delta = \Omega \cap E_\delta$. Por el Teorema de reducción, se tiene

$$d\,[(I - \tilde{f}_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\mu}}, \Omega_\mu, y] = d(I - \tilde{f}_\epsilon, \Omega_\delta, y), \tag{2.1}$$

$$d\,[(I - f_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\eta}}, \Omega_\eta, y] = d(I - f_\epsilon, \Omega_\delta, y). \tag{2.2}$$

Sean $\epsilon < \alpha$ y $H(x,t) := t(I - \tilde{f}_\epsilon)(x) + (1-t)(I - f_\epsilon)(x)$. H es una homotopía continua. Se puede ver usando la desigualdad triangular que $\|H(x,t) - (I - f)(x)\| \leq \epsilon/2$ y de aquí se concluye que $\|H(x,t) - y\| \geq \frac{\epsilon}{2} > 0$. Por lo tanto $H(x,t) \neq y$ $\forall\,(x,t) \in \partial\Omega_\delta \times [0,1]$.
Por la invarianza bajo homotopía del grado de Brouwer, tenemos

$$d(I - \tilde{f}_\epsilon, \Omega_\delta, y) = d(I - f_\epsilon, \Omega_\delta, y). \tag{2.3}$$

De (2.1), (2.2) y (2.3) se concluye

$$d\left[(I-\tilde{f}_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\mu}},\Omega_\mu,y\right]=d\left[(I-f_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\eta}},\Omega_\eta,y\right].$$

Propiedades del grado de Leray-Schauder.

A continuación presentamos sin demostración las principales propiedades del grado de Leray-Schauder, cuyas pruebas pueden verse en [5] p. 58.

Teorema 2.4. *Si $y\in\Omega$, entonces $d(I,\Omega,y)=1$; si $y\notin\overline{\Omega}$, $d(I,\Omega,y)=0$.*

Teorema 2.5 (existencia). *Si $d(I-f,\Omega,y)\neq 0$, entonces existe $x_0\in\Omega$ tal que $(I-f)(x_0)=y$.*

Teorema 2.6 (Invarianza bajo homotopía). *Sea $\Omega\subset E$ un abierto acotado y $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ una homotopía compacta (es decir, h es continua y $I|_{\overline{\Omega}}-h$ es compacta) tal que $h(x)\neq y$ para $(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega$. Entonces $d(h(t,x),\Omega,y)$ es constante para todo $t\in[0,1]$.*

Teorema 2.7 (Escisión). *Sea $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ donde Ω_i son abiertos disjuntos. Sean f compacto y $y\notin(I-f)(\partial\Omega)$. Entonces*

$$d(I-f,\Omega,y)=d(I-f,\Omega_1,y)+d(I-f,\Omega_2,y).$$

Los teoremas que siguen son consecuencia del Teorema de invarianza del grado bajo homotopía. Sus pruebas pueden verse en [13] p. 63 y 67.

Teorema 2.8. *Sean $f,g:\overline{\Omega}\to E$ compactas, $f(x)=g(x)\ \forall x\in\partial\Omega$. Entonces si $y\notin(I-f)(\partial\Omega)$,*

$$d(I-f,\Omega,y)=d(I-g,\Omega,y).$$

Teorema 2.9 (Punto fijo de Schauder). *Sea D un abierto acotado y convexo tal que $0 \in D$. Sea $f : \overline{D} \to E$ una función compacta con $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Entonces f tiene un punto fijo.*

§ 3. Una aplicación del Grado de Leray-Schauder

Con el ánimo de aplicar las técnicas abstractas desarrolladas en la sección anterior, consideremos el siguiente problema de ecuaciones diferenciales :

Dada $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continua. Queremos encontrar $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u'' = f(t) & 0 \le t \le \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

La solución de (3.1) es

$$u(t) = \int_0^\pi K(s,t)\, f(s)\, ds, \tag{3.2}$$

donde $K(s,t)$ es la función de Green para el operador segunda derivada, función que viene dada por

$$K(s,t) = \begin{cases} (\pi - t)\dfrac{s}{\pi} & \text{cuando } s \in [0,t] \\ (\pi - s)\dfrac{t}{\pi} & \text{cuando } s \in [t,\pi]. \end{cases}$$

Similarmente, si $g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, el problema

$$\begin{cases} -u'' = g\big(t, u(t)\big) & 0 \le t \le \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

es entonces equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = \int_0^\pi K(s,t)\, g(s, u(s))\, ds. \tag{3.4}$$

Veamos que el grado es una herramienta útil para resolver las ecuaciones integrales (3.2) y (3.4).

Sea $k : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continua. Es claro que k es uniformemente continua y acotada en $\Omega \times \Omega := [0,\pi] \times [0,\pi]$. Para $u \in C(\Omega)$, sea $\mathbf{K}(u) : \Omega \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\mathbf{K}(u)(t) = \int_0^\pi k(s,t)u(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Es fácil ver que (3.5) está bien definido y, usando la continuidad uniforme de k, que $\mathbf{K}(u) \in C(\Omega)$. También puede verse que $\mathbf{K}$ es lineal y acotado.

Lema 3.1. *El operador integral* $\mathbf{K} : C(\Omega) \to C(\Omega)$ *es compacto.*

Prueba: Sea $(u_n) \subset C(\Omega)$ una sucesión acotada. En consecuencia $\{\mathbf{K}(u_n)\}$ es acotada. Como k es uniformemente continua en $\Omega \times \Omega$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|(s,t) - (\bar{s},\bar{t})| < \delta$ entonces $|k(s,t) - k(\bar{s},\bar{t})| < \epsilon$. De manera que si $|t - \tau| < \delta$ entonces, para todo n

$$|\mathbf{K}(u_n)(t) - \mathbf{K}(u_n)(\tau)| \leq \int_0^\pi |k(s,t) - k(s,\tau)|\,|u_n(s)|\,ds \leq M\pi\epsilon,$$

donde M es una cota superior de la sucesión $(\|u_n\|)$. Esto garantiza que $\{\mathbf{K}(u_n)\}$ es equicontinua. Por lo tanto por el Teorema de Arzelá -Ascoli $\{\mathbf{K}(u_n)\}$ tiene una subsucesión convergente y así $\mathbf{K}$ es compacto. ■

Definamos ahora $\tilde{g} : C(\Omega) \to C(\Omega)$ así : $\tilde{g}(u)(t) = g\big(t, u(t)\big)$. Es fácil ver que $\tilde{g}$ está bien definida, es decir, $\tilde{g}(u) \in C(\Omega)$. Además, por la continuidad de g, $\tilde{g}$ es continua.

Teorema 3.2. *La ecuación* $u = \mathbf{K}\tilde{g}(u)$ *tiene al menos una solución.*

Prueba: Sea $H : [0,1] \times C(\Omega) \to C(\Omega)$ definida por $H(\lambda, u) = \lambda \mathbf{K}\tilde{g}(u)$. Como $\mathbf{K}\tilde{g}$ es la composición de una función compacta con una continua, entonces H es compacto.

Veamos ahora que $u - H(\lambda, u) \neq 0 \quad \forall \lambda \in [0,1], \ \forall u \in \partial B(0,R)$, donde R es suficientemente grande. Efectivamente, como $\mathbf{K}$ *y* $\tilde{g}$ son acotadas, existe una constante $M > 0$ tal que $\|H(\lambda, u)\| \leq M\lambda$. Luego $\|u - H(\lambda, u)\| \geq R - M\lambda > 0$ si tomamos $R > M\lambda$. Por la invarianza bajo homotopía,

$$d(I - \mathbf{K}\tilde{g}, B(0,R), 0) = d(I, B(0,R), 0) = 1.$$

El teorema de existencia concluye la demostración. ■

Corolario 3.3. *El problema (3.4) tiene al menos una solución.*

§ 4. El Teorema del paso de la montaña. El Lema de Morse

En esta sección presentamos el Teorema del paso de la montaña y el Lema de Morse, herramientas fundamentales en la investigación del grado en un punto crítico del tipo paso de la montaña, aspecto que abordaremos en el Capítulo 3.

Definición 4.1. Sean X un espacio de Banach real , U un abierto no vacío de X, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ y $c, d \in \mathbb{R}$. Definimos

$$C_r(\Phi, c) := \{u \in U : \Phi'(u) = 0 \ , \Phi(u) = c\} \ ; C_r(\Phi) := \bigcup_{e \in \mathbb{R}} C_r(\Phi, e)$$

$$\Phi^d := \Phi^{-1}(-\infty, d] \ ; \Phi_c := \Phi^{-1}[c, +\infty) \ ; \dot{\Phi}^d := \Phi^{-1}(-\infty, d) \ , \Phi_c^d = \Phi^d \cap \Phi_c.$$

Decimos que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale (PS) si se cumple lo siguiente: Toda sucesión $(u_n) \subset X$ tal que $\Phi(u_n)$ está acotada y $\Phi'(u_n) \to 0$, tiene una subsucesión convergente.

A continuación presentamos el enunciado del Lema de deformación cuya demostración detallada se encuentra en [16] p. 82.

Teorema 4.2 (Lema de deformación). *Sean X un espacio de Banach real, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ que satisface (PS). Dados $\bar{\epsilon} > 0$, $d \in \mathbb{R}$ y vecindades V y W de $C_r(\Phi, d)$, tales que $\overline{V} \subset W$ y $dist(\partial W, V) > 0$. Entonces existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$ y $\eta : [0,1] \times X \to X$ continua tal que*

(i) $\eta(0,u) = u, \quad \forall\, u \in X$.

(ii) $\Phi(\eta(t,u)) \leq \Phi(u)$ para $t \in [0,1]$, $u \in X$, es decir $\Phi(\eta(t,u))$ es no creciente.

(iii) $\eta(1, \Phi^{d+\epsilon} - V) \subset \Phi^{d-\epsilon}$.

(iv) $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in [0,1]$ si $\Phi(u) \notin [d-\bar{\epsilon}, d+\bar{\epsilon}]$.

(v) $\eta([0,1]) \times \overline{V}) \subset W$.

Presentamos el siguente teorema debido a Ambrosetti y Rabinowitz, que establece que $C_r(\Phi, d) \neq \varnothing$, i.e., existen puntos críticos de nivel d.

Teorema 4.3 (Paso de la montaña). *Sea X un espacio de Banach real y $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ que satisface (PS). Supongamos $\Phi(0) = 0$ y que*

(Φ_1) Existen constantes ρ, $\alpha > 0$ tales que $\Phi|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.

(Φ_2) Existe $e \in X - \overline{B_\rho}$ tal que $\Phi(e) \leq 0$.

Entonces Φ posee un valor crítico $d \geq \alpha$. Más aún d está caracterizado por

$$d = \inf_{g \in A} \max_{t \in [0,1]} \Phi(g(t)),$$

donde $A = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0,\ g(1) = e\}$.

Prueba : Como $\Phi \circ g$ es continua y [0,1] es compacto, entonces el máximo de la definición de d existe para todo $g \in A$. Luego $d < \infty$. Si $g \in A$, $g([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \varnothing$. Por tanto usando (Φ_1) y las definiciones de inf y max se concluye que $d \geq \alpha$. Supongamos que $C_r(\Phi, d) = \varnothing$. Sea $\bar{\epsilon} = \frac{\alpha}{2}$. Por el Lema de deformación existe $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y $\eta : [0,1] \times X \to X$ continua tal que

$$\eta(t,u) = u \quad \text{si} \quad \Phi(u) \leq d - \bar{\epsilon}. \tag{4.1}$$

$$(4.2) \qquad \Phi\left(\eta(1,u)\right) \leq d - \epsilon \quad \text{si} \quad \Phi(u) \leq d + \epsilon.$$

Por la definición de d, existe $g_0 \in A$ tal que

$$(4.3) \qquad \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi\left(g_0(t)\right) < d + \epsilon.$$

Sea $h(t) = \eta\left(1, g_0(t)\right)$ con $t \in [0,1]$. Fácilmente se ve que $h \in A$. De la definición de d , tenemos $d \leq \max_{o \leq t \leq 1} \Phi\left(h(t)\right)$. Por (4.3) $\Phi\left(g_0(t)\right) < d + \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Por (4.2), $\Phi\left(\eta(1, g_0(t))\right) = \Phi\left(h(t)\right) \leq d - \epsilon$ para cada $t \in [0,1]$, lo cual implica que

$$\max_{o \leq t \leq 1} \Phi\left(h(t)\right) \leq d - \epsilon,$$

de donde se concluye que $d \leq d - \epsilon$, lo cual es una contradicción. Luego $C_r(\Phi, d) \neq \emptyset$. ■

Exponemos a continuación el Lema de Morse.

Teorema 4.4. *Sea U un abierto en un espacio de Hilbert H y $\Phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ tal que $\nabla\Phi$ tiene la forma Identidad menos compacto. Supóngase que 0 es un punto crítico aislado de Φ, tal que $\Phi(0) = 0$. Sea $H = H^- \oplus H^0 \oplus H^+$ la descomposición canónica vía resolución espectral asociada a $L := \Phi''(0)$. Entonces existe una vecindad A de 0 en H, una vecindad B de 0 en $\ker L$, un homeomorfismo local D de A en H y una aplicación β, de clase C^1, definida de B en $H^- \oplus H^+$ tal que*

$$(4.4) \qquad \Phi(Du) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 + \Phi(y + \beta y)$$

$$(4.5) \qquad Q\nabla\Phi(y + \beta y) = 0$$

para toda $u = x + y + z \in H^- \oplus H^0 \oplus H^+$ y $\|u\|$ pequeña, donde $Q : H \to H^- \oplus H^+$ es la proyección ortogonal. Además se tiene la relación local

$$d(\nabla\Phi, 0) = (-1)^{dim H^-}\, d(\nabla\psi, 0) \tag{4.6}$$

con $\psi(y) = \Phi(y + \beta y)$.

Prueba : Ver [10].

CAPITULO 2

EL GRADO EN UN MINIMO LOCAL

El objetivo fundamental de este capítulo es el de demostrar que el grado de Leray-Schauder del gradiente de un cierto funcional de clase C^1 definido en un espacio de Hilbert es uno (ver Teorema A). Este resultado obtenido por Herbert Amann en 1982 (ver [1]) permite probar que el grado del gradiente de un funcional coercivo sobre una bola de radio suficientemente grande es uno y permite, también, demostrar que el índice de un funcional C^1 en un minimo local aislado es uno.

El problema de estudiar la relación entre la teoría del grado y la teoría de puntos críticos ha sido investigado ampliamente por muchos autores, entre los cuales merecen destacarse los trabajos de Castro y Cossio (ver [2]), Krasnosel'skii (ver [11]) y Rabinowitz (ver [15]).

La sección 1 de este capítulo incluye algunos elementos necesarios en la demostración del Teorema A. Allí se estudia la aproximación de una función continua por otra localmente Lipschitz, la continuidad débil del gradiente de un funcional si éste es compacto y la compacidad de la derivada de un operador compacto. Se expone que el grado de una perturbación compacta de la identidad es una potencia de -1; donde el exponente es la suma de las multiplicidades algebraicas de ciertos valores propios. Se presenta el concepto de medida de no compacidad y sus propiedades y algunos elementos de cálculo en espacios de Banach.

En la sección 2 se demuestra el Teorema A y en la sección 3 se prueban los corolarios más importantes del teorema, entre ellos se demuestra que el grado en un mínimo local aislado es uno (ver Corolario 3.2) y dos resultados relacionados con la existencia de puntos críticos (ver Corolarios 3.3 y 3.4).

§ 1. Preliminares

Presentamos a continuación una serie de proposiciones y conceptos de gran utilidad en la demostración del teorema principal de este capítulo. Iniciamos con un lema que nos permite aproximar una función continua por otra localmente Lipschitz.

Lema 1.1. *Sean X y Y espacios de Banach, $\Omega \subset X$ abierto y $f : \Omega \to Y$ continua. Entonces $\forall \epsilon > 0$ existe $f_\epsilon : \Omega \to Y$ localmente Lipschitz tal que $\|f(x) - f_\epsilon(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in \Omega$.*

Prueba: Ver [6] p. 5.

El teorema hacia el cual nos encaminamos trata con operadores de la forma $\nabla f = I - F$ donde F es un operador compacto. El siguiente teorema aporta elementos que facilitan su manejo.

Definición 1.2. Sea X un espacio de Banach. $f : X \to \mathbb{R}$ se dice débilmente continua en x_0 si cualquier sucesión (x_n) que converge débilmente a x_0 implica que $f(x_n)$ converge fuertemente a $f(x_0)$.

Teorema 1.3. *Si ∇f es compacto en $\overline{B}(0,r) = \{x : \|x\| \leq r\}$ entonces f es débilmente continua .*

Prueba: Ver [18] p. 76.

El siguiente teorema nos proporciona un criterio para saber cuando la derivada de Fréchet de un operador en un punto es un operador compacto.

Teorema 1.4 (Krasnosel'kii). *Sean X, Y espacios de Banach, $F : X \to Y$ compacto y Fréchet diferenciable en x_0. Entonces $F'(x_0)$ es compacto.*

Prueba: Ver [18] p. 51.

Otro concepto que necesitamos es el de índice de una función, el cual presentamos a continuación.

Definición 1.5 Sea f una función continua en $\bar{B}(x_0, r)$ con $y \neq f(x)$ en $\partial B(x_0, r)$. Supongamos que x_0 es una solución aislada de $y = f(x)$; es decir existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que x_0 es la única solución de $y = f(x)$ en $B(x_0, \epsilon)$. Definimos el índice de f en x_0 relativo a $y \notin f(\partial B(x_0, \epsilon))$, denotado por $i(f, x_0, y)$, de la siguiente manera

$$i(f, x_0, y) = d(f, B(x_0, \epsilon), y).$$

Utilizando el Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos (ver [5]) se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Sean X un espacio de Banach real, $L : X \to X$ compacto, $\lambda \neq 0$ tal que λ^{-1} no es valor propio de L. Sea Ω un abierto acotado en X con $0 \in \Omega$. Entonces $d(I - \lambda L, \Omega, 0) = (-1)^{m(\lambda)}$, donde $m(\lambda)$ es la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios μ que cumplen $\mu\lambda > 1$, y $m(\lambda) = 0$ si L no tiene valores propios μ de esta clase.*

Prueba: Ver [5] p. 64.

Como respuesta a preguntas de tipo topológico que se presentan en el desarrollo de la prueba del teorema principal de este capítulo, introducimos el concepto de medida de no compacidad o medida de Kuratowski.

Definición 1.7 Sea X un espacio métrico completo, $M \subset X$ un conjunto acotado. Consideremos el conjunto

$$\triangle(M) := \left\{d > 0 : \exists S_1, S_2, \cdots, S_n, \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ diam(S_i) \leq d\right\},$$

donde $\text{diam} S_i = \sup\{\|x - y\| : x, y \in S_i\}$.

Se llama medida de no compacidad de M al número $\alpha(M) := \inf \triangle(M)$.

El siguiente teorema (ver [14] p.17 y 18) describe dos de las propiedades más importantes de la medida de no compacidad que serán utilizadas en la prueba del Teorema A.

Teorema 1.8. *Sea $\Omega \subset X$ un conjunto acotado.*
(i) $\alpha\big(Co(\Omega)\big) = \alpha(\Omega)$, donde $Co(\Omega) := \bigcap\{A : A \supset \Omega; A$ es convexo$\}$.
(ii) Si Ω es relativamente compacto, entonces $\overline{Co}(\Omega)$ es compacto.

Veamos ahora la definición de función integrable para una función definida en un intervalo y con valores en un espacio de Banach.

Definición 1.9 Sean J un intervalo de $\mathbb{R}$ y X un espacio de Banach . Sean α, $\beta \in J$ con $\alpha \leq \beta$ y $r = \{r_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[\alpha, \beta]$. Esto es,

$$\alpha = r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n = \beta.$$

La norma, $\|r\|$, de la partición es $\|r\| = max\{r_i - r_{i-1} : i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$. Una función $f : J \to X$ se dice integrable sobre $[\alpha, \beta]$ si existe $\int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau \in X$ tal que $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ con

$$\Big\| \int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(r_i - r_{i-1}) \Big\| \leq \epsilon$$

siempre que $\|r\| \leq \delta$ y $\xi_i \in [r_i, r_{i-1}] \quad i = 1, 2, \cdots, n$.

Lema 1.10. *Sea X un espacio de Banach, $f : J \to X$ una función integrable. Entonces $(\beta - \alpha)^{-1} \int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau \in \overline{Co}\big(\{f(\tau) : \tau \in [\alpha, \beta]\}\big)$.*

Prueba: Ver [14] p. 25.

§ 2. Demostración del Teorema A

En esta sección se demuestra el teorema principal de este capítulo, el cual permite calcular el grado del gradiente de cierto funcional f definido en un espacio de Hilbert. Este teorema nos posibilita, entre otros resultados, demostrar que el grado en un punto de mínimo local aislado es 1, como lo veremos en la sección 3 de este capítulo.

Sea U un abierto en un espacio de Hilbert H, sea $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ y supongamos que $\nabla f : U \to H$ es un campo vectorial, esto es, $\nabla f = I - F$ donde $F \in C(U, H)$ es compacto.

Teorema A. *Supongamos que, para algún $\beta \in \mathbb{R}$, el conjunto $V := f^{-1}(-\infty, \beta)$ es acotado y $\overline{V} \subset U$. Supongamos, además, que existen $\alpha < \beta$, $r > 0$ y un punto $x_0 \in U$ tal que*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] \subset \overline{B}(x_0, r) \subset V \;\; y \quad \nabla f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in f^{-1}[\alpha, \beta].$$

Entonces

$$d(\nabla f, V, 0) = 1.$$

Prueba: La demostración del teorema se divide en cuatro partes .

(i) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es acotado. Luego $F(U)$ es relativamente compacto. Veamos que $\rho > 0$, donde

$$\rho := inf\{\|\nabla f(x)\| : x \in f^{-1}[\alpha, \beta]\}. \tag{2.1}$$

En efecto, si $\rho = 0$, entonces existe una sucesión $(x_n) \subset f^{-1}[\alpha, \beta]$ tal que $\|\nabla f(x_n)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $(x_n) \subset f^{-1}[\alpha, \beta] \subset U$ y U está acotado, entonces (x_n) está acotada. Por la compacidad de F, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $F(x_{n_k}) \to z \in H$. Luego

$$\|x_{n_k} - z\| \leq \|x_{n_k} - F(x_{n_k})\| + \|F(x_{n_k}) - z\| = \|\nabla f(x_{n_k})\| + \|F(x_{n_k}) - z\| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Por lo tanto $x_{n_k} \to z$. Como f es continua y $[\alpha, \beta]$ es cerrado, entonces $z \in f^{-1}[\alpha, \beta]$. Por la continuidad de F tenemos que $F(x_{n_k}) \to F(z)$ y así $z = F(z)$, es decir $\nabla f(z) = 0$. Lo cual contradice la hipótesis $\nabla f(x) \neq 0$ $\forall\, x \in f^{-1}[\alpha, \beta]$. Luego $\rho > 0$.

Ahora por el Lema 1.1 existe $G : U \to H$ localmente Lipschitz tal que $\|F(x) - G(x)\| \leq \frac{1}{2}\rho \quad \forall x \in U$. De la prueba del Lema 1.1 (ver [6] p. 5) se sigue que $G(U) \subset Co\big(F(U)\big)$. Sea $g := I - G : U \to H$. Como $F(U)$ es relativamente compacto, por el Teorema 1.8 (ii) $\overline{Co}(F(U))$ es compacto y como $\overline{G(U)} \subset \overline{Co}(F(U))$, concluímos que $G(U)$ es relativamente compacto. Por lo tanto G es compacto y así g es un campo vectorial localmente Lipschitz, continuo y compacto.

Sea $h : [0,1] \times \overline{V} \to H$ definida por $h(t,x) = (1-t)\nabla f(x) + tg(x)$. h es una homotopía compacta, es decir, h es continua y $I|_{\overline{V}} - h$ es compacta . Veamos que $h(t,x) \neq 0$ para $(t,x) \in [0,1] \times \partial V$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|h(t,x)\| &= \|(1-t)\nabla f(x) + tg(x)\| = \|\nabla f(x) - t\big(G(x) - F(x)\big)\| \\
&\geq \|\nabla f(x)\| - \|G(x) - F(x)\| \geq \rho - \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\rho > 0.
\end{aligned}
$$

En la desigualdad anterior hemos utilizado el hecho $\partial V \subseteq f^{-1}[\alpha, \beta]$. La invarianza bajo homotopía del grado de Leray-Schauder (Teorema 2.6 , cap.1) permite concluir que

$$
d(\nabla f, V, 0) = d(g, V, 0). \tag{2.2}
$$

(ii) Para cada $x \in U$, sea $t \to \varphi^t(x) := \varphi(t,x)$ la única solución del problema de valor inicial

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y'(t) = -g\big(y(t)\big) \\
y(0) = x\,,
\end{array}
\right. \tag{PVI}
$$

definida en el intervalo maximal de existencia $\big(t^-(x),\ t^+(x)\big) \subset \mathbb{R}$. De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se sigue que

$$\Omega := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U : t^-(x) < t < t^+(x)\}$$

es abierto en $\mathbb{R} \times U$ y $\varphi : \Omega \to U$ es una función Lipschitz continua. Se verifica directamente que

$$\varphi(t,x) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-\tau)} G\big(\varphi^\tau(x)\big)\, d\tau$$

es la solución del problema (PVI).
Haciendo $K_t(x) := \int_0^t e^\tau G\big(\varphi(\tau,x)\big)\, d\tau \quad \forall (t,x) \in \Omega$ tenemos que

$$\varphi(t,x) = e^{-t}\big[x + K_t(x)\big].$$

Por el Teorema fundamental del cálculo

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\Big(f\big(\varphi^\tau(x)\big)\Big)\, d\tau = f\big(\varphi(t,x)\big) - f\big(\varphi(0,x)\big) = f\big(\varphi(t,x)\big) - f(x).$$

Utilizando la regla de la cadena y el hecho de que $\varphi^t(x)$ satisface (PVI), obtenemos

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} f\big(\varphi^\tau(x)\big)\, d\tau = -\int_0^t \big\langle \nabla f\big(\varphi^\tau(x)\big),\, g\big(\varphi^\tau(x)\big)\big\rangle\, d\tau.$$

Por lo tanto,

$$-\int_0^t \big\langle \nabla f\big(\varphi^\tau(x)\big),\, g\big(\varphi^\tau(x)\big)\big\rangle\, d\tau = f\big(\varphi^t(x)\big) - f(x) \text{ para } (t,x) \in \Omega. \tag{2.3}$$

Supongamos que $\varphi^\tau(x) \in f^{-1}[\alpha,\beta]$ para $0 \leq \tau \leq t$. Ahora, para todo $y \in f^{-1}[\alpha,\beta]$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla f(y), g(y)\rangle &= \langle \nabla f(y), y - G(y)\rangle = \langle \nabla f(y), \nabla f(y) + F(y) - G(y)\rangle \\
&= \|\nabla f(y)\|^2 - \langle \nabla f(y), G(y) - F(y)\rangle \\
&\geq \|\nabla f(y)\|^2 - \|\nabla f(y)\| \|G(y) - F(y)\| \geq \|\nabla f(y)\| \big(\|\nabla f(y)\| - \frac{\rho}{2}\big) \\
&\geq \rho(\rho - \frac{\rho}{2}) = \frac{\rho^2}{2}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto de (2.3) y (2.4) tenemos

$$
-\int_0^t \langle \nabla f(\varphi^\tau), g(\varphi^\tau)\rangle \, d\tau \leq -\frac{\rho^2}{2} t.
$$

En consecuencia

$$
\alpha - \beta \leq f\big(\varphi^t(x)\big) - f(x) \leq -\frac{\rho^2 t}{2}. \qquad (2.5)
$$

Afirmamos ahora que $t^+(x) = \infty \quad \forall\, x \in \overline{V}$ y

$$
\varphi^s(x) \in f^{-1}(-\infty, \alpha] \quad \forall x \in \partial V, \quad \text{donde} \quad s := \frac{2}{\rho^2}(\beta - \alpha). \qquad (2.6)
$$

En efecto, si $t^+(x) < \infty$ para algún $x \in \overline{V}$, existe una sucesión (t_n) con $t_n < t^+(x)$ y $t_n \to t^+(x)$. Como $g = I - G = \nabla f + F - G$, entonces para $y(t) = \varphi^t(x)$,

$$
y'(t) = -\nabla f\big(y(t)\big) + G\big(y(t)\big) - F\big(y(t)\big).
$$

Integrando entre t_n y t_{n+1} obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\| &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla f\big(y(t)\big)\| \, dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|G\big(y(t)\big) - F\big(y(t)\big)\| \, dt \\
&\leq M(t_{n+1} - t_n) + \frac{\rho}{2}(t_{n+1} - t_n) = C(t_{n+1} - t_n),
\end{aligned}
$$

donde M es una constante y $C = M + \rho/2$. Luego $\big(y(t_n)\big)$ es Cauchy y por lo tanto converge a un elemento $\overline{y}$ cuando $t_n \to t^+(x)$. La solución de

$$y'(t) = -g\big(y(t)\big),\ y(0) = \overline{y}$$

proporciona una continuación de $y(t)$ a valores de $t > t^+(x)$ contradiciendo la maximalidad de $t^+(x)$.

Ahora, en (2.5), haciendo $s = t$ y como $\partial V \subset f^{-1}[\alpha, \beta]$ tenemos

$$f\big(\varphi^s(x)\big) \leq f(x) - \frac{\rho^2 s}{2} = f(x) - (\beta - \alpha) \leq \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

Luego $\varphi^s(x) \in f^{-1}(-\infty, \alpha] \quad \forall\, x \in \partial V$.

(iii) Sea $h : [0, s] \times \overline{V} \to H$ la función definida así

$$h_t(x) := \begin{cases} \dfrac{e^t}{e^t - 1}\big(x - \varphi^t(x)\big) & \text{si} \quad 0 < t \leq s \\ g(x) & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

De la definición de K_t se tiene que $h_t(x) = x - \dfrac{K_t(x)}{e^t - 1}$.

La idea de esta parte de la prueba es demostrar, utilizando el Teorema de invarianza del grado bajo homotopía, que $d(g, V, 0) = d(h_s, V, 0)$.

Veamos primero que h es una homotopía compacta. Como $\overline{G(\overline{V})}$ es compacto, existe un conjunto compacto C tal que $e^\tau G\big(\varphi^\tau(x)\big) \in C$ para $(\tau, x) \in [0, s] \times \overline{V}$. Por el Lema 1.10 ,

$$\frac{1}{t}\int_0^t e^\tau G\big(\varphi^\tau(x)\big)\, d\tau \in \overline{Co}(C) \quad \forall\, (t, x) \in (0, s] \times \overline{V}.$$

Esto implica que $I|_{\overline{V}} - h$ aplica $[0, s] \times \overline{V}$ en un conjunto compacto.

Veamos ahora la continuidad de h. De la definición de h se concluye la continuidad en $(0,s]\times\overline{V}$. Supongamos que $\{(t_k,x_k)\}\subset[0,s]\times\overline{V}$ es una sucesión tal que $(t_k,x_k)\to(0,x)$. Para demostrar que $h_{t_k}(x_k)\to h_0(x)$, es suficiente considerar el caso $t_k>0$, y probar que $t_k^{-1}K_{t_k}(x_k)\to G(x)$ ya que

$$h_{t_k}(x_k)=x_k-(e^{t_k}-1)^{-1}K_{t_k}(x_k)=x_k-\Big(\frac{t_k}{e^{t_k}-1}\Big)t_k^{-1}K_{t_k}(x_k),$$

$g=I-G$ y $\lim\limits_{t_k\to 0}\dfrac{t_k}{e^{t_k}-1}=1$.

Como $M:=\{x_k:k\geq 1\}\cup\{x\}$ es compacto, los conjuntos $[0,s]\times M$ y $\overline{\varphi([0,s])\times M}$ son compactos. Como G es continua localmente lipschtiziana en $\overline{\varphi([0,s])\times M}$, entonces es uniformemente Lipschtiz. Por lo tanto $\exists\lambda>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|G(\varphi^{\tau}(x_k))-G(x)\| &\leq \lambda\|\varphi^{\tau}(x_k)-x\|\leq\lambda\|\varphi^{\tau}(x_k)-\varphi^{\tau}(x)\|+\lambda\|\varphi^{\tau}(x)-x\|\\ &\leq \mu\|x_k-x\|+\lambda\|\varphi^{\tau}(x)-x\| \quad \forall\tau\in[0,s] \text{ y } k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

donde $\mu=\mu(\lambda)$ es una constante cuya existencia se tiene por ser φ localmente lipschitziana en un compacto y por ello resulta ser uniformemente Lipschitz.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|t_k^{-1}K_{t_k}(x_k)-G(x)\| &= \Big\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}e^{\tau}\left[G(\varphi^{\tau}(x_k))-G(x)\right]d\tau+\Big(\frac{e^{t_k}-1}{t_k}-1\Big)G(x)\Big\|\\ &\leq\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}e^{\tau}\big(\mu\|x_k-x\|+\lambda\|\varphi^{\tau}(x_k)-x\|\big)\,d\tau\\ &+\|G(x)\|\Big(\frac{e^{t_k}-1}{t_k}-1\Big)\\ &=\mu\|x_k-x\|\Big(\frac{e^{t_k}-1}{t_k}\Big)+\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}\lambda e^{\tau}\|\varphi^{\tau}(x_k)-x\|\,d\tau\\ &+\|G(x)\|\Big(\frac{e^{t_k}-1}{t_k}-1\Big)\to 0\end{aligned}$$

cuando $t_k\to 0$. Luego $t_k^{-1}K_{t_k}(x_k)\to G(x)$. En consecuencia h es continua en $t=0$ y por lo tanto es una homotopía compacta .

Probemos ahora que $h(t,x) \neq 0$ para todo $t \in (0,s]$ y $x \in \partial V$. En efecto, si $h(t,x) = 0$ con $(t,x) \in (0,s] \times \partial V$, entonces $x = \varphi^t(x) \in \partial V \subset f^{-1}[\alpha,\beta]$. Por (2.5), $0 = f\big(\varphi^t(x)\big) - f(x) < 0$, lo cual es una contradicción. Luego $h(t,x) \neq 0$ para todo $(t,x) \in (0,s] \times \partial V$. Para $t = 0$, $h = g = I - G$ y

$$\|g(x)\| \geq \|x - F(x)\| - \|G(x) - F(x)\| = \|\nabla f(x)\| - \|G(x) - F(x)\| \geq \rho - \rho/2 = \rho/2 > 0$$

$\forall x \in \partial V$. Por la invarianza del grado bajo homotopía concluímos que

$$d(g,V,0) = d(h_s,V,0). \tag{2.7}$$

(iv) En esta parte final se prueba que $d(h_s V,0) = 1$. Sea $k : [0,1] \times \overline{V} \to H$ definida así

$$k(\sigma,x) := (1 - \sigma e^{-s})^{-1}\big(x - \sigma\varphi^s(x) - (1-\sigma)x_0\big).$$

Luego $k(\sigma,x) = x - (1-\sigma e^{-s})^{-1}\Big[\sigma e^{-s}K_s(x) + (1-\sigma)x_0\Big]$, $k(0,x) = x - x_0$ y $k(1,x) = h_s(x)$.

De la definición de k se deduce fácilmente que k es continua. Ahora

$$I - k = \frac{\sigma e^{-s}}{1-\sigma e^{-s}}K_s + \frac{1-\sigma}{1-\sigma e^{-s}}x_0$$

es compacta. Luego k es una homotopía compacta.

Ahora, $k(\sigma,x) = 0$ si y sólo si $x - x_0 = \sigma(\varphi^s(x) - x_0)$.

Como $f^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \overline{B}(x_0,r)$ por hipótesis y, de (2.6), $\varphi^s(x) \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$, entonces $\|\varphi^s(x) - x_0\| \leq r$ $\forall x \in \partial V$. Además, como $\|x - x_0\| > r$ en ∂V entonces $k(\sigma,x) \neq 0$ en $[0,1] \times \partial V$. Por la invarianza del grado bajo homotopía obtenemos

$$d(h_s,V,0) = d(I - x_0,V,0) = 1 \tag{2.8}$$

Luego el teorema se sigue de (2.2), (2.7), (2.8). ■

§ 3. Consecuencias del Teorema A

Sea U un abierto en un espacio de Hilbert H, sea $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ y supongamos que $\nabla f : U \to H$ es un campo vectorial compacto, esto es, $\nabla f = I - F$ donde $F \in C(U, H)$ es compacto. Observamos que $f(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2 - \Phi(x)$, donde $\nabla\Phi = F$. El primer corolario nos dice que el grado de Leray-Schauder del gradiente de un funcional coercivo en una bola suficientemente grande, es uno.

Corolario 3.1. *Supongamos que $U = H$, f es coercivo y que existe $r_0 > 0$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$ para $\|x\| \geq r_0$, entonces $\exists r_1 \geq r_0$ tal que*

$$d\big(\nabla f, B(0, r), 0\big) = 1 \quad \forall r \geq r_1.$$

Prueba. Como F es compacto y $F = \nabla\Phi$ entonces por el Teorema 1.3 se deduce que Φ es débilmente continuo. Veamos que f aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. En efecto, sea A un conjunto acotado tal que $f(A)$ no es acotado. Luego existe una sucesión (x_n) en A tal que $f(x_n) \to +\infty$. Como (x_n) está acotada existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge débilmente, digamos $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Por ser Φ débilmente continua, $\Phi(x_{n_k}) \to \Phi(x)$. Luego $\big(\Phi(x_{n_k})\big)$ está acotada y en consecuencia $\big(f(x_{n_k})\big)$ está acotada, lo cual contradice que $f(x_{n_k}) \to \infty$. Por lo tanto $f(A)$ es acotado.

Sean $\alpha := \sup f\big(B(0, r_0)\big)$ y $r_1 := \sup\{\|x\| : x \in f^{-1}(-\infty, \alpha]\}$. Obsérvese que $r_1 < \infty$ por la coercividad de f. Como $B(0, r_0) \subset A := \{x : x \in f^{-1}(-\infty, \alpha]\}$ entonces $\sup\{\|x\| : x \in B(0, r_0)\} \leq \sup\{\|x\| : x \in A\}$, es decir $r_0 \leq r_1$. Dado $r \geq r_1$, sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > \sup f\big(\overline{B}(0, r)\big)$.

Hagamos $x_0 = 0$ en el Teorema A y veamos que se cumplen las hipótesis .

$V = f^{-1}(-\infty, \beta)$ es acotado. En efecto, si no lo fuera, entonces existiría una sucesión $(x_n) \subset V$ tal que $\|x_n\| \to \infty$. Luego $f(x_n) < \beta$ y por la coercividad $f(x_n) \to \infty$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto V es acotado. La condición $\overline{V} \subset U$ es inmediata.

$\alpha < \beta$, ya que $\beta > \sup f\big(\overline{B}(0,r)\big) \geq \sup f\big(\overline{B}(0,r_1)\big) \geq \sup f\big(B(0,r_0)\big) = \alpha$.

$f^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \overline{B}(0,r) \subset V$. Si $f(x) \leq \alpha$ entonces $\|x\| \leq r_1 \leq r$. Por lo tanto, $f^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \overline{B}(0,r)$. Ahora, $x \in \overline{B}(0,r) \Longrightarrow \|x\| \leq r \Longrightarrow f(x) \leq \sup f\big(\overline{B}(0,r)\big) < \beta$. Luego, $x \in V$.

$\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in f^{-1}[\alpha,\beta]$ por (2.1). Luego, por el Teorema A, $d(\nabla f, V, 0) = 1$. Teniendo en cuenta la propiedad de escisión del grado (Teorema 2.7 capítulo 1) tenemos

$$d(\nabla f, V, 0) = d(\nabla f, B(0,r), 0) + d(\nabla f, V - \overline{B}(0,r), 0).$$

Como $d(\nabla f, V - \overline{B}(0,r), 0) = 0$, ya que por hipótesis $\nabla f(x) \neq 0$ si $\|x\| \geq r_0$ y $r \geq r_1 \geq r_0$, entonces

$$d(\nabla f, B(0,r), 0) = 1. \quad \blacksquare$$

Mostramos enseguida que el índice de un mínimo local aislado de un funcional de clase C^1, es uno.

Corolario 3.2. *Si $x_0 \in U$ es un punto crítico aislado de f en el cual f tiene un mínimo local, entonces $i(\nabla f, x_0) = 1$.*

Prueba: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ y que $U = B(0,r_0)$ para algún $r_0 > 0$ tal que 0 es el único punto crítico de f en U.

Afirmación:

$$\inf f\Big(\overline{B}(0,r_2) - B(0,r_1)\Big) > 0 \quad \forall r_1, r_2 \text{ tales que } 0 < r_1 \leq r_2 < r_0.$$

En efecto, si el ínfimo fuera cero, entonces existen r_1, r_2 con $0 < r_1 \leq r_2 < r_0$ y una sucesión $(x_k) \subset \overline{B}(0,r_2) - B(0,r_1)$ tal que $f(x_k) \to 0$. Podemos suponer que

(x_k) converge débilmente a algún $x \in \overline{B}(0,r_2)$. Como Φ es débilmente continuo y la norma es DISC, entonces $f(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2 - \Phi(x)$ es DISC . Luego

$$0 \leq f(x) \leq \liminf f(x_k) = 0.$$

Por lo tanto $f(x) = 0$, lo cual implica $\Phi(x) = \|x\|^2/2$, luego $\nabla\Phi(x) = x$ y así $\nabla f(x) = 0$. Como 0 es el único punto crítico de f en U, entonces $x = 0$. Por otra parte, como $x_k \notin B(0,r_1)$ entonces $f(x_k) \geq \frac{1}{2}r_1^2 - \Phi(x_k)$. Y como $\Phi(x_k) \to 0$, entonces $\liminf f(x_k) \geq \frac{1}{2}r_1^2 > 0$ lo cual contradice que $f(x_k) \to 0$. En consecuencia, $\inf f\Big(\overline{B}(0,r_2) - B(0,r_1)\Big) > 0$.

Fijemos r_1 y r_2 con $0 < r_1 < r_2 < r_0$ y sea $\beta := \inf f\Big[\overline{B}(0,r_2) - B(0,r_1)\Big]$. Escojamos $r > 0$ con $r < r_1$ tal que $\overline{B}(0,r) \subset f^{-1}(-\infty,\beta)$ y sea

$$\alpha := \frac{1}{2}\inf f\Big[\overline{B}(0,r_2) - B(0,r)\Big].$$

Observamos que $\alpha < \beta$ ya que $f\Big[\overline{B}(0,r_2) - B(0,r_1)\Big] \subset f\Big[\overline{B}(0,r_2) - B(0,r)\Big]$.

Sea $U = B(0,r_2)$, veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema A.

$V = f^{-1}(-\infty,\beta)$ está acotado pues $V \subset U$ y, además $\overline{V} \subset U$.

$f^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \overline{B}(0,r)$. Si no fuera así, entonces existe un x tal que $x \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$ y $\|x\| > r$, luego

$$f(x) \leq \alpha < \beta \Longrightarrow x \in V \subset U = B(0,r_2).$$

Luego, utilizando la definición de α, $f(x) \geq 2\alpha$, lo que es una contradicción . Por lo tanto

$f^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \overline{B}(0,r)$. Finalmente, como 0 es el único punto crítico en U, $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in f^{-1}[\alpha,\beta]$. Luego $d(\nabla f, V, 0) = 1$.

De la propiedad de escisión del grado (Teorema 2.7, Capítulo 1) se deduce que

$$1 = d(\nabla f, V, 0) = d(\nabla f, B(0,r), 0) + d(\nabla f, V - \overline{B}(0,r), 0).$$

Pero 0 es el único punto crítico de f en U y en consecuencia por la definición 1.5 tenemos

$$i(\nabla f, 0) = 1 . \quad \blacksquare$$

Corolario 3.3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema A y además que $x_1 \in V$ es un punto crítico de f, el cual no es un mínimo global de f en V. Supongamos también que F es diferenciable en x_1 y 1 no es un valor propio de la derivada $F'(x_1) \in \mathcal{L}(H)$ o que x_1 es un mínimo local, entonces f tiene al menos tres puntos críticos en V.*

Prueba : En el primer caso, por el Teorema 1.4 $F'(x_1)$ es un operador lineal compacto. De esta manera, como 1 no es un valor propio de $F'(x_1)$, la derivada de ∇f en x_1 es invertible y así $(\nabla f(x_1))'$ es un automorfismo continuo de H (ver [12] p. 135).
Afirmación : $\exists\, \alpha > 0$ tal que $\|F'(x_1)(x) - x\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in H$. En efecto, si no fuera así, entonces $\forall\, \alpha > 0$, $\|F'(x_1)(x) - x\| < \alpha\|x\|$ para algún $x \in H - \{0\}$. En particular para cada $n \in \mathbb{N}$ se tendría que $\|F'(x_1)(x) - x\| < \frac{1}{n}\|x\|$ lo cual implica $\|F'(x_1)(x) - x\| = 0$. Luego $F'(x_1)(x) = x$. Lo cual contradice la hipótesis de que 1 no es valor propio de $F'(x_1)$. Veamos que x_1 es un cero aislado de ∇f. En efecto, por la diferenciabilidad de F en x_1 para $\epsilon = \alpha/2 > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que $\forall\, x \in B(x_1, \delta_0)$, $\|F(x_1 + x) - F(x_1) - F'(x_1)(x)\| < \alpha/2\|x\|$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_1 + x)\| &= \|x_1 + x - F(x_1 + x)\| = \|x + F(x_1) - F(x_1 + x)\| \\
&= \|x + F(x_1) - F(x_1 + x) + F'(x_1)(x) - F'(x_1)(x)\| \\
&\geq \|F'(x_1)(x) - x\| - \|F(x_1 + x) - F(x_1) - F'(x_1)(x)\| \\
&\geq \alpha\|x\| - \frac{\alpha}{2}\|x\| = \frac{\alpha}{2}\|x\| > 0
\end{aligned}$$

Luego ∇f no tiene ceros en $B(x_1, \delta_0)$. Por el Teorema 1.6 $i(\nabla f, x_1) = \pm 1$.
Como f es DISC en $\overline{B}(x_0, r)$, f obtiene su mínimo global en algún $x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$

(ver [18] p.78). La hipótesis acerca de x_1 implica que $x_1 \neq x_2$. Si x_1 y x_2 son los únicos puntos críticos de f en V, entonces por propiedades del grado, el Teorema A y el corolario anterior, se sigue en cualquiera de los casos que

$$1 = d(\nabla f, V, 0) = i(\nabla f, x_1) + i(\nabla f, x_2) \in \{0, 2\},$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia existe al menos un tercer punto crítico. ■

Por último, veamos un caso particular del Corolario 3.3.

Corolario 3.4. *Supongamos que $U = H$ y que f es coerciva. Más aun, supongamos que x_1 es un punto crítico de f, el cual no es un mínimo global. Si F es diferenciable en x_1 y 1 no es un valor propio de la derivada o x_1 es un mínimo local, entonces f tiene al menos tres puntos críticos .*

Prueba : Basta simplemente usar el Corolario 3.1 en lugar del Teorema A en la demostración del Corolario 3.3. ■

CAPITULO 3

EL GRADO EN UN PUNTO CRITICO DEL TIPO PASO DE LA MONTAÑA

El objetivo del presente capítulo es demostrar que el grado local del gradiente de un cierto funcional de clase C^2 en un punto crítico del tipo paso de la montaña es -1 (ver Teorema B). Este resultado es independiente de que el punto crítico sea degenerado o no degenerado, siempre que el funcional esté restringido a una clase de funcionales que cumplen una condición especial (ver Condición (2.1) p. 43). En el caso degenerado y cuando no se verifique la condición mencionada arriba, mostramos, con un ejemplo, que el grado no necesariamente es -1 (ver Observación 2 p. 48).

Este capítulo consta de dos secciones. En la sección 1, presentamos un teorema de existencia de puntos críticos del tipo paso de la montaña en el cual la herramienta básica es el Lema de deformación. Y en la sección 2, presentamos la demostración del teorema B.

§1. Puntos críticos del tipo paso de la montaña.

Definición 3.1 Sea X un espacio de Banach real y sean $U \subset X$ un abierto no vacío y $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R})$. Supongamos que $u_0 \in C_r(\Phi, d)$ para algún $d \in \mathbb{R}$. Decimos que u_0 es del tipo paso de la montaña (tipo mp) si existe una vecindad $V \subset U$ de u_0 tal que para toda vecindad $W \subset V$ de u_0 el espacio topológico $W \cap \dot{\Phi}^d \neq \emptyset$ y no es arco conexo, donde $\dot{\Phi}^d := \{x \in U : \Phi(x) < d\}$.

El siguiente teorema demuestra, bajo hipótesis muy generales, la existencia de puntos críticos del tipo paso de la montaña.

Teorema 3.2. *Sean H un espacio de Hilbert y $\Phi \in C^1(H,\mathbb{R})$ que satisface (PS). Supongamos que e_0, e_1 son puntos distintos en H. Definamos*

$$\begin{aligned} A &= \{a \in C([0,1],H)\,;\, a(0)=e_0,\ a(1)=e_1\},\\ d &= \inf_{a\in A}\ \sup_{t\in[0,1]} \Phi\big(a(t)\big),\\ c &= \max\{\Phi(e_0),\Phi(e_1)\}. \end{aligned}$$

Si $d > c$ entonces el conjunto de puntos críticos de Φ es no vacío. Si, además, los puntos críticos en $C_r(\Phi,d)$ son aislados en H, entonces existe un punto crítico u_0 del tipo paso de la montaña en $C_r(\Phi,d)$.

Prueba: Observamos inicialmente que por el Teorema del paso de la montaña (ver Teorema 4.3 cap. 1), $C_r(\Phi,d) \neq \varnothing$. Veamos que el conjunto de puntos críticos $C_r(\Phi,d)$ es finito. En efecto, si fuera infinito, como por (PS) el conjunto $C_r(\Phi,d)$ es compacto, entonces dicho conjunto tendría un punto de acumulación. Pero un conjunto de puntos aislados no tiene puntos de acumulación. Luego $C_r(\Phi,d)$ es finito. Sea $C_r(\Phi,d) = \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$.
Supongamos que no hay puntos críticos del tipo mp en $C_r(\Phi,d)$. Luego existen vecindades U_i de u_i tales que $U_i \cap \dot{\Phi}^d$ es vacío o es arco conexo. Es claro que $C_r(\Phi,d) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i := U$. Definamos $\delta > 0$, $\overline{\epsilon} > 0$, W, V por

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon} &:= 1/2(d-c),\\ \delta &:= \frac{1}{8}\min\big\{\mathrm{dist}\big((\partial U \cup \{e_0,e_1\}), C_r(\Phi,d)\big), \inf\{\mathrm{dist}(u_i, C_r(\Phi)-\{u_i\})\,;\forall i\}\big\},\\ W &:= \{u\in H \mid \mathrm{dist}(u,C_r(\Phi,d)) < 2\delta\},\\ V &:= \{u\in H \mid \mathrm{dist}(u,C_r(\Phi,d)) < \delta\}. \end{aligned}$$

Por el Lema de deformación (ver Teorema 4.2 cap. 1) existen $\epsilon \in (0,\overline{\epsilon}]$ y $\eta : [0,1]\times H \to H$ que verifican las conclusiones del mismo.

Por la definición de d es posible seleccionar $a \in A$ tal que $\Phi(a(t)) \leq d+\epsilon \quad \forall t \in [0,1]$. Sean $W_i = B(u_i, 2\delta)$ y $V_i = B(u_i, \delta)$. Entonces $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Definamos los conjuntos

$$M := \{t \in [0,1] \,|\, a(t) \notin V\}, \text{y}$$

$$\Gamma := \left(U \cap \dot{\Phi}^d\right) \cup \eta\left(\{1\} \times a(M)\right).$$

Veamos que $\Gamma \neq \varnothing$. Para ello probemos que $e_0,\ e_1 \in \Gamma$. En efecto, de la definición de δ se tiene que $8\delta \leq \|e_0 - u_i\|\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Luego $e_0 \notin V$ y así $0 \in M$, por tanto $\eta(1, e_0) \in \Gamma$. Pero del Lema de deformación se concluye que $\eta(1, e_0) = e_0$ puesto que $\Phi(e_0) \leq c = d - 2\bar{\epsilon} < d - \bar{\epsilon}$. En consecuencia $e_0 \in \Gamma$. Similarmente se prueba que $\eta(1, e_1) = e_1$ y $e_1 \in \Gamma$. Sea $\tilde{\Gamma}$ la componente arco conexa de e_0 en Γ. Demostraremos más adelante que $e_1 \in \tilde{\Gamma}$, lo cual concluye la demostración, ya que si $e_1 \in \tilde{\Gamma}$ entonces existiría un camino g que uniría e_0 con e_1, tal que $g([0,1]) \subseteq \tilde{\Gamma} \subset \Gamma \subset \dot{\Phi}^d$ pero esto contradice la definición de d, ya que, como $\Phi \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $\sup\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) = \Phi(g(\bar{t}))$. Luego $d \leq \sup \Phi(g(t)) = \Phi(g(\bar{t})) < d$. Demostremos que $e_1 \in \tilde{\Gamma}$. Si $M = [0,1]$ entonces $a(t) \notin V\ \forall t \in [0,1]$ y así el camino $\sigma(t) = \eta(1, a(t)) \in \Gamma$ conectaría e_0 con e_1 puesto que $\sigma(0) = e_0 \in \tilde{\Gamma}$ y $\sigma(1) = e_1$. Luego $e_1 \in \tilde{\Gamma}$. Supongamos $M \neq [0,1]$. Definamos

$$t_0 = \sup\{t \in M \,:\, \eta(1, a(t)) \in \tilde{\Gamma}\}.$$

Veamos que $t_0 = 1$. Supongamos que $t_0 < 1$. Como $0 \in intM$ en [0,1], entonces $t_0 \in (0,1)$. Sea $[t^-, t^+]$ la componente conexa en M que contiene a t_0. Necesariamente $t_0 = t^+$ pues si $t_0 < t^+$ existe un t con $t_0 < t < t^+$ tal que $\eta(1, a(t)) \in \tilde{\Gamma}$, lo cual contradice la definición de t_0. Ahora como cualquier vecindad de t_0 contiene puntos de M y de su complemento, entonces $a(t_0) \in \partial V$. Luego existe un único $i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\|a(t_0) - u_{i_0}\| = \delta$. Sea

$$\tilde{t} := \sup\{t \in [0,1] \,:\, a(t) \in \overline{V_{i_0}}\}.$$

Por lo anterior y como $t_0 = t^+$ encontramos que $\tilde{t} \in (t_0, 1)$. Es un hecho que $a(\tilde{t}) \in \partial V_{i_0}$. Por lo tanto $\tilde{t} \in M$ y por la escogencia de la a, y el Lema de deformación, tenemos que $g_1 := \eta\big(1, a(\tilde{t})\big) \in W_{i_0} \cap \dot{\Phi}^d \subset U_{i_0} \cap \dot{\Phi}^d$. Además $g_2 := \eta\big(1, a(t_0)\big) \in U_{i_0} \cap \dot{\Phi}^d$. Como $U_{i_0} \cap \dot{\Phi}^d$ es arco conexo, g_1 y g_2 pertenecen a la misma componente arco conexa. Y como $g_2 \in \tilde{\Gamma}$ concluímos que $g_1 \in \tilde{\Gamma}$. Luego por la definición de t_0, tenemos $t_0 \geq \tilde{t} > t_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $t_0 = 1$ y así $e_1 \in \tilde{\Gamma}$, con lo que concluye la demostración. ■

§2. Demostración del Teorema B

Para estudiar el grado en un punto crítico del tipo paso de la montaña necesitamos imponer la siguiente condición al funcional Φ de clase C^2 que se quiere estudiar.

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \text{Para cada} \quad u_0 \in C_r(\Phi) \text{ el primer valor propio} \quad \lambda_1 \quad \text{del operador} \\ \Phi''(u_0) \in \mathcal{L}(H) \quad \text{en} \quad u_0 \quad \text{es simple siempre que} \quad \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Veamos ahora el teorema principal de este capítulo.

Teorema B. *Sea U un abierto no vacío en un espacio de Hilbert real H, y sea $\Phi \in C^2(U, \mathbb{R})$. Supongamos que $\nabla\Phi$ tiene la forma identidad menos compacto y que satisface la condición (2.1). Si u_0 es un punto crítico aislado del tipo paso de la montaña entonces*

$$i(\nabla\Phi, u_0) = -1.$$

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_0 = 0$ y $\Phi(0) = 0$. Por el Lema de Morse (ver Teorema 4.4 cap. 1), Φ tiene la forma

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 + \psi(y),$$

donde $u = x + y + z \in W = W^- \oplus W^0 \oplus W^+$ con $\overline{W} \subset U$ y donde W^- y W^+ son bolas de radio δ alrededor de 0 en H^- y H^+ y donde W^0 es una bola alrededor de 0 en H^0 tal que

$$(2.2) \qquad |\psi(y)| \leq \frac{\delta^2}{8} \quad \forall\, y \in W^0.$$

Como 0 es un punto crítico aislado, podemos suponer además que $\overline{W} \cap C_r(\Phi) = \{0\}$. La prueba se hará en tres pasos :

Paso (i) Demostremos que $\dim H^- \leq 1$.

Supongamos, por contradicción, que $\dim H^- \geq 2$. Sea $\Gamma := W \cap \dot{\Phi}^0$. Probemos que Γ es arco conexo, lo cual contradice nuetra hipótesis que 0 es un punto crítico del tipo paso de la montaña. Para $g, g' \in \Gamma$ escribiremos $g \sim g'$ si y sólo si g y g' están en la misma componente arco conexa de Γ. Sea $g := x_1 + y_1 + z_1 \in \Gamma$. Sea $a : [0,1] \to H$ el camino definido por $a(t) = x_1 + y_1 + tz_1$. Veamos que $\Phi\big(a([0,1])\big) \subseteq \Gamma$. En efecto, por el Lema de Morse, $\Phi(a(t)) = -\frac{1}{2}\|x_1\|^2 + \frac{t^2}{2}\|z_1\|^2 + \psi(y_1)$. Como $t \in [0,1]$ y $g \in \Gamma$, entonces $\Phi(a(t)) \leq \Phi(g) < 0$. Luego $\Phi(a(0)) = \Phi(x_1 + y_1) < 0$ y en consecuencia $g \sim g_1 := x_1 + y_1 \in \Gamma$. Ahora, sea $x_2 \in W^-$con $\|x_2\| > \frac{\delta}{2}$ y $\|tx_2 + (1-t)x_1\| \geq \|x_1\|$ para todo $t \in [0,1]$. Sea $a_1 : [0,1] \to H$ el camino definido por $a_1(t) = tx_2 + (1-t)x_1 + y_1$. Como $g_1 \in \Gamma$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi\big(a_1(t)\big) &= -\frac{1}{2}\|tx_2 + (1-t)x_1\|^2 + \psi(y_1) \leq -\frac{1}{2}\|x_1\|^2 + \psi(y_1)\\ &= \Phi(g_1) < 0.\end{aligned}$$

Lo cual implica que $g_1 \sim g_2 := x_2 + y_1 \in \Gamma$. Finalmente si usamos el camino $a_2(t) := x_2 + (1-t)y_1$ con $t \in [0,1]$ tenemos que $\Phi(a_2(t)) = -\frac{1}{2}\|x_2\|^2 + \psi((1-t)y_1)$. Por la forma como se escogió x_2 y por (2.2), $\Phi(a_2(t)) < 0$. En consecuencia $g_2 \sim g_3 := x_2 \in W^- - \{0\}$. Hemos demostrado que

$$(2.3) \qquad \forall g \in \Gamma \quad \text{existe} \quad \hat{g} \in \hat{\Gamma} := W^- - \{0\} \quad \text{tal que} \quad g \sim \hat{g}, \text{ si } H^- \neq \{0\}.$$

Como dim $H^- \geq 2$, el conjunto $\hat{\Gamma}$ es arco conexo. Esto y (2.3) implican que Γ es conexo por caminos, lo cual contradice que 0 es un punto crítico del tipo mp. En consecuencia $\dim H^- \leq 1$.

Paso (ii) Sean $m^- := \dim H^-$ y $m^0 := \dim H^0$. Demostremos que

$$(2.4) \qquad (m^-, m^0) \in \big(\{1\} \times \mathbb{N}\big) \cup \{(0,1)\}, \qquad \text{donde } \mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}.$$

Supongamos que $(m^-, m^0) \notin \{1\} \times \mathbb{N}$. Por el paso (i) $m^- = 0$. Veamos que $m^0 = 1$. Si $m^0 = 0$ entonces $H^- = H^0 = \{0\}$. Por el Lema de Morse $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|z\|^2$. Por lo tanto $u = 0$ es un mínimo local de Φ, lo cual es una contradicción ya que 0 es del tipo paso de la montaña. Luego $m^0 \geq 1$. Ahora, por la condición (2.1), $m^0 = 1$. Luego $(m^-, m^0) \in \{(0,1)\}$.

Paso (iii) Demostremos que

$$(m^-, m^0) \in \big(\{1\} \times \mathbb{N}\big) \cup \{(0,1)\} \Longrightarrow i(\nabla\Phi, 0) = -1.$$

Supongamos inicialmente que $(m^-, m^0) \in \{1\} \times \mathbb{N}$. Veamos que 0 es un mínimo local de ψ. Supongamos, por contradicción, que 0 no es un mínimo local de ψ. Luego existe $y \in W^0 - \{0\}$ tal que $\psi(y) < 0$. Como en la pueba del paso (i) y como $\dim H^-$ es uno, encontramos que $\Gamma := W \cap \dot{\Phi}^0$ tiene a lo más dos componentes arco conexas que pueden ser representadas por los elementos $\hat{x}$, $\overline{x} \in W^- - B(0, \frac{2\delta}{3})$. Definamos el camino $a : [0,3] \to H$ por

$$a(t) = \begin{cases} \hat{x} + ty, & t \in [0,1] \\ (2-t)\hat{x} + (t-1)\overline{x} + y, & t \in [1,2] \\ \overline{x} + (3-t)y, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Claramente a es continua y por el Lema de Morse, para $t \in [0,1]$, $\Phi(a(t)) = -\frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2 + \psi(ty)$. Como $\|\hat{x}\| \geq \frac{2\delta}{3}$ y $\psi(ty) \leq \frac{\delta^2}{8}$, entonces $\Phi(a(t))$ es negativo. Similarmente $\Phi(a(t)) < 0$ si $t \in [2,3]$. Ahora para $t \in [1,2]$ se tiene $\Phi(a(t)) = -\frac{1}{2}\|(2-t)\hat{x} + (t-1)\overline{x}\|^2 + \psi(y)$, que es menor que cero puesto que $\psi(y) < 0$. Luego $a(t) \in \Gamma$ $\forall t \in [0,3]$. De aquí se deduce que $\hat{x} \sim \overline{x}$, y así Γ es arco conexo, lo que contradice que 0 es del tipo paso de la montaña. Por lo tanto 0 es un mínimo local de ψ. Por el Corolario 3.2 al Teorema A del Capítulo 2, se concluye que $i(\nabla\psi, 0) = 1$. Por el Lema de Morse $i(\nabla\Phi, 0) = -i(\nabla\psi, 0)$, luego

$$i(\nabla\Phi, 0) = -1.$$

Ahora, supongamos que $(m^-, m^0) = (0,1)$. Veamos que 0 es un máximo local de ψ. En efecto, como 0 es un punto crítico aislado de ψ, y como $\dim H^0 = 1$, existen cuatro tipos de comportamientos de ψ localmente, a saber : $\psi \sim y^2$, $\psi \sim -y^2$, $\psi \sim sign(y)\, y^2$, $\psi \sim -sign(y)\, y^2$. El caso $\psi \sim y^2$ no puede ocurrir puesto que como $m^- = 0$, por el Lema de Morse se tiene $\Phi(x+y+z) = \Phi(y+z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 + \psi(y)$ y así 0 sería un mínimo local de Φ, lo cual no es posible. Si $\psi \sim sign(y)\, y^2$ o $\psi \sim -sign(y)\, y^2$, Γ sería contraíble a un punto y en particular sería conexo por caminos, lo cual es una contradicción. Luego $\psi \sim -y^2$ y así 0 es un máximo local de ψ y en consecuencia 0 es un mínimo local de $-\psi$. Por las propiedades del grado y el Corolario 3.2 del Teorema A tenemos

$$1 = i(-\nabla\psi, 0) = (-1)^{dim\, H^0} i(\nabla\psi, 0) = -i(\nabla\psi, 0).$$

Por el Lema de Morse $i(\nabla\psi, 0) = i(\nabla\Phi, 0)$. Luego

$$i(\nabla\Phi, 0) = -1 \quad \blacksquare$$

Observación 1. El siguiente ejemplo muestra la existencia de un funcional que aparece en el estudio de ecuaciones elípticas y que cumple la condición (2.1).
Sea $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$|f'(s)| \leq C\big(1 + |s|^{\sigma - 1}\big)\ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

donde $C > 0$ es una constante, $\sigma \in \left[1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$ y $N \geq 3$.
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave. Se desea encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Las soluciones de (2.6) son exactamente los puntos críticos del funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)\, dx\,,$$

donde $F(\xi) = \int_0^\xi f(t)\, dt$.

Por resultados de P. Rabinowitz (ver [16]) se tiene que existe una solución débil u_0 de (2.6), la cual, por la teoría de regularidad para ecuaciones elípticas, es solución clásica. Además, Φ es de clase $C^2(H_0^1, \mathbb{R})$ y

$$\Phi'(u)v = \langle u, v\rangle - \int_\Omega f(u)v\, dx\,,$$

$$\Phi''(u)(v)w = \langle v, w\rangle - \int_\Omega f'(u)(v)w\, dx.$$

Demostremos que el funcional Φ satisface la condición (2.1) : Supongamos que $\lambda_1 = 0$ es el primer valor propio de $\Phi''(u_0)$, luego $\exists v \neq 0$ en H_0^1 tal que

$$\int_\Omega f'(u_0)(v)w\, dx = \langle v, w\rangle \ \forall\, w \in H. \tag{2.7}$$

Sea $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por $b(x) = f'\big(u_0(x)\big)$. Como $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $u_0 \in C^2$, entonces $b \in C(\overline{\Omega})$.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta v = bv & x \in \Omega \\ \quad v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Por (2.7), este problema tiene solución débil no trivial y más aún esta solución es clásica.

Multiplicando (2.8) por v e integrando por partes vemos que $\int_\Omega bv^2 > 0$. Luego existe $x_0 \in \Omega$ tal que $b(x_0) > 0$.

Por los resultados de Hess y Kato (ver [8]), el problema de valores propios

$$(2.9) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda} b u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

posee un menor valor propio positivo $\tilde{\lambda}_1$, el cual es simple y la correspondiente función propia no cambia de signo. La validez de la condición (2.1) sigue del hecho de que $\tilde{\lambda}_1 = 1$.

Observación 2. La condición (2.1) es básica para que $i(\nabla\Phi, u_0) = -1$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x^4 + y^4 - 8x^2y^2$. Luego

$$\nabla\Phi(x, y) = (4x^3 - 16xy^2, 4y^3 - 16x^2y).$$

Por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico de Φ. Además,

$$\Phi''(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16y^2 & -32xy \\ -32xy & 12y^2 - 16x^2 \end{pmatrix}.$$

Sean $e_0 = (1, -1)$ y $e_1 = (1, 1)$. Luego $d = 0$ y $c = -6$ en el Teorema B. Además, $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado del tipo paso de la montaña y $(0, 0)$ es un valor singular de $\nabla\Phi$. Para el cálculo del grado local del gradiente en $(0, 0)$ utilicemos la teoría desarrollada en el Capítulo 1. Sea $u_n := (0, \frac{1}{n})$ una sucesión de puntos regulares que converge a $(0, 0)$. Ahora,

$$\begin{aligned} i(\nabla\Phi, u_n) &= \sum_{\{(x,y):\, \nabla\Phi(x,y) = u_n\}} sign|\Phi''(x, y)| \\ &= \sum_{\{X_1, X_2, X_3\}} sign|\Phi''(x, y)| = -3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(0, \sqrt[3]{(4n)^{-1}}\right), \\ X_2 &= \left(-2\sqrt[3]{(60n)^{-1}}, -\sqrt[3]{(60n)^{-1}}\right) \\ \text{y} \quad X_3 &= \left(2\sqrt[3]{(60n)^{-1}}, -\sqrt[3]{(60n)^{-1}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} i(\nabla\Phi, 0) &= \lim_{n\to\infty} i(\nabla\Phi, u_n) \\ &= -3. \end{aligned}$$

REFERENCIAS

[1]. H. Amann, *A note on degree theory for gradient mappings, Proc. of the A.M.S., vol 85, number 4, august 1982, 591-595.*

[2]. A. Castro and J. Cossio, *Multiple solutions for a nonlinear Dirichlet problem, Siam J. Math. Anal. , vol 25 No 6, pp. 1554-1561 , November 1994.*

[3]. A. Castro and A. C. Lazer, *Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 70 (1979), 113-137.

[4]. E. N. Dancer, *Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities*, J. Reine Angew. Math. 350 (1984), 1-22.

[5]. K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[6]. K. Deimling, *Ordinarỳ differential equations in Banachs spaces*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 596, Berlin, 1977.

[7]. S. Fučik, J. Nečas, J. and V. Součes, *Spectral analysis of nonlinear operators*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math 346, 1973.

[8]. P. Hess and T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with indefinite weight function, Comm Partial Differential Equations 5 (1980), pp. 999-1030.*

[9]. H. Hofer, *A note on the topological degree at in critical point of mountainpass type, Proc. of the A.M.S., vol. 90, number 2, feb. 1984.*

[10]. H. Hofer, *The topological degree at a critical point of mountainpass type, Proc. of symposia in pure math., vol.45 (1986).*

[11]. M. A. Krasnosel'skii, *the operator of translation along the trajectories of differential equations, Transl. Math. Monos.,vol 19, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1968.*

[12]. M. A. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Macmillan, New York, 1964.

[13]. N.G. Lloyd, *Degree theory*, Cambrigde University Press, 1978.

[14]. R. H. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley, New York, 1976.

[15]. P. H. Rabinowitz, *A note on topological degree for potential operators, J. Math. Anal. Appl., 51, (1975), 483-492.*

[16]. P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, number 65, American mathematical Society, Providence, R.I, 1986.

[17]. G. Tian, *Bulletin of Science 14 (1983), 833-835.*

[18]. M. M. Vainverg, *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden Day, San Francisco, Calif., 1964.

[19]. M. Zuluaga, *Teoría del grado y su aplicación. Una introducción, tercer Simposio colombiano de análisis funcional*, Medellín, 1985.