Desarrollo de material didáctico para la enseñanza de la probabilidad en secundaria

Juan Manuel Galán Ortiz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2021

Desarrollo de material didáctico para la enseñanza de la probabilidad en secundaria

Juan Manuel Galán Ortiz

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Liliana Blanco Castañeda, Dr.rer.nat.

Línea de Investigación: Probabilidad
Grupo de Investigación: Procesos Estocásticos
Categoría A (MinCiencias)
Código: CO0037336

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2021

A mis hijos, para quienes su padre es capaz de todo.

Agradecimientos

A cada uno de los miembros de mi familia quienes pusieron su grano de arena a mi formación profesional. A mi profesora Liliana quien acompañó con paciencia y sabiduría este trabajo.

A la universidad pública que me dio la oportunidad de formarme académicamente. Por eso hay que defenderla, para que las demás generaciones también tienen derecho.

Resumen

Este trabajo muestra el diseño y la aplicación de una secuencia didáctica enfocada en consolidar los principios básicos del concepto de probabilidad en 37 estudiantes de grado décimo del colegio Tilatá, el cual es de carácter privado y está ubicado en el municipio de la Calera. Dichas actividades fueron diseñadas para trabajo en el aula presencial, pero dado el confinamiento estricto producto de la pandemia generada por el Covid-19 se tuvieron que replantear para la virtualidad, por lo que fue necesario el uso de algunos simuladores de experimentos y juegos que se encuentran en internet para permitir a los estudiantes experiencias significativas en su aprendizaje de probabilidad.

Los resultados obtenidos dan cuenta de la importancia que tiene exponer a los estudiantes a actividades que les permita fortalecer la relación entre su pensamiento intuitivo y el formal cuando abordan el concepto de probabilidad clásica.

Palabras clave: Probabilidad, enfoque frecuencial, enfoque clásico, experimentación, educación virtual, simuladores de probabilidad.

Abstract

Development of didactic material for teaching probability in secondary

This work shows the design and application of a didactic sequence focused on consolidating the basic principles of the concept of probability in 37 tenth grade students from the Tilatá school, which is private and is located in the municipality of La Calera. These activities were designed for work in the classroom, but given the strict confinement caused by the pandemic generated by Covid-19, they had to be rethought for virtuality, so it was necessary to use some simulators of experiments and games that were found on the internet to allow students meaningful experiences in their learning of probability.

The results obtained show the importance of exposing students to activities that allow them to strengthen the relationship between their intuitive and formal thinking when they approach the concept of classical probability.

Keywords: Probability, frequency approach, classical approach, experimentation, virtual education, probability simulators.

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Introducción

La institución educativa en la que se llevará a cabo este proyecto de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales es el colegio Tilatá, el cual está ubicado en el municipio de La Calera, es de carácter privado, mixto, de jornada única y ha adoptado como programa de formación para sus estudiantes el Bachillerato Internacional (IB), el cual, desde un enfoque progresista tiene como objetivo “formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del entendimiento mutuo y el respeto intercultural” (Bachillerato internacional, 2014, p. 13).

La política de enseñanza y aprendizaje del colegio Tilatá (2017) establece los principios y las prácticas desde donde deben articularse todas las áreas del conocimiento que se ofertan, sobre este referente de diez puntos fundamentales, quisiera enfocarme en tres de éstos, los cuales dan sentido a mi trabajo de grado: “El primero, el estudiante debe ser el centro del aprendizaje, bajo esta premisa, el rol del profesor cambia de estar al frente de sus estudiantes transmitiendo conocimiento a acompañar los procesos cognitivos de cada estudiante, el segundo tiene que ver con una enseñanza basada en conceptos en vez de temas y algoritmos inconexos, finalmente, menciona que el aprendizaje debe ser activo, es decir, los estudiantes no deben estar pasivos en las clases esperando acumular una serie conocimientos” (p. 3-4).

Por lo anterior, la mayoría de las clases deben estar planeadas y desarrolladas con actividades que demanden de los estudiantes una progresión adecuada mientras construyen nuevas relaciones conceptuales a partir de sus pre conceptos y habilidades ya adquiridas, esto ha sido un desafío tanto para los estudiantes como para los profesores y a lo que a mi concierne, desde el área de matemáticas, he detectado que las clases que refieren al pensamiento aleatorio o sistemas de datos cuestan mucho planearlas y articularlas, sobre todo cuando se quieren desarrollar habilidades estocásticas.

Las clases de estadística en el colegio Tilatá son más enfocadas hacia la estadística descriptiva y exploratoria que hacia el desarrollo de la probabilidad, esto ha repercutido en que los estudiantes, tengan la percepción que la estadística solo corresponde a tablas de frecuencia, gráficos, medidas de tendencia central, de dispersión y de posición, y aunque esto es útil cuando ellos hacen sus investigaciones y reportes de laboratorio, no se está complementando de manera adecuada con un pensamiento probabilístico que les permita tener herramientas cuando deben decidir en situaciones de incertidumbre o azar.

1. Capítulo 1: CONTEXTUALIZACIÓN

En este capítulo se explicita el planteamiento del problema del aprendizaje del concepto de probabilidad en el colegio Tilatá, luego se plantea el objetivo general y los específicos, la metodología usada y la forma en la que se validará la secuencia didáctica.

1.1 Planteamiento del problema

De acuerdo con los *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*, documento oficial del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, actualizado para el año 2006 y vigente para todos los colegios del territorio nacional, el concepto de probabilidad está enmarcado dentro del pensamiento aleatorio y sistemas de datos. En dicho documento se organizan las competencias que deberían tener los estudiantes según los grados escolares. Por ejemplo, "al terminar tercero de primaria los estudiantes deberían explicar la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos, al terminar quinto, conjeturar y poner a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos (en estos cursos ya están trabajando decimales así que la posibilidad de ocurrencia de un evento es cuantificable usando el enfoque laplaciano), al terminar séptimo, conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad, al terminar noveno, calcular probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo, entre otros), además de usar conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.). Finalmente, al terminar once, proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas" (p. 80-89).

Como estrategia para garantizar la secuencialidad curricular en los colegios, el equipo del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación –Icfes (2019) ha generado una estrategia de evaluación formativa denominada *avancemos 4°, 6° y 8°*, que consiste en aplicar pruebas de matemáticas y lenguaje, a los estudiantes de estos grados usando plataformas digitales. El objetivo de esta prueba, es detectar necesidades tempranas de los estudiantes en estas áreas, para que los planteles educativos puedan tomar los correctivos necesarios en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, pues la retroalimentación que hace el Icfes por cada pregunta es inmediata y los resultados grupales e individuales los comparten semana y media después de la aplicación de las pruebas.

Enfocando la prueba *avancemos 4°, 6° y 8°* al componente matemático, ésta abarca los cinco pensamientos: espacial y sistemas geométricos, aleatorio y sistemas de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos, métrico y sistemas de medidas y el numérico y sistemas numéricos, solo que en las preguntas los evalúa desde tres competencias específicas: el razonamiento y la argumentación, la comunicación, la representación y la modelación y el planteamiento y resolución de problemas (Icfes, 2019, p. 15).

Ampliando la idea de las competencias evaluadas en las pruebas avancemos en matemáticas, se mencionan las siguientes definiciones de cada una:

> Respecto a el razonamiento y la argumentación: Estos elementos están relacionados, entre otros, con aspectos como el dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas. Saber qué es una parte de la prueba de matemáticas, así como saber cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.
>
> En la comunicación, la representación y la modelación: Están referidas, entre otros aspectos, a la capacidad del estudiante para expresar ideas; usar diferentes tipos de representación; describir relaciones matemáticas; relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas; modelar a través de un lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico; manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas; traducir; interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones; interpretar lenguaje formal y simbólico, y traducir de lenguaje natural al simbólico formal.

> Finalmente, acerca del planteamiento y resolución de problemas: Estos elementos se relacionan, entre otros, con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar y ejecutar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema (Icfes, 2019, p. 15)

El colegio Tilatá siendo promotor, desde sus políticas de enseñanza y aprendizaje, de la evaluación formativa como herramienta fundamental para establecer áreas de mejora y acciones oportunas que permitan mejorar las prácticas en el aula, accedió a aplicar las pruebas avancemos desde el 2019. Producto de las pruebas en dicho año, aplicadas a estudiantes de grado octavo (quienes en este momento se encuentran en grado décimo y es la población a la que se aplicará el material didáctico de este trabajo de grado) se detectaron resultados a tener en cuenta sobre todo en el componente aleatorio.

En las siguientes gráficas (que envía el Icfes en su retroalimentación) se muestra el porcentaje promedio de respuestas correctas e incorrectas, en cada una de las competencias anteriormente nombradas correspondientes al componente aleatorio. La parte oscura del gráfico de barras representa el porcentaje promedio de respuestas incorrectas, mientras que la parte clara indica las el porcentaje de respuestas incorrectas. Los gráficos de curso y grado siempre son iguales pues midieron a la misma cantidad de estudiantes.

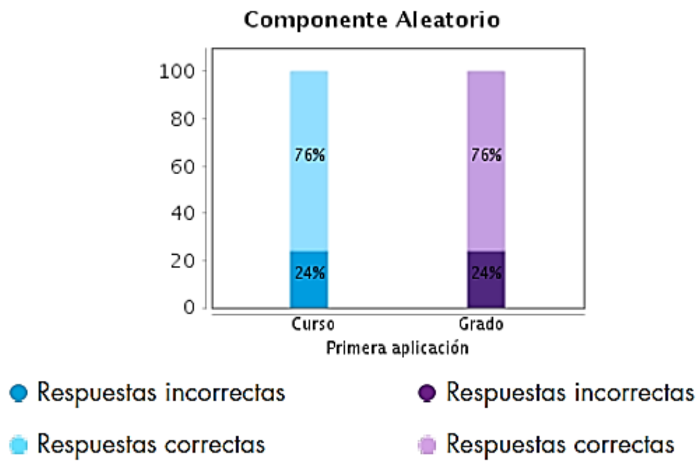


Figura 1. Porcentaje promedio de respuestas correctas e incorrectas en la competencia razonamiento (2019).

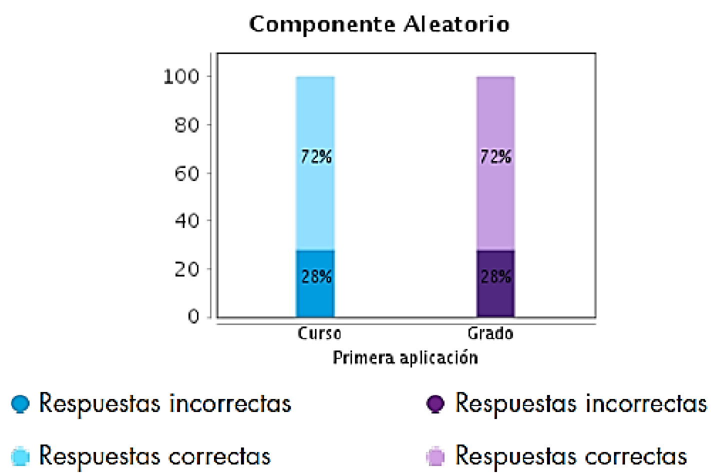


Figura 2. Porcentaje promedio de respuestas correctas e incorrectas en la competencia comunicación (2019).

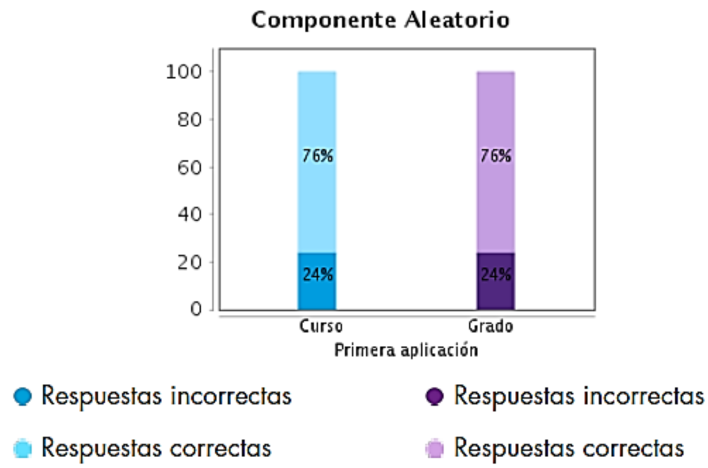


Figura 3. Porcentaje promedio de respuestas correctas e incorrectas en la competencia resolución (2019).

Aparte de estas gráficas de respuestas correctas e incorrectas, el Icfes proporciona una retroalimentación más específica puntualizando cuál es la habilidad que requiere el estudiante para resolver la pregunta correspondiente al componente y a la competencia, y la posible estrategia a aplicar en el aula para favorecer los procesos de enseñanza. Con relación al componente aleatorio, estos son los comentarios generales a los estudiantes de grado octavo en el año 2019:

1. Los estudiantes deben reconocer un procedimiento para calcular la medida de probabilidad simple. Por esto los estudiantes deben estar en la capacidad de representar la probabilidad como una frecuencia, donde se compara el número total de resultados del experimento y el número de casos favorables al evento respectivo. También es importante que tengan habilidades para extraer información presentada en una tabla, y para completarla de ser necesario, totalizar categorías, etc.

2. Para responder la pregunta correctamente, los estudiantes deben estar en capacidad de reconocer eventos simultáneos en un experimento aleatorio y estar en capacidad de encontrar la probabilidad de ocurrencia de eventos simultáneos.

3. Para responder la pregunta correctamente, los estudiantes deben estar en capacidad de encontrar la totalidad posible de eventos al combinar los resultados de dos experimentos aleatorios diferentes, así como de sacar conclusiones acerca de la ocurrencia o no de eventos que implican la combinación de resultados de experimentos aleatorios.

En consecuencia, he decidido enfocar este trabajo de grado en atender un requerimiento puntual de mis estudiantes en el componente variacional y sistemas de datos, llamado también probabilístico o estocástico el cual se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial" (MEN, 2006, p. 64), y tomando en cuenta los resultados de las pruebas avancemos, es de mi interés encontrar cuáles son los principios básicos y fundamentales que se deben tener en cuenta para que los estudiantes construyan de manera adecuada el concepto de probabilidad a partir de los preconceptos y habilidades que han formado en años anteriores. Para ello, los aportes de diversos autores que han enfocado sus estudios en el tema resultan primordiales para ampliar la comprensión y desarrollo del mismo. Dentro de ellos se destacan (Batanero, 2013) quien plantea la necesidad de reforzar en la escuela, la comprensión intuitiva antes de que comience la enseñanza formal del tema, con el fin de mejorar a futuro el conocimiento analítico de los estudiantes.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 General

Diseñar y aplicar una secuencia didáctica para los estudiantes de grado décimo del colegio Tilatá, que parta de situaciones didácticas y se fundamente en la experimentación, con el fin de consolidar los principios básicos del concepto de probabilidad.

1.2.2 Específicos

- Revisar referentes teóricos relacionados con la construcción del concepto de probabilidad en la escuela.
- Detectar mediante un diagnóstico, las fallas conceptuales que tienen los estudiantes al abordar situaciones de probabilidad.
- Diseñar las actividades que harán parte de la secuencia didáctica
- Validar la secuencia didáctica a partir de una rúbrica de evaluación

1.3 BACHILLERATO INTERNACIONAL

”La Organización del Bachillerato Internacional (conocida como IB) ofrece cuatro programas educativos exigentes y de calidad a una comunidad de colegios de todo el mundo” (Bachillerato internacional, 2019, p. 3). El programa de la Escuela Primaria (PEP) para estudiantes de 3 a 12 años, el programa de los Años Intermedios (PAI) para estudiantes de 11 a 16 años, el programa del diploma (PD) para estudiantes de 16 a 19 años y finalmente el programa de Orientación Profesional para edades entre los 16 y 19 años de edad.

El programa del IB sobre el cual se enmarcarán las actividades de la secuencia didáctica es el diploma (PD), el cual tiene como objetivo formar estudiantes que logren una excelente amplitud y profundidad en sus conocimientos, al tiempo que crezcan física, intelectual, emocional y éticamente. Dentro de las seis asignaturas que oferta el PD, el grupo 5 corresponde a matemáticas el cual ofrece dos cursos distintos: Análisis y Enfoques, y Aplicaciones e Interpretación, ambos ofertados en nivel medio (NM) o nivel superior (NS).

> La diferencia entre los dos cursos parte de los intereses de los estudiantes, pues quienes quieran estudiar matemáticas como disciplina en sí misma o por su interés en materias afines está la opción de Análisis, pero quienes quieran adquirir comprensión y conocimiento de la relación que tienen las matemáticas con el mundo real y con otras disciplinas está el curso de Aplicaciones" (Bachillerato internacional, 2019, p. 6).

La secuencia didáctica de este trabajo está enmarcada en el grupo 5 del diploma en el curso de Aplicaciones e Interpretación NM bajo el tema *Probabilidad y estadística* el cuál es el cuarto de los cinco temas prescritos que comprenden la estructura curricular del programa (p. 18). A continuación se muestran los subtemas 4.5 y 4.6 que regirán las actividades diseñadas:

NM 4.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Concepto de ensayo, resultado, resultados equiprobables, frecuencia relativa, espacio muestral (U) y suceso. La probabilidad de un suceso A es $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$. Los sucesos complementarios A y A' (no A).	Los espacios muestrales se pueden representar de muchas maneras; por ejemplo, mediante una tabla o una lista. Haciendo experimentos con monedas, dados, cartas, etc., se puede conseguir que los alumnos entiendan mejor la diferencia que existe entre probabilidad experimental (frecuencia relativa) y teórica. Las simulaciones pueden resultar útiles para complementar este tema.
Número esperado de ocurrencias.	**Ejemplo:** Si en una clase hay 128 alumnos y la probabilidad de que falten a clase es igual a 0,1, el número esperado de alumnos que faltarán a clase en un día dado es 12,8.

Figura 4. Sección 4.5 del programa de Aplicaciones e Interpretación NM (2019)

NM 4.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol, diagramas de espacio muestral y tablas de resultados para el cálculo de probabilidades.	
Sucesos compuestos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Sucesos incompatibles: $P(A \cap B) = 0$.	La no exclusividad del "o".
Probabilidad condicionada: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	Una manera alternativa de expresar esto: $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$. Los problemas se pueden resolver con la ayuda de diagramas de Venn, diagramas de árbol, diagramas de espacio muestral o con una tabla de resultados, sin que sea necesario el uso explícito de fórmulas. Probabilidades con o sin reposición.
Sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	

Figura 5. Sección 4.6 del programa de Aplicaciones e Interpretación NM (2019)

Además de los temas anteriormente mencionados, la secuencia didáctica tomará conocimientos previos de los estudiantes referentes a: teoría de conjuntos, diagramas de árbol, lógica, porcentajes, razones, proporciones, entre otros.

2. Capítulo 2: REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se abarcarán los aspectos teóricos más importantes para el desarrollo de este trabajo de grado, pues se empieza detectando cuáles son los principios (o elementos) básicos en el concepto de probabilidad, seguido de una sección que centra el tópico en la enseñanza de la probabilidad en la escuela, identificando algunas de las dificultades (sobre todo en tiempos de confinamiento) y obstáculos epistemológicos en su enseñanza. Finalmente, se mencionarán algunas experiencias significativas, producto del uso de simuladores y demás herramientas virtuales como Geogebra, Desmos, entre otros, para la enseñanza de la probabilidad en la escuela.

2.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

El concepto de probabilidad ha tenido varios significados a lo largo de la historia: intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y matemático, cada uno de estos corresponde a eventos históricos particulares, lo que hace aseverar que dicho concepto no ha gozado de inmutabilidad y muy por el contrario fue evolucionando con el hombre (Batanero, 2005). Quienes han discutido acerca de la pertinencia de enfocar la enseñanza de la probabilidad desde alguno de sus significados, han puntualizado que no es suficiente limitarse a uno solamente, pues todos están dialéctica y experiencialmente entrelazados (Hacking, 1975) en la medida que dicho concepto puede verse, desde un enfoque subjetivo como una experiencia individual y al mismo tiempo como elemento que cuantifica la incertidumbre en experimentos aleatorios, los dos tan diferentes pero tan necesarios de exponer a los estudiantes en las aulas.

2.2 ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

2.2.1 Significados de la probabilidad

Entender los diferentes significados de probabilidad es sumamente importante para conocer no solo las concepciones asociadas en cada caso sino el tipo de problemas que se abordaron en cada etapa. A continuación se explicarán los cinco significados del concepto de probabilidad que propone Batanero en su escrito: significados de la probabilidad en la educación secundaria (Batanero, 2005, p. 252)

Significado intuitivo:

A partir de los juegos de azar surgen ideas ligadas a las apuestas, la esperanza, la ganancia y el concepto de juego equitativo. Dichas ideas “usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar el grado de creencia en ellos” (Batanero, 2005, p. 253)

Significado Laplaciano:

Laplace establece la siguiente definición para probabilidad, “como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles” esta definición no aplica a experimentos con un número infinito de posibilidades (Batanero, 2005, p. 253). Es un enfoque a priori, en el sentido que permite el cálculo de probabilidades antes de cualquier ensayo y supone que todos los resultados individuales del espacio muestral son equiprobables. Esta perspectiva clásica tiene restricciones pues el caso de las aplicaciones, se debe enfrentar al problema de decidir si los resultados individuales son igualmente probables ocasionando un problema de circularidad (Borovcnik & Kapadia, 2014, p.17)

Significado frecuencial:

“Basada en asignar probabilidades a los sucesos aleatorios a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos de un experimento” (Batanero, 2005, p. 254). La probabilidad de un evento se estima a partir de la frecuencia relativa observada del evento en ensayos repetidos y se calcula mediante el límite hacia el que tiende la frecuencia relativa. Tiene como restricción, que no se puede realizar el experimento bajo las mismas condiciones, es más hay sucesos aleatorios que son irrepetibles. Que no es exacta sino una estimación y no se puede saber si las probabilidades existen realmente. Finalmente, que el valor de la probabilidad nunca puede confirmarse por completo o incluso negarse (Borovcnik & Kapadia, 2014, p.18)

Significado subjetivo:

“Permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos analizados” (Batanero, 2005, p. 254). El supuesto fundamental en este significado, es que los individuos tienen sus propias probabilidades que se derivan de un patrón de preferencia implícito entre decisiones. Obviamente, las personas pueden diferir en las probabilidades que aceptarían, pero esto no importa siempre que se cumplan las reglas básicas de coherencia y consistencia (Borovcnik & Kapadia, 2014, p.18)

Por ejemplo, sería una tontería hacer dos apuestas de 3 a 2 en ambos caballos en una carrera de dos caballos (es decir, por una apuesta de 2 £ podría ganar 3 £) porque uno está destinado a perder dinero como ganancia de £ 3 no compensa la pérdida de £ 4 en total. La coherencia formaliza esta idea básica de la que se pueden deducir las leyes básicas de la probabilidad (Barnett, 1973).

Significado matemático:

La probabilidad se define desde un conglomerado axiomático que usa la teoría de conjuntos y de la medida, y se convierte en un modelo matemático.

2.2.2 Dificultades en la enseñanza de la probabilidad

En el año 2005 la profesora Batanero publicó el documento titulado *Significados de la probabilidad en la educación secundaria.* En éste, la autora indica que la enseñanza de la probabilidad debe renovarse, volverse más experimental con el fin de generar, desde edades tempranas, experiencias estocásticas. Lo anterior demanda una profunda reflexión sobre la naturaleza de la probabilidad y los componentes de su comprensión (Batanero, 2005, pág. 3). Estos planteamientos son actualizados y abordados de manera sistemática por la misma autora en el artículo del 2013 denominado "*La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación?*" empieza enfocándose en el razonamiento de los niños y haciendo la distinción entre los conceptos probabilísticos y los geométricos o numéricos. Según la autora, estos últimos conceptos están más ligados con la experiencia directa del niño, pues se pueden concretizar con objetos físicos: por ejemplo, operaciones, formas, distancias, cantidades, entre otros. Mientras que los conceptos probabilísticos no gozan de dichas experiencias al tratar con ideas bastante abstractas. No existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad (Batanero, 2013, pág. 9)

Dado que el objeto de las experiencias estocásticas es reforzar la comprensión intuitiva del concepto de probabilidad, se deben planear con mucho cuidado, tanto las situaciones, como las actividades, el material manipulativo, las preguntas, entre otros. Pues un aprendizaje intuitivo errado es difícil de cambiar y luego puede causar dificultades en aprendizajes posteriores (Fischbein, 1975). Esto representa un reto enorme para la construcción de la secuencia didáctica que se desprende de este trabajo de grado, pues se debe tener en cuenta las recomendaciones de los especialistas en la didáctica de la probabilidad acerca de cuál es el orden adecuado en el que se debería enseñar el concepto de probabilidad, indagar acerca de material concreto o aplicaciones virtuales que puedan servir como herramienta manipulativa para los estudiantes y que genere una comprensión a la construcción de dicho pensamiento estocástico y finalmente validar la secuencia didáctica de acuerdo con la rúbrica de evaluación.

2.2.3 Obstáculos epistemológicos en el concepto de probabilidad

Es importante exponer a los estudiantes a situaciones que les representen no solo un reto en clase, sino la posibilidad de experimentar, generar hipótesis a partir de observaciones, contrastar sus resultados y poder socializarlos con sus compañeros, por tal razón, es posible acudir a problemas clásicos como por ejemplo, el que propuso el Duque de Toscana en el año 1560, quien había observado a lo largo de su experiencia en los juegos de azar, que al lanzar tres dados y sumar sus puntos el 10 aparecía con más frecuencia que el 9, a pesar que, según él para ambas sumas habían seis maneras de lograrlos (León, 2009).

Otra situación que puede usarse estratégicamente en clase, es calcular la probabilidad de que salga cara por lo menos una vez cuando se lanzan dos monedas balanceadas, con el fin de determinar si los estudiantes comenten o no el error de D'Alembert, quien visualizó solo tres posibles resultados: cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo lanzamiento y ninguna cara, estableciendo 2/3 como valor de probabilidad.

En los dos casos existen errores conceptuales importantes respecto a los elementos del espacio muestral que repercuten a la hora de determinar probabilidades asociadas, por ejemplo, en el problema del Duque de Toscana los resultados (1,2,6), (1,6,2), (2,1,6), (2,6,1), (6,1,2) y (6,2,1) los considera como uno solo en la suma 1+6+2, mientras que en el error de D'Álembert no discrimina entre (C,S) y (S,C).

2.3 USO DE SIMULADORES EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

El bachillerato internacional por medio de sus canales de comunicación ha ofrecido, a los colegios que han tenido que virtualizar sus clases por el confinamiento estricto dada la pandemia del Covid 19, sugerencias y orientaciones acerca del aprendizaje en línea, así como aplicaciones y recursos que podrían aplicarse con sus estudiantes de manera remota

(Bachillerato internacional, 2020, p. 2). Dentro de las actividades que proponen está la producción de contenido y redacción colaborativa mediada por plataformas gratuitas como google classroom, zoo y dropbox paper. Además, recomiendan el uso de juegos y simuladores académicos en línea para poder mediar los procesos de enseñanza aprendizaje y enriquecer las representaciones en el aula. Algunos ejemplos de dichas herramientas son: simulaciones PhET, National Geographic Kids, Geogebra, Desmos, entre otros (Bachillerato internacional, 2020, p. 5-6).

El uso de simuladores de Geogebra en el aula es una estrategia que tiene que saber usarse didácticamente como complemento de la experiencia de aprendizaje, y no como sustituto de las clases magistrales (Rodríguez, 2018, p.30). Se debe tener muy claro el objetivo de aprendizaje y los pasos que lo conseguirán con el fin de saber en qué momento usar la herramienta que permitirá no solo acaparar la atención de los estudiantes, sino mejorar la observación de un fenómeno en particular y así propiciar la construcción de conjeturas, las cuales se podrán poner a prueba.

Puede hacerse uso de los simuladores en la enseñanza de la probabilidad con el fin de observar el comportamiento de fenómenos aleatorios, sobre todo cuando se analizan las frecuencias relativas asociadas con cualquier evento, pues se pueden simular un gran número de veces el experimento bajo las mismas condiciones, lo cual es muy difícil hacerlo en el aula usando material concreto (Gaspar, 2015, p. 14-15). A partir de lo anterior, es posible diseñar actividades que permitan, por ejemplo, observar cuando la frecuencia relativa de un evento se estabiliza después de muchas veces y tiende a parecerse a la probabilidad teórica. “Este enfoque da mayor credibilidad a los valores obtenidos a través de la simulación y permite superar la resistencia de algunos estudiantes a aceptar resultados de experimentos que no fueron ejecutados por ellos” (Gaspar, 2015, p. 16).

3. Capítulo 3: DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

3.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

En el primer capítulo se mencionaron algunos comentarios de la retroalimentación hecha al grupo de estudiantes que presentaron la prueba *Avancemos 8°* en el año 2019. Aunque es un buen punto de partida porque identifica habilidades por reforzar, ya han pasado casi dos años desde ese entonces y fue necesario aplicar una prueba diagnóstica al mismo grupo pero en el 2021 para detectar si las dificultades persistían, si eran generalizadas o solo de algunos estudiantes y poder establecer algún punto de partida al planear las actividades del trimestre. Dicha prueba se aplicó de manera individual usando la plataforma de google classroom. El tiempo que tardaron los estudiantes en responder de manera virtual, fue de 50 minutos (duración de una hora de clase en el colegio) y no tuvieron ayuda alguna de calculadoras, páginas de internet, apuntes o preguntas al profesor.

A continuación se muestran las preguntas de la prueba y en la sección 4.1 se realiza un análisis a partir de las respuestas de los estudiantes.

1. Dado que el espacio muestral Ω, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, liste todos los elementos del espacio muestral en cada una de los siguientes eventos:
   a) Lanzar dos monedas y anotar su resultado.
   b) Lanzar dos dados de cuatro caras (enumerados del 1 al 4) y anotar su resultado.

Figura 6. Primera pregunta del diagnóstico.

Indicador de logro para la primera pregunta a partir de los derechos básicos de aprendizaje V1:

- Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación $P(A)$ para la probabilidad de que ocurra un evento A (MEN, 2015, p.4)

2. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar un dado de seis caras. Se establecen los siguientes eventos:

$$A = \{sale\ un\ número\ par\}$$

$$B = \{sale\ un\ número\ primo\}$$

$$C = \{sale\ un\ número\ múltiplo\ de\ 5\}$$

Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup C)$

b) $P(C \cap A)$

c) $P(\bar{C} \cap B)$

Figura 7. Segunda pregunta del diagnóstico.

El Indicador de logro para la segunda pregunta se estableció a partir de lo establecido en la guía de matemáticas del diploma para curso llamado aplicaciones e interpretación NM:

- "Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol, diagramas de espacio muestral y tablas de resultados para el cálculo de probabilidades" (IB, 2019, p. 60).

3. El siguiente es el cuestionamiento del príncipe de Toscana a Galileo Galilei: ¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?

a) ¿Te parece válida la pregunta que el príncipe de Toscana le hace a Galileo? ¿cómo le responderías al príncipe de Toscana para solucionar dicha situación?

Figura 8. Tercera pregunta del diagnóstico.

Indicador de logro:

- Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación P(A) para la probabilidad de que ocurra un evento A (MEN, 2015, p.4)
- Conoce el concepto de permutación.

4. Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire dos dados equilibrados de seis caras y se considera espacio muestral el resultado de la suma de los valores obtenidos:
a) Escriba todos los elementos de Ω
b) Organice todos los elementos de Ω de mayor a menor posibilidad de ocurrencia según usted considere. Argumente bien su respuesta.

Figura 9. Cuarta pregunta del diagnóstico.

Indicador de logro para la cuarta pregunta a partir de los Estándares Básicos de Competencias:

- “Usa conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)” (MEN, 2006, p. 87).

3.2 DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica planeada consta de cuatro actividades: *Dados y probabilidades*, *El problema del Duque de Toscana*, *Simulando experimentos* y *Aproximación a la distribución Normal*, de las cuáles sólo se pudieron aplicar las primeras tres, pues las clases en modalidad virtual demandan más tiempo que las presenciales y se debía continuar con los demás contenidos curriculares planeados por el programa del diploma para los estudiantes de grado décimo.

A continuación se presentará la primera actividad la cual tiene como nombre *Dados y probabilidades*, y tiene como objetivo:

1. Identificar si los estudiantes reconocen las probabilidades de eventos asociados a juegos de dados de seis caras y si pueden establecer si un juego es justo para los dos jugadores.
2. Reconocer las nociones de espacio muestral y de evento.
3. Analizar eventos que tienen diferentes posibilidades de ocurrencia por tener diferencias en su espacio muestral.

4. Promover el trabajo en equipo, desde la escucha mutua, el valorar las perspectivas de los demás y logrando consensos.
5. Analizar las probabilidades de situaciones donde los eventos del experimento aleatorio no son equiprobables.

Las instrucciones de *Dados y probabilidades* se les mostraron a los estudiantes de la siguiente manera:

A. Trabaja con un compañero para el siguiente experimento aleatorio. Sigue el enlace https://www.random.org/, escoge la opción simulador de lanzamiento de dados

Figura 10. Simulación de dados en la página https://www.random.org/ (2021).

En la primera ronda de este juego cada uno de los jugadores va a lanzar el dado en el simulador 16 veces y uno de los dos va a obtener un punto, cada vez que salga un número par y el otro va a obtener un punto cuando salga un número impar. Ustedes deciden eso antes de empezar a jugar.

Antes de realizar los lanzamientos ¿Alguno de los dos tiene más probabilidad de ganar? Después del lanzamiento, ¿quién ganó? ¿por qué crees que ganó? Explica tu razonamiento

B. En la segunda ronda vuelven a lanzar el dado 16 veces, solo que el ganador de la primera ronda va a obtener un punto cada vez que salga un número entre el 1 y el 4, y el otro jugador obtendrá un punto si salen los números 5 y 6. Antes de realizar los lanzamientos ¿Alguno de los dos tiene más probabilidad de ganar? después de los 16 lanzamientos, ¿quién ganó? ¿por qué crees que gano? Explica tu razonamiento

C. En esta parte añadiremos un dado al experimento y nos enfocaremos en sumar los resultados de los dos dados. A continuación se muestran todos los posibles resultados:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

Con su pareja, organice la lista de mayor a menor posibilidad de ocurrencia según usted considere. Argumente bien su respuesta.

Ahora, va a simular 20 lanzamientos de dos dados en random.org, anoten el resultado de cada suma en su cuaderno. ¿Eran de esperarse esos resultados? ¿Por qué? Si no fueran 20 sino 100 lanzamientos ¿cambiaría la lista que hizo en el punto anterior donde organizó la lista de acuerdo con la posibilidad de ocurrencia?

La segunda actividad está basada en la experiencia de aula de la profesora Nelly León con sus estudiantes de la asignatura *Probabilidad y Estadística* del *Instituto Pedagógico de Maturín*.

Al detectar los bajos resultados de sus estudiantes y las dificultades existentes en la comprensión de la teoría de la probabilidad y en su aplicabilidad a la solución de problemas que van expresados a través de un enunciado verbal,

> decidió explorar opciones didácticas centradas en el uso de la historia de la probabilidad como elemento clave en la comprensión de la evolución de este concepto. Las situaciones clásicas que aplicó en sus clases fueron: el error de D'Alembert, el problema del Duque de Toscana y el problema del reparto interrumpido (León, 2009, p. 72-73).

De lo anterior, se decidió aplicar el problema del Duque de Toscana en clase, ya que en la primera actividad *Dados y probabilidades*, se había abarcado el evento suma de los puntajes obtenidos al lanzar dos dados equilibrados. Entonces el enunciado presentado a los estudiantes fue el siguiente: "¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?" (León, 2009, p. 77)

La tercera actividad está centrada en el uso de simuladores de probabilidad para realizar experimentos aleatorios bajo las mismas condiciones y un número considerable de veces. Se usará la parte C de la actividad *Dados y probabilidades* donde tienen que simular hasta 20 lanzamientos de dos dados y verificar si la suma de los números que escogieron aparece con mayor frecuencia.

Entonces, los estudiantes deberán correr el simulador de Geogebra https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD y probarlo desde diferentes cantidades de lanzamientos hasta llegar a los mil, que es la cantidad máxima que permite el programa. Deberán analizar las frecuencias relativas que se muestran en el diagrama de barras y comparar las probabilidades frecuenciales y las teóricas.

La cuarta actividad fue tomada de la investigación llevada a cabo por (Fernández, Polola y otros, 2006, p.80-82) donde pretendían un acercamiento a la distribución normal a partir de la distribución Binomial utilizando experimentación en el aula con los estudiantes, para que ellos revivan el proceso real seguido por Bernoulli y por De Moivre quien en 1773 descubrió la función de densidad de probabilidad de la distribución normal como una forma límite de la función Binomial (Fernández, Polola y otros, 2006, p.80)

Primer paso.

Cada alumno debe realizar progresiva y acumulativamente “n” (n = 10, 20 y 30) lanzamientos de un dado registrando primero el valor que figura en la cara superior y contando luego la cantidad de números pares obtenidos después de los “n” lanzamientos. (Fernández, Polola y otros, 2006, p.80). Las autoras trabajan con 60 estudiantes quienes tienen que registrar los resultados de los 30 lanzamientos del dado, así como se ejemplifica en la tabla construida por las autoras:

Tabla 9- X: cuenta la cantidad de veces que se obtuvo un n° par en “r” tiradas

Orden	Resultados obtenidos en 30 tiradas de un dado										Cant. de pares en “n” tiradas		
											10	20	30
1	2	3	2	5	1	6	4	5	1	3	4		
	4	4	3	5	5	2	6	5	1	5		8	
	3	2	2	3	3	3	5	2	5	1			11
2	5	6	1	2	6	5	6	3	5	4	5		
	4	3	4	6	5	1	6	5	3	5		9	
	2	4	2	2	1	5	3	5	6	4			15
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			
59	6	6	5	6	5	2	4	6	3	2	7		
	2	5	3	6	3	3	1	1	5	4		10	
	6	3	4	3	5	3	1	2	2	4			15
60	1	4	2	5	2	1	2	6	1	4	6		
	6	4	4	2	6	5	1	3	2	6		13	
	2	6	6	1	2	3	1	4	1	4			19

Figura 11. Ejemplo de los resultados grupales (Fernández, Polola y otros, 2006, p.80).

Cada estudiante está representado en la primera columna (del 1 al 60) y en las tres filas que le corresponde anotará los resultados de sus 30 lanzamientos. De acuerdo con la cantidad de pares que encontró en el décimo, vigésimo y trigésimo lanzamiento alimentará la última columna. A partir de esta se construyen cuatro tablas de frecuencias relativas de la “proporción de los pares” obtenidos por 10, 20, 50, y 60 estudiantes en 10, 20 y 30 lanzamientos del dado y se representan gráficamente las distribuciones obtenidas (Fernández, Polola y otros, 2006, p.81).

Tabla 1- Proporción de números pares en 10 registros de 10 lanzamientos

P	fi	fr
0,2	1	0,1
0,3	0	0
0,4	5	0,5
0,5	1	0,1
0,6	2	0,2
0,7	0	0
0,8	1	0,1
Registros	10	1

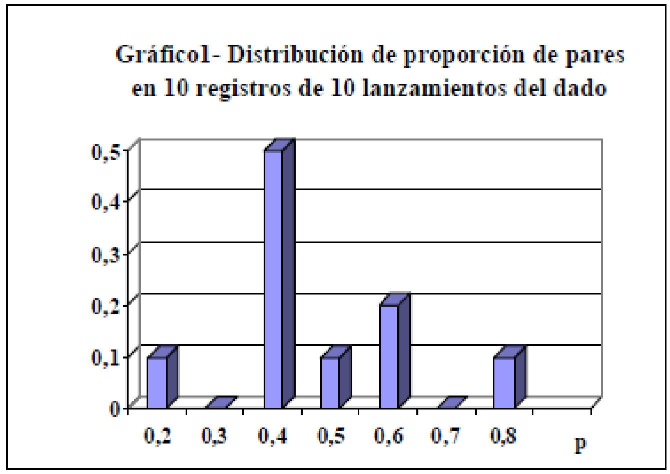


Figura 12. Distribución de frecuencias de la proporción de números pares en 10 registros de 10 tiradas de un dado (Fernández, Polola y otros, 2006, p.81).

Tabla 2- Proporción de números pares en 20 registros de 10 lanzamientos

p	fi	fr
0,2	2	0,1
0,3	1	0,05
0,4	7	0,35
0,5	3	0,15
0,6	4	0,2
0,7	1	0,05
0,8	2	0,1
Registros	20	1

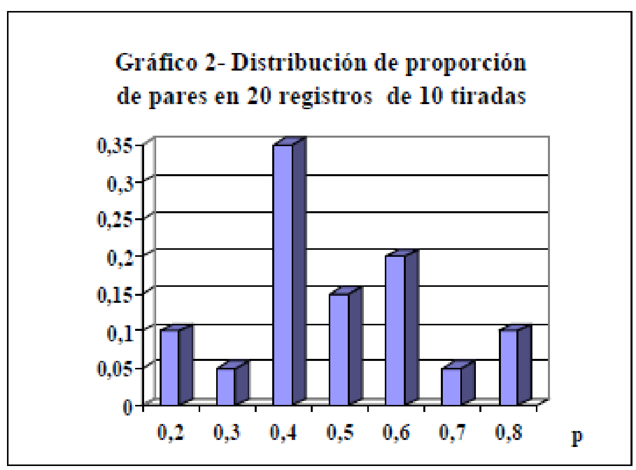


Figura 13. Distribución de frecuencias de la proporción de números pares en 20 registros de 10 tiradas de un dado (Fernández, Polola y otros, 2006, p.82).

Tabla 3- Proporción de números pares en 50 registros de 10 lanzamientos

p	fi	fr
0,2	4	0,08
0,3	5	0,1
0,4	11	0,22
0,5	9	0,18
0,6	9	0,18
0,7	5	0,1
0,8	6	0,12
0,9	1	0,02
Registros	50	1,00

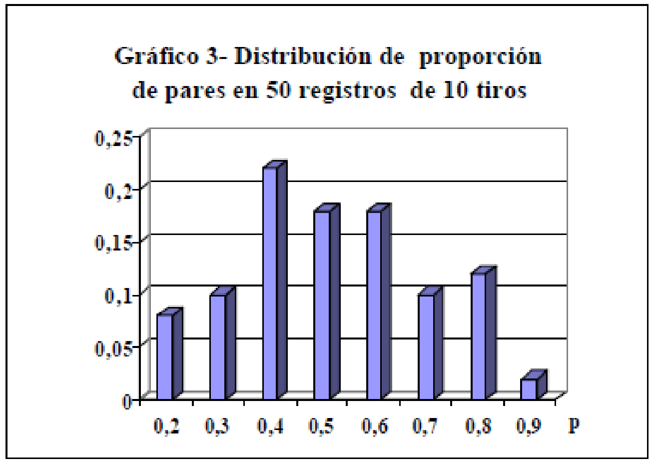


Figura 14. Distribución de frecuencias de la proporción de números pares en 50 registros de 10 tiradas de un dado (Fernández, Polola y otros, 2006, p.81).

Tabla 4- Proporción de números pares en 60 registros de 10 lanzamientos

p	fi	fr
0,2	4	0,07
0,3	7	0,12
0,4	13	0,22
0,5	12	0,20
0,6	11	0,18
0,7	7	0,12
0,8	5	0,08
0,9	1	0,02
Registros	60	1,00

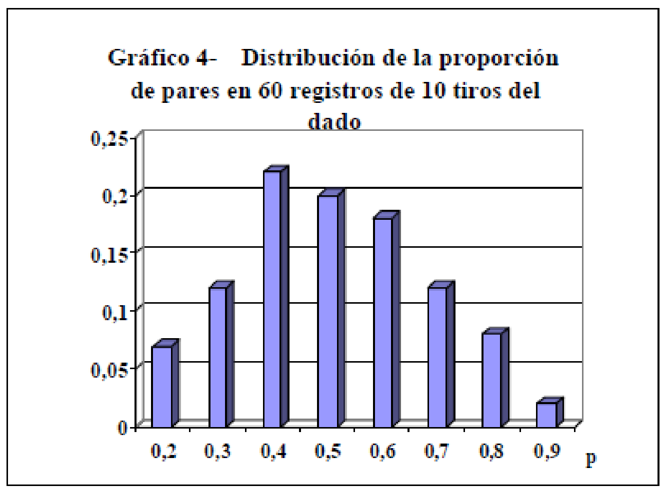


Figura 15. Distribución de frecuencias de la proporción de números pares en 50 registros de 10 tiradas de un dado (Fernández, Polola y otros, 2006, p.82).

Se espera que los estudiantes observen que la distribución de las frecuencias relativas de la proporción de resultados pares en el lanzamiento de un dado converge lentamente hacia la curva de Gauss y que a veces no es muy exacta pero hay que destacar la diferencia entre el modelo de un fenómeno real y el teórico correspondiente. En pasos siguientes, de solicita a los estudiantes que repitan el proceso anterior pero esta vez con 20 o 30 lanzamientos. Esto con el fin de que la forma de la distribución de la proporción de resultados pares se vuelve cada vez más simétrica y parecida a la campana de Gauss (Fernández, Polola y otros, 2006, p.84).

4. Capítulo 4: IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Este capítulo presenta diferentes momentos de la implementación de la secuencia didáctica a los 37 los estudiantes de décimo del colegio Tilatá entre octubre de 2020 y marzo de 2021. Se parte de la prueba diagnóstica donde se evidenciaron algunos problemas al reconocer los elementos del espacio muestral y el cálculo de probabilidades. Luego se muestran tres actividades posteriores, *Dados y probabilidades*, *El problema del Duque de Toscana*, *Simulando experimentos* y *Aproximación a la distribución Normal*, de las cuáles solo las tres primeras se pudieron aplicar por la reacomodación de horarios de clase producto de la educación virtual por el confinamiento del Covid 19.

4.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

Los resultados de la primera pregunta indican que el 20% de los estudiantes no sabían cómo encontrar el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de cuatro caras, el 46% respondieron de forma errada y tan solo el 33% de forma correcta. A continuación se muestran algunas respuestas erradas de los estudiantes y las posibles causas de su equivocación.

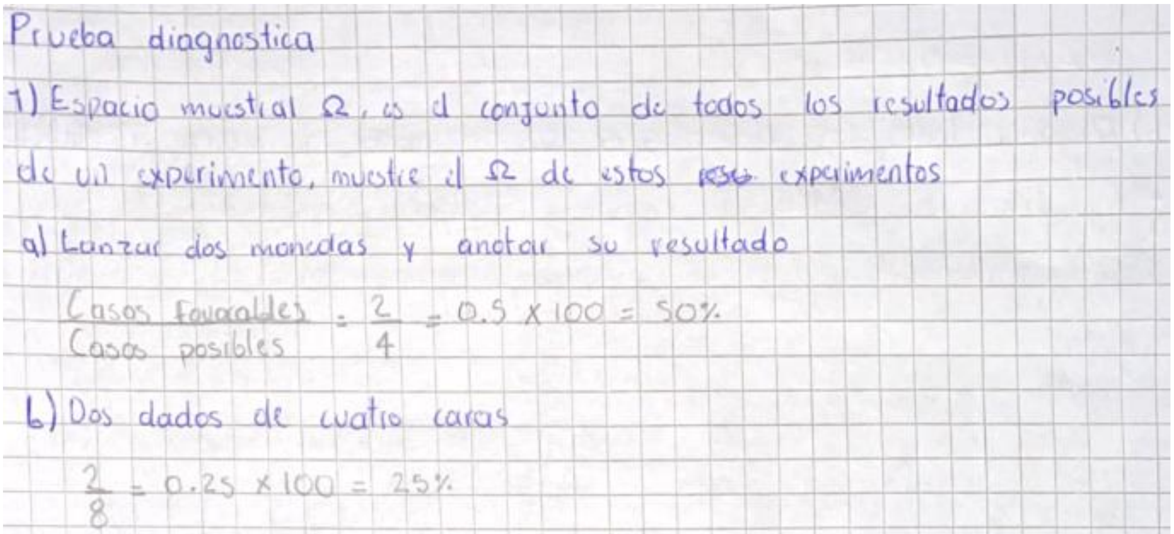


Figura 16. Respuesta errada a la primera pregunta de la diagnóstica (2020).

El 13% de los estudiantes intentaron calcular la probabilidad del evento en lugar de determinar los elementos del espacio muestral, aunque en la parte a) identificaron que eran cuatro elementos y la probabilidad es correcta, en la parte b) fallaron en enumerar tanto el numerador como el denominador, en la socialización de este punto en la clase los estudiantes comentaron que siempre habían trabajado con dados de seis caras y que el hecho de tener uno de cuatro caras les confundía muchísimo. Tres estudiantes intentaron resolver la pregunta usando los diagramas árbol pero fallaron a la hora de contar los posibles resultados relacionando los dos dados, tal y como se muestra en la siguiente respuesta:

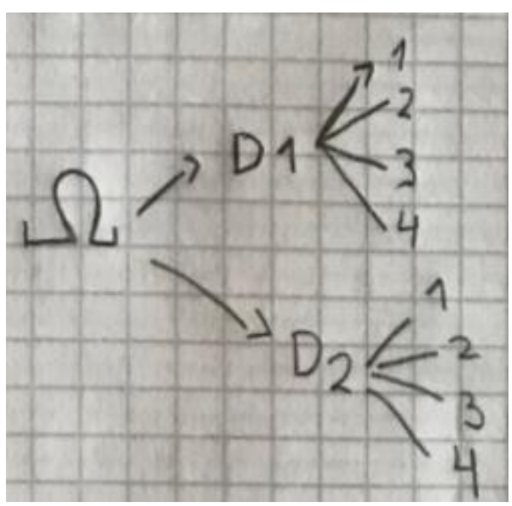


Figura 17. Uso inadecuado del diagrama de árbol (2020).

Dos estudiantes intentaron formar las parejas entre los posibles resultados pero explicaron que no podrían existir las parejas $(2{,}3)$ y $(3{,}2)$, $(1{,}4)$ y $(4{,}1)$, entre otras, pues se repetirían resultados y llegarían a un error.

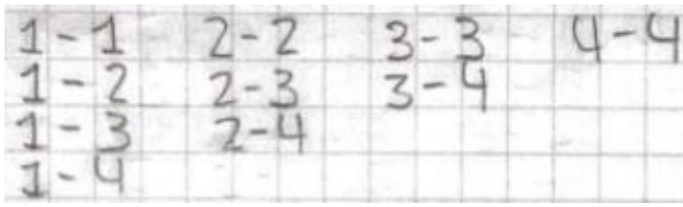


Figura 18. Error al determinar el total de las parejas (2020).

Finalmente, 12 estudiantes de los 37 que resolvieron la prueba respondieron correctamente la primera pregunta, 11 de los 12 listaron todas las parejas posibles y solo una persona usó el diagrama de árbol para identificar las 16 posibles parejas.

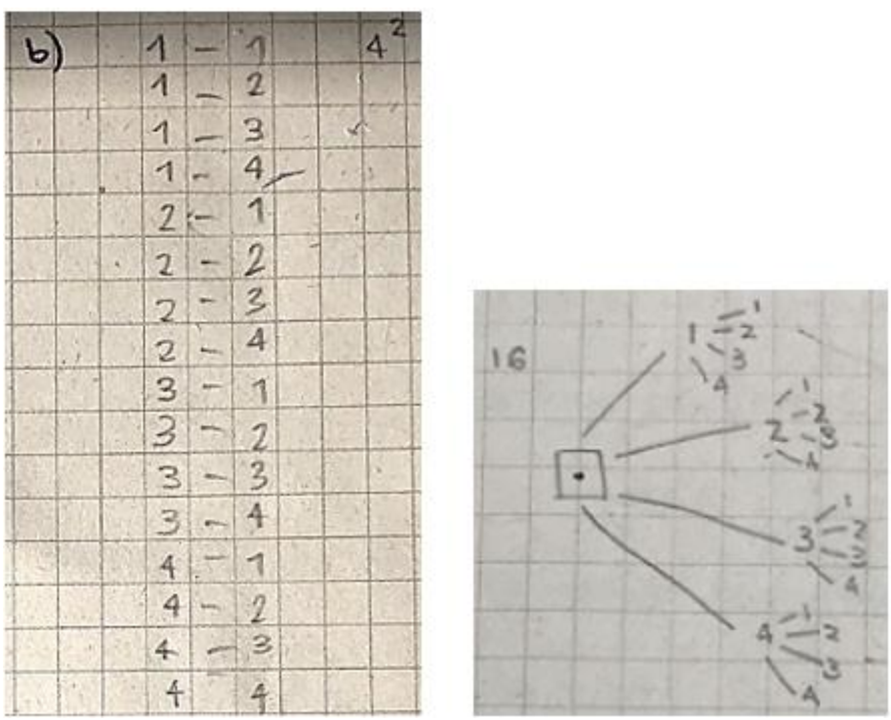


Figura 19. Ejemplos de respuestas correctas (2020).

Segunda pregunta

Respecto a la segunda pregunta, más del 75% de los estudiantes la respondieron correctamente. En sus intervenciones en clase expresaron que recordaron perfectamente las operaciones entre conjuntos que habían trabajado en años anteriores, sin embargo, hay casos de otros estudiantes que reconocieron los elementos de los eventos A, B y C, identificaron el total de casos posibles enumerando correctamente el denominador, pero no lograron relacionar los elementos de los eventos a partir de las operaciones entre conjuntos.

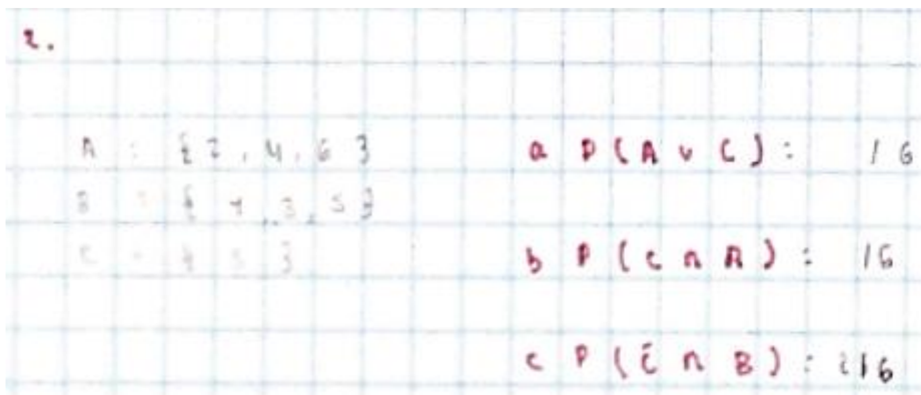


Figura 20. Ejemplos de respuestas incorrectas a la segunda pregunta (2020).

Tercera pregunta

Respecto a la pregunta del príncipe de Toscana, ningún estudiante la respondió correctamente, ni siquiera los que acertaron en la primera pregunta que era similar solo que en lugar de tres dados eran dos. Fueron varias las interpretaciones que tuvieron los estudiantes, en la siguiente imagen, una estudiante indica la imposibilidad de comprobar que el resultado de la suma 10 salga con más frecuencia que la de 9 y además asume que los dos eventos deben tener la misma probabilidad.

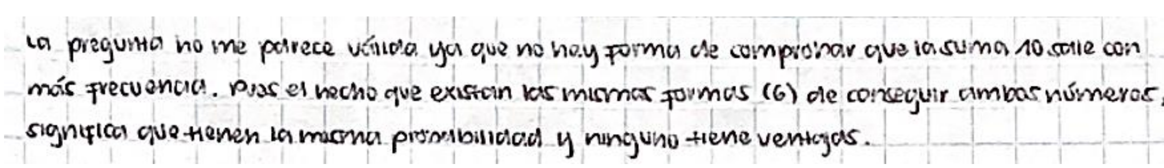


Figura 21. Ejemplos de respuestas incorrectas a la segunda pregunta (2020).

Los que intentaron contestar la pregunta estableciendo todos los posibles resultados de la suma de los tres dados incurrieron en errores como incluir el 7, o solo identificar una terna sin sus demás combinaciones, por ejemplo, aparece el $1+1+8$, pero omite $1+8+1$ y el $8+1+1$:

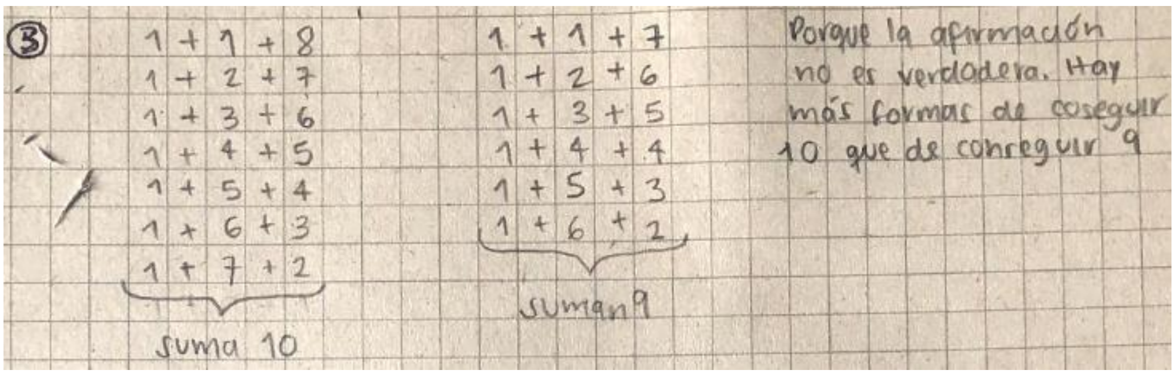


Figura 22. Acercamiento al problema del príncipe de Toscana (2020).

4.2 ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DADOS Y PROBABILIDADES

La parte A de esta actividad no tuvo dificultad alguna para los estudiantes, pues todos afirmaron que cualquiera de los jugadores tenía el 50% de chance para ganar en los 16 lanzamientos pues en un dado de seis caras hay la misma cantidad de pares que de impares, sin embargo, hay par de comentarios que se hicieron en clase y los quiero mencionar "para qué jugar a los dados 16 veces si con esas condiciones siempre quedaremos empatados", "la suerte, es la única razón que encuentro para explicar por qué gana alguien si ambos jugadores tienen 50 % de ganar", en las siguientes imágenes se muestran comentarios similares hechos por otros estudiantes en sus respuestas:

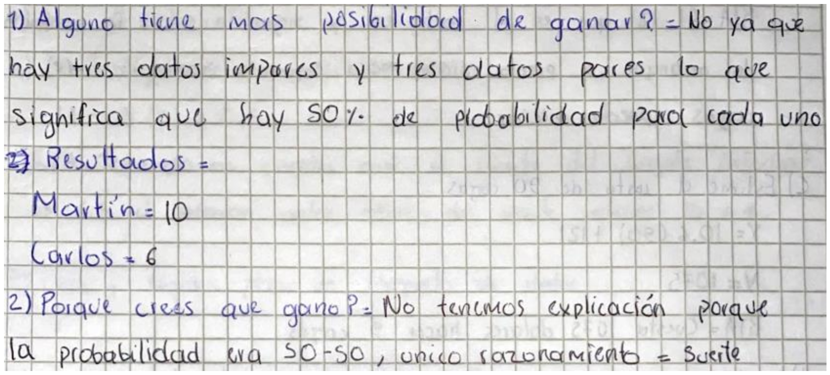

1) Alguno tiene mas posibilidad de ganar? = No ya que hay tres datos impares y tres datos pares lo que significa que hay 50% de probabilidad para cada uno
2) Resultados =
Martín = 10
Carlos = 6
2) Porque crees que gano? = No tenemos explicación porque la probabilidad era 50-50, unico razonamiento = Suerte

Figura 23. Ejemplo del primer juego pares e impares (2021).

LORENZO = PARES

LOLITA IMPARES GANÓ LOLITA

Dice roll	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Número	3	4	3	1	5	4	2	3	1	6	5	4	1	3	6	1
Ganador																

· **Antes de realizar los lanzamientos ¿Alguno de los dos tiene más probabilidad de ganar?** No ya que la probabilidad era del 50 para cada uno ya que hay 3 pares y 3 impares.

· **Después del lanzamiento, ¿quién ganó? ¿por qué crees que gano? Explica tu razonamiento** Lolita ganó por suerte porque la probabilidad de que ganara lorenzo o lolita era la misma.

Figura 24. Ejemplo 2 del primer juego pares e impares (2021).

En la parte B de la actividad, todos los estudiantes calcularon correctamente la probabilidad que tiene un jugador para ganar dadas las condiciones de obtener un punto si saca un resultado entre el 1 y el 4 $(4/6)$ y el otro jugador si saca los números 5 y 6 $(2/6)$. Además, en la clase, mencionaron lo innecesario de hacer el experimento con el simulador de dados si era muy probable que ganara el de probabilidad de $4/6$.

4.3 ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DEL PROBLEMA DEL DUQUE DE TOSCANA

En esta clase surgieron muchos problemas pues la mayoría de los estudiantes no sabían cómo abordar la situación, sin embargo, la idea de una de ellos generó oportunidades en sus compañeros, pues encontró relación entre el problema de los tres dados propuesto a Galileo y la parte C de la actividad *Dados y probabilidades*, donde tenían que determinar cuál de los resultados al sumar dos dados tenia mayor probabilidad. Propuso usar el esquema de diagrama de árbol para organizar la información, encontrando todas las parejas posibles y sus respectivas sumas:

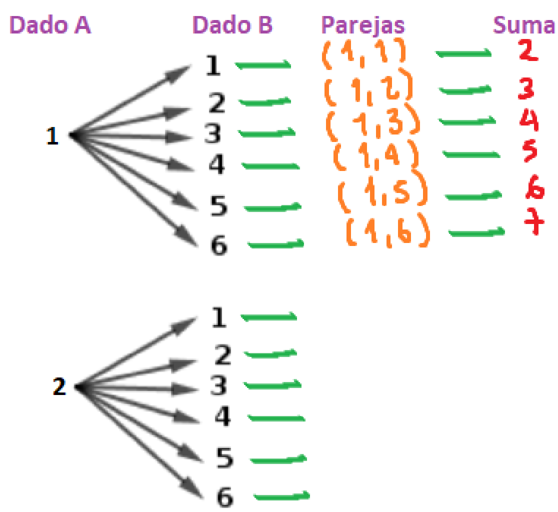


Figura 25. Propuesta de una estudiante para usar los diagramas de árbol (2021).

Esta idea activó la clase y los estudiantes encontraron no solo las 36 parejas posibles sino todos los resultados al sumarlas tal:

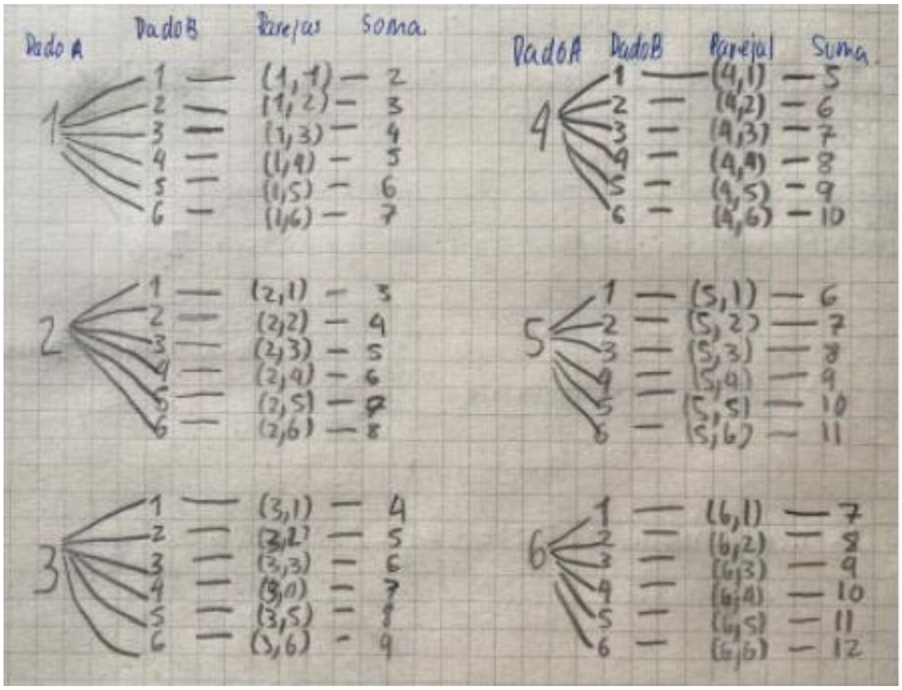


Figura 26. Ejemplo del diagrama de árbol para el lanzamiento de dos dados (2021).

Aproveché la oportunidad del rumbo inesperado que tomó la clase para pedirles que para la próxima sesión, sistematizaran la información que tenían en sus diagramas de árbol en una hoja de cálculo de google que pedía la siguiente información:

Valores de M	Liste el total de parejas que suman el número	Cantidad total de parejas	Probabilidad de los diferentes valores del evento M
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

9			
10			
11			
12			

Tabla 1. Tabla de resumen de los resultados del diagrama de árbol (2021).

Valores del evento	Liste el total de parejas que suman el número	Cantidad total de parejas	Probabilidad de los diferentes valores del evento M
2	(1,1)	1	1/36 = 0,0278 = 2.78%
3	(1,2) (2,1)	2	2/36=0.0556= 5.56%
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3	3/36= 0.0833= 8.33%
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4	4/36=0.111= 11.1%
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5	5/36= 0.139= 13.9%
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6	6/36= 0, 167= 16.7%
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5	5/36= 0.139= 13.9%
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4	4/36= 0.111= 11.1%
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3	3/36= 0.0833= 8.33%
11	(5,6) (6,5)	2	2/36= 0,0556 = 5.56%
12	(6,6)	1	1/36= 0,0278 = 2.78%

Tabla 2. Ejemplo de solución de un grupo de estudiantes (2021).

La tabla 2 fue insumo importante para la clase pues permitió observar no solo la suma que tenía una mayor probabilidad de ocurrencia sino las parejas (6,4) y (4,6), (3,2) y (2,3), entre otras. Las cuáles no habían podido detectar algunos estudiantes en la diagnóstica pues creían que con nombrar una sola era suficiente.

Finalmente, se podía abordar el problema del príncipe de Toscana a partir de las experiencias de clase anteriores y todos los estudiantes estuvieron en la capacidad de encontrar todos los tríos que se forman al lanzar tres dados de seis caras y que sumaran 9 y los que suman 10, así como se muestra en las siguientes imágenes:

Figura 27. Ejemplo de las ternas que suman 10 (2021).

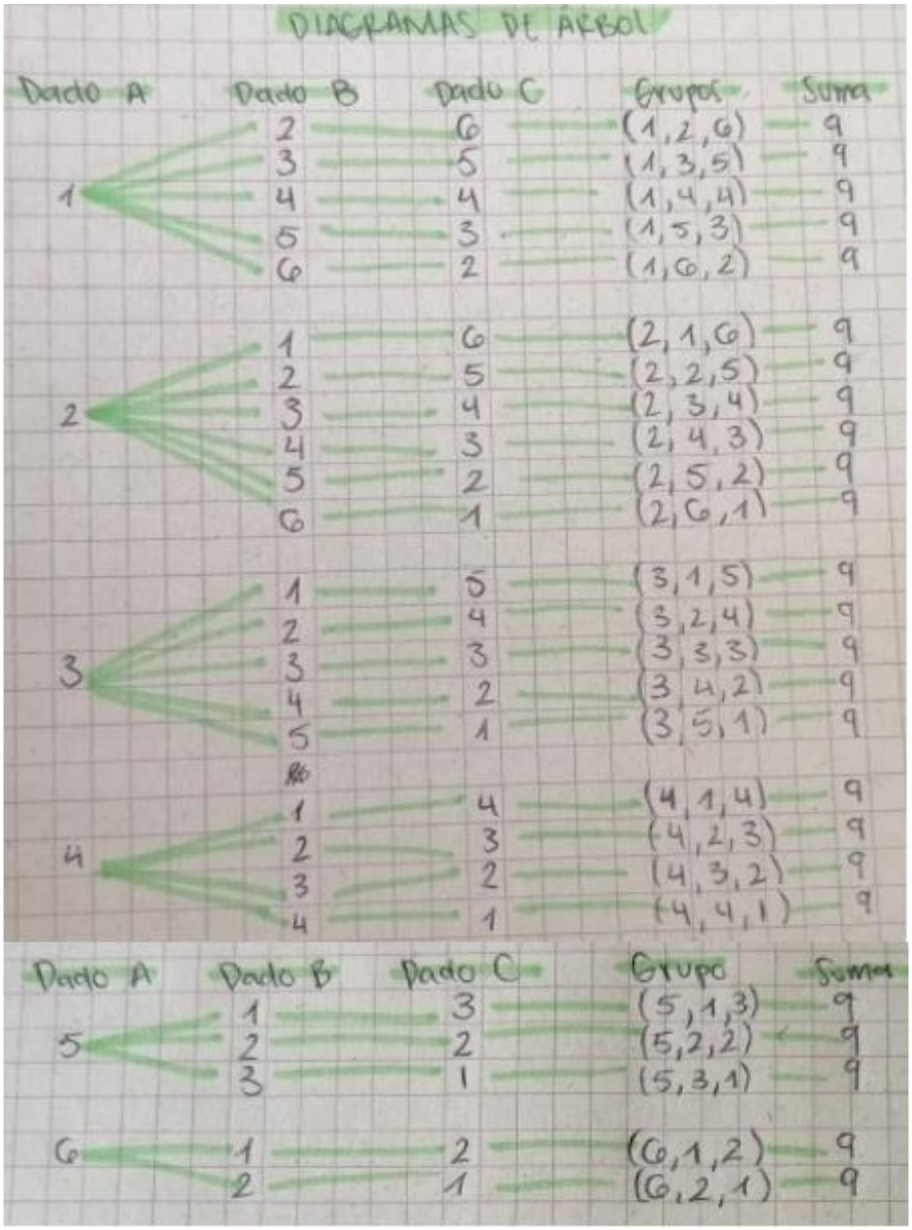


Figura 28. Ejemplo de las ternas que suman 9 (2021).

4.4 ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD SIMULANDO EXPERIMENTOS

A partir del experimento aleatorio trabajado con los estudiantes: rodar dos dados equilibrados de seis caras y sumar sus resultados, ya se puntualizó en la sección 4.3 la forma en la que usaron el diagrama de árbol para determinar todos los posibles resultados (ver figura 21) y el uso de la tabla 2 para organizar toda la información en Excel para entender por qué cuando jugaban dados en el simulador quienes escogían el 7, el 6 y el 5 tenían mayores probabilidades de ganar pues son los que más parejas tienen. Empero, en clase se preguntaban ¿por qué al hacer pocos lanzamientos, entre 4 y 10 aproximadamente, no siempre ganaba el 7, el 6 o el 5? ¿Por qué había ocasiones donde el 4 le ganaba al 7 si las parejas que suman 4 son (1,3) (2,2) (3,1) mientras que las que suman 7 son el doble (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)?, ¿De qué sirve entonces la probabilidad teórica si hay resultados experimentales que la contradicen?

Entonces, la actividad *simulando experimentos* cobró gran importancia para que los estudiantes pudieran observar diferentes cantidades del experimento aleatorio. Se usó el enlace: https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD

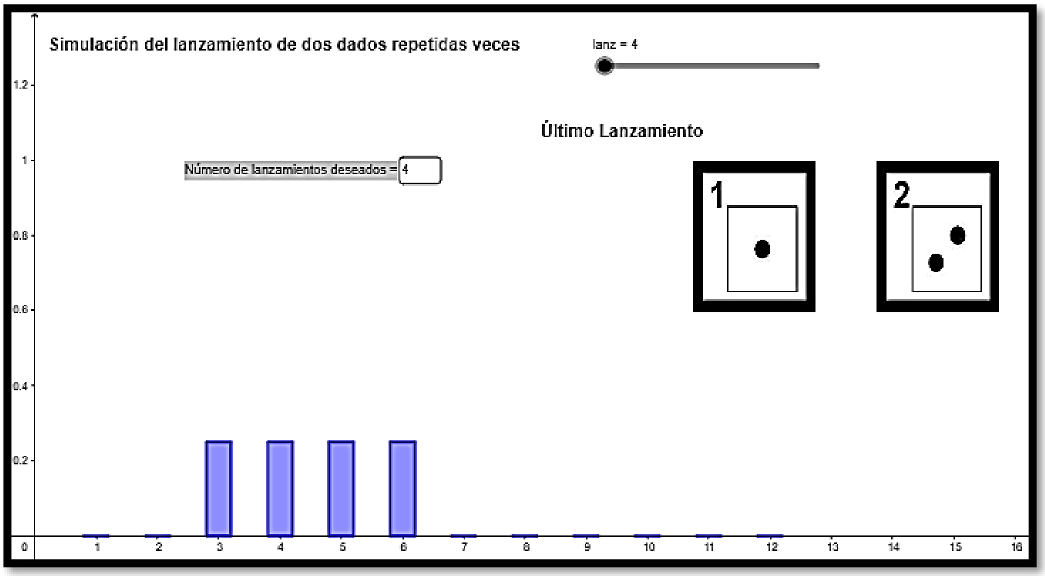


Figura 29. Simula en Geogebra, el lanzamiento de dos dados sumando sus resultados (2021).

La actividad consistía en trabajar en parejas y cambiar la cantidad de lanzamientos cada 100 hasta llegar a los 1000 que es el límite de simulaciones que tenía el programa. En cada 100 debían charlar con su compañero acerca de lo que veían y establecer si el resultado del programa se parecía en algo a la información de la tabla 2.

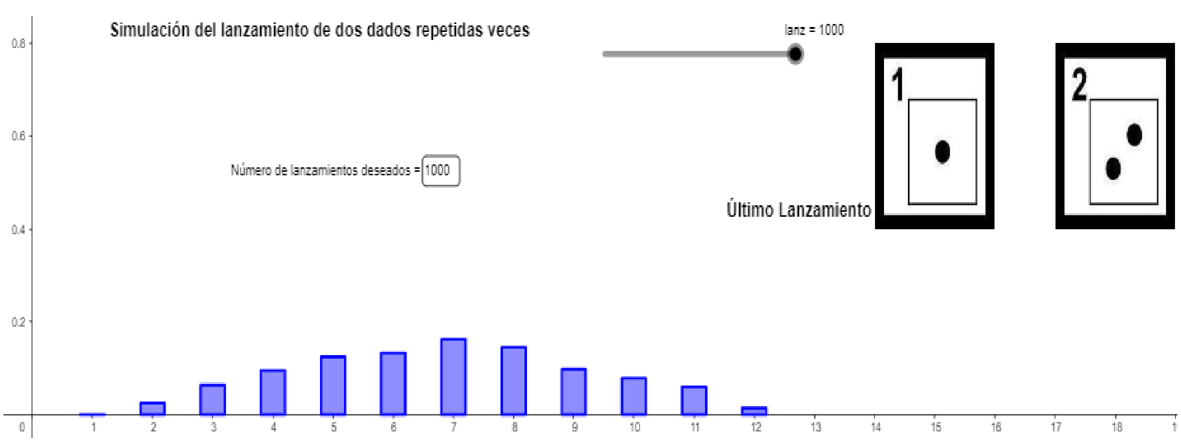


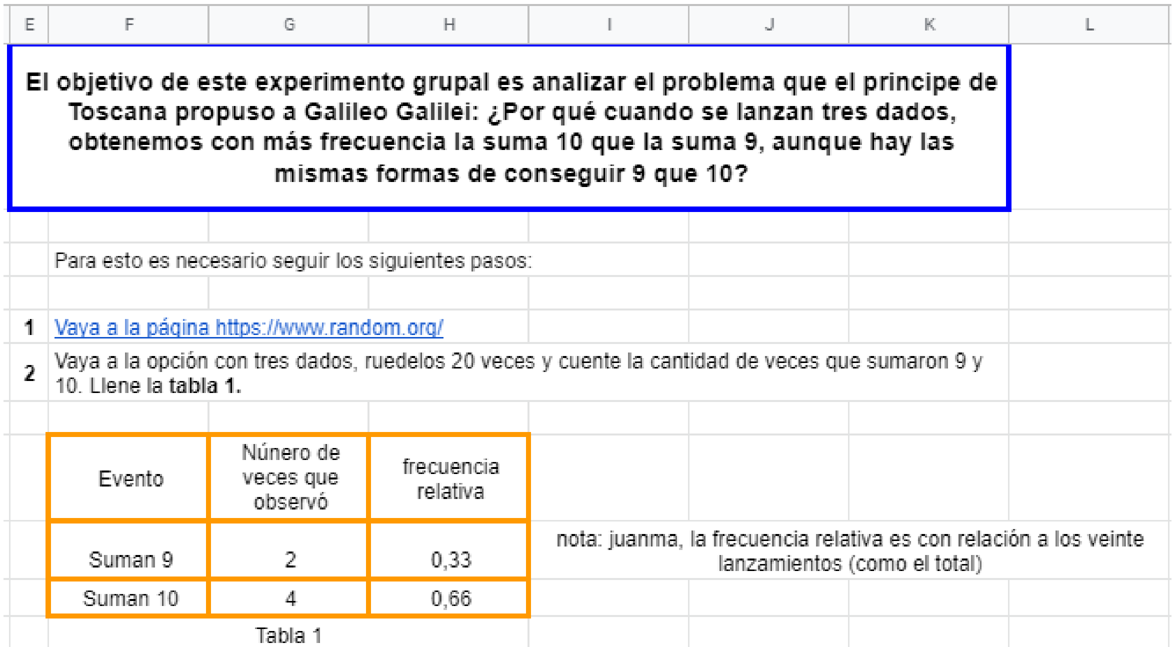
Figura 30. Ejemplo del simulador llegando a su número máximo de lanzamientos.

Las discusiones en clase no se hicieron esperar, todas las parejas encontraron que a mayor cantidad de lanzamientos, los resultados del experimento en Geogebra se parecían más a los teóricos resumidos en la tabla 2. Sin embargo, algunos seguían insatisfechos pues al mostrar sus resultados (ver figura 24) esperaban que las barras correspondientes a la suma de 6 y 8 tuvieran la misma altura pues su probabilidad teórica es la misma o que existiera mayor diferencia entre las alturas de la suma 5 y la 6 pues sus probabilidades teóricas son de 0.111 y 0.139 respectivamente. Necesitaban corroborar con más lanzamientos pero ¿cuántos? Esa fue la discusión posterior, algunos dijeron que con dos mil sería suficiente, otros que con diez mil irían a la fija, otros que un millón, pero al no encontrar otro programa que permitiera visualizar una cantidad mayor a mil lanzamientos, se quedaron con sus resultados grupales.

Experimento grupal con el problema del príncipe de Toscana

Cuando se aplicó la actividad 4.3 (problema del príncipe de Toscana) los estudiantes pudieron determinar que la probabilidad de que al lanzar tres dados de seis caras y conseguir que la suma de sus resultados sea 9 es de $\frac{25}{216} = 0.1157$, mientras que la probabilidad de que la suma sea 10 es de $\frac{27}{216} = 0.125$. Pero, algunos se cuestionaban la cantidad veces que tuvo que jugar el príncipe de Toscana para poder hacer su cuestionamiento pues para la época no existía forma de calcular la probabilidad de los dos eventos.

Por lo tanto, les propuse un experimento grupal y un reto que solo los pacientes podían cumplir. El experimento consistía en que cada estudiante iba a simular en https://www.random.org/ veinte lanzamientos de tres dados y anotar en una hoja de cálculo de Google si observaba lo mismo que el príncipe, así como llenar una tabla con los datos requeridos. Este experimento sirvió además para introducir el concepto de independencia de eventos.



E	F	G	H	I	J	K	L

El objetivo de este experimento grupal es analizar el problema que el principe de Toscana propuso a Galileo Galilei: ¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?

Para esto es necesario seguir los siguientes pasos:

1 Vaya a la página https://www.random.org/

2 Vaya a la opción con tres dados, ruedelos 20 veces y cuente la cantidad de veces que sumaron 9 y 10. Llene la **tabla 1.**

Evento	Núnero de veces que observó	frecuencia relativa
Suman 9	2	0,33
Suman 10	4	0,66

Tabla 1

nota: juanma, la frecuencia relativa es con relación a los veinte lanzamientos (como el total)

Figura 31. Ejemplo de las 20 simulaciones al lanzar tres dados.

Como cada uno de los 37 estudiantes hacía el experimento 20 veces, al totalizar las frecuencias absolutas de cada uno se lograron 740 simulaciones en total. Los resultados mostraron que 117 veces salió la suma 10 mientras que 86 veces salió la suma 9, por lo tanto, la probabilidad frecuencial de que salga el 9 es de $\frac{86}{740} = 0.116$ y la que salga el 10 es de $\frac{117}{740} = 0.158$.

	Suman 9	Suman 10
Estudiante 1	0	2
Estudiante 2	2	4
Estudiante 3	2	6
Estudiante 4	3	3
Estudiante 5	0	6
Estudiante 6	3	3
Estudiante 7	2	1
Estudiante 8	2	4
Estudiante 9	1	1
Estudiante 10	4	3

Evento	Núnero de veces que observó	frecuencia relativa
Suman 9	86	0,116
Suman 10	117	0,158

Figura 32. Total de observaciones del experimento grupal.

Como la probabilidad frecuencial dista todavía de la teórica les propuse el siguiente simulador https://www.geogebra.org/m/mKSj8gsR para que pudieran repetir el experimento un número mayor a las 740 que logró el grupo.

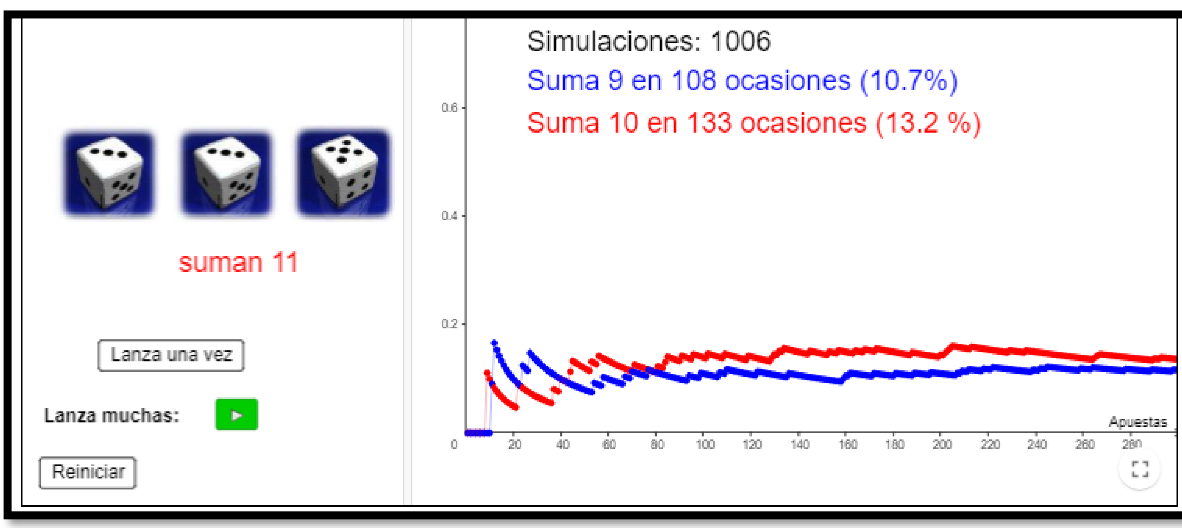


Figura 33. Simulando el lanzamiento de tres dados.

El reto que les pedí era continuar con la simulación después de clase y lograr la mayor cantidad de veces necesarias para que la probabilidad frecuencial fuera lo más cercana a la teórica. A continuación se muestran algunos resultados:

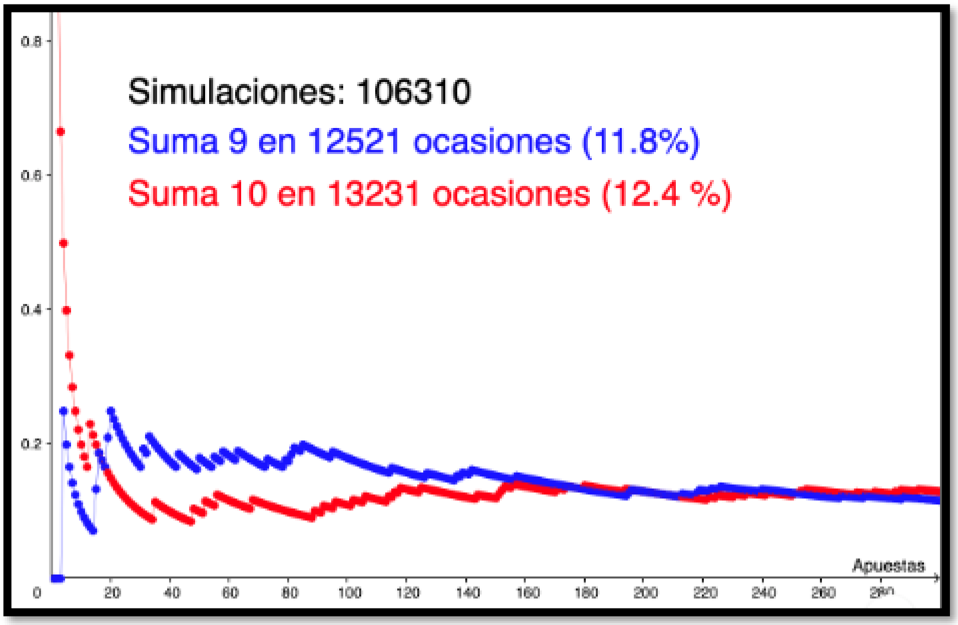


Figura 34. Simulando 106310 veces el lanzamiento de tres dados.

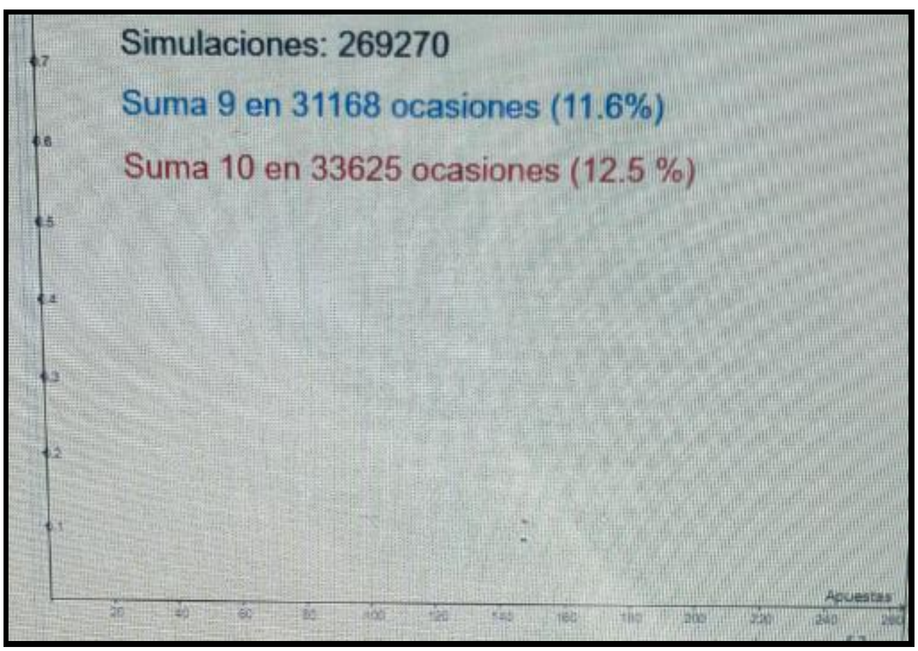


Figura 35. Simulando 269270 veces el lanzamiento de tres dados.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo se mencionarán las conclusiones obtenidas de la aplicación de la secuencia didáctica, el efecto positivo que generó en las dinámicas de clase, los retos que demanda la educación virtual y finalmente, las habilidades conseguidas con mis estudiantes respecto al desarrollo de algunas nociones de probabilidad.

5.1 Conclusiones

Lograr un aprendizaje integral del concepto de probabilidad en la escuela es posible, en la medida en que un estudiante pueda asimilar y articular los tres enfoques de probabilidad: clásico, frecuencial y subjetivo (Sánchez, 2013, p.23). En consecuencia, las actividades aplicadas de la secuencia didáctica han ofrecido a los estudiantes experimentar (en situaciones de juego) el enfoque frecuencial y clásico de probabilidad.

En consecuencia, han entendido que un evento es impredecible cuando se realizan muy pocos ensayos pero que tiende a presumirse cuando se realizan muchas repeticiones del experimento (Sánchez, 2013, p.24) tal y como lo pudieron observar en los simuladores de Geogebra (ver figura 24 y 29).

El enfoque clásico de probabilidad se usó en las diferentes actividades intentando dar solución a una de las dificultades en el aprendizaje de la probabilidad en la escuela llamado el *sesgo de equiprobabilidad* (Sánchez, 2013, p.24):

> El sesgo de equiprobabilidad consiste en una tendencia de los estudiantes a pensar que los resultados de una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad. En los experimentos de Lecoutre (1992) y Lecoutre y Cordier (1990) se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad al comparar el evento de obtener una suma de 5 con el de obtener una suma de 6 al lanzar un dado dos veces. Esta pregunta se hace de diferentes maneras y la respuesta de la mayoría sigue siendo que los dos eventos tienen la misma probabilidad. Los autores sostienen que la causa no es atribuible a una falta de razonamiento combinatorio, sino a una idea de que si un experimento es al azar, todos sus resultados deben tener la misma

> probabilidad. Es posible que el sesgo de equiprobabilidad sea fomentado, en lugar de superado, con una enseñanza que sobreestime el enfoque clásico (Sánchez, 2013, p.24)

El exponer a los estudiantes al problema de Duque de Toscana y comparar los eventos: suma de 9 y de 10 al lanzar tres dados a partir de los diagramas de árbol y el simulador de Geogebra, les permitió salir del problema de *equiprobabilidad* en el que estaban la mayoría cuando establecían que cualquiera de los resultados tenía igual probabilidad numérica, sin entender los elementos que constituían cada evento.

En cada una de las actividades aplicadas en la secuencia didáctica fue importante el uso de preconceptos matemáticos que los estudiantes tuvieron que trabajar en años anteriores de su escolaridad tales como: teoría de conjuntos, relaciones y proporciones, fundamentos de lógica (disyunción y conjunción), elementos de aritmética (porcentajes y aproximación decimal) así como, el uso de diagramas de árbol.

El uso de herramientas virtuales fue de vital importancia para este trabajo de grado, no solo por los simuladores en Geogebra que permitieron la visualización de fenómenos y la repetición de experimentos que hubiera sido imposible con material concreto, sino por las posibilidades de comunicación con los estudiantes a través de la plataforma de Google Meet y sus salas de trabajo, Google classroom y Google Drive.

Respecto a las dinámicas de clases virtuales, es importante destacar que rutinas como la comunicación, los tiempos de ejecución de actividades, el trabajo en grupo, el monitoreo constante del profesor a las producciones y análisis de los estudiantes, entre otros, se ven afectadas. Esto demoró la aplicación de las unidades y en ocasiones lo que se planeaba para una sola clase de 50 minutos se prolongaba hasta dos o tres clases más. Como consecuencia la última actividad, donde se pretendía un acercamiento a la distribución normal a partir de la Binomial no se pudo aplicar pues se tenía que priorizar el cumplimiento del currículo escrito.

5.2 Recomendaciones

Tal como se comentó en el análisis de la secuencia didáctica, las clases virtuales deben planearse con cierta flexibilización de tiempo, pues en ocasiones lo que se tenía pensado para una hora de clase se ejecuta en dos o tres; muchas veces producto de la intención misma de las actividades que demandan de los estudiantes habilidades de observación, creación de conjeturas y verificación de las mismas. Estos procesos no fluyen fácilmente y en ocasiones es el maestro quien tiene que dirigir el curso de la clase usando preguntas orientadoras y no respuestas inmediatas.

De las actividades que más gustaron a los estudiantes fueron las que estuvieron mediadas por los simuladores en Geogebra. El repetir el experimento aleatorio muchas veces y comparar los resultados con sus compañeros fue decisivo para tener conversaciones interesantes en clase. Así que una recomendación especial tiene que ver con las bondades del uso de los programas en las actividades, eso sí, que estén planeados estratégicamente a partir de un objetivo de aprendizaje claro y alcanzable.

Para quienes escojan la estrategia de ampliar el significado del concepto de probabilidad con sus estudiantes y apliquen algunas de las estrategias de esta unidad didáctica, se podrían complementar con aplicaciones concretas como las que propone la Asociación Estadounidense de Estadística en la revista en línea *Statistics Teacher* https://www.statisticsteacher.org/ donde propone la construcción de un modelo probabilístico a partir de una simulación de la propagación de la gripe en un edificio.

Bibliografía

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). *The nature of chance and probability*. In G.A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. New York, USA: Springer.

Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol 8, 247-263. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/335/33508302.pdf

Bausela Herreras, E. (2004). *La docencia a través de la investigación-acción*. Revista Iberoamericana De Educación, 35(1), 1-9. Recuperado de https://doi.org/https://doi.org/10.35362/rie3512871

Borovcnick, M., & Kadadia, R. (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. Advances in Mathematics Education. Dordrecht, Springer.

Burbano, V., & Valdivieso, M. (2014). Conocimientos del profesor para la enseñanza de la probabilidad en la educación media colombiana, 1° Encuentro Colombiano de Educación Estocástica

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación?, Atas Do III encontró de probabilidades e estatística na escola CIED.

Bachillerato Internacional. (2014) *El Programa de los Años Intermedios: de los principios a la práctica*. https://www.spps.org/site/handlers/filedownload.ashx?moduleinstanceid=38372&dataid=21224&FileName=from_principles_to_practice_en_espan_ol_2014.pdf

Bachillerato Internacional. (2019) *Guía de matemáticas: Aplicaciones e Interpretación. Primera evaluación en 2021*.

Bachillerato Internacional. (2020) *Orientación para los colegios sobre la planificación de la continuidad del aprendizaje en línea.*

https://www.ibo.org/globalassets/news-assets/coronavirus/online-learning-continuity-planning-es.pdf

Colegio Tilatá. (2017*). La política de enseñanza y aprendizaje del colegio Tilatá*. [Documento institucional de acceso privado].

Eicheles, A. &., Vogel, M. (2009). Leitidee Daten und Zufall, Ed. Vieweg + Teubner. Wiesbaden, Alemania.

Fernández, G. Polola, L. & otros. (2006). *Génesis y evolución histórica de los conceptos de probabilidad estadística como herramienta metodológica.*

García, R. (2013). *Aprendizaje de la estadística y la probabilidad en Secundaria* / (tesis de maestría). Universidad de Cantabria, España.

Gaspar, A. (2015). *O uso da simulacao no cálculo de probabilidade.* (Tesis de maestría). Instituto Politécnico de Leiria.

Icfes. (2019). *Avancemos 4°, 6° y 8°. Hacia un proceso formativo. Guía de orientación 2019.* https://www.icfes.gov.co/documents/20143/178404/Guia+de+orientacion+avancemos+2019.pdf/0fe4e311-5ff4-2779-9c6b-0dd9a5a73238

Icfes. (2019). *Reporte de resultados avancemos curso 8ª año 2019.* [Gráfica 1, 2, 3]. [Documento institucional de acceso privado].

Ivayana, D., & Budayasa, I. (2017). Probabilistic thinking of elementary school students in solving probability tasks based on math ability, AIP Conference Proceedings.

León, N. (2009). *La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida*. Sapiens. Revista de Investigación.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá.

MEN. (2015). *Siempre Día – e. La ruta hacia la excelencia educativa. Derechos básicos de aprendizaje V1*. https://es.calameo.com/read/0059753345356d2e848d8

Rodríguez, D. (2018). *Las paradojas como herramienta para la enseñanza de la probabilidad /* (tesis de maestría). Universidad de la Rioja, España.

Sánchez, E., & Valdez, J. (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTADÍSTICA NA ESCOLA.* Centro de Investigación en Educación de la Universidad de Minho. Braga

Statistics Teacher Online (2021, 22 de abril – 14 de mayo), "Investigation 12, Chances of Getting the Flu?https://www.statisticsteacher.org/files/2020/03/Investigation12.pdf, recuperado: 22 de abril de 2021.