UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Secuencia didáctica para la enseñanza de propiedades y elementos del triángulo utilizando el programa CarMetal

Rosalba Lancheros Ibáñez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Valledupar, Colombia
2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Secuencia didáctica para la enseñanza de propiedades y elementos del triángulo utilizando el programa CarMetal

Rosalba Lancheros Ibáñez

Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar al título de**:**
Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora
Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Valledupar, Colombia
2016

*A Dios que me dio fortaleza para terminar este trabajo. A mi familia y especialmente a mi esposo que siempre me alentaron para seguir adelante con el proyecto***.**

Agradecimientos

A mi directora de proyecto Clara Helena Sánchez por guiarme y llevarme a buen término con el proyecto.

A mis estudiantes de la Institución Educativa CASD “Simón Bolívar” por participar con entusiasmo en esta propuesta.

Resumen

El presente trabajo de investigación experimental se realizó en la Institución Educativa CASD “Simón Bolívar” de la ciudad de Valledupar en el grado octavo. Se implementó una prueba diagnóstica a un grupo de estudiantes y con base en ella se diseñó una secuencia didáctica para observar los cambios en los niveles de aprendizaje y comprensión de los conceptos relacionados con el triángulo. La secuencia consiste en un conjunto de actividades haciendo uso de algunas herramientas TIC como el programa CarMetal.

La efectividad de la secuencia se pudo medir mediante la comparación de la prueba diagnóstica con la evaluación final, donde se observa el progreso en los estudiantes en cuanto al aprendizaje de las propiedades y los elementos del triángulo.

Palabras clave: Elementos, propiedades, triángulo, CarMetal.

Abstract

This experimental research was conducted in the Educational Institution CASD "Simon Bolivar" in the city of Valledupar in the eighth grade. A diagnostic test was performed to a group of students and based on it, it was designed a didactic sequence to observe changes in levels of learning and understanding of triangle related concepts. The sequence consists of a set of activities using some TIC tools such as CarMetal software.

The effectiveness of the sequence could be measured by comparing the diagnostic test with the final evaluation, where progress is observed in students in learning the properties and elements of the triangle.

Keywords: elements, properties, triangle, CarMetal

.

Contenido

Dedicatoria ..... *III*
Agradecimientos ..... *IV*
Resumen ..... *V*
Abstract ..... *VI*
Introducción 12
Planteamiento del Problema 14
1. Marco Teórico 16
1.1. Marco histórico - epistemológico 16
1.1.1. La importancia de las figuras geométricas en la filosofía de Platón 23
1.2. Marco disciplinar 24
1.2.1. Introducción 24
1.2.2. Elementos básicos del Triángulo. 29
1.2.2.1. Clasificación de triángulos 31
1.2.2.2. Clasificación de triángulos con respecto a sus ángulos. 32
1.2.2.3. Propiedades del triángulo 35
1.2.3. Rectas y Puntos notables del triángulo 39
1.3. Marco didáctico 44
2. Marco Metodológico 48
2.1. Metodología General 48
2.2. Estructura de la Secuencia Didáctica 50
3. Resultados. Aplicación de la Secuencia didáctica 52
3.1. Consideraciones sobre la Aplicación de la Secuencia Didáctica 52
3.2. Análisis de Resultados 54
3.2.1. Evaluación Diagnóstica 54
3.2.2. Evaluación Final 56
4. Conclusiones y recomendaciones 61
4.1. Conclusiones 61

4.2. Recomendaciones 62
A. Anexo A: Evaluación Diagnóstica 63
B. Anexo B: Guía de Inducción 66
Inducción sobre el uso del programa CarMetal: 66
C. Anexo C: Taller 1 72
D. Anexo D: Taller 2 79
E. Anexo E: Taller 3 83
F. Anexo F: Taller 4 89
G. Anexo G: Taller 5 95
Bibliografía 100

Lista de Tablas

Tabla 2-1. Metodología Propuesta 48
Tabla 2-2. Temas de los Talleres aplicados dentro de la secuencia didáctica..... 51
Tabla 3-1. Promedio por Pregunta grupo Experimental y Control 54
Tabla 3-2. Resultados grupo Experimental ... ……53
Tabla 3-3. Resultados grupo Control 55
Tabla 3-4. Promedio por Pregunta grupo Experimental y Control 57
Tabla 3-5. Resultados grupo Experimental……..……...……...……55
Tabla 3-6. Resultados grupo Control 58

Lista de Figuras

Figura 1-1. a. Torres para Cables de Luz. b. Domo con Triángulos 24
Figura 1-2. Polígono con diagonales..... 25
Figura 1-3. Recta 27
Figura 1-4. Segmento 28
Figura 1-5. Rayo 28
Figura 1-6. Ángulo. 29
Figura 1-7. Ángulo llano. 29
Figura 1-8. Elementos del Triángulo. 30
Figura 1-9. Ángulos exteriores del Triángulo. Exterior e interior de un Triángulo 31
Figura 1-10. Triángulo Equilátero. 31
Figura 1-11. Triángulo Escaleno. 32
Figura 1-12. Triángulo Isósceles 32
Figura 1-13. Clasificación de Ángulos 33
Figura 1-14. Triángulo Rectángulo 33
Figura 1-15. Triángulo Obtusángulo 34
Figura 1-16, Triángulo Acutángulo 34
Figura 1-17. Triángulo según sus lados y según sus ángulos 34
Figura 1-18. Ángulos alternos internos 35
Figura 1-19. Teorema La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° 36
Figura 1-20. Teorema suma ángulos exteriores 36
Figura 1-21. Ángulo exterior de un triángulo es la suma de los ángulos interiores no adyacentes 38
Figura 1-22. Triángulo obtusángulo 39
Figura 1-23. Mediatriz de un Triángulo. 40
Figura 1-24. Mediatrices de un Triángulo 41
Figura 1-25. Bisectriz del ángulo de un Triángulo 42
Figura 1-26. Alturas de Triángulos 42
Figura 1-27. Mediana y baricentro de un Triángulo. 43
Figura 1-28. Recta de Euler 44

Lista de Gráficas

Grafica 3-1. Comparación de la evaluación de entrada en el grupo experimental y control 55
Grafica 3-2. Comparación de la evaluación final en el grupo Experimental y control. 57
Grafica 3-3. Comparativo entre promedio de calificación obtenida en cada pregunta con respecto a los puntos posibles. Grupo Experimental 59
Grafica 3-4. Comparativo entre promedio de calificación obtenida en cada pregunta con respecto a los puntos posibles. Grupo Control..... 59

Introducción

Este trabajo está dirigido a los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa CASD “Simón Bolívar” de la ciudad de Valledupar, jornada de la mañana. Institución cuyo enfoque constructivista se enmarca en un modelo pedagógico holístico basado en un aprendizaje por procesos que busca identificar y potenciar las habilidades, desarrollar competencias y formar en valores.

Se pretende con esta secuencia didáctica que los estudiantes se apropien de un tópico del conocimiento geométrico y desarrollen las interacciones que enlazan la construcción de éste con el contenido que aprenden, es decir, se busca que la secuencia didáctica permita dar significado a los elementos y propiedades del triángulo gracias al uso de algunos recursos de enseñanza. Lo anterior teniendo en cuenta que “el diseño de una secuencia didáctica debe ser una labor de creatividad a través de la cual los docentes logren crear ambientes en los que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, los profundicen, creen nuevos conocimientos, los apliquen y transmitan a los demás”, como se sostiene en (Moreno, 2012)

El trabajo se compone de cuatro (4) capítulos, el primero es el Marco Teórico, que se divide en tres partes: marco histórico, marco disciplinar y marco didáctico. En el marco histórico epistemológico se encuentra un breve recorrido de la historia de la geometría relacionada con el tema que nos ocupa. En el marco disciplinar se exponen los conceptos relacionados con el triángulo y sus propiedades y un marco didáctico que muestra las bondades de la tecnología y en este caso el uso del programa CarMetal. Como dice (Oteiza; Silva, 2004)*¡Una gráfica dinámica del CABRI geómetra resume cientos de imágenes en la pizarra”.*

El segundo capítulo contiene la metodología usada, el desarrollo de la secuencia didáctica y los talleres que la conforman. El capítulo tres contiene el análisis de resultados de la aplicación de la secuencia didáctica antes y después de su aplicación. El capítulo cuatro contiene conclusiones y recomendaciones.

Además, se cuenta con unos anexos importantes para la comprensión del Trabajo.

Planteamiento del Problema

A pesar de la importancia que tiene el conocimiento de la geometría para la formación matemática de los estudiantes en todos los niveles de la educación, desde hace varios años se viene descuidando su enseñanza, al dejarla para el último periodo del año escolar como por cumplir el requisito; a veces simplemente no se enseña.

Lo anterior incide en las dificultades que evidencian los estudiantes en las pruebas externas, en particular las relacionadas con la resolución de problemas de tipo geométrico. Aparte de lo anterior el estudiante no asiste animado a la clase de Geometría, entre otras razones, porque falta dinamismo y acción en una clase que podría tener todas estas características, de tal manera que el manejo de los elementos, relaciones y transformaciones geométricas sea atractivo para ellos, dando significado a los objetos geométricos y sus relaciones.

La problemática anterior se presenta a pesar de que en los documentos curriculares del MEN se ha planteado, desde hace más de una década, que el trabajo con geometría se debe iniciar desde los niveles básicos de la primaría, con aspectos como: el reconocimiento y clasificación de figuras planas, el reconocimiento e interpretación de sus propiedades y relaciones, la construcción y uso de modelos geométricos para plantear y resolver problemas, etc. Sin embargo, cuando los estudiantes llegan a grados superiores de la básica secundaria (octavo grado, en este caso), ni siquiera han logrado el nivel de reconocimiento de figuras planas, entre ellas el triángulo, sus propiedades y relaciones, conocimiento fundamental para el estudio posterior de la trigonometría y de diversas aplicaciones en áreas como la física.

Lo anterior me lleva a formular el siguiente problema

¿Qué características debe tener una secuencia didáctica que permita al estudiante de octavo grado reconocer elementos y propiedades del triángulo?

Para abordarlo propongo diseñ*ar una secuencia didáctica que permita al estudiante de octavo grado reconocer*, *caracterizar y aplicar*, en la solución de problemas geométricos, las propiedades y elementos del triángulo con el apoyo del programa CarMetal.

Más específicamente se trata de:

1. Determinar conceptos previos de los estudiantes de octavo grado relativos al reconocimiento, descripción y clasificación de elementos y figuras geométricas.
2. Seleccionar aspectos disciplinares, curriculares y didácticos que fundamentan la secuencia didáctica.
3. Estructurar actividades de construcción, análisis y problemas que constituyen la secuencia didáctica.
4. Implementar y valorar la secuencia didáctica con los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa CASD “Simón Bolívar” de la ciudad de Valledupar.

1. Marco Teórico

1.1. Marco histórico - epistemológico

Según el historiador Heródoto (484-425 a.C.) la geometría nace en Egipto ya que necesitaban medir constantemente las parcelas de tierra debido a que las inundaciones del Nilo borraban los linderos y a partir de esos linderos había que pagar los impuestos.

El significado etimológico de la palabra geometría, “medida de la tierra”, indica su origen de tipo práctico. La Geometría dejó hace ya mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes. (Godino, y otros, 2002).

A los geómetras se les llamaba *tensadores de cuerdas* porque con cuerdas y estacas se hicieron construcciones y se reconstruyeron las fronteras de los terrenos alteradas por los desbordamientos del Nilo.

Efectivamente los conocimientos prácticos y concretos, que tenían los egipcios y babilonios sobre geometría pasaron a la cultura griega a través de Tales de Mileto (siglo VI a.C) y los pitagóricos (siglo V a.C). Los griegos de la época dorada, siglos VI a III a.C., concibieron las matemáticas abstractas y deductivas y estuvieron especialmente atraídos por las formas y los movimientos que observaban en los cielos; geometría y astronomía estaban íntimamente relacionadas. En el Quadrivium medieval la astronomía era la aplicación práctica de la geometría, como la música lo era de la aritmética para la escuela pitagórica. (Sánchez, 2012)

Los historiadores cuentan que Tales de Mileto fue el primer matemático que demostró teoremas. Se dice que viajó por Egipto donde aprendió geometría y midió la altura de las

pirámides teniendo en cuenta la longitud de las sombras en el momento en que la sombra de un palo vertical era igual a su altura, aplicando lo que hoy llamamos semejanza de triángulos.

A él se adjudican los siguientes teoremas de la geometría: (Gómez, 2002)

- El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- El círculo se biseca por su diámetro.
- Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.
- Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales.
- Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes.

No se sabe cómo hizo Tales las demostraciones, pero se supone que usó un método empírico ya que todos ellos pueden ser aceptados fácilmente de manera intuitiva o por observación directa.

Pitágoras de Samos (569 a.C. – 475 a.C.), discípulo de Tales, es fundador de la escuela de Crotona a la que se le reconoce la primera demostración con el sentido que tiene en la actualidad, al demostrar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto a su lado por el método de reducción al absurdo. Esta demostración dio origen a los números irracionales, aunque no fueran reconocidos como tales en esa época.

La aparición de los inconmensurables hizo que la aritmética y la geometría se separaran dándose un mayor desarrollo a la geometría y viéndose un estancamiento en la aritmética entre los griegos.

Igualmente, a los pitagóricos se debe la primera demostración del Teorema de Pitágoras: “En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto, es igual a las sumas de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto” versión del teorema 47 del libro I de los Elementos de Euclides. Con ello generalizaron geométricamente las triplas de números enteros (a,b,c) tales que $a^2+b^2=c^2$ habrían encontrado los babilonios y dejado registradas en sus tablillas.

Euclides, quien vivió alrededor del año 300 a.C. en Alejandría, es uno de los más prominentes matemáticos de la antigüedad por su libro *Elementos*, obra que fue escrita para enseñar matemáticas en el Museo de Alejandría. La naturaleza de este tratado ha hecho que sea considerado uno de los libros de matemáticas más destacados de todos los tiempos. Sirvió como texto de enseñanza de geometría por más de dos milenios y prácticamente en todas las culturas que lo conocieron. Su importancia radica, no solo en la matemática que allí se encuentra sino en su estilo de razonamiento, el que se conoce como razonamiento al estilo geométrico.

Este ha sido tomado como modelo ideal en otras ramas de la matemática y en otros campos del saber cómo la filosofía o la física. El valor de la obra radica fundamentalmente en la recopilación y sistematización que Euclides de Alejandría[1] hizo de gran parte de la matemática de su época; es lo que se conoce con el nombre de método axiomático. A partir de unas cuantas definiciones, unos postulados y nociones comunes (o axiomas) se demuestran las proposiciones de la teoría (Sánchez C,H, Notas de clase, 2015)

La obra está compuesta de 13 libros sobre temas de geometría, aritmética y álgebra; contiene 467 teoremas sobre geometría plana (libros I a IV), teoría de la proporción (libros V a VI), teoría de números (libros VII a X) y geometría del espacio (libros XI a XIII). Cada libro tiene definiciones y teoremas salvo el primero que contiene además 5 postulados y 5 nociones comunes o axiomas. Los axiomas son elegidos como verdades evidentes en sí mismas y comunes a todas las ciencias. Los postulados son escogidos como verdades evidentes en sí mismas específicas de una ciencia en particular, en este caso la geometría. (Sánchez, 2012).

Los tres primeros postulados se conocen como herramientas euclidianas ya que van a permitir hacer construcciones geométricas, los dos primeros nos dicen cómo construir rectas y el tercero como construir círculos. Sin embargo, hay muchas figuras que no se pueden construir con regla y compás como algunos polígonos y las cónicas.

Para contextualizar este trabajo, comienzo con algunas definiciones del libro I de los *Elementos* de Euclides pertinentes para este propósito (Euclides, 1994).

[1] No se tienen datos precisos sobre la vida de Euclides. Se sabe por autores antiguos que vivió en el siglo III a.C., y fue profesor de matemáticas en el Museo de Alejandría. Euclides escribió varias obras de las cuales quedan solamente Elementos y Datos; este último parece ser un texto auxiliar al primero.

Definición 1. Un punto es lo que no tiene partes.

Definición 2. Una línea es una longitud sin anchura.

Definición 8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

Estas definiciones que pretenden fijar los conceptos básicos de los que tratará el libro son evidentemente deficientes, son usados en la obra sin apelar a sus definiciones. En el análisis que hará Hilbert en sus fundamentos de matemáticas (1899) dejará los dos primeros conceptos como indefinidos y el de ángulo a partir de la noción de semirayos con un punto común.

Definición 10. Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es recto, y la recta que está sobre la otra se llama perpendicular a la otra recta.

Importante definición que muestra la relación directa que hay entre la noción de ángulo recto y de línea perpendicular a otra. En los *Elementos*, los ángulos rectos servirán de parámetro de comparación para los demás ángulos como se observa en la definición 21.

Definición 19. Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro y *multiláteras* las comprendidas por más de cuatro líneas rectas.

Definición 20. De entre las figuras triláteras, *triángulo equilátero* es la que tiene los tres lados iguales; i*sósceles* el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y *escaleno* el que tiene los tres lados desiguales.

Definición 21. Además de las figuras triláteras, *triángulo rectángulo* es la que tiene un ángulo recto, *obtusángulo* [mayor que un recto] el que tiene un ángulo obtuso y *acutángulo* [menor que un recto]el que tiene los tres ángulos agudos.

En las definiciones anteriores no solamente se observa que Euclides define las figuras geométricas planas a partir del números de lados, y no del número de ángulos, así después se confundan las unas con las otras. Me refiero a que se acostumbra hablar de

triángulos y no de triláteros. Lo cual se observa además al dar las definiciones de los distintos tipos de triángulos en la definición 21.

Algunas proposiciones sobre triángulos.

Antes de estudiar las propiedades de un objeto era necesario garantizar su existencia por medio de una construcción, por ello la proposición 1.

Proposición 1: Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Es interesante observar como Euclides comienza su obra indicando cómo se construye un triángulo equilátero con regla y compás, valga decir usando sus tres primeros postulados. Es importante resaltar que la construcción de figuras era primordial para darle sentido concreto al concepto.

A continuación, algunos de los teoremas fundamentales de la geometría plana, relacionados con los triángulos.

Proposición 4: Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos contenidos por los lados iguales, entonces también tienen la base igual a la base, el triángulo igual al triángulo, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber, aquellos opuestos a los lados iguales.

En esta proposición reconocemos uno de los casos de congruencia de triángulos al notarlo como LAL, lado, ángulo, lado.

Proposición 5. En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Quizás sea la primera demostración *rigurosa* del teorema enunciado por Tales de Mileto unos siglos atrás.

Proposición 16 En todo triángulo si se prolonga uno de sus lados, el *ángulo externo* es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

Proposición 17 En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera, son menores que dos rectos.

Proposición 19 En todo triángulo al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

Proposición 20 En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

Proposición 22 Con tres rectas, que son iguales a tres rectas dadas, *construir* un triángulo: así es necesario que dos de las rectas tomadas a la vez en cualquier forma deberán ser mayor que la restante.

Intuitivamente se podría pensar que con tres segmentos cualesquiera podría construirse un triángulo, este teorema nos muestra que esa intuición no es correcta y enuncia una condición suficiente y necesaria para construir un triángulo dados tres segmentos arbitrarios.

Proposición 32. En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

No nos detendremos en las demostraciones pues habría que adentrarse en el sistema axiomático de Euclides, pero el lector interesado puede consultar los detalles en (Euclides, 1994). Anotaremos, eso sí que el sistema euclidiano de los Elementos no es métrico.

Allí a través de construcciones con regla y compás (postulados 1 a 3), las nociones comunes y los demás postulados se hacen las demostraciones. Algunas de estas proposiciones las desarrollaremos más adelante usando el programa CarMetal.

En 1899 Hilbert publicó un famoso trabajo conocido como “Los Fundamentos de la Geometría”, que contenía una novedosa y sistemática elaboración de la geometría euclídea. Hilbert expuso un nuevo enfoque del significado de lo que es un sistema axiomático, que traería enormes implicaciones para la matemática del siglo XX.

Los axiomas que presentó en su libro permitirían, según su concepción declarada, derivar desde su base, todos los teoremas conocidos de la geometría euclídea así como los de las no-euclídeas, dependiendo de qué sistema de axiomas se escogiese y particularmente cambiando el postulado de las paralelas.

“Los Fundamentos de la Geometría” de Hilbert apareció como la culminación de una vigorosa corriente de investigación que se desarrolló en el último tercio del siglo diecinueve, con la participación de matemáticos prominentes tales como Riemann, Beltrami, Helmholtz, Klein, Lie, Pasch, Veronese, y muchos otros. (Corry, 2002 págs. 32 - 33)

De la famosa plática de ingreso a la universidad de Gotinga a finales del siglo XIX surge la figura de Félix Klein (1849-1925) quien propone un concepto unificador de la geometría: “un espacio y unas transformaciones” trasladando el objeto de estudio desde las figuras a las transformaciones y combinando los progresos de la geometría proyectiva con los de la teoría de grupos, Klein aporta un sentido dinámico e innovador al estudio de la geometría.

Klein dio en 1872 una lección inaugural en la universidad alemana de Erlangen. En su disertación, conocida después como el programa de Erlangen, hizo una jerarquización y esquematización de las geometrías mediante grupos y subgrupos, concibiendo como objeto de cada una el estudio de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones, y considerando cada geometría como subgeometría de otra.

Desde el punto de vista de Klein, la geometría euclídea es un caso especial de la geometría afín, y esta a su vez un caso especial de una geometría aún más general, la geometría proyectiva. (Gómez, y otros, 2003).

La axiomática de los “Fundamentos de la geometría” de Hilbert fue muy utilizada hasta que aparecieron los axiomas de George David Birkhoff (1884,1944), debido a su simplicidad y al hecho de que usan los números desde el principio, la enseñanza basada en este sistema tuvo mucho éxito. Como ejemplos de libros de texto basados en ellos se puede mencionar el del mismo Birkhoff y Beatley (Basic Geometry, 1958) el de Nichols, Palmer y Schacht (Geometría Moderna, 1978) y el de Moise y Downs, geometría métrica que tiene el propósito fundamental de enseñar a los estudiantes a leer matemática y también a escribir sobre ella. (Lluis, 1979 pág. 14).

En áreas diferentes de la ciencia, como lo es la teología, el triángulo también ha sido una figura de importancia. En principio, el número tres simboliza el orden espiritual, el equilibrio. Según algunas representaciones religiosas, el Dios católico es simbolizado

como un triángulo invertido con un ojo dentro de él, haciendo alusión a su omnipresencia y su omnisciencia (Dumoulin, 2016).

1.1.1. La importancia de las figuras geométricas en la filosofía de Platón

Platón expone en el Timeo, que el triángulo equilátero simboliza la armonía, la divinidad y la proporción. Y que el hombre se representa con la división en dos de ese equilátero, convirtiéndose en un triángulo rectángulo. Su tarea es recuperar esa parte “perdida” mediante un tránsito de regreso, evolutivo, y restablecer al fin del camino el equilibrio perdido. (Dumoulin, 2016).

Triángulos, cuadrados y pentágonos, los polígonos de las caras de los poliedros, posibilitan la situación filosófica y dan a luz una tradición, la de los sólidos platónicos. Ésta nace con Platón, para quien la geometría es una ciencia aplicada, pero no en el sentido técnico, sino una ciencia aplicada a la vida, un estilo de vida que respeta una ética, una política y una concepción de la divinidad y que está asociado a la creencia en la reencarnación del alma inmortal. Particularmente en el diálogo del Timeo encontramos la importancia que le da Platón al triángulo.

A pesar de que los elementos son cuerpos, Timeo advierte que dada su pequeñez los triángulos no son perceptibles individualmente, por lo que sólo cuando se ensamblan formando “moléculas” (primer estadio) y las moléculas se enlazan entre sí para formar objetos perceptibles (segundo estadio) entonces podemos percibir sus masas.

Los triángulos, polígonos con el menor número de lados posible, son las figuras geométricas a partir de las cuales se desarrollan los poliedros regulares que se asocian a los elementos naturales.

Así Timeo propone el triángulo como principio de los cuerpos de todos los elementos. Y dentro de la variedad de triángulos, el rectángulo es el más perfecto y el más bello, aquel que por ser firme y liso está en condiciones de proporcionar la exactitud necesaria para producir los poliedros de los elementos. Los cuatro elementos o raíces de la física

platónica (fuego, aire, agua y tierra) se corresponden con cuatro poliedros regulares convexos: tetraedro, octaedro, icosaedro y hexaedro, respectivamente. (González, 2015 págs. 80 , 90).

Por todo lo anterior no es de sorprenderse que los antiguos griegos hayan dado tanta importancia al estudio de las propiedades del triángulo

1.2. Marco disciplinar

1.2.1. Introducción

Considerando que un polígono es una porción del plano cerrada, limitada por un número cualquiera de líneas rectas, el triángulo es el polígono de menor número de lados. Es el más simple y el único que no tiene diagonales (diagonal es una línea recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono), y a pesar de ello es uno de los más importantes, tanto por la gran cantidad de construcciones que se pueden plantear, como por tratarse de la figura que servirá de base para la construcción de otras más complejas, tanto planas como espaciales. (Palmer, y otros, 2006).

El papel del triángulo en estructuras con triángulos se puede observar en las figuras que se muestran a continuación:

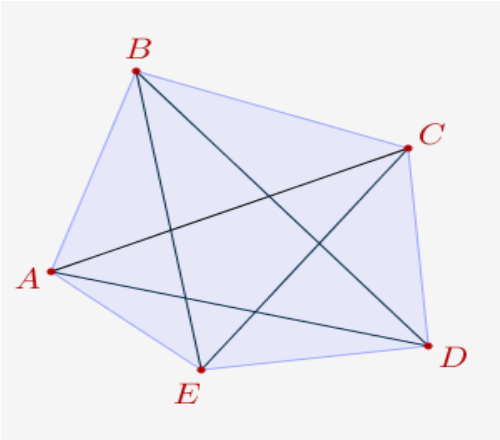
Estructuras con triángulos

Figura 1-1. a. Torres para Cables de Luz **b. Domo con Triángulos**

Fuente: Tomado de eco-fullerblogspot.com y aulatecnologia1

También por ser el triángulo el polígono más simple es una de las figuras fundamentales de la geometría debido a que cualquier polígono puede descomponerse en triángulos, trazando todas sus diagonales.

Figura 1-2. Polígono con diagonales.



Por ello es de vital importancia en el aprendizaje de la geometría definir el correcto proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto en los niños de grado octavo.

Para esta sección me basaré esencialmente en (Moise, 1989). Este libro de geometría métrica es uno de los mejores de los últimos tiempos. Está bien escrito y realmente ayuda a los estudiantes a entender la geometría en un nivel profundo; en casi todos los casos los conceptos se explican de manera intuitiva mediante análisis informal y generalmente mediante figuras antes de definirlo formalmente. Según los autores, han dado nombres a un gran número de teoremas, para que se haga más fácil la tarea de recordarlos y de referirse a ellos. Véase, por ejemplo, el teorema de la Charnela en la pág. 203 y el postulado de la regla en la pág. 34, los cuales voy enunciar:

Teorema de Charnela: Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo.

Postulado de la regla: Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:

1) A cada punto de la recta corresponde un número real.
2) A cada número real corresponde exactamente un punto de la recta.
3) La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Se sabe cómo determinar las áreas de varias figuras simples y se conoce la relación pitagórica de los triángulos rectángulos. Algunas de las nociones son tan evidentes que nunca se hubiera ocurrido expresarlas con palabras y menos considerar porque son ciertas. La Siguiente es una de ellas.

Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.

Pero otras como la relación pitagórica no son evidentes en lo absoluto. Por lo tanto este libro organiza ordenadamente el conocimiento de la geometría, de manera que los enunciados más complicados puedan deducirse de los más sencillos. Ellos se encuentran en un orden tal que cada enunciado de la lista puede deducirse de los anteriores mediante un razonamiento lógico.

El sistema de Moise se presenta como una cuádrupla <S,L,P,d> donde se caracteriza cada conjunto S,L,P y d es la función distancia. Entre los múltiples axiomas del sistema presentamos los que nos serán de utilidad.

Postulado 1: **Postulado de la distancia**

A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.

Postulado 2: **Postulado de la recta**

Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.

Postulado 11: Postulado de la medida de ángulos.

A cada ángulo $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180°.

Postulado 14: Postulado del suplemento

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Otro libro que tomaré como referencia es la *Geometría plana y del espacio* de J. A. Baldor, (1967) muy usado en nuestro medio para la enseñanza media.

Todas las gráficas, salvo que se diga lo contrario, han sido elaboradas por la autora de este trabajo con el programa CarMetal.

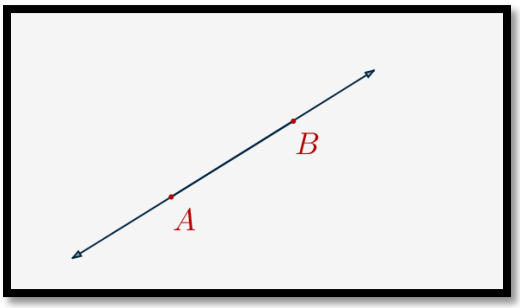
Así que para comenzar, se darán algunas definiciones básicas de geometría que intervienen en el tema de los elementos y las propiedades del triángulo.

Punto: El punto no se define. La *idea* de punto está sugerida por la huella que deja en el papel un lápiz bien afilado. (Baldor, 1967)

Un punto geométrico es imaginado tan pequeño que carece de dimensión.

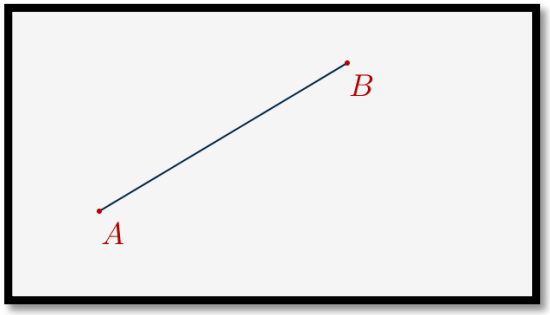
Recta: Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene. La recta que contiene los puntos A y B se denota por $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 1-3. Recta



Segmento: Para dos puntos cualesquiera A y B el segmento $\overline{AB}$, es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los *puntos que están entre A y B*. Los puntos A y B se llaman los extremos de $\overline{AB}$. La relación *estar entre* es una de las relaciones consideradas por Hilbert en sus fundamentos de geometría. Relación que le permite definir rigurosamente a través de sus axiomas el concepto de segmento y de recta.

Figura 1-4. Segmento



La definición de rayo Moise la da primero de manera intuitiva y luego da una definición formal. Aquí primero la manera formal.

$$\text{Un rayo } \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C / ABC\}$$

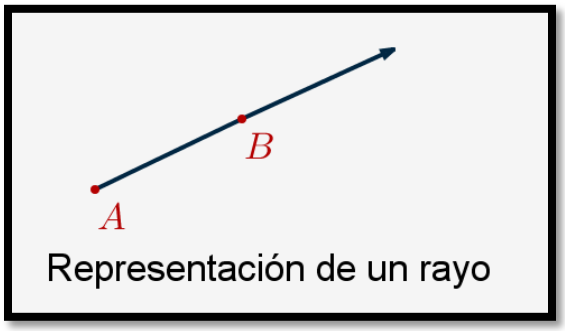
Donde ABC significa que el punto B esta entre los puntos A y C

La relación *estar entre* es una de las relaciones consideradas por Hilbert en sus fundamentos de geometría. Relación que le permite definir rigurosamente a través de sus axiomas el concepto de segmento y de recta.

Rayo: es una figura que se *representa* así:

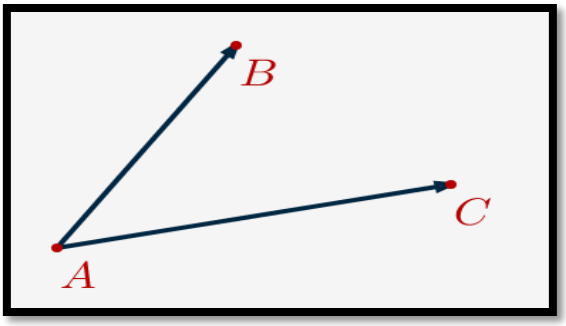
Mediante la figura se indica que el rayo comienza en A, pasa por B en línea recta, y sigue indefinidamente en el mismo sentido. En el símbolo para representar un rayo, la flecha siempre se dibuja apuntando hacia la derecha, no importa cuál sea el sentido del rayo.

Figura 1-5. Rayo



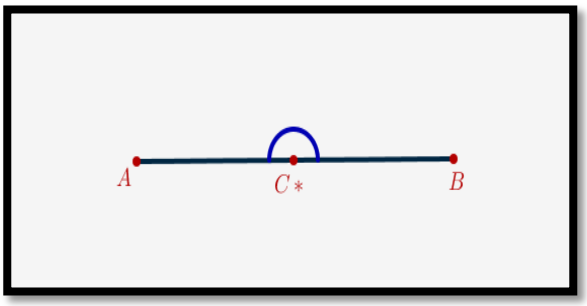
Ángulo: Si dos rayos tienen el mismo orígen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo y el extremo común se llama *vértice*. Si los rayos son $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$.

Figura 1-6. Ángulo.



Ángulo llano: es aquel en el cual un lado es la prolongación del otro. Mide 180°.

Figura 1-7. Ángulo llano.



1.2.2. Elementos básicos del Triángulo.

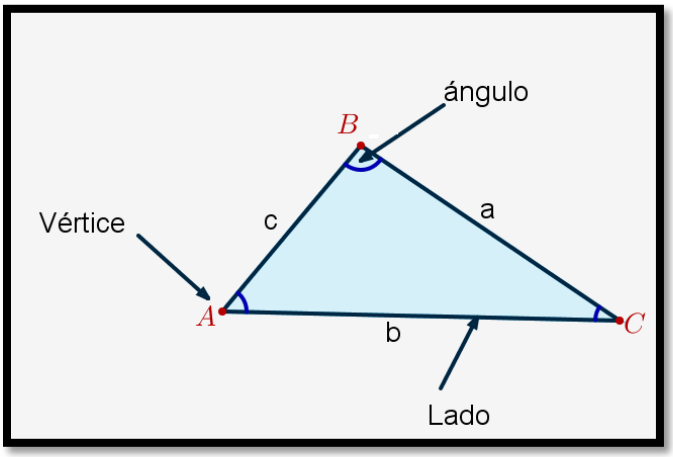
Se llama *elementos básicos* del triángulo los vértices, los lados y los ángulos. Veamos sus definiciones

Definición: Si A, B, C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ se llama un *triángulo* y se indica con ΔABC; los puntos A, B, C se llaman *vértices* y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ se llaman *lados*; los lados de un

triángulo, también se pueden notar en minúscula con las mismas letras de los vértices opuestos.

Todo ΔABC determina tres ángulos $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB$, a estos los llamamos los *ángulos del triángulo* ΔABC. Si está claro a que triángulo nos referimos, frecuentemente se designan por $\angle A, \angle B, \angle C$, haciendo referencia a los vértices del triángulo y por lo tanto los lados del triángulo se notan a,b,c respectivamente como se observa en la figura.

Figura 1-8. Elementos del Triángulo.



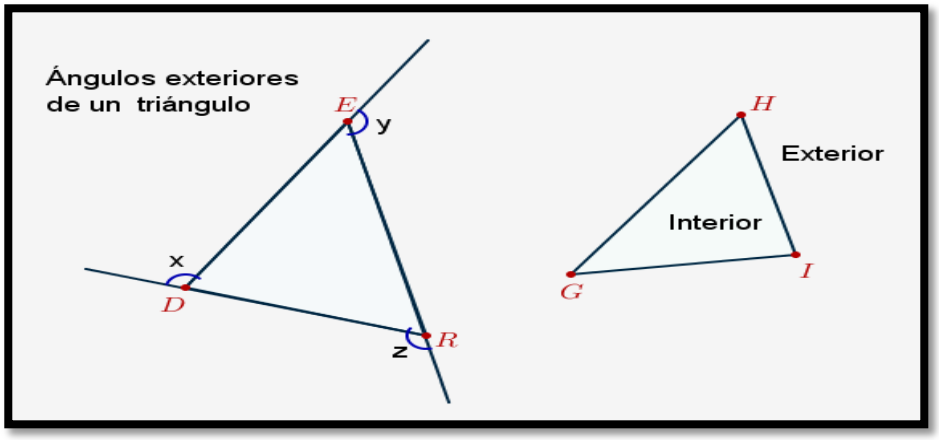
Un punto está en el *interior* de un triángulo si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el *exterior* de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior. Naturalmente las definiciones son totalmente intuitivas.

También se determinan en el triángulo tres ángulos exteriores.

Ángulo exterior de un triángulo: es el que está formado por un lado y la prolongación de otro.

En la figura 1.9 se muestran, los *ángulos exteriores*, $\angle x, \angle y, \angle z$ del ΔDER y el interior y el exterior del triángulo ΔGHI.

Figura 1-9. Ángulos exteriores del Triángulo. Exterior e interior de un Triángulo



1.2.2.1. Clasificación de triángulos

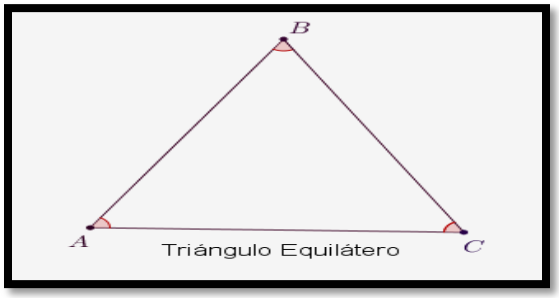
Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos.

Clasificación Según sus lados: Según sus lados los triángulos se clasifican en equiláteros, escalenos e isósceles. A continuación, sus definiciones.

Triángulo equilátero:

Triángulo equilátero es el que tiene todos sus lados *congruentes* (intuitivamente si se pone un lado sobre el otro coinciden y por lo tanto tienen la misma longitud). Notaremos por $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ cuando dos lados son congruentes. En la figura $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$

Figura 1-10. Triángulo Equilátero.

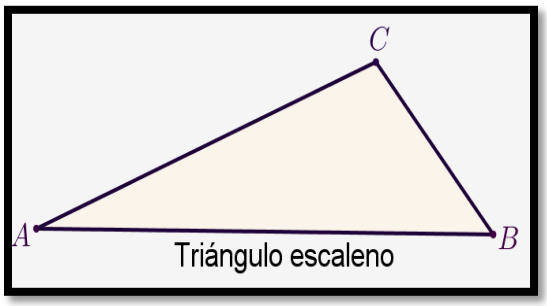


Triángulo escaleno:

Es un triángulo en el cual no hay lados congruentes.

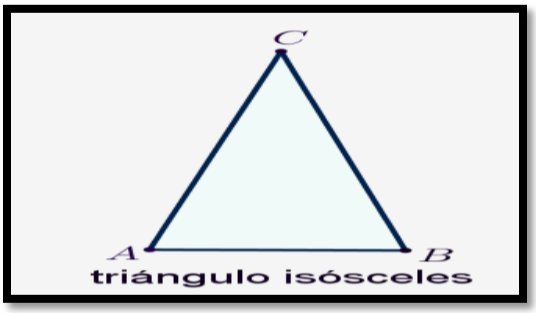
Este triángulo Tales de Mileto lo llamó escaleno, porque la palabra significa oblicuo o inclinado.

Figura 1-11. Triángulo Escaleno.



Triángulo isósceles: Un triángulo es isósceles si tiene dos de sus lados congruentes. En la figura $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$.

Figura 1-12. Triángulo Isósceles

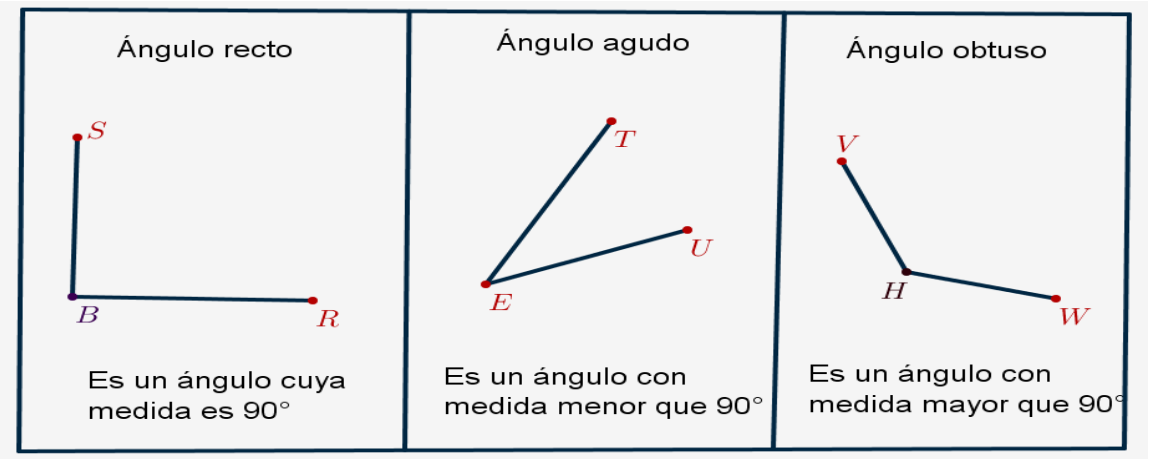


1.2.2.2. Clasificación de triángulos con respecto a sus ángulos.

Para hacer la clasificación de triángulos con respecto a sus ángulos voy a diferenciar las nociones de ángulo y de *amplitud de un ángulo.*

Un ángulo como se definió anteriormente son dos rayos que tienen el mismo orígen o extremo, pero no están en la misma recta. Así como se miden los segmentos con una regla se miden los ángulos con un *transportador*; un instrumento que mide ángulos en grados sexagesimales o radianes. esta medida se le llama la *amplitud del ángulo*. El ángulo recto desde Euclides es el patrón de referencia y tiene una medida de 90°, por eso los ángulos se clasifican así:

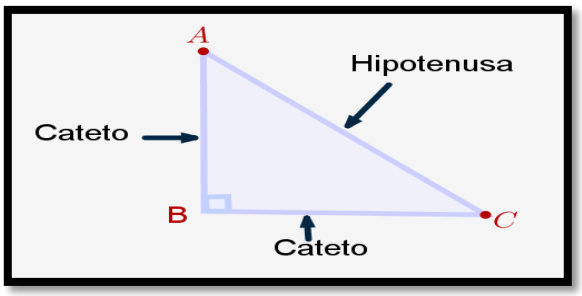
Figura 1-13. Clasificación de Ángulos



Lo anterior permite a su vez clasificar los triángulos según sus ángulos así:

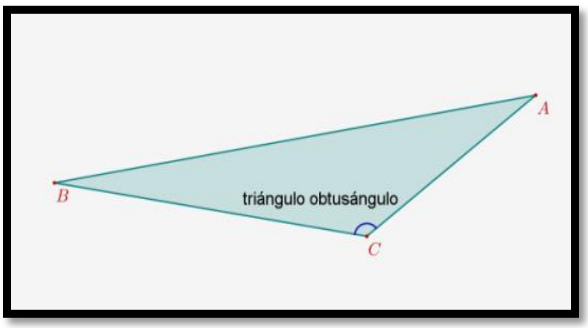
Triángulo rectángulo: es un triángulo que tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados son los *catetos.*

Figura 1-14. Triángulo Rectángulo



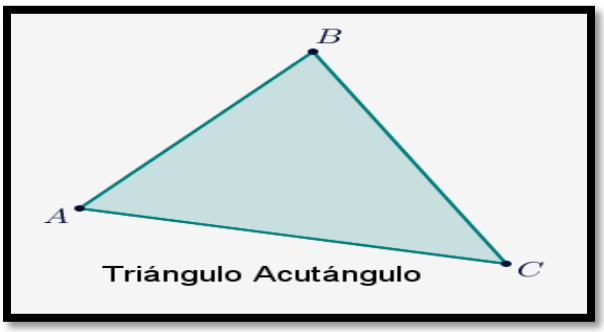
Triángulo obtusángulo: es un triángulo que tiene uno de sus ángulos interiores obtuso.

Figura 1-15. Triángulo Obtusángulo



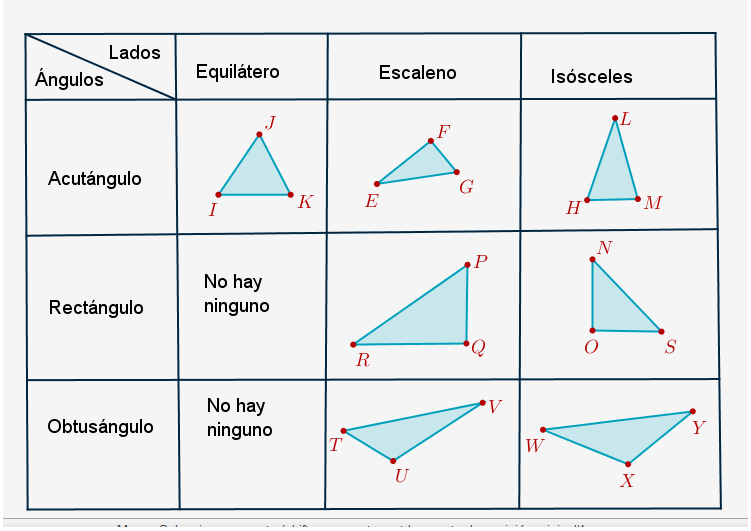
Triángulo acutángulo: es un triángulo que tiene todos sus ángulos agudos

Figura 1-16, Triángulo Acutángulo



En el siguiente cuadro resumimos las clasificaciones hechas de los triángulos según sus lados y según sus ángulos.

Figura 1-17. Triángulo según sus lados y según sus ángulos



Lados / Ángulos	Equilátero	Escaleno	Isósceles
Acutángulo	J, I, K	F, E, G	L, H, M
Rectángulo	No hay ninguno	P, R, Q	N, O, S
Obtusángulo	No hay ninguno	V, T, U	Y, W, X

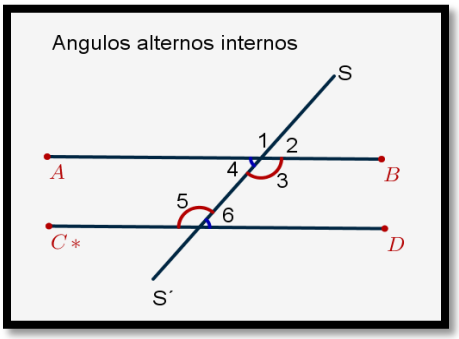
1.2.2.3. Propiedades del triángulo

Por lo que sigue es importante enunciar y demostrar la proposición 27 de los Elementos; *si un segmento al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.*

Teorema: Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales.

Demostración: Supongamos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos rectas paralelas y que $\overline{SS^{\prime}}$ es una recta secante representamos la situación por medio de la figura 1-18

Figura 1-18. Ángulos alternos internos



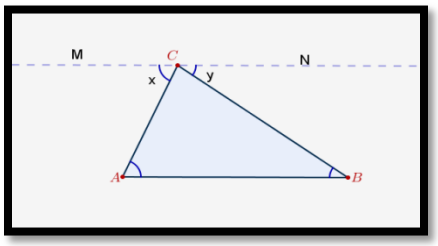
Tenemos que los ángulos $\angle 4$ y $\angle 6$ son alternos internos así como los ángulos $\angle 3$ y $\angle 5$ Como $\angle 4 = \angle 2$ por opuestos por el vértice y $\angle 2 = \angle 6$ por correspondientes tenemos que $\angle 4 = \angle 6$ análogamente se prueba que $\angle 3 = \angle 5$ luego hemos probado que los ángulos internos que se forman al cortar un par de rectas paralelas por una secante son iguales.

.

Entre las múltiples propiedades que tiene un triángulo se van a *demostrar* apoyándonos en las gráficas algunas que considero fundamentales[2].

Teorema: La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Figura 1-19. Teorema



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

Hipótesis: Sean $\angle A, \angle B$ y $\angle C$ los ángulos internos del triángulo ABC.

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Para realizar la demostración se hace una construcción auxiliar:

por el vértice C se traza la recta $\overleftrightarrow{MN}$ paralela al lado $\overleftrightarrow{AB}$ formándose los ángulos $\angle x, \angle y$

Demostración:

Como se observa en la figura, la suma de los ángulos x, C e y forman un ángulo llano, esto quiere decir que:

$\angle x + \angle C + \angle y = 180°$ (1) Por *formar un ángulo llano*.

$\angle x = \angle A$ (2) Por *alternos internos* entre paralelas

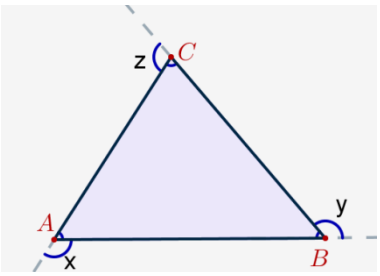
$\angle y = \angle B$ (3) Por *alternos internos* entre paralelas

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. De esta manera queda demostrado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^0

Teorema: La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual cuatro ángulos rectos.

Figura 1-20. Teorema suma ángulos exteriores

[2] No son demostraciones totalmente rigurosas. Para hacerlo debemos basarnos es un sistema axiomático, que aquí no es el caso. Pero son demostraciones que para el nivel que me ocupa son suficientes.



Un ángulo recto equivale a un ángulo de 90^0

Hipótesis: Sean los ángulos $\angle x, \angle y, \angle z$, ángulos exteriores del triángulo ABC

Tesis: $\angle x + \angle y + \angle z = 360°$

Demostración: Se observa en la figura que;

$\angle A + \angle x = 180°$ (1) por formar un ángulo llano.

$\angle B + \angle y = 180°$ (2) por formar un ángulo llano

$\angle C + \angle z = 180°$ (3) por formar un ángulo llano

Sumando miembro a miembro las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene que:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle x + \angle y + \angle z = 180° + 180° + 180°$ (4)

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle x + \angle y + \angle z = 540°$ (5)

Pero ya se demostró que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^0.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (6) Suma de ángulos interiores de un triángulo

Al sustituir $\angle A + \angle B + \angle C$ por 180^0 en la expresión (5) se tiene lo siguiente;

$180° + \angle x + \angle y + \angle z = 540°$ (7) Sustitución de términos

$\angle x + \angle y + \angle z = 540° - 180°$ se resta 180 en ambos miembros de la igualdad

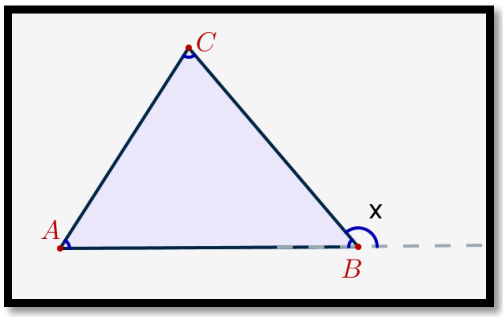
Finalmente se llega a la expresión;

$\angle x + \angle y + \angle z = 360°$

y así se demuestra que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es cuatro veces un ángulo recto.

Teorema: Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Figura 1-21. Ángulo exterior de un triángulo es la suma de los ángulos interiores no adyacentes



Hipótesis: En el triángulo ABC el ángulo x es un ángulo exterior.

$\angle$A, y $\angle$C Son ángulos interiores no adyacentes al $\angle$x .

Tesis: El ángulo x es igual a la suma de los ángulos A y C, es decir; $\angle x = \angle A + \angle C$

Demostración: Para llevar a cabo la demostración se utilizará nuevamente el concepto de ángulo llano.

$\angle x + \angle B = 180°$ Por formar un ángulo llano.

$\angle x = 180° - \angle B$ (1) Porque se resta $\angle B$ en cada lado de la igualdad.

Ahora bien, la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^0; $\angle A + \angle B + \angle C = 180$, por lo tanto,

$\angle A + \angle C = 180° - \angle B$ (2) Porque se resta $\angle B$ en cada lado de la igualdad.

Al comparar (1) y (2) tenemos

$\angle x = \angle A + \angle C$ Por la propiedad transitiva

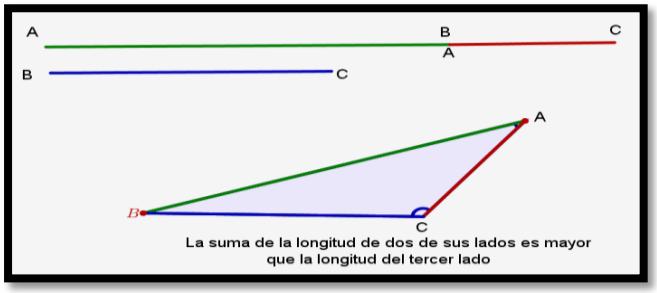
Así queda demostrado que todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Como consecuencia del teorema se tiene que un *ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes.*

Teorema: En cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.

No voy hacer una demostración formal el lector la puede consultar en el libro de Moise (1989), será una demostración gráfica como los que se harán en el aula de clase. En términos de longitudes de los lados del triángulo el teorema se expresaría teniendo en cuenta la adición de segmentos y se expresaría así: $|a+b|>|c|$

Figura 1-22. Triángulo obtusángulo



Sean $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los lados del triángulo. Se puede demostrar esta proposición por adición de segmentos ver figura. Al extremo B, del segmento $\overline{AB}$ se traslada el segmento $\overline{AC}$ y la unión de estos dos segmentos se compara con el segmento $\overline{BC}$. Nuevamente se hace con otros dos lados del triángulo el mismo procedimiento y se compara con el tercero y así sucesivamente. Esta propiedad se llama desigualdad triangular. Es un teorema de extrema importancia, establece la posibilidad de construir la figura plana convexa con el menor número de lados. Prácticamente el desarrollo de toda la geometría depende, en mayor o menor parte, de él. Juega un papel fundamental en matemáticas y diferentes ramas de las ciencias. (Sepúlveda, y otros, 2011).

1.2.3. Rectas y Puntos notables del triángulo

Además de los elementos básicos del triángulo, en todo triángulo se pueden considerar otras *rectas y puntos notables* como los siguientes:

- Las mediatrices del triángulo y su punto de corte.
- Las alturas de un triángulo y su punto de corte.
- Las medianas del triángulo y su punto de corte.

- Y las bisectrices de los ángulos de un triángulo y su punto de corte.

Antes de entrar en detalles comienzo con los conceptos de *punto de concurrencia*, *circunferencia inscrita* y *circunscrita en un triángulo*.

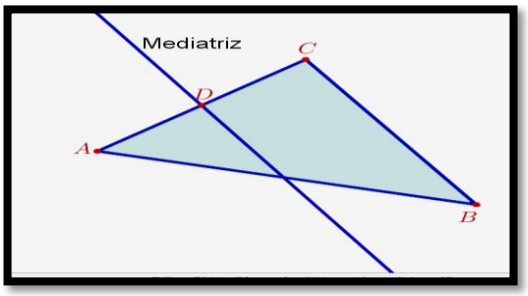
Definiciones:

1. Dos o más rectas son concurrentes, si hay un solo punto que esté en todas ellas. El punto común se llama el *punto de concurrencia*.
2. Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo, entonces decimos que la circunferencia está *inscrita* en el triángulo y que el triángulo está circunscrito a la circunferencia.
3. Si una circunferencia pasa por los tres vértices de un triángulo, entonces decimos que la circunferencia está *circunscrita* al triángulo y que el triángulo está inscrito en la circunferencia.

Mediatriz:

Sea ΔABC un triángulo, y sea D el punto medio de uno de sus lados se llama *mediatriz* la perpendicular trazada al lado desde D.

Figura 1-23. Mediatriz de un Triángulo.

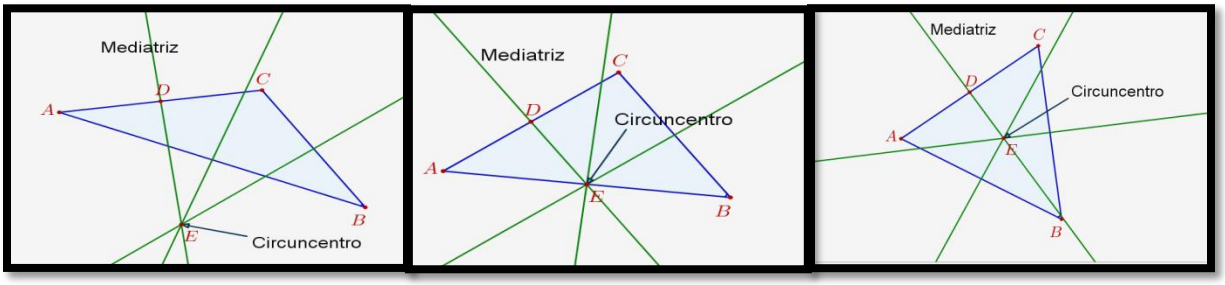


Evidentemente todo triángulo tiene tres mediatrices.

El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama el **circuncentro** del triángulo.

Obsérvese que este punto no siempre está en el interior del triángulo. En los triángulos con un ángulo obtuso, es exterior; en el caso de los triángulos rectángulos pertenece a la hipotenusa, y en el caso del triángulo acutángulo se traza por dentro del triángulo, como se puede observar en la figura 1 - 24.

Figura 1-24. Mediatrices de un Triángulo



El trazado de mediatrices y en consecuencia el circuncentro resuelven dos importantes problemas geométricos:

- Determinar el centro de una circunferencia y
- Dados tres puntos, construir la circunferencia que pasa por ellos.

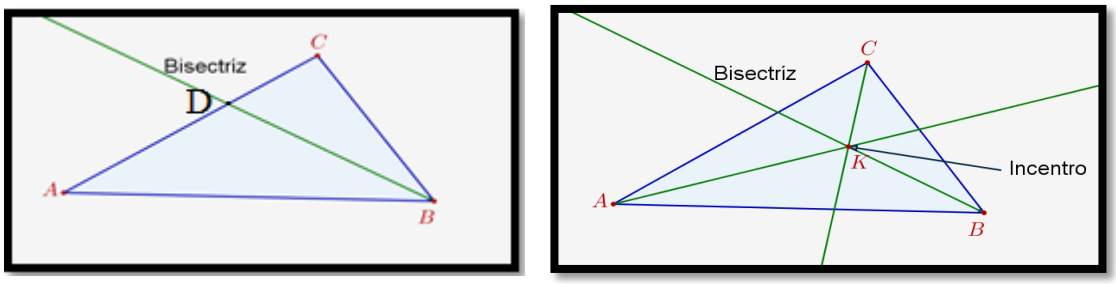
Bisectriz:

La *bisectriz* de un ángulo de un triángulo es el segmento que está en el rayo que divide al ángulo en dos partes iguales, sus extremos son el vértice de ese ángulo y un punto del lado opuesto.

El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama el **incentro** del triángulo.

El incentro es siempre interior al triángulo, de ahí su nombre. La demostración de estos teoremas se encuentra en (Moise, 1989, pág 503).

Figura 1-25. Bisectriz del ángulo de un Triángulo



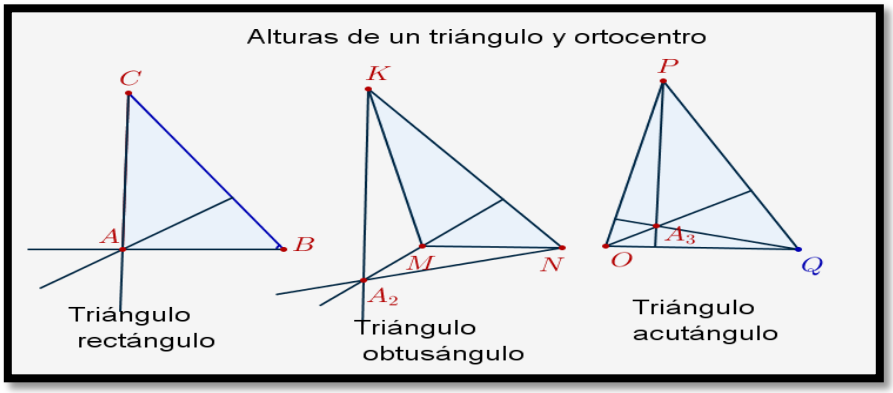
$\angle CBD \equiv \angle ABD$

Altura:

Altura de un triángulo es una recta que pasa por un vértice del triángulo y es perpendicular al lado opuesto. La altura depende del lado escogido como base por eso hay tres alturas y son siempre concurrentes, y el punto de concurrencia se llama **ortocentro.**

El ortocentro no siempre es interior al triángulo. En los triángulos con un ángulo obtuso, el ortocentro es exterior al triángulo. En el caso de los triángulos rectángulos coincide con el vértice del ángulo recto, como se observa en la figura.

Figura 1-26. Alturas de Triángulo



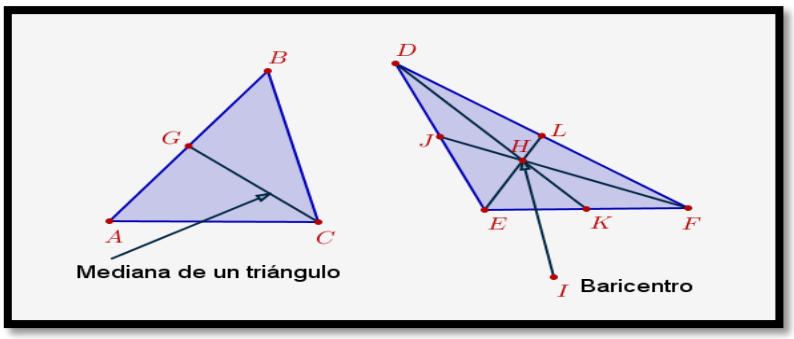
Medianas:

Una *mediana* de un triángulo es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.

El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo se llama **baricentro** del triángulo. El baricentro es siempre interior al triángulo.

En un cuerpo de forma triangular, el baricentro es el centro de masa o centro de gravedad (de ahí su nombre, gr. baros = "gravedad"), es decir, el punto desde el cual se puede tomar el cuerpo sin que manifieste tendencia a girar.

Figura 1-27. Mediana y baricentro de un Triángulo.

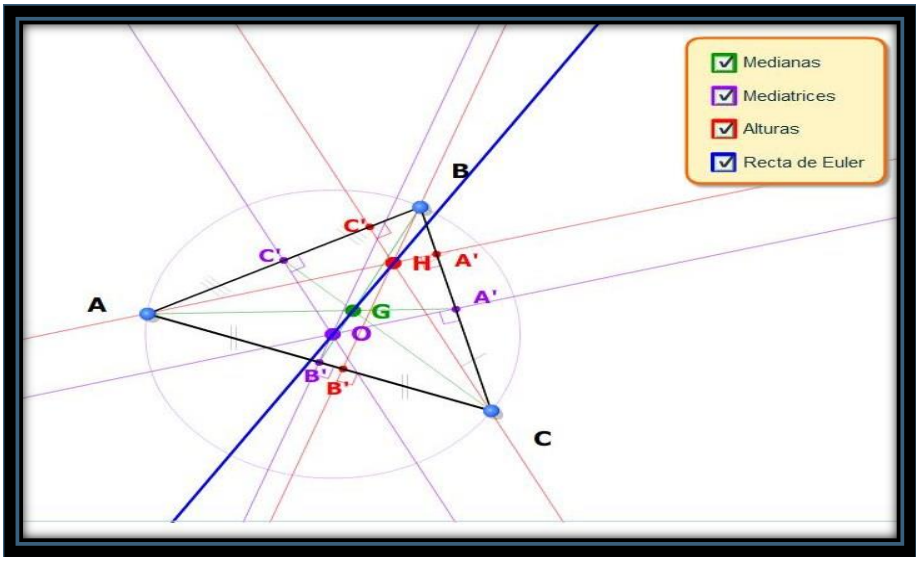


La recta de Euler.

El **ortocentro, baricentro y circuncentro** de un triángulo están alineados. El teorema establece que para cualquier triángulo existe una recta que contiene estos tres importantes puntos asociados al triangulo se le llama la *recta Euler*[3].

[3] Por ser este matemático quien descubrió su existencia y demostró la colinealidad de los puntos notables en el año de 1795. (Jiménez, 2005 pág. 108)

Figura 1-28. Recta de Euler



Fuente: Tomado de http://1.bp.blogspot.com/

Dentro de este marco teórico se desarrollará el diseño de la secuencia didáctica

1.3. Marco didáctico

Una secuencia didáctica se entiende como un sistema de reflexión y actuación del profesor, en donde se explicitan aquellos aspectos del quehacer didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje, donde participan estudiantes, docentes, saberes y su entorno.

A través de las situaciones didácticas es posible modelar y contrastar experimentalmente nuevas formas de enseñanza que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de una problematización y un cuestionamiento de un conocimiento matemático (Brosseau, 1986)

Con la secuencia didáctica se pretende que los alumnos del Nivel Medio no vean más como única manera de presentación de contenidos, un tablero, el libro de texto, o la clase magistral y como materiales de trabajo, el lápiz y el papel; que sea un medio por el cual, con diferentes instrumentos, y el acompañamiento del profesor, los estudiantes construyan el conocimiento matemático.

El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.

Según (Moreno Armella & Santos-Trigo, 2016) el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes y, como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

Por lo tanto, una estrategia didáctica que podría enriquecer el trabajo en geometría (reportada en investigaciones nacionales e internacionales) es la incorporación de herramientas computacionales para apoyar el trabajo en la clase de geometría. Herramientas que pueden ser usadas para lograr un entendimiento más profundo de las estructuras geométricas gracias al software específicamente diseñado para fines didácticos. En los reportes de investigación didáctica se menciona la posibilidad de simular las construcciones tradicionales con regla y compás, o la posibilidad de mover los elementos básicos de una configuración sobre la pantalla mientras se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes, lo cual puede conducir a una presentación dinámica de objetos geométricos y favorecer la identificación de sus invariantes. (PMME-UNISON, 2001).

A partir de la incorporación de las TIC se han ido modificando y redefiniendo las relaciones entre docente-alumno-saber. Convirtiéndose, para los educadores, en un nuevo desafío, ya que la incorporación de tecnología no solo nos brinda una nueva forma de presentación, sino que nos permite diseñar nuevas estrategias didácticas con diferente grado de dificultad, dándoles la posibilidad a nuestros alumnos de que “hagan matemática”, es decir exploren, jueguen, visualicen, elaboren conjeturas, analicen, verifiquen ideas, redescubran y construyan nuevos conocimientos.

El uso de programas educativos en las escuelas medias está creciendo. Su influencia mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las construcciones en geometría se vuelven precisas y móviles, brindando la posibilidad de explorarlas y de realizar formas

más complejas y modificaciones posteriores en forma simple y rápida. Por todas estas razones, el conocimiento matemático que surge a través de la exploración de los objetos que se estudian asume características no tradicionales. Los softwares de geometría dinámica permiten experimentar y superar dificultades de la geometría clásica, como: la falta de dinamismo, la dificultad en las construcciones, la falta de visión del problema en su conjunto, entre otros.

Los procesadores rápidos de la década del 90 y el desarrollo de las interfaces operativas gráficas permitieron el desarrollo de software para procesamiento simbólico como derive, mathematica, maple, mathlab, entre otros. Esta es una relación muy estrecha entre la matemática como disciplina y la tecnología informática. Se trata de programas que resuelven, calculan, simplifican, desarrollan en series y grafican expresiones del álgebra y del cálculo por medio de símbolos. Son utilizados por matemáticos profesionales y docentes de diferentes niveles de formación.

A la par con los procesadores simbólicos, surgieron los procesadores geométricos: cabrigeometre en Francia, geometricsupposer en Estados Unidos (Geómetra), entre los más conocidos. Se trata de poderosas herramientas para conjeturar relaciones geométricas y poner a prueba esas conjeturas, para explorar construcciones y poner a prueba ideas. El usuario puede construir figuras, circunscribirlas o inscribirlas, bisecar ángulos, determinar lugares geométricos, determinar posiciones en relación con sistemas de coordenadas, determinar longitudes y áreas, superponer figuras. Con una misma construcción se puede visualizar varias situaciones, como por ejemplo construir las alturas en un triángulo acutángulo y luego transformar el triángulo de modo que sea obtusángulo o rectángulo para ver qué ocurre con las alturas en éstos, determinar puntos de intersección, trazar paralelas, entre otras operaciones de la geometría.

> “Los programas de geometría dinámica permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana. Aportan elementos importantes para ligar el mundo empírico —que se vivencia con las acciones realizadas sobre y con los objetos geométricos que el software permite construir— con el mundo teórico de la geometría euclidiana —que surge cuando los hechos descubiertos de manera empírica se transforman en enunciados que hacen parte de un sistema axiomático.

> Esto ocurre porque la geometría dinámica provee un modelo de la geometría euclidiana —con algunas diferencias— en el que se mantienen las relaciones geométricas usadas para construir una figura; en consecuencia, la figura construida es realmente representante de una determinada clase y esto permite que las propiedades implicadas por las condiciones esenciales de la figura se evidencien y se favorezca entonces la formulación de conjeturas".
>
> Sin embargo, en algunos ámbitos matemáticos se comenta que la geometría dinámica trunca a los estudiantes en la necesidad de la demostración, pero esto depende del profesor si enfatiza en la necesidad de la validación o en la necesidad de la comprensión. Es por eso que los programas por si solos no constituyen la práctica de la justificación, es solo con situaciones de aprendizaje bien pensadas por el profesor que esta clase de didáctica puede contribuir a la construcción colectiva de un sistema teórico y a la constitución de la práctica de indagación. (Camargo, y otros, 2006).

Por lo anterior es que he escogido el programa CarMetal, considero que para este tema es pertinente, y una herramienta dinámica que va a ayudar a los estudiantes pues son jóvenes interesados en la tecnología, les llama la atención y se les facilita el manejo. Esto es una fortaleza que hay que aprovechar para para hacer este tipo de secuencias y la utilizo también porque tuve la oportunidad de aprender el manejo del programa y se puede aprovechar la tecnología y la conectividad que hay en la Institución.

2. Marco Metodológico

2.1. Metodología General

La investigación que se propone en este trabajo es de tipo experimental, pues se pretende implementar en un grupo una secuencia didáctica (variable independiente) para observar los cambios en los niveles de aprendizaje (variable dependiente) de los individuos del grupo.

La población que se trabajó para este proyecto son los estudiantes de octavo grado de la I.E CASD Simón Bolívar de la ciudad de Valledupar, la muestra fue uno de los grupos de grado octavo.

Las estrategias que se utilizaron para lograr los objetivos planteados se describen a continuación:

Tabla 2-1. Metodología Propuesta **Fuente:** (Lancheros, 2016)

Objetivos	Tareas desarrolladas
1. **Determinar conceptos previos de los estudiantes de octavo grado relativos al reconocimiento, descripción y clasificación de elementos y figuras geométricas.**	Se diseñó una Evaluación constituida por preguntas abiertas y de selección múltiple, para indagar sobre conceptos previos de los estudiantes en relación con elementos y propiedades de los triángulos. (Ver anexo A.). Esta Evaluación se aplicó al grupo control y al grupo experimental.Se seleccionó entre los dos grupos del grado octavo de las Institución Educativa CASD “Simón Bolívar” al grupo 803 como grupo de control y al grupo 802 como

	grupo experimental. En el grupo de control 803 se enseñaron elementos y propiedades de los triángulos de la manera tradicional, esta consiste en Exposición teórica del docente donde se construye sobre papel usando regla y compás, se resuelven inquietudes y se evalúa sin el uso de herramientas tecnológicas. En el grupo 802, definido como el Experimental, se aplicó la secuencia didáctica usando la herramienta CarMetal para enseñar elementos y propiedades de los triángulos.
2. Seleccionar aspectos disciplinares, curriculares y didácticos que fundamentan la secuencia didáctica.	El análisis de las respuestas y planteamientos que los estudiantes realizaron en la evaluación diagnóstica permitió identificar obstáculos y niveles de comprensión. Partiendo de este análisis se toma como aspectos disciplinares los elementos básicos del triángulo, las rectas y puntos notables de los triángulos y las propiedades.
3. Estructurar actividades de construcción, análisis y problemas que constituyen la secuencia didáctica.	Las actividades estuvieron orientadas a fortalecer la capacidad de: realizar construcciones geométricas, reconocer regularidades, formular conjeturas, generalizar, hacer preguntas, comprobar, validar. Se diseñaron cinco (5) talleres para trabajar el tema de elementos y propiedades del triángulo, con la construcción de elementos y figuras.
4. Implementar y valorar la secuencia didáctica con los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa CASD "Simón Bolívar".	Se diseñó una secuencia didáctica con la herramienta CarMetal para la enseñanza de los elementos y las propiedades del triángulo.

2.2. Estructura de la Secuencia Didáctica

Introducción:

La secuencia didáctica se fundamentó en una geometría basada en procesos de percepción, de representación de construcción y reproducción de los entes geométricos. En las actividades se usaron materiales manipulables y una geometría dinámica utilizando como herramienta el programa CarMetal que es una adaptación del programa de geometría dinámica CAR, cuya interfaz y características han sido modificadas para eliminar pasos intermedios y facilitar la elaboración de figuras.

Se incluyó además en estas actividades aplicaciones del programa CarMetal para trabajar los elementos de rectas y puntos notables del triángulo, dando una inducción a los estudiantes sobre el uso y manejo del programa.

Estructura de los talleres:

Las actividades se componen de una inducción sobre el uso del programa CarMetal que contiene generalidades y metodología y cinco talleres que contienen el tema, el objetivo, los conocimientos previos y las preguntas a desarrollar, los cuales fueron entregados a los estudiantes y se desarrollaron en clase con la guía del profesor. El objetivo propuesto fue que por medio de construcciones geométricas hechas con ayuda del programa CarMetal y movimiento de dichas figuras como lo permite el programa y por medio de preguntas, los estudiantes hicieran observaciones, inferencias, deducciones y comprobaciones por medio de la medición.

Los temas desarrollados en los talleres se relacionan en la Tabla 2-2

Tabla 2-2. Temas de los Talleres aplicados dentro de la secuencia didáctica.

Número del Taller	Temas Desarrollados
Inducción sobre el uso del programa CarMetal	Contiene las instrucciones para el uso y manejo del programa CarMetal.
Taller 1	Contiene las actividades referentes a los elementos primarios y propiedades del triángulo.
Taller 2	Contiene las actividades que corresponden a las alturas y el Ortocentro.
Taller 3	Contiene las actividades que corresponden a las medianas y el baricentro.
Taller 4	Contiene las actividades que corresponden a las mediatrices y el circuncentro.
Taller 5	Contiene las actividades que corresponden a las bisectrices y el incentro.

Fuente: (Lancheros, 2016)

3. Resultados. Aplicación de la Secuencia didáctica

Durante el desarrollo de este proyecto se ha logrado estructurar una propuesta didáctica basada en el uso de CarMetal para la enseñanza de los elementos y las propiedades del triángulo. Los resultados se presentan en tres secciones: resultado de la evaluación diagnóstica para los grupos control y experimental, desarrollo de las guías propuestas, y finalmente, resultado de la prueba final y su comparativo con el resultado de la evaluación diagnóstica.

Se utilizaron herramientas de estadística para hacer un análisis comparativo de los dos grupos, el experimental y el de control, para determinar si con la secuencia didáctica se logró el aprendizaje de los conceptos deseados.

3.1. Consideraciones sobre la Aplicación de la Secuencia Didáctica

Antes de comenzar la inducción se hizo una recordación de conocimientos previos, para que los niños se concentraran en la herramienta teniendo claros los conceptos iniciales.

Los estudiantes interactuaron con el programa, familiarizándose con la paleta de herramientas y luego haciendo la construcción de los elementos básicos, necesarios para abordar el tema de elementos y propiedades del triángulo.

El manejo del programa para algunos fue muy interesante y divertido, a otros les pareció algo complicado, pero en general la mayoría lo aprendieron a manejar, a pesar de que la inducción fue sobre herramientas básicas.

En la primera actividad se enseñaron los elementos básicos del triángulo y noté que algunos estudiantes se confunden al momento de dibujar el ángulo exterior del triángulo

ya que lo dibujan entre dos lados del triángulo por el exterior, siendo corregidos y reiterando que el ángulo exterior está comprendido entre la prolongación de un lado del triángulo y el lado adyacente.

El objetivo de las preguntas 7 y 12 en el taller 1 era mostrarles que no siempre es posible construir un triángulo conociendo los tres lados. (En esta oportunidad, no me detuve en ofrecer la explicación formal a través de la Desigualdad triangular, ya que el objetivo era específicamente geométrico, con comparación de segmentos).

En el taller número dos, al trazar las alturas de los triángulos, algunos estudiantes notaron que en algunos triángulos la altura no tocaba el lado del triángulo, se les preguntó ¿por qué?, algunos no supieron y otros contestaron que sí lo tocaba en la prolongación del lado.

Cuando trazaron todas las alturas de un triángulo y se hizo la pregunta ¿qué observan?, algunos niños contestaron que se cruzaban en un punto, entonces se les dijo que el punto de cruce se llamaba ortocentro.

Cuando se terminó de dibujar todos los triángulos y sus ortocentros sin necesidad de preguntar, unos pocos niños hicieron la inferencia de la posición del ortocentro, dependiendo del tipo de triángulo.

En las otras actividades propuestas, que eran muy similares a la realizada en la clase anterior de construcción y posición de las medianas, las bisectrices y las mediatrices, las reacciones fueron parecidas, pero mejorando cada vez más, ya que con la primera actividad ellos intuyeron cosas que luego aplicaron en las otras actividades. Unos estudiantes ya trabajaron solitos, pero algunos otros si requirieron de ayuda y soporte. Por lo tanto, el desarrollo fue un poco más rápido y con más disciplina. La participación de los estudiantes fue muy activa en cuanto al trabajo, como a las preguntas y aportes que ellos hicieron en cada una de las actividades.

3.2. Análisis de Resultados

3.2.1. Evaluación Diagnóstica

Se aplicó una evaluación diagnóstica a los dos grupos, control y experimental, que consta de 10 preguntas las cuales tienen un valor de 1,0 para una calificación final de 10,0.

La evaluación se aplicó el día 10 de marzo de 2016 para ambos grupos, la dinámica de aplicación fue la siguiente, los estudiantes se reunieron en su aula de clases, recibieron la evaluación por parte de la docente investigadora y la resolvieron, contando para ello con una hora de clases. La evaluación del grupo experimental fue de 6:30 a 7:30 a.m. y la del grupo de control fue de 9:30 a 10:30 a.m. Los estudiantes que iban finalizando fueron entregando su prueba e iban saliendo de la sala.

Antes de la secuencia didáctica los resultados de ambos grupos son similares con un promedio de calificación por preguntas para el grupo de control de 0,36; con una ponderación global de 3,63 y la del grupo experimental de 0,34; con una ponderación global de 3,43. Los resultados promedios de cada pregunta se presentan en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1. Promedio por Pregunta grupo Experimental y control

Promedio por pregunta		
N° Pregunta	**Experimental**	**Control**
1	0,25	0,29
2	0,27	0,31
3	0,57	0,7
4	0,4	0,28
5	0,35	0,47
6	0,25	0,32
7	0,24	0,16
8	0,47	0,49
9	0,21	0,12
10	0,43	0,49
Nota global examen Grupo Experimental	3,44	3,63
Promedio de Calificación por Pregunta	0,34	0,36

Por otro lado, en la gráfica 3-1, se comparan los resultados de la evaluación diagnóstica en los grupos control y experimental.

Grafica 3-1. Comparación de la evaluación de entrada en el grupo Experimental y Control.

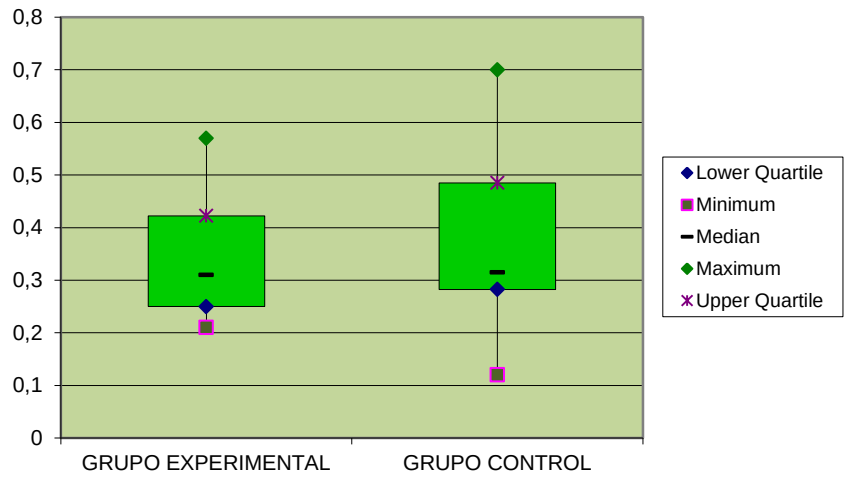


Tabla 3-2. Resultados grupo Experimental

GRUPO EXPERIMENTAL	
Lower Quartile	0,25
Minimum	0,21
Median	0,31
Maximum	0,57
Upper Quartile	0,4225

Tabla 3-3. Resultados grupo Control

GRUPO CONTROL	
Lower Quartile	0,2825
Minimum	0,12
Median	0,315
Maximum	0,7
Upper Quartile	0,485

La gráfica 3-1, y las tablas 3-2 y 3-3 permiten hacer un análisis acertado de la información; podemos observar que:

- La mínima calificación del grupo de experimental es de 0,21 para la pregunta número 9 y la máxima calificación es de 0,57 para la pregunta 3, siendo esta una pregunta de relación de conceptos de los diferentes tipos de triángulos y la número 9 la aplicabilidad del concepto de construir la altura de un triángulo; con respecto al grupo de control que su mínima calificación fue de 0,12 para la pregunta número 9 y la máxima calificación es de 0,70 para la pregunta 3,

siendo esta una pregunta de relación de conceptos de los diferentes tipos de triángulos y la número 9 la aplicabilidad del concepto de construir la altura de un triángulo.

- Se observa que la mediana en ambos grupos es de 0,31 mostrando que los dos grupos se encuentran más o menos al mismo nivel de conocimiento con respecto al tema.
- En el grupo de control hay una mayor dispersión de notas por encima de la mediana que es 0,31 hasta la nota más alta que es 0,7 y estos datos están entre el 50% y el 100% del total de notas.

Generalmente podemos concluir que ambos grupos (Control y Experimental) tienen unos mejores resultados en la definición de conceptos que en la aplicación de los mismos.

Con la secuencia didáctica se reforzó tanto en la definición y elaboración de conceptos, como también en la aplicabilidad de los mismos, por ello se hizo énfasis en:

- Identificación de los diferentes tipos de rectas.
- Relación entre conceptos y tipos de triángulos.
- Construcción de triángulos a partir de los diferentes conceptos que se tienen.

3.2.2. Evaluación Final

La evaluación final se aplicó el día 22 de abril de 2016, en cada aula de clases, la dinámica de aplicación fue igual a la evaluación diagnóstica, se le entrega la evaluación y se les da una hora para resolverla.

En la Tabla 3-4, se muestran los resultados de la evaluación final.

Tabla 3-4. Promedio por Pregunta grupo Experimental y Control

Promedio por pregunta		
N° Pregunta	**Experimental**	**Control**
1	0,79	0,68
2	0,82	0,71
3	0,81	0,69
4	0,77	0,58
5	0,73	0,62
6	0,29	0,34
7	0,4	0,31
8	0,82	0,65
9	0,55	0,43
10	0,77	0,56
Nota global examen Grupo Experimental	6,75	5,57
Promedio de Calificación por Pregunta	O,67	0,55

Grafica 3-2. Comparación de la evaluación final en el grupo Experimental y Control.

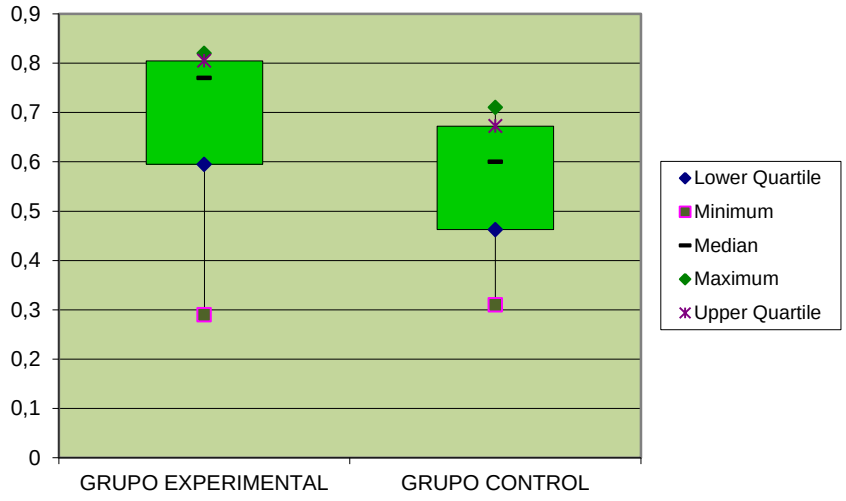


Tabla 3-5. Resultados grupo Experimental

GRUPO EXPERIMENTAL	
Lower Quartile	0,595
Minimum	0,29
Median	0,77
Maximum	0,82
Upper Quartile	0,805

Tabla 3-6. Resultados grupo Control

GRUPO CONTROL	
Lower Quartile	0,4625
Minimum	0,31
Median	0,6
Maximum	0,71
Upper Quartile	0,6725

Como se puede observar en las gráficas después del curso aplicado a los grupos (Control y experimental) estos obtuvieron una mayor calificación que la anteriormente obtenida. Cabe mencionar que ambos grupos recibieron las mismas clases; pero al experimental se le aplicó la secuencia didáctica con la ayuda del programa CarMetal.

Después de las clases dadas a los grupos y de la secuencia didáctica los resultados de ambos grupos variaron ya que el grupo de control tuvo una calificación por debajo del grupo experimental; este tuvo un promedio de calificación por pregunta 0,55; con una ponderación global de 5,57. Con respecto al grupo experimental que obtuvo una calificación promedio por pregunta de 0,67; con una ponderación global de 6,75. Entre los grupos hubo una diferencia en la calificación de 1,18.

Analizando la gráfica 3-2, se puede establecer las siguientes conclusiones:

- La mínima calificación del grupo experimental es de 0,29 para la pregunta número 6 y la máxima calificación es de 0,82 para la pregunta 2, siendo esta una pregunta de definición del concepto de bisectriz y la número 6 la construcción de un triángulo a partir de unas medidas dadas por el docente; con respecto al grupo de control que su mínima calificación fue de 0,31 para la pregunta número 7 y la máxima calificación es de 0,71 para la pregunta 2, siendo esta una pregunta de definición del concepto de bisectriz y la número 7 la aplicación de una de las propiedades del triángulo.
- Según la gráfica se observa que en el grupo de control el 50% de las notas por preguntas estaban por debajo de 0,6 diferencia del grupo experimental que solo el 25% está por debajo de 0,6.

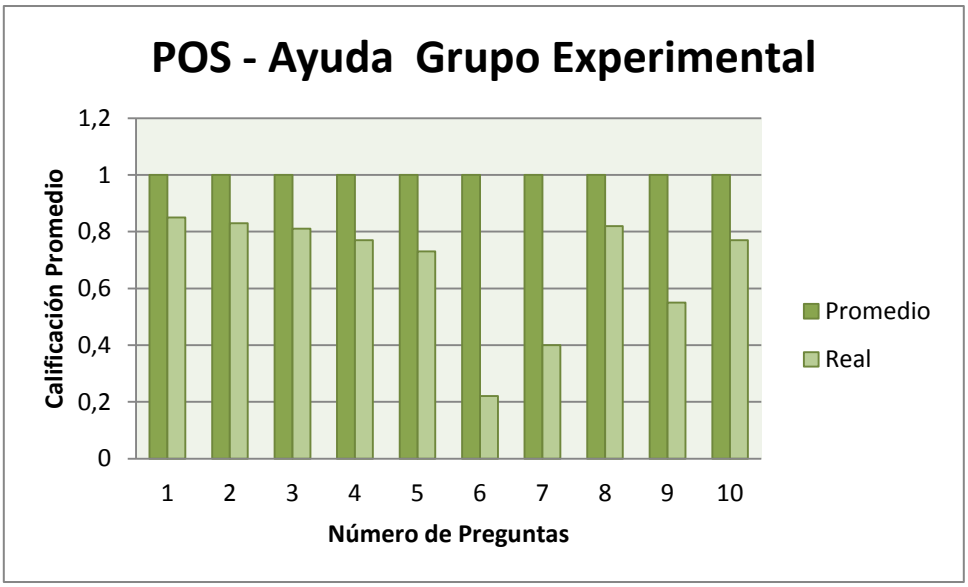
En términos generales, el grupo experimental obtuvo una mejora con la secuencia didáctica, su calificación mejoró con respecto al grupo de control que solo recibió las clases tradicionales.

De acuerdo con las calificaciones por preguntas podemos observar que a ambos grupos aún les fue mejor en la construcción y definición de conceptos que en la aplicación de ellos; ya que en las preguntas 1, 2, 3 y 8 (ver tabla 3-4) obtuvieron las mayores calificaciones con respecto a las otras que son la aplicación de los conceptos.

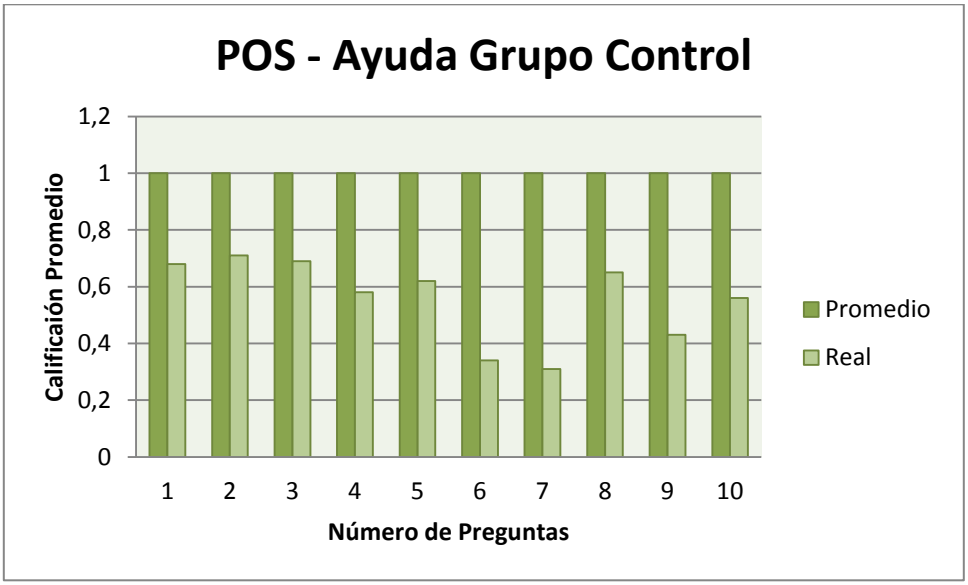
Para ambos grupos las menores calificaciones fueron para las preguntas 6 y 7, que son la construcción de un triángulo a partir de unas medidas dadas y la aplicación de unas de las propiedades del triángulo.

Por otro lado, las mayores calificaciones fueron para las preguntas 2 y 3, que es la definición de la bisectriz y la relación de conceptos de los tipos de triángulos.

Grafica 3-3. Comparativo entre promedio de calificación obtenida en cada pregunta con respecto a los puntos posibles. Grupo Experimental



Grafica 3-4. Comparativo entre promedio de calificación obtenida en cada pregunta con respecto a los puntos posibles. Grupo Control.



En las gráficas 3-3 y 3-4 se puede observar los resultados obtenidos versus los resultados esperados. Viéndose una mejoría en el grupo experimental.

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

- Con el uso de la herramienta CarMetal y de la planeación de la secuencia didáctica se favoreció la enseñanza y comprensión de elementos y propiedades del triángulo, a través de la construcción, explicación y formalización de los aspectos gráficos de líneas geométricas, contribuyendo al alcance de los objetivos propuestos. Por todo lo anterior se concluye que la aplicación de la secuencia didáctica por medio de la herramienta CarMetal ayudó en los aprendizajes obtenidos de las clases no en la medida que se esperaba, pues el promedio realmente no superó el básico, pero se notó una mejoría.

- Se empleó una metodología acorde con la capacidad de los niños con sus preferencias, gustos, necesidades y ritmo de aprendizaje. Considero que es una actividad innovadora en este grupo, en la enseñanza de la geometría y que fue una experiencia gratificante, aunque los resultados no fueron lo suficientemente altos, si se notó una mejoría en los resultados del grupo experimental, frente a los resultados del grupo de control.

- El poco conocimiento de los docentes sobre los programas en este caso de geometría unido a la práctica rutinaria de las clases dificulta poner en práctica clases innovadoras que permitan hacer diseños de secuencias o estrategias didácticas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

- La experiencia fue muy interesante considerando que el rol del docente es de guía para los estudiantes teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje de cada uno de ellos, la propia actividad creadora y sus propios descubrimientos.

4.2. Recomendaciones

- Es importante incluir la geometría desde los primeros años de primaria ya que es primordial en el papel que juega en la vida cotidiana. El conocimiento básico de geometría es indispensable para desenvolverse en la vida, para orientarse en el espacio para hacer estimaciones de formas y distancias. Está presente inclusive en los ámbitos productivos de la sociedad actual (arquitectura, topografía, pintura, etc.)

- En la enseñanza de la geometría y en este caso, donde se usan las transformaciones geométricas, es recomendable el uso de recursos tecnológicos como software de geometría dinámica, pues estos ayudan a visualizar, verificar y finalmente desarrollar la comprensión de los conceptos. Como se ha visto en esta secuencia didáctica.

- Este tipo de secuencia didáctica puede repetirse con los demás temas de la geometría del grado octavo que tienen que ver con cuadriláteros, polígonos etc.

A. Anexo A: Evaluación Diagnóstica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CASD "SIMÓN BOLÍVAR"

PRUEBA DIAGNÓSTICA

TRIÁNGULOS – ÁNGULOS – PERPENDICULARES

GRADO OCTAVO

Nombre_____ Fecha_____

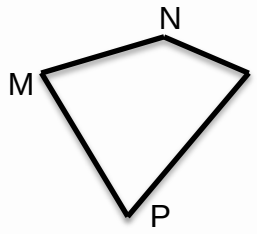
Lea cuidadosamente las siguientes preguntas y responda:

1. Dibuje dos rectas perpendiculares y escriba una definición de rectas perpendiculares.
2. Dibuje la bisectriz de un ángulo y exprese un concepto de bisectriz.

3. Dibuje cada uno de los triángulos que se nombran a continuación y luego relacione con una línea la definición que corresponde a cada concepto.

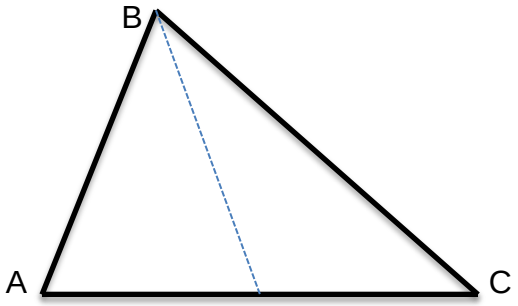
Triángulo rectángulo	Es el que tiene un ángulo obtuso.
Triángulo isósceles	Es el que tiene todos sus lados iguales.
Triángulo acutángulo	Es aquel que tiene dos lados iguales y uno desigual.
Triángulo equilátero	Es aquel que tiene un ángulo recto.
Triángulo obtusángulo	Es el que tiene todos sus lados desiguales.
Triángulo escaleno	Es el que tiene todos sus ángulos agudos.

4. ¿Cuáles de los siguientes pares de lados en el cuadrilátero M, N, O, P son paralelos? Explique su respuesta.



a) Los lados NM y OP
b) Los lados MP y NO
c) Los lados MP y PO
d) No hay paralelas

5. ¿En el siguiente triángulo ABC se muestra una de sus medianas, dibuje las otras dos y dé una definición de las medianas de un triángulo?

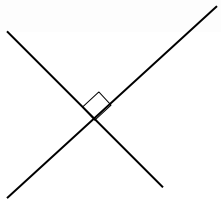


6. Construya si es posible el triángulo cuyos lados tienen las siguientes medidas:
   a = 4cm, b = 3cm, y c = 7cm. Justifique su respuesta.

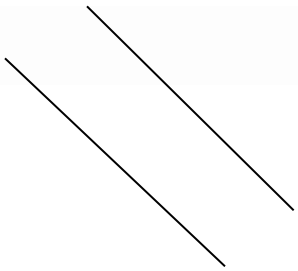
7. Una de las propiedades del triángulo dice: Cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él. Explique con un dibujo esta propiedad.

8. ¿Qué puede decir de los siguientes pares de líneas? Explique.

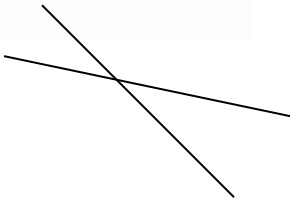
a)



b)

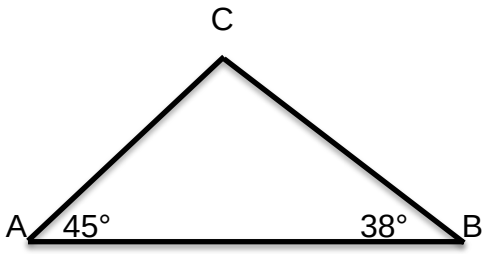


c)



9. Dibuje un triángulo y construya la altura. ¿Existen más alturas en el mismo triángulo? Explique.

10. En la figura se observa que el ángulo A mide 45° y el ángulo B mide 38°. ¿Se puede saber la medida del ángulo C? Explique.



B. Anexo B: Guía de Inducción

Inducción sobre el uso del programa CarMetal:

Dirigida a los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa CASD “Simón Bolívar”. Uso y manejo del programa Car Metal

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CASD “SIMÓN BOLÍVAR”

INDUCCIÓN PARA UTILIZAR LA HERRAMIENTA CARMETAL.

Construcción de elementos geométricos básicos con el programa CarMetal.

Generalidades:

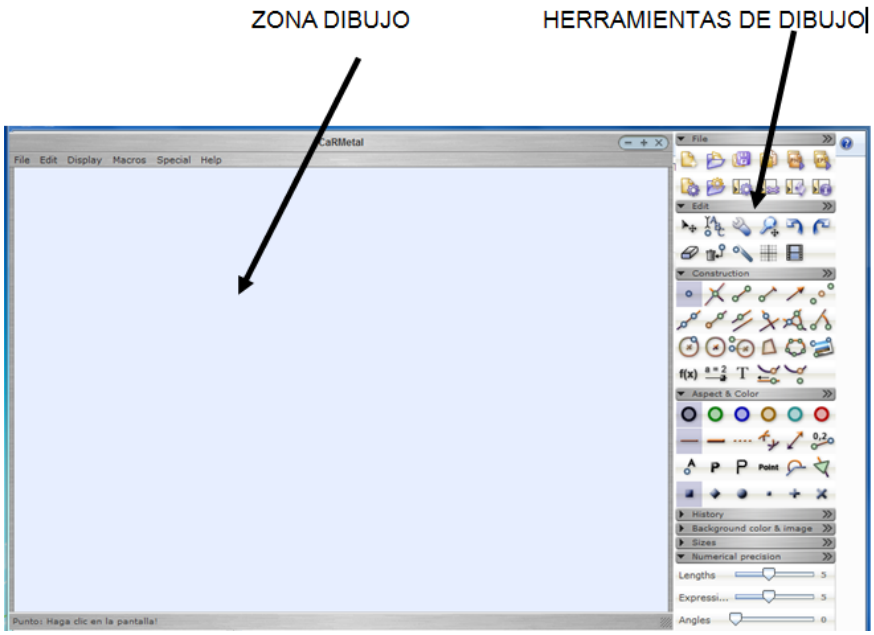
El programa CarMetal es un software libre de geometría dinámica que permite realizar construcciones geométricas a partir de las propiedades de las figuras, dotando de movimiento a los elementos que las componen, esto permite desplazarlos libremente. Se trabaja sobre un tapiz, con una regla y un compás virtual, se pueden dibujar elementos como puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.…

Metodología:

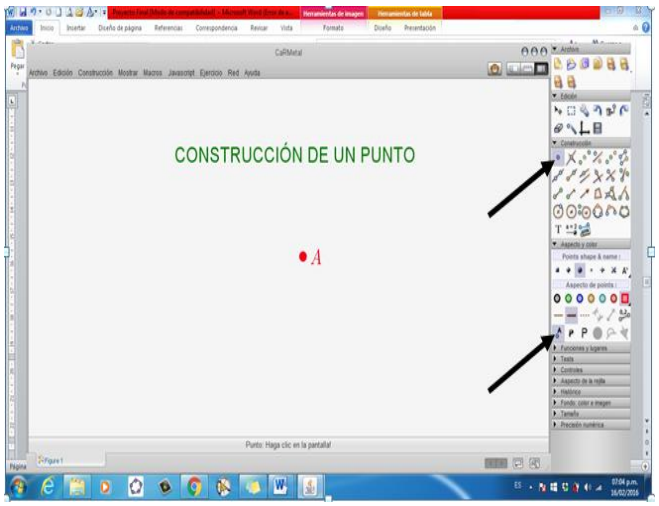
Esta actividad se realizará en el salón de informática donde se dispondrá de un computador por cada 2 estudiantes.

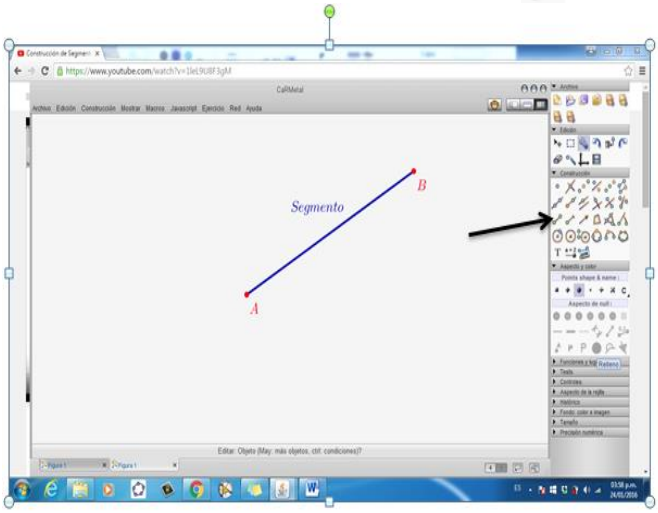
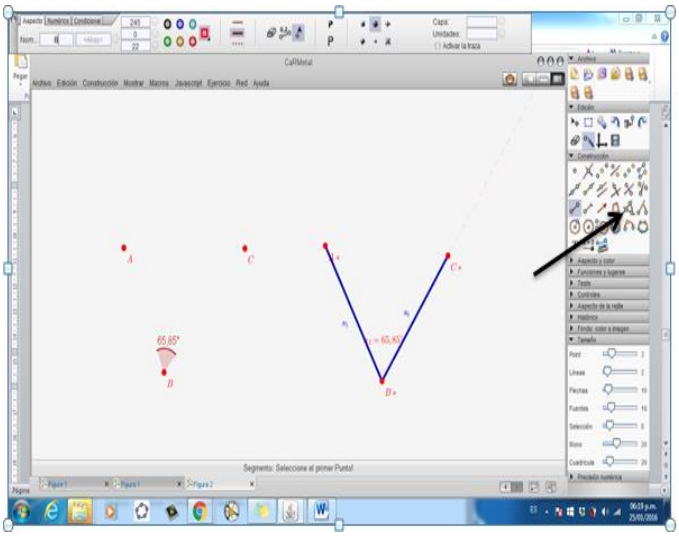
Luego que se ha descargado el programa en los computadores, se da inicio a la inducción sobre el manejo y uso de herramientas básicas del programa.

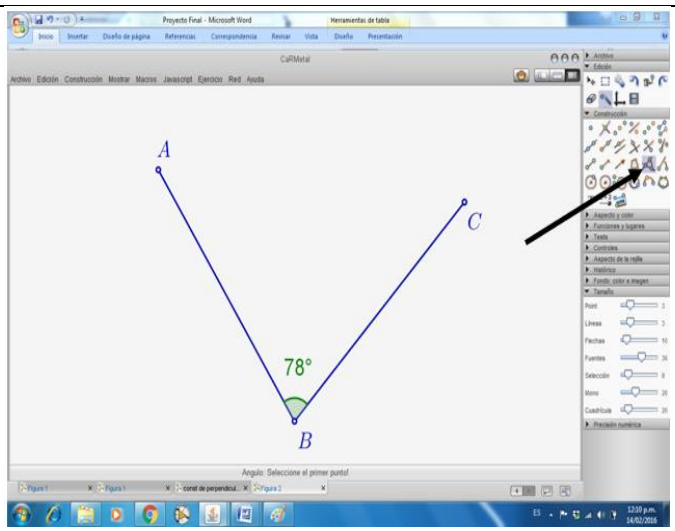
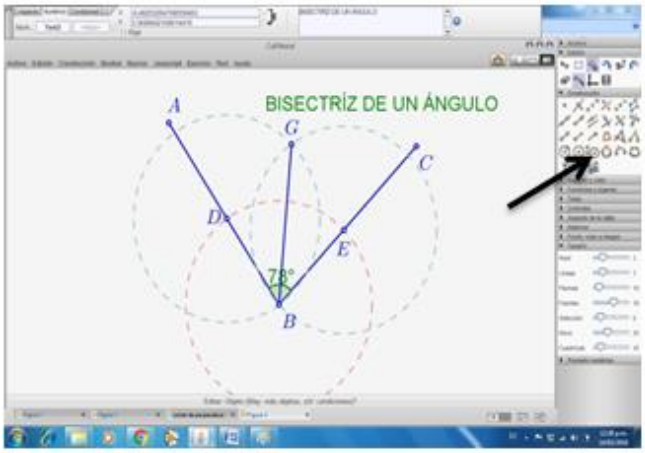
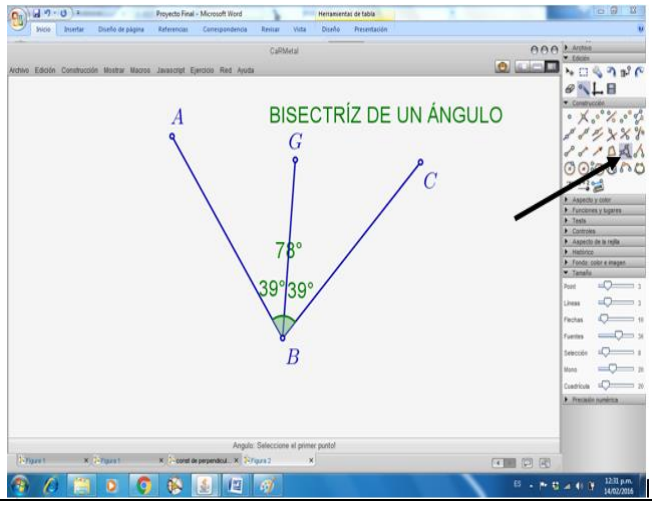
Se muestra la primera pantalla que da el programa, donde despliega la paleta de herramientas de edición, construcción, aspecto, color y otras.



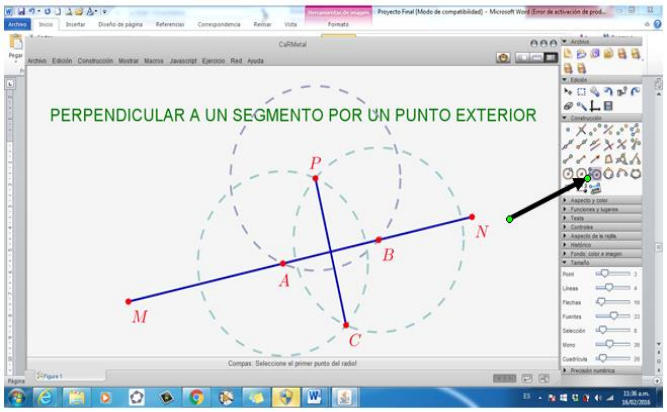
Se empieza conociendo la paleta de herramientas y haciendo construcciones de los siguientes elementos básicos necesarios para abordar el tema de elementos y propiedades del triángulo.

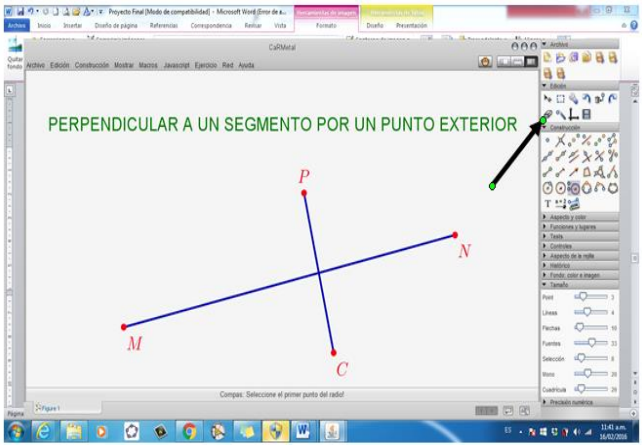
Pasos	**Construcción de un punto.**
Dé clic a la herramienta punto, señalada con la flecha y luego la pasa sobre el tapiz, nuevamente dé clic sobre el tapiz y queda plasmado el punto, si es un punto con nombre, antes de dibujarlo dé clic a la herramienta punto con letra, que señala la segunda flecha.	

Pasos Se construyen dos puntos que van a ser los extremos del segmento y luego con la herramienta segmento que señala la flecha, se hace clic y se unen los dos puntos. Al hacer clic sobre la línea con clic derecho se puede editar o sea poner nombre, o cambiar de color, o colocarle una medida específica. En este caso coloque el nombre de segmento.	**Construcción de un segmento** 
Pasos Para construir un ángulo se hace clic sobre la herramienta ángulo que señala la flecha, luego sobre el tapiz se coloca un punto, luego el vértice del ángulo y luego otro punto que determina el ángulo y enseguida muestra La medida. Paso seguido con la herramienta segmento una los puntos y queda construido el ángulo. Ver figura	**Construcción de un ángulo** 
Pasos Si se quiere construir un ángulo con medida determinada, haga clic sobre la herramienta ángulo de amplitud fija, que señala La flecha, luego coloque un primer punto, seguido de otro punto que determina el vértice y luego el	**Construcción de un ángulo dando la medida de un ángulo**

programa determina un lado del ángulo que da la posibilidad de dar la amplitud que se requiera. Nuevamente con la herramienta segmento una el primer punto con el vértice.	
Pasos Se construye el ángulo ABC, haciendo centro en B con el compás virtual que se muestra con la flecha; se hace un arco que corte los lados del ángulo en los puntos D y E como muestra la figura. Luego con el compás se toma la distancia del punto B al punto D y con esa distancia y haciendo centro en D se traza un arco, con esa misma abertura y haciendo centro en E se traza otro arco de tal manera que corte al anterior en el punto G como muestra la figura. Luego con la herramienta segmento se unen los puntos B y G y esta es la bisectriz buscada. Paso seguido se ocultan las construcciones auxiliares para visualizar bien la figura Luego con la herramienta ángulo se comprueba la medida de los dos ángulos resultantes.	**Construcción de una bisectriz**  
Pasos: Se tiene la recta MN y el punto P por donde se quiere que pase la	**Construcción de una recta perpendicular a un segmento MN que pase por el punto P**

perpendicular, haga centro en P y utilizando la herramienta compas, que señala la flecha se traza un arco que corte la recta MN en los puntos A y B, y se toma la distancia de P a A, con esta distancia y haciendo centro en A se traza un arco, y luego haciendo centro en B se traza otro arco que corte al anterior en el punto C, Luego se une este punto con el punto P y se obtiene la perpendicular pedida.
Finalmente se ocultan las líneas y puntos auxiliares con la herramienta que muestra la flecha para visualizar mejor la construcción. Como se muestra en la figura.

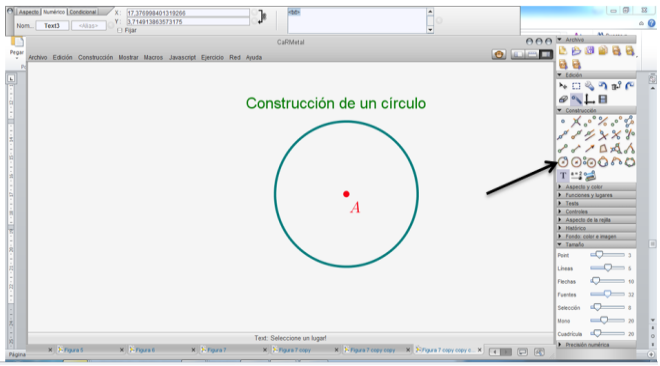


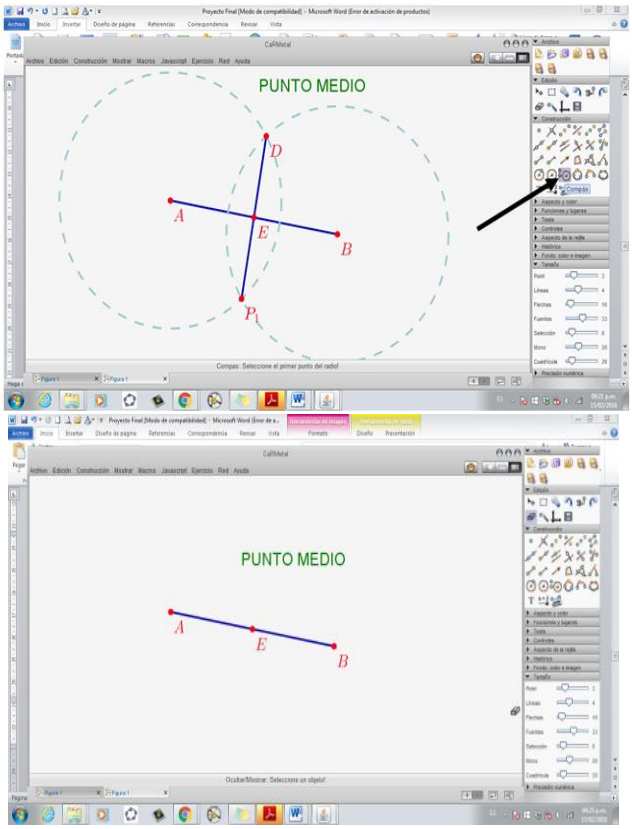
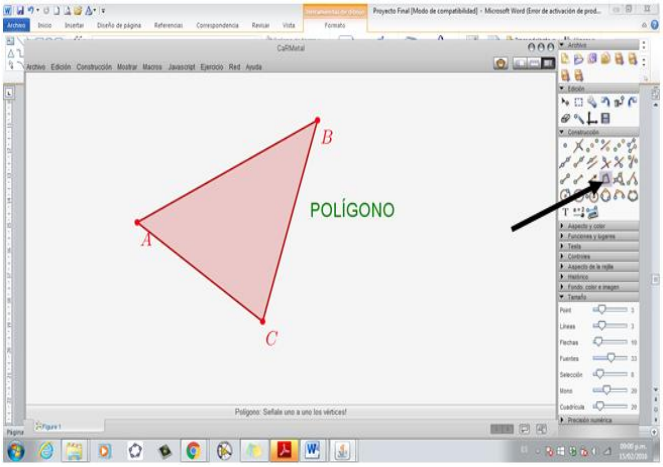


Pasos

Dé clic sobre el ícono círculo, luego sobre el tapiz se localiza un punto que es el centro de la circunferencia y se dibuja del tamaño requerido.

Construcción de un círculo



Pasos Se traza un segmento AB, con la herramienta compas se toma una medida cualquiera desde A, que sea mayor que la mitad entre A y B, y haciendo centro en A se traza una circunferencia, luego con la misma abertura y haciendo centro en B, se traza otra circunferencia, estas circunferencias se cortan en dos puntos, los cuales se unen con un segmento el cual se va a llamar la mediatriz y el punto donde este segmento corta el segmento AB es el punto medio.	**Punto medio** 
Pasos Recordemos la definición de polígono: como la figura geométrica plana que está limitada por tres o más rectas y tiene tres o más ángulos y vértices. "el pentágono, el octágono, el decágono y el dodecágono son polígonos" Para dibujar un polígono se hace clic en la herramienta polígono y luego sobre el tapiz se hace clic dibujando un punto por cada vértice del polígono, cerrando en el primero que se dibujó y automáticamente queda dibujado el polígono. Como se muestra en la figura.	**Construcción de un polígono** 

C. Anexo C: Taller 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA “CASD” SIMÓN BOLÍVAR

LADOS, VÉRTICES, ÁNGULOS Y PROPIEDADES DE UN TRIÁNGULO

TALLER N° 1

GRADO OCTAVO

Objetivo:

Aprender a construir e identificar los elementos y propiedades del triángulo, descubrir las relaciones entre los ángulos del triángulo, y las relaciones entre los lados del triángulo en el marco de la resolución de problemas, enunciando las propiedades, con apoyo del programa CarMetal.

Clasificar los triángulos según sus lados y según sus ángulos y construir triángulos dados distintos elementos.

Conocimientos previos:

Concepto de segmento

Concepto de punto.

Concepto de ángulo

Desarrollo de la actividad:

Recursos:

17 computadores con el programa instalado CarMetal.

Para realizar esta actividad se trabajará con un computador por cada dos estudiantes. Un videobeam, y será guiada por el profesor.

Comenzamos con algunas definiciones:

El triángulo es una figura formada por tres segmentos que se unen en sus extremos de dos en dos El triángulo tiene tres bases, pues cualquiera de sus lados puede ser la base.

Todo triángulo consta de tres vértices, tres lados y tres ángulos.

Vértices: los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan vértices del triángulo, se designan con letras mayúsculas.

Lados: son los segmentos que unen dos vértices del triángulo. Se denotan por letras, usualmente las letras minúsculas de las letras usadas en el vértice opuesto.

Ángulo interior: Es la figura formada por dos lados contiguos del triángulo. Se denota por letras griegas (α, β, γ. Etc…), o por números (1, 2, 3, etc.). Lo más común es usar las letras de los vértices en cierto orden ABC, ACB, BAC.

Ángulo exterior: ángulo exterior de un triángulo es el que está formado por un lado y la prolongación del lado adyacente.

Ángulo Recto: este ángulo está formado por dos semirrectas que son perpendiculares entre sí y que se originan en el vértice que comparten. Un ángulo recto es un ángulo que mide noventa grados sexagesimales (90º)**.**

Podemos encontrar ángulos rectos en diversas figuras planas de la geometría. Si centramos nuestra atención en un cuadrado (que tiene cuatro lados iguales y paralelos), notaremos que sus cuatro ángulos interiores son ángulos rectos.

Actividad 1

Objetivo:

Con esta construcción se quiere que los estudiantes determinen e identifiquen directamente sobre el triángulo cada uno de los elementos que lo conforman**.**

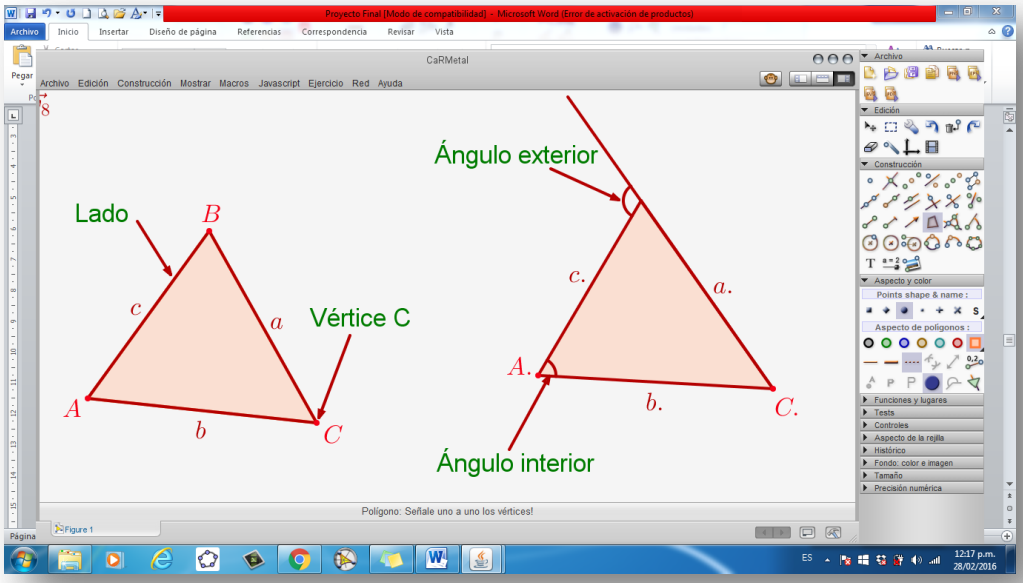
1) Con el programa CarMetal dibuje un triángulo y coloque nombre a sus vértices con las letras A,B,C.

Los lados denomínelos con letras minúsculas y señale los ángulos exteriores y los ángulos interiores.

Pasos de construcción

Haga clic en la herramienta polígono (concepto visto en la inducción al uso del programa CarMetal) y en la herramienta que tiene el punto y la letra, que se despliega en aspecto de polígonos, para que directamente coloque las letras a los vértices. Luego pase al tapiz y haga clic para determinar un punto A, nuevamente haga clic para determinar el punto B del triángulo, luego otro clic para determinar el punto C y por último se cierra con un clic en el primer punto y de esta manera queda dibujado el triángulo. Con la herramienta ángulo señale el ángulo interior y el ángulo exterior del triángulo.

.



Conceptos previos:

Con relación a sus lados los triángulos se clasifican en:

Triángulo equilátero: es aquel que tiene sus tres lados congruentes entre sí.

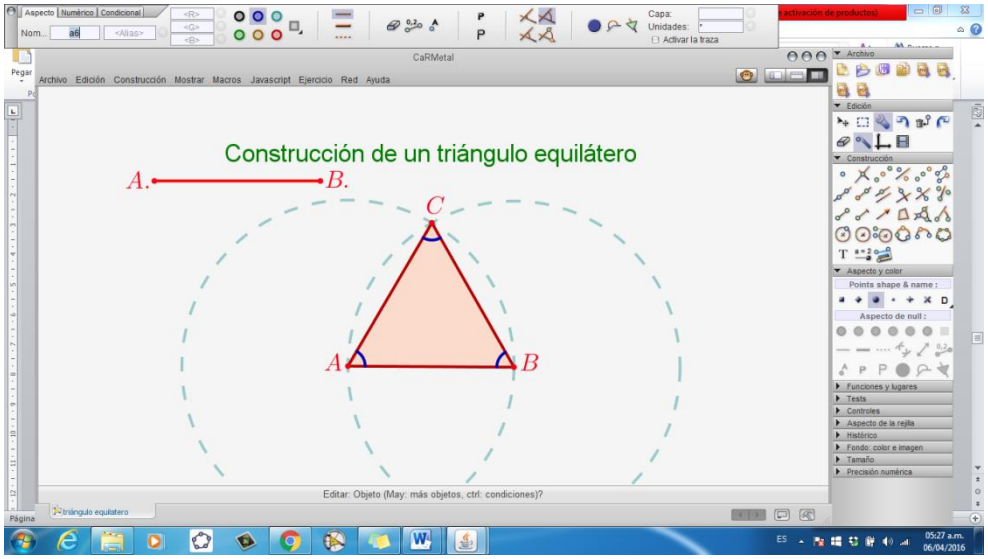
Triángulo isósceles: este triángulo tiene dos lados congruentes entre sí.

Triángulo escaleno: es aquel que tiene sus tres lados desiguales entre sí.

2) Con base en los conceptos anteriores dibuje un triángulo equilátero usando la herramienta CarMetal.

Pasos de construcción

Para dibujar el triángulo equilátero, se parte de un segmento cualquiera como lo muestra la figura, y a partir de él se toma la medida del segmento con el compás virtual; haciendo centro en A se dibuja un círculo, con la misma medida y haciendo centro en B, se hace otro círculo, estos dos círculos se cortan en un punto C, luego se une el punto C con el punto A y B obteniendo el triángulo pedido.



3. Que observa en el triángulo? Cómo son sus ángulos?

Se espera que los niños construyan el triángulo con la herramienta CarMetal y comprueben en el triángulo el concepto dado de triángulo equilátero que hagan mediciones y clasifiquen el triángulo según sus ángulos.

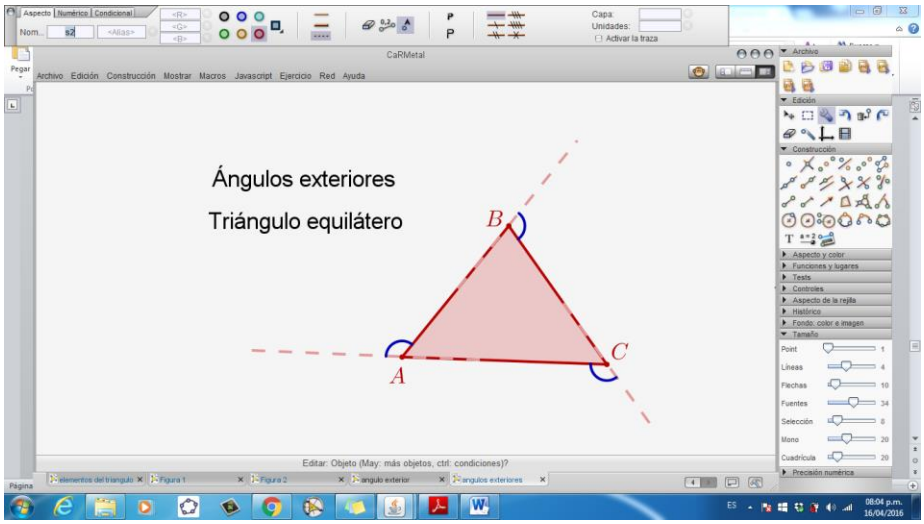
4. Realice el mismo procedimiento para un triángulo isósceles y un escaleno. ¿cómo son sus ángulos?

Se espera que los niños construyan los triángulos con la herramienta CarMetal y comprueben en el triángulo el concepto dado de triángulo isósceles y triángulo escaleno, que hagan mediciones y clasifiquen los triángulos según sus ángulos..

5. Sume los ángulos interiores de cada uno de los triángulos. ¿Qué observa?. Escriba una fórmula que generalice este resultado.

   Con esta pregunta se quiere que los estudiantes por medio de la medición y la comparación comiencen a inferir sobre las propiedades del triángulo.

6. Sobre el triángulo equilátero trace los ángulos exteriores, y luego mídalos Que observa?



7. Realice la misma actividad sobre los triángulos escaleno e isósceles. Sume los ángulos exteriores de cada uno de los triángulos. Que observa?. Escriba una fórmula que generalice este resultado.

   Con esta pregunta se quiere que los estudiantes por medio de la medición y la comparación comiencen a inferir sobre otra de las propiedades del triángulo.

8. Sobre los triángulos, anteriormente construidos haga las siguientes comparaciones y haga una generalización de lo que observa.

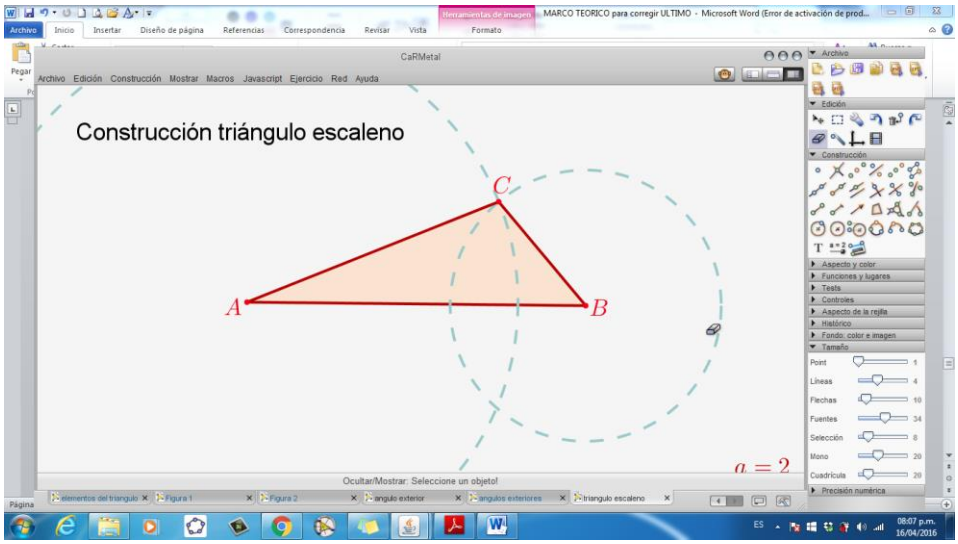
   Una el segmento $\overline{BC}$ con el segmento $\overline{AC}$ y compárelo con el segmento $\overline{AB}$.

   Luego una el segmento $\overline{AC}$ con el segmento $\overline{AB}$ y compárelo con el segmento $\overline{BC}$

   Ahora una el segmento $\overline{BC}$ con el segmento $\overline{AB}$ y compárelo con el segmento $\overline{AC}$

Con estas preguntas se espera que los estudiantes lleguen a inferir que la longitud de cualquiera de los lados del triángulo es menor que la suma de los otros dos.

9. En uno de los triángulos dibujados anteriormente, coloque con la herramienta ángulo su valor y observe la relación que hay entre los valores de medida de los lados y los ángulos.



10. ¿Qué puede decir de la relación que hay entre los lados y los ángulos de este triángulo?

Haga el mismo ejercicio con el triángulo isósceles y el triángulo equilátero

11. ¿Qué puede decir de la relación que hay entre cada uno de los lados y sus ángulos opuestos?

Compare y generalice lo que observó.

Se espera que los estudiantes después de la observación concluyan, generalicen y corroboren la propiedad que dice que en un triángulo el ángulo mayor se opone al lado más largo.

12. Con respecto a la anterior propiedad, ¿qué sucede con el triángulo isósceles y con el triángulo equilátero?

Los estudiantes deben llegar a inferir que: en el caso del triángulo equilátero como todos los lados son iguales entonces los ángulos que se oponen a los lados también son iguales, y en el caso del triángulo isósceles como tiene dos lados iguales, entonces sus dos ángulos opuestos también son iguales.

13. Aplicando la propiedad que se dedujo en el punto siete; un lado de un triángulo es mayor que los otros dos y menor que su diferencia, dados los siguientes segmentos, diga si es posible construir los triángulos. Justifique su respuesta.

    a) 10 cm; 7 cm; 5 cm

    b) 14 cm; 7 cm; 5 cm

    Haga la construcción de los triángulos y corrobore su respuesta.

D. Anexo D: Taller 2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "CASD" SIMÓN BOLÍVAR

ALTURAS Y ORTOCENTRO DE UN TRIÁNGULO

TALLER N° 2

GRADO OCTAVO

Objetivo: Aprender a trazar las alturas de un triángulo y su punto de intersección utilizando el programa CarMetal.

Conocimientos previos:

Conocer el concepto de altura de un triángulo.

Conocer cómo se construyen perpendiculares

Recursos:

17 computadores con el programa instalado CarMetal

1 videobeam.

Para realizar esta actividad se trabajará con un computador por cada dos estudiantes. Un videobeam, y será guiada por el profesor.

Inicialmente se explicará el concepto de altura de un triángulo y a medida que se va desarrollando el taller y con las preguntas que se formulan se quiere llegar a que los estudiantes encuentren el punto de corte de las alturas del triángulo y en ese momento se define ese punto como el Ortocentro de un triángulo.

Un concepto que se va a explicar es la clasificación de triángulos según sus ángulos ya que se requiere en este y en los siguientes talleres.

Conceptos previos:

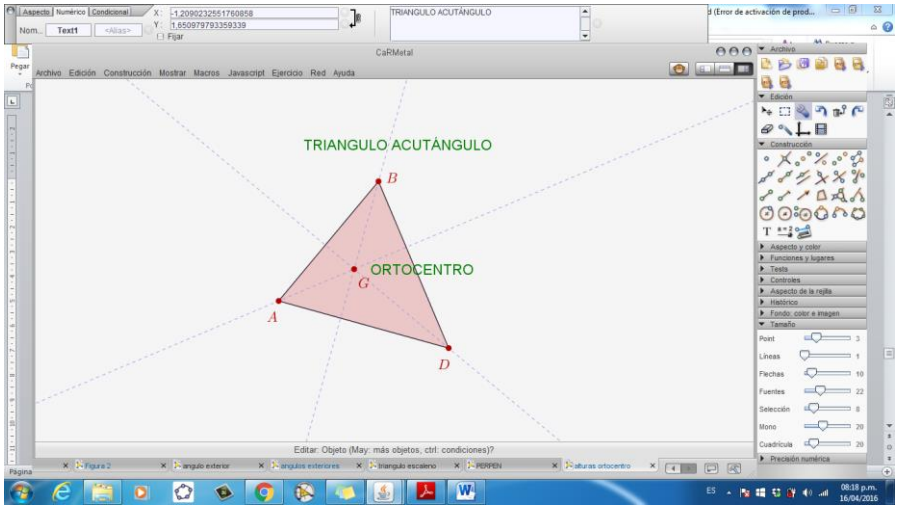
Triángulo acutángulo: cuando los tres ángulos del triángulo son agudos; es decir, ángulos menores que 90°.

Triángulo rectángulo: Si un triángulo presenta un ángulo recto o ángulo de 90° se llama triángulo rectángulo.

Triángulo Obtusángulo: Si el triángulo presenta un ángulo mayor que 90° se considera como obtusángulo.

Actividad

Construya un triángulo cualquiera utilizando la herramienta polígono y notelo como ABC. Paso seguido trace sus alturas haciendo la construcción de acuerdo a los pasos realizados en el taller de inducción en el aparte: trazar una perpendicular a un segmento por un punto determinado o siguiendo las instrucciones del profesor. Para cada pregunta consigne sus observaciones.



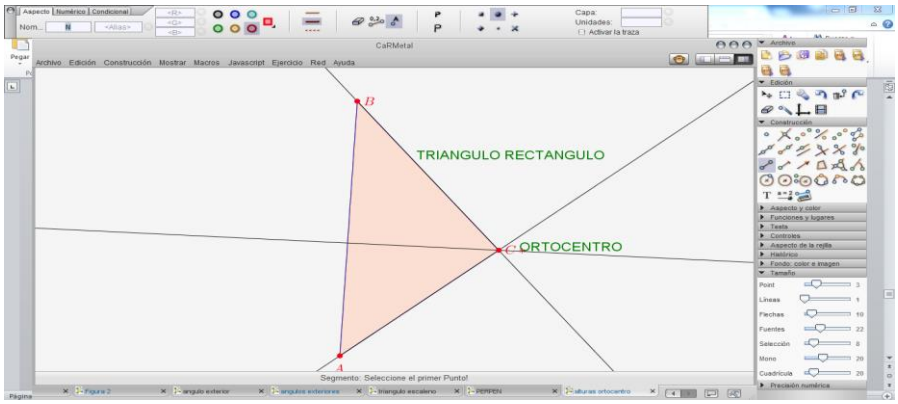
1. ¿Que observa al trazar las alturas del triángulo?

Se busca que con las respuestas obtenidas se llegue a observar el punto de corte de las alturas para explicar o dar la definición de ***Ortocentro****.*

2. ¿Qué sucede con el Ortocentro en este triángulo?

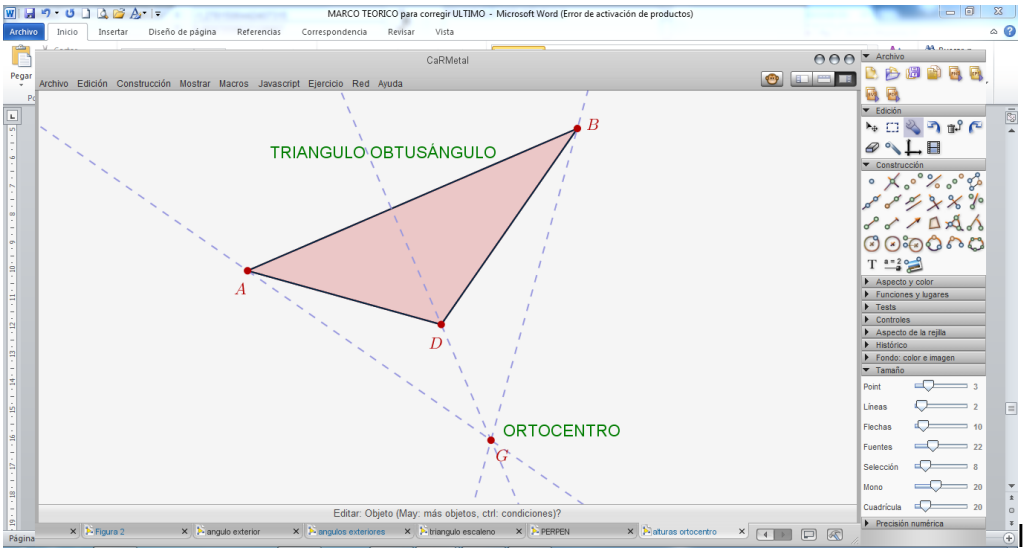
El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes observen y describan la posición del Ortocentro con respecto al triángulo dibujado, teniendo en cuenta la clasificación de los triángulos según sus ángulos.

3. Con la herramienta mover, y desde cualquier vértice del triángulo, varíe el triángulo, con respecto a sus ángulos. ¿qué observa?



Se espera que los estudiantes al transformar el triángulo observen la nueva posición del Ortocentro y consignen sus apreciaciones, pues la posibilidad de mover los elementos básicos de una configuración sobre la pantalla mientras se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes, puede conducir a una presentación dinámica de objetos geométricos y favorecer la identificación de sus invariantes

4. Mueva nuevamente el triángulo hasta obtener uno diferente a los dos anteriores, ¿qué ocurre con el Ortocentro? Escriba sus observaciones.



Se espera que los estudiantes con esta pregunta observen que cada vez que se transforman los triángulos el Ortocentro cambia de posición.

5. Después de hacer las observaciones con cada triángulo, escriba sus conclusiones.

Se espera que los estudiantes después de hacer los movimientos al triángulo e ir transformándolo, concluyan como es la posición del Ortocentro en cada uno de los triángulos transformados.

Actividad: de acuerdo a lo aprendido responda las siguientes preguntas ayudados con el programa CarMetal.

a) ¿El Ortocentro puede estar en cualquiera de los vértices de un triángulo?
b) ¿Se puede encontrar el Ortocentro en uno de los lados de un triángulo?
c) ¿Cuándo el Ortocentro está fuera de un triángulo?
d) ¿Dadas las medidas de tres lados diga si hay Ortocentro o no?

En resumen: la altura de un triángulo es un segmento de recta perpendicular a un lado, o su prolongación, que pasa por el vértice opuesto al lado.

El punto de corte de las alturas de un triángulo se llama Ortocentro.

El Ortocentro se encuentra en el interior del triángulo si éste es acutángulo; coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo, y se halla en el exterior del triángulo si es obtusángulo.

Comentarios:

Para resolver estas preguntas los estudiantes tienen que interactuar con el programa y hacer varios movimientos con el triángulo, esta experiencia hace que comprendan mejor los conceptos ya que pueden visualizar, analizar, elaborar conjeturas y verificar ideas.

E. Anexo E: Taller 3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "CASD" SIMÓN BOLÍVAR

MEDIANAS Y BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

TALLER N° 3

GRADO OCTAVO

Objetivo:

Trazar las medianas de un triángulo y su punto de corte llamado baricentro que se puede encontrar por fuera o por dentro del triángulo dependiendo del tipo de triángulo, con las siguientes actividades se podrá inferir y concluir la posición de dicho punto a medida que se hagan las construcciones, las observaciones y comprobaciones. Las actividades se centrarán en construir las medianas de un triángulo, observando algunas propiedades de las mismas y su relación con el baricentro, fortaleciendo el uso de las tics, con lo que esperamos se obtengan mejores logros en el aprendizaje.

Los conocimientos previos que se requieren son:

a. Saber trazar el punto medio de un segmento, este concepto se aprendió en la inducción para aprender a utilizar la herramienta CarMetal.
b. Clasificación de triángulos.
c. Área de un triángulo.

Recursos:

17 computadores con el programa instalado CarMetal

1 videobeam.

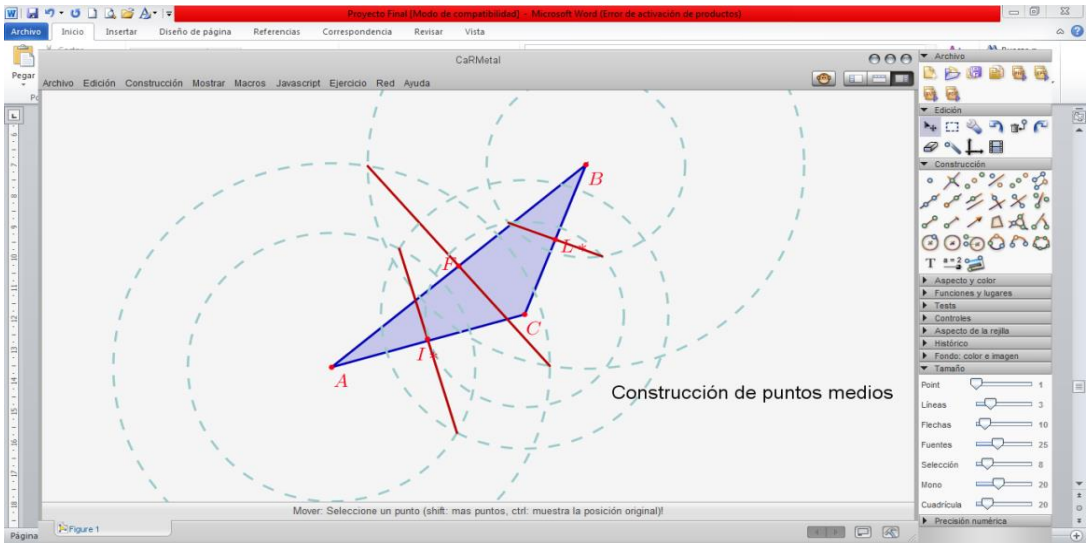
Para realizar esta actividad se trabajará con un computador por cada dos estudiantes. Un videobeam, y será guiada por el profesor.

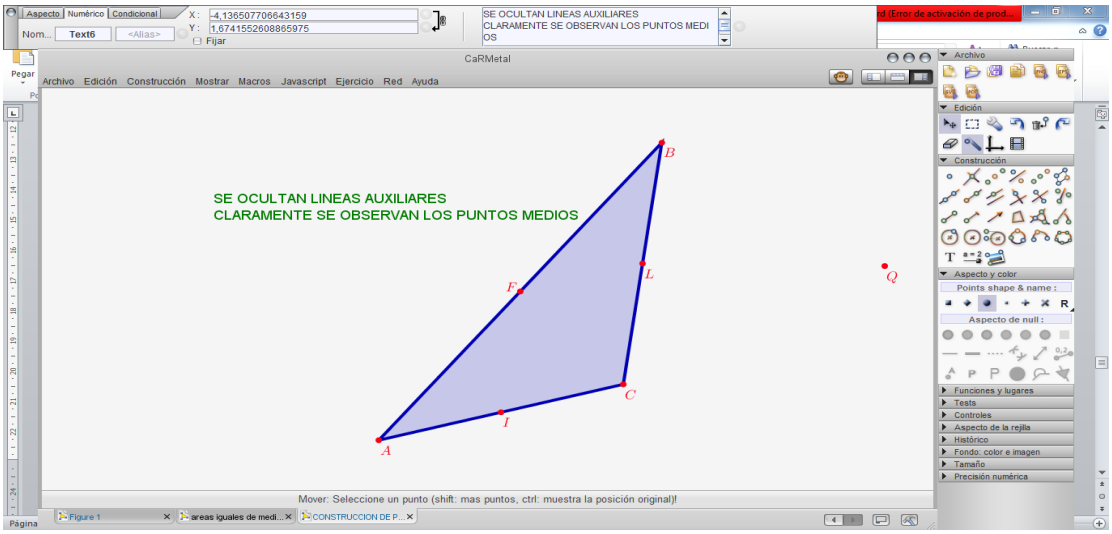
Actividad

Se define la mediana de un triángulo como el segmento que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. El triángulo tiene tres medianas.

1 Usando el programa CarMetal Construya un triángulo cualquiera el cual puede denotar con las letras A,B,C o cualesquiera otras letras que Usted escoja Determine el punto medio F del lado AB como se indicó en la inducción en el aparte construcción del punto medio de un segmento; de igual manera construya los puntos medios de los otros dos lados.

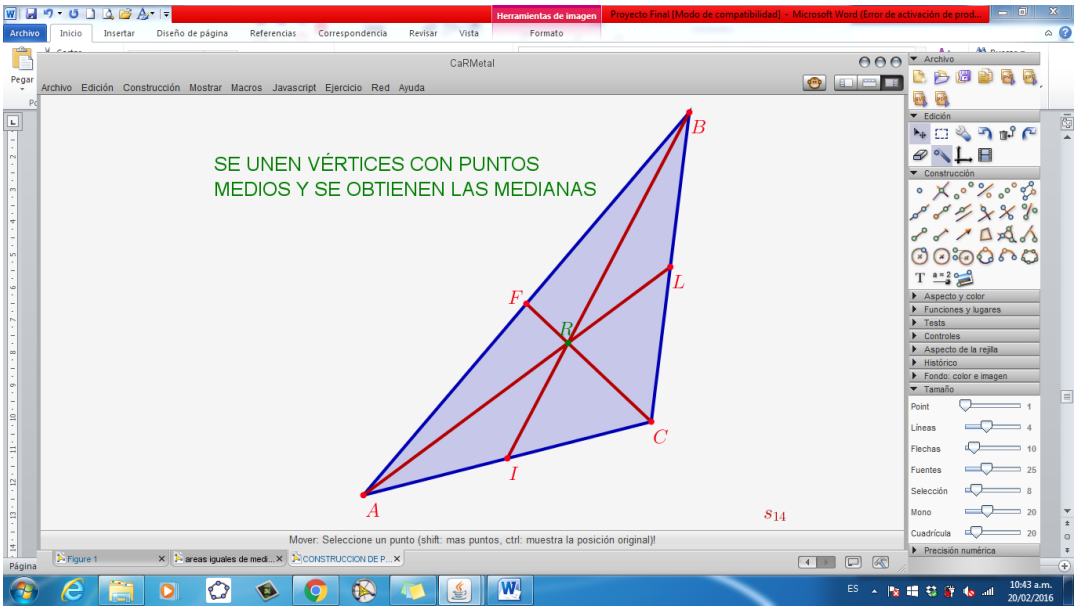
Los estudiantes deben obtener una gráfica similar a la de la figura.





Paso seguido se borran las líneas auxiliares y se observan los puntos medios F, L, I de cada lado del triángulo, como se muestra en la figura.

Con la herramienta segmento una el punto medio F del lado AB con el vértice opuesto C, y así determina la primera mediana del triángulo. De la misma manera construya las otras dos medianas.



2 ¿Qué se puede inferir al trazar las medianas?

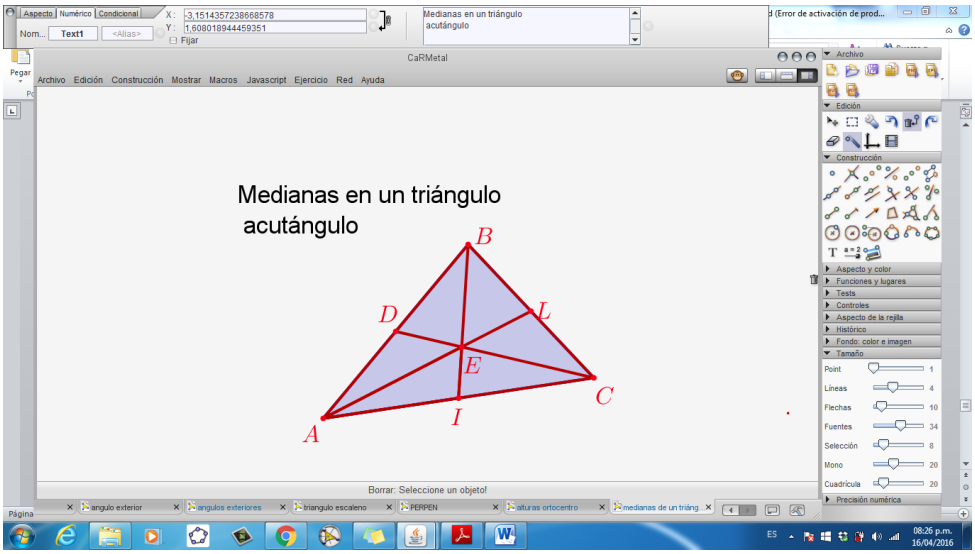
Se espera que los estudiantes al observar las medianas vean que se cortan en un punto, el **Baricentro** es el punto donde concurren las medianas y es el centro de gravedad del triángulo; este centro de gravedad corresponde al punto donde el

triángulo se mantendrá en equilibrio. Una forma de lograr el equilibrio de un cuerpo es apoyándolo sobre su centro de gravedad o hacer que su centro de gravedad se ubique debajo del punto de apoyo. De esta manera podemos equilibrar muchos objetos, aprovechando que la Tierra estará en todo momento jalando hacia abajo con la fuerza de la gravedad. La importancia del centro de masa y centro de gravedad radica, principalmente, en la posibilidad de resolver complejos problemas de Mecánica, Electromagnetismo y otras disciplinas de Física, con relativa facilidad. En Estabilidad es de gran importancia el centro de gravedad para el estudio del equilibrio.

Para comprobar esto se sugiere como tarea a los estudiantes dibujar en un cartón un triángulo trazar las medinas hallar el baricentro y en ese punto colocar la punta de un lápiz o de un compás para que observen que sucede.

3 ¿Cuál es la posición del Baricentro con respecto al triángulo?

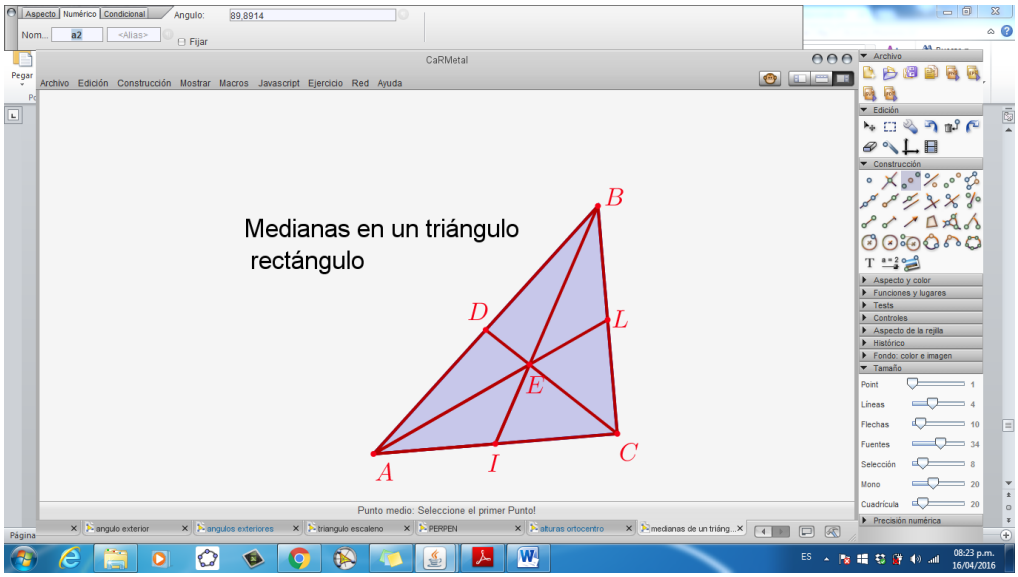
Lo que se espera es que los estudiantes contesten que está dentro o fuera del triángulo dependiendo del triángulo que cada uno dibujó. Paso seguido se pide a los estudiantes cambiar el triángulo hasta obtener un triángulo diferente al anterior de tal manera que puedan observar que pasa ahora con el ***baricentro*** *e ir sacando conclusiones.*



4 ¿Qué observa al variar el triángulo cuál es ahora la posición del baricentro?

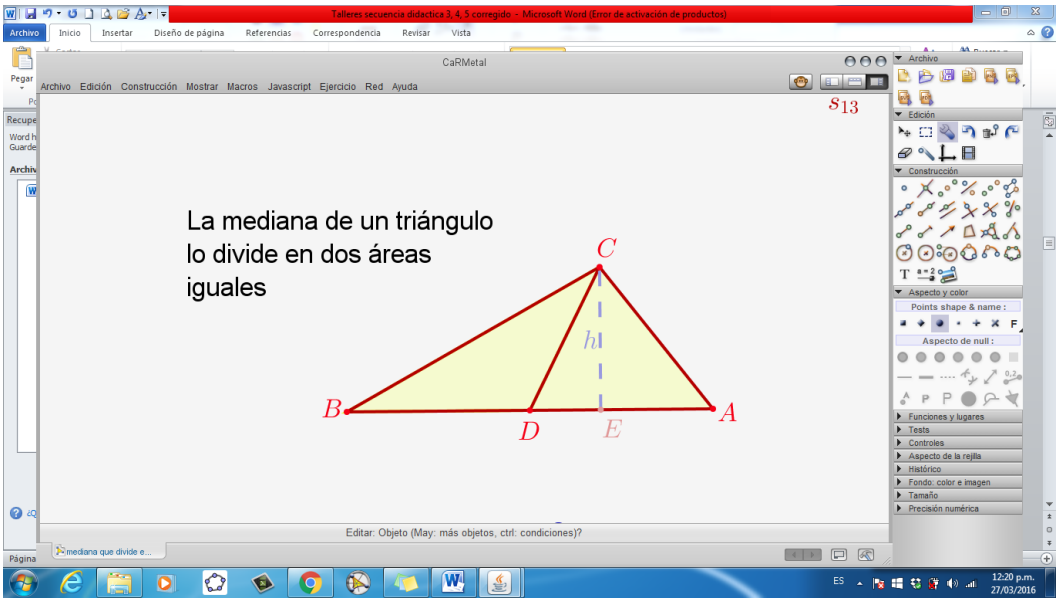
Con esta pregunta se quiere que los estudiantes comparen la posición del baricentro de este triángulo con el anterior.

5. Nuevamente mueva el triángulo por uno de sus vértices, variando los ángulos internos hasta obtener uno diferente a los dos anteriores, ¿Qué puede concluir?



Con esta pregunta se espera que los estudiantes comparen la posición del baricentro en los diferentes triángulos y concluyan que las tres medianas de un triángulo son interiores al mismo, independientemente del tipo de triángulo que sea.

6. Dibuje un triángulo cualquiera y trace una mediana. ¿Cómo son los triángulos que se forman? Compare los lados de los dos triángulos, trace la altura de cada uno de los triángulos.



Se busca que por medio de la observación los estudiantes infieran que al trazar la

altura del triángulo BCD al lado BD coincide con la altura del triángulo DCA al lado DA y que como BD es igual a DA entonces al aplicar la fórmula para hallar el área del triángulo llegan a concluir que las áreas son iguales. Pues las bases son iguales y las alturas también.

Compruebe su conclusión tomando otra base del triángulo.

Ejercicio de aplicación

Un anciano al morir dejó un terreno en forma triangular, que debía repartirse entre sus dos hijos de forma equitativa. ¿Cómo podría usted ayudar a repartir el terreno para dar a cada uno exactamente la mitad de la tierra?

En resumen:

La mediana es el segmento que une el punto medio de un lado del triángulo.

Las medianas se cortan en un punto llamado baricentro que es el centro de gravedad del triángulo.

El Baricentro siempre se encuentra dentro del triángulo sin importar el tipo de triángulo.

La mediana divide un triángulo en dos triángulos que en general no son congruentes pero si de áreas iguales.

F. Anexo F: Taller 4

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "CASD" SIMÓN BOLÍVAR

MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO

TALLER N° 4

GRADO OCTAVO

Objetivo

Aprender a construir las mediatrices de un triángulo y su punto de corte llamado circuncentro. Analizar y aplicar las propiedades de las mediatrices para resolver distintas situaciones problemáticas. Fortalecer el uso de las TIC, con lo que espera se obtengan mejores logros en el aprendizaje.

Los conocimientos previos que se requieren son:

a. Saber trazar el punto medio de un segmento, este concepto se aprendió en la inducción para aprender a utilizar la herramienta CarMetal.
b. Clasificación de triángulos.
c. Circunferencia circunscrita.

Recursos

17 computadores con el programa instalado CarMetal

1 videobeam.

Para realizar esta actividad se trabajará con un computador por cada dos estudiantes. Un videobeam, y será guiada por el profesor.

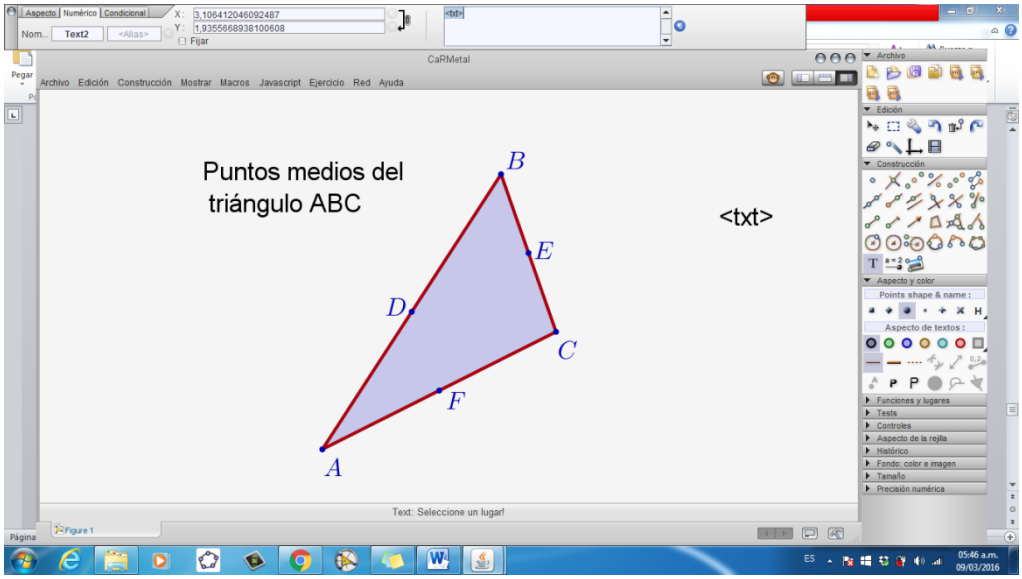
Inicialmente se dará el concepto de mediatriz de un triángulo y a medida que se va desarrollando el taller y con las preguntas que se formulan se quiere llegar a que los

estudiantes encuentren el punto de corte de las mediatrices del triángulo y en ese momento se define ese punto como el circuncentro de un triángulo.

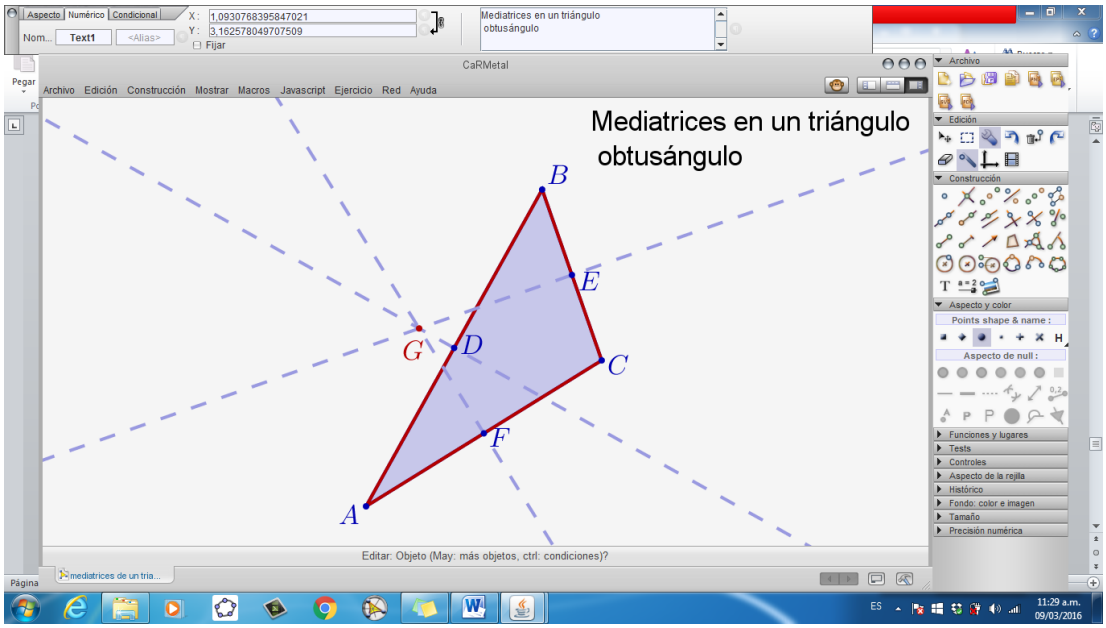
La mediatriz de un triángulo es la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el punto medio (o centro) de éste. Las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo llamada circunferencia circunscrita, que además es aquella que contiene la figura completamente.

Actividad

1. Usando el programa CarMetal, y con la herramienta polígono Construya un triángulo cualquiera y denótelo como ABC o las letras que ustedes consideren. Determinar el punto medio D del lado AB como se indicó en la inducción en la aparte construcción del punto medio de un segmento; de igual manera construir los puntos medios de los otros dos lados. En la gráfica se muestra la figura.



2. Paso seguido con la herramienta perpendicular, construya las perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por esos puntos medios.



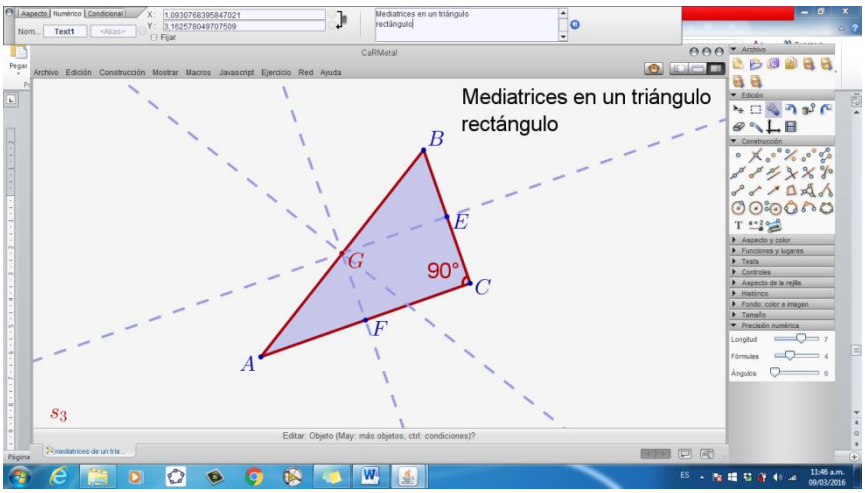
3. ¿Qué observa?

   Con esta pregunta se pretende que los estudiantes observen que las tres mediatrices se cortan en un punto; es en este momento cuando se explica que ese punto de corte de las mediatrices se llama Circuncentro.

4. ¿Con relación al triángulo donde se encuentra ese punto?

   Se hace la pregunta para que los estudiantes observen la posición del circuncentro en el triángulo que cada uno ha dibujado y consigne sus observaciones.

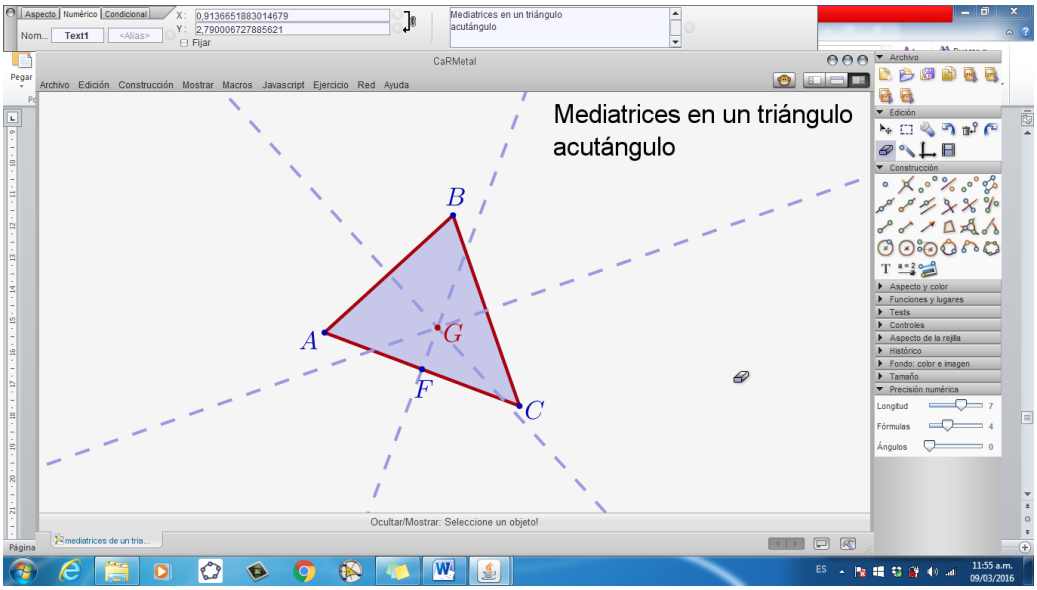
5. Varíe el triángulo hasta obtener otro diferente al anterior, ¿que observa?



Se pretende que los estudiantes miren ahora la posición del circuncentro con respecto al otro triángulo y anoten sus observaciones.

6. Nuevamente varíe el triángulo ¿Qué observa?

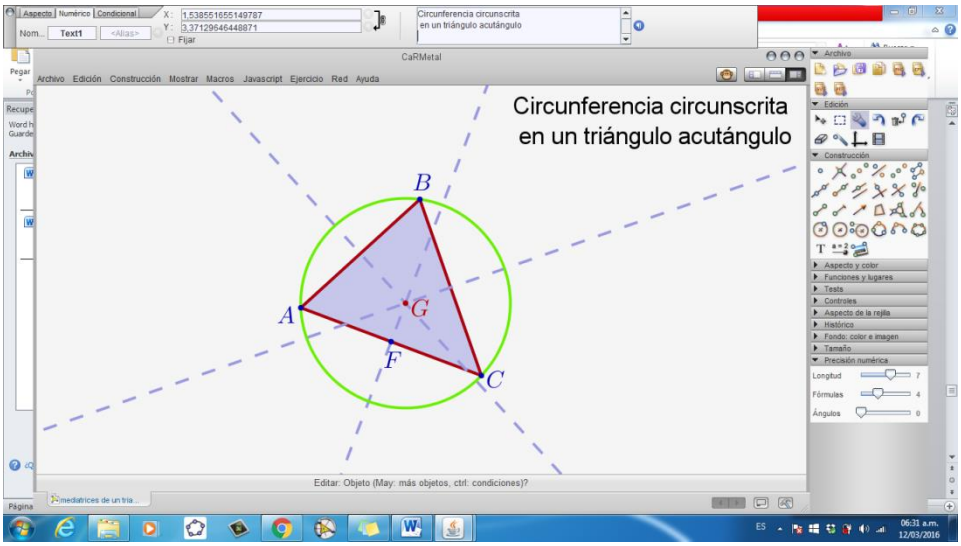
   Con estos movimientos del triángulo se espera que los estudiantes concluyan como se mueve el circuncentro a medida que el triángulo varía según sus ángulos.



7. ¿El Circuncentro o punto de intersección de las mediatrices equidista de los vértices del triángulo? Justifique su respuesta.

   Se espera que los estudiantes hagan las observaciones, que tracen segmentos del circuncentro a cada uno de los vértices y que tomen medidas de estos segmentos, de tal manera que lleguen a la conjetura de la invariancia de la distancia del circuncentro a los vértices del triángulo.

   Si esto es así, con la herramienta compás y tomando la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices, haga centro en el circuncentro y trace la circunferencia. ¿Qué observa?



Se espera que los estudiantes infieran que la distancia del circuncentro al vértice es el radio de la circunferencia circunscrita

El trazado de mediatrices, y en consecuencia el circuncentro resuelven dos importantes problemas geométricos.

Determinar el centro de una circunferencia

Y dados tres puntos, construir la circunferencia que pasa por ellos.

8. Dada una circunferencia, explique los pasos a seguir para hallar su centro.

Ejercicio de aplicación

9. Tres pueblos no alineados, necesitan colocar una antena de telecomunicaciones que se encuentre a la misma distancia de cada uno de ellos. ¿En qué lugar deben colocar la antena?

En resumen la mediatriz es el segmento de recta que es perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.

El punto en el que se intersecan las tres mediatrices de un triángulo se llama Circuncentro y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

El punto donde se cortan las mediatrices de un triángulo, o sea el circuncentro es equidistante de los tres vértices.

El circuncentro se encuentra:

- En un Triángulo rectángulo, en el punto medio de la hipotenusa.
- En un triángulo obtusángulo, en el exterior del triángulo.
- En un triángulo acutángulo, en el interior del triángulo.

G. Anexo G: Taller 5

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "CASD" SIMÓN BOLÍVAR

BISECTRICES E INCENTRO DE UN TRIÁNGULO

TALLER N° 5

GRADO OCTAVO

Objetivo

Aprender a trazar las bisectrices de un triángulo y su punto de corte llamado incentro. Analizar y aplicar las propiedades de las bisectrices para resolver distintas situaciones problemáticas. Fortalecer el uso de las tics, con lo que se espera se obtengan mejores logros en el aprendizaje.

Los conocimientos previos que se requieren son:

d. Concepto de ángulo
e. Concepto de circunferencia inscrita.

Recursos:

17 computadores con el programa instalado CarMetal

1 videobeam.

Para realizar esta actividad se trabajará con un computador por cada dos estudiantes. Un videobeam, y será guiada por el profesor.

Conceptos previos

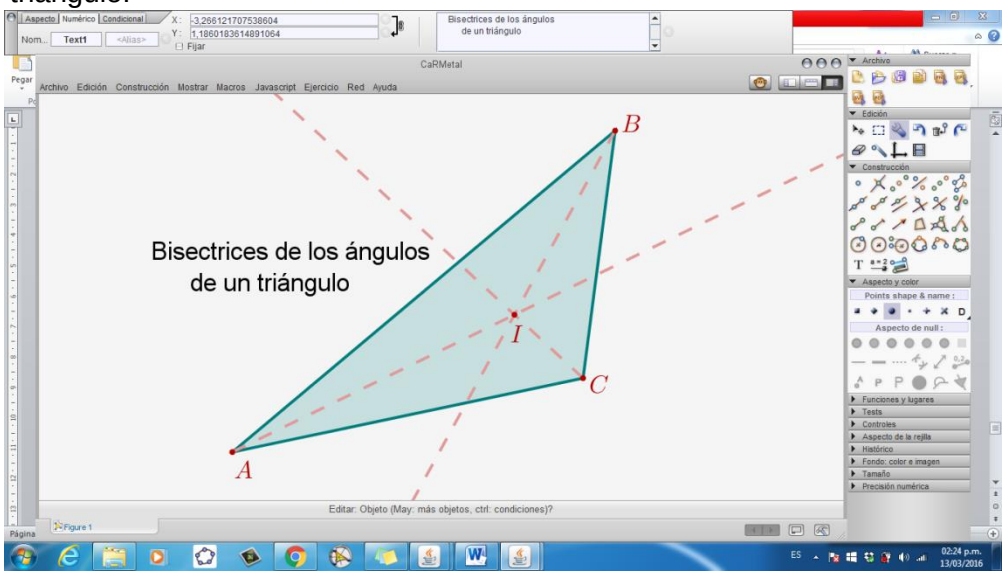
Concepto de circunferencia inscrita.

Una *circunferencia inscrita en un triángulo* es aquella que, siendo interior, es tangente a todos sus lados. Las bisectrices de los ángulos internos del triángulo se intersecan en un punto del mismo, que es el centro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de las semirrectas de un ángulo.

Actividad:

1. Con el programa CarMetal y con la herramienta polígono Construya un triángulo cualquiera y con la herramienta bisectriz trace las bisectrices de los ángulos del triángulo.

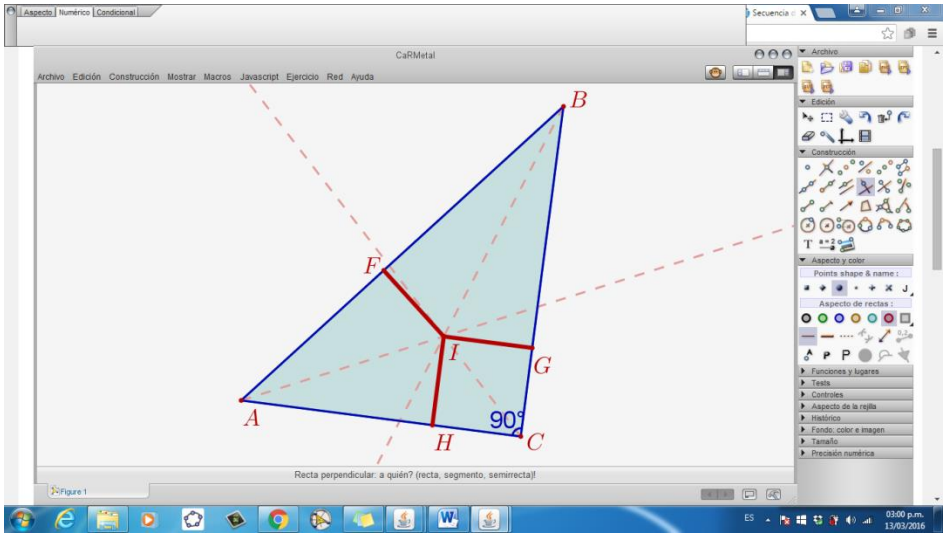


2. ¿Qué observa?

   Con esta pregunta se pretende que los estudiantes observen que las tres bisectrices se cortan en un punto; entonces se explica que ese punto de corte de las bisectrices se llama ***Incentro*** *y tiene una propiedad, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*

3. Mueva el triángulo hasta obtener uno diferente al anterior. ¿Que observa ahora?

   Se espera que los estudiantes observen la posición del incentro en este triángulo y la comparen con el anterior.



4. Varíe nuevamente el triángulo. ¿Que observa?

Se busca que los estudiantes comparen las tres situaciones en cuanto a la posición del incentro en cada uno de los triángulos y saquen conclusiones.

5. En este mismo triángulo trace tres segmentos perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo que pasen por el incentro. ¿Qué observa?

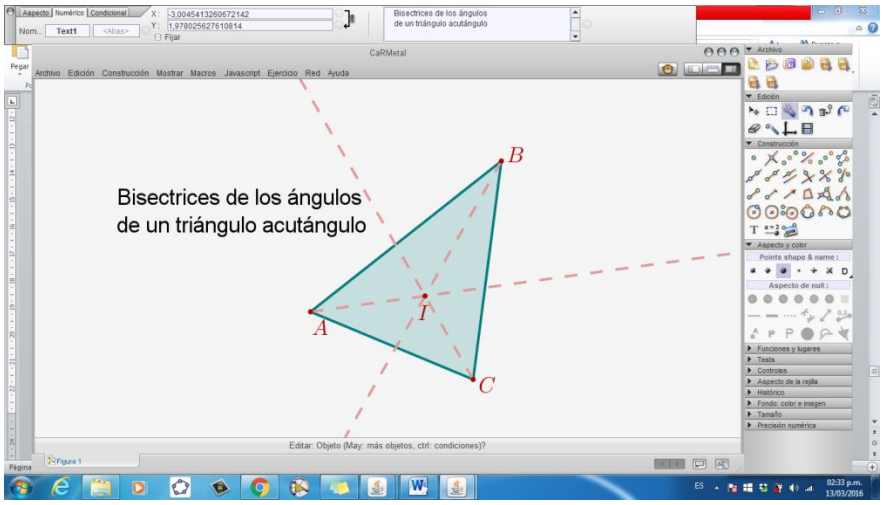
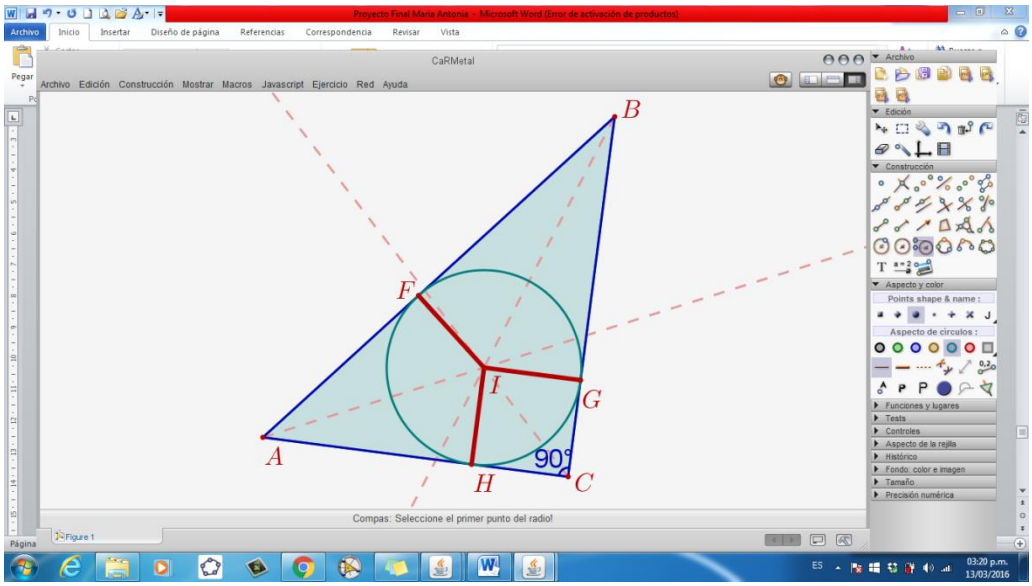


Fig. Perpendiculares desde el incentro a cada uno de los lados del triángulo.

Se espera que los estudiantes observen y comprueben que las perpendiculares trazadas a los lados del triángulo desde el incentro son iguales y por lo tanto que

lleguen a concluir que es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyo centro es el Incentro.

6. Dibuje con la herramienta compás la circunferencia inscrita en el triángulo.



Ejercicio de aplicación

7. Una persona tiene un terreno en forma triangular. Él quiere construir un estanque de forma circular para cultivar peces, de manera que el estanque sea del mayor tamaño posible. ¿Qué debe hacer el señor para lograrlo?

En resumen:

La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de las semirrectas de un ángulo.

Las bisectrices se intersectan en un punto llamado incentro.

El Incentro es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo, esta circunferencia tiene a los lados del triángulo como tangentes.

Fotografía1: aplicando la herramienta

Fotografía 2 y 3: Realizando los talleres de la secuencia didáctica

Bibliografía

Baldor, J. 1967. *Geomería plana y del espacio.* Bilbao (España) : Vasco mericana, S.A.

Brosseau, Guy. 1986. *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la matemática.*

Bustamante, Gloria. 2013. *Mundo Geométrico.* Venezuela : Grafifor,C.A.

Camargo, Leonor; Samper, Carmen ; Perry, Patricia. 2006. Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas matemáticas.* [En línea] . [Citado el: 17 de Enero de 2016.] http://www.scm.org.co/aplicaciones/revista/Articulos/853.pdf.

Castiblanco Paiba, Ana Celia. 1999. *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares.* Santafé de Bogotá, Colombia : s.n.

Corry, Leo. 2002. David Hilbert y su Filosofía Empiricista. Venezuela : s.n., Vol. IX.

Cruz, Yessy Marisol Alemán. 2009. *La geometría con Cabri una visualización a las propiedades de los triángulos.* Tegucigalpa : s.n.

Dumoulin, Monique. 2016. El triangulo – la perfección la armonía y sabiduría. *Espacio de la Geometría Sagrada.* [En línea] 10 de 01 de 2016. [Citado el: 08 de 04 de 2016.] http://espaciodegeometriasagrada.com/el-triangulo-la-perfeccion-la-armonia-y-sabiduria/.

Euclides. 1994. *Los Elementos.* s.l. : Gredos.

Garcia Peña, Silvia y López Escudero, Olga Leticia. 2008. *La enseñanza de la geometria.* Mexico : s.n.

Godino, Juan D. y Ruíz, Francisco. 2002. *Geometría y su didáctica para Maestros.* Granada : Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1.

Gómez, Jesús, y otros. 2003. *Matemáticas vol II.* Madri : MAD, S.L., 2003. ISBN:84-665-1263-2.

Gómez, José Luis Díaz. 2002. *APUNTES DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.* 2002.

González, Henar Lanza. 2015. Matemáticas y Física en el Timeo de Platón . [En línea] . [Citado el: 03 de Abril de 2016.] http://www.scielo.org.co/pdf/pafi/n40/n40a04.pdf. ISSN (I): 0120-4688 / ISSN (D): 2389-9387.

Gutiérrez, Nadia Vanessa Ramírez. 2014. ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA CLASIFICACIÓN DE. [En línea]. [Citado el: 12 de marzo de 2016.] http://www.bdigital.unal.edu.co/39484/1/44005486.2014.pdf.

Hernández, Luis Javier. 2005. *Sobre los principios fundamentales de la Geometría.*

Hilbert, David. 1996. *Fundamentos de la Geometría.* Madrid : s.n.

Jiménez, Douglas. 2005. *Geometría, el Encanto de la Forma.* Caracas : CEC,SA, 2005. ISBN 980-388-222-8.

Linares, MARÍA. 2007. *GEOMETRÍA INTERACTIVA.* MEXICO : s.n.

Lluis, Emilio. 1979. La geometría en la enseñanza. México : s.n.

Marvinparada. 2013. *CarMetal: Geometría interactiva.*

Ministerio de Educación Nacional. 2006. *Estándares Básicos de competencias.*

Moise, Edwin E. 1989. *Geometría Moderna.* México D.F : Azteca S.A de C.V.

Moreno, Yibetsi. 2012. Estrategias didácticas. [En línea]. [Citado el: 19 de Septiembre de 2015.] http://es.slideshare.net/Yibmoreno/estrategias-didcticas-12941706.

Oteiza; Silva, Fidel; Juan. 2004. Computadores y comunicaciones en el curriculo matemático. [En línea]. [Citado el: 06 de Enero de 2016.] http://www.eduteka.org/SilvaSoftware.php.

Palmer, y otros. 2006. Google Books. [En línea] .[Citado el: 03 de Abril de 2016.] https://books.google.com.co/books?id=svzuB4pZKjkC&pg=PA300&dq=porque+el+tri%C3%A1ngulo+es+un+pol%C3%ADgono&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwikxaP0sPbLAhVFkh4KHa-6CSYQ6AEITjAJ#v=onepage&q=porque%20el%20tri%C3%A1ngulo%20es%20un%20pol%C3%ADgono&f=false.

Peña, Silvia García. 2008. *La enseñanza de la Geometría.* Mexico : s.n.

Pickover, Clifford. 2009. *The Math book.* New York : sterling publishing Co.

Pino, Oscar y Sologuren, Santiago. 1997. *Historia de la geometría.*

PMME-UNISON. 2001. Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. *Documento de discusión para un estudio ICMI.* [En línea] http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm.

Sanchez, Clara Helena. 2012. La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. Bogotá : s.n., 2012, págs. 71-92.

Sepúlveda, Armando y Arcos, Ismael. 2011. *Desarrollo conceptual de la geometría.* Toluca (Mexico) : Devi Kali. ISBN;978-607-8149-05-6.

Tesijli, Teodora. 1994. *Geometría Euclidea I.* Costa Rica : EUNED 1999

Vega, Luis. 1991. *Elementos, libros I -IV.* Madrid : GREDOS S.A. ISBN 84-249-1464-3 tomo I.