UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Efecto Hawking como tunelamiento cuántico a través de horizontes de eventos

Leidy Milena Hernández López

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2016

Efecto Hawking como tunelamiento cuántico a través de horizontes de eventos

Leidy Milena Hernández López

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Física

Director:
Dr. José Robel Arenas Salazar

Línea de Investigación:
Termodinámica de agujeros negros
Grupo de Investigación:
Termodinámica de agujeros negros

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2016

”La esperanza es un riesgo que debe correrse, el más arriesgado de todos. No es satisfacción propia, sino la más grande y difícil victoria del hombre sobre su alma.”

George Bernanos

Agradecimientos

Sea esta la oportunidad para expresar mi agradecimiento, admiración y respeto al Doctor José Robel Arenas. Por sus amplias calidades humanas y académicas, que motivaron mi ingreso en esta área tan fructífera y apasionante. Quien con los infinitos dotes de maestro que siempre lo han caracterizado, logró por medio de sus valiosas reflexiones acerca de la Termodinámica de Agujeros Negros, mostrarme los sutiles y complejos aspectos de la teoría; que no dejan de ser un motivo de asombro tanto para mí, como para todos los que alguna vez han tenido un acercamiento a ella, desde algún ámbito, fuere este formal o profano.

A mi alma máter, la Universidad Nacional de Colombia; que por medio de su filosofía incluyente y rigurosa me acogió y moldeó integralmente. Ya que por su campus exploré las glorias de la ciencia y las humanidades desde el pregrado hasta hoy; pues ella con su carácter inmanente siempre permeó cada una de las fibras sensibles de mi vida, reafirmando mi consagración al deber social que por herencia confiere a sus hijos.

A mi amigo Andrés Fernando Castillo Ramírez, humano cálido y sin igual que siempre con una sonrisa y una palabra de aliento logró motivar mis ánimos para no perderme en este laberinto conceptual que muchas veces tendía a ocultarme el camino hacia la culminación del objetivo.

Resumen

El presente trabajo buscó modelar un potencial apropiado para el formalismo de Parikh-Wilczek con base en los procedimientos de la física nuclear y al mismo tiempo analizó bajo qué condiciones es posible que dicho modelo funcione, mostrando que las condiciones de ambos ámbitos físicos (el del agujero negro y el núcleo atómico) no son comparables y por lo tanto el problema debería ser abordado desde otros esquemas teóricos, con el ánimo de esclarecer adecuadamente la situación. También sentó unas bases metodológicas que permitan evidenciar claramente el mecanismo interno de la radiación Hawking.

Palabras clave: Espaciotiempo curvo, Radiación Hawking, Tunelamiento cuántico.

Abstract

This thesis generate a model of an appropriate potential under Parikh-Wilczek formalism, based on Nuclear physics procedures. At the same time made an analysis of conditions in which this model could works. Showing that physical conditions in a black hole and atomic nucleus are not comparable and therefore an approximation to the problem should use another kind of theoretical schemes, with the aim of clarify adequately that situation. This work also ratifies a methodology basis that make clear the inner mechanism of Hawking´s radiation.

Keywords: Curved Spacetime, Hawking Effect, Quantum Tunneling.

Contenido

Agradecimientos III

Resumen V

Contenido VIII

Introducción 1

1. Radiación Hawking como mezcla de frecuencias 5
1.1. Cuantización en espacios curvos . . . 5
1.1.1. Campo escalar en universo isotrópico y homogéneo . . . 5
1.1.2. Cuantización en espacio-tiempo curvo . . . 8
1.1.3. Transformaciones de Bogoliubov y producción de partículas . . . 10
1.1.4. Radiación Hawking . . . 14
1.1.5. Modos entrantes y salientes . . . 17
1.1.6. El espectro de Planck . . . 20

2. Radiación Hawking como tunelamiento 23
2.1. Radiación proveniente de un agujero negro de Reissner-Nordström . . . 28
2.2. Resultados de Parick-Wilczek . . . 31

3. Tunelamiento cuántico en reacciones termonucleares 33
3.1. Factor de Gamow . . . 34
3.2. El factor de penetración . . . 42
3.2.1. La aproximación WKB . . . 42
3.2.2. Penetración de barrera en coordenadas parabólicas . . . 46
3.3. Reacciones resonantes y dispersión . . . 50

4. Comparación en los procesos de tunelamiento. 55
4.1. Tasa de decaimiento . . . 55
4.2. Campo de interacción [21] . . . 57
4.3. Controversia . . . 57

4.4. Potencial 59

5. Conclusiones y Recomendaciones **61**
5.1. Conclusiones 61
5.2. Recomendaciones 62

A. Tasa de emisión semiclásica **63**
A.1. Tunelamiento dependiente del tiempo 64

B. Antecedentes históricos del concepto de Agujero Negro **67**

Bibliografía **79**

Introducción

Teniendo en cuenta las recientes divergencias teóricas [2, 24] en torno al uso del método empleado por Parikh y Wilczek, de salvar el principio cuántico de unitariedad por medio de la introducción de un potencial que permite el tunelamiento de partículas a través del horizonte de sucesos del agujero negro (desarrollo no muy claro pues no considera la parte temporal de la acción), se hace pertinente una revisión profunda de dicho tratamiento, así como de las conclusiones derivadas de este; con el fin de garantizar un esquema objetivo y elegante sin hipótesis *ad hoc* que vayan en contravía con los principios físicos fundamentales.

El presente trabajo busco modelar un potencial apropiado para el formalismo de Parikh-Wilczek con base en los procedimientos de la física nuclear y al mismo tiempo analizar bajo qué condiciones es posible que dicho modelo funcionará, o dado el caso, mostrar que las condiciones de ambos ámbitos físicos (el del agujero negro y el núcleo atómico) no son comparables y por lo tanto el problema debería ser abordado desde otros esquemas teóricos, con el ánimo de esclarecer adecuadamente la situación, así como sentar unas bases metodológicas que permitan evidenciar claramente el mecanismo interno de la radiación Hawking.

Es así que los esfuerzos en esta dirección realizados por el grupo de Termodinámica de Agujeros Negros del Observatorio Astronómico Nacional, están dirigidos a aportar elementos teóricos en la resolución del debate de la existencia o no de efecto túnel y en la búsqueda de otros formalismos más acordes al enfoque teórico necesario para abordar una temática de esta naturaleza.

Al considerar clásicamente un agujero negro es de esperarse que éstos no radíen sino absorban partículas. Esta demostración postulada por medio del Teorema del área de Hawking [13] expresa el hecho de que "*el área del horizonte de sucesos de un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función no decreciente del tiempo*".

En 1971, Jacob Bekenstein preocupado por la posible violación del segundo principio de

la termodinámica[1] plantea que la entropía de un agujero negro debería ser una función monótonamente creciente del área del horizonte[2].

Hawking, quien inicialmente se reusó a dicho tratamiento, a mediados de la década de los setenta plantea que los agujeros negros deben radiar de acuerdo a un espectro térmico [15], es decir que en una formulación semiclásica de mezcla de frecuencias (considerando que la parte derecha de las ecuaciones de campo de Einstein, el tensor energía impulso sería el valor esperado del vacío de algún operador cuántico para los campos de radiación-materia) podría verificarse que éstos al emitir y absorber partículas se evaporarían, dado que el cuerpo colapsando convertiría los leptones y bariones en entropía. Dicha condición de evaporación conduce a que el principio de unitariedad de la mecánica cuántica se vea violado en el proceso, pues la información no puede eliminarse del todo mientras el universo siga evolucionando.

En aras de restituir el principio fundamental de unitariedad Parikh y Wilczek [23] en 1998, reproducen el efecto Hawking como tunelamiento cuántico a través del horizonte, en una formulación semiclásica teniendo en cuenta el método propuesto en 1996 por Keski-Vakkuri y Kraus [19]; quienes presentan un algoritmo basado en la aproximación WKB combinada con el método de las trayectorias de tiempo complejo; que permite analizar sistemas en donde el tunelamiento sucede con una dependencia temporal. Este esquema efectúa una corrección al espectro de Hawking y muestra que no es precisamente térmico.

Recientemente, Pizzi y Belinski [24, 2] plantearon que el método anterior presenta dificultades teóricas con respecto a que la acción pueda tener una componente imaginaria.

Y es en este punto en el cual se encuentra sostenida la controversia, porque aunque la formulación de Parikh-Wilczek presente los antedichos problemas, se hace necesario desarrollar una teoría que corrija el espectro planckiano de emisión del agujero negro. Así como también efectuar una discusión física de la situación, dado que la mayoría de los esfuerzos han estado sostenidos en argumentaciones matemáticas y probabilísticas de gran sofisticación, pero que a menudo son contradictorias entre sí, lo cual pone de manifiesto la necesidad de una discusión heurística de dichos procedimientos.

[1] La cuestión surge a raíz de un experimento mental planteado por su director de tesis doctoral, el físico J.A. Wheeler, en el cual si se considerara la entropía generada por una taza de té caliente y una de agua fría arrojadas al agujero negro, sería posible hacer desaparecer la mezcla y la entropía; pues no habría posibilidad de obtener información acerca del cambio sucedido dentro de éste; en virtud de que el Teorema de no pelo de Carter y Robinson [5, 26] especifica que los agujeros negros son simples; es decir: los únicos parámetros visibles para un observador son la carga, la masa y el momento angular. A partir de los cuales no es posible formular una termodinámica.

[2] Teoría conocida como termodinámica de los agujeros negros.

En virtud de las diferentes controversias surgidas a raíz de la posibilidad de la existencia de tunelamiento cuántico en la frontera de un agujero negro, luego de los trabajos de Parikh y Wilczek [23] a finales de la década de los noventa[3] se asume el hecho que para una partícula atravesando el horizonte de un agujero negro es posible determinar la acción; la cual posee una parte imaginaria proveniente del plano complejo de la coordenada radial.

Posteriormente los italianos Pizzi [24] y Belinski [2] realizaron una crítica al hecho de que la acción posea una componente imaginaria e independiente del sistema coordenado empleado, arguyendo que en el espacio-tiempo del agujero negro la variable temporal posee una parte imaginaria dentro del horizonte de sucesos, que cancela la parte imaginaria que surge del momento. Lo que evidencia que a partir de un enfoque semiclásico (cuantizando el miembro derecho de las ecuaciones de Einstein) sobre un background fijo no sea posible encontrar tunelamiento desde el interior hacia el exterior de un agujero negro de Schwarzschild.

Otra de las objecciones radica en la condición de que en el modelo de Parikh [21] se plantea que la partícula realizando efecto túnel a través del horizonte genera una contracción del agujero negro durante el proceso de radiación y que tiene como consecuencia que el espectro no sea estrictamente térmico (pues en virtud de la conservación de la energía surge el problema de la pérdida de información cuando aquél se ha evaporado [22]). A la vez que la barrera de potencial depende en sí misma de la partícula, pero no se sabe dónde se encuentra dicho potencial.

Y es debido a la controversia generada por el empleo de un potencial autogenerado por la partícula (creada en el horizonte de eventos del agujero negro) que nuestro problema radica en plantear un potencial adecuado que cumpla los requerimientos teóricos necesarios para establecer adecuadamente el formalismo de Parikh-Wilczek, como una posible solución al debate, sin sacrificar la idea inicial de corregir el espectro planckiano y que a su vez brinde una explicación física razonable.

El objetivo general fue modelar el potencial de tunelamiento cuántico en la descripción de emisión de la radiación Hawking de Parikh-Wilczek, donde se empleo el siguiente esquema metodológico para resolverlo

i. Reproducción del efecto Hawking usando la aproximación semiclásica de mezcla

[3] En los cuales se aplica el método de trayectorias temporales imaginarias planteado por Keski-Vakkuri y Kraus [19] quienes establecen un algoritmo directo que puede ser usado para calcular el tunelamiento relevante o las tasas de nucleación para modelos de sistemas que poseen lagrangianos con dependencias temporales explícitas, surgidas de backgrounds externos o que involucran estados iniciales estáticos complicados.

de frecuencias: Primero se realizó un estudio detallado del enfoque clásico del concepto de agujero negro, el cual permite reconocer parámetros necesarios de conceptos básicos a ser empleados con naturalidad en las futuras descripciones cuánticas de éste; luego se hizó referencia al teorema de unicidad o de no pelo (en el cual Carter [5] y Robinson [26] donde establecen que todo agujero negro está definido por sus propiedades de masa, carga y momento angular) con el fin de obtener la temperatura de Bekenstein-Hawking, lo que a su vez da lugar al surgimiento de la *Termodinámica de los agujeros negros*, formalismo que introduce a la concepción de que los agujeros negros radían a un ritmo estacionario y con un espectro térmico (radiación Hawking). Se reprodujó la teoría de cuantización en espacios curvos la cual es el preludio matemático para derivar la radiación Hawking, según éste la presentó originalmente [15] haciendo uso de los coeficientes de Bogoliubov[4].

ii. Reproducción del efecto Hawking como tunelamiento cuántico a través del horizonte en el modelo de Parikh-Wilczek: Se hizó la revisión exhaustiva del método de Parikh y Wilczek [23] acerca de la representación de la radiación Hawking como un fenómeno de tunelamiento cuántico a través del horizonte de eventos, así como las críticas recientes a dichos argumentos por parte de Pizzi [24] y Belinski [2].

iii. Descripción de efectos de tunelamiento cuántico en física nuclear: Se analizó rigurosamente el tunelamiento en el núcleo atómico en problemas como la emisión de partículas alfa; con el propósito de reconocer si es posible aplicar un enfoque de esta naturaleza en el proceso de radiación Hawking para los agujeros negros, hecho que se pondrá en consideración, dado que no es posible evidenciar algún tipo de estructura interna dentro de éstos, en la misma forma en que fue descrita originalmente el fenómeno de efecto túnel para el núcleo.

iv. Comparación de las técnicas de los procedimientos anteriores (ii) y (iii): Se planteó una descripción alternativa mediante la introducción de un potencial adecuado para el modelo de Parikh-Wilczek que permita decidir la conveniencia de este método.

v. Modelación del potencial apropiado para el modelo de Parikh-Wilczek con base en los procedimientos de la física nuclear: Se realizó la interpretación física de la descripción del efecto Hawking por túnel cuántico.

vi. Discución de la interpretación física de la descripción del efecto Hawking por tunelamiento cuántico a través del horizonte de eventos: Se consolidó el estado actual de la investigación en radiación Hawking, teniendo en cuenta el debate planteado por la hipótesis de la existencia de tunelamiento, así como las perspectivas futuras en esta materia, con el fin de servir de apoyo a nuevas propuestas de tesis.

[4]Método comúnmente llamado aproximación semiclásica de mezcla de frecuencias.

Capítulo 1

Efecto Hawking desde la aproximación semiclásica de mezcla de frecuencias

1.1. Cuantización en espacios curvos

El mecanismo de cuantización canónica de un campo escalar que es efectuado en el espaciotiempo de Minkowski no es la descripción adecuada en la región vecina y próxima a un agujero negro, en la cual dados los intensos campos gravitacionales ha sido curvado y por lo tanto se hace necesaria una nueva descripción en el esquema de la teoría cuántica de campos sobre variedades curvas. Para lo cual se seguirá el enfoque expuesto según: [7, 8, 15, 20]

1.1.1. Campo escalar en universo isotrópico y homogéneo

La definición de un campo clásico está basada en la condición extremal de la acción funcional de acuerdo al principio de mínima acción[1]

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, ...) \tag{1-1}$$

en donde la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ depende del campo y de sus derivadas espaciales $(\partial_\mu \phi = \phi_{,\mu})$. Es necesario que la acción funcional sea univaluada y tenga un extremo. Con lo cual es posible garantizar que la trayectoria clásica sea un extremo de ésta.

Es necesario especificar los valores iniciales de los campos para obtener el ajuste único de la solución. Esto es posible si se asume un lagrangiano que dependa solamente de los

[1] El principio de mínima acción expresa que para cada sistema mecánico existe una integral S, denominada la acción, que toma un valor mínimo para toda longitud infinitesimal de la trayectoria de integración. Para trayectorias de longitud arbitraria solamente se puede afirmar que la acción debe poseer un extremo, que no necesariamente será un mínimo. Así que por lo tanto su variación $\delta S = 0$.

campos y sus primeras derivadas, es decir $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \phi^i_{,\mu})$. El carácter de invarianza de Poincaré exige la independencia explícita de la densidad lagrangiana con $\vec{x}$ o del tiempo t.

Este tipo de invarianza surge a partir de la implementación del grupo de transformaciones de Poincaré que involucra la invarianza translacional y rotacional. Esto sucede cuando se trabaja en espaciotiempos planos, en los cuales los efectos gravitacionales son despreciables. En caso contrario deben ser satisfechos los requerimientos de covarianza (es decir, invarianza ante transformaciones arbitrarias de coordenadas) impuestos por la relatividad general para espaciotiempos curvos.

Si se considera un campo escalar real acoplado minimalmente a la gravedad $\phi(\vec{x})$ en un espaciotiempo curvo. La acción covariante adecuada está descrita por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right] \tag{1-2}$$

Es importante el tipo de acople minimal en virtud de que es este el que proporciona la mínima interacción de un campo con la gravedad y a su vez es la compatibilidad requerida por la relatividad general. En lo cual se cumple que todos los efectos locales de la gravedad sean equivalentes a sistemas coordenados en el espaciotiempo plano. Esto es, que todos los efectos asociados a la interacción gravitacional sean completamente equivalentes a sistemas coordenados en un espaciotiempo plano. Esta discusión es la realizada en la sección 1.1.2

El caso físico más sencillo es considerar un campo escalar sin masa. El cual posee asociada una acción funcional dada por la siguiente expresión:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \, \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi \tag{1-3}$$

A partir de allí es posible determinar la ecuación de movimiento, que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon sobre ϕ, la cual es:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \tag{1-4}$$

La solución ϕ a la ecuación 1-4 puede ser desplegada como combinación lineal de soluciones (modos) de frecuencias positivas y negativas, debido a la completez de ésta; lo cual expresa el punto inicial del proceso de cuantización:

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_i \left[a_i u_i(t, \vec{x}) + a_i^\dagger u_i^*(t, \vec{x}) \right] \tag{1-5}$$

Este procedimiento realizado respecto al tiempo global inercial sobre el cual se describe el espacio de Minkowski,

con respecto al tiempo inercial global del espacio de Minkowski, significa que

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j(t,\vec{x}) = -i\omega_j u_j(t,\vec{x}), \quad \omega_j > 0. \tag{1-6}$$

Se hace necesario garantizar que las soluciones $u_i(t,\vec{x})$ formen una base ortonormal completa. Para lo cual debe ser definido el producto interno de Klein-Gordon, dado por:

$$(\phi_1,\phi_2) = -i\int d^3\vec{x}\left(\phi_1\partial_t\phi_2^* - \phi_2^*\partial_t\phi_1\right), \tag{1-7}$$

que a su vez puede ser escrito en términos de los conmutadores de los operadores de creación y destrucción $a_j^\dagger$ y a_i respectivamente; para el espacio en el cual las soluciones sean de frecuencia positiva. Es posible construir el espacio de Fock de muchas partículas a partir del estado de una partícula.

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \left(u_i, u_j\right)\hbar = \delta_{ij}\hbar, \tag{1-8}$$

y

$$\left[a_i, a_j\right] = 0 = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right], \tag{1-9}$$

El caso en que un campo clásico es configurado como un campo cuántico surge a partir de la condición en la cual éste es convertido en un operador, que satisface las subsecuentes relaciones de conmutación. Con $\pi = \partial_t\phi$ la correspondiente variable canónicamente conjugada:

$$\left[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x})\right] = i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}), \tag{1-10}$$

y

$$\left[\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{x'})\right] = 0 = \left[\pi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x'})\right] \tag{1-11}$$

La construcción del espacio de Fock surge a través de la aniquilación del estado de vacío $|0\rangle$ mediante el empleo del operador de destrucción a_i:

$$a_i|0\rangle = 0. \tag{1-12}$$

La aplicación sucesiva de los operadores de construcción $a_j^\dagger$ actuando sobre el estado de vacío dado por la ecuación 1-12 expanden el espacio de Hilbert de una partícula y los demás estados construidos de la misma manera:

$$|1_i\rangle = \hbar^{-1/2}a_i^\dagger|0\rangle \tag{1-13}$$

$$\left|n_{i_1}^{(1)}, n_{i_2}^{(2)}, \ldots, n_{i_k}^{(k)}\right\rangle = \left(n^{(1)}!n^{(2)}!\ldots n^{(k)}!\right)^{-1/2}\left(\hbar^{-1/2}a_{i_1}^\dagger\right)^{n^{(1)}}\left(\hbar^{-1/2}a_{i_2}^\dagger\right)^{n^{(2)}}\ldots\left(\hbar^{-1/2}a_{i_k}^\dagger\right)^{n^{(k)}},$$

(1-14)

en donde se han etiquetado las partículas con los índices $i_1, i_2, \ldots i_k$ en sus diferentes estados.

Los modos de onda plana deben ser escogidos configurando una base ortonormal completa que dependa del vector de onda $\vec{k}$ y la frecuencia $\omega = |\vec{k}|$

$$u_{\vec{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{16\pi^3\omega}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{1-15}$$

Los operadores de creación y destrucción satisfarán las relaciones de conmutación dadas en 1-10 y 1-11 en la forma:

$$\left[a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = \hbar\delta^3\left(\vec{k} - \vec{k}'\right), \tag{1-16}$$

$$\left[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}\right] = 0 = \left[a^{\dagger}_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}\right]. \tag{1-17}$$

Una escogencia particular del tiempo en las transformaciones de Poincaré genera los mismos modos de frecuencia positiva en el procedimiento de cuantización, pues éste es independiente del tiempo t inercial empleado, así que existe una invarianza en la expansión 1-5 en modos de frecuencia positiva y negativa. Y es en virtud de este hecho que se genera una invarianza en la determinación del estado de vacío y del espacio de Fock completo.

1.1.2. Cuantización en espacio-tiempo curvo

En presencia de campos gravitacionales intensos, por ejemplo en las vecindades de un agujero negro, el espaciotiempo se distorsiona y ya no queda adecuadamente descrito en sus propiedades geométricas por medio de la métrica minkowskiana. Además, la simetría del grupo de Poincaré no prevalece; así que el procedimiento dado en la sección 1.1.1 debe extenderse a esta condición, es decir, cuando el espaciotiempo ha sido altamente curvado.

Es necesario establecer varias condiciones para garantizar el carácter covariante de la teoría de cuantización. Entre las que se tiene:

i. La derivada parcial presente en el laplaciano de la función de onda, debe ser reemplazada por el operador d'Alembertiano $\Box \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$. Así que ésta queda escrita en forma covariante como:

   $$\Box\phi = 0. \tag{1-18}$$

   Es posible elegir una constante de acople de la funcón de onda ϕ con el escalar de curvatura R. Dicha constante de acople ξ hace que ésta quede escrita en la forma

$\Box\phi - \xi R\phi = 0$. El denominado acople minimal surge cuando $\xi = 0$. Otro caso de importancia en física es el acople conforme cuando $\xi = \frac{1}{6}$. Estos acoples hacen que la ecuación de onda sea equivalente a la del espacio de Minkowski.

ii. La ecuación 1-7 que hace referencia al producto interno de Klein-Gordon, toma la forma:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} d\sum^{\mu} (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1), \tag{1-19}$$

siendo $d\Sigma$ el elemento de volumen en el espacio curvo y n^μ un vector normal unitario exterior a éste; dirigido hacia el futuro respecto a la hipersuperficie de Cauchy Σ; y con $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$. Esto conlleva a que el producto interno de Klein-Gordon sea independiente de la hipersuperficie escogida.

En el esquema de cuantización en variedades curvas se tiene que la construcción del espacio de Fock no puede ser definido de manera única, dado que diferentes elecciones de las soluciones de frecuencia positiva, llevan a diferentes definiciones del estado de vacío, y de esta manera al espacio de Fock mismo. Esta imposibilidad de elección única del estado de vacío en la cuantización en espacio curvo constituye la diferencia más importante con el espacio de Minkowski. Pero, en el caso en el cual el espacio sea estacionario, es posible realizar una elección de un espacio de soluciones de frecuencia positiva. esto sucederá si es posible construir un vector como de tiempo ξ^μ invariante ante la métrica espaciotemporal ante una transformación infinitesimal generada por éste, de acuerdo a:

$$\delta_{\xi^\alpha} g_{\mu\nu} = 0,$$

así que los modos de frecuencia positiva u_i quedan definidos de una manera natural de la siguiente forma:

$$\xi^\mu \nabla_\mu u_j = -iw_j u_j, \qquad w_j > 0. \tag{1-20}$$

Una condición análoga a la ecuación 1-6 del espacio de Minkowski surge cuando se introduce el tiempo de Killing t, que cumple la condición $\xi^\mu \nabla_\mu t = 1$.

En un proceso de colapso gravitacional claramente el espaciotiempo no es estacionario. Y por lo tanto la posibilidad de definir modos de frecuencia positiva. Por lo tanto, el concepto minkowskiano de estados de partícula ya no es útil. Sin embargo, si esos espacios poseen regiones asintóticamente estacionarias en pasado y futuro; denominadas regiones *in* y *out*, es posible realizar una interpretación de estado de partículas.

La construcción de las soluciones exactas de la ecuación de onda, o conjunto de modos ortonormales, en todo el espacio bajo la condición que tengan frecuencias positivas respecto

al tiempo inercial en el pasado serán denominadas u_i^{in} y los correspondientes modos de frecuencia positiva en el futuro u_i^{out}. Si un campo cuántico se encuentra en un estado sin contenido de partículas en el tiempo pasado, es decir, se encuentra en el estado de vacío *in*, dado por $|in\rangle$ e interpretar los efectos sobre este del campo gravitacional no estacionario en tiempos posteriores hasta que se ha llegado a una configuración estacionaria. Este estado de vacío en la región *in* dada la no globalidad del tiempo no puede ser percibido como un estado de vacío en el espacio de Fock de la región *out*. La cuantificación de este hecho requiere la introducción del formalismo de las trasformaciones de Bogoliubov.

1.1.3. Transformaciones de Bogoliubov y producción de partículas

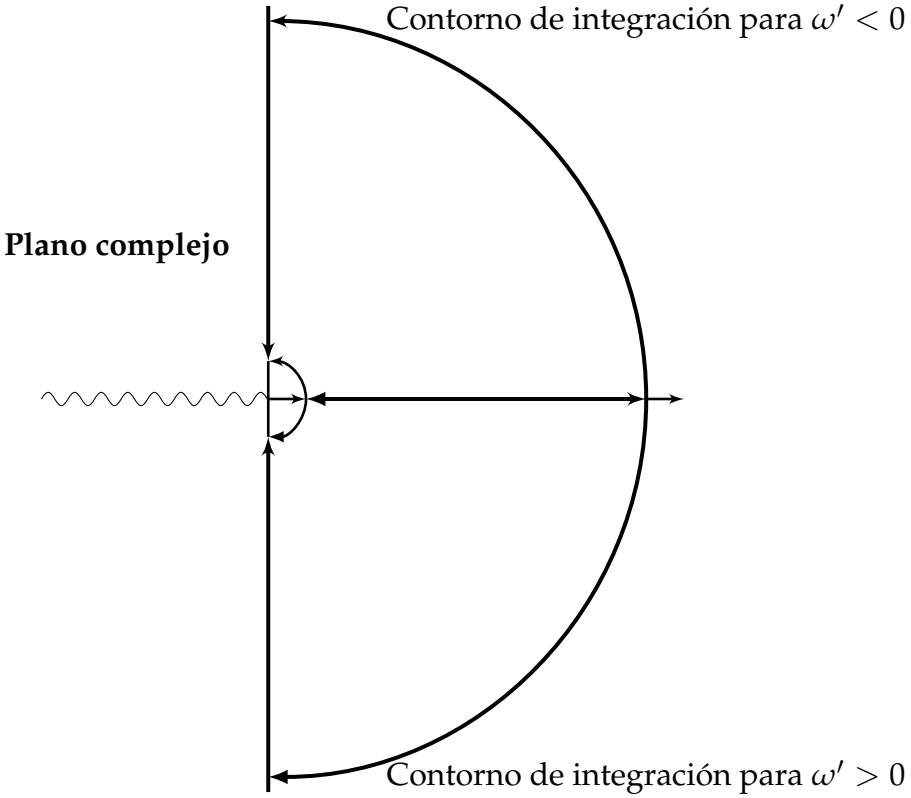

Figura **1-1**: Figura tomada de la referencia [7], donde se muestra las trayectorias y los contornos para evaluar las integrales que nos proporcionaran los coeficientes de Bogoliubov.

Si existe una región estacionaria inicial en la que es posible expandir el campo ϕ en término de los modos de frecuencia positiva u_i^{in}, este tendría en virtud de la ecuación 1-5, tendría la forma:

$$\phi = \sum_i \left[a_i^{in} u_i^{in} + a_i^{in\dagger} u_i^{in\dagger} \right]. \tag{1-21}$$

y similarmente la obtención de los modos de frecuencia positiva para la región estacionaria *out*, será:

$$\phi = \sum_i \left[a_i^{out} u_i^{out} + a_i^{out\dagger} u_i^{out\dagger}\right]. \tag{1-22}$$

Y de acuerdo a la ecuación 1-7 los modos u_i^{in} satisfarán las condiciones de ortonormalidad y las correspondientes relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción, dadas por 1-8 y 1-9:

$$\left(u_i^{in}, u_j^{in}\right) = \delta_{ij}, \quad \left(u_i^{in*}, u_j^{in*}\right) = -\delta_{ij}, \quad \left(u_i^{in}, u_j^{in*}\right) = 0, \tag{1-23}$$

$$\left[u_i^{in}, u_j^{in\dagger}\right] = \hbar\delta_{ij}, \tag{1-24}$$

$$\left[u_i^{in}, u_j^{in}\right] = 0 = \left[u_i^{in\dagger}, u_j^{in\dagger}\right] \tag{1-25}$$

Equivalentemente, para los modos de frecuencia positiva en la región futura u_i^{out}. Como el conjunto de modos forma una base completa, entonces, es posible expandir un conjunto de modos futuros u_i^{out} en término de otros, por ejemplo $u_i^{\text{out}*}$. Lo que no necesariamente está garantizado es que modos de frecuencia positiva dados en la región *out* puedan ser expandidos en término de modos de frecuencia positiva en la región *in*. Sino que en general deben tenerse situaciones de la forma:

$$u_j^{out} = \sum_i \left(\alpha_{ji} u_i^{in} + \beta_{ji} u_i^{in*}\right) \tag{1-26}$$

Las ecuaciones 1-26 son las denominadas *transformaciones de Bogoliubov* y las matrices α_{ij}, y β_{ij} corresponden a los *coeficientes de Bogoliubov*. Los cuales pueden ser determinados mediante el producto interno de Klein-Gordon actuándo sobre los modos de frecuencia positiva en las regiones pasada y futura:

$$\alpha_{ij} = \left(u_i^{out}, u_j^{in}\right), \quad \beta_{ij} = -\left(u_i^{out}, u_j^{in*}\right). \tag{1-27}$$

Otras condiciones a las que conducen las relaciones de ortonormalidad son:

$$\sum_k \left(\alpha_{ik}\alpha_{jk}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}^*\right) = \delta_{ij} \tag{1-28}$$

y

$$\sum_k \left(\alpha_{ik}\beta_{jk}^* - \beta_{ik}\alpha_{jk}\right) = 0. \tag{1-29}$$

también se puede invertir las relaciones 1-23, donde se obtiene:

$$u_i^{in} = \sum_j \left(\alpha_{ji}^* u_j^{out} + \beta_{ji} u_j^{out*}\right), \tag{1-30}$$

y usando la relación $a_i^{in} = (\phi, u_i^{in})$ y $a_i^{out} = (\phi, u_i^{out})$ se puede expandir uno de los dos conjuntos de operadores creación y destrucción en términos de los otros, de la siguiente forma

$$a_i^{in} = \sum_j \left(\alpha_{ji} a_j^{out} + \beta_{ji}^* a_j^{out\dagger}\right), \tag{1-31}$$

o

$$a_i^{out} = \sum_j \left(\alpha_{ij}^* a_j^{in} + \beta_{ij}^* a_j^{in\dagger}\right), \tag{1-32}$$

Si los coeficiente β_{ij} no se hacen cero, los estados de vacío $|in\rangle$ y $|out\rangle$, se definen

$$a_i^{in}|in\rangle = 0, \tag{1-33}$$

$$a_i^{out}|out\rangle = 0, \tag{1-34}$$

son diferentes. Esto se puede verificar, determinando el valor esperado del operador número de partículas "out", para el modo $i_{\text{ésimo}}$

$$N_i^{out} \equiv \hbar^{-1} a_i^{out\dagger} a_i^{out}, \tag{1-35}$$

En el estado $|in\rangle$

$$\begin{aligned}\langle in|N_i^{out}|in\rangle &= \hbar\langle in|a_i^{out\dagger}a_i^{out}|in\rangle \\ &= \hbar\left\langle in\middle|\sum_j\left(-\beta_{ij}a_j^{in}\right)\sum_k\left(-\beta_{ik}^* a_k^{in\dagger}\right)\middle|in\right\rangle \\ &= \sum_j |\beta_{ij}|^2\end{aligned} \tag{1-36}$$

Si algunos de los coeficientes β_{ij} son distintos de cero el contenido de partículas del estado de vacío $|\in\rangle$, con respecto al espacio de Fock "out", no es trivial. En contraste, si todos los coeficientes β_{ij} se hacen cero, la relación 1-25 queda

$$\sum_k \left(\alpha_{ik}\alpha_{jk}^*\right) = \delta_{ij} \tag{1-37}$$

Esto significa que las frecuencias positivas de los modos base u_i^{in} y u_i^{out} están caracterizadas por una transformación unitaria, con la matriz α_{ij}, y así la definición del vacío

permanece sin alterar $|in\rangle = |out\rangle$. Ahora requerimos encontrar una expresión explícita del estado $|in\rangle$ en terminos de "out" en el espacio de Fock, donde se pone actuar el operador dado por 1-28 sobre el estado $|in\rangle$, así

$$\sum_j (\alpha_{ji} a_j^{out} + \beta_{ji}^* a_j^{out\dagger}) |in\rangle = 0. \tag{1-38}$$

Las propiedades 1-28 y 1-29, garantizan la existencia de la matriz inversa a_{kj}^{-1} de los coeficientes de Bogoliubov [31], se tiene que

$$\left(a_k^{out} + \sum_{ij} \beta_{ji}^* \alpha_{ik}^{-1} a_j^{out\dagger}\right) |in\rangle = 0. \tag{1-39}$$

Definiendo la matriz simétrica V_{jk}

$$V_{jk} \equiv -\sum_i \beta_{ji}^* \alpha_{ik}^{-1}, \tag{1-40}$$

Se puede encontrar la expresión de recusibilidad del estado $|in\rangle$ en términos de V_{jk}, cuyo resultado final es:

$$|in\rangle = \langle out|in\rangle \exp\left(\frac{1}{2\hbar} \sum_{ij} V_{ij} a_i^{out\dagger} a_j^{out\dagger}\right) |out\rangle. \tag{1-41}$$

Una consecuencia inmediata de este resultado; es que la amplitud para producir un número impar de partículas se hacen cero

$$\langle 1_{j1}, 1_{j2}, \ldots, 1_{jn}|in\rangle = 0, \quad n \text{ odd}. \tag{1-42}$$

Las partículas son producidas en pares y sólo para n par, las amplitudes no son triviales. En particular, para el vacío de dos partículas las amplitudes se obtienen sólo con la matriz V_{ij},

$$\langle 1_{ji}, 1_{j2}|in\rangle = \langle out|in\rangle V_{j_1 j_2}. \tag{1-43}$$

La simetría de la matriz V_{ij} es necesaria para recuperar la compatibilidad con el teorema de la mecánica estadística para el Spín

$$\sum_{ij} |\beta_{ij}|^2 < +\infty \tag{1-44}$$

El resultado anterior muestra que el número de partículas producido por un campo gravitacional, durante la transición entre dos configuraciones estacionarias asintóticas "in", y "out"debe ser finito.

1.1.4. Radiación Hawking

A continuación se presentará la radiación Hawking en uno de los marcos mas sencillos que se puede presentar, eston con el fin de comprender las implicaciones del efecto Hawking:
Consideremos la solución más simple de las ecuaciones de Einstein que describen la formación de un agujero negro, el cual está dado por el espacio-tiempo de Vaidya cuyo elemento de línea está dado por:

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2M(v)}{r}\Big)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{1-45}$$

El hecho importante es que la masa es constante y sólo depende de la coordenada nula v, cuyo tensor energía-momento es de la forma

$$T_{vv} = \frac{L(v)}{4\pi r^2}, \tag{1-46}$$

donde

$$\frac{dM(v)}{dv} = L(v). \tag{1-47}$$

La interpretación física es que la solución describe un flujo entrante radial de radiación descrito por la función $L(v)$. Esto es una simplificación del colapso gravitacional ya que las deformaciones en realidad no son esféricas, pero es precisamente está condición la que nos permite el acercamiento más sencillo, sin la pérdida de elementos principales.
Si consideramos que el colapso inicia en un tiempo finito v_i y termina en v_f, la geometría espacio temporal contará con tres regiones: la primera será la región comprendida entre $v < v_i$, un vacío de Minkowski; la segunda $v_i < v < v_f$ un colapso intermedio y la tercera $v > v_f$, un agujero negro de Schwarzschild. Y son en las regiones tercera y primera las que se utilizará para derivar la radiación Hawking.
Ahora consideraremos una línea entrante $v = v_0$ de la forma

$$L(v) = M\delta(v - v_0), \tag{1-48}$$

que conduce a

$$M(v) = M\theta(v - v_0). \tag{1-49}$$

Consideraremos la ecuación de Klein-Gordon para el caso más simple posible

$$\Box\phi = 0 \tag{1-50}$$

y como se está considerando una simetría esférica, es posible realizar una expansión del campo ϕ mediante los armónicos esféricos Y_{lm},

$$\phi(x^\mu) = \sum_{l,m} \frac{\phi_l(t,r)}{r} Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{1-51}$$

La ecuación de Klein-Gordon para $\phi(x^\mu)$ se convierte en una ecuación de onda de dos dimensiones $\phi_l(t,r)$, por cada momento angular l con un potencial distinto de cero.
En el espacio de Minkowski, la región "in", es decir la caracterizada por $v < v_0$, se tiene:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_l(t,r) = 0, \tag{1-52}$$

Mientras que en la región de Schwarzschild "out", $v > v_0$, se cumple

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} - V_l(r) \right) \phi_l(t,r) = 0, \tag{1-53}$$

donde el potencial

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \tag{1-54}$$

Se puede observar que el potencial se hace cero cuando $r \to +\infty$ y sobre el horizonte de eventos $r = 2M$.
Aplicando la condición $l = 0$. En la región de Minkowski se tiene que

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi(t,r) = 0, \tag{1-55}$$

donde adicionalmente se debe cumplir que el campo sea cero en $r = 0$

$$\phi(t, r = 0) = 0. \tag{1-56}$$

En la región de Schwarzschild se tiene la ecuación de campo libre

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \right) \phi(t,r) = 0. \tag{1-57}$$

Se puede observar que para las soluciones de frecuencias positivas se puede asumir una dependencia temporal armónica

$$\phi(t,r) = \mathrm{e}^{-i\omega t} \phi(r) \tag{1-58}$$

Así las ecuaciones de onda se transforman en

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \omega^2 \phi(r) = 0, \tag{1-59}$$

y

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^{*2}} + \omega^2 \phi(r) = 0. \tag{1-60}$$

Las soluciones de estás ecuaciones se expresan mejor en términos de las coordenadas nulas. La métrica inicial de Minkowski puede escribirse

$$ds^2 = -du_{in}dv + r_{in}^2 d\Omega^2, \tag{1-61}$$

con

$$u_{in} = t_{in} - r_{in}, \quad v_{in} = t_{in} + r_{in}$$

Para la métrica de Schwarzschild se tiene

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r_{out}}du_{out}dv + r_{out}^2 d\Omega^2\right), \tag{1-62}$$

donde

$$u_{out} = t_{in} - r_{out}^*, \quad v = t_{out} + r_{out}^*.$$

En la siguiente sección deduciremos las relaciones entre los modos u_{out} y u_{in}.

Las soluciones de las ecuaciones de onda anteriormente descritas son: $e^{-i\omega v}$ para las ondas entrantes y $e^{-i\omega u_{out}}$ para las ondas salientes en la región de Schwarzschild.

Y $e^{-i\omega u_{in}}$ en la región de Minkowski

1.1.5. Modos entrantes y salientes

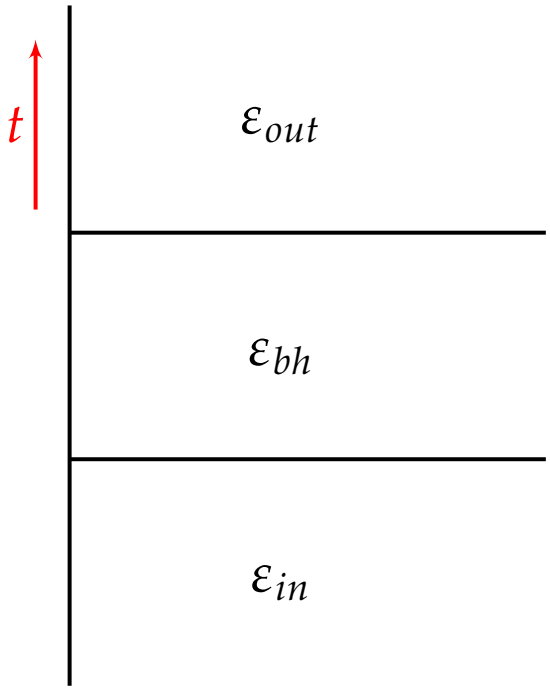

Figura **1-2**: Figura tomada de la referencia [8], donde se puede considerar el espacio tiempo asociado al proceso como la unión de tres subespacios tal que $\varepsilon = \varepsilon_{in} \cup \varepsilon_{bh} \cup \varepsilon_{out}$, donde ε_{in} y ε_{out} son estacionarios asociados al exterior del agujero negro con vacíos respectivos $|0_{in}\rangle$ y $|0_{out}\rangle$; ε_{bh} es un espacio tiempo no estacionario correspondiente al interior del agujero negro.

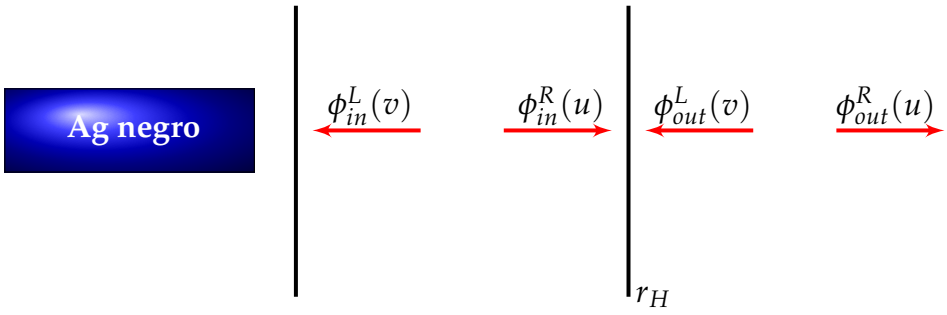

Figura **1-3**: Figura tomada de la referencia [8], donde se representan las condiciones de holomorfía (quiralidad).

Usando las transformaciones de Bogoliubov en la sección 1.1.4, se llegó a que los modos

de frecuencia positiva tienen la forma

$$u_{\omega}^{in} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega v}}{r}, \tag{1-63}$$

los cuales obedecen la condición de normalización

$$\left(u_{\omega}^{in}, u_{\omega'}^{in}\right) = -i \int_{I^-} dv\, r^2\, d\Omega \left(u_{\omega}^{in} \partial_v u_{\omega'}^{in^*} - u_{\omega'}^{in^*} \partial_v u_{\omega}^{in}\right) = \delta(\omega - \omega'). \tag{1-64}$$

Se puede definir también el espacio de Fock como I^+ asociado al parámetro de tiempo natural. El conjunto natural de los modos de frecuencias positivas, es decir

$$u_{\omega}^{out} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega u_{out}}}{r}, \tag{1-65}$$

donde se ha usado la notación *"out"*para referir a los modos y coordenadas en I^+, los cuales obedecen la condición de normalización

$$\left(u_{\omega}^{out}, u_{\omega'}^{out}\right) = -i \int_{I^+} du_{out}\, r^2\, d\Omega \left(u_{\omega}^{out} \partial_{u_{out}} u_{\omega'}^{out^*} - u_{\omega'}^{out^*} \partial_{u_{out}} u_{\omega}^{out}\right) = \delta(\omega - \omega'). \tag{1-66}$$

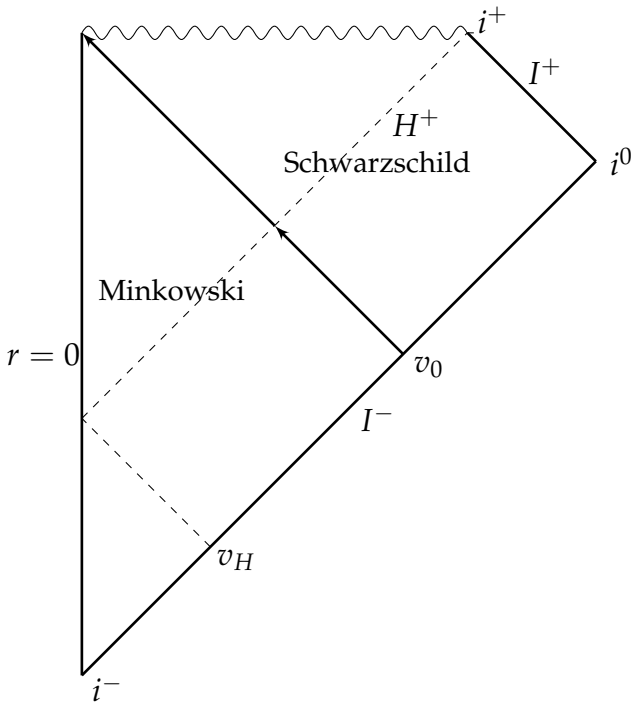

Figura **1-4**: Agujero negro de Schwarzschild producido por una onda de choque en $v = v_0$.Tomado de [7].

Aunque la región I^+ no es estrictamente una superficie de Cauchy, $I^+ \bigcup H^+$ constituye una superficie completa de Cauchy, lo que quiere decir que los modos u_ω^{out} no son completos por lo que tenemos que agregar los modos que cruzan el horizonte de eventos H^+ para construir un espacio propio de Fock "out", estos modos los denotaremos como u_ω^{int}. Ahora necesitamos encontrar una expresión para estos modos para evaluar la producción de partículas sobre I^+. Ahora evaluaremos los coeficientes de Bogoliuvob relacionando las soluciones base "inz "out":

$$\beta_{\omega\omega'} = -\left(u_\omega^{out}, u_{\omega'}^{in^*}\right) = i\int_{I^-} dv\, r^2\, d\Omega\left(u_\omega^{out}\partial_v u_{\omega'}^{in} - u_{\omega'}^{in}\partial_v u_\omega^{out}\right). \tag{1-67}$$

Se ha escogido I^- como la superficie de Cauchy para el producto escalar. Al evaluar esta integral es necesario conocer el comportamiento de los modos u_ω^{out} sobre I^-. La forma de los modos permanece sin alterar en la región del espacio tiempo de Schwarzchild. mientras que en la de Minkowski se puede determinar la forma de los modos imponiendo dos condiciones:

i. De la ecuación 1-65 se tiene que a lo largo de la línea $v = v_0$, los modos toman la forma:

$$u_\omega^{out} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}}\frac{e^{-i\omega u_{out}(u_{in})}}{r}, \tag{1-68}$$

donde[2]

$$r(v_0, u_{in}) = r(v_0, u_{out}) = \frac{v_0 - u_{in}}{2} \tag{1-69}$$

y

$$r(v_0, u_{out}) + 2Mln\left(\frac{r(v_0, u_{out})}{2M} - 1\right) = \frac{v_0 - u_{out}}{2}, \tag{1-70}$$

es decir

$$u_{out} = u_{in} - 4Mln\left(\frac{v_0 - 4M - u_{in}}{4M}\right). \tag{1-71}$$

ii. La condición de regularidad sobre $r = 0$ dada por 1-56 ofrece la forma de los modos en el espacio tiempo de Minkowski

$$u_\omega^{out} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}}\left(\frac{e^{-i\omega u_{out}(u_{in})}}{r} - \frac{e^{-i\omega u_{out}(v)}}{r}\theta(v_H - v)\right), \tag{1-72}$$

[2]El resultado $r(v_0, u_{in}) = r(v_0, u_{out}) = \frac{v_0 - u_{in}}{2}$ aparece de un análisis detallado del concepto de horizonte, desarrollo que se encuentra en la sección 2.2 de [7]

teniendo en cuenta que $u_{out}(v) = u_{out}(u_in \leftrightarrow v)$ y $v_H = v_0 - 4M$ es la ubicación del rayo nulo que formará el horizonte de eventos en $u_{out} = +\infty$ como se puede observar en la figura (1.3)

Ahora haciendo el análisis en las dos regiones límites, es decir cuando $u_{in} \to \infty$ se tiene que $u_{out}(v) \approx v$ y cuando $u_{in} \to -\infty$ implica que $u_{out}(u_{in}) \approx u_{in}$. Es decir que sobre I^-

$$u_\omega^{out} \approx \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega v}}{r}, \tag{1-73}$$

y por otro lado cuando u_{out} incrementa la situación cambia de manera muy drástica ya que $u_{out} \to +\infty (v \to v_H)$ y así se obtiene

$$u_\omega^{out} \approx -\frac{1}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{e^{-i\omega\left(v_H - 4M ln \frac{v_H - v}{4M}\right)}}{r} \theta(v_H - v). \tag{1-74}$$

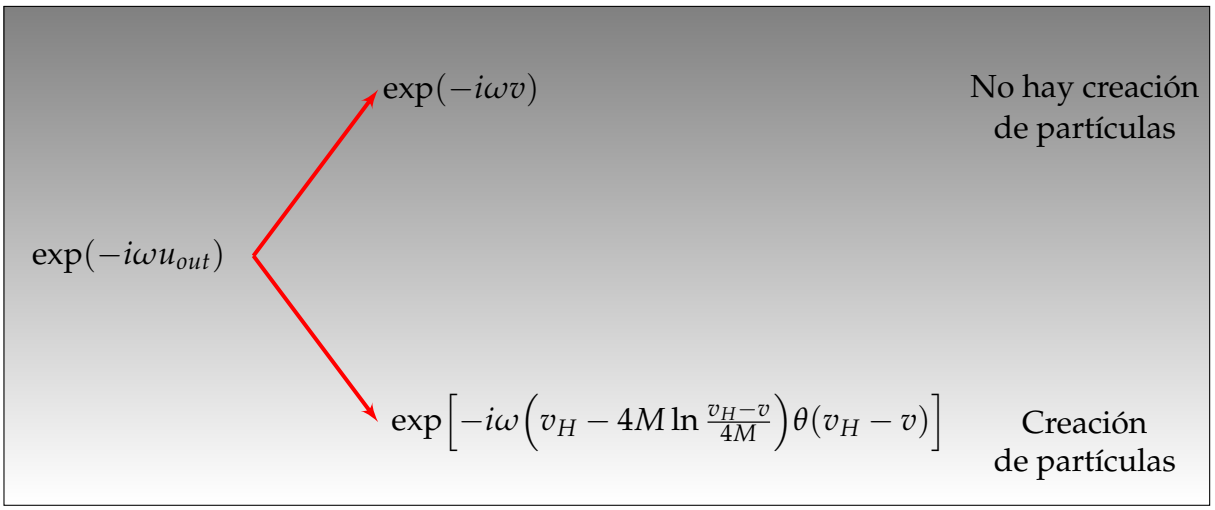

Figura **1-5**: Propagación de la onda $I_+ \to I_-$

1.1.6. El espectro de Planck

El valor esperado del número de partículas de una frecuencia emitida sobre I^+:

$$\langle in \left| N_\omega^{out} \right| in \rangle = \int_0^\infty d\omega' \left| \beta_{\omega\omega'} \right|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega_j} - 1} \tag{1-75}$$

El valor anteriormente obtenido describe una distribución Planckiana de una radiación térmica de bosones, cuya temperatura es

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M}. \tag{1-76}$$

Llamada la temperatura de Hawking de el agujero negro.[3].

[3]Este constituye el famoso y muy importante resultado encontrado por Hawking en 1975 [12], éste artículo también demuestra que el espectro obtenido es independiente de la simetría esférica y puede generalizarse a agujeros negros cargados y/o en rotación.
Para fermiones con un cálculo similar se llega a la distribución Planckiana $\langle in \left| N_{\omega}^{out} \right| in \rangle = \frac{1}{e^{8\omega_j/k_B T_H}+1}$, pero ahora con la correspondiente estadística de Fermi.

Capítulo 2

Efecto Hawking como tunelamiento cuántico en el modelo Parick-Wilczek

En el presente capítulo se presenta una derivación corta y directa de la radiación Hawking como un fenómeno de efecto túnel[1]. Para lo cual se tomará como referencia a los autores Parick y Wilczek [23] quienes propusieron una derivación semiclásica de ésta, donde la conservación de la energía total es trascendental[2], ya que la masa del agujero negro puede variar pero no la energía total; lo cual implica que el proceso de emisión no puede ser exactamente térmico debido a que un espectro de este tipo contiene un extremo de energías arbitrariamente altas y un agujero negro aislado no puede radiar mayor energía que su propia masa. Además recordemos que en la derivación de Hawking hay implícita una hipótesis y es que se asume que la masa M del agujero negro se mantiene constante en el proceso y que la métrica no juega algún papel dinámico. Por lo tanto se asumirá la hipótesis de que la pérdida es muy baja[3], es decir

$$\frac{dM}{dt} \ll M \tag{2-1}$$

[1] Hecho que ya había vislumbrado el propio Hawking como se puede observar en el capítulo anterior

[2] La conservación de la energía total la tomaron tal cual como fue definida en la teoría de Arnowit, Deser y Misner (ADM), para espacios asintóticamente planos como una integral superficial en el infinito donde $(\partial/\partial t)$ es un Killing.

[3] "De acuerdo con esta imagen, la radiación surge por un proceso similar a la creación del par electrón-positrón en un campo eléctrico constante. La idea es que la energía de la partícula cambia de signo cuando ésta cruza el horizonte, por lo que un par creado justo adentro o afuera del horizonte puede materializarse con energía total cero, después que un miembro de la pareja haya canalizado al lado opuesto.
Parick y Wilczek demostraron que este esquema se pudo utilizar para proporcionar una breve derivación semi-clásica directa de la radiación del agujero negro. En lo que sigue, la conservación de la energía juega un papel fundamental: hay que hacer una transición entre estados con la misma energía total y la masa del agujero residual debe bajar ya que irradia. De hecho, es precisamente la posibilidad de la reducción de la masa del agujero negro la que en últimas impulsa la dinámica. Esto apoya la idea de que, en la gravedad cuántica, los agujeros negros son correctamente considerados como estados altamente excitados metaestables"

Para describir dicho proceso usaron el sistema de coordenadas de Painlevé-Gullstrand el cual se comporta bien en el horizonte de sucesos y cuenta con las siguientes propiedades [4]:

i. Ninguna de las componentes de la métrica o sus inversas son singulares en el horizonte.

ii. Las rodajas de tiempo constante son planas en el espacio.

iii. Al definir el tiempo de Painlevé como $t_p = t + \chi(r)$, con $\chi(r) \to 0$, cuando $r \to \infty$. Hace que el generador de t sea un vector de Killing debido a que χ depende únicamente de r.

iv. Un observador en el infinito no distingue entre t y t_p por la condición de contorno.

Así de la métrica correspondiente a un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \tag{2-2}$$

queda la expresión

$$ds^2 = -f(r)dt_p^2 + 2f(r)\chi'(r)dt_p dr + dr^2\left(\frac{1}{f(r)} - f(r)\chi'^2(r)\right) + r^2 d\Omega^2, \tag{2-3}$$

imponiendo la condición

$$\frac{1}{f(r)} - f(r)\chi'^2(r) = 1 \tag{2-4}$$

y llamando a t_p simplemente t, por comodidad, la métrica queda

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + 2f(r)\chi'(r)dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2-5}$$

para geodésicas radiales nulas y teniendo en cuenta la condición 2-4 se tiene que:

$$\frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{1 - f(r)}, \tag{2-6}$$

correspondiendo el signo $(+)$ a las geodésicas salientes y el signo $(-)$ a las entrantes.

Teniendo en cuenta las características arriba suministradas, es necesario escoger coordenadas que a diferencia de las coordenadas de Schwarzschild, no sean singulares en el horizonte. Una opción particularmente adecuada se obtiene mediante a introducción de una coordenada temporal,

$$t = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}, \tag{2-7}$$

donde t_s es el tiempo de Schwarzschild. Con esta opción, el elemento de línea se lee

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt\, dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2-8}$$

Ahora no hay singularidad en $r = 2M$ y el verdadero carácter del espacio-tiempo, como estacionario pero no estático, es evidente[4].

Como se menciono anteriormente una de las características esenciales de estas coordenadas es que son estacionarias y no singulares a través del horizonte. Por lo tanto, es posible definir un estado de "vacío" efectivo de un campo cuántico, exigiendo que aniquile modos que llevan frecuencia negativa con respecto a t; tal estado se verá esencialmente vacío a un observador en caída libre cuando pase a través del horizonte. Este vacío difiere estrictamente del vacío estándar Unruh, definido exigiendo frecuencia positiva con respecto a la coordenada de Kruskal $U = -\sqrt{r - 2M}\, \mathrm{e}^{\left(-\frac{t_S - r}{4M}\right)}$ [32]. La diferencia, sin embargo, sólo aparece en la parte transitoria, y no afecta a la radiación en los tiempos finales.

La radiación Hawking se entiende como un proceso túnel de una partícula[5] de energía positiva ω que cruza el horizonte desde una posisción r_i hasta una posición r_f mientras que el radio desciende hasta $M - \omega$[6]. Y es precisamente está característica de conservación de la energía del sistema lo que salva una de las dificultades conceptuales del proceso Hawking: La existencia de la barrera de potencial. *"Tal barrera no preexiste. Es la propia partícula saliente la que, al provocar la contracción del horizonte, crea la barrera [21]"*.

Donde la acción está dada mediante la expresión:

$$I = \int_{r_i}^{r_f} p_r dr = \int_{r_i}^{r_f} dr \int_0^{p_r} dp_r^*, \tag{2-9}$$

siendo p_r el momento radial de la partícula y teniendo en cuenta la ecuación de Hamilton-Jacobi: $\dot{r} \equiv \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r}$, se obtiene

$$I = \int_{r_i}^{r_f} dr \int_M^{M-\omega} \frac{dH}{\dot{r}}, \tag{2-10}$$

Haciendo el cambio de variable $H = M - \omega$ y usando la ecuación de la geodésica radial 2-6 para partículas salientes $(+)$, se tiene:

$$\int_0^{\omega} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{1 - f(r)}} (-d\omega^*). \tag{2-11}$$

[4]Estas coordenadas las introdujo por primera vez Painlevé [4].
[5]Se hace la suposición de que el agujero no tiene masa ni momento angular.
[6]En un agujero negro la masa y el radio están relacionados.

Como $r_i > r_H > r_f$ y $f(r_H) = 0$, la integral 2-11 es compleja y asumiendo que la parte imaginaria de la acción puede ser atribuida completamente al residuo del polo, se calcula tomando $r - r_H = \varepsilon e^{i\theta}$. Por ejemplo, para el agujero negro de Schwarzchild con $f(r) = 1 - \left(\frac{2(M-\omega)}{r}\right)$, ya que se toma en cuenta la auto-gravitación de la partícula, cuando la masa del agujero negro queda fija y se permite que la masa ADM total varíe, luego una capa de energía ω se mueve en las geodésicas de un espacio-tiempo con M reemplazado por $M \to M - \omega$.

Puesto que la longitud de onda de la radiación es del orden del tamaño del agujero negro, se puede dudar de si la descripción de una partícula puntual es apropiada. Sin embargo, cuando la onda de salida se remonta hacia el horizonte, su longitud de onda, medida por observadores fiduciales locales, está cada vez más desplazada al azul. Cerca al horizonte, el número de onda radial tiende a infinito y la aproximación de la partícula puntual, o WKB, se justifica.

La parte imaginaria de la acción de una partícula de energía positiva saliente de una onda-s que cruza el horizonte hacia el exterior de r_{in} a r_{out} puede ser expresada como

$$Im\, S = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp_r' dr. \tag{2-12}$$

Sorprendentemente, esto puede ser evaluado sin entrar en los detalles de la solución, como sigue.
Multiplicamos y dividimos el integrando por los dos lados de la ecuación de Hamilton $\dot{r} = +\frac{dH}{dp_r}\big|_r$, cambiar la variable del momento a la energía, y cambiar el orden de integración para obtener

$$Im\, S = Im \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = Im \int_0^{+\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} (-d\omega'), \tag{2-13}$$

donde hemos usado la ecuación 2.2 modificada y el signo menos aparece porque $H = M - \omega'$.

Y es así que la integral 2-11 queda para la parte imaginaria, usando el teorema de So-

khotski–Plemelj del análisis complejo[7] así,

$$\mathcal{I}m\left(\int_0^{\omega}\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{1-\sqrt{1-f(r)}}(-d\omega^*)\right)=\int_0^{\omega}\int_{r_f}^{r_i}\frac{dr}{1-\sqrt{\frac{2(M-\omega^*)}{r}}\pm i\epsilon}(d\omega^*)$$

Haciendo la sustitución $r=\sigma^2$

$$\int_0^{\omega}d\omega^*\int_{\sigma_f^2}^{\sigma_i^2}\frac{2\sigma^2}{\sigma-\sqrt{\frac{2(M-\omega^*)}{r}}\pm i\epsilon}d\sigma$$

Cuando $\varepsilon\to 0$, la integral se realiza mediante la deformación del contorno, a fin de garantizar que las soluciones de energía positiva decaigan en el tiempo (esto es, en el semi plano inferior ω').

$$\int_0^{\omega}d\omega^*\int_0^{\pi}id\theta 2\left(\sqrt{2(M-\omega)}+\varepsilon\mathbf{e}^{i\theta}\right)^2=\int_0^{\omega}d\omega^*4\pi(M-\omega^*)=4\pi\omega\left(M-\frac{\omega}{2}\right)\tag{2-14}$$

Ya obtenido el valor de la parte imaginaria de la acción, la relacionamos con la tasa de emisión semicásica, desarrollo realizado en el apéndice A.

$$\Gamma\sim \mathrm{e}^{-2\,\mathcal{I}m\,\mathrm{S}}=\mathrm{e}^{-8\pi\left(M\omega-\frac{\omega^2}{2}\right)}=\mathrm{e}^{+\Delta S_{B-H}}\tag{2-15}$$

donde se ha expresado el resultado en términos del cambio de la entropia Bekenstein-Hawking S_{B-H} del agujero.

Cuando el término cuadrático no es tenido en cuenta, la ecuación 2-15 se reduce a un factor de Boltzmann para una partícula con energía ω en la temperatura de Hawking inversa

[7] Éste teorema establece que [20]:
Si consideramos el conjunto de funciones

$$a_\varepsilon(x)\equiv\frac{1}{x+i\varepsilon},\quad \epsilon>0,$$

cuando $\varepsilon\to 0$, las funciones a_ε convergen puntualmente a $\frac{1}{x}$ excepto cuando $x=0$. La fórmula de Sokhotski, en el sentido distribucional, es el límite

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x+i\varepsilon}=-i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Está fórmula se obtiene de la integración $a_\varepsilon f(x)$ donde $f(x)$ es una función continua arbitraria.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^b\frac{f(x)}{x\pm i\varepsilon}dx=\mp i\pi f(0)+\mathcal{P}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$$

$8\pi M$. La corrección ω^2 surge de la física de la conservación de la energía, la cual eleva autoconsistentemente la temperatura efectiva del agujero ya que irradia. Este resultado naturalmente debe ser correcto y puede verse por motivos físicos teniendo en cuenta el límite en el que la partícula emitida se lleva toda la masa y la carga del agujero negro (correspondiente a la transmutación del agujero negro en una capa de salida). Sólo puede haber uno de esos estados de salida. Por otra parte, hay en total $\exp(S_{B-H})$ estados. Y es usando la mecánica estadística que se puede afirmar que la probabilidad de encontrar una capa que contenga toda la masa del agujero negro es proporcional a $\exp(-S_{B-H})$.

Siguiendo argumentos estándar, al retirar de la ecuación 2-15, el término cuadrático; se llega al flujo espectral de Planck con una temperatura inversa de $8\pi M$:

$$\rho(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|T(\omega)|^2}{e^{+8\pi M\omega} - 1}, \tag{2-16}$$

donde $|T(\omega)|^2$ es el coeficiente de transmisión dependiente de la frecuencia para que la partícula saliente alcance un futuro infinito sin retrodispersión.

2.1. Radiación proveniente de un agujero negro de Reissner-Nordström

A continuación el desarrollo anterior será aplicado a la emisión de un agujero negro cargado. Aunque se debe tener en cuenta que cuando la radiación saliente se lleva la carga del agujero negro, los cálculos se complican debido a que se debe tener en cuenta las fuerzas electromagnéticas. Aquí se realizará la radiación sin carga proveniente de un agujero negro de Reissner-Nordström, el cual debe satisfacer la condición de que su tensor métrico esféricamente simétrico se reduzca a Schwarschild cuando la carga sea cero, es decir: $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$[8].
La deducción procede entonces de una manera similar a la obtenida en la sección anterior, partiendo de las ecuaciones 2-3 y 2-4, el elemento de línea de Painlevé queda

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dt\, dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2-17}$$

la cual es obtenida del elemento de línea estándar de Reissner-Nordström mediante la

[8]Para observar la deducción detallada de dicha función se recomienda ver las notas de clase de Agujeros negros clásicos del profesor Eduard Alexis Larrañaga de la Universidad Nacional de Colombia.

transformación de coordenadas

$$t = t_r + 2\sqrt{2Mr - Q^2} + M \ln\left(\frac{r - \sqrt{2Mr - Q^2}}{r + \sqrt{2Mr - Q^2}}\right) + \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}\sqrt{2Mr - Q^2}}{Mr}\right), \tag{2-18}$$

donde t_r es la coordenada de tiempo de Reissner. El elemento de línea ahora muestra de forma explícita el carácter estacionario mas no estático y no singular del espacio-tiempo.

La ecuación del movimiento de una partícula saliente sin masa es

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = +1 - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}, \tag{2-19}$$

con $M \to M - \omega$ cuando se incluye la autogravitación. La parte imaginaria de la acción para una partícula saliente de energía positiva es

$$\mathcal{I}m\, S = \mathcal{I}m \int_0^{+\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}} (-d\omega'), \tag{2-20}$$

la cual es de nuevo evaluada deformando el contorno de acuerdo con la prescripción de Feynman $\omega' \to \omega' - i\epsilon$. El residuo en el polo puede verse de mejor manera mediante la sustitución $u \equiv \sqrt{2(M - \omega')r - Q^2}$. la cual produce una velocidad de emisión de

$$\Gamma \sim e^{-2\mathcal{I}m\, S} = e^{-4\pi\left(2\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right) - (M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2 - Q^2} + M\sqrt{M^2 - Q^2}\right)} = e^{+\Delta S_{B-H}}. \tag{2-21}$$

Para primer orden en ω, la ecuación 2-21 es consistente con el resultado de Hawking de emisión térmica a la temperatura de Hawking, T_H, para un agujero negro cargado

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}. \tag{2-22}$$

De nuevo, la conservación de la energía implica que el resultado exacto tiene correcciones de orden más grande en ω; todas estas pueden ser recogidos para expresar la velocidad de emisión como el exponente de la variación de entropía. Además, dado que la velocidad de emisión tiene que ser real, la presencia de la primera raiz cuadrada en la ecuación 2-21 asegura que la radiación más allá de las extremalidad no es posible. A diferencia de las fórmulas tradicionales, la tercera ley de la termodinámica de los agujeros negros está acá manifiestamente forzada.[9]

[9] Tercera Ley: la gravedad de superficie no se anula, es decir no es posible, mediante procesos físicos finitos, alcanzar un agujero negro extremo, para el cual la gravedad superficial sea cero.

Note que solamente la física local ha estado presente en nuestras deducciones. No había ni una apelación a la Euclidenización ni ninguna necesidad de invocar una fase de colapso explícito. La asimetría del tiempo que conduce a la radiación saliente surgió en lugar del uso de la prescripción "normal" de deformación del contorno local en términos de la coordenada no estática t.

El cálculo presentado antes es formalmente independiente pero hay una discusión adicional con el fin de aclarar su significado físico y disipar un rompecabezas que plantea. Cuando se considera en el nivel más amplio, la radiación de la masa de un agujero negro se asemeja a un túnel de carga eléctrica de una esfera conductora cargada. Tras un momento de reflexión, sin embargo, la diferencia en la física de las dos situaciones parece tan sorprendente como plantear un rompecabezas. Porque mientras la fuerza eléctrica entre cargas iguales es repulsiva, la fuerza gravitatoria es siempre atractiva. En relación con esto, la energía del campo de los campos eléctricos es positiva, mientras que (heurísticamente) la energía del campo de campos gravitacionales es negativa. Sobre esta base, se podría pensar que el proceso eléctrico debe proceder de forma espontánea, y no tiene por qué requerir un túnel, mientras que el proceso gravitacional no tiene ninguna razón evidente para proceder en absoluto.
Considere una esfera conductora de radio R que lleva carga Q. La energía del campo eléctrico se puede reducir mediante la emisión de una carga q, por lo que esperamos que este proceso ocurra espontáneamente. Si dejamos de lado la reacción inversa de la carga q en la esfera conductora, la fuerza es repulsiva en todas las distancias y no hay barrera de emisión. En un tratamiento más preciso, sin embargo, debemos tener en cuenta la falta de uniformidad de la carga inducida en la esfera, que se realiza fácilmente utilizando el método de las imágenes. El potencial efectivo es

$$V(r) = q\left(\frac{Q-q}{q} - \frac{qR}{r^2-R^2}\right), \tag{2-23}$$

donde consideramos configuraciones de carga imagen que dejan el potencial de la esfera constante y el campo fijo en el infinito. En el límite formal $Q >> q$ el primer término domina, y el potencial decrece monótonamente con r, indicando que no hay barrera. Sin embargo, el segundo término crece monótonamente con r, y siempre domina para $r \to R$, produciendo una barrera. En el problema gravitacional, la situación es a la inversa. Con la reacción inversa de lado, no hay nada sino barrera. Sin embargo, nuestro cálculo incluyendo la reacción inversa indica la posibilidad de redistribuir la masa-energía de la esfera que gravita (agujero negro) en la energía cinética de la radiación emitida. Puesto que la energía intrínseca del campo gravitatorio es negativa, es desventajoso para reducirla, punto por punto. Sin embargo, ya que en general el espacio-tiempo que contiene un agujero negro no es globalmente estático, existen modos de difusión libre de energía negativa dentro del horizonte que hacen que el agujero negro se encoja. Como consecuencia, el radio del agujero negro disminuye y el volumen exterior del espacio, en el que uno

integra el campo, aumenta.

2.2. Resultados de Parick-Wilczek

Ellos dedujeron que el proceso de radiación quedaria establecido de la siguiente forma[10]: *"Como es posible apreciar la ecuación 2-21 la partícula no puede propagarse clásicamente dentro y fuera del horizonte del agujero a causa de la barrera de potencial que se manifiesta como un polo en el momento para $r = r_H$. Sin embargo, cuánticamente es posible atravesar la barrera por efecto túnel y unir las trayectorias interior y exterior al horizonteen el plano complejo r rodenado la singularidad asociada a r_H. Esto añade una parte imaginaria a la acción (ver ecuación 2-14) que se interpreta como la responsable del proceso túnel de dentro afuera del horizonte."*.

Ellos argumentan que su derivación están dentro de los parámetros físicos establecidos en las nociones de la radiación del agujero negro, dónde tienen en cuenta las leyes de conservación global, argumento que los lleva a una modificación del espectro fuera de la "termalidad". Es de anotar que la fórmula corregida que ellos dedujeron presenta casos límite físicamente razonables y cuando no hay "termalidad" este desarrollo sugiere la posibilidad de correlaciones que transportan información en la radiación.

[10] Ver [23]

Capítulo 3

Tunelamiento cuántico en reacciones termonucleares y nucleosíntesis

La gran mayoría de elementos químicos presentes en el universo surgen de complejos procesos de fusión nuclear llevada a cabo en el interior de las estrellas. Esto sucede por medio del proceso de nucleosíntesis estelar en la cual los elementos primordiales H y He son transformados en otros más complejos.

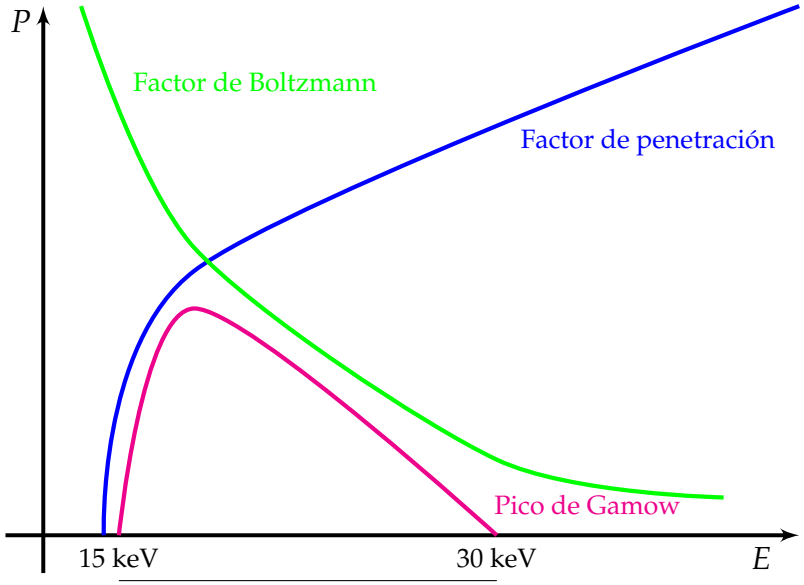

Figura **3-1**: *Curva de Gamow representada junto con los dos factores que lo forman. La mayor parte de las reacciones nucleares se dan en la región de máxima eficiencia* $(15 - 30\ keV)$*, sin embargo, la energía típica estelar es de* $1\ keV$*. En el eje y se encuentra la probabilidad.*

3.1. Factor de Gamow[1]

Para que una reacción nuclear tenga lugar se hace necesario que las partículas involucradas posean velocidades relativas suficientemente grandes, con tal que sea posible superar la barrera de potencial de Coulomb generada por los núcleos dotados de carga positiva. Llevando a que dicha penetración se dé con una muy alta probabilidad.

Esta descripción de la interacción entre dos núcleos cuyo momentum angular orbital sea l tiene la forma siguiente al considerar una simetría radial para el potencial

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\psi_l(r)+\left[\frac{l\,(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}+V(r)\right]\psi_l(r)=E\psi_l(r) \tag{3-5}$$

donde $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$,

[1] Se llama pico de Gamow (Gamow peak en inglés) al óptimo de energía en el cual se dan la mayoría de las reacciones nucleares en las estrellas. Su fórmula fue calculada por George Gamow en 1928. Las reacciones de fusión acaecidas en los núcleos de las estrellas se dan gracias al efecto túnel, fenómeno que permite a las partículas en colisión saltarse las fuertes barreras de potencial que las separan. El pico se produce como resultado de la combinación de dos factores. Por un lado el factor mecánico estadístico maxwelliano o factor de Boltzmann. Éste nos da la probabilidad de que una partícula que se encuentre a una temperatura T tenga una energía E. Lógicamente, la probabilidad disminuye cuanto mayor sea la energía. Por el otro lado está el factor de penetración de la barrera coulombiana.
Donde los factores están dados por:

i. **Factor de Boltzmann**:

$$\exp\left(\frac{E}{-kT}\right) \tag{3-1}$$

Con k la constante de Boltzmann, E la energía y T la temperatura.

ii. **Factor de penetración**:

$$\exp\left(\frac{-b}{\sqrt{E}}\right) \tag{3-2}$$

Donde b es un parámetro que resulta de la interacción entre las dos partículas, así

$$b=\pi(2m)^{1/2}\frac{Z_a Z_x e^2}{\hbar} \tag{3-3}$$

iii. **Factor de Gamow**:

$$\exp\left(-\frac{E}{kT}-\frac{b}{\sqrt{E}}\right) \tag{3-4}$$

La altura del pico de Gamow es muy sensible a la temperatura. Pequeños aumentos de esta provocan grandes aumentos en la probabilidad de fusión.

siendo μ la masa reducida del sistema de dos núcleos. La cual es soluble analíticamente si se considera una función radial de la forma $\psi_l(r) = \chi_l(r)/r$, lo que lleva a que la ecuación 3-5 tenga la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\chi_l}{dr^2} + \left[\frac{l\,(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E\right]\chi_l(r) = 0 \tag{3-6}$$

Al considerar como sistema de estudio el interior de una estrella, en la cual sus núcleos interactuantes pueden ser analizados como sistemas con momento angular orbital $l = 0$, debido a su baja energía. Es posible reducir la expresión dada por la ecuación 3-6 de manera que:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + [V(r) - E]\,\chi(r) = 0 \tag{3-7}$$

Si se tiene en cuenta una solución para 3-7 que satisfaga una dependencia radial para el potencial. Una posible forma funcional sería:

$$\chi(r) = Ae^{i\phi(r)/\hbar}. \tag{3-8}$$

Por lo tanto al efectuar la sustitución de $\chi(r)$ se llega a:

$$i\hbar\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} - \left(\frac{d\phi(r)}{dr}\right)^2 + 2\mu\,[E - V(r)] = 0 \tag{3-9}$$

El término que involucra la segunda derivada de la solución puede asumirse bastante pequeño y por lo tanto despreciable así que la ecuación 3-9 será soluble para una función $\phi(r)$ de la forma:

$$\phi(r) = \pm\,(2\mu)^{1/2}\int_{r_0}^{r}\left[E - V(r')\right]^{1/2}dr'. \tag{3-10}$$

Y al considerar un potencial radial tipo Coulomb, para ciertos núcleos interactuantes con un número de protones dado por Z_1 y Z_2 respectivamente, que tiene una expresión:

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \tag{3-11}$$

Para tal potencial se cumple que un punto de retorno corresponde a la distancia r_1 entre los dos núcleos a la cual se tiene que $E = V(r_1)$. Si se consideran distancias radiales tales que $r < r_1$; el integrando en la función $\phi(r)$ es real. Si $r > r_1$ éste es complejo. Y para puntos en los que $r \approx r_1$ la solución de la ecuación de Schrödinger no es válida.

En virtud de que la amplitud de probabilidad corresponde a la norma cuadrada de una función de onda. Al considerar a $\chi(r)$ como una función de onda normalizada en todo el espacio. $\chi^*(r)\chi(r)$ será la probabilidad por unidad de distancia radial de encontrar al núcleo a una distancia r. Para que la solución a la ecuación 3-7 sea físicamente razonable ésta deberá ser decreciente para todas las distancias del orden del radio nuclear. Para las cuales se hace efectiva la fuerza nuclear atractiva. Si se denomina tal distancia r_0. Se define el factor de penetración $P_l(E)$ entre $r = r_0$ y alguna distancia r'. Estará dado en términos de la amplitud de probabilidad por:

$$P_l(E) = \frac{\chi^*(r_0)\chi(r_0)}{\chi^*(r')\chi(r')}, \tag{3-12}$$

por lo tanto de acuerdo con las ecuaciones 3-9 y 3-10, para la solución positiva en 3-10, éste variará según:

$$exp\left(-2\int_{r_0}^{r'}\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)\right]^{1/2}dr\right) \tag{3-13}$$

En los núcleos de baja energía se cumple que el alcance máximo del potencial nuclear es mucho menor que la distancia que satisface $E = V(r_1)$. Así que si se consideran las condicioners $r_0 = 0$ y $r' < r_1$. La expresión 3-13 lleva a que:

$$\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\int_0^{r'}(r_1 - r)^{1/2}\, r^{-1/2}dr, \tag{3-14}$$

para cierta distancia r_1 dada de acuerdo al potencial de Coulomb, es decir:

$$r_1 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}.$$

Ahora, si se realiza una elección de r' tal que se encuentre suficientemente cercana al punto de retorno r_1. Al efectuar la integración de la ecuación 3-14 se obtiene:

$$\frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}\frac{\pi}{2} = \pi\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \tag{3-15}$$

Y por lo tanto al sustituir 3-15 en 3-13 se tiene por lo tanto que el factor de penetración es proporcional a:

$$exp\left[-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right], \tag{3-16}$$

denominado factor de Gamow.

Considerar el movimiento relativo entre los nucleos interactuantes y sus respectivas velocidades respecto al sistema de referencia del centro de masas en una reacción nuclear permite el cálculo de su sección transversal σ y corresponde a la expresión:

$$\sigma = \frac{\text{número de reacciones } s^{-1}}{\text{número de partículas incidentes } cm^{-2}s^{-1}} \tag{3-17}$$

Si la densidad de éstos está dada por números n_1 y n_2 respectivamente. Y la velocidad relativa al centro de masas es v. Entonces, el número de reacciones por centímetro cúbico cada segundo estará dada por:

$$r = n_1 n_2 v\sigma(v). \tag{3-18}$$

Además si los núcleos son idénticos y considerados como partículas de espín cero o entero, se tiene que la velocidad de reacción corresponde a

$$r = \frac{n_1^2}{2} v\sigma(v). \tag{3-19}$$

o en el caso de partículas de espín semientero:

$$r = \frac{n_1^2}{8} v\sigma(v). \tag{3-20}$$

El coeficiente $1/2$ en el primer caso hace referencia al hecho de que el conteo de pares de núcleos se realiza dos veces. Para el otro caso el factor $1/8$ se debe a que ante cambios de coordenadas de posición y espín la función de onda total es simétrica y antisimétrica respectivamente. Lo que llevará a una probabilidad alta de acercamiento de los núcleos en el rango de distancias comprendido en la interacción fuerte. Siendo 1 la degeneración del espín antisimétrico $S = 0$ y 3 la del espín antisimétrico $S = 1$ aparece un factor multiplicativo de $1/4$ respecto al $1/2$ del caso de espín cero o entero cuyo producto lleva al $1/8$ antedicho en la ecuación 3-19.

Si se describe la distribución de velocidades de los núcleos de los átomos presentes en el interior de las estrellas por medio de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Los dos núcleos interactuantes con densidades n_1, n_2 y velocidades v_1 y v_2 respectivamente. Entonces el producto de los numeros de densidad y los diferenciales de volumen del espacio de velocidades de cada una de ellas está dado por:

$$\begin{aligned}
&n_1(v_1)dv_{1x}dv_{1y}dv_{1z}n_2(v_2)dv_{2x}dv_{2y}dv_{2z} \\
&= n_1\left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}} dv_{1x}dv_{1y}dv_{1z} n_2 \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} dv_{2x}dv_{2y}dv_{2z} \\
&= n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} e^{-\left(\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT}\right)} d^3v_1 d^3v_2
\end{aligned} \tag{3-21}$$

Si se tiene una velocidad de centro de masa V y una velocidad relativa a los dos núcleos interactuantes $v = v_2 - v_1$. Entonces se tiene que:

$$v_1 = V - \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \tag{3-22}$$

$$v_2 = V + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \tag{3-23}$$

Al sustituir las expresiones 3-22 y 3-23 en 3-21:

$$n_1(v_1) d^3 v_1 n_2(v_2) d^3 v_2 = n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k T)^3} e^{-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2kT} - \frac{\mu v^2}{2kT}} d^3 v_1 d^3 v_2. \tag{3-24}$$

Además la transformación de coordenadas entre los espacios de velocidades de v_1 y v_2 y las velocidades V y v a través de:

$$d^3 v_1 d^3 v_2 = J_x J_y J_z d^3 V d^3 v \tag{3-25}$$

Siendo los respectivos Jacobianos dados por:

$$J_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_{1x}}{\partial V_x} & \frac{\partial v_{1x}}{\partial v_x} \\ \frac{\partial v_{2x}}{\partial V_x} & \frac{\partial v_{2x}}{\partial v_x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & \frac{m_1}{m_1+m_2} \end{vmatrix} = 1 = J_y = J_z \tag{3-26}$$

La ecuación 3-21 queda:

$$n_1 n_2 \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2kT}} d^3 V \right] \left[\left(\frac{\mu}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} d^3 v \right]. \tag{3-27}$$

Teniendo en cuenta que el primer término en 3-27 es igual a 1 y en virtud de la ecuación 3-19 para núcleos distinguibles, se tiene que la velocidad de reacción es:

$$r = n_1 n_2 \int v \sigma(v) \left(\frac{\mu}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} d^3 v \tag{3-28}$$

Al considerar una función de variación lenta dependiente de la energía en la secci'on transversal σ de tal manera que exista un término exponencial que corresponda al factor de penetración de la barrera. Es posible expresar a dicha sección como

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}}, \tag{3-29}$$

y si se tiene en cuenta que $v = \sqrt{2E/\mu}$, entonces

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-bE^{-1/2}}, \tag{3-30}$$

en virtud de que:

$$b = \frac{\pi\sqrt{2\mu} Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \tag{3-31}$$

Si se plantea una distribución de Maxwell-Boltzmann de velocidades como función de la energía E se tiene que

$$f(v)4\pi v^2 dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2} e^{-E/kT}}{(kT)^{3/2}} dE. \tag{3-32}$$

Por lo tanto para tener explícitamente la velocidad de reacción de cada pareja de núcleos, al combinar las ecuaciones 3-29, 3-30 y 3-32 llevan a que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \langle \sigma v \rangle \\ &= \int_0^\infty \sigma(E) v f(v) 4\pi v^2 dv \\ &= \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) e^{\left(-E/kT - bE^{-1/2}\right)} dE. \end{aligned} \tag{3-33}$$

Para determinar el valor máximo del argumento de la exponencial presente en la ecuación 3-33 es necesario considerar el hecho de que:

$$\frac{d}{dE}\left(E/kT + bE^{-1/2}\right) = \frac{1}{kT} - \frac{b}{2} E_0^{-3/2} = 0. \tag{3-34}$$

Por lo tanto el argumento de la exponencial será máximo si:

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3} = 1.22 \left(Z_1^2 Z_2^2 \mu T_6^2 / m_\mu\right)^{1/3} keV, \tag{3-35}$$

para lo que se ha tenido en cuenta que $T_6 = T/10^6$ y el valor de b dado por 3-31

La función exponencial en el integrando de la ecuación 3-35 puede ser aproximado por una distribución gaussiana, teniendo en cuenta el hecho de que está formada como el producto de dos exponenciales, una creciente y una decreciente rápidamente como función

de la energía. Denominándola $f_1(E)$, la cual posee derivadas de primer y segundo orden en $E = E_0$ iguales a la gaussiana:

$$f_1 = e^{-E/kT - bE^{-1/2}} \tag{3-36}$$

$$f_1(E) = e^{-E/kT - bE^{-1/2}} \backsimeq Ce^{-\left[\frac{E-E_0}{\Delta/2}\right]^2} = f_2(E). \tag{3-37}$$

Si se plantea la condición de que $f_1(E_0) = f_2(E_0)$ y al tener en cuenta las 3-35 y 3-37, entonces se llega a que:

$$C = e^{-E_0/kT - bE_0^{-1/2}} = e^{-3E_0/kT}. \tag{3-38}$$

Al realizar las derivadas de primer y segundo orden para las funciones $f_1(E)$ y $f_2(E)$ en $E = E_0$ evaluadas en $E = E_0$, se tiene que:

$$\frac{d^2 f_1(E_0)}{dE^2} = -(3/4)bE_0^{-5/2} f_1(E_0) \tag{3-39}$$

y

$$\frac{d^2 f_2(E_0)}{dE^2} = -\frac{2f_2(E_0)}{(\Delta/2)^2}. \tag{3-40}$$

y en virtud de que $f_1(E_0) = f_2(E_0)$, entonces:

$$\frac{3b}{4}E_0^{-5/2} = \frac{2}{(\Delta/2)^2} \tag{3-41}$$

Y a partir de 3-35 y 3-41:

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{kTE_0}. \tag{3-42}$$

Al sustituir 3-35, 3-37 y 3-42 en 3-33. Se determina la velocidad de reacción por par de núcleos:

$$\lambda = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-3E_0/kT} S(E_0) \int e^{-\left[\frac{E-E_0}{\Delta/2}\right]^2} dE. \tag{3-43}$$

Al realizar una sustitución en la exponencial dada por la ecuación 3-43 de la forma

$$y = (E - E_0)/(\Delta/2)$$

$$\lambda = \left(\frac{2}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} e^{-3E_0/kT} S(E_0) \int_{-2E_0/\Delta}^{\infty} e^{-y^2} dy. \tag{3-44}$$

En dicha integral el límite inferior puede ser sustituido por $-\infty$ dado que se satisface la condición de que $2E_0/\Delta >> 1$. Con lo que la ecuación 3-44 que corresponde a una integral gaussiana que posee un valor de $\sqrt{\pi}$. Lo que lleva a que la velocidad de reacción por par de núcleos sea:

$$\lambda = \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\Delta e^{-3E_0/kT}}{(kT)^{3/2}} S(E_0) \tag{3-45}$$

Es más cómodo renombrar el argumento de la exponencial como una variable τ, para que la ecuación 3-42 para delta presente la forma siguiente:

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{kTE_0} = \frac{4}{3} \tau^{1/2} kT \tag{3-46}$$

con lo que kT estará dado por:

$$(kT)^{3/2} = \left(\frac{3E_0}{\tau}\right)^{3/2} \tag{3-47}$$

Es así que al combinar 3-46 y 3-47 se observa que:

$$\frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} = \frac{4\tau^2}{3^{5/2}} \frac{kT}{E_0^{3/2}} = \frac{\tau^2}{3^{5/2} b} \tag{3-48}$$

La igualdad final en 3-48 se tiene porque $E_0^{3/2} = 4bkT$. La ecuación 3-48 implica qe la ecuación 3-45 puede ser expresada como

$$\lambda = \frac{1}{3^{5/2}} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\tau^2}{b} S(E_0) e^{-\tau}, \tag{3-49}$$

Así que finalmente al sustituir en teniendo en cuenta 3-31. se tiene que τ está dado por:

$$\tau = 3E_0/kT = 42.46 \left(Z_1^2 Z_2^2 \mu / m_\mu T_6\right)^{1/3}$$

Es así que finalmente la sección eficaz sin considerar la interacción coulombiana relaciona el factor de penetración $P_t(E)$ dado por 3-12 y la sección nuclear $\sigma_n(E)$. Tal interacción involucra el hecho de que se asume que existe un gas de electrones rodeando al los núcleos de los átomos localizados en el interior de las estrellas. En el caso en el cual el valor kT sea mayor que la energía promedio coulombiana. Entonces

$$V_c = \frac{Z_1 e}{r} e^{-r/\lambda_D} \tag{3-50}$$

para lo cual se ha empleado el valor de λ_D igual al radio de Debye. Al realizar una expansión de la exponencial anterior se llega a que:

$$V_c = \frac{Z_1 e}{r} - \frac{Z_1 e}{\lambda_D}. \tag{3-51}$$

Así que la velocidad de reacciones termonucleares posee un incremento dado por la expresión, en virtud de 3-33

$$f = exp\left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{kT\lambda_D}\right]. \tag{3-52}$$

3.2. El factor de penetración

3.2.1. La aproximación WKB

Si la función ϕ presente en la exponencial de la ecuación 3-8 es expandida en forma de potencias de $\hbar$ a primer orden tiene una expresión dada por:

$$\phi(r) = \phi_0(r) + \hbar\phi_1(r). \tag{3-53}$$

Al sustituir y comparar por potencias, de acuerdo a su valor dado por 3-9 se tiene que:

$$-\left(\frac{d\phi_0}{dr}\right)^2 + 2\mu(E - V(r)) = 0, \tag{3-54}$$

es decir:

$$i\frac{d^2\phi_0}{dr^2} - 2\mu\frac{d\phi_0}{dr}\frac{d\phi_1}{dr} = 0 \tag{3-55}$$

Con lo cual luego de integrar se llega a que:

$$\phi_0(r) = \pm\int_{r_0}^{r} f(r')dr' \tag{3-56}$$

y

$$\phi_1(r) = \frac{i}{2} \ln f(r) \tag{3-57}$$

teniéndose en cuenta el hecho de que para el potencial de Coulomb $V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ las funciones solución de 3-55, ϕ_0 y ϕ_1 no satisfacen la ecuación en el punto de retorno r_1 para la solución:

$$f(r) = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{1/2} \Big(E - V(r)\Big)^{1/2} \tag{3-58}$$

es decir para la condición de energía $E = V(r_1)$. Solamente se tiene que para distancias en las cuales el potencial es estrictamente menor que la energía. Entonces, la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger dada por la ecuación 3-8 tiene la forma:

$$\chi(r) = A \frac{\exp\left(\pm i \int^r f(r')dr'\right)}{f(r)^{1/2}}. \tag{3-59}$$

Para el caso contrario, en el cual la distancia radial es tal que se cumple el hecho de que $V(r) > E$. Entonces:

$$\chi(r) = B \frac{\exp\left(\int^r g(r')dr'\right)}{g(r)^{1/2}}, \tag{3-60}$$

siendo la función g dada por la expresión:

$$g(r) = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{1/2} \big(V(r) - E\big)^{1/2}$$

Si se considera el potencial de Coulomb para una distancia dada por 3-15 igual a $r \leq \frac{1}{2} r_1$ y de $V(r) = 0$ para $r > \frac{1}{2} r_1$. Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger con $l = 0$, entonces ésta toma la forma:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + k^2 \chi = 0 \tag{3-61}$$

siendo $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$

Que predice dos soluciones linealmente independientes de tipo exponencial creciente y decreciente $e^{\pm ikr}$ que representan ondas viajeras entrantes y salientes. Que llevan a que éstas presenten un carácter armónico con constante de desplazamiento de fase δ dado por:

$$\chi(r) = A \sin(kr + \delta) = \frac{A e^{-i\delta}}{2i} (e^{2i\delta} e^{ikr} - e^{-ikr}). \tag{3-62}$$

Una onda para un partícula entrante viajando a lo largo de la dirección $+z$ posee una expansión en términos de las funciones de Bessel esféricas j_l y los polinomios de Legendre P_l en la forma:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta), \tag{3-63}$$

Para bajas energías es necesario reservar el término en el cual $l = 0$

$$e^{ikz} \approx j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} = \frac{1}{2ikr}(e^{ikr} - e^{ikr}). \tag{3-64}$$

Al considerar una amplitud $A = e^{i\delta/k}$, en 3-62 se vuelve

$$\chi = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta} - 1)e^{ikz} + \frac{1}{2ik}(e^{ikr} - e^{ikr}). \tag{3-65}$$

Que en términos de las funciones $j_0(kr)$ generan la expresión para la onda saliente dispersada. Y que es igual a cero si no está presente el potencial:

$$\chi_{sc} = \frac{e^{i\delta}}{k}\sin\delta e^{ikr}, \tag{3-66}$$

Al tener en cuenta las condiciones en la frontera sobre la continuidad de la solución y su primera derivada a una distancia radial de $r = \frac{1}{2}r_1$. Aplicándolas en las expresiones 3-61, 3-67 y 3-68,entonces:

$$\frac{B}{\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/4}} = \frac{e^{i\delta}}{k}\sin\delta e^{i\left(\frac{kr_1}{2}\right)} + \frac{\sin\frac{kr_1}{2}}{k} \tag{3-67}$$

y

$$\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/4} B - \frac{B}{r_1}\frac{1}{\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/4}} = ie^{i\delta}\sin\delta e^{i\left(\frac{kr_1}{2}\right)} + \cos\frac{kr_1}{2} \tag{3-68}$$

Eliminando el desfase δ en 3-67 y 3-68, queda:

$$(B_r + iB_i)(K_2 - ik) = -iK_1\sin\frac{kr_1}{2} + K_1\cos\frac{kr_1}{2}, \tag{3-69}$$

en donde se han efectuado las sustituciones: $K_1 = \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/4}$, $K_2 = K_1^2 - \frac{1}{r_1}$. Y al reconocer a B_r y B_i como las partes real e imaginaria de la amplitud B en la ecuación 3-69. Entonces ésta puede ser expresada en la forma de las siguientes dos expresiones:

$$B_r(K_2^2 + k^2) = K_1K_2\cos\left(\frac{kr_1}{2}\right) + kK_1\sin\left(\frac{kr_1}{2}\right), \tag{3-70}$$

y

$$B_i(K_2^2+k^2) = kK_1\cos\left(\frac{kr_1}{2}\right) - K_1K_2\sin\left(\frac{kr_1}{2}\right), \tag{3-71}$$

Las cuales expresan las partes real e imaginaria de B en función de r_1 y k. Así que al reemplazar en 3-67:

$$\frac{e^{i\delta}}{k}\sin\delta e^{i\left(\frac{kr_1}{2}\right)} = \frac{B_r+iB_i}{K_1} - \frac{\sin\left(\frac{kr_1}{2}\right)}{k} \tag{3-72}$$

Si se despeja para δ queda:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2\delta}{k^2} &= \left|\frac{B}{K_1} - \frac{\sin\left(\frac{kr_1}{2}\right)}{k}\right|^2 \\ &= \left(\frac{B_r}{K_1} - \frac{\sin\left(\frac{kr_1}{2}\right)}{k}\right)^2 + \left(\frac{B_i}{K_1}\right)^2\end{aligned} \tag{3-73}$$

Dado que el potencial es repulsivo, entonces, se espera que el signo en el desfase δ sea negativo. Como no se ha considerado en la anterior descripción los efectos del potencial coulombiano en distancias radiales mayores $\frac{1}{2}r_1$. Se hace necesaria la descripción de la solución de la ecuación de movimiento bajo la aproximación WKB. Resolviendo la ecuación de Schrödinger para las soluciones dadas por 3-59 y 3-60 junto con las condiciones de frontera en una vecindad del punto de retorno r_1. Para dicho potencial la ecuación 3-7 presenta la estructura:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{Z_1Z_2e^2}{r}\right]\chi = 0 \tag{3-74}$$

Y si se considera una vecindad cercana a r_1, entonces la distancia inversa tiene es aproximadamente:

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{r_1} - \frac{r-r_1}{r_1^2} = \frac{2}{r_1} - \frac{r}{r_1^2} \tag{3-75}$$

Y como en el punto de retorno se cumple el hecho de que

$$E = V(r_1) = \frac{Z_1Z_2e^2}{r_1}, \tag{3-76}$$

entonces la ecuación 3-74 se reduce a:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2\mu Z_1Z_2e^2}{r_1^2\hbar^2}(r-r_1)\chi = 0 \tag{3-77}$$

Si se define la variable x según el parámetro α de manera que $x = \alpha(r - r_1)$, siendo:

$$\alpha = \left(\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{r_1^2 \hbar^2} \right)^{1/3}, \tag{3-78}$$

se tiene que 3-77 queda expresada de manera que:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + x\chi = 0. \tag{3-79}$$

La cual posee soluciones para $r > r_1$ de la forma:

$$\chi = \sqrt{x} J_{\pm 1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \tag{3-80}$$

Y que a su vez las funciones de Bessel de primera especie $J_{-1/3}$ son soluciones de la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{3-81}$$

para orden fraccionario $n = \pm\frac{1}{3}$. Pero como $J_{-1/3}$ es divergente en 3-80, mientras que χ es finita cuando $x \to 0$. Se puede concluir que la solución de la ecuación de Schrödinger en las localidades cercanas a $r = r_1$, o equivalentemente $x = 0$. Y que a su vez expresa la condición $r > r_1$, presenta la estructura siguiente para cierto valor de la constante C:

$$\chi = C\alpha\sqrt{r - r^1} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \alpha^{3/2} (r - r_1)^{3/2} \right). \tag{3-82}$$

Para los casos en los cuales $r = r_1$ y $r < r_1$, la función de Bessel modificada $I_{-1/3}$ es divergente, pero χ continúa siendo finita. Así que la solución para 3-80 será:

$$\chi = C'\alpha\sqrt{r - r^1} I_{-1/3} \left[\frac{2}{3} \alpha^{3/2} (r_1 - r)^{3/2} \right], \tag{3-83}$$

Dichas funciones de Bessel modificadas están relacionadas con las funciones de Bessel de primera especie de acuerdo a $I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$. Lo que lleva a que para que las funciones solución χ y χ' sean continuas en el punto de retorno se debe cumplir que $C = i^{1/3} C'$. Es necesario que las funciones solución y sus derivadas posean constantes que satisfagan las condiciones de frontera y acordes con la aproximación WKB dada por 3-59. En ciertos puntos en los cuales se cumpla $r \simeq r_1$ y $r > r_1$ y $r \simeq r_1$ y $r < r_1$ para 3-60 respectivamente.

3.2.2. Penetración de barrera en coordenadas parabólicas

Al realizar una transformación de la ecuación de Schrödinger de acuerdo a las siguientes sustituciones:

$$k = \frac{mv}{\hbar}, \quad n = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}, \quad 2kn = \frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2$$

posee la forma:

$$\nabla^2\psi + \left(k^2 - \frac{2kn}{r}\right)\psi = 0,. \tag{3-84}$$

Y transformando la coordenadas polares esféricas a coordenadas parabólicas mediante las ecuaciones de transformación:

$$\xi = r - z = r(1 - \cos\theta) = 2r\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{3-85}$$

y

$$\eta = r + z = r(1 + \cos\theta) = 2r\cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{3-86}$$

y

$$\phi = \phi. \tag{3-87}$$

Para lo cual es más apropiado realizar la introducción de una nueva función de onda factorizada:

$$\psi = e^{ikz}y(\xi). \tag{3-88}$$

La sustitución de la ecuación 3-88 en 3-84 lleva a que:

$$\nabla^2 y + 2ik\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{2kn}{r}y = 0. \tag{3-89}$$

Y de teniendo en cuenta las transformaciones parabólicas en 3-85 y 3-86, se obtienen las expresiones:

$$\nabla^2 y = \frac{4}{\xi + \eta}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dy}{d\xi}\right) \tag{3-90}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-2\xi}{\xi + \eta}\frac{dy}{d\xi}, \tag{3-91}$$

en las cuales se ha empleado la sustitución $r = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$.
Al reemplazar 3-90 y 3-91 en 3-89, se obtiene la ecuación hipergeométrica confluente. La cual presenta dos puntos de singularidad:

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} + (1 - ik\xi)\frac{dy}{d\xi} - kny = 0 \tag{3-92}$$

Y que en general tiene la forma:

$$zy'' + [c - z]\, y' - ay = 0 \tag{3-93}$$

Por tanto la solución que es regular en $z = 0$ para 3-93 es:

$$y = C_1 F_1(a, c; z), \tag{3-94}$$

siendo, C constante y ${}_1F_1(a, c; z)$ la correspondiente función hipergeométrica confluente. La cual posee una fórmula asintótica cuando $z \to \infty$ de acuerdo a:

$${}_1F_1(a, c; z) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}. \tag{3-95}$$

Y la función Gamma de Legendre dada por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (Re\ z > 0). \tag{3-96}$$

Si se realiza una comparación entre los términos de las ecuaciones 3-92 y 3-93 lleva a la conclusión de que $a = -\imath n$, $c = 1$ y $z = \imath k\xi$. Así que para Luego para $z \to \infty$, la ecuación 3-95 queda escrita como:

$${}_1F_1(-\imath n, 1; \imath k\xi) \simeq \frac{e^{\frac{n\pi}{2}}}{\Gamma(1+\imath n)} \left[(k\xi)^{\imath n} - n e^{\imath(k\xi + 2\eta_0)} (k\xi)^{-(1+\imath n)} \right], \tag{3-97}$$

en donde se ha usado el hecho de que $e^{2\imath\eta_0} = \frac{\Gamma(1+\imath n)}{\Gamma(1-\imath n}$ y $\imath = e^{\frac{\imath\pi}{2}}$.
La solución de la ecuación de Schrödinger expresada en la forma de función de onda de Coulomb:

$$\psi_c = C e_1^{ikz} F_1(-\imath n, 1; \imath k(r - z)). \tag{3-98}$$

Y en virtud de la ecuación 3-97, en el caso en el cual se tiene la condición $|r - z| \to \infty$, ψ_c. La solución es bastante aproximada a:

$$\begin{aligned} \psi_c &\simeq \frac{C e^{\frac{n\pi}{2}}}{\Gamma(1+\imath n)} \left[e^{i[kz + n \ln k(r-z)]} - \frac{n}{k(r-z)} e^{i[kr - n \ln k(r-z) + 2\eta_0]} \right] \\ &= \frac{C e^{\frac{n\pi}{2}}}{\Gamma(1+\imath n)} \left[e^{i[kz + n \ln k(r-z)]} + \frac{f_c(\theta)}{r} e^{i(kr - n \ln kr)} \right] \end{aligned} \tag{3-99}$$

en lo cual se ha considerado:

$$f_c(\theta) = -\frac{n e^{i[-n \ln(1 - \cos\theta) + 2\eta_0]}}{k(1 - \cos\theta)}.$$

En la obtención de la ecuación 3-97 se ha tenido en cuenta la identidad:

$$\Gamma(1 - in) = -in\Gamma(-in) \tag{3-100}$$

En la ecuación 3-99 contiene a la función $f_c(\theta)$. La cual lleva a la determinación de la sección eficaz diferencial de dispersión a través de la denominada sección transversal de Rutherford[2]; a través de:

$$\sigma_c(\theta) = |f_c(\theta)| = \left(\frac{n}{2k\sin^2\theta/2}\right)^2 = \left(\frac{Z_1Z_2e^2}{2\mu v^2}\right)^2 cosec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3-101}$$

En el caso en el cual la función de onda ψ esté normalizada respecto a un flujo unitario, entonces, la constante C presente en la ecuación 3-99 será:

$$C = v^{-1/2}\Gamma(1+in)e^{-\frac{1}{2}n\pi}, \tag{3-102}$$

y por tanto la función de onda de Coulomb ψ_c de la ecuación 3-99 será:

$$\psi_c = v^{-1/2}\Gamma(1+in)e^{-\frac{1}{2}n\pi}e^{ikz}\ {}_1F_1(-in,1;ik\xi) \tag{3-103}$$

siendo, $\xi = r - z = r(1-\cos\theta) = 2r\sin^2\frac{1}{2}\theta$.
Si se expande la función hipergeométrica confluente ${}_1F_1$ alrededor de $z = 0$ en potencias de $z = ik\xi$ se tiene que:

$${}_1F_1(a,c;z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)\Gamma(c)z^m}{\Gamma(a)\Gamma(c+m)} = 1 + \frac{az}{c1!} + \frac{a(a+1)z^2}{c(c+1)2!} + \ldots, \tag{3-104}$$

Y como la ecuación 3-104 implica que ${}_1F_1(a,c;0) = 1$ y dado el corto alcance de la interacción nuclear fuerte. Entonces, al igualar las ecuaciones 3-103 y 3-104, empleando la identidad:

$$\Gamma(1+in)\Gamma(1-in) = \frac{in\pi}{\sin in\pi} = \frac{2n\pi}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}, \tag{3-105}$$

lleva a que la función de onda ψ_c y por lo tanto su norma cuadrada evaluada en $r = 0$

$$|\psi_c(0)|^2 = v^{-1}\frac{2n\pi}{e^{2n\pi}-1}. \tag{3-106}$$

Si se consideran valores pequeños para las velocidades, es decir, $v \ll 1$, entonces, dado que $n = Z_1Z_2e^2/\hbar v$ se tiene que $n >> 1$. Con lo que la ecuación 3-106 queda expresada por:

$$|\psi_c(0)|^2 = \frac{2\pi n}{v}e^{-2n\pi} = \frac{2\pi Z_1Z_2e^2}{\hbar v^2}\exp\left(\frac{-2\pi Z_1Z_2e^2}{\hbar v}\right). \tag{3-107}$$

[2]Esta expresión permite calcular la sección transversal de dispersión para un electrón en el campo de Coulomb de un ión teniendo en cuenta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{2nv^2}\right)^2\frac{1}{sen^4(\theta/2)}$$

Por lo tanto la probabilidad por flujo unitario de que un núcleo incidente atraviese la barrera de potencial de Coulomb y alcance el núcleo objetivo en el blanco es $v\,|\psi_c(0)|^2$.Éste corresponde al factor de penetración exponencial 3-107 que a su vez es el mismo factor de Gamow dado por 3-16.

3.3. Reacciones resonantes y dispersión

Si se supone un potencial $V(r)$ con simetría esférica, la ecuación de Schrödinger en la dirección radial que modela la interacción entre dos núcleos posee la forma:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)+k^2\right]\mu_l(r)=0 \tag{3-108}$$

En la cual se ha considerado el hecho de que $k^2=2\mu E/\hbar^2$.

Para el caso en el cual el potencial es inexistente la ecuación 3-108 posee como soluciones a las funciones de Bessel esféricas que quedan en dependencia directa con las funciones de Bessel semienteras $J_{l+1/2}(kr)$:

$$j_l(kr)=\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}J_{l+1/2}(kr). \tag{3-109}$$

Para el caso en el cual se tiene que $l=0$

$$j_0(kr)=\frac{\sin kr}{kr} \tag{3-110}$$

Bajo la condición $r\to\infty$, las funciones esféricas de Bessel pueden ser expresadas mediante:

$$j_l(kr)=\frac{\sin(kr-\frac{\pi}{2}l)}{kr}. \tag{3-111}$$

Si se considera un núcleo viajando en la dirección z^+, a éste le corresponderá una función de onda viajera de flujo incidente característica dada por:

$$\psi_{in}=Ae^{ikz}. \tag{3-112}$$

Si se asume una constante de normalización $A=1$. Entonces, la solución de onda plana entrante puede ser expandida en términos de los polinomios de Legendre y las funciones esféricas de Bessel en la forma:

$$e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \tag{3-113}$$

siendo los coeficientes A_l de la expansión:

$$A_l = (2l+1)i^l. \tag{3-114}$$

Sustituyendo las expresiones 3-109 y 3-112 en la ecuación 3-111, la expansión de onda entrante será:

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l P_l(\cos\theta)\frac{\sin(kr-\frac{\pi}{2}l)}{kr} \\ &= \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^{l+1}P_l\left(e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)} - e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}\right) \end{aligned} \tag{3-115}$$

Y en virtud de la simetría esférica para la ecuación de Schrödinger. La función de onda solución presentará la forma:

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l u_l(r) P_l(\cos\theta), \tag{3-116}$$

Para lo cual los coeficientes B_l son constantes y para valores de $r \to \infty$ converge a la forma asintótica que admite soluciones de onda saliente e^{ikr}:

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{3-117}$$

Las funciones esféricas de Bessel j_l presentan un comportamiento asintótico rápidamente convergente a cero. Esto sucederá bajo la condición en la cual el potencial $V(r)$ converja a cero cuando $r \to \infty$. En tal situación las funciones propias u_l diferirán de aquéllas en un desfase δ_l. Así que de acuerdo a la ecuación 3-109 sucederá que:

$$u_l(kr) = \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \tfrac{\pi}{2}l + \delta_l\right) \tag{3-118}$$

Según el comportamiento asintótico expresado anteriormente, las ecuaciones 3-115 y 3-116 expresan:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_l P_l(\cos\theta)B_l\frac{1}{kr}\sin(kr-\tfrac{\pi}{2}l+\delta_l) \\ &= (2ikr)^{-1}\sum_l P_l(\cos\theta)B_l\left[e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}e^{i\delta_l} - e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}e^{-i\delta_l}\right]. \end{aligned} \tag{3-119}$$

Así que la función de onda para la onda dispersada de Coulomb es:

$$\psi_{sc} = \psi - e^{ikz}. \tag{3-120}$$

Dado que la onda dispersada debe contener solamente ondas salientes, entonces, la condición necesaria a cumplirse corresponderá al hecho de que los coeficientes B_l presentes en la ecuación 3-119

$$B_l = i^l(2^l + 1)e^{i\delta_l}, \tag{3-121}$$

luego, al comparar 3-117 y 3-120 y luego de sustituir 3-121. La función $f(\theta)$ en 3-117, posee la forma funcional:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_i (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta) \tag{3-122}$$

Y por lo tanto las funciones de onda y de onda dispersada de Coulomb en la aproximación asintótica respectivamente corresponden a:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^{l+1}P_l\left[e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)} - \eta_l\, e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}\right] \tag{3-123}$$

y

$$\psi_{sc} = \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^{l+1}P_l(1-\eta_l)e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}, \tag{3-124}$$

siendo $\eta_l = e^{2i\delta_l}$ y para el caso en el cual se presente absorción la constante de desfase δ_l es compleja.

Para las partículas dispersadas por el potencial de Coulomb hay asociada una densidad de corriente de probabilidad cuántica que depende de la función de onda dispersada ψ_{SC} y su función compleja conjugada ψ^*_{SC}

$$J_{sc}(\theta) = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\psi^*_{sc}\nabla\psi_{sc} - \psi_{sc}\nabla\psi^*_{sc}\right). \tag{3-125}$$

Así que el número de partículas por unidad de tiempo es:

$$N_{sc} = \int_0^{\pi} J_{sc}(\theta)(2\pi)r^2\sin\theta d\theta. \tag{3-126}$$

Si se retienen únicamente los términos que son proporcionales al inverso de la distancia $\frac{1}{r}$, se cumple que las derivadas parciales en los gradientes presentes en la ecuación 3-125, toman la forma:

$$\frac{\partial\psi_{sc}}{\partial r} = ik\psi_{sc} \tag{3-127}$$

y

$$\frac{\partial\psi^*_{sc}}{\partial r} = -ik\psi^*_{sc}. \tag{3-128}$$

Dado el carácter radial de la ecuación de Schrödinger y por lo tanto de sus soluciones hay independencia angular en las funciones de onda y sus derivadas. Así que no existe contribución de éstas sobre N_{sc}. Así que en virtud de las ecuaciones 3-124, 3-125, 3-126 y 3-127; el número de partículas dispersadas por segundo es:

$$N_{sc} = \frac{\hbar k}{\mu}\int_0^{\pi} \psi_{sc}^{*}\psi_{sc} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{\hbar\pi}{\mu k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|1-\eta_l\right|^2 \tag{3-129}$$

A partir de la ecuación 3-129 y considerando un flujo de partículas incidentes igual a $\hbar k/\mu$, se tiene que:

$$\sigma_{sc} = \frac{N_{sc}}{(\hbar k/\mu)} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|1-\eta_l\right|^2 = \pi\lambda^2\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left|1-\eta_l\right|^2 \tag{3-130}$$

Por lo tanto la sección eficaz transversal para cada valor de l está dada por:

$$\sigma_{sc,l} = \pi\lambda^2(2l+1)\left|1-\eta_l\right|^2. \tag{3-131}$$

Así que en un segundo el número de reacciones será

$$N_R = \frac{\hbar}{2i\mu}\int_0^{\infty}\left(\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\psi^{*}}{\partial r}\right)2\pi r^2\sin\theta d\theta, \tag{3-132}$$

luego, la sección eficaz tranversal de absorción que corresponde a:

$$\sigma_{abs} = \frac{N_R}{\left(\frac{\hbar k}{\mu}\right)}, \tag{3-133}$$

estará dada en términos de 3-122 y el número de reacciones por segundo dado en la ecuación 3-132, es decir:

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-\eta_l^{*}\eta_l) = \pi\lambda^2\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-\left|\eta_l\right|^2). \tag{3-134}$$

Con lo cual se cumple la siguiente aproximación para cada valor de l.

$$\sigma_{abs,l} = \pi\lambda^2(2l+1)(1-\left|\eta_l\right|^2) < \pi\lambda^2(2l+1). \tag{3-135}$$

La sección eficaz transversal total es la suma de los términos correspondientes a la sección de dispersión coulombiana y de absorción dadas por las ecuaciones 3-130 y 3-134 respectivamente:

$$\sigma_t = \sigma_{sc} + \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{k^2} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-Re\ \eta_l). \tag{3-136}$$

Y al comparar las ecuaciones 3-122 y 3-136, tiene que para la parte imaginaria de $f(\theta = 0)$

$$Imf(0) = \frac{k\sigma_t}{4\pi} \tag{3-137}$$

En la ecuación 3-137 se expresa el denominado teorema óptico que relaciona la parte imaginaria de la amplitud de dispersión hacia adelante de un fenómeno ondulatorio y la correspondiente sección eficaz de dispersión.

Capítulo 4

Comparación en los procesos de tunelamiento de la radiación Hawking y los procesos de nucleosíntesis.

El proceso de tunelamiento es el responsable del decaimiento de estados atómicos y nucleares emtaestables, así como también la transición de fases termodinámicaas sobrecalentadas o subenfriadas hacia fases de equilibrio estables; es por eso que una vez realizado y comprendido de manera detallada los desarrollos de los formalismos que preceden el tunelamiento en la radiación Hawking y en los procesos de nucleosíntesis, vamos a realizar la comparación de distintos paramétros en estas teorías:

4.1. Tasa de decaimiento

- **Modelo de Parick y Wilczek**

  Es a partir de la tasa de emisión semiclásica, teo´ria que gobierna el comportamiento del desarrollo perturbativa de orden superior (Ver apéndice A-1), donde está fundamentado el cálculo realizado por Parick y Wilczek, el cual suministra el siguiente resultado:
  $\Gamma = \mathrm{e}^{-2\mathcal{I}m\left[S(t_f)\right]} \sim \mathrm{e}^{-8\pi(M\omega-\frac{\omega^2}{2})}$ que al compararla con la expresión obtenida por Hawking para el agujero negro de Schwarzchild se nota que la diferencia está en el factor de ω^2, el cual es consecuencia de la hipótesis de conservación de la energía total, hecho que se encuentra asociado a la *"autointeracción del campo gravitatorio,"* donde el desarrollo implementado por Hawking no lo tenía en cuenta.

- **Teoría de núcleos compuestos**

Las máximas secciones transversales nucleares dadas en la ecuación 3-135 tienen la siguiente interpretación física. El momento angular de una partícula entrante es cuantizada de tal manera que $L = l\hbar$. Si p es el momento angular de una partícula entrante y b es el parámetro de impacto entonces tenemos

$$L = pb = \frac{hb}{\lambda} = l\hbar \tag{4-1}$$

con $b = \frac{l\lambda}{2\pi} = l\lambda$. La interpretación semi clásica de la ecuación 3-135 da como resultado

$$\sigma_{r,l}(max) = \pi\left[(l+1)\lambda\right]^2 - \pi\left[l\lambda\right]^2 = (2l+1)\pi\lambda^2. \tag{4-2}$$

Las secciones transversales medidas para las interacciones nucleares muestran un comportamiento resonante. La existencia de resonancias para energías particulares está asociada con la formación de un estado de larga vida (es decir, núcleo compuesto) consistente de dos particulas que interactuan (por ejemplo, protón y núcleo ^{12}C). La amplitud de la energía Γ de un estado de núcleo compuesto y la vida media están relacionados por la ecuación

$$\Gamma = \hbar/\tau. \tag{4-3}$$

La ecuación anterior implica que para niveles de amplitud de 1 keV la vida de los núcleos compuestos es

$$\tau = \hbar/\Gamma \simeq 10^{-12}s \tag{4-4}$$

el cual es muy grande comparado a un tiempo de cruce nuclear ($\simeq 10^{-21}$s).

Allí se asume que una reacción nuclear particular puede ser expresada como el proceso de dos pasos

$$A + B \rightarrow C^* \rightarrow D + E, \tag{4-5}$$

donde C^* es el estado de núcleo compuesto (es decir, el nivel de energía excitado del núcleo), y D y E representan un modo de decaimiento particular. Los varios modos de decaimiento de núcleos compuestos son conocidos como canales. La amplitud de energía Γ es

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_n + \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \Gamma_{e^\pm} \tag{4-6}$$

donde los modos de decaimiento Γ_p, Γ_n, Γ_α, Γ_γ y $\Gamma_{e^\pm}$ son las amplitudes de energía asociadas con protón, neutrón, particula α, rayos γ y e^- (o e^+) respectivamente. Dado que se asume que el modo de decaimiento es independiente del modo de formación del núcleo de la sección transversal para la formación de un núcleo compuesto a través de algún canal de entrada α y decae a través de algún canal de entrada β puede ser expresado como

$$\sigma_{\beta\alpha} = \sigma_c(\alpha)\frac{\Gamma_\beta}{\Gamma}, \tag{4-7}$$

donde Γ_β es la amplitud parcial para el decaimiento a través de algún canal β y Γ es la amplitud total

$$\Gamma = \sum_\beta \Gamma_\beta. \tag{4-8}$$

4.2. Campo de interacción [21]

Respecto al desarrollo propuesto por Parick y Wilczek cabe resaltar lo referente a la barrera de potencial, ya que incluso para Hawking generó dificultades conceptuales. Según el procedimiento: tal barrera *"No preexiste,"* sino que se debe a la propia partícula saliente la cual hace que se contraiga el horizonte de sucesos produciéndola. Esto es una consecuencia directa de implementar la conservación de la energía. La corrección al espectro térmico es precisamente la que se esperaría de una teoría cuántica subyacente.

Es así que la radiación Hawking se entiende como un proceso túnel de una partícula[1] de energía positiva ω que cruza el horizonte desde una posisción r_i hasta una posición r_f mientras que el radio desciende hasta $M - \omega$[2].

4.3. Controversias sobre la derivación de la radiación Hawking como un efecto de tunelamiento [2]

Retomando el capítulo [2] sobre la derivación del efecto Hawking como un proceso de tunelamiento, desarrollo formulado por Parick y Wilczek[3] se han generado ciertas controversias las cuales serán analizadas a continuación.

[1] Se hace la suposición de que el agujero no tiene masa ni momento angular.

[2] En un agujero negro la masa y el radio están relacionados.

[3] Frank Wilczek (15 de mayo de 1951) es un físico estadounidense de origen polaco e italiano. Junto con David Gross y David Politzer recibió el Premio Nobel de Física 2004 por el descubrimiento de la libertad asintótica en la teoría de la interacción fuerte.

Primero como se anoto en la sección anterior ellos proponen la siguiente hipótesis: *"la acción de la partícula que atraviesa el horizonte del agujero negro tiene una parte imaginaria que proviene del plano complejo de la coordeenada r a lo largo del semicírculo infinitesimal sobre el horizonte de sucesos r_H."* Pero Belinski [2]realiza dos comentarios, uno de ellos se refiere a que la acción pueda tener esta componente imaginaria ya que el arguye que en el espacio tiempo del agujero negro, la variable temporal t adquiere una parte imaginaria dentro del horizontre de sucesos que cancelaría la parte imaginaria proveniente del momento.

Para las geódesicas radiales debe verificarse la ecuación [30]:

$$p_r = mg_{rr}\frac{dr}{ds} = \frac{m}{f(r)}\sqrt{\left(\frac{\omega}{m}\right)^2 - V_{efectivo}}, \tag{4-9}$$

donde el $V_{efectivo}$ para un agujero negro de Schwarzchild es $f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_H}\right)$ (Simetricamente esférico, sin carga y no rotante.) Luego

$$p_r(r) = \frac{dI(r)}{dr} = \frac{\sqrt{(\omega^2 - m^2)r^2 + m^2 r r_H}}{r - r_H} \tag{4-10}$$

cuando $m = 0$ se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi $\frac{dW(r)}{dr} = \frac{\omega}{f(r)}$ obtenida para la aproximación WKB en el límite semiclásico ($\hbar \to 0$) y para $m = 0$.

$$I = -\omega t + W(r). \tag{4-11}$$

Combinando las ecuaciones 4-10 y 4-11 y teniendo en cuenta $r \to r_H$ se obtiene que

$$W(r) \to \omega r_H ln\frac{r - r_H}{r_H} \tag{4-12}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación para las trayectorias próximas al horizonte viene establecido por la condición

$$\frac{dI}{d\omega} = \text{Constante} \tag{4-13}$$

y reemplazando nuevamente en 4-11 se tiene que $-t + r_H lnr - r_H r_H = \text{Constante}$ Así la acción queda establecida mediante

$$I = -\omega t + \omega r_H ln\frac{r - r_H}{r_H} = \omega\left(-t + r_H ln\frac{r - r_H}{r_H}\right) = \omega\ \text{Constante} \tag{4-14}$$

Lo que demostraría que la acción no adquiere una parte imaginaria y por tanto no se puede hablar de un efecto túnel. Recordemos que una de las conclusiones a los que ellos llegaron fue: *"... la partícula no puede propagarse clásicamente entre las cercanias del horizonte del agujero negro a causa de la barrera de potencial que se manifiesta como un polo en el m omento para* $r = r_H$*. Sin embargo, cuánticamente es posible atravesar la barrera por efecto túnel y unir las trayectorias interior y exterior al horizonte en el plano complejo r rodeando la singularidad asociada a* r_H*. Esto añade una parte imaginaria a la acción* $4\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right)$ *que se interpreta como la responsable del proceso túnel de dentro hacia afuera del horizonte"*. Y es allí especialmente donde Belinski critica el método de Parick - Wilczek porque sugiere que ellos olvidaron la parte temporal de la acción $-\omega t$ y de la contribución de la parte radial $W(r)$ con lo que sería nula la parte imaginaria.

4.4. Potencial en el modelo de Parikh y Wilczek

Retomando solamente la parte radial de la métrica de Schwarzchild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)}dr^2. \tag{4-15}$$

Cuya acción es $I = -\omega t + W(r)$ y considerando solamente la parte imaginaria de la función $W(r) = \int p_r dr$. Tenemos que las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\frac{dt}{dI} = \frac{\omega}{mf(r)} \text{ donde hemos denotado } f(r) = 1 - \frac{r_H}{r} \tag{4-16}$$

y

$$1 = f(r)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{f(r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \tag{4-17}$$

Despejando la derivada de la coordenada radial respecto a la métrica queda

$$\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{m^2} - f(r)} \tag{4-18}$$

Así podemos obtener la acción

$$I = -m\int ds = -m\int \frac{1}{dr/ds}dr = -m\int \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{m^2} - f(r)}} \tag{4-19}$$

Si al considerar la parte imaginaria de la acción cuando $r > 0$, se observa que r_H no es un polo para la integral de trayectoria por lo que:

$$\mathcal{I}m(\Delta I) = \oint_{r_H} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{m^2} - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)}} = 0 \tag{4-20}$$

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

i. Teniendo en cuenta el procedimiento utilizado por Keski-Vakkuri y Kraus [19] donde utilizan el método de las trayectorias temporales e instantones y el método WKB, para describir fenómenos de tunelamiento con una dependencia explícita del tiempo. Ellos establecen que la tasa de la probabilidad de creación de un partícula durante el transcurso de un campo está dada por $\Gamma = 1 - \mathrm{e}^{-2|\mathcal{I}m(\Delta I)|}$ donde $\mathcal{I}m(\Delta I)$ es la parte imaginaria de la acción y muestra que en el plano complejo las partículas son creadas, pero si se tiene en cuenta el desarrollo de la sección [4.4] vemos que está contribución es igual a cero lo que indica que el procedimiento realizado por Parikh y Wilczek [22] donde la acción de la partícula que atraviesa el horizonte del agujero negro tiene una parte imaginaria que proviene del plano complejo de la coordenada r a lo largo del semicírculo infinitesimal sobre el horizonte de sucesos r_H; no tendría algún efecto puesto que en el espacio tiempo del agujero negro, la variable temporal t adquiere una parte imaginaria dentro del horizontre de sucesos que cancelaría la parte imaginaria proveniente del momento lo que demostraría que la acción no adquiere una parte imaginaria y por tanto no se puede hablar de un efecto túnel.[1]

ii. Una vez analizados en detalle los distintos formalismos sobre la presunción de la radiación Hawking como un efecto de tunelamiento; considero que la demostración exacta de la imposibilidad del efecto túnel alrededor del horizonte de eventos del agujero negro la ofrece Belinski [2] ya que en su desarrollo sugiere que Parikh y Wilczek olvidaron la parte temporal de la acción $-\omega t$ y de la contribución de la parte radial $W(r)$ con lo que sería nula la parte imaginaria.

iii. Fue conveniente el desarrollo de los cálculos del proceso de nuclesíntesis debido a que los mecanismos de efecto túnel están completamente establecidos y demostra-

[1] Ver resultado de la ecuación 4-20.

dos, por lo que analizando en detalle los estados físicos del núcleo atómico y del agujero negro, considero no hay lugar a un desarrollo de este tipo; ya que el proceso de tunelamiento controla el decaimiento de estados atómicos y nucleares metaestables y aunque las integrales de trayectoria son una herramienta importante para describir teóricamente estos procesos para barreras de tunelamiento grandes, el decaimiento transcurre lentamente y sus propiedades se pueden explicar generalmente por medio de un desarrollo semiclásico de una integral de trayectoria simple y es precisa y fundamentalmente en este aspecto dónde está fallando la teoría de Parick y Wilczek ya que respecto a la barrera de potencial ellos argumentan que la radiación Hawking se entiende como un proceso túnel donde una partícula de energía positiva ω que cruza el horizonte desde una posisción r_i hasta una posición r_f mientras que el radio desciende hasta $M - \omega$ y es está característica de conservación de la energía del sistema lo que lleva a la generación de la barrera de potencial. *"Tal barrera no preexiste. Es la propia partícula saliente la que, al provocar la contracción del horizonte, crea la barrera [21]"*. Lo que hace que ambos aspectos físicos NO sean comparables.

5.2. Recomendaciones

Sería importante analizar en detalle el tratamiento de tunelamiento que realizan los italianos: Criscienzo, Hayward, Nadalini y Vanzo; con las coordenadas de Eddington-Finkelstein-Bardeen, mostrando como el factor temporal se pierde.

Considero que en muchos casos por el afán de recuperar el resultado de la radiación Hawking como un efecto de tunelamiento, muchos autores toman en cuenta el factor temporal, pero siempre con el signo equivocado, con la consecuencia de que los dos polos se suman con el mismo signo en lugar de ser cancelados mutuamente. Por lo que estimo deben rehacersen dichos cálculos.

Apéndice A

Tasa de emisión semiclásica

A continuación se mostrará el procedimiento utilizado por Keski-Vakkuri y Kraus [19][1] donde utilizan el método de las trayectorias temporales e instantones y el método WKB, para describir fenómenos de tunelamiento con una dependencia explícita del tiempo.

Definición **A.1** *Los instantones son soluciones no singulares de ecuaciones clásicas de movimiento en el espacio euclidiano cuya acción es finita. [6]*

El interés en dichas estructuras surge por la mecánica cuántica, en la cual la aproximación WKB muestra que las amplitudes de tunelamiento son controladas por un pequeño factor exponencial: $\Gamma = \exp\left(-\frac{S_{\text{instantón}}}{\hbar}\right)$, donde S es la acción minimal euclidiana, para pasar de un estado inicial y otro final y denominamos Γ la tasa de decaimiento.

La métrica es $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, con coordenadas x^μ, con $\mu = 0, 1, 2, 3$. El término instantón es usado cuando una solución localizada en $\mathbb{R}^4$ con métrica euclidiana $d\mathbf{x} + d\tau^2$, está simultáneamente localizada en el espacio y en un instante de tiempo euclidiano.

La solución del instantón corresponde a la interpolación entre el falso vacío cuando $\tau = -\infty$, y un punto de inflexión que se pueda tomar cuando $\tau = 0$.. la configuración del punto de inflexión es la de un par de partículas momentaneámente en reposo. Si se tuviera que seguir evolucionando en el tiempo imaginario hacia $\tau = \infty$,las partículas convergen y desaparecen, dejando el sistema en el falso vacío de nuevo.

[1] En este artículo ellos presentan cálculos detallados de varios ejemplos de modelos donde los métodos estándar (con altas simetrías) no son aplicables, tales como: La nucleación expontánea de defectos topológicos en un universo expandiéndose, la producción de pares cargados partícula-antipárticula en un campo eléctrico dependiente del tiempo y decaimiento del falso vacío en una teoría de campos a partir de un estado inicial coherente oscilando.

A.1. Tunelamiento dependiente del tiempo

Consideremos la acción, mediante la siguiente expresión, la cual describe una gran variedad de fenómenos:

$$S = \int dt \left[-a(x,t)\sqrt{1-\dot{x}^2} + b(x,t) \right] \tag{A-1}$$

A continuación se presentará a modo informativo los valores de $a(x,t)$ y $b(x,t)$ para algunos fenómenos interesantes:

i. $a(x,t) = m$; $\quad b(x,t) = qE(t)x$: Acción relativista de una partícula m, carga q, moviéndose en un campo eléctrico $E(t)$.

ii. $a(x,t) = 4\pi\sigma(t)x^2$; $\quad b(x,t) = \frac{4}{3}\pi\rho(t)x^3$: Acción de una burbuja esférica de radio x, con una tensión superficial dependiendo del tiempo $\sigma(t)$ y densidad de energía $\rho(t)$.

iii. $a(x,t) = mc(t)$; $\quad b(x,t) = 0$: Acción de una partícula másiva moviéndose en la métrica

$$ds^2 = c^2(t)\left[dt^2 - dx^2 - s^2(x)\left(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2\right)\right]$$

iv. $a(x,t) = 2\pi\mu c^2(t)s(x)$; $\quad b(x,t) = 0$: Acción de una cuerda cósmica circular moviéndose sobre la métrica antes descrita.

Ahora se mostrará como a partir de la ecuación A-1 se determina la tasa de creación espontánea.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a(x,t)\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\right) = -\sqrt{1-\dot{x}^2}\frac{\partial\, a(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\, b(x,t)}{\partial x} \tag{A-2}$$

Para propósitos de tunelamiento las trayectorias relevantes son aquellos que emanan de un punto de retorno. Para una trayectoria $x(t)$, la existencia de éstos puntos en el tiempo t_f, implica que el momento canónico debe hacerse cero:

$$p(t_f) = \left.\frac{a(x,t)\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\right|_{t=t_f} = 0. \tag{A-3}$$

En muchos casos, la condición más simple es $\dot{x} = 0$.

Un proceso de nucleación corresponde a una trayectoria en la cual el objeto se contrae suavemente a un tamaño cero cuando evoluciona hacía atrás en el tiempo a lo largo de un

contorno en el tiempo complejo. La continuación analítica desde el tiempo real al complejo ocurre en el punto de retorno. Contraer a tamaño cero significa que $x = 0$ en el espacio plano, mientras que en el espacio curvado es el tamaño físico $c(t)s(x)$ el que se requiere que tienda a cero.

En el espacio curvo las trayectorias deben satisfacer las siguientes condiciones

$$p(t_f) = 0, \;\; x(t_0) = 0, \;\; \dot{x}(t_0) \to \infty, \;\; t_f = \text{Real}, \;\; t_0 = \text{Complejo}, \;\; x(t) = \text{Real}.$$

El problema consiste en, dado un t_f encontrar un tamaño inicial $x(t_f)$ y un tiempo complejo t_0, tal que las condiciones de arriba sean satisfechas.
Como se requiere que x sea real mientras t es complejo, La vía más simple es reescribir la ecuación de movimiento A-2 como una ecuación para $t(x)$[2]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a(x,t)}{\sqrt{t'^2-1}}\right) = -a'(x,t)\sqrt{t'^2-1} + b'(x,t)t'. \tag{A-4}$$

La condición sobre el tiempo $t(x)$, se convierte en:

$$p(t_f) = \left.\frac{a(x,t)}{\sqrt{t'^2-1}}\right|_{t_f} = 0 \qquad t'(0) = 0. \tag{A-5}$$

La ventaja de esta forma es que es sencillo resolver la ecuación A-4 de forma numérica, incluso si no es posible realizarlo de manera analítica. Luego ppodemos encontrar una coordenada de valor inicial $x_f = x(t_f)$, que lleva a $t'(0) = 0$. Habiendo encontrado una trayectoria apropiada para el tunelamiento, $t(x)$, se procede a evaluar la acción.

$$S = \int_0^{x_f} dx \left[\left(-a\Big(x, t(x)\Big)\sqrt{t'^2-1} + b\Big(x, t(x)\Big)t'(x)\right]\right. \tag{A-6}$$

Los límites de integración van desde 0 hasta x_f, ya que por así se encuentra la contribución a la parte imaginaria de la acción y es ésta la que determina la tasa de decaimiento

$$\Gamma(t_f) = \mathrm{e}^{-2\mathcal{I}m\left[S(t_f)\right]}. \tag{A-7}$$

Note que la tasa de decaimiento depende del tiempo t_f, que es el punto final del camino del tiempo complejo. Por lo tanto el resultado es realmente la tasa de decaimiento instantáneo: es decir la probabilidad por unidad de tiempo (por unidad de volumen) en un tiempo t_f.Naturalmente esta es una situación idealizada, un caso más real de la tasa de decaimiento involucraría un tiempo promedio que dependiera de las características y limitaciones físicas de las situaciones dadas.

[2] $'$ denota $\frac{\partial}{\partial x}$

Apéndice B

Antecedentes históricos del concepto de Agujero Negro

Aunque las primeras observaciones del cielo se remontan a los babilonios, quienes desarrollaron métodos de medición de los objetos celestes, aproximaciones de sus localizaciones sobre la bóveda, no fue sino hasta el advenimiento de la civilización griega que se sistematizó la ciencia de la astronomía y se presentó un esbozo de las constelaciones, así como de los objetos que en ellas se presencian.

Con la llegada del renacimiento y la aparición del telescopio como instrumento científico, fueron surgiendo los cuerpos celestes, cada uno con mayor detalle, uno jamás visto por las comunidades antiguas. Por lo tanto los esfuerzos estuvieron encaminados en conseguir construir aparatos con resoluciones cada vez mayores, que permitiesen ahondar en el descubrimiento del universo que se abría ante los ojos humanos.

Esta revolución tecnológica y a la par la otra gran revolución conceptual que cambió el esquema mental del hombre acerca de su manera de acercarse al cosmos, pues la segunda le permitió calcular analíticamente órbitas, períodos y realizar predicciones en torno a éste, además le motivó su creencia en un universo ordenado, inmutable e infinito.

Tal revolución newtoniana trajo consigo además nuevas preguntas acerca de la estructura del universo y sobre su durabilidad; en especial el comportamiento de las estrellas, que desde siglos se habían observado, pero que no se conocía a ciencia cierta el mecanismo interno de evolución y muerte.

Fue precisamente el padre de la sismología, el clérigo y geólogo inglés John Michell quien luego de un cálculo realizado sobre la base de la teoria de la gravitación de Newton, le expresó a su amigo Henry Cavendish en una carta en 1784, que si se tuviera una estrella de una masa 500 superior a la masa del sol, ésta tendría una fuerza gravitacional tan

grande, que la luz no podría escapar y sería invisible. Además que si se detectase una estrella que siguiese una trayectoria inexplicable; sería posible que tal estrella fuera parte de un sistema binario con uno de sus cuerpos totalmente invisible. El cálculo proporcionado consistía básicamente en asumir una estrella esférica de igual densidad a la del sol y un diámetro de 500 veces el del sol, tendría una velocidad de escape que superaría al velocidad de la luz; tal análisis fue basado en el valor obtenido por Röemer de la velocidad para la luz en 1976 de 214300 km/s.

Alrededor del año 1798 Laplace plantea que una estrella luminosa con la misma densidad que la tierra y con un diámetro 250 veces mayor que el del sol no permitiría que sus rayos lleguen a nosotros en razón a su atracción, lo que haría posible que los cuerpos más luminosos del universos fueran invisibles.[16]

Para Laplace la idea de una estrella que colapsase gravitacionalmente, puede ser la generadora de un agujero negro, claro está que para su época, una suposición de tal calibre era altamente especulativa, razón por la cual fue rechazada rápidamente en virtud de que las masas de las estrellas visibles son comparables a la masa del sol, en cambio para el cálculo realizado por Laplace involucraba un objeto celeste de una masa del orden de una estrella de neutrones, enanas blancas, que son las que posiblemente puedan convertirse en agujero negro.

Siguiendo a Isaza[16], mostraré el análisis seguido por Laplace en argumentos clásicos, para un agujero negro newtoniano, asumiendo que la velocidad de escape de un astro esférico es la correspondiente de un cuerpo que se mantenga en órbita alrededor de éste. Tal situación se dará cuando la energía cinética K del cuerpo de masa m sea igual a la energía potencial gravitatoria U del astro de masa M, radio R y G la constante de gravitación universal.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{GmM}{R} \\ v^2 &= \frac{2GM}{R} \\ v_{esc} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned} \tag{B-1}$$

Al emplear la ecuación (B-1) se asume que la velocidad de la luz va disminuyendo y llega a cero cuando el se aleja del astro celeste. $v_{esc} > c$. Si se asume una densidad ρ constante para el astro, obtiene que:

$$
\begin{aligned}
v &> c \\
\sqrt{\frac{2GM}{R}} &> c \\
\frac{2G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho}{R} &> c^2 \\
R^2 &> \frac{3c^2}{8\pi G\rho} \\
R &> \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}}\, c
\end{aligned}
\tag{B-2}
$$

que es la distancia para la cual el astro luminoso es invisible.

Ahora, el cálculo de la velocidad c de la luz lo realiza en virtud del fenómeno de aberración de la luz puede deducir que la tierra viaja 20″1/4 mientras la luz llega del sol a la tierra, luego

$$\frac{\text{velocidad de la luz}}{\text{velocidad de la tierra}} = \frac{1}{\tan\left(20''1/4\right)}$$

y utilizando el valor de la velocidad de desplazamiento de la tierra en su órbita alrededor del sol, conociendo la distancia media tierra-sol, obtiene un valor de $v = 30\ km/s$ y por lo tanto calcula un valor para la velocidad de la luz de $c = 305500\ km/s$. La densidad la deduce de la relación de la masa del sol y la órbita de la tierra, obteniendo un valor de $\rho = 4000\ kg/m^3$ y con el valor de G calculado por Cavendish, llega a que si la distancia R es 293 veces el radio del sol, el cuerpo es invisible.

Fue necesario esperar al siglo XX para que la relatividad, que había cambiado nuestra concepción sobre la estructura del espacio, el tiempo y la materia, cambiara también la forma de asociar el campo gravitacional a los fenómenos celestes y por ende a las implicaciones en las mediciones astronómicas. Einstein en 1916 al postular la relatividad general no creía que fuese posible encontrar una solución analítica a las ecuaciones de campo, pero el astrónomo alemán Karl Schwarzschild encuentra una solución del campo gravitacional de simetría esférica, solución que luego se denominará agujero negro de Schwarzschild. Es así como se va consolidando la idea de que existen cuerpos celestes compactos con una gran fuerza gravitacional, además el camino ya se había ido abonando en esta dirección, por lo que hacer predicciones de esta índole no fue tan difícil de asumir como en la época de Laplace.

Quedaba en el ambiente la duda acerca de que dadas tales presiones en esos cuerpos, ¿porqué los electrones no colisionaban con los protones del núcleo?. Fowler en 1926 concluyó que esto no sucede debido a la presión degenerativa de los electrones, la cual obedece al principio de exclusión de Pauli y el principio de incertidumbre de Heisenberg; tal balance de fuerzas permite que por ejemplo una enana blanca no se convierta en una estrella de neutrones con una densidad de miles de billones de veces más que la densidad del sol. Es así que lo que le ocurra en el futuro a una estrella depende de du masa. Como la mayoría de ellas tiene aproximadamente la masa del sol duran un tiempo aproximado de diez millones de años en los que su combustible nuclear se emplea en mantener las recciones nucleares, tiempo a partir del cual cuando éste se agota el núcleo del astro se vuelve inestable. dado que en las capas externas el hidrógeno es abundante, allí se reinicia el proceso nuclear. Cuando la temperatura del núcleo llegue a cien millones de grados Celsius, el helio se transformará en oxígeno y carbono y el efecto combinado de transformación de hidrógeno en las capas superiores y del helio en oxígeno y carbono en el núcleo, hace que la estrella aumente su volumen millones de veces. La densidad y presión en el exterior disminuye y la superficie se enfría, y la estrella se convierte en una gigante roja, luego la temperatura no es suficiente para transformar el oxígeno y el carbono en elementos más pesados; el nucleo debido a la gravedad se contrae a un tamaño como el de la tierra y la estrella se convierte en una enana blanca; pues tal contracción se detiene por la presion degenerada de los electrones y por lo tanto la estrella muere.

Ahora, si la masa de la estrella es mayor que 2.5 veces la masa del sol, cuando culminan las primeras recciones nucleares, la contracción hace que la temperatura del núcleo alcance setecientos millones de grados Celsius y a tal temperatura el núcleo de oxígeno se transforma en silicio, además de los otros procesos descritos en los que la estrella transforma hidrógeno en helio en las capas superiores y transformación de helio en oxígeno en las capas intermedias. Lo que conlleva a que la estrella explote liberando en pocos días la energía que emitiría en condiciones normales en cerca de cientos de millones de años. tal chorro de energía es reconocido como *supernova*.

Luego de esto el núcleo de la estrella se contrae hasta que la presión de los electrones y neutrones libres compensa la atracción gravitatoria y el ciclo terminaría en una estrella de neutrones de algunos kilómetros de diámetro.

Por otra parte si la masa de la estrella supera unas 2.5 o 3.5 veces la masa del sol, la fuerza gravitatoria no alcanza a ser compensada por la presión de los electrones ni la de los neutrones y como consecuencia el núcleo continúa con su proceso de contracción por efecto de la gravedad; inmediatamente después de la explosión de supernova y en tal mecanismo de contracción, la gravedad se hace tan fuerte que distorsiona el espacio y el tiempo y como consecuencia se forma un agujero negro. En tal región se rompe todo contacto con

el universo, es decir la comunicación del astro con el exterior es nula; esto sucede a una distancia reconocible en la cual cualquier objeto que se acerque al astro el tiempo transcurre más despacio para aquél, de tal manera que cuando llegue a una distancia tal que la velocidad de escape clásica sea igual a la velocidad de la luz, el tiempo se detendrá para el objeto situado en tal lugar. Esto ocurre para un valor de $2GM/c^2$, que es el llamado radio de Schwarzschild. Este fenómeno según Hawking se resume en:

" Cuando la estrella haya consumido su combustible nuclear, nada quedará para mantener la presión exterior y el astro comenzará a contraerse por obra de su propia gravedad. Al encogerse la estrella, el campo gravitatorio de su superficie será más fuerte y la velocidad de escape ascenderá a los trescientos mil kilómetros por segundo, la velocidad de la luz... El resultado será un agujero negro: una región del espacio-tiempo de la que no es posible escapar hacia el infinito. La frontera del agujero negro recibe el nombre de horizonte de sucesos. Corresponde a una onda luminosa de choque procedente de la estrella que no consigue partir al infinito y permanece detenida en el radio de Schwarzschild".[14]

Subramayan Chandrasekhar en 1931 encuentra que para ciertas relaciones de radios y masas de las estrellas, a medida que ésta se comprime (su radio tiende a cero), la masa tiende a un límite finito y su cálculo indica que la masa que produce este fenómeno está dada por $M = 5.75\mu_e^{-2}M_\odot$, siendo $M_\odot$ la masa del sol y $\mu_e = 1.32$ el valor para una estrella compuesta por hidrógeno y helio similar al sol. Por lo que obtuvo un valor de masa crítica de $M = 3.3M_\odot$. Siguiendo a Isaza, el cálculo presentado para la masa crítica de una estrella que se colapsa, es más sencillo que el obtenido originalmente por Chandrasekhar.

Cuando por efectos termonucleares, el núcleo de la estrella se convierte en una masa de átomos estables, por ejemplo hierro la contracción adicional y el aumento de temperatura por efecto de la gravedad no genera energía. Por el contrario la estrella pierde energía por efecto de la radiación se reduce la presión, que por energía termonuclear soporta la estrella en algunas regiones y ésta puede colapsar. El colapso puede ser detenido en estrellas de masa menor que una masa crítica. Cuando los átomos están fuertemente comprimidos surge la presión de degeneración de los electrones. Si se asume una distribución homogénea de electrones, cada electrón está confinado en un cubo de arista Δx. La densidad electrónica n es:

$$n = \frac{1}{(\Delta x)^3}$$

$$\Delta x = \frac{1}{n^{1/3}} \tag{B-3}$$

A partir del principio de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

y de acuerdo a la ecuación (B-3), el principio puede ser escrito como:

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{\frac{1}{n^{1/3}}}$$
$$\Delta p \sim \hbar n^{1/3} \tag{B-4}$$

si se considera el flujo de los electrones como un fluido newtoniano que choca inelásticamente contra una pared y queda en reposo, la máxima presión se ejerce cuando su velocidad promedio tiende a c, de acuerdo a la figura B-1:

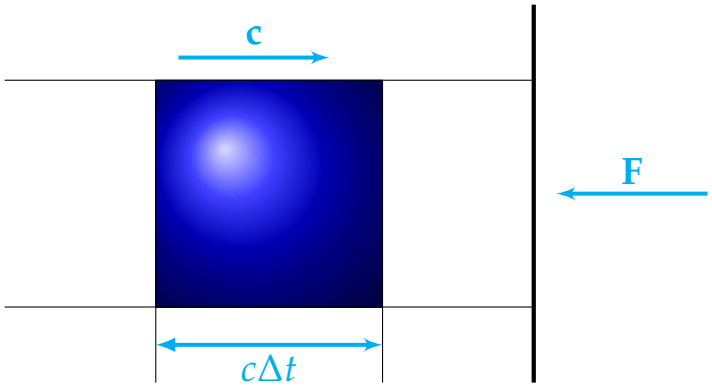

Figura **B-1**: *Presión de degeneración de electrones (Tomado de Isaza 2002, pag 40 [16]).*

Por el teorema de impulso momento se tiene que

$$\begin{aligned}\text{momento inicial} + \text{impulso} &= \text{momento final} \\ &= (\rho \Delta t c) Ac + pA\Delta t = 0 \\ m_e n \Delta t A c^2 + pA\Delta t &= 0 \\ p = -m_e n c^2 = -m_e c \cdot nc = nc = -\hbar n^{4/3} c\end{aligned}$$

donde m_e es la masa del electrón y A es el área de la sección transversal.

Esta fuerza debe crear una presión que equilibre la tendencia de la estrella a colapsar por atracción gravitacional. Por simplificación se considera que la estrella tiene un radio R y que la densidad es uniforme. La masa está compuesta fundamentalmente por protones, la densidad se aproxima a $\rho = n m_p \alpha$, en donde se desprecia la contribución que a la masa hacen los bariones (protones). y con

$$\alpha = \frac{\text{número de bariones}}{\text{número de electrones}}$$

m_p masa del protón.

La fuerza gravitacional que se ejerce sobre un cascarón esférico de espesor dr (ver figura B-2), está dada por

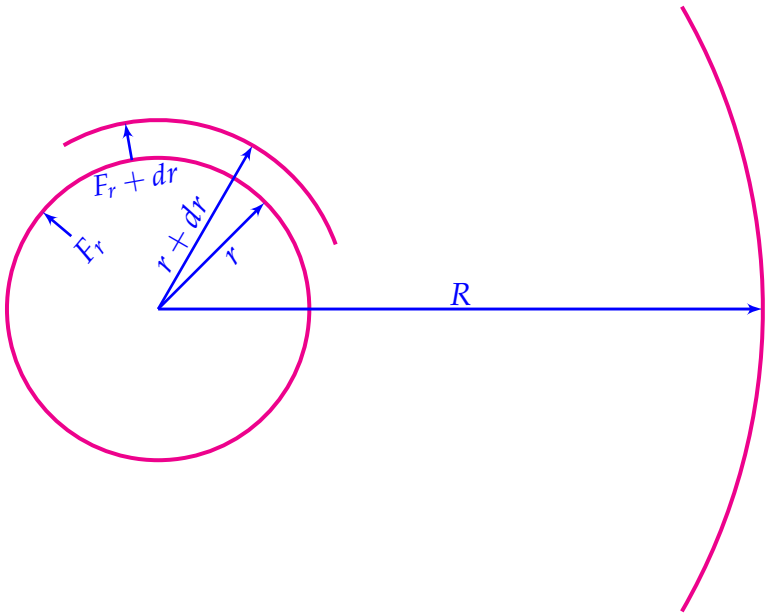

Figura **B-2**: *Diagrama para esquematizar la presión de radiación en una estrella colapsando gravitacionalmente. (Tomado de Isaza 2002, pag 35 [16]).*

$$dF = \frac{GM(r)}{r^2} dM(r) \tag{B-5}$$

de donde derivando se tiene que

$$dM(r) = 4\pi r^2 n m_p \alpha dr$$

y por lo tanto la ecuación (B-5) toma la forma

$$dF = \frac{1}{3}(4\pi)^2 r^3 G(n m_p \alpha)^2 dr \tag{B-6}$$

Por otra parte la fuerza neta que ejercen los electrones al colisionar está dada por

$$\begin{aligned} dF = dF &= F(r+dr) - F(r) \\ &= 4\pi\left((r+dr)^2 - r^2\right)P \\ &\sim 8\pi r P dr \\ &= 8\pi r \hbar n^{4/3} dr \end{aligned} \tag{B-7}$$

igualando (B-6) y (B-7) se tiene que

$$\frac{\frac{1}{3}r^2(4\pi)^2Gm^2\alpha^2}{8\pi r\hbar} = \frac{n^{4/3}}{n^2}$$
$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2Gm_p^2\alpha^2}{2\hbar} = \frac{1}{n^{2/3}}$$
$$n^{2/3} = \frac{3\hbar c}{2\pi r^2Gm_p^2\alpha^2} \tag{B-8}$$

Llamando M la masa de la estrella se tiene que

$$\rho = nm_p = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \tag{B-9}$$

a partir de (B-9)

$$n^{2/3} = \frac{M^{2/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi m_p\alpha\right)^{2/3}r^2} \tag{B-10}$$

igualando (B-8) y (B-10)

$$M^{2/3} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3}\frac{3\hbar c}{2\pi G\left(m_p\alpha\right)^{4/3}} \tag{B-11}$$

Es importante notar que la expresión para M es independiente del radio R de la estrella. M representa la masa máxima que puede soportar la presión degenerada de los electrones. En unidades geométricas

$$G = \hbar = c = 1$$

y considerando una estrella con núcleo de helio $\alpha = 2$

$$M = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{m_p^2}$$

en unidades de masa de Planck M_p, la masa del protón es

$$m_p = \frac{1.672\ X\ 10^{-24}g}{2.3\ X\ 10^{-5}g}M_p = 7.3\ X\ 10^{-20}M_p$$

$$M = 2.6\ X\ 10^{38} M_p = 5.96\ X\ 10^{33} g$$

y tomando como masa la del sol:

$$M_\odot = 2\ X\ 10^{33} g$$

se tiene que la masa crítica sería:

$$\frac{M}{M_\odot} \sim 3$$

Así que la masa crítica tiene un valor mayor que 3 veces la masa del sol.[16]

Más adelante en 1939 Robert Oppenheimer y Sayder, empleando las técnicas de la relatividad general como sería el colapso gravitacional de un objeto con simetría esférica y homogéneo (estrella ideal) y demuestran que tal esfera en este proceso pierde cualquier posibilidad de contacto con el resto del universo; es decir, es ahora una región aislada. Esta es la primera vez que se reconoce que puedn formarse agujeros negros relativistas. En 1963 Roy Kerr, Reissner y Nordstrom plantean las ecuaciones que describirían el colapso de cuerpos celestes con rotación y carga eléctrica, con lo que el modelo de agujero negro se hace maś realista.

En la década de los setentas, el trabajo revolucionario de Stephen Hawking crea una ruptura radical en torno a los conceptos medianamente intuitivos y firmemente consolidados en la Física, como lo son el de partícula y vacío; pues ahora vacío no es una condición de ausencia de campos electromagnéticos, sino que surge la condición de que en éste estado pueden crearse y aniquilarse partículas. En dicho artículo de 1974 Hawking plantea que en el vacío circundante en derredor de un agujero negro se producen una sinfonía de partículas y éste radía. Tal proceso se debe a que en condición de campos externos débiles, un fotón de alto nivel de energía (o alta frecuencia), por las fluctuaciones del vacío, puede dar origen a partículas masivas. Como se deben conservar los números cuánticos en el proceso y se origina con carga cero, deben crearse al menos dos partículas; una con carga positiva y otra con carga negativa. La energía de tal fotón debe ser al menos igual a la energía asociada a la masa de dos partículas de materia y antimateria. En las proximidades del agujero negro estas partículas reales tienen energía positiva y son estables, vida muy corta y por lo tanto son inestables (ver figura B-3). Por efectos de interacción electromagnética los pares partícula-antipartícula tienden a atraerse y aniquilarse dando origen a radiación gamma.

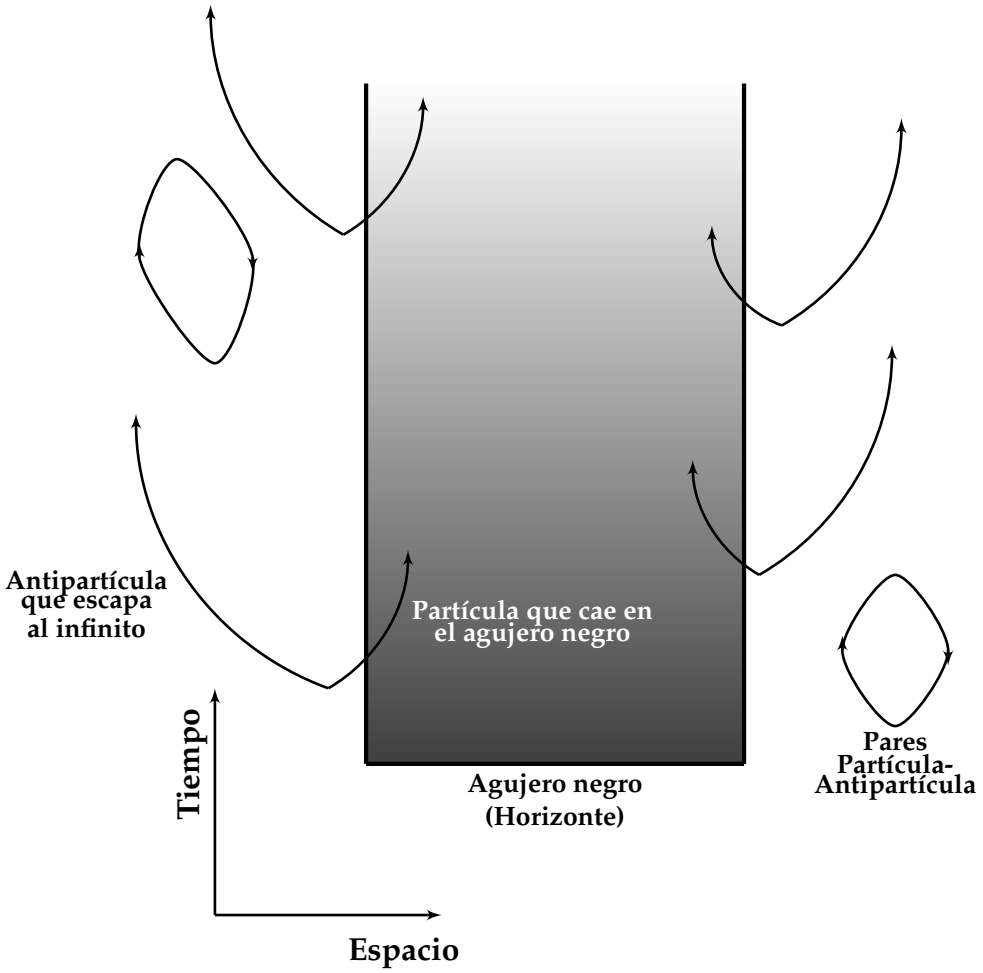

Figura **B-3**: *Diagrama para esquematizar la creación y aniquilación de pares partícula-antipartícula en las vecindandes de un agujero negro. (Tomado de Isaza 2002, pag 41 [16]).*

En el umbral del agujero, las partículas cambian el signo de la energía al cruzar el horizonte penetra al agujero y como no puede cancelarse con su partícula simétrica. Esto es lo que visto por un observador alejado parecería como si el agujero estuviese emitiendo partículas, que son las simétricas de las que entraron en el horizonte de sucesos. Es así que la energía se conserva, pues la energía çreada"por la partícula real que escapa es compensada por la disminución en la energía del agujero negro. Dado que el flujo de energía negativa que ingresa al agujero negro es el causante de la disminución de la masa proporcionalmente, lo que causa que el horizonte se reduzca y aumente su temperatura.[16]

Ya hablado el mecanismo de radiación propuesto por Hawking es preciso notar que dado que está ingresando masa en el agujero negro su masa crece y por lo tanto el radio del horizonte de sucesos, pero como se asume que no puede escapar ningún tipo de señal del umbral, entonces el área no disminuye. Si se piensa el área del agujero como una función

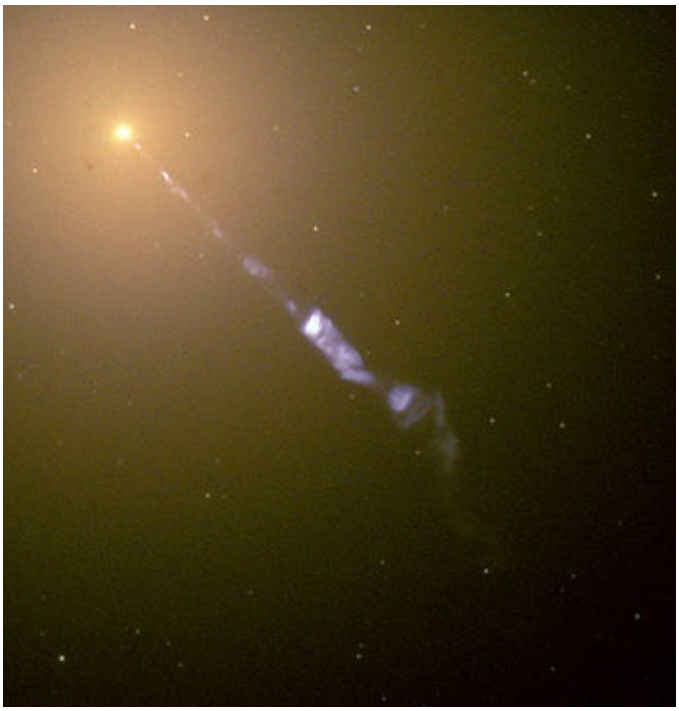

Figura **B-4**: *El núcleo de la galaxia elíptica gigante M87, donde hay evidencia de un agujero negro supermasivo. También se observa un potente chorro de materia eyectada. (Tomado de wikipedia [33]).*

de la entropía, en el momento que la materia caiga dentro ésta se lleva información y ésta no será posible recuperable de nuevo hacia el universo. Esta es una analogía con la entropía y si el agujero tiene entropía; entonces posee temperatura y por lo tanto debe emitir radiación. ¿Pero si nada puede escapar del agujero, entonces cómo posee temperatura?. Según Penrose 1969 de acuerdo al principio de incertidumbre de Heisenberg, como no es posible localizar un cuanto dentro de us longitud de onda y como la longitud de estos cuantos emitidos es del orden de magnitud del agujero; entonces no tiene sentido hablar de de origen de la emisión desde un punto en particular. [16]

Luego en 1975 Hawking demostró que dado el colapso gravitacional, la estrella genera un chorro de partículas, que subsiste hasta después que se ha transformado en agujero negro (B); este fenómeno es válido también para agujeros rotantes. Tal emisión de partículas tiene las características de una emisión termica, que bien puede ser que muestre las analogías cercanas entre la termodinámica y las leyes de los agujeros negros.

Como se piensa que la información que entró en el agujero se pierde y sólo sobreviven tres de sus características a saber: la masa M, su momento angular J y su carga eléctrica Q, pues las demás quedan atrapadas en la singularidad; puede que tal información aunque se pierde en nuestro universo, ésta viaje por el agujero negro hasta otro universo (*babyu-*

niverse.) claro que tal información estará en una configuración en forma de espaguetti.[12]

Esta condición me genera la pregunta acerca de la finitud del espacio, su frontera y su unicidad; dado que si existiesen tales otros universos, no sólo estaríamos ante una nueva estructura cosmológica, sino ante un nuevo esquema filosófico, pues hemos estado acostumbrados a un universo dotado de tales atributos, es difícil asumir fácilmente, ya nos hemos desligado de explicaciones metafísicas y teológicas acerca del orígen, evolución y destino, pues ya sabemos por lo menos en uno de tales; una muerte térmica. Hay que ver que planteamientos traiga el futuro en torno a la infinitud del universo, ya que según Koyré:

" El universo infinito de la nueva Cosmología, infinito en Duración así como en Extensión, en el que la materia eterna, de acuerdo con leyes necesarias y eternas, se mueve sin fin y sin objeto en el espacio eterno, heredó todos los atributos ontológicos de la divinidad. Pero sólo esos; todos los demás se los llevó consigo la divinidad con su marcha".[18]

Ni que decir de la materia, pues el concepto de vacío que tenía una definición clara desde la electrodinámica, ya en la teoría de campos obtiene una nueva significación, si no decir que implicaciones filosóficas:

" `El vacío no es un concepto objetivo`: La lengua inglesa permite distinguir dos vacíos. En Física clásica (no cuántica) el vacío (empty) es verdaderamente vacío, es la ausencia de estructura y fenómenos. En la mecánica cuántica (vacuum) el vacío es una estructura compleja y activa, muy lejos de ser vacía (empty). El vacío cuántico es un estado particular del campo cuántico. El estado mecánico cuántico en el cual no hay campos cuánticos excitados, es el estado de mínima energía. Por el principio de incertidumbre cada estado cuántico está sujeto a fluctuaciones. El vacío cuántico está lleno de campos cuánticos variables. No hay partículas reales involucradas, si el vacío es vacío, es decir si no hay campos electromagnéticos o gravitatorios presentes; solo hay partículas virtuales. Los pares virtuales partícula-antipartícula continuamente se materializan, se propagan por un corto tiempo y luego se aniquilan. Si en el vacío de partículas están presentes campos electromagnéticos o gravitatorios intensos, los pares virtuales pueden convertirse en partículas reales. El análisis cuantitativo de esta predicción se realiza por la denominada transformación de Bogoliubov ".[16]

Bibliografía

[1] BEKENSTEIN J.D, *The Limits of Information* gr-qc/0009019.

[2] BELINSKI V.A, *On the tunneling through the black hole horizon* hep-th/09103934 (2009).

[3] BIRRELL N.D; DAVIES P.C.W, *Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics* (1982).

[4] CARROLL, SEAN M, *Spacetime and Geometry an introduction to General Relativity, Addison Wesley* (2004).

[5] CARTER B, *Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. Phys.Rev.Lett* **26** (1971) 331.

[6] DUNAJSKI M., *Solitons, Instantons and Twistors, Oxford Graduate Texts in Mathematics.* (2010).

[7] FABBRI ALESSANDRO; NAVARRO JOSÉ, *Modeling Blach Hole Evaporation, Imperial College Press* (2005).

[8] FERNÁNDEZ J.M, *Radiación Hawking, Revista Mexicana de Física* **56(2)**(2010) 213-226.

[9] GAMOW G, *Quantum theory of the Atomic Nucleus, Z. Phys.* **51**(1928) 204.

[10] GARAY L.J, *Notas de Física de Agujeros Negros, Universidad Complutense de Madrid.* (2007).

[11] GIBBONS G.W; HAWKING S.W, *Action Integrals and partition functions in quantum gravity, Phys. Rev. Lett.* **15** (1977) 2752.

[12] HAWKING S.W, *Agujeros negros y pequeños universos. Grijalbo.* (2002)

[13] HAWKING S.W, *Black Holes in General Relativity Commun. math. Phys.* **25** (1972) 155-166.

[14] HAWKING S.W, *La historia del tiempo. Grijalbo.* (2002)

[15] HAWKING S.W, *Particle Creation by Black Holes, Commun. math. Phys.* **43** (1975) 199-220.

[16] ISAZA J.F, *Física de los agujeros negros, radiación de Hawking, Universidad de Caldas* (2000).

[17] KAPLAN I, *Física Nuclear, Aguilar Madrid* (1962).

[18] KOYRÉ A *Del universo cerrado al universo infinito. Siglo XXI.* (1992).

[19] KRAUS P; KESKI E. AND VAKKURI, *Tunneling in a time dependent setting, Nucl. Phys.* **491** (1997) 249.

[20] MUKHANOV V.F; WINITSKI S, *Introduction to Quantum Fiels in Classical Backgrounds.* (2004).

[21] PARIKH M, *A secret tunnel through the horizon*hep-th/0405160 (2004).

[22] PARIKH M, *Energy conservation and Hawking radiation*hep-th/0402166 V2 (2004).

[23] PARIKH M.K; WILCZEK F, *Hawking Radiation As Tunneling, Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5042 hep-th/9907001.

[24] PIZZI M, *The time factor in the semiclassical approach to the Hawking radiation*hep-th/09044572 (2009).

[25] RAZAVY M, *Quantum Theory of Tunneling, World Scientific.* (2003).

[26] ROBINSON D.C, *Uniqueness of the Kerr black hole. Phys.Rev.Lett* **34** (1975) 905.

[27] ROSE. WILLIAM K, *Advanced Stellar Astrophysics, Cambridge University Press.* (1998).

[28] RYDER L.H, *Quantum Field Theory, Cambridge University Press* (1996).

[29] SUSSKIND LEONARD; LINDESAY JAMES,*Black Holes, Information and the String Theory Revolution, World Scientific* (2005).

[30] TOWNSEND P.K,*Black Holes, Lecture Notes, University of Cambridge*.

[31] WALD ROBERT M. *General Relativity, The University of Chicago Press* (1984).

[32] UNRUH, *Notes on black-hole evaporation, Phys. Rev.* **14** (1976) 870.

[33] Agujero Negro: http://es.wikipedia.org/wiki/Agujero_negro