



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Riesgo de *default* y derivados de crédito modelados con cópulas

Autor:

Jarles Andrés MARIMON HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2019

RIESGO DE *default* Y DERIVADOS DE CRÉDITO MODELADOS CON CÓPULAS

JARLES ANDRÉS MARIMON HERNÁNDEZ

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Matemática Aplicada

Directora:

Alejandra SÁNCHEZ VÁSQUEZ

Línea de investigación:

Riesgo actuarial y financiero

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA

2019

A mi madre, Candelaria.

Agradecimientos

A mi directora de tesis Alejandra Sánchez Vásquez agradezco no solo por su profesionalismo en el acompañamiento de este trabajo sino también por su humanidad, por acogerme desde el primer momento e introducirme en el increíble mundo de las finanzas.

A mi madre por ser mi compañera, mi apoyo y mi motor para ser mejor cada día. También al señor Ómar Acosta y su familia quienes siempre han creído en mí y me han brindado su apoyo.

A todos los que aportaron directa o indirectamente para que esto fuera posible, muchas gracias.

Resumen

En este trabajo damos primero una introducción a la teoría de cópulas, la cópula Gaussiana y las cópulas arquimedianas. En la segunda parte, se consideran la terminología y los aspectos básicos de los derivados de crédito, así como también la estructura y fórmula de valoración de los CDO's. En la tercera parte, discutiremos algunas herramientas matemáticas previas al modelo de cópula Gaussiana propuesto por Li (2000) para la valoración de CDO's y modelar tiempos de *default*, luego mostraremos las limitaciones e inconvenientes del modelo de cópula Gaussiana en el contexto de la crisis financiera de 2007-2008. Por último, presentaremos algunas alternativas con el fin de superar las limitaciones encontradas en el modelo de cópula Gaussiana y mostraremos algunos resultados obtenidos por medio del método de Monte Carlo.

Palabras clave: (Cópulas, obligación colateralizada mediante deuda, correlación de *default*, valoración, modelo de cópula Gaussiana).

Abstract

In this work, we first give an introduction to copula's theory, Gaussian copula and archimedian copulas. In the second part, the terminology and the basic aspects of credit derivatives, as well as the structure and valuation formula for the CDO's are considered. In the third part, we discuss some mathematical tools previous to the Gaussian copula model proposed by Li (2000) for the valuation of CDO's and model *default* times, then we show the limitations and drawbacks of the Gaussian copula model in the context of the financial crisis of 2007-2008 . Finally, we present some alternatives in order to overcome the limitations found in the Gaussian copula model and we will show some numerical result obtained by the Monte Carlo Method.

Keywords: (Copula, Collateralized Debt Obligations, default correlation, valuation, Gaussian copula model).

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Transformaciones cuantil y de probabilidad	2
1.2. Cópulas	4
1.2.1. Ejemplos de cópulas	9
1.2.2. Cópula Gaussiana	14
1.3. Cópulas Arquimedianas	16
1.3.1. Cópulas Arquimedianas Multivariadas	18
1.4. Correlación como fuente de confusión	20
2. Derivados de Crédito	24
2.1. Terminología y aspectos básicos	25
2.1.1. ¿Qué es el riesgo de crédito?	25
2.1.2. ¿Qué causa el <i>default</i> ?: Eventos de Crédito	25
2.1.3. Tasa de recuperación	26
2.1.4. Clasificación o <i>rating</i> del Crédito	26
2.2. Un primer derivado de crédito: <i>Credit Default Swap</i> (CDS) . . .	27
2.3. <i>Collateralized Debt Obligation</i> (CDO)	30
2.3.1. Tramos de índices de CDS's	33
2.4. Valoración de un tramo de un CDO sintético	34
2.4.1. Distribución de pérdidas en los tramos de un CDO . . .	34
2.4.2. Valoración del <i>spread</i> para un tramo	36

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
3. Modelos para los tiempos de <i>default</i>	39
3.1. Modelos de forma reducida	39
3.2. Modelos de cópulas de factores	41
3.3. Modelo de cópula Gaussiana de un factor	44
3.4. Aplicación del modelo en la distribución de pérdidas	46
3.4.1. Modelo de cópula Gaussiana de un factor para un portafolio finito y homogéneo	46
3.5. Limitaciones y desventajas del modelo de cópula Gaussiana . . .	48
4. Modelos Alternativos de Cópulas	54
4.1. Mezcla de dos cópulas	54
4.2. Correlación de base	58
5. Implementación y Resultados Numéricos	62
6. Conclusiones	67
A. Resultados básicos de Probabilidad	69
A.1. Función inversa generalizada	69
A.2. Espacios de probabilidad	70
A.3. Procesos estocásticos	76
A.3.1. σ -álgebras e información	77
A.3.2. Martingalas y principios de valoración	78
A.4. Relación entre variables aleatorias	79
B. <i>Spreads</i> de la mezcla Gumbel - Clayton	82
C. Características del computador en el que se corrieron los códigos	88

Índice de figuras

1.1.	Histograma de la función cuantil evaluada en los datos generados y una curva exponencial de parámetro uno superpuesta. Fuente: Elaboración propia.	3
1.2.	Histograma de las probabilidades de los datos generados. Fuente: Elaboración propia.	4
1.3.	A la izquierda (Izq): Concentración de la distribución de $(U, U)^t$. A la derecha (Der): Concentración de la distribución de $(U, 1 - U)^t$. Fuente: Elaboración propia.	8
1.4.	Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula II. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula II. Fuente: Elaboración propia.	10
1.5.	Arriba: Gráfica de la cópula C_u y curvas de nivel. Abajo: Gráfica de la cópula C_l y curvas de nivel. Fuente: Elaboración propia.	11
1.6.	Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Frank de parámetro $\theta = 10$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Frank de parámetro $\theta = 10$. Fuente: Elaboración propia.	12
1.7.	Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Gumbel de parámetro $\beta = 2,5$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Gumbel de parámetro $\beta = 2,5$. Fuente: Elaboración propia.	13
1.8.	Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Clayton de parámetro $\theta = 0,8$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Clayton de parámetro $\theta = 0,8$. Fuente: Elaboración propia.	14

1.9. Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula Gaussiana de parámetro $\rho = 0,5$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula Gaussiana de parámetro $\rho = 0,5$. Fuente: Elaboración propia.	16
1.10. Gráficas de los generadores de las cópulas C_{β}^{Gu} , C_{θ}^{Cl} y C_{θ}^{Fr} para distintos parámetros. Fuente: Elaboración propia.	18
1.11. 1.000 realizaciones bivariadas de cuatro distribuciones (Gaussiana, Gumbel, Frank y Clayton) cuyas marginales siguen una distribución Gamma(3,1) y correlación $\rho = 0,7$. Se observan estructuras de dependencia distintas. Fuente: Elaboración propia.	22
2.1. Diagrama de un CDS. Fuente: Elaboración propia.	28
2.2. Diagrama de un CLO o CBO. Fuente: Elaboración propia.	31
2.3. Diagrama de un CDO sintético. Fuente: Elaboración propia.	33
3.1. Representación gráfica de la relación entre τ_i , U_i y $\exp(-\Gamma_{t,i})$. Fuente: Elaboración propia.	42
3.2. Correlación implícita bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del iTraxx Europe Series 8 - Fecha: 2007/11/02. Fuente: Xu (2014)	51
3.3. Sonrisa de correlación implícita bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del índice Dj-iTraxx Europe S5 - 10 años, Fecha: 2005/08/03. Fuente: Brigo et al. (2010)	52
3.4. <i>Spread</i> como función de la correlación compuesta por tramos del índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. (La línea horizontal corresponde al <i>spread</i> de mercado) Fuente: Brigo et al. (2010)	53
4.1. Izq: Correlación de base bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del índice Dj-iTraxx Europe S5 - 10 Años de maduración, Fecha: 2005/08/03. Der: Pérdidas esperadas sobre los tramos de equidad con porcentajes 3%, 6%, 9% y 22% correspondientes a la correlación de base calibrada. Fuente: Brigo et al. (2010)	59

4.2. <i>Spread</i> justo como función de la correlación de base por tramos del índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. (La línea negra corresponde al <i>spread</i> de mercado y las líneas claras corresponden a los márgenes mínimos y máximos que se pueden obtener variando la correlación compuesta). Fuente: Brigo et al. (2010)	60
4.3. Pérdidas esperadas sobre los tramos como función del tiempo correspondientes a las correlaciones de base calibradas para el índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. Fuente: Brigo et al. (2010)	61
5.1. <i>Spreads</i> por tramos calculados con mezcla Gumbel-Clayton cambiando los valores de β y θ . Fuente: Elaboración propia.	65
C.1. Características del Computador y tiempos de cálculo de 400 <i>spreads</i> para un tramo - software R	88

Introducción

El mercado de derivados financieros ha tenido un enorme crecimiento a lo largo de las últimas décadas y este crecimiento se ve reflejado principalmente en el surgimiento de productos muy sofisticados y complejos que se ajustan a cada una de las necesidades que tienen los agentes que operan en el mercado, muchos de estos nuevos productos han trascendido los mercados de tasas de interés, divisas, materias primas y capital para incluir el cubrimiento de otros riesgos subyacentes entre los que se destacan catástrofes, contaminación ambiental, inflación y crédito, este último es la razón de ser de los derivados de crédito, los cuales son contratos financieros bilaterales *over the counter* donde una de las partes involucradas se quiere asegurar ante aspectos específicos del riesgo de crédito generado por cierto instrumento subyacente, por ejemplo, el inmueble sobre el cual se presta, el objeto del crédito o la confiabilidad de la contraparte. Estos contratos permiten entonces que se comparta el riesgo de no pago o *default* entre dos partes a cambio de una prima periódica. Las innovaciones en este mercado han crecido en una tasa sin precedentes y muy seguramente seguirá así en el futuro cercano. Además, el aumento considerable en el volumen de las transacciones con este tipo de instrumentos, obliga a valorarlos de manera eficiente, rigurosa y cada vez matemáticamente más exigente. Por otra parte, la crisis económica mundial de 2008 puso de manifiesto el delicado problema que se enfrenta ante la ausencia de matemática suficientemente rigurosa en la valoración de estos instrumentos.

Uno de los derivados de crédito más importante ha sido el CDO (*Collateralized Debt Obligation*), que traduce Obligación Colateralizada mediante Deuda y fue el producto que estuvo en el epicentro de la crisis financiera de 2008 desencadenada por la burbuja inmobiliaria en los Estados Unidos. Estos productos están respaldados por otros activos como hipotecas, bonos o CDS's y los inversionistas que compran CDO's soportan el riesgo de crédito colateral por medio de diferentes tramos clasificados según la exposición al riesgo. A pesar de tener una

estructura bastante compleja tuvieron un gran auge debido a los rendimientos que ofrecían a los inversionistas, sin embargo los problemas surgieron a la hora de valorarlos de manera justa y consistente con las necesidades del mercado, el principal objetivo consistía en estudiar la probabilidad de *default* de varias compañías y su correlación, no era tarea fácil pero muchos académicos emprendieron la tarea de facilitar ese trabajo a las grandes compañías financieras. A principios del tercer milenio el matemático chino Li (2000) propuso el modelo de cópula Gaussiana para abordar el problema de valorar algunos derivados de crédito, este fue el método más popular durante algunos años debido a que su fácil implementación permitió expandir el mercado de derivados financieros a niveles impresionantes, con esto Li se convertía en uno de los actuarios más influyentes del mundo. No obstante, en épocas de crisis cuando estalla la gran burbuja y el mercado empieza a desplomarse debido a las **hipotecas *subprime***, los ojos de los grandes perdedores se centraron en un hombre y su fórmula: David Li y la cópula Gaussiana, muchos se atrevieron a aseverar que una simple fórmula matemática había provocado el desastre, incluso el empresario Warren Buffett se atrevió a calificar a estos derivados como ‘armas financieras de destrucción masiva’. Sin embargo como respondió el profesor de la Escuela Politécnica Federal de Zúrich (ETH Zurich) Paul Embrechts al escritor del reportaje “The formula that felled Wall St” Jones (2009), publicado el 24 de abril de 2009:

Sugerir que la fórmula de David Li es la culpable de la actual crisis financiera, es como culpar a la fórmula $E = mc^2$ de Einstein de la destrucción causada por la bomba atómica.

Existe evidencia académica de que las limitaciones del modelo propuesto por Li fueron ignoradas además, este era un trabajo académico y se obvió la distancia entre la realidad y la teoría.

A pesar que el volumen de transacciones con CDO's fue disminuyendo considerablemente desde la crisis de 2007-2008 y que en Colombia estos productos estructurados no son considerados valor según la Superintendencia Financiera de Colombia, se considera importante retomar el estudio de su estructura y valoración debido al retorno de estos productos al mercado mundial bajo el nombre de “Tramos de oportunidad a medida”, en inglés “Bespoke Tranche Opportunity (BTO)”. Lo expuesto anteriormente motiva el desarrollo de esta tesis, pues se estudiará el modelo de cópula Gaussiana propuesto por David Li, previo reconocimiento de la teoría de cópulas. Además se someten a análisis

las desventajas que presenta el modelo y se proponen algunas alternativas para valorar CDO's corrigiendo las limitaciones del modelo de Li.

Esta tesis está compuesta por 5 capítulos que inician con los aspectos fundamentales de la teoría de cópulas en el primer capítulo, el segundo capítulo pretende familiarizar al lector con los derivados de crédito, se da la terminología y aspectos básicos con el fin de comprender mejor la estructura de los CDS's y los CDO's, además se estudia la valoración de un tramo de CDO sintético. El tercer capítulo da las bases para modelar *default* y contiene el modelo de cópula Gaussiana junto con sus limitaciones. En el quinto capítulo se presentan las alternativas al modelo y por último se presentan algunos resultados numéricos obtenidos por el método de Monte Carlo respecto al modelo de Li y las alternativas usando como referencia el índice iTraxx Europe Series.

Capítulo 1

Preliminares

Un problema fundamental cuando se trabaja con vectores aleatorios es el de encontrar alguna relación funcional entre la función de distribución multivariada del vector y sus marginales de menor dimensión, claramente esta relación conservará la estructura de dependencia implícita entre las variables aleatorias, como respuesta a este asunto es el matemático Abe Sklar quien da la definición de cópula junto con el teorema que lleva su nombre, estos trabajos junto con los realizados por Höfding, Fréchet, Ferón, Schweizer y otros, se convierten en el punto de partida para el desarrollo de lo que ahora se conoce como la teoría de cópulas, (ver Erdely (2009)). En este primer capítulo se presentan algunos aspectos y propiedades relevantes de la teoría de cópulas.

Las variables aleatorias que se distribuyen uniforme juegan un papel importante en todo el desarrollo de este trabajo, por esta razón se comenzará con su definición.

Definición 1.0.1. *Una variable aleatoria continua X se distribuye uniforme estándar y se nota $X \sim U(0, 1)$, si su función de distribución está dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1. Transformaciones cuantil y de probabilidad

La siguiente proposición sobre las **transformaciones cuantil y de probabilidad** proporciona un par de relaciones entre la función cuantil y la distribución uniforme estándar.

Proposición 1.1.1. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y sea F^{-1} la función cuantil de F , es decir,*

$$F^{-1}(\alpha) = \inf \mathcal{D}_\alpha := \inf \{x : F(x) \geq \alpha\}$$

$\alpha \in (0, 1)$. Entonces

1. *Para cualquier variable aleatoria U que se distribuya uniforme estándar, se tiene que $F^{-1}(U) \sim F$.
Esto proporciona un método para simular variables aleatorias con función de distribución F .*
2. *Si F es continua entonces la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme estándar, esto es, $F(X) \sim U(0, 1)$.*

Una aplicación de la proposición anterior se presenta considerando una variable aleatoria X que se distribuye exponencial con parámetro 1 ($X \sim \exp(1)$), y dado que la función de distribución de una variable que se distribuye exponencial con parámetro $\lambda > 0$ es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

se puede obtener sin mayores complicaciones su función cuantil, la cual coincide con su función inversa y está dada por:

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}, & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Supóngase ahora que se quiere extraer una muestra de mil datos que sigan una distribución dada, por ejemplo, que sea de una variable $X \sim \exp(1)$. Lo primero que se debe hacer es generar 1.000 datos que se distribuyan $U(0, 1)$.

A continuación se evalúan estos 1.000 datos en la función cuantil de la función

de distribución exponencial y se construye un histograma que permita ilustrar el comportamiento de los datos. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 1.1, donde se puede notar un comportamiento similar entre el histograma obtenido y una curva $\exp(1)$.

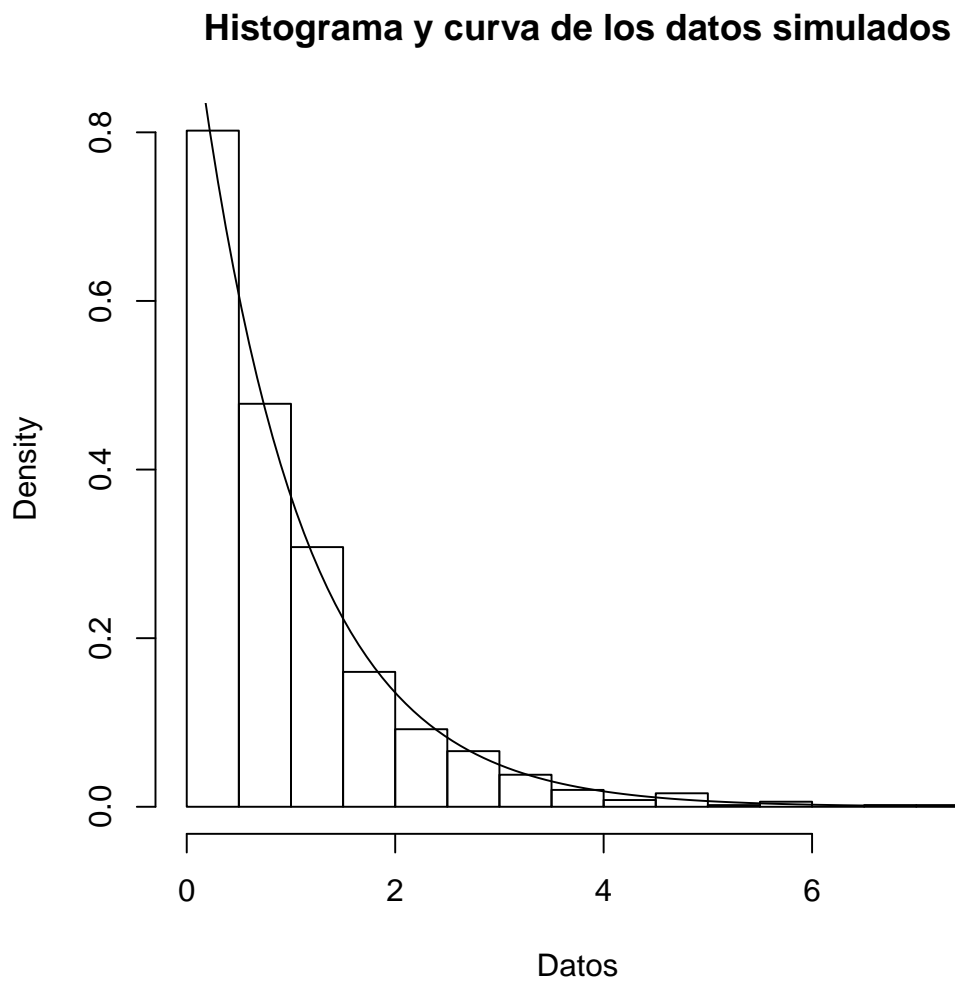


Figura 1.1: Histograma de la función cuantil evaluada en los datos generados y una curva exponencial de parámetro uno superpuesta. Fuente: Elaboración propia.

Para el segundo resultado de la proposición se generan ahora 1.000 datos de una distribución exponencial con parámetro 1, se evalúan estos en su función de distribución y una vez más se construye un histograma que permita observar el comportamiento de los datos. Como se puede apreciar en la Figura 1.2 se obtienen barras a la misma altura que permiten inferir una distribución de tipo

uniforme en los datos, es decir, $F(X) \sim U(0, 1)$.

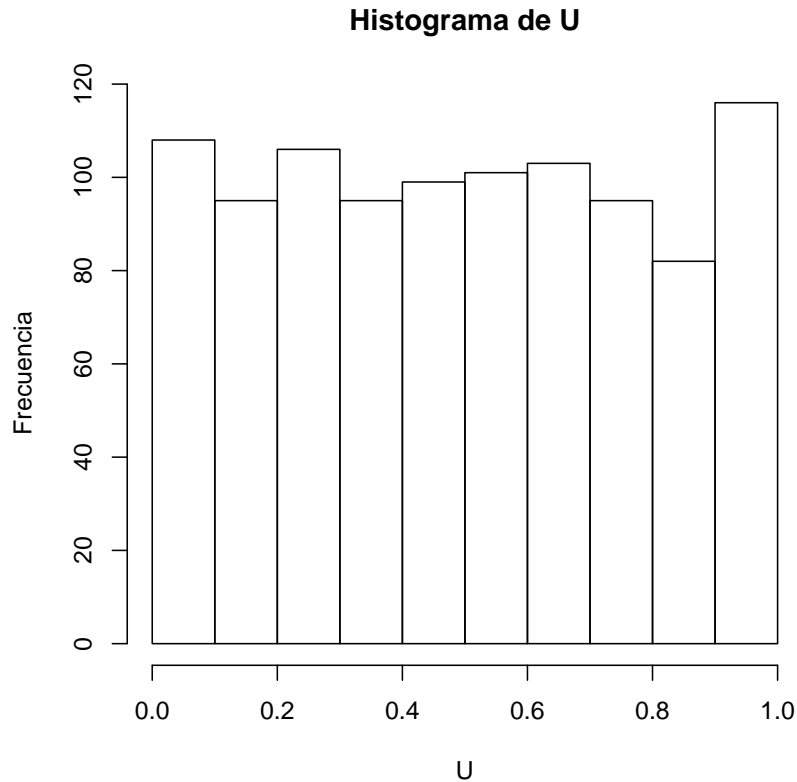


Figura 1.2: Histograma de las probabilidades de los datos generados. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados que se acaban de ilustrar tienen diferentes usos, entre ellos en análisis de datos estadísticos se usan para probar si un conjunto de observaciones se puede modelar o no con alguna distribución dada. En la siguiente sección serán de gran utilidad, ya que el problema de manipular la función de distribución de un vector aleatorio con distintas funciones de distribución marginal, se reduce a trabajar con la distribución uniforme que siguen cada una de ellas.

1.2. Cópulas

La estructura de dependencia entre n variables aleatorias dadas X_1, \dots, X_n está completamente descrita por su función de distribución conjunta $F(x_1, \dots, x_n) =$

$P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$, sin embargo el hecho de conocer las distribuciones marginales no permite asegurar, en general, el comportamiento de su función de distribución conjunta. Lo anterior motiva el surgimiento del concepto de cópula. Antes de dar la definición formal, se tratará de explicar la naturaleza de su surgimiento, para ello se considera el vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$, donde las variables aleatorias X_1, \dots, X_n tienen distribuciones marginales continuas F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , respectivamente. Se considera la transformación

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n)^t &\longmapsto (F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))^t \end{aligned}$$

se consigue así transformar el vector \mathbf{X} componente a componente en nuevas variables aleatorias que, asumiendo su continuidad se distribuyen $U(0, 1)$ según la Proposición (1.1.1). La función de distribución de este nuevo vector aleatorio es lo que se llamará la cópula del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ o de la función de distribución F . Lo anterior sumado a la Proposición A.2.4.2 permite concluir que

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definición 1.2.1. (Cópula) Una cópula n -dimensional C es la función de distribución de un vector aleatorio sobre $[0, 1]^n$ con marginales uniformes- $(0, 1)$. Alternativamente si se define $u_1 := F_{X_1}(x_1), \dots, u_n := F_{X_n}(x_n)$, una cópula es una función $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

1. $C(u_1, \dots, u_n)$ es no decreciente en cada componente u_i .
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0, 1]$.
3. Para todo $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ con $a_i \leq b_i$ se tiene que

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0, \tag{1.5}$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

La primera propiedad la requiere toda función de distribución y la segunda propiedad es condición necesaria de las distribuciones uniformes marginales. La

tercera propiedad, que se conoce como la desigualdad del hiperrectángulo, es menos evidente pero asegura que $P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq U_n \leq b_n)$ es un valor no negativo. Se puede comprobar la equivalencia de las anteriores definiciones teniendo en cuenta las propiedades de las funciones de distribución por un lado y usando el hecho que las marginales de la cópula son uniformes $(0, 1)$.

El teorema que se da a continuación puede considerarse el manantial de la teoría de cópulas y contiene la esencia del estudio de funciones de distribución multivariadas y cópulas, con su publicación en 1959 por el matemático Abe Sklar aparece por primera vez en la literatura matemática la palabra cópula. Su demostración se puede encontrar en (Nelsen, 2006, pág 46).

Teorema 1.2.1. (Teorema de Sklar) *Sea F una función de distribución conjunta con marginales F_{X_1}, \dots, F_{X_n} . Entonces existe una cópula $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tal que para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$,*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (1.6)$$

Si las marginales F_{X_1}, \dots, F_{X_n} son continuas, entonces C es única; en cualquier otro caso, C sólo está determinada de forma única sobre el conjunto $\text{Ran}F_{X_1} \times \text{Ran}F_{X_2} \times \dots \times \text{Ran}F_{X_n}$, donde $\text{Ran}F_{X_i}$ denota el rango de F_{X_i} . También, si C es una cópula y F_{X_1}, \dots, F_{X_n} son funciones de distribución univariadas, entonces la función F definida mediante (1.6) es una función de distribución multivariada con marginales F_{X_1}, \dots, F_{X_n} .

Si se evalúa en (1.6) $x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i), i = \{1, \dots, n\}$, y se supone que las distribuciones marginales $F_{X_i}, i = \{1, \dots, n\}$ son continuas, entonces se obtiene que

$$C(F_{X_1}(F_{X_1}^{-1}(u_1)), \dots, F_{X_n}(F_{X_n}^{-1}(u_n))) = F(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n))$$

y por la Proposición A.1.1.h se puede asegurar que

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)). \quad (1.7)$$

La anterior expresión proporciona una representación explícita de la cópula C en términos de F y sus marginales.

Adicionalmente se tiene un resultado derivado del teorema de Sklar para funciones de distribución de supervivencia. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con función de supervivencia multivariada S y distribuciones marginales

F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , además con distribuciones marginales de supervivencia S_{X_1}, \dots, S_{X_n} , es decir, $S_{X_i} = 1 - F_{X_i}$. Entonces la identidad

$$\begin{aligned} S(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \\ &= P(1 - F_{X_1}(x_1) \leq S_{X_1}(x_1), \dots, 1 - F_{X_n}(x_n) \leq S_{X_n}(x_n)) \\ &= \tilde{C}(S_{X_1}(x_1), \dots, S_{X_n}(x_n)) \end{aligned} \quad (1.8)$$

se tiene para alguna cópula \tilde{C} , la cual se llama **cópula de supervivencia**, es decir, \tilde{C} es la función de distribución del vector $1-U$, siendo $U := (F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_n}(X_n))$. Una identidad que relaciona una cópula C con su cópula de supervivencia \tilde{C} en el caso bivariado es la siguiente:

$$\tilde{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \quad (1.9)$$

Resulta conveniente en muchas situaciones ver el comportamiento de nuestros modelos probabilísticos cuando se les aplican cierto tipo de transformaciones; se verá en la siguiente proposición cómo las cópulas son invariantes bajo transformaciones estrictamente crecientes y continuas de las marginales. En consecuencia, esta será una gran ventaja frente a la propiedad de invariancia del coeficiente de correlación lineal que únicamente se cumple bajo transformaciones crecientes lineales. Además, se puede demostrar que en general bajo transformaciones estrictamente monótonas y marginales continuas, los cambios en la cópula son predecibles, Ver (Nelsen, 2006, pág 26).

Proposición 1.2.2. *Si $(X_1, \dots, X_n)^t$ tiene cópula C y T_1, \dots, T_n son funciones continuas estrictamente crecientes, entonces $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))^t$ también tiene cópula C .*

Otra característica importante es que cualquier cópula está acotada inferior y superiormente como se verá a continuación.

Teorema 1.2.3. (Cotas de Fréchet-Hoeffding) *Para toda cópula $C(x_1, \dots, x_n)$, se tiene que*

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n x_i + 1 - n, 0 \right\} \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq \min \{x_1, \dots, x_n\} \quad (1.10)$$

Además, $C_l(x_1, \dots, x_n) = \max \{ \sum_{i=1}^n x_i + 1 - n, 0 \}$ es una cópula para $n = 2$ y $C_u(x_1, \dots, x_n) = \min \{x_1, \dots, x_n\}$ es una cópula para todo $n \geq 2$.

En (McNeil et al., 2005, pág 188) se demuestran las desigualdades.

Para ver que C_l y C_u son cópulas se debe tener en cuenta que si se tiene la variable $U \sim U(0, 1)$ y si se llama a $V = 1 - U$, también $V \sim U(0, 1)$ y por tanto se puede ver que

$$C_l(x_1, x_2) = P(U \leq x_1, 1 - U \leq x_2) \quad (1.11)$$

$$C_u(x_1, \dots, x_n) = P(U \leq x_1, \dots, U \leq x_n) \quad (1.12)$$

Es decir, C_l y C_u son las funciones de distribución de los vectores $(U, 1 - U)^t$ y $(U, \dots, U)^t$ respectivamente.

La distribución del vector $(U, 1 - U)^t$ se concentra sobre diagonal entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$, mientras que la de $(U, U)^t$ se concentra sobre la diagonal entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ como se puede ver en la Figura 1.3.

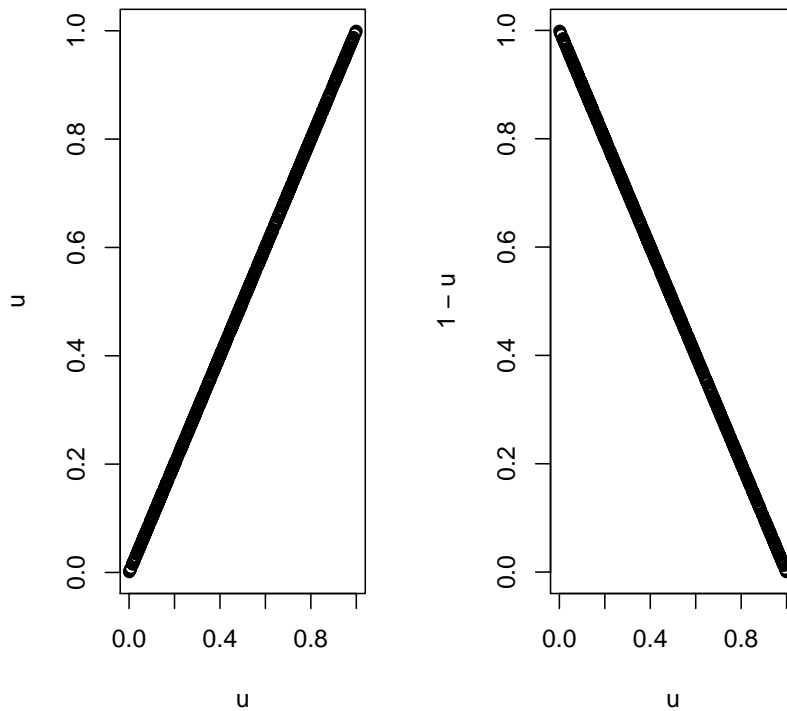


Figura 1.3: A la izquierda (Izq): Concentración de la distribución de $(U, U)^t$. A la derecha (Der): Concentración de la distribución de $(U, 1 - U)^t$. Fuente: Elaboración propia.

1.2.1. Ejemplos de cópulas

A continuación se dan algunos ejemplos de cópulas y se muestran sus gráficas para el caso bivariado. Las cópulas pueden ser clasificadas en fundamentales, implícitas y explícitas. Las cópulas fundamentales juegan un papel muy importante a la hora de referirse a medidas de dependencia; las cópulas implícitas se extraen de funciones de distribución conocidas usando el teorema de Sklar pero no necesariamente están expresadas de forma sencilla; las expresiones de las cópulas explícitas son más sencillas y se pueden construir usando las características matemáticas de las cópulas.

Cópulas fundamentales.

- **Cópula de independencia:**

$$\Pi(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

Esta cópula caracteriza variables aleatorias independientes, es decir, si por un lado se tiene en cuenta el hecho que dadas las variables aleatorias X_1, \dots, X_n con marginales F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , respectivamente y con función de distribución conjunta F , éstas son independientes si y solo si $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$, y por otro lado considerando la expresión (1.6), se puede afirmar entonces que X_1, \dots, X_n son independientes si y solo si su cópula es la cópula de independencia.

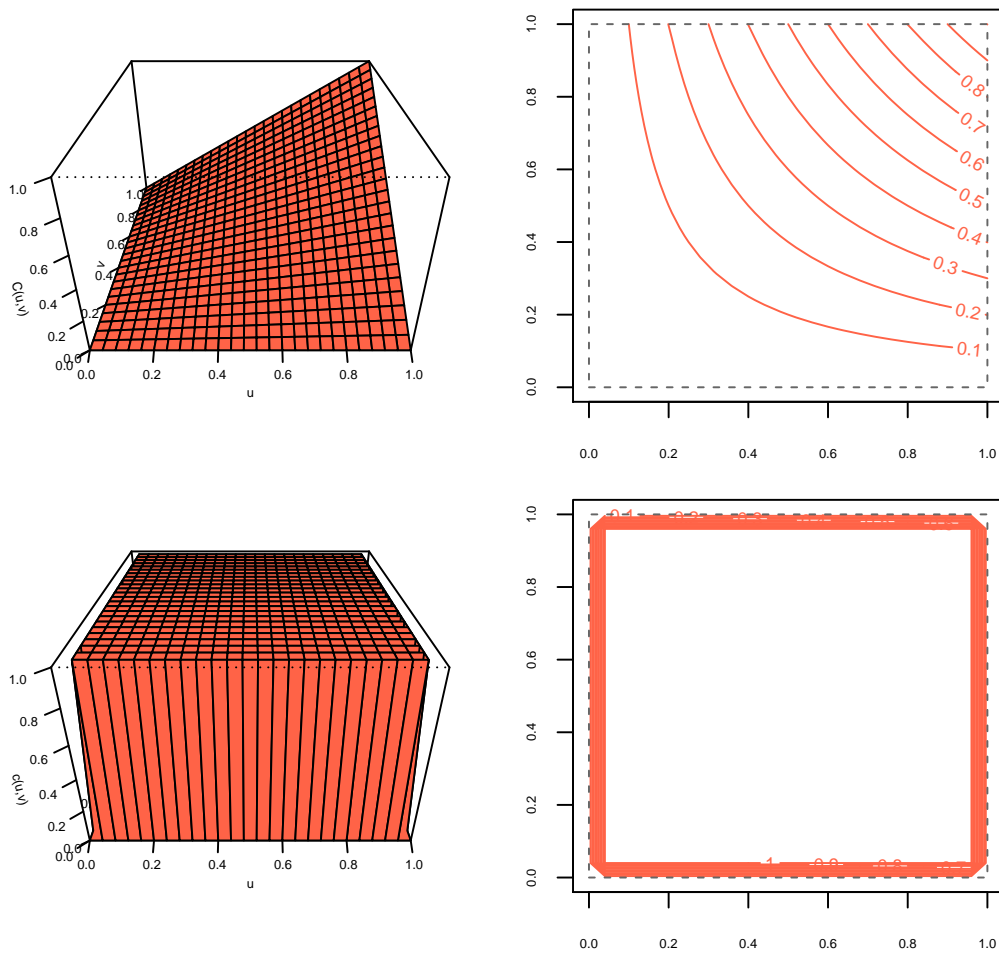


Figura 1.4: Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula II. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula II. Fuente: Elaboración propia.

■ Cotas Fréchet-Hoeffding

$$C_l(x_1, x_2) = \max \{x_1 + x_2 - 1, 0\}$$

$$C_u(x_1, x_2) = \min \{x_1, x_2\}$$

Este par de cópulas de las que se habló antes describen dependencia negativa perfecta y positiva perfecta¹ entre variables aleatorias, respectivamente.

¹En Embrechts et al. (2002) se hace mención y se formalizan estos términos debido a que las distribuciones C_l y C_u se concentran en las diagonales como se aprecia en la Figura 1.3.

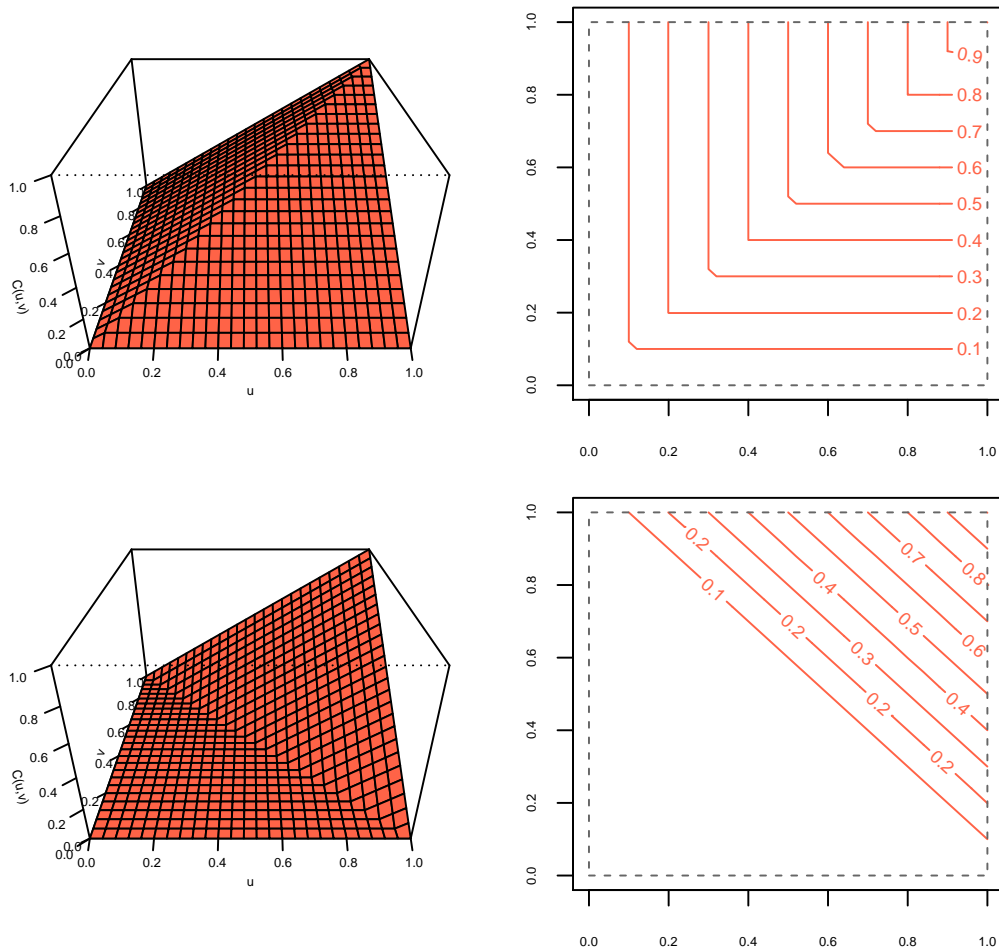


Figura 1.5: Arriba: Gráfica de la cópula C_u y curvas de nivel. Abajo: Gráfica de la cópula C_l y curvas de nivel. Fuente: Elaboración propia.

Cópulas explícitas.

- Familia de cópulas de Frank con parámetro $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$

$$C_{\theta}^{Fr}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta x_1) - 1)(\exp(-\theta x_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right) \quad (1.13)$$

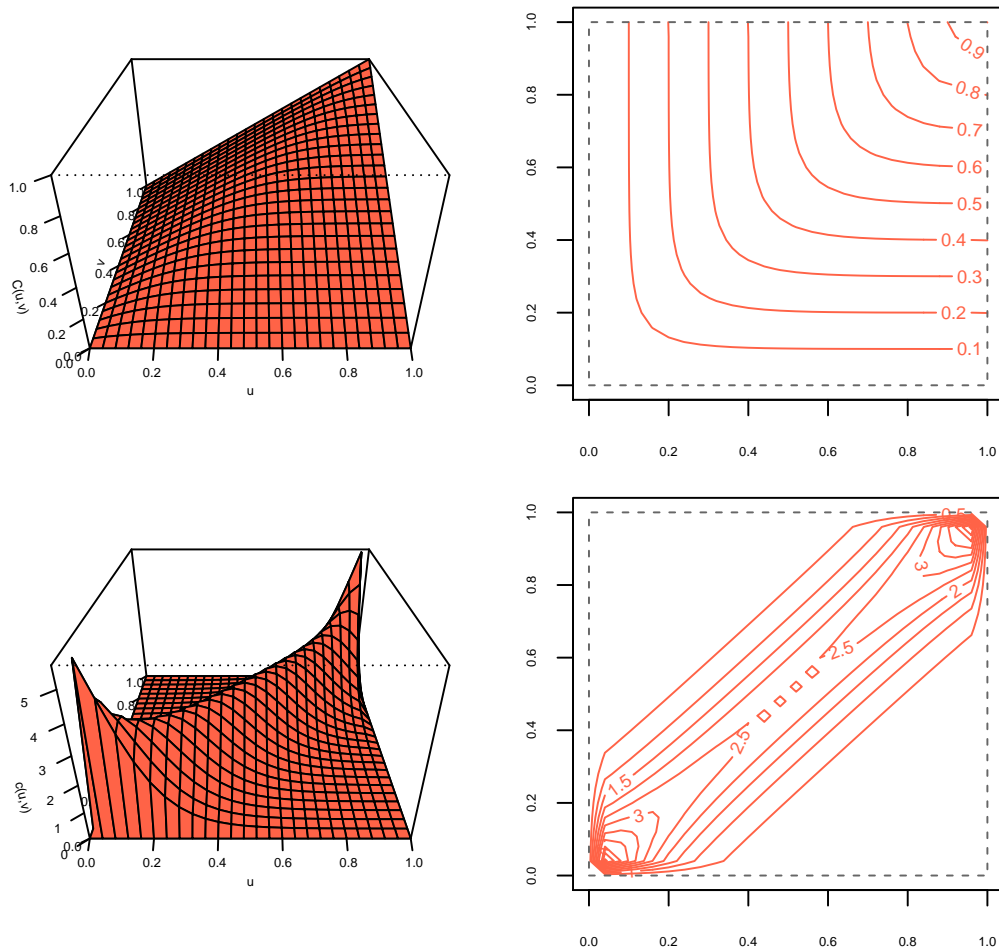


Figura 1.6: Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Frank de parámetro $\theta = 10$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Frank de parámetro $\theta = 10$. Fuente: Elaboración propia.

■ **Cópula de Gumbel o Logística**

$$C_{\beta}^{Gu}(x_1, x_2) = \exp \left[-\{(-\log x_1)^{\beta} + (-\log x_2)^{\beta}\}^{1/\beta} \right] \quad (1.14)$$

Donde $1 \leq \beta < \infty$ es un parámetro que controla la dependencia entre X_1 y X_2 ; por ejemplo si $\beta = 1$ se tiene que $C_{\beta}^{Gu} = \Pi$ y el límite de C_{β}^{Gu} es C_u cuando $\beta \rightarrow \infty$.

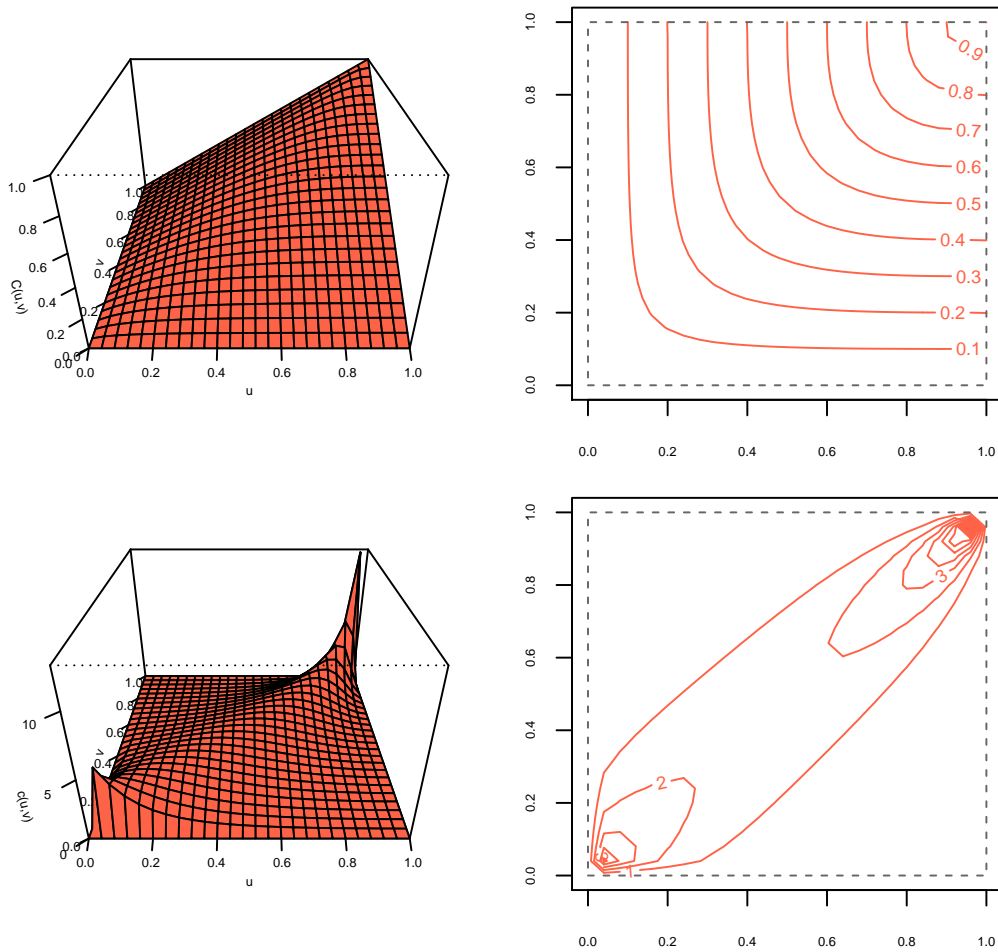


Figura 1.7: Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Gumbel de parámetro $\beta = 2,5$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Gumbel de parámetro $\beta = 2,5$. Fuente: Elaboración propia.

■ **Cópula de Clayton**

$$C_{\theta}^{Cl}(x_1, x_2) = (x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (1.15)$$

C_{θ}^{Cl} se aproxima a la cópula de independenciam cuando $\theta \rightarrow 0$ y se aproxima a C_u cuando $\theta \rightarrow \infty$.

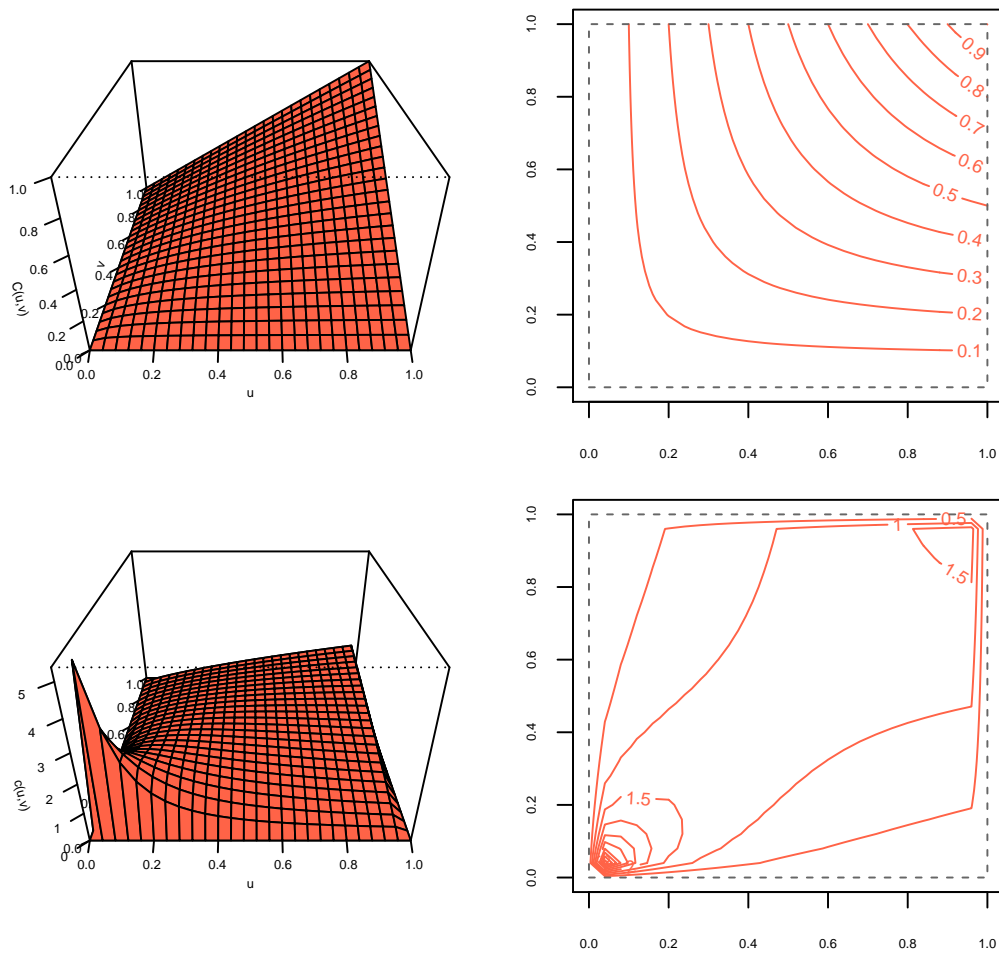


Figura 1.8: Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula de Clayton de parámetro $\theta = 0,8$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula de Clayton de parámetro $\theta = 0,8$. Fuente: Elaboración propia.

1.2.2. Cópula Gaussiana

La cópula Gaussiana hace parte de las cópulas implícitas y se le dedicará especial atención porque jugará un papel fundamental en el desarrollo del objetivo del presente trabajo. Recuérdese que si una variable aleatoria X tiene distribución normal estándar, esto es $X \sim N(0, 1)$, entonces su función de distribución Φ está dada por:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (1.16)$$

En general se tiene la siguiente definición,

Definición 1.2.2. (Distribución Normal Multivariada) El vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ tiene una distribución normal o Gaussiana multivariada, esto es $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, \Sigma)^2$, si

$$\mathbf{Y} = \mu + \mathbf{AZ} \quad (1.17)$$

Donde $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^t$ es un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (idd) normal estándar univariadas, $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$ son una matriz y un vector de constantes, respectivamente.

Se puede ver que $E(\mathbf{Y}) = \mu$ y que la matriz de covarianzas es $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \Sigma$, donde $\Sigma = AA^t$. Usando entonces la función característica de una distribución normal univariada se puede afirmar que \mathbf{Y} tiene una función de distribución absolutamente continua con densidad conjunta dada por la expresión:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mu)^t \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mu)\right\}, \quad (1.18)$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $|\Sigma| = \det \Sigma$.

Cópula Gaussiana. Si $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ es un vector aleatorio Gaussiano, entonces su cópula es llamada Cópula Gaussiana y está definida por la expresión:

$$C_{\Sigma}^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = P(\Phi(Y_1) \leq u_1, \dots, \Phi(Y_n) \leq u_n) \quad (1.19)$$

$$= \Phi_n^{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (1.20)$$

donde Φ_n^{Σ} es la función de distribución normal estándar multivariada.

Para $n = 2$ la función de distribución Gaussiana es

$$\Phi_2^{\rho}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{\frac{-(y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2)}{2(1 - \rho^2)}\right\} dy_2 dy_1,$$

donde $-1 < \rho < 1$ es el coeficiente de correlación entre las variables X_1 y X_2 , además la cópula Gaussiana C_{ρ}^{Ga} está dada por:

$$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1 - \rho^2)}\right\} ds dt, \quad (1.21)$$

por tanto, variables con función de distribución $C_{\rho}^{Ga}(\Phi(u_1), \Phi(u_2))$ son variables normal estándar bivariada con coeficiente de correlación ρ . En la Figura 1.9

²También se puede simbolizar $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, \mathcal{P})$, donde \mathcal{P} es la matriz de correlaciones, esto es, cada entrada (i, j) de \mathcal{P} es igual a $\rho(Y_i, Y_j)$

se aprecian las gráficas y curvas de nivel de la función de densidad y cópula Gaussiana si $\rho = 0,5$.

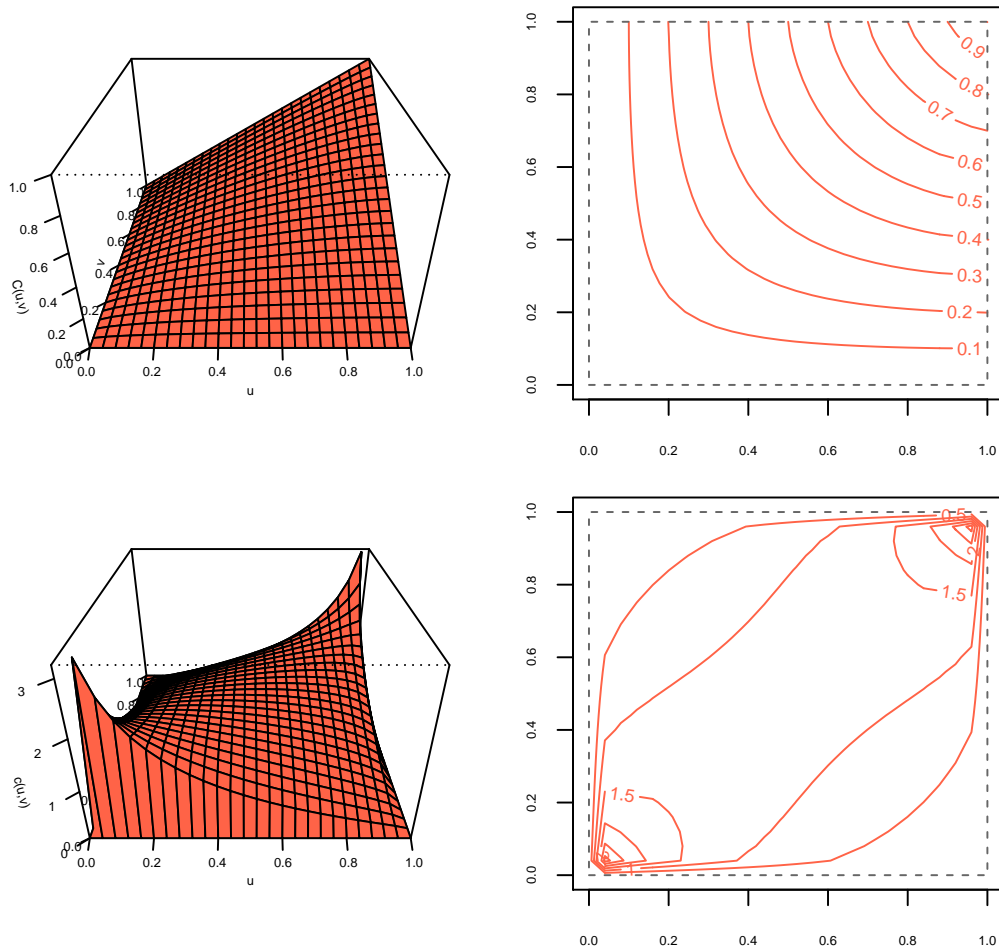


Figura 1.9: Arriba: Gráfica y curvas de nivel de la cópula Gaussiana de parámetro $\rho = 0,5$. Abajo: Gráfica y curvas de nivel de la función de densidad de la cópula Gaussiana de parámetro $\rho = 0,5$. Fuente: Elaboración propia.

Más adelante se verán otras propiedades de la cópula Gaussiana

1.3. Cópulas Arquimedianas

Algunas cópulas como la de Gumbel, Clayton y Frank vistas en la subsección 1.2.1 pertenecen a una familia particular de cópulas llamadas cópulas Arquime-

dianas, estas cópulas poseen diversas aplicaciones debido a sus bondades entre las que se destacan, la facilidad con la que pueden ser construidas, la gran variedad de familia de cópulas que pertenecen a esta clase y las muchas otras propiedades que poseen los miembros de la misma como se afirma en Nelsen (2006). Estas cópulas son importantes en el desarrollo de esta tesis por tanto se estudiarán algunas de sus propiedades. Se inicia con el estudio de cópulas Arquimedianas bivariadas y luego se verá la construcción de cópulas Arquimedianas multivariadas como en McNeil et al. (2005).

Teorema 1.3.1. (Cópula Arquimediana Bivariada) Sea $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente donde $\phi(1) = 0$. Entonces

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (1.22)$$

es una cópula si y solo si ϕ es convexa. Aquí $\phi^{[-1]}$ es la pseudo inversa de ϕ definida por:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ 0, & \phi(0) < t < \infty. \end{cases} \quad (1.23)$$

Demostración. Ver (Nelsen, 2006, pág 111). □

A la función ϕ se le llama generador de la cópula, además si se cumple que $\phi(0) = \infty$ se dice que ϕ es un generador estricto y en este caso $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$, es decir, la inversa y la pseudo inversa coinciden.

Cópula	Generador $\phi(t)$	Rango del parámetro	Estricto
C_{β}^{Gu}	$(-\ln t)^{\beta}$	$\beta \geq 1$	Sí
C_{θ}^{Cl}	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq -1$	Solo si $\theta \geq 0$
C_{θ}^{Fr}	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$\theta \in \mathbb{R}$	Sí

Cuadro 1.1: Tabla con los generadores de 3 cópulas Arquimedianas.

En el Cuadro 1.1 se resumen la información de 3 cópulas Arquimedianas y en la Figura 1.10 se ve la gráfica los generadores de cada cópula cuando se varían los parámetros.

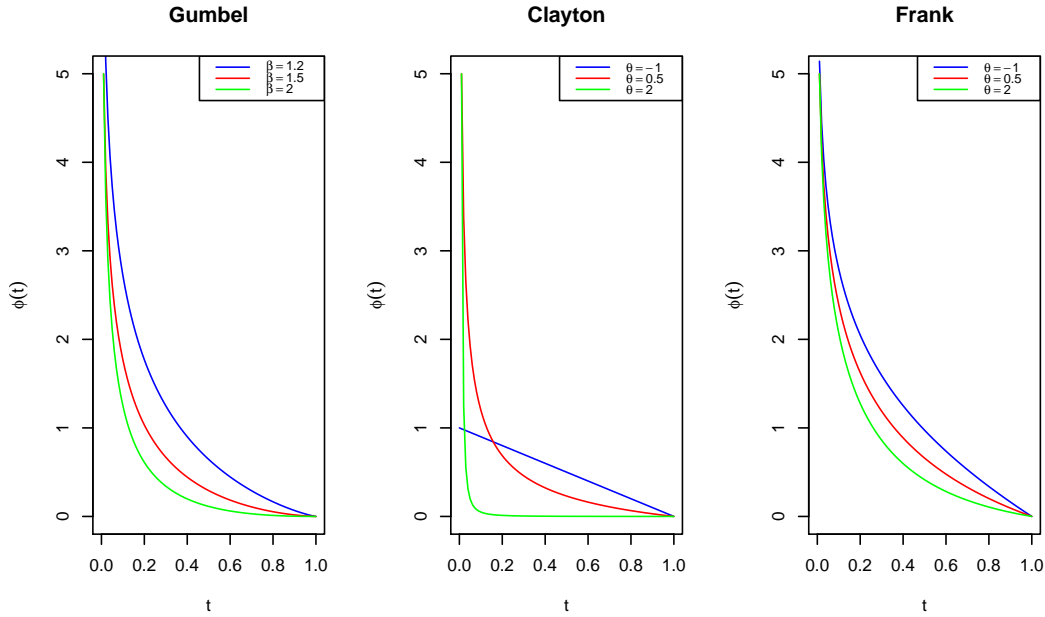


Figura 1.10: Gráficas de los generadores de las cópulas C_{β}^{Gu} , C_{θ}^{Cl} y C_{θ}^{Fr} para distintos parámetros. Fuente: Elaboración propia.

1.3.1. Cópulas Arquimedianas Multivariadas

Para cópulas Arquimedianas de dimension $n, n \geq 3$, se deben considerar algunas propiedades adicionales a la hora de su construcción si se pensara en una generalización de la expresión (1.22) dada por $C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))$, de lo contrario el método puede fallar como ocurre si se elige el generador $\phi(t) = 1 - t$ y se introduce en la anterior ecuación; en este caso se genera la cota inferior del Teorema 1.2.3, la cual no es cópula para $n > 2$. Una generalización de (1.22) requiere la siguiente definición:

Definición 1.3.1. (Widder (1941)) Una función $g(t)$ es completamente monótona sobre un intervalo J si ésta satisface que:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, t \in J. \quad (1.24)$$

El siguiente teorema demostrado por Kimberling (1974) da las condiciones necesarias y suficientes para que un generador estricto ϕ genere una cópula Arquimediana para $n \geq 2$.

Teorema 1.3.2. *Sea $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ un generador estricto de cópula Arquimediana, entonces*

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \quad (1.25)$$

es una cópula para $n \geq 2$ si y solo si el generador inverso $\phi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ es completamente monótono.

Todos los generadores que se muestran en el Cuadro 1.1 son completamente monótonos sobre $[0, \infty]$ ($\theta \geq 0$ para la cópula de Clayton), por tanto usando la construcción de la expresión (1.25) se pueden obtener las generalizaciones a dimensión n de las cópulas de Gumbel, Frank y Clayton, las cuales se dan a conocer junto con su generador inverso (G.I) a continuación:

- $C_\beta^{Gu, \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \exp[-\{(-\log x_1)^\beta + \dots + (-\log x_n)^\beta\}^{1/\beta}]$,

$$G.I = \phi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\beta}), \quad \beta \geq 1.$$

- $C_\theta^{Cl, \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (x_1^{-\theta} + \dots + x_n^{-\theta} - n + 1)^{-1/\theta}$,

$$G.I = \phi^{-1}(t) = (1 + t)^{-1/\theta}, \quad \theta \geq 0.$$

- $C_\theta^{Fr, \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta x_1) - 1) \dots (\exp(-\theta x_n) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)^{n-1}} \right)$,

$$G.I = \phi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln [1 - (1 - \exp(-\theta)) \exp(-t)], \quad \theta \geq 0.$$

Otra forma de generar cópulas Arquimedianas de cualquier dimensión es por medio de la transformada de Laplace-Stieltjes³ de funciones de distribución sobre \mathbb{R}^+ , ya que toda función completamente monótona de $[0, \infty]$ a $[0, 1]$ puede ser expresada en términos de tal transformada como lo afirma Feller (1968) en el siguiente resultado

³Si H es una función de distribución, entonces $\hat{H}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta v) dH(v)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes de H .

Teorema 1.3.3. *Una función \hat{G} sobre $[0, \infty]$ es la transformada de Laplace-Stieltjes de una función de distribución G si y solo si \hat{G} es completamente monótona y $\hat{G}(0) = 1$.*

\hat{G} es entonces un candidato para un generador inverso de cópula Arquimediana. El siguiente teorema muestra cómo puede ser usada la transformada de Laplace-Stieltjes para construir vectores aleatorios cuyas distribuciones sean cópulas Arquimedianas multivariadas.

Teorema 1.3.4. *Sea G una función de distribución sobre \mathbb{R}^+ tal que $G(0) = 0$ y transformada de Laplace-Stieltjes \hat{G} donde $\hat{G}(\infty) := 0$. Sea V una variable aleatoria con función de distribución G y sean U_1, \dots, U_n una sucesión de variables aleatorias que son condicionalmente independientes dada V , además si la función de distribución condicionada está dada por $F_{U_i|V}(u|v) = \exp(-v\hat{G}^{-1}(u))$, $u \in [0, 1]$. Entonces*

$$P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) = \hat{G}(\hat{G}^{-1}(u_1) + \dots + \hat{G}^{-1}(u_n)), \quad (1.26)$$

de esta manera la función de distribución del vector $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ es una cópula Arquimediana con generador $\phi = \hat{G}^{-1}$.

Demostración. Ver (McNeil et al., 2005, pág 223). □

Se cierra esta sesión con la siguiente definición.

Definición 1.3.2. *(Cópula Arquimediana LT) Una cópula Arquimediana LT es una cópula como en (1.25), donde ϕ es la inversa de la transformada de Laplace-Stieltjes de una función de distribución G sobre \mathbb{R}^+ que satisface que $G(0) = 0$.*

Estas cópulas son muy importantes en el campo del riesgo de crédito y se mencionarán más adelante.

Se cerrará este capítulo mostrando un par de razones por las que introducir cópulas para modelar estructuras de dependencia entre variables aleatorias resulta más adecuado en lugar del coeficiente de correlación.

1.4. Correlación como fuente de confusión

A pesar de ser la correlación una medida de dependencia que se encuentra en muchos modelos actuales de finanzas y riesgo, también es cierto que no ha sido debidamente comprendida, al respecto en Embrechts et al. (2002) se afirma que parte de la confusión puede surgir del uso literario de la palabra correlación para referirse a cualquier noción de dependencia. Para los matemáticos la correlación es solo una medida particular de dependencia estocástica, la cual se ha vuelto la medida canónica en el mundo de las distribuciones elípticas y esféricas, familias a la que pertenece la distribución normal multivariada. Sin embargo, investigaciones empíricas en finanzas y seguros han demostrado que las distribuciones del mundo real rara vez son de esta clase.

En Brigo et al. (2013) se presenta el siguiente ejemplo: Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar y sea $Y = X^5$. Claramente Y es una transformación uno a uno de X y, por tanto, al dar la misma información la correlación entre ellas debe ser 1, es decir, máxima dependencia. Sin embargo, al calcular $\rho(X, Y)$ se tiene que

$$\rho(X, Y) = \frac{E[X^5 X] - E[X^5]E[X]}{\sigma[X^5]\sigma[X]} = \sqrt{\frac{5}{21}} < 1,$$

lo anterior muestra que en este caso la correlación no es una buena medida de dependencia y seguramente en muchas otras situaciones puede fallar.

Considérese ahora el mismo ejemplo introduciendo una nueva variable $Z = X$. La cópula del vector (X, Z) debe ser la cópula de máxima dependencia así como también $\rho(X, Z) = 1$. Esta cópula es la distribución de $U_1 = F_X(X)$ y $U_2 = F_Z(Z) = F_X(X) = U_1$, por tanto

$$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = P(U_1 \leq \min\{u_1, u_2\}) = \min\{u_1, u_2\} = C_u(u_1, u_2),$$

es decir, la cópula que describe la dependencia positiva perfecta entre X y Z . Si se considera ahora la variable $Y = X^5$ y $U_3 = F_Y(Y)$, nótese que

$$F_{X^5}(x^5) = P(X^5 \leq x^5) = P(X \leq x) = F_X(x), \quad \text{para todo } x,$$

luego

$$U_3 = F_Y(Y) = F_{X^5}(X^5) = F_X(X) = U_1.$$

Al considerar la cópula del vector (X, Y) se tendrá, dado que $U_3 = U_1$, lo siguiente

$$P(U_1 \leq u_1, U_3 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) = \min\{u_1, u_2\} = C_u(u_1, u_2).$$

La expresión anterior pone en evidencia dos cosas, por un lado que X y X^5 tienen máxima dependencia como se quería conseguir y además la Proposición 1.2.2 por otro lado, pues al aplicarle una transformación al vector aleatorio inicial se ha conservado la cópula.

Otra ilustración de las bondades de las cópulas sobre el coeficiente de co-

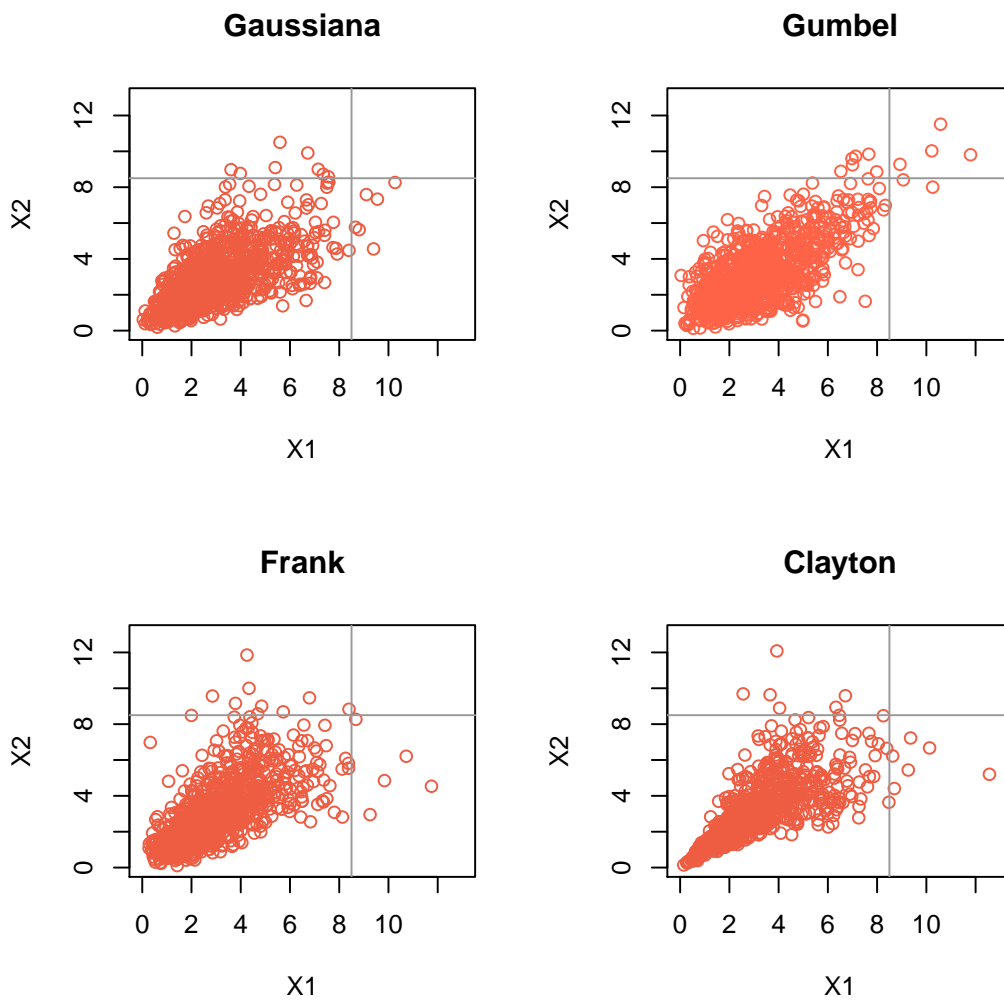


Figura 1.11: 1.000 realizaciones bivariadas de cuatro distribuciones (Gaussiana, Gumbel, Frank y Clayton) cuyas marginales siguen una distribución $\text{Gamma}(3,1)$ y correlación $\rho = 0,7$. Se observan estructuras de dependencia distintas. Fuente: Elaboración propia.

rrelación se aprecia en la Figura 1.11 donde se observan 1.000 realizaciones bivariadas de cuatro modelos diferentes para dos variables aleatorias X_1 y X_2 ,

$(C_{0,7}^{Ga}, C_{1,82}^{Gu}, C_{6,52}^{Fr}$ y $C_{3,83}^{Cl})^4$. En todos los modelos X_1 y X_2 tienen distribuciones marginales idénticas Gamma(3,1) y la correlación lineal entre ellas es 0.7. Sin embargo, se observa de inmediato que las estructuras de dependencia entre X_1 y X_2 difieren en cada modelo, por ejemplo si las variables aleatorias representaran distribuciones de pérdidas, los modelos bajo la cópula de Gumbel y de Clayton se considerarían más peligrosos desde el punto de vista del asegurador, pues hay una tendencia a que ocurran más eventos extremos en estos casos. Estos aspectos serán considerados más adelante en este trabajo.

⁴Los modelos de cópula Gaussiana y de Gumbel son tomados de Embrechts et al. (2002), para efectos de la ilustración en este trabajo se calcularon los parámetros de las cópulas de Frank y Clayton por métodos numéricos haciendo uso de la identidad de Höfding, la cual se encuentra también en Embrechts et al. (2002).

Capítulo 2

Derivados de Crédito

Los derivados de crédito se han convertido en la principal herramienta para transferir y cubrir riesgo en los últimos años, dos de los más importantes de ellos se introducen a continuación, los *Credit Default Swap* (CDS) y los *Collateralized Debt Obligation* (CDO); estos hacen parte de un mercado que ha crecido rápidamente tanto en volumen como en el tipo de instrumentos que ofrece y del que se ha experimentado una gran cantidad de aplicaciones, estas van desde el cubrimiento del riesgo de *default*, liberar líneas de crédito, reducir los requerimientos de capital regulador e incluso se han convertido en instrumentos de uso especulativo con los cuales se apuesta y ataca a la deuda pública de algunos países como es el caso de Grecia durante la crisis de 2010, en ese entonces la incertidumbre sobre la capacidad estatal para cumplir con sus obligaciones de deuda se incrementó luego de saberse que las cifras sobre los niveles de deuda pública y déficit presupuestario se venían declarando de manera irregular por el gobierno griego desde el año 2000. Esto llevó a una crisis de confianza, que generó el desplome de la Bolsa de Atenas y aumentó los diferenciales de rendimiento de los bonos y el costo del seguro de riesgo sobre los CDS.

Como evidencia del enorme crecimiento de este mercado, se afirma en Cherubini et al. (2004) que el saldo pendiente de los contratos de derivados de crédito incrementó de USD 50 billones en 1996 a casi USD 500 billones a finales del 2000 y que en 2004 esa cifra iba en aumento, el uso excesivo de CDO's se vio respaldado por el modelo de valoración basado en la cópula Gaussiana que se presentará en este capítulo. Sin embargo como es de conocimiento de todos, las cosas se fueron saliendo de control y estalló la gran burbuja inmobiliaria salpicando principalmente a los mercados financieros por lo que parecía una forma

incorrecta de medir el riesgo de incumplimiento. Los ojos ahora estaban sobre los CDO's y quien entonces propuso la aparente forma incorrecta de valorarlos, el actuario chino David X. Li. Se presenta en este capítulo una introducción a la terminología, generalidades y estructura de los CDS's y CDO's, además se estudia una fórmula de valoración de un tramo del CDO.

2.1. Terminología y aspectos básicos

Antes de escudriñar en los objetivos principales del trabajo, se plantearán de manera breve algunas preguntas que, aunque parezcan obvias, pueden surgir en adelante. Estos resultados pueden encontrarse y profundizarse en Chacko et al. (2015), Schönbucher (2003) y McNeil et al. (2005).

2.1.1. ¿Qué es el riesgo de crédito?

La Real Academia Española (RAE) define riesgo como “una contingencia o proximidad de un daño”. En finanzas el riesgo de crédito representa la posibilidad de que un prestatario no le pague a su prestamista. Así, la palabra *crédito* representa un concepto económico poderoso que permite usar el dinero de otra persona o entidad con la responsabilidad de devolverlo bajo ciertas condiciones, incumplir dichas condiciones impulsa el estudio del riesgo de crédito. El crédito se puede otorgar de muchas maneras, entre ellas se encuentran los préstamos representados en tarjetas de crédito, hipotecas o bonos gubernamentales y corporativos. Cuando una compañía o persona no pueda cumplir con sus obligaciones se dirá que entra en *default*.

2.1.2. ¿Qué causa el *default*?: Eventos de Crédito

Algunas de las causales de *default* estandarizadas por la International Swap and Derivatives Association (ISDA) son:

- bancarrota,
- falta de pago,
- reestructuración de las obligaciones,

- aceleración del pago,
- repudio o moratoria,
- intervención gubernamental,
- incumplimiento de las obligaciones,
- caída de la calificación por debajo del umbral establecido.

2.1.3. Tasa de recuperación

Una vez ocurre que una entidad entra en *default*, empieza un proceso de liquidación en el que se puede recuperar una parte de la obligación, esa proporción se llama la tasa de recuperación. Para entenderlo se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. Por ejemplo, suponga que compra un bono cero cupón del tesoro nacional con un año de maduración. Ya que estos bonos están garantizados por el gobierno de Colombia, son considerados virtualmente libres de riesgo. Si le ofrecen un rendimiento del 6 % en un bono que paga \$100 en su maduración, el precio que debe pagar en el momento de la compra es:

$$\frac{\$100}{1,06} = \$94,34.$$

Sin embargo, si quiere realizar la misma compra a una entidad privada, es decir, adquirir un bono corporativo; entonces se pierde la garantía de no incumplimiento y por tanto hay un riesgo de *default*. Si usted estima que este riesgo es de 10 % y que si en caso de *default* podrá recuperar el 70 % del valor del bono, entonces 70 % es la tasa de recuperación. El valor esperado del bono bajo estas condiciones está dado por la expresión $\$100 \cdot 0,9 + \$70 \cdot 0,1 = 97$ y el precio que debe pagar por el bono en el momento de la compra es:

$$\frac{\$100 \cdot 0,9 + \$70 \cdot 0,1}{1,06} = \$91,51.$$

2.1.4. Clasificación o *rating* del Crédito

Dentro del mercado financiero hay unas agencias que se encargan de calificar la capacidad de pago de las deudas emitidas por alguna entidad financiera, estado o cualquier otra compañía, este servicio puede ser ofrecido, por ejemplo, por

Standard & Poor's (S&P), Moody's o Fitch. Aunque estas agencias usan diferentes nomenclaturas en sus sistemas de calificación hay equivalencias en sus significados, en el Cuadro 2.1 se muestran las escalas de clasificación de S&P y Moody's tomadas de Standard&Poor's (2018) y Moody's (2018) respectivamente.

S&P	Moody's	Descripción
AAA	Aaa	Se consideran de la más alta calidad y están sujetas al riesgo crediticio mínimo.
AA	Aa	Se consideran de alta calidad y están sujetas a un riesgo crediticio muy bajo.
A	A	Se consideran de grado intermedio-alto y están sujetas a un riesgo crediticio bajo.
BBB	Baa	Se consideran de grado intermedio y están sujetas a un riesgo crediticio moderado, por lo que pueden presentar ciertas características especulativas.
BB	Ba	Se consideran especulativas y están sujetas a un riesgo crediticio considerable.
B	B	Se consideran especulativas y están sujetas a un riesgo crediticio alto.
CCC	Caa	Se consideran especulativas con mala reputación y están sujetas a un riesgo crediticio muy alto
CC	Ca	Son altamente especulativas y es probable que estén en incumplimiento o que estén a punto de estarlo, con cierta perspectiva de recuperación de capital e intereses.
C	C	Presentan la calificación más baja y suelen estar en incumplimiento, con poca perspectiva de recuperación de capital e intereses.
D	-	Se encuentra en incumplimiento o en violación de una promesa imputada.

Cuadro 2.1: Escalas de calificación crediticia de las agencias S&P y Moody's.

2.2. Un primer derivado de crédito: *Credit Default Swap* (CDS)

Un CDS o Permuta de Incumplimiento Crediticio (en español), es un derivado financiero del tipo *single-name*, es decir, donde el *pay-off* prometido depende de la ocurrencia de un evento de crédito que afecta una única entidad. La estructura de un CDS se muestra en la Figura 2.1 y es básicamente la siguiente¹:

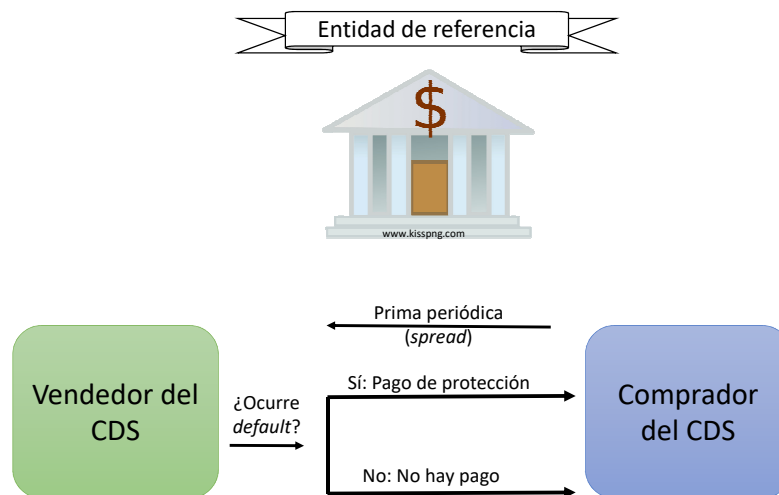


Figura 2.1: Diagrama de un CDS. Fuente: Elaboración propia.

- Intervienen 3 partes en el CDS: Una entidad de referencia que emite el título, el comprador de la protección o del CDS y el vendedor de la protección o del CDS.
- Si la entidad de referencia entra en *default* antes del tiempo de la fecha de maduración T del contrato, el vendedor de la protección realiza un pago de *default* al comprador de la protección; este pago es igual a $(1 - R)$ veces el nocional del CDS que es la cantidad a la que se le aplica la protección.

¹Imagen tomada de <https://www.kisspng.com/png-piggy-bank-cartoon-clip-art-sag-cliparts-201925/>

R es la tasa de recuperación de la entidad de referencia en caso de *default*; esta parte de un CDS se conoce como el *default payment leg*.

- Si no ocurre el *default* de la entidad de referencia hasta la fecha de maduración del CDS, entonces el vendedor de la protección no realiza ningún pago.
- Como compensación a la protección recibida, el comprador del CDS realiza el pago de una **prima** periódica hasta la fecha de maduración del CDS. Adicionalmente si un evento de crédito ocurre entre dos fechas de pago de la prima, el comprador del CDS tiene que pagar la fracción de pago del siguiente periodo que se haya acumulado hasta el momento del *default*. Todos estos pagos realizados por el comprador del CDS constituyen lo que se conoce como *premium payment leg*.
- En el momento de la firma del contrato no hay pagos y se determina la prima como un porcentaje anual del valor nocional, esta prima se denomina **CDS spread**.

Algunos CDS difieren de otros por la forma en que se realiza la liquidación en caso de *default*, principalmente se consideran la liquidación física y la liquidación en efectivo. En la liquidación física el comprador de la protección debe entregar el activo de referencia al vendedor de la protección para obtener el pago de *default* correspondiente al nocional del contrato. Por otro lado la liquidación en efectivo se caracteriza porque el comprador de la protección conserva el activo y el pago que realiza el vendedor de la protección es la diferencia entre el nocional y el valor del mercado del activo después del *default*. Una característica importante de los CDSs y que los diferencia de un seguro corriente es que en el momento de realizar el contrato, el comprador de la protección no está obligado a tener el activo de referencia, lo cual hace que los CDSs sean una herramienta para especular en el mercado. Todo lo relacionado a CDS se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Suponga que un determinado comprador de protección entra en un CDS a 5 años por un bono del grupo Bancolombia por \$250.000.000. Él acuerda pagar una cuota semestral de \$1.250.000 al vendedor de la protección. En compensación a esos pagos, el vendedor de la protección le cubrirá la deuda en caso de que el grupo Bancolombia entre en *default*. Al cabo de 3 años el grupo Bancolombia no realiza los pagos correspondientes a cupones. Ya que

en el contrato no se especificó liquidación física, el comprador de la protección busca asesoría para establecer el valor de recuperación y llega a que éste es de \$100.000.000. De esta manera el vendedor de la protección debe pagar la diferencia que corresponde en este caso a \$150.000.000. En esta situación se identifican las siguientes partes:

- Entidad de referencia: Grupo Bancolombia.
- Tiempo de maduración del CDS: 5 años.
- Nocional del CDS: \$250.000.000
- Spread del CDS: 1 % anual pagado dos veces.
- Tasa de recuperación: 40 %.
- Pago de *default*: \$150.000.000.

Por último en el Cuadro 2.2 se aprecian los flujos de este contrato.

Tiempo	Valor de Recuperación	Cuota al Vendedor de la Protección	Pago de <i>default</i> al comprador de la protección	Flujo de Caja Neto del comprador de la protección
6 meses	NA	\$1.250.000	\$0	-\$1.250.000
12 meses	NA	\$1.250.000	\$0	-\$1.250.000
18 meses	NA	\$1.250.000	\$0	-\$1.250.000
24 meses	NA	\$1.250.000	\$0	-\$1.250.000
30 meses	NA	\$1.250.000	\$0	-\$1.250.000
36 meses	\$100.000.000	\$1.250.000	\$150.000.000	\$148.750.000
Total				\$142.500.000

Cuadro 2.2: Flujos de caja de un CDS donde el *default* ocurre 3 años después de firmado el contrato.

2.3. *Collateralized Debt Obligation (CDO)*

Un CDO u Obligación Colateralizada mediante Deuda (en español), es un derivado de crédito estructurado que tiene la finalidad de asegurar portafolios de

activos *defutables* tales como préstamos, bonos o posiciones de vendedores de protección en un *credit default swap*; estos activos son vendidos a una compañía creada exclusivamente para este propósito (*Special Purpose Vehicle* SPV) quien, en búsqueda de recursos para financiar la compra, se encarga de empaquetarlos y emitir notas para ofrecerlas a los inversionistas según su antigüedad (en inglés: *seniority*). De esta manera se redistribuye el riesgo de crédito de cualquier portafolio en nuevos tramos (en inglés: *tranches*) con perfiles de riesgo diferentes de los activos subyacentes.

La principal característica de los CDOs es el diseño de la estructura del *pay-off* de las notas por medio de tramos, ya que permite limitar la exposición de los inversionistas a una fracción de las pérdidas acumuladas por *default* del portafolio. Generalmente los tres tramos que se consideran son el tramo **equidad** (en inglés: *equity*) que cubre entre el 0% y el 4% de las pérdidas acumuladas por *default*, el tramo **entresuelo** (en inglés: *mezzanine*) que cubre entre el 4% y el 10,% y el tramo **mayor** (en inglés: *senior*) que cubre el 90% restante; cada uno de estos tramos podrían tener más subdivisiones. Dependiendo el tipo de activos que respalden los CDOs se pueden clasificar en:

- CLO: *collateralized loan obligation*, si los activos son principalmente préstamos.
- CBO: *collateralized bond obligation*, si los activos son principalmente bonos.
- CDO sintético, si el grupo de activos subyacentes consiste principalmente de posiciones de vendedores de protección en CDSs.

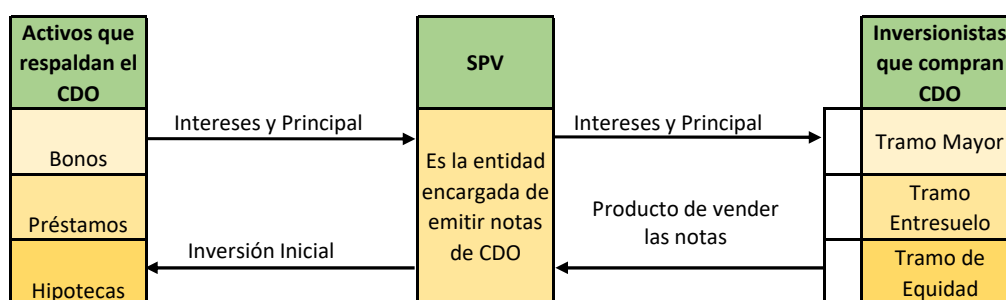


Figura 2.2: Diagrama de un CLO o CBO. Fuente: Elaboración propia.

La estructura de los CLOs y CBOs es básicamente la siguiente:

- El portafolio subyacente está compuesto de activos *defutables* tales como bonos o préstamos relacionados con N entidades de referencia, cada activo tiene un nocional $n_i, i = 1, \dots, N$. El nocional total es $No := \sum_{i=1}^N n_i$.
- El portafolio se transfiere a a una compañía creada con ese propósito (SPV).
- La SPV emite notas con diferentes nominales para cada tramo, n_E es el nominal para el tramo de equidad, n_M para el tramo entresuelo y n_S para el tramo mayor.
- Si durante la existencia del CDO uno de los activos entra en *default*, el monto recuperado es reinvertido en activos libres de riesgo.
- En la fecha de maduración del CDO, el portafolio es liquidado y se distribuyen los ingresos entre los tramos, de acuerdo a su antigüedad (primero el tramo mayor, luego el tramo entresuelo y por último el tramo equidad).

Nótese que en lugar de ver los *payoffs* de los diferentes tramos como una función del valor final del portafolio, se ven como función de las pérdidas, de esta manera en los tiempos que se presentan *default*, las primeras pérdidas solo afectan al tramo equidad, cuando las pérdidas acumuladas sobrepasan n_E se afecta el tramo entresuelo y solo cuando este se excede, el tramo mayor sufre algunas pérdidas; de esta manera tras un evento de crédito el nominal se recalcula restando las pérdidas por *default* en el tramo. Un resumen de los argumentos anteriores se ilustra en la Figura 2.2.

La estructura del CDO sintético es levemente distinta, pues en este caso una entidad financiera propietaria de las deudas, decide entrar en un CDS con la SPV con el fin de deshacerse únicamente del riesgo de crédito de los activos de referencia, ya que la SPV no es el tenedor de los activos, decide invertir lo obtenido de las notas de CDOs en activos de bajo riesgo.

En la Figura 2.3 se muestran los flujos de un CDO sintético en el que una entidad financiera (que podría ser un banco) entra en un CDS con la SPV. Se establece una protección para todas las pérdidas que sobrepasen el 3% del valor del grupo de activos de referencia. Por esta protección el banco paga una cuota periódica de protección.

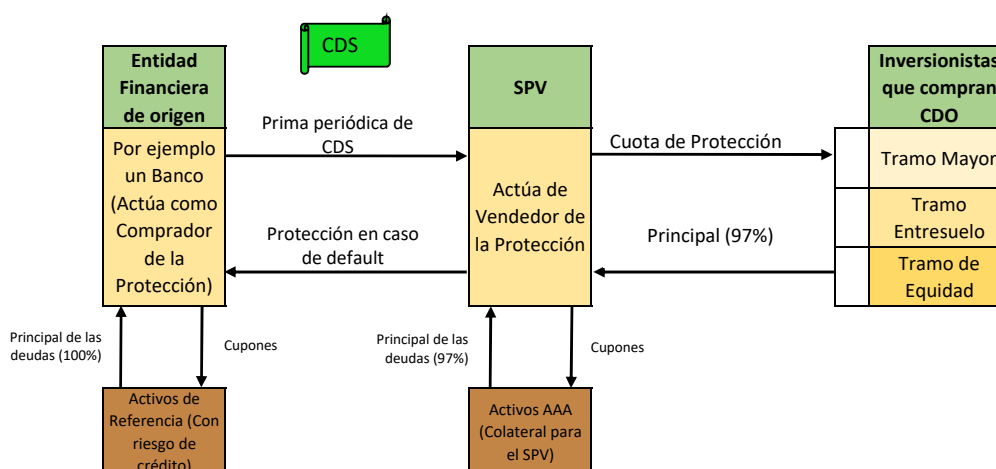


Figura 2.3: Diagrama de un CDO sintético. Fuente: Elaboración propia.

2.3.1. Tramos de índices de CDS's

Otro derivado de crédito usado para cubrir riesgo de crédito es el índice de CDS's, el cual es similar al CDO sintético pero con la diferencia que el CDO obtiene el riesgo de crédito vendiendo contratos de CDS's mientras que en un tramo de un índice de CDS's no se venden CDS's, lo cual puede verse como una póliza para apostar y generar especulación frente a ciertas entidades de referencia. No obstante los flujos de un CDO sintético y un índice de CDS's tienen la misma estructura.

En este trabajo se mencionarán dos índices de referencia de la familia Europea iTraxx: iTraxx Europe Series 5 e iTraxx Europe Series 8, estos índices están conformados por una piscina de 125 contratos de CDS's distribuidos en los sectores automotriz e industrial con un 24 %, consumidores con otro 24 %, energía con un 16 %, finanzas en un 20 % y tecnología y comunicaciones un 16 % de peso. Además cada 6 meses el portafolio se actualiza eliminando las entidades que han entrado en *default* y son 5 tramos divididos de la siguiente manera: el tramo de equidad (*equity*) [0 - 3 %], el tramo *junior mezzanine* (3 % - 6 %], el tramo *senior mezzanine* (6 % - 9 %], el tramo *junior senior* (9 % - 12 %] y el tramo *super senior* (12 %; 22 %].

2.4. Valoración de un tramo de un CDO sintético

En la anterior sección se pudo apreciar la estructura general de los CDO's sintéticos, ahora se verá cómo valorarlos, es decir, se responderá la pregunta: ¿cuánto debe pagar el SPV como prima (cupones) a los inversionistas de los tramos, quienes son los que financian la venta de la protección?; este es el problema fundamental en finanzas, ya que el valor de la prima dependerá de la forma en que se determine el costo de los riesgos expuestos. Mientras no haya ocurrido *default*, el SPV paga una prima regular a los inversionistas en cada tramo y en el momento que un evento de crédito ocurra, los inversionistas deben asumir las pérdidas; estas pérdidas se verán reflejadas en el siguiente pago de la prima, la cual se se pagará sobre el notional recalculado al restar las pérdidas. Para la valoración se asumirá un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ que satisface las condiciones usuales y \mathbb{Q} la medida neutral al riesgo equivalente.

2.4.1. Distribución de pérdidas en los tramos de un CDO

A lo largo de este trabajo se considerará un portafolio de N obligaciones cada una con notional $1/N$ y tasas de recuperación R_i , $i = 1, \dots, N$. Además el vector aleatorio $\mathbf{Y}_t = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,N})$ describe el estado del portafolio en el tiempo $t \geq 0$, donde cada $Y_{t,i} = Y_i(t)$ cumple que:

$$Y_{t,i} = \mathbf{1}_{\{\tau_i < t\}} := \begin{cases} 1, & \text{si } \tau_i < t \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \quad (2.1)$$

² con τ_i el tiempo en el que la i -ésima compañía entra en *default*. Es decir, $Y_{t,i}$ es un proceso de conteo que indica si la i -ésima firma ha entrado en *default* o no. El porcentaje de pérdidas acumuladas del portafolio hasta el tiempo t es el proceso L_t definido por:

$$L_t := \sum_{i=1}^N (1 - R_i) Y_{t,i}, \quad (2.2)$$

²En general, la función indicadora se define por:

$$\mathbf{1}_{\{A\}}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in A \\ 0, & \text{si } \alpha \notin A. \end{cases}$$

más aún

$$\bar{L}_t = \frac{1}{N} L_t, \quad (2.3)$$

es el proceso L_t normalizado (multiplicado por el notional).

Usando la caracterización de Yi (2008) y Brigo et al. (2010) si se llama A y D a los porcentajes mínimos y máximos de participación de un tramo dado κ (el cual puede ser tramo equidad, entresuelo o mayor), respectivamente; entonces las pérdidas acumuladas sobre el tramo están dadas por la expresión

$$\bar{L}_t^\kappa = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{L}_t \leq A \\ \bar{L}_t - A, & \text{si } A \leq \bar{L}_t \leq D \\ D - A, & \text{si } \bar{L}_t > D. \end{cases}$$

Dados los tiempos $t = 1, \dots, m$ y las probabilidades p_t para cada \bar{L}_t ; se tendrá entonces que el tramo (A-D) del CDO sufre una pérdida de $\{\min(\bar{L}_t, D) - A\}^+$ ³ con probabilidad $p_t, t = 1, \dots, m$. Por tanto el porcentaje de las pérdidas acumuladas esperadas (calculadas bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q}) para el tramo (A-D) son, en el caso de **distribución discreta** de pérdidas,

$$E[\bar{L}_{(A,D)}] := \frac{E[\bar{L}_t^\kappa]}{D - A} = \frac{1}{D - A} \sum_{t=1}^m \{\min(\bar{L}_t, D) - A\}^+ p_t, \quad (2.4)$$

donde

$$\bar{L}_{(A,D)} := \frac{\bar{L}_t^\kappa}{D - A} \quad (2.5)$$

resulta de normalizar el proceso \bar{L}_t^κ .

Para el caso continuo se considera la función de distribución de pérdidas del

³ $\{x\}^+ := \max\{x, 0\}$.

portafolio $F(x)$ y de la expresión (2.4) se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\bar{L}_{(A,D)}] &= \frac{1}{D-A} \sum_{t=1}^m \{\min(\bar{L}_t, D) - A\}^+ p_t \\
&= \frac{1}{D-A} \sum_{t=1}^m [\bar{L}_t \cdot 1_{\{\bar{L}_t < D\}} + D \cdot 1_{\{\bar{L}_t \geq D\}} - A] \cdot 1_{\{\min(\bar{L}_t, D) > A\}} \cdot p_t \\
&= \frac{1}{D-A} \sum_{t=1}^m [(\bar{L}_t - A) \cdot 1_{\{A < \bar{L}_t < D\}} + (D - A) \cdot 1_{\{\bar{L}_t \geq D > A\}}] \cdot p_t \\
&= \frac{1}{D-A} \left\{ \int_A^D (X - A) dF(x) + \int_D^1 (D - A) dF(x) \right\} \\
&= \frac{1}{D-A} \left\{ \int_A^1 (X - A) dF(x) - \int_D^1 (X - A) dF(x) + \int_D^1 (D - A) dF(x) \right\} \\
&= \frac{1}{D-A} \left\{ \int_A^1 (x - A) dF(x) - \int_D^1 (x - D) dF(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nótese que los valores esperados son más pequeños que 1. Los elementos que se acaban de derivar serán las herramientas para calcular el *spread* de un tramo como se muestra en la siguiente subsección.

2.4.2. Valoración del *spread* para un tramo

Como se vio en la estructura de los CDS's, a la hora de valorar el tramo de un CDO se deben tener en cuenta los pagos periódicos hechos por los compradores de la protección (*premium leg*) y también dichas protecciones en caso de *default* que se obtienen de los montos invertidos por los compradores de los CDO's (*protection leg*). Considere entonces las fechas en las que se realizarán los pagos de las primas $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$, donde T es la maduración del contrato, estos pagos generalmente son trimestrales. El valor del *premium leg* para un tramo (A,D), que equivale al valor esperado de todas las primas periódicas pagadas por los compradores de la protección, está dado según (A.3) por:

$$V_{prem} = \sum_{i=1}^m \Delta t_i B(0, t_i) [1 - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i)] \cdot S, \tag{2.7}$$

donde $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$, $B(0, t_i)$ es el factor de descuento hasta el tiempo t , S es la prima o *spread* justo del tramo dado en puntos básicos por año y $E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i)$ corresponde al porcentaje de pérdidas esperadas del tramo (A-D) del CDO en

el tiempo t_i .

Por otro lado, el valor del *protection leg* está dado por:

$$V_{prot} = \int_0^T B(0, s) dE[\bar{L}_{(A,D)}](s) \quad (2.8)$$

$$\approx \sum_{i=1}^m B(0, t_i) [E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i) - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_{i-1})]. \quad (2.9)$$

El precio justo de la prima o *spread* s del tramo es aquel valor que resuelve la ecuación $V_{prem} = V_{prot}$, es decir,

$$V_{prem} = V_{prot}$$

$$\iff$$

$$\sum_{i=1}^m \Delta t_i B(0, t_i) [1 - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i)] \cdot S = \sum_{i=1}^m B(0, t_i) [E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i) - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_{i-1})],$$

por tanto

$$s = \frac{\sum_{i=1}^m B(0, t_i) [E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i) - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_{i-1})]}{\sum_{i=1}^m \Delta t_i B(0, t_i) [1 - E[\bar{L}_{(A,D)}](t_i)]} \quad (2.10)$$

La expresión (2.10) proporciona una forma cerrada para calcular el *spread* en función de las pérdidas esperadas del tramo $E[\bar{L}_{(A,D)}](t)$, que a su vez depende de la distribución de pérdidas $F(x)$ como se aprecia en (2.6), sin embargo $F(x)$ no es una función fácil de encontrar principalmente por la correlación de *default* entre las compañías involucradas, es decir, la probabilidad que una compañía entre en *default* dado que otra compañía también entró.

Matemáticamente se ha visto que el riesgo de *default* es interpretado como la probabilidad de que en un determinado instante de tiempo, una compañía entre en *default*. Estos instantes de tiempos denotados por τ son variables aleatorias que según Brigo et al. (2013) se venían modelando esencialmente de dos formas, por un lado los modelos estructurales en los cuales el tiempo de vida de una compañía se vincula directamente con el nivel que toma el valor de sus activos en comparación con sus deudas, por otro lado están los modelos de intensidad o modelos de forma reducida, los cuales describen los tiempos de *default* por medio de un proceso de saltos exógeno; más precisamente, el tiempo de *default* τ es el primer salto en el tiempo de una importante clase de procesos estocásticos, el proceso de Poisson con intensidad determinística o estocástica (procesos de Cox). Sin embargo según Hull et al. (2004) los modelos estructurales y de forma reducida tienen la desventaja de consumir demasiado tiempo

computacionalmente a la hora de valorar los derivados de crédito que se proponen en este trabajo, lo anterior permitió una rápida propagación del modelo de cópula Gaussiana propuesto por Li (2000) puesto que su implementación no requiere de simulaciones numéricas. Se estudiará en el siguiente capítulo, desde el modelo de cópula Gaussiana, la correlación de *default*, es decir, la tendencia de que dos o más compañías entren en default al mismo tiempo.

Capítulo 3

Modelos para los tiempos de *default*

En este capítulo se presentan algunas herramientas matemáticas para modelar los tiempos de *default*. Los modelos de forma reducida se introducen con el fin de estudiar el tratamiento de los tiempos de *default* de una sola compañía y luego los modelos de cópula de factores son incorporados como una alternativa de dependencia entre los tiempos de *default* de N compañías. La primera parte se encuentra en la sección 9.2.1 de McNeil et al. (2005) y se complementa con Laurent and Gregory (2003).

3.1. Modelos de forma reducida

Considere el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con una medida de valoración neutral al riesgo \mathbb{Q} sobre el cual está definida la variable de tiempo aleatorio \mathcal{F} -medible τ , que toma valores en $[0, \infty]$ y se interpreta como el tiempo en el que entra en *default* alguna compañía. Además sea $Y_t = \mathbf{1}_{\{\tau < t\}}$ como se dio en la subsección 2.4.1; entonces $F(t) = \mathbb{Q}(\tau \leq t)$ y $S(t) = \mathbb{Q}(\tau > t) = 1 - F(t)$ denotan la función de distribución y de supervivencia de τ respectivamente. Asumiendo que la única cantidad observable es la variable de tiempo τ o en su defecto el proceso (Y_t) , en tal caso la filtración (\mathcal{H}_t) dada por $\mathcal{H}_t := \sigma(\{Y_u : u \leq t\})$ contiene la historia sobre la información de *default* hasta el tiempo t . Por definición τ es un (\mathcal{H}_t) -tiempo de espera, pues $\{\tau \leq t\} = \{Y_t = 1\} \in \mathcal{H}_t$ para todo $t \geq 0$, más aún, (\mathcal{H}_t) es la filtración más pequeña que cumple esta propiedad.

Definición 3.1.1. (Función acumulativa de riesgo y tasa de riesgo)

La función $\Gamma(t) := -\ln(S(t))$ se llama la función acumulativa de riesgo de la variable aleatoria τ . Además, si F es absolutamente continua con densidad f , entonces la función $\gamma(t) := \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$ se llama la tasa de riesgo de τ .

Por la forma en que se ha definido Γ se tiene que $F(t) = 1 - e^{-\Gamma(t)}$, por tanto $\Gamma'(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \gamma(t)$ y así $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds$. Una definición alterna de $\gamma(t)$ resulta de calcular para $h > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{Q}(\tau \leq t+h | \tau > t) = \frac{1}{S(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \gamma(t)$$

es decir, $\gamma(t)$ puede ser interpretado como el cambio instantáneo de *default* en t .

Aquellas situaciones donde se dispone de información adicional que afecte la distribución de τ , esta se representará por alguna filtración (\mathcal{F}_t) sobre (Ω, \mathcal{F}, P) . Se usa dicha filtración a continuación.

Definición 3.1.2. (Procesos de riesgo acumulado y tasa de riesgo)

Sea τ una variable de tiempo aleatorio sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ con \mathbb{Q} tal que $\mathbb{Q}(\tau > 0) = 1$. Sea $F_t = \mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$ y $S_t = 1 - F_t$. Si $F_t < 1$ para todo $t \geq 0$, el proceso de riesgo acumulado (\mathcal{F}_t) -condicional es definido por $\Gamma_t := -\ln(S_t)$. (Γ_t) es estrictamente creciente y absolutamente continuo, si existe algún -casi seguramente- (c.s) proceso (\mathcal{F}_t) -adaptado y estrictamente positivo (γ_t) tal que $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$. (γ_t) se llamará el proceso de tasa de riesgo (\mathcal{F}_t) -condicional de τ .

Los procesos que se acaban de definir son los instrumentos con los que se construyen las variables de tiempo aleatorio doblemente estocásticas (también llamadas variables Poisson-condicionales o de Cox), las cuales se definen abajo. Si se tienen ahora dos flujos de información caracterizados por las filtraciones (\mathcal{H}_t) y (\mathcal{F}_t) se introduce entonces una nueva filtración (\mathcal{G}) dada por

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

es decir, \mathcal{G} es la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{H}_t y \mathcal{F}_t . Ya que τ es un (\mathcal{H}_t) -tiempo de espera, también será un (\mathcal{G}_t) -tiempo de espera. En el contexto de los modelos de riesgo de crédito la filtración (\mathcal{G}) contiene información de la ocurrencia o no de *default* hasta el tiempo t , esta información es la que está disponible para los inversionistas.

Definición 3.1.3. *La variable de tiempo aleatorio τ se dice doblemente estocástica con respecto a la filtración (\mathcal{F}_t) si τ admite el proceso de tasa de riesgo (\mathcal{F}_t) –condicional (γ_t) y para todo $t > 0$ se tiene que:*

$$\mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t). \quad (3.2)$$

¹ Si se asume que la filtración (\mathcal{F}_t) es generada por algún proceso de estados (Ψ_t) , es decir, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\Psi_u : u \leq t\})$, entonces la condición (3.2) establece que dados los valores del pasado $(\Psi_u)_{u \leq t}$ del proceso de estados, el futuro $(\Psi_s)_{s > t}$ no contiene información adicional que afecte la probabilidad que τ ocurra antes de t .

El siguiente resultado, sumado a las definiciones dadas hasta el momento, permite definir formalmente los tiempos de *default*.

Lema 3.1.1. *Sea E una variable aleatoria con distribución exponencial estándar sobre (Ω, \mathcal{F}, P) independiente de \mathcal{F}_∞ , es decir, $\mathbb{Q}(E \leq t | \mathcal{F}_\infty) = 1 - e^{-t}$ para todo $t \geq 0$. Sea también (γ_t) un proceso positivo (\mathcal{F}_t) –adaptado tal que $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$ es estrictamente creciente y finito para todo $t \geq 0$. Se define la variable de tiempo aleatorio τ por*

$$\tau := \Gamma^{-1}(E) = \inf\{t \geq 0 : \Gamma_t \geq E\}, \quad (3.3)$$

entonces, se tiene que τ es doblemente estocástica con proceso de tasa de riesgo (\mathcal{F}_t) –condicional (γ_t) .

Demostración. Ver en (McNeil et al., 2005, pág 398). □

Como una consecuencia del anterior lema se cumplirá entonces que

$$\mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) = 1 - \exp(-\Gamma_t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_s ds\right). \quad (3.4)$$

Para un estudio más detallado de los modelos de *default* con variables doblemente estocásticas, se recomiendan los trabajos de Lando (1998) Schönbucher and Schubert (2001) y Jeanblanc and Rutkowski (2000).

¹Veáse sección A.3.

3.2. Modelos de cópulas de factores

Considérese ahora un portafolio de N compañías donde τ_1, \dots, τ_N son variables de tiempo aleatorio doblemente estocásticas, con procesos de tasas de riesgo (\mathcal{F}_t) -adaptados $(\gamma_{t,1}), \dots, (\gamma_{t,N})$, definidos sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, además sea $E = (E_1, \dots, E_N)$ donde $E_i \sim \exp(1), 1 \leq i \leq N$; se define entonces el tiempo de *default* asociado a la i -ésima compañía por $\tau_i = \Gamma_i^{-1}(E_i) = \inf\{t \geq 0 : \Gamma_{t,i} \geq E_i\}$. Se puede reescribir lo anterior de manera equivalente como

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : 1 - \exp(-\Gamma_{t,i}) \geq \tilde{U}_i := 1 - \exp(-E_i)\} \quad (3.5)$$

Nótese que $\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_N)$ es un vector de variables aleatorias con distribución uniforme². Si se define $U_i := 1 - \tilde{U}_i$, la expresión (3.5) se puede reescribir como

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \exp(-\Gamma_{t,i}) \leq U_i\}, \quad (3.6)$$

El vector U se interpreta como una barrera que indica que el *default* ocurre en el primer momento que $\exp(-\Gamma_{t,i})$ esté por debajo de U_i tal como se ilustra en la Figura 3.1.

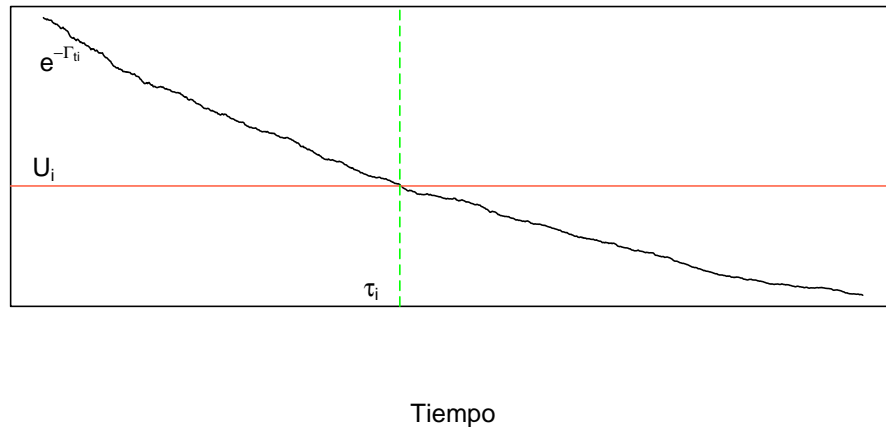


Figura 3.1: Representación gráfica de la relación entre τ_i, U_i y $\exp(-\Gamma_{t,i})$. Fuente: Elaboración propia.

²Recuerde que si $X \sim \exp(1)$, entonces la variable $U := 1 - e^{-X} \sim U(0, 1)$.

A continuación se introducen los modelos de cópulas para tiempos de *default* para lo cual se requiere la siguiente definición:

Definición 3.2.1. (Modelos de cópula para los tiempos de default)
Sean $(\gamma_{t,i}), \dots, (\gamma_{t,N})$ procesos no negativos (\mathcal{F}_t) -adaptados tales que $\Gamma_{t,i} < \infty$ para todo $t > 0$, y sea C una cópula N -dimensional. Entonces las variables aleatorias τ_1, \dots, τ_N siguen un modelo de cópula con procesos de tasas de riesgo marginales $(\gamma_{t,i}), i = 1, \dots, N$, y cópula de supervivencia condicional C , si existe un vector aleatorio N -dimensional $\mathbf{U} \sim C$, independiente de \mathcal{F}_∞ , tal que

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \exp(-\Gamma_{t,i}) \leq U_i\}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.7)$$

En los **modelos de cópula de factores** se considera que el vector U tiene independencia condicional de algún vector aleatorio p -dimensional $V = (V_1, \dots, V_p)$, $p < N$. Al condicionar sobre V las variables aleatorias U_1, \dots, U_N son independientes. V se puede entender como una variable latente, es decir, una variable que representa efectos aleatorios no observables y que es inferida de otras variables sí observables. En este contexto V se denomina factor.

A partir de ahora se asumirá que las tasas de riesgo $\gamma_i(t)$ son funciones deterministas y continuas, de esta manera todos los esfuerzos se concentran en la dependencia del factor latente. Retomando las funciones de supervivencia y de distribución para cada τ_i se tiene que $S_i(t) = \mathbb{Q}(\tau_i > t) = \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(s)\right)$ y $F_i(t) = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t)$. Además la función de densidad asociada para cada τ_i está dada por $f_i := \gamma_i(t)S_i(t)$, para todo $t \geq 0$. Por otro lado, de la expresión (3.7) se puede ver que

$$\tau_i = S_i^{-1}(U_i).$$

Por último, como una consecuencia del teorema de esperanzas condicionadas iteradas y la independencia condicional de U_i dado V , se tiene que las funciones de supervivencia y de distribución conjunta del vector de los tiempos de *default*

están dadas respectivamente, según (3.7), por

$$\begin{aligned}
S(t_1, \dots, t_N) &= \mathbb{Q}(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_N > t_N) = C(S_1(t_1), \dots, S_N(t_N)) \\
&= \mathbb{Q}(U_1 \leq S_1(t_1), \dots, U_N \leq S_N(t_N)) \\
&= E[\mathbb{Q}(U_1 \leq S_1(t_1), \dots, U_N \leq S_N(t_N) | V)] \\
&= E \left[\prod_{i=1}^N \mathbb{Q}(U_i \leq S_i(t_i) | V) \right] \\
&= E \left[\prod_{i=1}^N \mathbb{Q}(\tau_i > t_i | V) \right] \\
&= E \left[\prod_{i=1}^N q_{t_i}^{i|V} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \prod_{i=1}^N q_{t_i}^{i|V} f_v(v) dv \tag{3.8}
\end{aligned}$$

y de manera análoga

$$F(t_1, \dots, t_N) = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_N \leq t_N) = \int_{\mathbb{R}^p} \prod_{i=1}^N p_{t_i}^{i|V} f_v(v) dv \tag{3.9}$$

donde $q_t^{i|V} := \mathbb{Q}(\tau_i > t | V)$, $p_t^{i|V} := \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V) = 1 - q_t^{i|V}$ y f_v es, siempre que exista, la densidad del factor V . De las expresiones (3.8) y (3.9) se puede notar de manera directa la relación entre las distribuciones de los tiempos de *default* y el vector U .

3.3. Modelo de cópula Gaussiana de un factor

Este modelo fue propuesto por Li (2000) y hace uso de la cópula Gaussiana C_ρ^{Ga} para calcular las funciones $p_t^{i|V}$ y la distribución conjunta de los tiempos de *default*. El modelo se construye de la siguiente manera:

- Sea (X_1, \dots, X_N) un vector aleatorio Gaussiano donde $X_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_i$, $1 \leq i \leq N$. Cada X_i denota el valor del activo de la compañía i .
- $\rho \in [0, 1]$ es el coeficiente de correlación entre cualquier par de variables X_n y X_m , $n \neq m$. Nótese que se asume el mismo parámetro para todos los X_i , $1 \leq i \leq N$. De esta manera se tiene una simplificación radical de tener $N(N - 1)/2$ parámetros a tener uno solo.

- $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ es un vector aleatorio que se interpreta como un factor de riesgo o error idiosincrásico de cada X_i .
- El factor V y ϵ_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) $N(0, 1)$, bajo esta condición se puede comprobar fácilmente que $X_i \sim N(0, 1), 1 \leq i \leq N$.
- $X \sim N_N(\mathbf{0}, \mathcal{P})$ con \mathcal{P} la matriz de correlaciones. Es decir,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \sim N_N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix} \right]$$

En este modelo se establece $U_i = \Phi(X_i)$, siendo Φ como en 1.16, además $U \sim C_{\mathcal{P}}^{Ga}$, es decir, los tiempos τ_i y las variables X_i , se relacionan por medio de la expresión $\tau_i = S^{-1}(\Phi(X_i))$, por tanto se tienen las siguientes probabilidades condicionadas al factor V :

$$\begin{aligned} q_t^{i|V} &= \mathbb{Q}(U_i \leq S_i(t) | V = v) \\ &= \mathbb{Q}(\Phi(X_i) \leq S_i(t) | V = v) \\ &= \mathbb{Q}(X_i \leq \Phi^{-1}(S_i(t)) | V = v) \\ &= \mathbb{Q}(\sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i \leq \Phi^{-1}(S_i(t)) | V = v) \\ &= \mathbb{Q}\left(\epsilon_i \leq \frac{\Phi^{-1}(S_i(t)) - \sqrt{\rho}V}{\sqrt{1-\rho}} \middle| V = v\right), \end{aligned}$$

de manera análoga,

$$p_t^{i|V} = \mathbb{Q}\left(\epsilon_i \leq \frac{\Phi^{-1}(F_i(t)) - \sqrt{\rho}V}{\sqrt{1-\rho}} \middle| V = v\right).$$

Dada la distribución de ϵ se satisface entonces que

$$q_t^{i|V} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(S_i(t)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right), \quad (3.10)$$

y

$$p_t^{i|V} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_i(t)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right). \quad (3.11)$$

Combinando estos resultados con (3.8) y (3.9) se llega a las siguientes expresiones para S y F :

$$S(t_1, \dots, t_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^N \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(S_i(t)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}} \right) e^{-v^2/2} dv \quad (3.12)$$

$$F(t_1, \dots, t_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^N \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F_i(t)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}} \right) e^{-v^2/2} dv. \quad (3.13)$$

Dos resultados que sobresalen de lo anterior son, por un lado, que se puede calcular la cópula n -dimensional por medio de la integral de una variable, puesto que $F(t_1, \dots, t_N) = C(u_1, \dots, u_N)$. Por otro lado el parámetro de correlación ρ es fundamental dentro del modelo y por tanto lo será a la hora de aplicar el modelo en la valoración de un CDO que es el instrumento objetivo de este trabajo. **La correlación implícita o compuesta** es el valor de ρ consistente con una cotización dada de un tramo, cuando todos los demás parámetros del modelo se han fijado, es decir, usando las distribuciones marginales exponenciales y los precios de mercado de los tramos de los CDO's, los inversionistas pueden calcular la correlación de activos implícita para cada tramo. También se introducirá más adelante la **correlación de base**, cuyo concepto se encuentra, por ejemplo, en Brigo et al. (2010) y se hará necesario en este trabajo.

3.4. Aplicación del modelo en la distribución de pérdidas

El capítulo 2 finalizó manifestando la dificultad de obtener la distribución de pérdidas del portafolio definido en (2.2), antes de aplicar el modelo de cópula arriba presentado al problema de las posibles pérdidas de un portafolio de crédito, se hacen las siguientes dos observaciones:

1. **Portafolio Homogéneo:** Cuando se asume que todas las probabilidades de *default* y las tasas de recuperación son iguales para cada una de las referencias de crédito, el portafolio se dice homogéneo, es decir, el supuesto de homogeneidad se tiene si $\Gamma_{t,1} = \dots = \Gamma_{t,N}$ y $R_1 = \dots = R_N = R$.
2. **Tamaño del Portafolio:** Se puede, como se ha venido haciendo, asumir un número finito N de referencias de crédito o asumir que este número tiende a infinito (100 o más) y aplicar las propiedades de los límites.

3.4.1. Modelo de cópula Gaussiana de un factor para un portafolio finito y homogéneo

Continuando con la definición de $Y_{t,i}$ dada en (2.1) se define un nuevo proceso de conteo C tal que:

$$C_t := \sum_{i=1}^N Y_{t,i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{\tau_i < t\}}.$$

Además, sea $\bar{C}_t := \frac{1}{N}C_t$ el proceso normalizado al número de referencias de crédito del portafolio. Entonces el número de entidades en el portafolio que han entrado en *default* hasta un tiempo T dada una realización v del factor V , sigue una distribución binomial, esto es,

$$\mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{n}{N} \mid V = v\right) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \mathbb{Q}(\tau_i < T \mid V = v)^n (1 - \mathbb{Q}(\tau_i < T \mid V = v))^{N-n}, \quad (3.14)$$

donde los términos $\mathbb{Q}(\tau_i < T \mid V = v)$ son los mismos para todo i dada la homogeneidad del portafolio. Para obtener una expresión de la probabilidad no condicionada basta con integrar (3.14) sobre el factor V

$$\mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{n}{N}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{n}{N} \mid V = v\right) f_v(v) dv, \quad (3.15)$$

lo anterior combinado con (3.10), (3.11) y sabiendo que $f_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}$ permite concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{n}{N}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} \left\{ \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_i(T)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right) \right\}^n \\ &\quad \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(S_i(T)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right) \right\}^{N-n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv, \end{aligned} \quad (3.16)$$

y que la función de distribución no condicionada para \bar{C}_t está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\left(\bar{C}_T \leq \frac{n}{N}\right) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{k}{N}\right) = \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N!}{k!(N-k)!} \\ &\quad \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_i(T)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right) \right\}^k \\ &\quad \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(S_i(T)) - \sqrt{\rho}v}{\sqrt{1-\rho}}\right) \right\}^{N-k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si se considera el proceso \bar{L}_t , como en (2.3), entonces el siguiente resultado se obtiene inmediatamente de (3.16):

$$\mathbb{Q}\left(\bar{L}_T = (1-R)\frac{n}{N}\right) = \mathbb{Q}\left(\bar{C}_T = \frac{n}{N}\right). \quad (3.18)$$

De esta manera se obtiene una expresión semi-analítica³ para la distribución de pérdidas del portafolio y se tienen así todos los elementos suficientes para calcular el *spread* para un tramo de CDO en la fórmula teórica dada en (2.10).

3.5. Limitaciones y desventajas del modelo de cópula Gaussiana

El modelo que se ha estudiado sirvió como referencia para la valoración de CDO's entre los años 2000 y 2008 debido a su fácil implementación, manejo y calibración, sin embargo según Donnelly and Embrechts (2010) dicha simplicidad y facilidad tienen un costo y este está relacionado con las siguientes dos desventajas principalmente:

1. El modelo de cópula Gaussiana no es apropiado para modelar la ocurrencia de *default* por grupos de las entidades de referencia, es decir, no permite contemplar la ocurrencia simultánea de *default* de un número grande de activos en el portafolio subyacente. Se cree que en tiempos de crisis esto tuvo un gran impacto en la valoración de CDO's, debido a que efectivamente hubo una tendencia de ocurrencia de *default* conjunta, por tanto si una compañía entraba en *default* entonces era muy probable que las otras compañías también lo hicieran en periodos muy cortos de tiempo. Matemáticamente este problema se contempla desde la idea que subyace a la dependencia de colas, es decir, los eventos extremos en las colas superior e inferior de la distribución conjunta de varias variables aleatorias. A continuación se ilustra esta desventaja para el caso bivariado como se propone en McNeil et al. (2005) y Embrechts et al. (2002), se empieza así con la siguiente definición.

Definición 3.5.1. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con funciones de distribución F_{X_1} y F_{X_2} . El **coeficiente de dependencia de cola superior** de X_1 y X_2 es

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P[X_2 > F_{X_2}^{-1}(q) | X_1 > F_{X_1}^{-1}(q)] \quad (3.19)$$

³Se considera semi-analítica porque la integral incluida en la igualdad no admite una forma cerrada.

siempre que el límite $\lambda_u \in [0, 1]$ exista. Si $\lambda_u \in (0, 1]$, entonces X_1 y X_2 se dice que muestran dependencia de la cola superior o dependencia extrema en la cola superior; si $\lambda_u = 0$, se dice que son asintóticamente independientes en la cola superior. Análogamente, el coeficiente de dependencia de cola inferior es

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0^+} P[X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(q) | X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(q)] \quad (3.20)$$

siempre que el límite $\lambda_l \in [0, 1]$ exista.

El interés detrás de estos coeficientes está en que proporcionan medidas de extrema dependencia, es decir, tienen la capacidad de medir la fuerza de dependencia en las colas de las distribuciones. Además, si F_{X_1} y F_{X_2} son continuas, entonces se pueden obtener expresiones para λ_u y λ_l en términos de la única cópula C de (X_1, X_2) . Usando la definición de probabilidad condicionada se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{P[X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(q), X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(q)]}{P[X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(q)]} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Además usando (1.8) se tiene para λ_u que,

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P[X_2 > F_{X_2}^{-1}(q), X_1 > F_{X_1}^{-1}(q)]}{P[X_1 > F_{X_1}^{-1}(q)]} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P[1 - F_{X_2}(X_2) \leq 1 - q, 1 - F_{X_1}(X_1) \leq 1 - q]}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\tilde{C}(1 - q, 1 - q)}{1 - q}. \end{aligned}$$

donde \tilde{C} es la cópula de supervivencia de C . Si además se combina lo anterior con (1.9) se cumple que

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}. \quad (3.22)$$

Los resultados obtenidos en (3.21) y (3.22) son útiles cuando las cópulas tienen una forma cerrada. Por otro lado si se asume que C es la distribución de (U_1, U_2) y $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ para todo $u_1, u_2 \in [0, 1]$, entonces

aplicando regla de l'Hôpital a (3.19) y (3.20) se derivan las siguientes expresiones equivalentes

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} 2 \cdot P(U_2 > q | U_1 = q) \quad (3.23)$$

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} 2 \cdot P(U_2 < q | U_1 = q) \quad (3.24)$$

Usando los resultados anteriores se evaluará el coeficiente λ_u para la cópula Gaussiana con el fin de verificar qué falla a la hora de modelar dependencia de colas. Supóngase que τ_1 y τ_2 son los tiempos de *default* de dos compañías y que F_1 y F_2 son sus respectivas distribuciones marginales. Bajo el modelo de cópula Gaussiana con coeficiente de correlación ρ se tendrá que

$$C_\rho^{Ga}(F_1(\tau_1), F_2(\tau_2)) = \Phi_2^\rho(\Phi^{-1}(F_1(\tau_1)), \Phi^{-1}(F_2(\tau_2))).$$

La cópula Gaussiana cumple las condiciones para usar (3.23), por tanto

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} P(\tau_2 > F_2^{-1}(q) | \tau_1 > F_1^{-1}(q)) \\ &= 2 \cdot \lim_{q \rightarrow 1^-} P(F_2(\tau_2) > q | F_1(\tau_1) = q), \end{aligned}$$

tomando $F_1 = \Phi$ los límites se pueden expresar como sigue,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \lim_{q \rightarrow 1^-} P(F_2(\tau_2) > q | F_1(\tau_1) = q) &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} P(\Phi^{-1}[F_2(\tau_2)] > x | \Phi^{-1}[F_1(\tau_1)] = x) \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | Y = x), \end{aligned}$$

donde $X = \Phi^{-1}[F_2(\tau_2)]$ y $Y = \Phi^{-1}[F_1(\tau_1)]$ son variables aleatorias con distribución normal estándar y parámetro de correlación $\rho = \rho(X, Y)$. Usando el hecho que $X|Y = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ se tendrá entonces que

$$\begin{aligned} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | Y = x) &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \Phi \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right] \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \Phi \left(x \cdot \sqrt{\frac{(1 - \rho)^2}{(1 - \rho)(1 + \rho)}} \right) \right] \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \Phi \left(x \cdot \frac{\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right) \right] \\ &= 0 = \lambda_u, \quad \rho \in (-1, 1). \end{aligned}$$

De manera análoga se puede verificar que $\lambda_l = 0$ para $\rho \in (-1, 1)$. Los resultados anteriores permiten afirmar que la cópula Gaussiana es asintóticamente independiente en ambos casos para $\rho \in (-1, 1)$, esto significa que

los eventos en las colas de la distribución parecen ocurrir de manera independiente, lo cual es una propiedad indeseable dada la necesidad de modelar la ocurrencia conjunta de *default* y su dependencia en eventos extremos.

2. Al calcular la correlación para cada tramo de un CDO, se esperaría que estas correlaciones coincidieran. Es decir, lo que se espera es que la correlación sea una función del portafolio subyacente y no de los tramos. Sin embargo, bajo el modelo de cópula Gaussiana las correlaciones por tramos no son idénticas. Más aún, las correlaciones implícitas no tienen un comportamiento uniforme, ya que el tramo de equidad (*equity*) suele aumentar más que algunos tramos entresuelos formando una sonrisa de correlaciones⁴ (*mezzanine*) como se ve en la Figura 3.2.

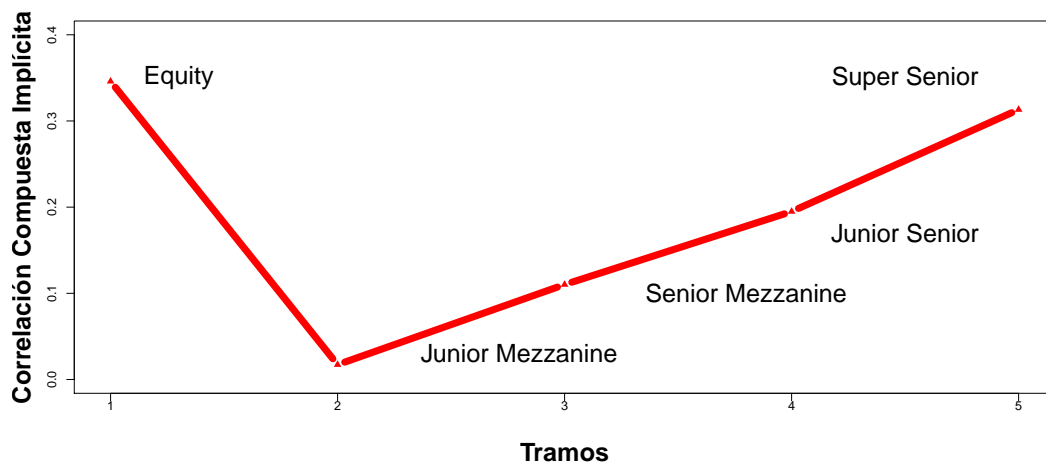


Figura 3.2: Correlación implícita bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del iTraxx Europe Series 8 - Fecha: 2007/11/02. Fuente: Xu (2014)

En Brigo et al. (2010) también se hace un análisis del índice DJ-iTraxx Europe Series 5 con los datos de mercado que se aprecian en el Cuadro 3.1.

⁴Este es el nombre con el que se conoce este tipo de figuras.

Tramo	Spread en Puntos Básicos
0-3 %	549
3-6 %	360
6-9 %	82
9-12 %	46
12-22 %	31

Cuadro 3.1: Cotización por tramos del índice Dj-iTraxx Europe S5 - 10 Años de maduración, Fecha: 2005/08/03

Al calibrar las correlaciones implícitas se obtiene la sonrisa de correlación dada en la Figura 3.3. Como se puede notar, para el tramo 6-9 % no existe correlación que se ajuste al *spread* del mercado.

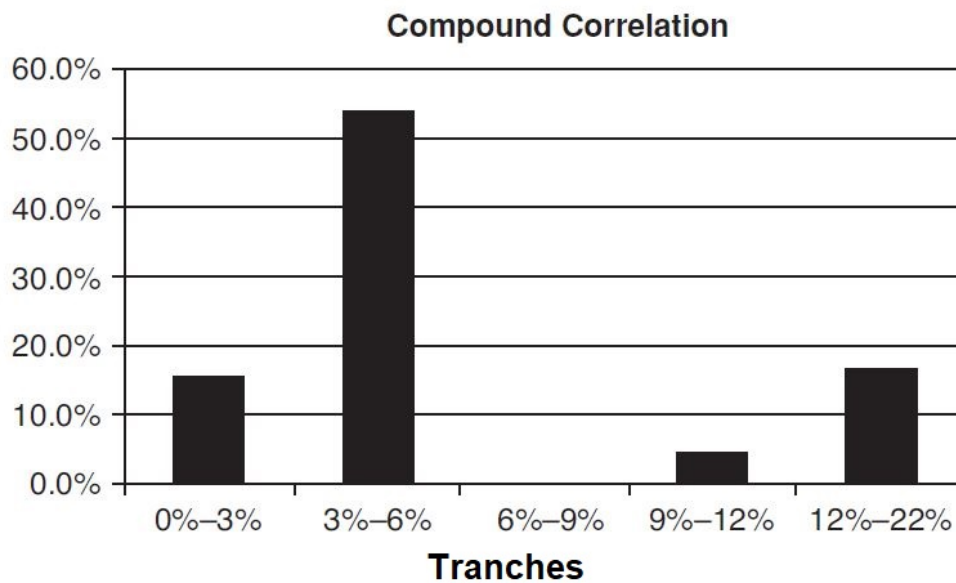


Figura 3.3: Sonrisa de correlación implícita bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del índice Dj-iTraxx Europe S5 - 10 años, Fecha: 2005/08/03. Fuente: Brigo et al. (2010)

También se puede ver en la Figura C.1 que, para la fecha tomada como referencia y para algunos tramos, no existe monotonía del *spread*⁵ del mercado como una función de la correlación compuesta, es decir, la correlación no es una función creciente o decreciente respecto a los tramos.

⁵El tramo de equidad (*equity*) está dado en porcentaje y los otros tramos en puntos básicos.

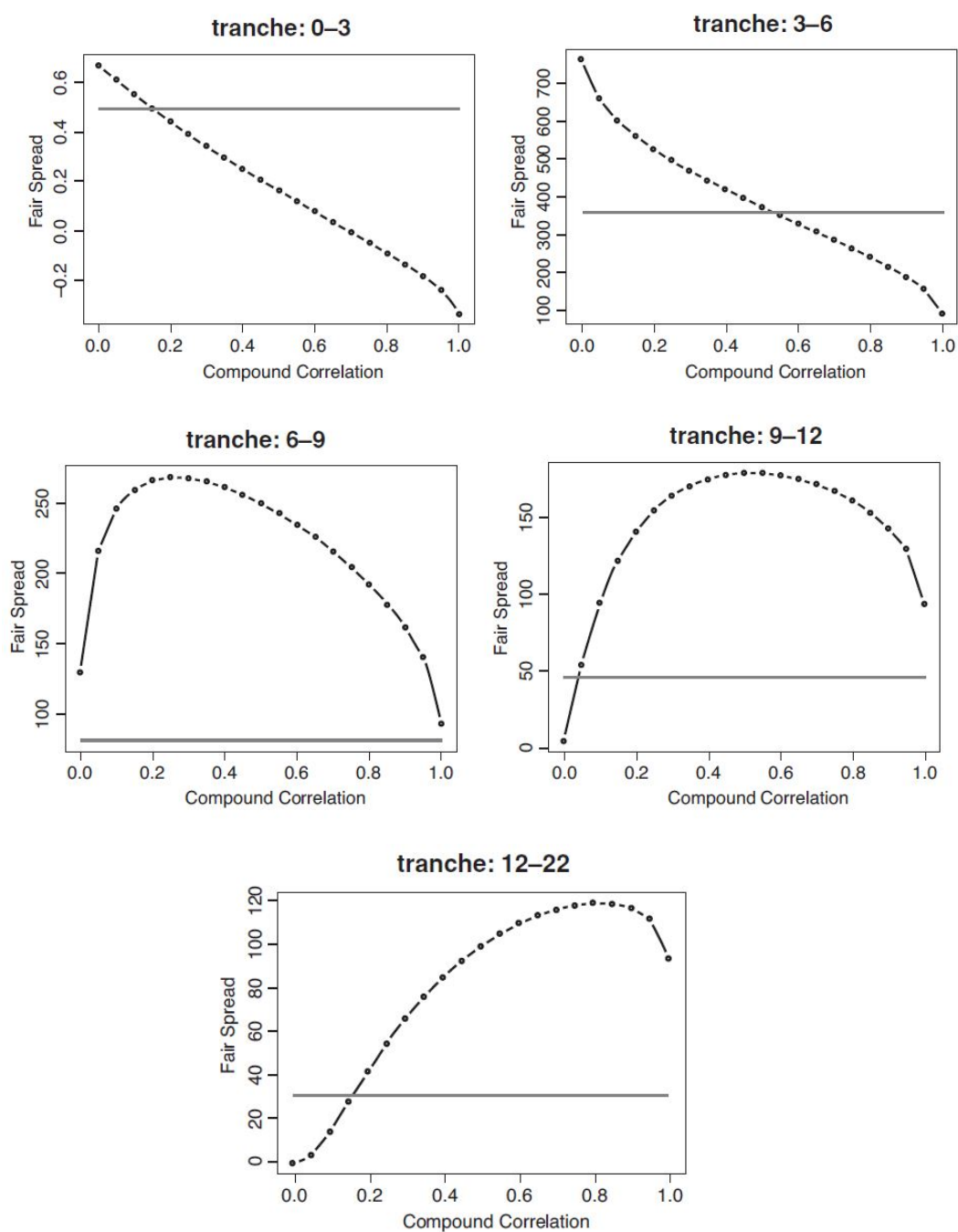


Figura 3.4: *Spread* como función de la correlación compuesta por tramos del índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. (La línea horizontal corresponde al *spread* de mercado) Fuente: Brigo et al. (2010)

Capítulo 4

Modelos Alternativos de Cópulas

Como se evidenció al final del anterior capítulo la cópula Gaussiana es asintóticamente independiente para valores de ρ en $(-1, 1)$, lo cual implica que no es una cópula indicada para modelar dependencia de colas en funciones de distribución conjunta, esto es una debilidad relevante entre todas las que se han estudiado después de la Crisis Financiera. En ocasiones se han comparado las fallas del modelo de cópula Gaussiana con las fallas del modelo Black-Scholes-Merton, ya que ambos están basados en la distribución normal y, a pesar de ofrecer una fácil implementación, no son los más adecuados a la hora de considerar la ocurrencia de eventos extremos. A continuación se mencionan algunas alternativas que pueden ser utilizadas a la hora de modelar los tiempos de *default* que también hacen uso de cópulas.

4.1. Mezcla de dos cópulas

Un camino para modelar dependencia de las colas superior e inferior es por medio de las cópulas de Gumbel y de Clayton, respectivamente, las cuales pertenecen a la familia de cópulas Arquimedianas introducidas en la sección 1.3. A continuación se propone crear una cópula que resulte de mezclar la cópula de Gumbel y Clayton con el fin de obtener una nueva cópula con propiedades de colas más favorables, la Figura 1.11 que se encuentra al final de la sección 1.4 da una idea del porqué al combinar estas cópulas se podría obtener una mejor cópula para modelar dependencia de colas, la mezcla está justificada por el siguiente teorema que se puede encontrar en Nelsen (2006) o Vrac et al. (2012).

Teorema 4.1.1. Sean $C_{\theta_0}^0$ y $C_{\theta_1}^1$ dos cópulas y sea $\alpha \in [0, 1]$. Entonces cualquier combinación lineal convexa $\alpha C_{\theta_0}^0 + (1 - \alpha)C_{\theta_1}^1$ es también un cópula, es decir, la función

$$C_{\theta_0, \theta_1}^{0,1}(u_1, \dots, u_N; \alpha) := \alpha C_{\theta_0}^0(u_1, \dots, u_N) + (1 - \alpha)C_{\theta_1}^1(u_1, \dots, u_N) \quad (4.1)$$

es siempre una cópula.

En particular para los propósitos de este trabajo se considerará la mezcla $C_{\beta, \theta}^{Gu, Cl, N}$ dada por

$$C_{\beta, \theta}^{Gu, Cl, N}(u_1, \dots, u_N; \alpha) = \alpha C_{\beta}^{Gu, N}(u_1, \dots, u_N) + (1 - \alpha)C_{\theta}^{Cl, N}(u_1, \dots, u_N). \quad (4.2)$$

Los coeficientes de dependencia de cola de las cópulas de Gumbel y Clayton justifican la elección de la mezcla propuesta esencialmente por los siguientes dos hechos ilustrados para el caso bivariado:

Proposición 4.1.2. Para la cópula de Gumbel C_{β}^{Gu} , los coeficientes de dependencias de cola satisfacen que $\lambda_u = 2 - 2^{\frac{1}{\beta}}$ y $\lambda_l = 0$.

Demostración. Usando (3.22) se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_{\beta}^{Gu}(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + \exp[-\{(-\log q)^{\beta} + (-\log q)^{\beta}\}^{1/\beta}]}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + \exp[-\{2(-\log q)^{\beta}\}^{1/\beta}]}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + \exp\left[2^{\frac{1}{\beta}} \log q\right]}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + q^{2^{\frac{1}{\beta}}}}{1 - q}, \end{aligned}$$

dado que tanto numerador como denominador toman el valor de cero cuando q tiende a 1, entonces se puede aplicar regla de l'Hôpital para obtener que:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2^{\frac{1}{\beta}} q^{2^{\frac{1}{\beta}} - 1}}{-1} \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando (3.21) se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_\beta^{Gu}(q, q)}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{q^{2^{\frac{1}{\beta}}}}{q},\end{aligned}$$

usando nuevamente la regla de l'Hôpital se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{\beta}} q^{2^{\frac{1}{\beta}} - 1}}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Usando argumentos similares se demuestra que

Proposición 4.1.3. *Para la cópula de Clayton C_θ^{Cl} , los coeficientes de dependencias de cola satisfacen que $\lambda_u = 0$ y $\lambda_l = 2^{-\frac{1}{\theta}}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_\theta^{Cl}(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + (q^{-\theta} + q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + (2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2q^{-(\theta+1)}(2q^{-\theta} - 1)^{-\frac{(1+\theta)}{\theta}}}{-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_\theta^{Cl}(q, q)}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{(q^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2 - q^\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{\theta}}} = 2^{-\frac{1}{\theta}}\end{aligned}$$

□

Lo anterior significa que la cópula de Clayton puede ser usada para modelar dependencia de cola inferior, mientras que la cópula de Gumbel es ideal para modelar dependencia de cola superior eligiendo β y θ apropiados. Lo que se espera entonces es que la mezcla entre las dos cópulas permita modelar dependencia de cola asimétrica para colas superior e inferior. Para ver el comportamiento de los coeficientes de dependencia de cola de la mezcla $C_{\beta,\theta}^{Gu,Cl}$ se trae a colación la siguiente proposición:

Proposición 4.1.4. *Para la mezcla $C_{\theta_0,\theta_1}^{0,1}$ los coeficientes de dependencias de cola satisfacen que $\lambda_u^{0,1} = \alpha(\lambda_u^0) + (1 - \alpha)\lambda_u^1$ y $\lambda_l^{0,1} = \alpha(\lambda_l^0) + (1 - \alpha)\lambda_l^1$*

Demostración. Como se hizo anteriormente,

$$\begin{aligned}\lambda_u^{0,1} &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_{\theta_0,\theta_1}^{0,1}(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + \alpha C_{\theta_0}^0(q, q) + (1 - \alpha)C_{\theta_1}^1(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\alpha[1 - 2q + C_{\theta_0}^0(q, q)] + (1 - \alpha)[1 - 2q + C_{\theta_1}^1(q, q)]}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\alpha[1 - 2q + C_{\theta_0}^0(q, q)]}{1 - q} + (1 - \alpha) \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C_{\theta_1}^1(q, q)}{1 - q} \\ &= \alpha(\lambda_u^0) + (1 - \alpha)\lambda_u^1.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_{\theta_0,\theta_1}^{0,1}(q, q)}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\alpha C_{\theta_0}^0(q, q) + (1 - \alpha)C_{\theta_1}^1(q, q)}{q} \\ &= \alpha(\lambda_l^0) + (1 - \alpha)\lambda_l^1.\end{aligned}$$

□

Una vez se ha elegido una mejor cópula C se debe enlazar con los tiempos de *default* $\tau_i, 1 \leq i \leq N$, como ya se hizo antes, por medio de la expresión

$$F(t_1, \dots, t_N) = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_N \leq t_N) = C(F_1(t_1), \dots, F_N(t_N)).$$

Una aplicación más de las cópulas Arquimedianas es la que se obtiene también como consecuencia de (3.8) al definir la función de supervivencia del vector (τ_1, \dots, τ_N) por medio de la expresión

$$S(t_1, \dots, t_N) = E \left[\prod_{i=1}^N \exp\{-V \hat{G}_V^{-1}(S_i(t_i))\} \right],$$

donde V es la variable aleatoria latente asociada a la cópula Arquimediana LT dada en la Definición 1.3.2, con función de distribución G_V , transformada de Laplace-Stieltjes \hat{G}_V , $G_V(0) = 0$ y usando la relación

$$C(u_1, \dots, u_N) = E \left[\exp \left(-V \sum_{i=1}^N \hat{G}_V^{-1}(u_i) \right) \right].$$

Véase Ejemplo 9.44 en McNeil et al. (2005).

En Burtschell et al. (2009) se estudia el caso de la cópula de Clayton con parámetro θ y V que sigue una distribución $\text{Gamma}(1/\theta, 1)$, ellos concluyen que para efectos de valoración resulta bastante útil esta aproximación y que incluso se obtienen resultados bastante cercanos a la cópula Gaussiana.

4.2. Correlación de base

Con el fin de hacerle frente a las desventajas que presenta la correlación compuesta se introduce la correlación de base como en Torresetti et al. (2006), la cual propone descomponer todos los tramos como combinaciones de tramos de equidad sabiendo que otra forma de obtener el proceso $\bar{L}_{(A,D)}$ definido en (2.5) es por medio de la expresión

$$\bar{L}_{(A,D)} = \frac{\min\{D - A, \max(\bar{L}_t - A, 0)\}}{D - A}.$$

Más aún, se puede ver que

$$\begin{aligned} \bar{L}_{(A,D)} &= \frac{\max(\bar{L}_t - A, 0) - \max(\bar{L}_t - D, 0)}{D - A} \\ &= \frac{-\min(0, A - \bar{L}_t) + \min(0, D - \bar{L}_t)}{D - A} \\ &= \frac{-\min(\bar{L}_t, A) + \bar{L}_t + \min(\bar{L}_t, D) - \bar{L}_t}{D - A} \\ &= \frac{D \cdot \bar{L}_{(0,D)} - A \cdot \bar{L}_{(0,A)}}{D - A}, \end{aligned}$$

por tanto las pérdidas de cualquier tramo se pueden reescribir como la diferencia de las pérdidas de dos tramos de equidad. De esta manera una vez se obtiene la correlación compuesta sobre el tramo $(0, A)$ (**a esta se llama correlación de base**), entonces iterando se busca la correlación de base para el tramo $(0, D)$. En la Figura 4.1 se ilustra la correlación de base calibrada para los datos del Cuadro 3.1 junto con las pérdidas esperadas para tramos de equidad con distintos porcentajes, esto es, $E[\bar{L}(0, B)]$, $B = 3\%, 6\%, 9\%$ y 22% .

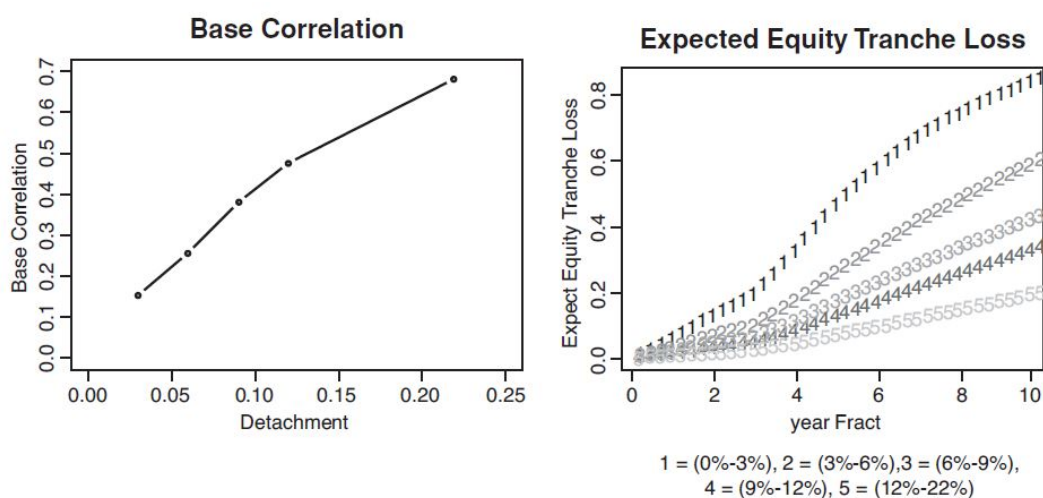


Figura 4.1: Izq:Correlación de base bajo el modelo de cópula Gaussiana de cinco tramos del índice Dj-iTraxx Europe S5 - 10 Años de maduración, Fecha: 2005/08/03. Der: Pérdidas esperadas sobre los tramos de equidad con porcentajes 3%, 6%, 9% y 22% correspondientes a la correlación de base calibrada. Fuente: Brigo et al. (2010)

Se observa en la Figura 4.1 que la correlación de base es una función más suave y monótona que la correlación compuesta. Al respecto en Brigo et al. (2010) se afirma que la correlación de base es una solución a las dificultades encontradas con la correlación compuesta y sus bondades para obtener un valor justo del *spread* se ilustran en la Figura 4.2.

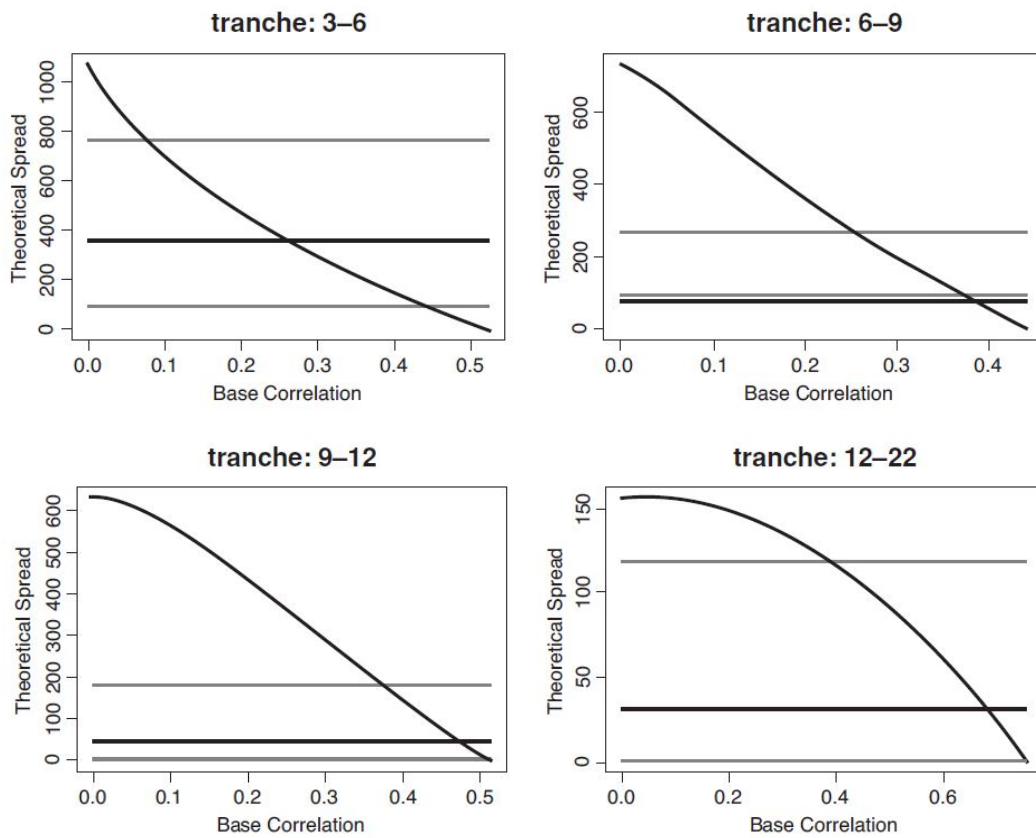


Figura 4.2: *Spread* justo como función de la correlación de base por tramos del índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. (La línea negra corresponde al *spread* de mercado y las líneas claras corresponden a los márgenes mínimos y máximos que se pueden obtener variando la correlación compuesta). Fuente: Brigo et al. (2010)

Sin embargo la correlación de base no goza de plena eficacia, pues como se puede ver en la Figura 4.3 las pérdidas esperadas para los tramos 6-9%, 9-12% y 12-22% toman ligeramente valores negativos, lo cual viola las restricciones de no arbitraje. Esta dificultad surge del hecho de usar dos correlaciones de base diferentes para calcular las pérdidas esperadas.

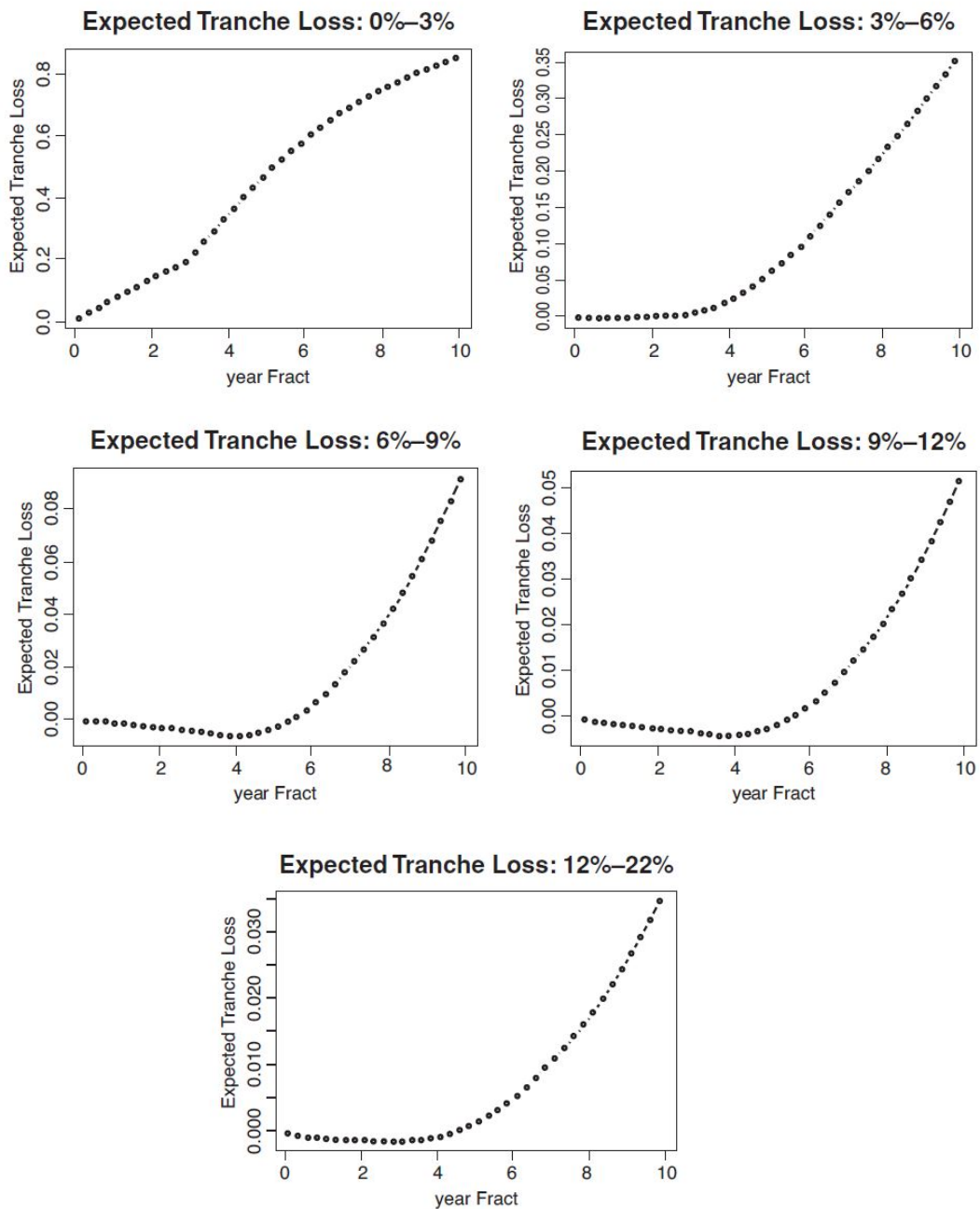


Figura 4.3: Pérdidas esperadas sobre los tramos como función del tiempo correspondientes a las correlaciones de base calibradas para el índice DJ-iTraxx S5 10-años, Fecha: 2005/08/03. Fuente: Brigo et al. (2010)

Para complementar esta sección y encontrar alternativas que superen las dificultades presentadas por la correlación de base se recomiendan los trabajos de Brigo et al. (2010) y Hull et al. (2004).

Capítulo 5

Implementación y Resultados Numéricos

En este capítulo se mostrarán algunos resultados prácticos usando el paquete ‘CDO’ del software R como lo hace el autor Xu (2014) en su tesis, este paquete está diseñado para calcular los *spreads* a 5 años de maduración de los 5 tramos (0-3 %, 3-6 %, 6-9 %, 9-12 %, 12-22 %) del índice iTraxx Europe Series 8 teniendo en cuenta los precios de mercado de 12 fechas distintas, sin embargo para los fines de este trabajo se tomará como referencia el día 2 de noviembre de 2007 con los datos que se muestran en el Cuadro 5.1. Para lograr la valoración se hará uso de los métodos de Montecarlo¹ con el fin de obtener muestras aleatorias del vector $(U_1, \dots, U_N)^t$ de la cópula que se considere, en este ejemplo práctico N será 125 y corresponde a las entidades de referencia del índice en cuestión. En la expresión (3.7) del capítulo 3 se dijo que para cada entidad de referencia

¹El método de Montecarlo es un método numérico que permite dar solución a problemas que dependen de factores aleatorios o cuya solución por métodos analíticos puede resultar compleja. Los métodos de Montecarlo están basados en la analogía entre probabilidad y volumen. Las matemáticas de las medidas formalizan la noción intuitiva de probabilidad, asociando a un evento con un conjunto de resultados y definiendo la probabilidad del evento como su volumen o medida relativa a ese universo de posibles resultados. Montecarlo usa esa identidad al contrario, calculado el volumen de un conjunto interpretando el volumen como una probabilidad. En el caso más sencillo, esto significa un muestreo aleatorio de un universo de posibles resultados y tomar la fracción de las realizaciones aleatorias que caen en un conjunto dado como la estimación del volumen del conjunto. La ley de los grandes números asegura que la estimación converge al valor correcto a medida que el número de realizaciones incrementa. El método tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{M}}$ en virtud del teorema del límite central, siendo M el número de realizaciones. Glasserman (2004).

$\tau_i = S_i(U_i)$, es decir, $U_i = \exp(-\gamma t)$ asumiendo que la tasa de riesgo sea una constante γ , por lo cual se tiene que cada $U_i = \exp(-\gamma \tau_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ es una variable aleatoria uniforme y su distribución conjunta se puede representar por medio de una cópula C , esto es,

$$P(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N) = C(u_1, \dots, u_N)$$

por tanto se puede muestrear el vector $(U_1, \dots, U_N)^t$ de la función cópula que se tome y así

$$\tau_i = \frac{-\log U_i}{\gamma}$$

de donde se obtendrá que,

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) = \left(\frac{-\log U_1}{\gamma}, \dots, \frac{-\log U_N}{\gamma} \right)^t. \quad (5.1)$$

Después de realizar $M = 10,000$ simulaciones de Montecarlo con la fórmula (5.1) se obtienen las muestras (z_1^m, \dots, z_N^m) , $m \in \{1, \dots, 10,000\}$ con las cuales se calculan las pérdidas acumuladas usando (2.4). Por último, las pérdidas se introducen en la fórmula (2.10) para hallar el *spread* de cada tramo, asumiendo además una tasa libre de riesgo del 3% y una tasa de recuperación del 40% como parámetros.

Tramo	<i>Spread</i> en Puntos Básicos
0-3 %	2000
3-6 %	127,78
6-9 %	58,15
9-12 %	35,33
12-22 %	24,205

Cuadro 5.1: Cotización por tramos del índice iTraxx Europe S8 - 5 Años de maduración, Fecha: 2007/11/02

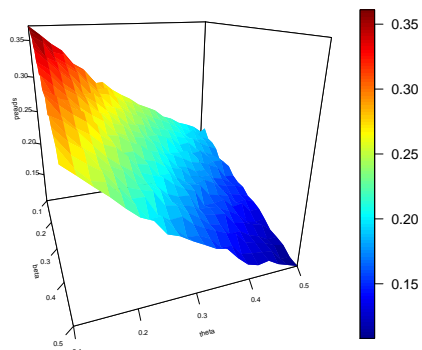
Lo primero que se puede ver en el Cuadro 5.2 es la estructura de correlación bajo el modelo de cópula Gaussiana, es decir, se calculan los precios de los 5 *spreads* con las correlaciones implícitas de cada tramo que se ajustan a los valores de mercado. Las correlaciones correspondientes a cada tramo son las que se muestran en la Figura 3.2.

Tramo	0-3 %	3-6 %	6-9 %	9-12 %	12-22 %
Mercado	2000	127.78	58.15	35.33	24.205
Gauss $\rho = 0,3460$	2001,28	334,26	162,21	89,18	31,59
Gauss $\rho = 0,0172$	4634,87	127,39	1,66	0,16	0
Gauss $\rho = 0,1102$	3772,71	269,83	51,55	12,02	0,98
Gauss $\rho = 0,1949$	2980,07	301,75	97,97	35,95	6,83
Gauss $\rho = 0,3132$	2210,96	326,22	144,64	72,93	23,45

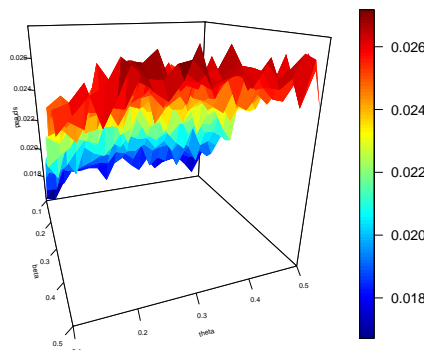
Cuadro 5.2: Precios estimados para varias correlaciones bajo la estructura del modelo de cópula Gaussiana del índice iTraxx Europe S8 - 5 Años de maduración, Fecha: 2007/11/02

Se evidencia en el Cuadro 5.2 que efectivamente las correlaciones que emparejan con los precios de los *spreads* del mercado no coinciden y que mientras uno de los precios coincide para alguno de los tramos, los demás se alejan significativamente.

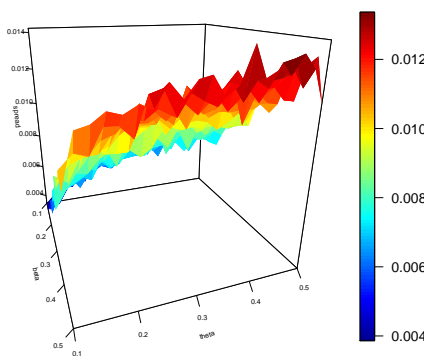
Por otro lado se ilustra en la Figura 5.1 el comportamiento de los precios para cada tramo calculados con la mezcla de las cópulas de Clayton y Gumbel propuesta en (4.2), en todos los casos se asume que $\alpha = 0,5$, es decir, cada cópula tiene el mismo peso dentro de la mezcla. Se puede ver una superficie suave y monótona para el tramo de equidad y una tendencia monótona en el resto de tramos aunque con picos que dependen de la elección de los parámetros, para efectos de valoración se propone que en los tramos, sin incluir en el de equidad, se fije un valor para β y se encuentre el θ óptimo. Sin embargo, problemas de calibración se presentan debido a la cantidad de parámetros, esto representa un reto interesante para trabajos futuros.



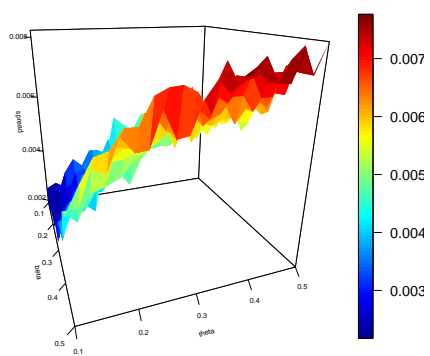
(a) (0-3%)



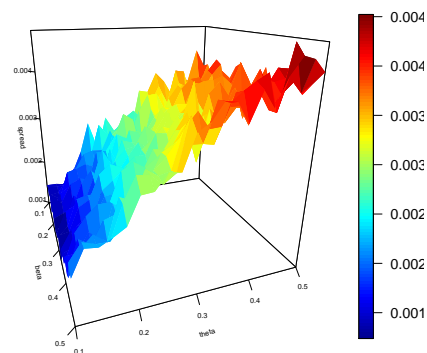
(b) (3-6%)



(c) (6-9%)



(d) (9-12%)



(e) (12-22%)

Figura 5.1: *Spreads* por tramos calculados con mezcla Gumbel-Clayton cambiando los valores de β y θ . Fuente: Elaboración propia.

En el Apéndice B se pueden encontrar más detalles de los valores de los *spreads* graficados en la Figura 5.1 y también del código utilizado para realizar las simulaciones del método de Montecarlo.

Capítulo 6

Conclusiones

- Esta tesis de maestría da una visión general sobre una clase importante de derivados de crédito, los CDO's; además de describir su estructura y los agentes financieros que intervienen en el mercado de estos instrumentos se logra describir de manera detallada una fórmula para valorar el *spread* de un tramo teniendo en cuenta la distribución de pérdidas respectiva.
- Se logran evidenciar las bondades de la teoría de cópulas para obtener la correlación de *default* implícita en la estructura de los CDO's, principalmente el modelo de cópula Gaussiana presentado por Li (2000), el cual representó un hito dentro del mundo financiero gracias a la sencillez que conserva en su implementación, sin embargo también se hicieron explícitas las limitaciones y desventajas que presenta el modelo a la hora de valorar un CDO.
- En el capítulo 3 se muestra cómo el modelo de cópula Gaussiana no es el más indicado para modelar situaciones que generaran desequilibrio como las que se presentaron en la crisis del 2008 debido a la falta de control a la hora de entregar hipotecas, lo que llevó a que las probabilidades de *default* se dispararan. A pesar de que las limitaciones del modelo de cópula Gaussiana eran motivo de discusión en el ámbito académico antes del periodo de crisis, contrario a lo que se afirma en Jones (2009) o Salmon (2009), estas fueron ignoradas debido al buen momento que atravesaban las empresas dedicadas a calificar a las entidades relacionadas y las que empaquetaban en un mismo producto activos riesgosos y no riesgosos.
- La propuesta de mezclar dos cópulas se presenta con el fin de hacer frente

al problema de modelar dependencias de colas, sin embargo cada uno de estos modelos teóricos no están libres de presentar diferencias con la realidad por lo cual cobra fuerza la afirmación de varios académicos en el sentido que no se debe responsabilizar a la academia por las consecuencias que la reducción de los modelos y sus implementaciones masivas generan en los mercados.

- Con la correlación de base se logran superar los problemas de la correlación compuesta, pues se pudo evidenciar para cada tramo que el *spread* es una función monótona de la correlación de base. Además, el rango de *spreads* de mercado que se puede alcanzar variando la correlación de base es mucho más amplio que el correspondiente a la correlación compuesta.
- Los resultados que se obtienen por medio del método de Montecarlo demuestran que la mezcla de las cópulas de Clayton y Gumbel puede superar algunas de las limitaciones de la cópula Gaussiana, sin embargo esta mezcla a su vez no está exenta de que surjan problemas a la hora de aplicarla, ya que como se vio dependiendo los parámetros que se tomen se pueden obtener superficies irregulares que pueden dificultar la valoración. Sin embargo, este nuevo modelo y su implementación representa un punto de partida en el desarrollo de nuevas alternativas para valorar CDO's y motivan a seguir trabajando en el futuro en técnicas más sofisticadas que permitan a los inversionistas conocer y negociar mejor el tipo de instrumento que se les ofrece en el mercado.
- Desde el año 2016 se habla de que algunos bancos como Goldman Sachs están vendiendo unos nuevos instrumentos financieros denominados "Tramos de oportunidad a medida", en inglés "Bespoke Tranche Opportunity (BTO)", ver por ejemplo, Carlozo (2016), Yang (2016) y Johansson and IJsendijk (2017). Lo que se afirma es que estos BTO's no son más que los mismos CDO's renombrados con el fin de no avivar el pánico dejado por la crisis del 2008, el motivo de este surgimiento es que a pesar de las dificultades que trajo consigo el mercado de CDO's, no se puede negar entre sus bondades lo atractivos que resultan sus rendimientos al compararlos con las bajas tasas de interés ofrecidas por el Banco Central. Lo anterior representa el nuevo reto de conocer los BTO's y seguir trabajando en modelos de correlación entre las entidades que intervengan y mejorar las fórmulas de valoración de los mismos.

Apéndice A

Resultados básicos de Probabilidad

En este apéndice se introducen algunos conceptos relacionados con el desarrollo axiomático de la teoría de probabilidad, principalmente espacio de probabilidad, propiedades de las variables aleatorias y vectores aleatorios, además se define un proceso estocástico, filtraciones y al final se habla también del coeficiente de correlación. No obstante se presenta antes una proposición relativa a la continuidad e inversa de funciones crecientes, cuyos resultados se encuentran a lo largo de todo este trabajo. Los conceptos que se presentan son tomados principalmente de Blanco et al. (2012), sin embargo también se han tomado algunos de McNeil et al. (2005), Björk (2009) y Yohai (2008).

A.1. Función inversa generalizada

La inversa generalizada de una función T creciente, definida como $T^{\leftarrow}(\alpha) = \inf \mathcal{D}_\alpha$ donde $\mathcal{D}_\alpha = \{x : T(x) \geq \alpha\}$ y por convención $\inf \emptyset = \infty$ nos resultará de gran utilidad, por eso se darán a continuación algunas de sus propiedades. Cabe resaltar que según las características de la función T que se tome, su función inversa generalizada puede estar definida en el conjunto de los reales extendidos $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Proposición A.1.1. *Sea $T : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, entonces*

a) T^{\leftarrow} es una función creciente y continua por derecha.

b) T es continua $\iff T^{\leftarrow}$ es estrictamente creciente.

c) T es estrictamente creciente $\iff T^{\leftarrow}$ es continua.

Para las siguientes propiedades asúmase adicionalmente que $T^{\leftarrow}(\alpha) < \infty$.

d) Si T es continua a derecha, $T(x) \geq \alpha \iff T^{\leftarrow}(\alpha) \leq x$

e) $T^{\leftarrow} \circ T(x) \leq x$.

f) $T \circ T^{\leftarrow}(\alpha) \geq \alpha$.

g) T es estrictamente creciente $\implies T^{\leftarrow} \circ T(x) = x$.

h) T es continua $\implies T \circ T^{\leftarrow}(\alpha) = \alpha$.

Observación A.1.1. Cuando T es estrictamente creciente y continua su inversa generalizada T^{\leftarrow} coincide con su función inversa, cuando este sea el caso se usará la notación $T^{\leftarrow} = T^{-1}$.

A.2. Espacios de probabilidad

La teoría de probabilidad se sitúa en una clase particular de experimentos, los **Experimentos Aleatorios**, es decir, experimentos cuyo resultado no puede ser determinado con anticipación, el ejemplo clásico es el lanzamiento al aire de una moneda. Siempre que se pueda conocer el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llamará a éste el espacio muestral y se simbolizará con la letra griega Ω . De la teoría de conjuntos se tiene que dado un conjunto A se puede hablar de $\mathcal{P}(A)$, donde $\mathcal{P}(A) := \{a : a \subset A\}$, esto es la esencia de la siguiente definición.

Definición A.2.1. (σ - Álgebra) Sea $\Omega \neq \emptyset$. Una colección \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , es decir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) := \{\omega : \omega \subset \Omega\}$. Se dice que es una σ -álgebra sobre Ω siempre que se satisfagan las siguientes 3 propiedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$. Donde A^c es el complemento de A .
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Los elementos de \mathcal{F} se llaman eventos y a la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le llama un **espacio medible**.

Una característica que tienen las σ -álgebras es que si $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ son σ -álgebras sobre Ω , entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ resulta ser una σ -álgebra sobre Ω , por otro lado, en general la unión de σ -álgebras sobre Ω no resulta ser una σ -álgebra sobre Ω . Lo anterior da origen a la siguiente definición.

Definición A.2.2. (σ -Álgebra Generada) Sea $\Omega \neq \emptyset$ y sea \mathcal{A} una colección de subconjuntos de Ω . Sea $\mathcal{M} := \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega \text{ que contiene a } \mathcal{A}\}$. Entonces $\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{M}} \mathcal{F}$ es la más pequeña σ -álgebra sobre Ω que contiene a \mathcal{A} . $\sigma(\mathcal{A})$ es llamada la σ -álgebra generada por \mathcal{A} .

Se llama además la σ -álgebra de Borel, a la más pequeña σ -álgebra sobre \mathbb{R} que contiene todos los intervalos de la forma $(-\infty, a]$ donde $a \in \mathbb{R}$. Se simboliza la σ -álgebra de Borel por \mathcal{B} .

Definición A.2.3. (Espacio de Probabilidad) Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una función P de valor real definida sobre \mathcal{F} es una medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) siempre que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ (Propiedad de no negatividad).
2. $P(\Omega) = 1$ (Propiedad de normalizado)
3. Si A_1, A_2, \dots son eventos mutuamente excluyentes en \mathcal{F} , esto quiere decir que

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j$$

Entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{Aditividad contable})$$

A la tripleta (Ω, \mathcal{F}, P) se le llama un espacio de probabilidad. Además el espacio se dice completo si se cumple que $\forall A \subset B \in \mathcal{F}, P(B) = 0 \implies A \in \mathcal{F}, P(A) = 0$.

Definición A.2.4. (Variable Aleatoria) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria (real) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para

todo $A \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, donde \mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} . Equivalentemente $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si y solo si $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ lo cual se tiene por el hecho que la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} en \mathbb{R} está generada por la colección de todos los intervalos de la forma $(-\infty, x], x \in \mathbb{R}$.

Cuando se tiene una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se puede dar una nueva medida de probabilidad a la que se llama P_X definida sobre \mathcal{B} , tal que para todo $B \in \mathcal{B}$

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) := P(\{X \in B\})^1$$

A esta nueva medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ se le llama la distribución de X y está bien definida ya que, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Se puede verificar que P_X satisface cada una de las propiedades de una medida de probabilidad y se formaliza la definición de esta medida de probabilidad a continuación.

Definición A.2.5. (Función de Distribución) Sea X una variable aleatoria real. A la función F_X definida sobre \mathbb{R} mediante

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= P_X((-\infty, x]) \\ &= P(X \leq x) \end{aligned}$$

se le llama la función de distribución (o función de distribución acumulada **fda**) de la variable aleatoria X . Se usará la notación $X \sim F$ cuando la variable aleatoria X tenga como función de distribución a F .

Algunas propiedades que caracterizan las funciones de distribución de una variable aleatoria se muestran a continuación.

Teorema A.2.1. (Propiedades de la Función de Distribución) Sea X una variable aleatoria real definida sobre (Ω, \mathcal{F}, P) . La función de distribución F_X satisface que

- a) Si $x < y$ entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$. Es decir, F_X es una función no decreciente.
- b) $F_X(x^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que F_X es continua a derecha en todo punto de \mathbb{R} .

¹Por notación se define $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. En particular $\{X \in (-\infty, x]\} = \{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$.

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$$

Si se sitúa la inversa generalizada en funciones de distribución $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, la función inversa generalizada se conoce como la función cuantil, a la que también se notará F^{-1} aun cuando F no sea continua y estrictamente creciente. Además, si se toma $\alpha \in (0, 1)$, se puede asegurar lo siguiente.

Teorema A.2.2. *El ínf de \mathcal{D}_α existe.*

Demostración. Para que el ínf exista se debe probar que el conjunto es no vacío y que además está acotado inferiormente.

Se verá primero que \mathcal{D}_α es un conjunto no vacío. Por Teorema A.2.1.c se tendrá que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|F(x) - 1| < \epsilon$ siempre que $x \geq N_0$, en particular $|F(N_0) - 1| \leq \epsilon$ y por estar F acotada superiormente por 1 se tendrá que para $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} 1 - F(N_0) &\leq \epsilon \\ \alpha = 1 - \epsilon &\leq F(N_0) \end{aligned}$$

es decir, $N_0 \in \mathcal{D}_\alpha$.

\mathcal{D}_α es un conjunto acotado, pues por el Teorema A.2.1.d se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(-x) &= 0 \end{aligned}$$

por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $x \geq N_0$ entonces $|F(-N_0)| < \epsilon$, en particular por ser $\alpha > 0$ y estar F acotada inferiormente por 0 se tendrá que

$$F(-N_0) < \alpha. \tag{A.1}$$

Por otro lado, si $x \in \mathcal{D}_\alpha$ y $x < -N_0$ se tendría que $F(-N_0) \geq F(x) \geq \alpha$ por Teorema A.2.1.c, hecho que contradice (A.1) y por tanto para cualquier $x \in \mathcal{D}_\alpha$ se debe cumplir que $-N_0 \leq x$. \square

La definición de variable aleatoria que se ha dado coincide con la de una función medible, en ese sentido, si se usa el hecho que toda función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona es medible, el siguiente teorema caracteriza variables aleatorias bajo transformaciones monótonas.

Teorema A.2.3. *Si $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, entonces $T(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es también una variable aleatoria.*

La anterior proposición abre paso al siguiente resultado, el cual será de gran utilidad cuando se le apliquen transformaciones crecientes a las variables aleatorias.

Proposición A.2.4. *Si X es una variable aleatoria con función de distribución F y T es una función creciente, entonces*

1. $\{X \leq x\} \subset \{T(X) \leq T(x)\}$ y

$$P[T(X) \leq T(x)] = P[X \leq x] + P[T(X) = T(x), X > x] \quad (\text{A.2})$$

2. $P[F(X) \leq F(x)] = P[X \leq x]$.

Sean ahora X_1, \dots, X_n variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . A la función $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathbf{X}(\omega) := (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))^t$$

²se le llama un vector aleatorio n -dimensional o simplemente vector aleatorio.

Análogo a lo visto en variables aleatorias, a la medida de probabilidad definida por

$$P_{\mathbf{X}}(B) := P(\mathbf{X} \in B); B \in \mathcal{B}_n$$

se le llama la distribución del vector \mathbf{X} .

Observación A.2.1. *Al definir $P_{\mathbf{X}}$ se ha tomado $B \in \mathcal{B}_n$, es decir, en la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R}^n . Esta σ -álgebra es la generada por todos los intervalos de la forma*

$$(a, b] := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

²El superíndice t indica que es el vector traspuesto de $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

donde $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$ son elementos de \mathbb{R}^n y $a \leq b$, es decir, $a_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$.

Definición A.2.6 (Función de Distribución Conjunta). La función de distribución de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) está definida para todo x_1, \dots, x_n en \mathbb{R} por

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Además, para cada $j = 1, \dots, n$, la función de distribución de la variable X_j está dada por

$$F_{X_j} := \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_{j-1} \rightarrow \infty} \lim_{x_{j+1} \rightarrow \infty} \lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n).$$

A cada función F_{X_j} se le llama la **función de distribución marginal** de la variable $X_j, j = 1, \dots, n$.

De lo anterior se tiene que dada la función de distribución conjunta se pueden encontrar cada una de las distribuciones marginales, sin embargo el recíproco no siempre se tiene.

Teorema A.2.5. (Propiedades de la Función de Distribución Conjunta) Sea $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ un vector aleatorio. La función de distribución conjunta F de las variables X_1, \dots, X_n tiene las siguientes propiedades.

a)

$$\Delta_a^b F := \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{(\sum_{i=1}^n \epsilon_i)} F(\epsilon_1 a_1 + (1 - \epsilon_1) b_1, \dots, \epsilon_n a_n + (1 - \epsilon_n) b_n) \geq 0$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a \leq b$.

b) F es continua a derecha en cada componente.

c) Para cada $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$$

d)

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\infty, \dots, \infty)} F(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

Siempre que exista una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ tal que para cualquier conjunto de Borel C de \mathbb{R}^n :

$$F(x_1, \dots, x_n) = P((X_1, \dots, X_n) \in C) = \int \cdots \int_C f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

se dirá que el vector aleatorio $(X_1, \dots, X_n)^t$ es **absolutamente continuo** y f es la **función de densidad de probabilidad conjunta** de las variables aleatorias X_1, \dots, X_n . Una característica de f que surge del Teorema A.2.5.d es que

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n = 1.$$

A.3. Procesos estocásticos

Definición A.3.1. *Un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una función*

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in \mathbb{R}_+$ la función

$$X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es \mathcal{F} -medible.

Nótese lo siguiente:

- Para cada t la función

$$\omega \mapsto X(t, \omega),$$

simbolizada por X_t , es una variable aleatoria.

- Para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$t \mapsto X(t, \omega),$$

es una función determinista. A esta función se le llama **realización** o **trayectoria** de X .

Una **filtración** (\mathcal{F}_t) sobre (Ω, \mathcal{F}) es una familia creciente $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ de sub σ -álgebras de \mathcal{F} , esto es, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ para $0 \leq t \leq s < \infty$. Además, para alguna filtración (\mathcal{F}_t) se define $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Definición A.3.2. *Un espacio de probabilidad se dice **filtrado** si está equipado con la filtración (\mathcal{F}_t) de su σ -álgebra \mathcal{F} . Se simboliza $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$*

A.3.1. σ -álgebras e información

Anteriormente se mencionó en la Definición A.2.2 de la σ -álgebra generada por una colección de subconjuntos de Ω , se tiene también para una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la siguiente definición:

Definición A.3.3. *La σ -álgebra $\sigma\{X\}$ se define como la más pequeña σ -álgebra \mathcal{F} tal que X es \mathcal{F} -medible.*

Se puede probar que $\sigma\{X\} = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$. Además $\sigma\{X\}$ hace referencia a “la σ -álgebra generada por X ”, la cual es la intersección de todas las σ -álgebras \mathcal{G} tal que X es \mathcal{G} -medible.

Definición A.3.4. *Sea $\mathbf{X} = \{X_t; t \geq 0\}$ un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Se define la σ -álgebra generada por \mathbf{X} sobre el intervalo $[0, t]$ por*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}.$$

De esta manera \mathcal{F}_t^X representa “la información generada por X sobre el intervalo $[0, t]$ ”. Por tanto basados en observaciones de la trayectoria $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, es posible decidir si un evento A dado, ha ocurrido o no, en este caso se simboliza como

$$A \in \mathcal{F}_t^X$$

o se dice que “ A es \mathcal{F}_t^X -medible”.

Si el valor de una variable aleatoria Z está completamente determinado dadas las observaciones de la trayectoria $\{X_s; s \leq t\}$, entonces se simboliza también

$$Z \in \mathcal{F}_t^X.$$

Por último si Y es un proceso estocástico tal que

$$Y(t) \in \mathcal{F}_t^X$$

para todo $t \geq 0$ entonces se dice que Y está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$. Una vez se entiende que \mathcal{F}_t contiene la información obtenida hasta el tiempo t , se puede dar la siguiente definición.

Definición A.3.5 (Tiempo de espera). *Dado un espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ una variable aleatoria τ se dice que es un (\mathcal{F}_t) -tiempo de espera si*

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Esto es, en cualquier tiempo t se puede determinar la ocurrencia o no del tiempo de parada basados en la información disponible hasta el tiempo t .

A.3.2. Martingalas y principios de valoración

Considere una familia de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Se da la definición de una clase importante de procesos estocásticos que se consideran un ‘juego justo’, ya que al condicionar la información actual el futuro esperado es igual al valor actual del proceso.

Definición A.3.6. *Un proceso estocástico $M = \{M_t, t \geq 0\}$ se llama una martingala con respecto a la filtración (\mathcal{F}_t) si:*

- Para cada $t \geq 0$, M_t es \mathcal{F}_t -medible.
- Para cada $t \geq 0$, $E(|M_t|) < \infty$.
- $E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$, $s < t$.

Además de la medida de probabilidad P se presenta la siguiente medida llamada también medida neutral al riesgo o medida de martingala equivalente.

Definición A.3.7. *(Brigo and Mercurio (2006)) Una medida de martingala equivalente \mathbb{Q} es una medida sobre el espacio (Ω, \mathcal{F}) tal que:*

- P y \mathbb{Q} son medidas equivalentes, es decir, $P(A) = 0$ si y solo si $\mathbb{Q}(A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.
- La derivada de Radon-Nikodym $d\mathbb{Q}/dP$ perteneces a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, esto es, es cuadrado integrable con respecto a P .
- El proceso del precio descontado de un activo $B(0, \cdot)S$ es una $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ -martingala. Es decir, $E(B(0, t)S_t | \mathcal{F}_u) = B(0, u)S_u$, para todo $0 \leq u \leq t$. Donde E es el valor esperado bajo \mathbb{Q} y $B(0, t)$ es el proceso correspondiente al factor de descuento de la cuenta libre de riesgo hasta el tiempo t .

Se culmina esta sección dando la fórmula para hallar el precio de un activo sin oportunidades de arbitraje, este resultado se conoce como la regla fundamental de valoración.

Teorema A.3.1. *(Schönbucher (2003)) Sea X una variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible la cual es acotada inferiormente y sea \mathbb{Q} una medida de martingala sobre el mercado para los activos subyacentes. Un precio de arbitraje de un nuevo título contingente X en $T > t$ está dado por:*

$$\Pi(t, X) = E[B(t, T)X | \mathcal{F}_t], \quad (\text{A.3})$$

donde el valor esperado nuevamente es tomado bajo \mathbb{Q} .

A.4. Relación entre variables aleatorias

En la literatura se encuentra que dos eventos dados A y B se dicen independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, de lo contrario serán eventos dependientes. A continuación se extiende un poco el concepto de dependencia e independencia a las variables aleatorias.

Definición A.4.1. (*Variables Aleatorias Independientes*) Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias reales definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Si para cualquier par de conjuntos de Borel A y B de \mathbb{R} se tiene que

$$P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in B),$$

entonces decimos que X_1 y X_2 son independientes.

Como consecuencia de la anterior definición se puede afirmar que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)$$

es decir,

$$F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

Recíprocamente si se tiene la condición de la ecuación (A.4) entonces las variables serán independientes.

Se dan a continuación dos conceptos importantes para determinar si existe dependencia lineal entre dos variables aleatorias, estos son el de **covarianza** y **coeficiente de correlación**. $E(X)$ y $\sigma^2(X)$ representan la esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria X respectivamente y serán requeridas para las siguientes definiciones, más detalles sobre las propiedades de estas cantidades se pueden consultar en Blanco et al. (2012).

Definición A.4.2. (*Covarianza*) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y tales que $E(X_1^2) < \infty$ y $E(X_2^2) < \infty$. La covarianza entre X_1 y X_2 está definida por:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\} \quad (\text{A.5})$$

Algunas propiedades de la covarianza son:

- $\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$

- $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$
- $\sigma^2(X_1) = Cov(X_1, X_1)$
- $Cov(aX_1 + b, X_2) = aCov(X_1, X_2)$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$

Un resultado adicional surge de la primera propiedad antes mencionada y es que si X_1 y X_2 son independientes, entonces $Cov(X_1, X_2) = 0$, esto debido a que $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$ dada la independencia entre las variables aleatorias X_1 y X_2 . Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no se tiene en general.

Definición A.4.3. (Coeficiente de Correlación) Si X_1 y X_2 son variables aleatorias con $0 < \sigma^2(X_1) < \infty$ y $0 < \sigma^2(X_2) < \infty$, el coeficiente de correlación entre ellas está dado por

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{\sigma^2(X_1)\sigma^2(X_2)}} \quad (\text{A.6})$$

Este coeficiente toma valores en el intervalo $[-1, 1]$ y cumple que si las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes $\rho(X_1, X_2) = 0$ como consecuencia de que $Cov(X_1, X_2) = 0$. Si hay dependencia lineal perfecta entre las variables, es decir, $X_2 = aX_1 + b$ o $P[X_2 = aX_1 + b] = 1$ para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ entonces $\rho(X_1, X_2) = \pm 1$, por último, cuando hay dependencia lineal imperfecta, $-1 < \rho(X_1, X_2) < 1$.

A pesar de ser el coeficiente de correlación uno de los conceptos más asociados con dependencia, es solo una medida estocástica particular que tiene comportamientos deseados cuando de distribuciones normales multivariadas o más generalmente distribuciones elípticas se trata. Sin embargo, resulta desventajoso por los siguientes aspectos:

- Las varianzas de X_1 y X_2 deben ser finitas o la correlación lineal no esta definida.
- Si dos variables aleatorias son independientes su coeficiente de correlación lineal es cero, el recíproco en general no es cierto, es decir, si el coeficiente de correlación lineal entre dos variables aleatorias es cero, no siempre se puede asegurar independencia entre las variables.

- La correlación lineal no es invariante bajo transformaciones crecientes no lineales $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, para dos variables aleatorias X_1, X_2 se tiene en general que

$$\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2).$$

Apéndice B

Spreads de la mezcla Gumbel - Clayton

En este apéndice se presentan los valores de los *spreads* con los cuales se generaron las gráficas de la Figura 5.1 junto con el código correspondiente en el software R con el cual se obtuvieron y graficaron.

Spreads para el tramo (12-22%) calculados con la cópula mezcla Gumbel - Clayton por el método de Monte Carlo. Los parámetros están dispuestos de tal manera que el peso α es 0.5, β corresponde al parámetro de la cópula de Gumbel (horizontales) y theta corresponde al parámetro de la cópula de Clayton (verticales). Ambos parámetros toman 20 valores igualmente espaciados entre 0.1 y 0.5.

[1.]	0.0014386718	0.0014364666	0.0013959903	0.001694025	0.002140738	0.0027966058
[2.]	0.0014834514	0.001461623	0.001496608	0.001845977	0.001829561	0.002147434
[3.]	0.0013799498	0.001414804	0.001721670	0.001896216	0.002272724	0.002296607
[4.]	0.0015129485	0.001363328	0.001949551	0.002001966	0.002078811	0.001977232
[5.]	0.0011784161	0.001581777	0.001715748	0.001875198	0.001742751	0.002392802
[6.]	0.0016174195	0.001473827	0.001849804	0.001958155	0.001901843	0.001880998
[7.]	0.0012554584	0.001341411	0.001484626	0.001942833	0.002183056	0.001981126
[8.]	0.0010972515	0.001258059	0.001800178	0.001609216	0.002112832	0.002667236
[9.]	0.0011494803	0.001596224	0.001701427	0.001749195	0.002001272	0.002165944
[10.]	0.0011889570	0.001394364	0.001925210	0.001980302	0.001945511	0.002395067
[11.]	0.0013595588	0.001404187	0.001862567	0.001980612	0.002442775	0.002618413
[12.]	0.0009862298	0.001487760	0.001687210	0.001718848	0.002229158	0.002388482
[13.]	0.0013404062	0.001681784	0.001783797	0.001865628	0.002215334	0.002242090
[14.]	0.0013966605	0.001462861	0.001621734	0.001973444	0.002159740	0.002295922
[15.]	0.0013362591	0.001861791	0.002129422	0.002308748	0.002313565	0.002825157
[16.]	0.0016110921	0.001635642	0.001976748	0.001733803	0.002390319	0.002290027
[17.]	0.0014264594	0.002018687	0.001870990	0.002252988	0.002318578	0.002571437
[18.]	0.0015233110	0.001971081	0.002174349	0.002009109	0.002709284	0.002622422
[19.]	0.0019351401	0.002221538	0.002144653	0.002137065	0.002705644	0.003108052
[20.]	0.0018222403	0.002251814	0.002220539	0.002329040	0.002457107	0.002901704

[1.]	0.002142621	0.002888216	0.002554959	0.002765188	0.002553568	0.003443458
[2.]	0.002793210	0.002524182	0.002672795	0.002902344	0.003042702	0.002832096
[3.]	0.002275593	0.002699768	0.002685281	0.002368177	0.002415976	0.002626396
[4.]	0.001933687	0.002672766	0.002871206	0.002641703	0.003129971	0.003465897
[5.]	0.002397961	0.002690404	0.003164489	0.003025108	0.002393191	0.003214063
[6.]	0.002219974	0.002816068	0.002698713	0.002844451	0.002779066	0.003091354
[7.]	0.002583110	0.002145367	0.002936239	0.002859494	0.002853941	0.003064860
[8.]	0.002304152	0.002819451	0.002749007	0.002708244	0.002906256	0.003381767
[9.]	0.002489110	0.002705269	0.002742604	0.003116110	0.002980342	0.003302111
[10.]	0.002356044	0.002643957	0.002893675	0.002741901	0.002841779	0.003399949
[11.]	0.002533191	0.002331777	0.002812734	0.003005491	0.003205080	0.003151382
[12.]	0.002590755	0.002787661	0.002793640	0.003175147	0.003149944	0.003443397
[13.]	0.002707081	0.002669648	0.002576229	0.002686013	0.002880082	0.003208378
[14.]	0.002378016	0.002636526	0.003043066	0.003021596	0.003329456	0.003630919
[15.]	0.002957389	0.002828058	0.002979224	0.003008100	0.003403369	0.003421482
[16.]	0.002620078	0.002705476	0.003135124	0.003255294	0.003565854	0.002883915
[17.]	0.002597578	0.002941075	0.003149194	0.003405141	0.003287116	0.003276043
[18.]	0.003087326	0.002946669	0.002997376	0.003640417	0.003872014	0.003579348
[19.]	0.003085266	0.002900310	0.003048028	0.003877226	0.003460131	0.004067199
[20.]	0.002919596	0.003175490	0.003146656	0.003696021	0.003816498	0.004097526

```

Código en R para calcular y graficar los spreads:
install.packages("devtools")
library(devtools)
install_github("vafexiu/cdo")
library(CDO)
x4 <- seq(0.1,0.5,length=20)
n4 <- length(x4)
y4 <- matrix(nrow=n4, ncol=n4)
for(k in 1:n4){
  for(m in 1:n4){
    y4[k,m] <- mcg(x4[k],x4[m],0.5, 10000, c("2007-11-02"))[5]
  }
}
persp3D(x4,x4,z=y4,main="mu",phi=20,
xlab="beta",ylab="theta",
+zlab="spread",theta = 70,ticktype =
"detailed",cex.main=0.5,
+cex.lab=0.5,cex.axis=0.5)

```

Spreads para el tramo (9-12%) calculados con la cópula mezcla Gumbel - Clayton por el método de Monte Carlo. Los parámetros están dispuestos de tal manera que el peso α es 0.5, β corresponde al parámetro de la cópula de Gumbel (horizontales) y theta corresponde al parámetro de la cópula de Clayton (verticales). Ambos parámetros toman 20 valores igualmente espaciados entre 0.1 y 0.5.

[1.] 0.002505191 0.002682538 0.002448415 0.003286858 0.003212786 0.003811554	[1.] 0.003786502 0.003499061 0.005009988 0.004710948 0.004457507 0.004294167	[10]	[11]	[12]
[2.] 0.001943748 0.002252307 0.003188439 0.003674603 0.003350865 0.003598984	[2.] 0.003568066 0.004275193 0.004171599 0.004402525 0.004606476 0.005182338	[11]	[12]	
[3.] 0.001899990 0.002592639 0.002433909 0.003278577 0.003405236 0.004068781	[3.] 0.003992797 0.004095841 0.004375803 0.004539278 0.004423763 0.004765987	[12]		
[4.] 0.002479363 0.002386643 0.002371497 0.003002302 0.003167125 0.003579299	[4.] 0.003913863 0.004253618 0.004323048 0.004815322 0.004220886 0.004457627	[13]		
[5.] 0.002205175 0.002575855 0.003133564 0.002999545 0.003180313 0.003856526	[5.] 0.004045700 0.003755860 0.004629642 0.004496145 0.004711686 0.004748561	[14]		
[6.] 0.002247618 0.002385191 0.002610434 0.003041806 0.003734831 0.003817880	[6.] 0.003896518 0.004497523 0.004228413 0.004429327 0.004448715 0.004982770	[15]		
[7.] 0.002307815 0.002678956 0.002779223 0.003014989 0.003355522 0.003988887	[7.] 0.004368258 0.003997832 0.003706068 0.004410898 0.004805283 0.004467056	[16]		
[8.] 0.002255243 0.002763285 0.003178879 0.003949429 0.003577543 0.004239861	[8.] 0.003768024 0.004644790 0.004264085 0.004993616 0.004500832 0.004565189	[17]		
[9.] 0.002629630 0.002805240 0.003547210 0.003414269 0.004081015 0.004118196	[9.] 0.004360378 0.004352830 0.004554665 0.005280420 0.004681053 0.005894720	[18]		
[10.] 0.002504422 0.003196358 0.002815711 0.004014015 0.004310489 0.004208420	[10.] 0.004843462 0.005025259 0.004774881 0.004773866 0.005183811 0.00581328	[19]		
[11.] 0.002314298 0.003370684 0.003386698 0.003879356 0.004073104 0.004449123	[11.] 0.004299626 0.004708257 0.004996241 0.004953829 0.005820384 0.005232627	[20]		
[12.] 0.003012106 0.003683788 0.003414910 0.003975899 0.003911638 0.004682532	[12.] 0.005045581 0.004557364 0.004880265 0.005220224 0.005495979 0.005927530			
[13.] 0.003379468 0.003489484 0.003570043 0.004068509 0.004140794 0.004631656	[13.] 0.004858983 0.005683082 0.005168015 0.005378802 0.005913130 0.006128058			
[14.] 0.003446492 0.004103347 0.004029337 0.003706466 0.005131526 0.004799996	[14.] 0.004344143 0.005075899 0.005383043 0.006037176 0.005249606 0.006291057			
[15.] 0.003576691 0.003948277 0.003958627 0.004493289 0.004596275 0.004763223	[15.] 0.005136946 0.005394151 0.005650081 0.005843466 0.006368963 0.006810428			
[16.] 0.003401736 0.004422369 0.004810916 0.005565777 0.005377443 0.005395597	[16.] 0.005605109 0.005560164 0.006372425 0.005821937 0.006206094 0.006231721			
[17.] 0.003726649 0.004591924 0.004537467 0.005492010 0.005634513 0.005871064	[17.] 0.005642729 0.00616497 0.006141076 0.005965707 0.007189681 0.006155844			
[18.] 0.004630541 0.004274599 0.004962704 0.005058233 0.006000213 0.005922751	[18.] 0.006750853 0.006532309 0.006715053 0.006302249 0.006717825 0.006437338			
[19.] 0.004803064 0.004807764 0.005710214 0.005539091 0.006655267 0.005946022	[19.] 0.005967700 0.006886915 0.006135999 0.006193360 0.007013054 0.007452268			
[20.] 0.004878069 0.005526785 0.006111814 0.006199019 0.006658862 0.006656164	[20.] 0.007282400 0.007438216 0.007460954 0.007284176 0.006757058 0.007922668			

Código en R para calcular y graficar los spreads:

```

install.packages("devtools")
library(devtools)
install_github("YafeiXu/cdo")
library(CDO)
x3 <- seq(0.1,0.5,length=20)
n3 <- length(x3)
y3 <- matrix(nrow=n3, ncol=n3)
for(k in 1:n3){
  for(m in 1:n3){
    y3[k,m] <- mcg(x3[k],x3[m],0.5, 10000, c("2007-11-02"))[4]
  }
}
persp3D(x3,x3,z = y3,main="","",phi=20,
        xlab="beta",ylab="theta",
        +zlab="spread",theta = 70,ticktype =
        "detailed",cex.main=0.5,
        +cex.lab=0.5,cex.axis=0.5)

```

Spreads para el tramo (6-9%) calculados con la cópula mezcla Gumbel - Clayton por el método de Monte Carlo. Los parámetros están dispuestos de tal manera que el peso α es 0.5, β corresponde al parámetro de la cópula de Gumbel (horizontales) y theta corresponde al parámetro de la cópula de Clayton (verticales). Ambos parámetros toman 20 valores igualmente espaciados entre 0.1 y 0.5.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
[1.1] 0.003457498	0.0040274746	0.004568535	0.004311255	0.005355052	0.004913420	[1.7] 0.005821776	0.005423338	0.005588720	0.006373557	0.006247116	0.006387072
[2.1] 0.003723375	0.004242641	0.004613749	0.004992588	0.004806869	0.006162603	[2.2] 0.005705641	0.006098842	0.005764215	0.006326105	0.006281741	0.006164315
[3.1] 0.003552932	0.004616229	0.005004045	0.00524114	0.005876647	0.005450969	[3.3] 0.006018975	0.005768503	0.006337048	0.006830547	0.006852053	0.007036433
[4.1] 0.003949162	0.004870803	0.005371919	0.005844315	0.005392670	0.006627161	[4.4] 0.006584662	0.006014290	0.007004147	0.007027568	0.007159175	0.006585388
[5.1] 0.004444127	0.005018256	0.005935120	0.006044666	0.006220378	0.006545719	[5.5] 0.006526157	0.006753439	0.006759661	0.006837647	0.006895192	0.007400797
[6.1] 0.004703919	0.004809606	0.005768742	0.006236165	0.006447847	0.006943341	[6.6] 0.007077439	0.006993685	0.007923827	0.007202519	0.007035161	0.007463201
[7.1] 0.004836748	0.005473278	0.006694582	0.005870853	0.006690286	0.007408749	[7.7] 0.006801616	0.006977119	0.007668096	0.007896692	0.007530104	0.009059167
[8.1] 0.005666616	0.005821837	0.006793359	0.006772038	0.006512328	0.007573574	[8.8] 0.007107162	0.008342035	0.008517197	0.007906240	0.007794830	0.008741852
[9.1] 0.005216912	0.006620311	0.006607033	0.006972481	0.007482576	0.007605994	[9.9] 0.008289971	0.008045547	0.008247715	0.008381307	0.008666764	0.009656659
[10.1] 0.006135809	0.006649062	0.007282996	0.007779884	0.007563601	0.008737100	[10.10] 0.007598678	0.008880102	0.008462639	0.009198454	0.008833529	0.008312014
[11.1] 0.006520488	0.006936368	0.007292526	0.007653379	0.008612767	0.008741559	[11.11] 0.009296427	0.008635800	0.008185386	0.008596929	0.009430508	0.009561500
[12.1] 0.007333251	0.008267687	0.008029193	0.007954120	0.008612672	0.008983583	[12.12] 0.009310373	0.009376532	0.009775810	0.010530065	0.009437169	0.010362242
[13.1] 0.007015207	0.008045863	0.008352643	0.009057324	0.009350581	0.009760522	[13.13] 0.009945611	0.010165297	0.010122507	0.010388028	0.009916253	0.010439768
[14.1] 0.006973359	0.007910034	0.008766335	0.010006799	0.009285622	0.009245121	[14.14] 0.009246448	0.010422189	0.010409207	0.010758452	0.010931574	0.009999052
[15.1] 0.008850199	0.008439709	0.009491496	0.009699078	0.009634539	0.010279338	[15.15] 0.010645234	0.011509301	0.010604060	0.011773402	0.011396638	0.011325874
[16.1] 0.008517384	0.009690529	0.009945197	0.009850430	0.010076476	0.010996342	[16.16] 0.010912294	0.010882470	0.011155378	0.010676470	0.012324907	0.011786531
[17.1] 0.009130828	0.009750953	0.009981984	0.010003720	0.010765867	0.011181424	[17.17] 0.011901377	0.011558658	0.011074532	0.011539379	0.011991116	0.011673796
[18.1] 0.009368288	0.010480451	0.010189597	0.010769782	0.010975093	0.011523562	[18.18] 0.011355728	0.011767687	0.011464661	0.011884487	0.011368630	0.011919369
[19.1] 0.010052498	0.010628821	0.010432331	0.011477038	0.011452146	0.010881622	[19.19] 0.012521074	0.012693206	0.011531508	0.012429201	0.012068689	0.011793067
[20.1] 0.009501699	0.011651330	0.011792781	0.012196282	0.012017091	0.0121318869	[20.20] 0.012108526	0.013027382	0.012357882	0.013050846	0.013174246	0.012308359

Código en R para calcular y graficar los spreads:

```

install.packages("devtools")
library(devtools)
install_github("YafeiXu/cdo")
library(CDO)
x2 <- seq(0, 1, 0.5, length=20)
n2 <- length(x2)
y2 <- matrix(nrow=n2, ncol=n2)
for(k in 1:n2){
  for(m in 1:n2){
    y2[k,m] <- mcg[c(x2[k],x2[m]),0.5, 10000, c("2007-11-02")]
  }
}
persp3D(x2,x2,z = y2,main="",phi=20,
xlab="beta",ylab="theta",
+zlab="spread",theta = 70, ticktype =
"detailed",cex.main=0.5,

```

Spreads para el tramo (3-6%) calculados con la cópula mezcla Gumbel - Clayton por el método de Monte Carlo. Los parámetros están dispuestos de tal manera que el peso α es 0.5, β corresponde al parámetro de la cópula de Gumbel (horizontales) y theta corresponde al parámetro de la cópula de Clayton (verticales). Ambos parámetros toman 20 valores igualmente espaciados entre 0.1 y 0.5.

[1.] 0.01628670	0.01612918	0.01726334	0.01810091	0.01803266	0.01814914	[7.] 0.01805298	0.01700211	0.01823883	0.01859282	0.01794029	0.01742974	[12]
[2.] 0.01666513	0.01776458	0.01756471	0.01846180	0.01850808	0.01863085	[2.] 0.01871647	0.01866895	0.01936426	0.01919618	0.01868049	0.01965837	
[3.] 0.01712287	0.01779897	0.01883409	0.01866666	0.01890858	0.01915554	[3.] 0.01948631	0.01950041	0.02111096	0.01956578	0.01954209	0.01991775	
[4.] 0.01789431	0.01783305	0.01966625	0.01983211	0.02079215	0.02035481	[4.] 0.02083204	0.02061574	0.02018350	0.02091552	0.02060418	0.02059987	
[5.] 0.01904301	0.01987122	0.02016060	0.01898396	0.02071853	0.02021698	[5.] 0.01998937	0.02059814	0.02148377	0.02166595	0.02208589	0.02103674	
[6.] 0.01968106	0.01947064	0.01991351	0.02075169	0.02147890	0.02096287	[6.] 0.02226365	0.02284923	0.02181888	0.02116956	0.02197460	0.02288120	
[7.] 0.02054576	0.01947075	0.02142683	0.02179558	0.02156217	0.02133869	[7.] 0.02301939	0.02294596	0.02112885	0.02262962	0.02147291	0.02110302	
[8.] 0.02101743	0.02188917	0.02229166	0.02325055	0.02270965	0.02239568	[8.] 0.02395476	0.02193181	0.02223805	0.02347284	0.02224911	0.02247145	
[9.] 0.02133060	0.02215231	0.02262469	0.02351276	0.02407735	0.02270417	[9.] 0.02274717	0.02251960	0.02424298	0.02378532	0.02401686	0.02199449	
[10.] 0.02104372	0.02158976	0.02200396	0.02318869	0.02376603	0.02379666	[10.] 0.02435526	0.02430858	0.02438809	0.02357095	0.02353953	0.02255596	
[11.] 0.02299036	0.02249371	0.02329743	0.023305805	0.02515818	0.02481819	[11.] 0.02491943	0.02417875	0.02395914	0.02443930	0.02442628	0.02373246	
[12.] 0.02312925	0.02281704	0.02407811	0.02314653	0.02327443	0.02480098	[12.] 0.02576071	0.02596611	0.02587256	0.02333220	0.02407418	0.02448776	
[13.] 0.02342665	0.02366629	0.02398011	0.02448515	0.02532222	0.02555878	[13.] 0.02468546	0.02481117	0.02493622	0.02474229	0.02642519	0.02601285	
[14.] 0.02363554	0.02387076	0.02316101	0.02431136	0.02444592	0.02516911	[14.] 0.02543384	0.02650505	0.02511223	0.02442896	0.02532600	0.02445052	
[15.] 0.02512314	0.02559438	0.02495450	0.02486371	0.02515557	0.02396869	[15.] 0.02498566	0.02530550	0.02586769	0.02673327	0.02532976	0.02593914	
[16.] 0.02424741	0.02498686	0.02484198	0.02596080	0.02510301	0.02538944	[16.] 0.02548621	0.02683923	0.02570750	0.02594846	0.02574939	0.02552395	
[17.] 0.02503733	0.02455805	0.02513947	0.02504366	0.02521192	0.02506923	[17.] 0.02622687	0.02586173	0.02562912	0.02612541	0.02603104	0.02634874	
[18.] 0.02528054	0.02497976	0.02457566	0.02719837	0.02624758	0.02721156	[18.] 0.02709094	0.02761118	0.02605628	0.02656137	0.02613422	0.02577526	
[19.] 0.02567646	0.02587663	0.02659597	0.02473335	0.02592519	0.02779595	[19.] 0.02655809	0.02645729	0.02707160	0.02719661	0.02657596	0.02622190	
[20.] 0.02485679	0.02555383	0.02619976	0.02653465	0.02756703	0.02705013	[20.] 0.02618747	0.02574835	0.02652295	0.02791800	0.02611234	0.02682104	
[13] 0.01823884	0.01738070	0.01779440	0.01875305	0.01799620	0.01735524	[19] 0.01656739	0.01770286					
[2.] 0.01797636	0.01851589	0.01814977	0.01827276	0.01853597	0.01820074	[2.] 0.01808804	0.01870913					
[3.] 0.01939067	0.01957847	0.01965857	0.01798305	0.01902068	0.01854168	[3.] 0.01885983	0.01833040					
[4.] 0.01981364	0.02024517	0.01941605	0.02009808	0.01957880	0.01842247	[4.] 0.02065323	0.01877357					
[5.] 0.02074213	0.02102005	0.02027162	0.01973421	0.02118211	0.01981835	[5.] 0.02006636	0.01964942					
[6.] 0.02147741	0.02156299	0.02219695	0.02099776	0.02191047	0.02095904	[6.] 0.02093200	0.02053950					
[7.] 0.02170127	0.02214848	0.02199324	0.02233176	0.02188431	0.02172640	[7.] 0.02228706	0.02045409					
[8.] 0.02152330	0.02219155	0.02374078	0.02138560	0.02255460	0.02279253	[8.] 0.02156717	0.02066918					
[9.] 0.02350809	0.02251437	0.02331764	0.02358512	0.02320196	0.02379091	[9.] 0.02444192	0.02330103					
[10.] 0.02507721	0.02334437	0.02381681	0.02458831	0.02333986	0.02335512	[10.] 0.02330949	0.02307489					
[11.] 0.02368412	0.02492223	0.02412799	0.02414626	0.02364494	0.02267342	[11.] 0.02356254	0.02314129					
[12.] 0.02478472	0.02449990	0.02370849	0.02398458	0.02536733	0.02361093	[12.] 0.02436714	0.02344625					
[13.] 0.02462379	0.02442287	0.02402877	0.02363009	0.02494052	0.02444456	[13.] 0.02397834	0.02453698					
[14.] 0.02618747	0.02470867	0.02504087	0.02590871	0.02408121	0.02436482	[14.] 0.02521838	0.02433805					
[15.] 0.02617394	0.02481175	0.02583399	0.02439389	0.02405508	0.02482756	[15.] 0.02424839	0.02496183					
[16.] 0.02700883	0.02589212	0.02607623	0.02588579	0.02525494	0.02600304	[16.] 0.02563991	0.02535400					
[17.] 0.02649747	0.02759622	0.02659605	0.02646213	0.02548039	0.02485911	[17.] 0.02470762	0.02561711					
[18.] 0.02600260	0.02674185	0.02559187	0.02642887	0.02558978	0.02711400	[18.] 0.02573594	0.02709508					
[19.] 0.02640729	0.02648990	0.02611221	0.02711504	0.02566483	0.02612408	[19.] 0.02466668	0.02639769					
[20.] 0.02690084	0.02595990	0.02701631	0.02628824	0.02672622	0.02729334	[20.] 0.02700298	0.02464022					

Código en R para calcular y graficar los spreads:

```
install.packages("devtools")
library(devtools)
install_github("YafeiXu/cdo")
library(CDO)
n1 <- seq(0, 1, 0.5, length=20)
y1 <- matrix(nrow=n, ncol=n)
for(k in 1:n1){
  for(m in 1:n1){
    y1[k,m] <- m*cgf(x1[k],x1[m],0.5, 10000, c("2007-11-02"))[2]
  }
}
persp3D(x1,x1,z = y1,main="",phi=20,
        xlab="beta",ylab="theta",
        +zlab="spread",theta = 70, ticktype =
        "detailed",cex.main=0.5,
```

Spreads para el tramo (0-3%) calculados con la cópula mezcla Gumbel - Clayton por el método de Monte Carlo. Los parámetros están dispuestos de tal manera que el peso α es 0.5, β corresponde al parámetro de la cópula de Gumbel (horizontales) y theta corresponde al parámetro de la cópula de Clayton (verticales). Ambos parámetros toman 20 valores igualmente espaciados entre 0.1 y 0.5.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]
[1.1] 0.3688692	0.3571502	0.3445551	0.3348174	0.3160071	0.3072169	0.2851204	[1.1] 0.2862291	0.2737697	0.2647268	0.2571709	0.2468479	0.2408143	0.2343928
[2.] 0.3655650	0.3529766	0.3349829	0.3309345	0.3131049	0.3068354	0.2896101	[2.] 0.2769396	0.2680423	0.2590375	0.2553046	0.2444739	0.2394638	0.2269106
[3.] 0.3637546	0.3562554	0.3304585	0.3211052	0.3109230	0.2956661	0.2813934	[3.] 0.2830037	0.2676814	0.2566369	0.2453813	0.2393349	0.2317520	0.2260034
[4.] 0.3599218	0.3513171	0.3270720	0.3182655	0.3087927	0.2917259	0.2790543	[4.] 0.2761549	0.2597246	0.2509638	0.2394422	0.2357905	0.2262023	0.2164163
[5.] 0.3582430	0.3347469	0.3273596	0.3121076	0.2973700	0.2809609	0.2766205	[5.] 0.2620801	0.2580672	0.2498953	0.2430317	0.2278495	0.2219807	0.2181815
[6.] 0.3493071	0.3372759	0.3198584	0.3086776	0.2860486	0.2875585	0.2688184	[6.] 0.2643510	0.2549599	0.2388675	0.2354455	0.2223050	0.2125612	0.2111752
[7.] 0.3469018	0.3329847	0.3189269	0.3068985	0.2872092	0.2776003	0.2653460	[7.] 0.2572407	0.2446217	0.2404061	0.2229055	0.2234455	0.2178714	0.2025963
[8.] 0.3358141	0.3256770	0.3088233	0.2975959	0.2856629	0.2689363	0.2635142	[8.] 0.2511172	0.2399132	0.2341842	0.2235409	0.2165904	0.1993415	0.1985642
[9.] 0.3333438	0.3199360	0.3046488	0.2957627	0.2810338	0.2705902	0.2563789	[9.] 0.2521667	0.2349353	0.2324072	0.2212188	0.2070592	0.2018266	0.1951491
[10.] 0.3256992	0.3125778	0.2993288	0.2847490	0.2738271	0.2646534	0.2495654	[10.] 0.2432628	0.2289275	0.2190168	0.2160376	0.2044164	0.1906502	0.1876785
[11.] 0.3279009	0.3001230	0.2980563	0.2804957	0.2660229	0.2516672	0.2493453	[11.] 0.2396817	0.2333243	0.2220234	0.2081646	0.1966678	0.1926677	0.1795811
[12.] 0.3148387	0.3067485	0.2935149	0.2864559	0.2700835	0.2550310	0.2321070	[12.] 0.2625214	0.2196437	0.2156739	0.2058896	0.1897816	0.1803775	0.1759262
[13.] 0.3140225	0.3005572	0.2889338	0.2791853	0.2627497	0.2525476	0.2339224	[13.] 0.2218516	0.2190511	0.2027750	0.2029358	0.1871601	0.1830118	0.1803181
[14.] 0.3136585	0.2932363	0.2785840	0.2696271	0.2566309	0.2512934	0.2380601	[14.] 0.2169969	0.2116769	0.2061786	0.1946967	0.1866129	0.1813801	0.1583358
[15.] 0.2991394	0.2911468	0.2788102	0.2623589	0.2476056	0.2362830	0.2268564	[15.] 0.2137698	0.2040032	0.1913979	0.1855057	0.1844472	0.1634566	0.1628262
[16.] 0.3020096	0.2826299	0.2674284	0.2572570	0.2430469	0.2356992	0.2195303	[16.] 0.2139659	0.2049748	0.1883008	0.1813704	0.1770013	0.1632358	0.1608461
[17.] 0.2954447	0.2797797	0.2700622	0.2502989	0.2407949	0.2227747	0.2178465	[17.] 0.2135910	0.1938721	0.1913623	0.1792535	0.1702283	0.1585905	0.1547356
[18.] 0.2914994	0.2716742	0.2607010	0.2509550	0.2331830	0.2169359	0.2166377	[18.] 0.1993298	0.1839298	0.1852652	0.1729183	0.1650229	0.1585386	0.1522493
[19.] 0.2872501	0.2646529	0.2499625	0.2464221	0.2315470	0.2176688	0.1986485	[19.] 0.1996732	0.1809816	0.1683373	0.1671598	0.1600646	0.1458358	0.1442227
[20.] 0.2762148	0.2636683	0.2506700	0.2383150	0.2242391	0.2117749	0.2050915	[20.] 0.1869467	0.1815438	0.1726021	0.1648061	0.1566489	0.1527597	0.1377512

Código en R para calcular y graficar los spreads:

```
install.packages("devtools")
library(devtools)
install_github("YafeiXu/cdo")
library(CDO)
x <- seq(0.1,0.5,length=20)
n <- length(x)
y<-matrix(nrow=n, ncol=n)
for(k in 1:n){
  for(l in 1:n){
    y[k,m] <- mrg(x[k],x[m],0.5, 10000, c("2007-11-02"))[1]
  }
}
persp3D(x,x,z = y,main="", phi=20,
        xlab="beta",ylab="theta",
        +zlab="spread", theta = 70, ticktype =
        "detailed", cex.main=0.5,
```

Apéndice C

Características del computador en el que se corrieron los códigos

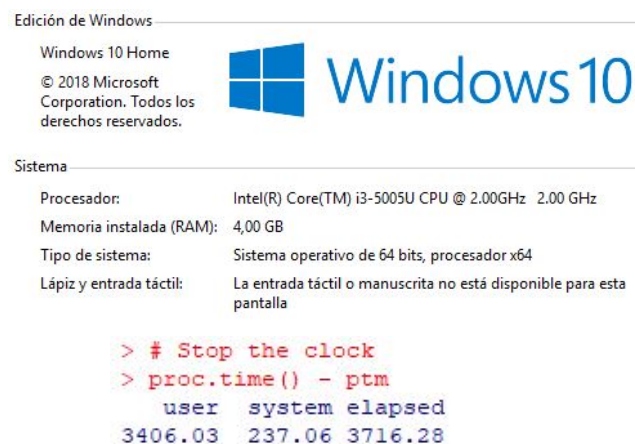


Figura C.1: Características del Computador y tiempos de cálculo de 400 *spreads* para un tramo - software R

User: Tiempo de ejecución del código.

System: Tiempo de procesos del sistema (abrir y cerrar archivos).

Elapsed: Diferencia en tiempo desde que inicia el contador. (U+S).

Bibliografía

- University of Oxford Anonymous. Gaussian copula model, cdos and the crisis. 2016.
- R.G. Bartle. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, USA, 2011.
- Tomas Björk. *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press, 2009.
- L. Blanco, V. Arunachalam, and D. Dharmaraja. *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 2012.
- D. Brigo and F. Mercurio. *Interest Rate Models –Theory and Practice: with smile, inflation and credit*. Springer-Verlag, 2 edition, 2006.
- D. Brigo, M. Morini, and A. Pallavicini. *Counterparty credit risk, collateral and funding: with pricing cases for all asset classes*. John Wiley & Sons, 2013.
- Damiano Brigo, Andrea Pallavicini, and Roberto Torresetti. *Credit models and the crisis: A journey into CDOs, copulas, correlations and dynamic models*. John Wiley & Sons, 2010.
- Xavier Burtschell, Jon Gregory, and Jean-Paul Laurent. A comparative analysis of cdo pricing models. *working paper*, 2009.
- Lou Carlozo. Ghost of “the big short” haunts wall street, 2016.
- George Chacko, Anders Sjöman, Hideto Motohashi, and Vincent Dessain. *Credit Derivatives, Revised Edition: A Primer on Credit Risk, Modeling, and Instruments*. FT Press, 2015.
- U. Cherubini, E. Luciano, and W. Vecchiato. *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons, 2004.

- Catherine Donnelly and Paul Embrechts. The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 40(1):1–33, 2010.
- R.J. Elliott, M. Jeanblanc, and M. Yor. On models of default risk. *Mathematical Finance*, 10(2):179–195, 2000.
- P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, pages 176–223, 2002.
- Paul Embrechts. Did a mathematical formula really blow up wall street. 2009.
- A. Erdely. Cópulas y dependencia de variables aleatorias: Una introducción. *Miscelánea Matemática*, 48:7–28, 2009.
- William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 1. Wiley, New York, 1968.
- S.S. Galiani. Copula functions and their application in pricing and risk managing multiname credit derivative products. *University of London Master of Science Project*, 2003.
- K. Giesecke. Correlated default with incomplete information. *Journal of Banking & Finance*, 28(7):1521–1545, 2004.
- Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2004.
- Stephanie Höfling. Credit risk modeling and valuation: The reduced form approach and copula models. 2006.
- John Hull, Alan White, et al. Valuation of a cdo and an nth to default cds without monte carlo simulation. *Journal of Derivatives*, 12(2):8–23, 2004.
- R.A Jarrow and F. Yu. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *the Journal of Finance*, 56(5):1765–1799, 2001.
- M. Jeanblanc and M. Rutkowski. Modelling of default risk: an overview. *Mathematical finance: theory and practice*, pages 171–269, 2000.
- Erik Johansson and Rens IJsendijk. Bto's: The new cdo's? 2017.

- Sam Jones. The formula that felled wall st, 2009.
- J.F. Jouanin, G. Rapuch, G. Riboulet, and T. Roncalli. Modelling dependence for credit derivatives with copulas. 2001.
- Clark H Kimberling. A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes mathematicae*, 10(2-3):152–164, 1974.
- C. Kowalski. Non-normal bivariate distributions with normal marginals. *Taylor & Francis*, 27:103–106, 1973.
- David Lando. On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives research*, 2(2-3):99–120, 1998.
- Jean-Paul Laurent and Jon Gregory. Basket default swaps, cdos and factor copulas. 2003.
- D. Li. On default correlation: A copula function approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4):43–54, 2000.
- Jarles Marimon. Una falacia sobre dependencia entre variables aleatorias ilustrada con teoría de cópulas. *Trabajo de grado*, 2016.
- A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, techniques and tools*. Princeton university press, New Jersey, 2005.
- Moody's. Símbolos y definiciones de calificaciones. *Moody's Investor Service*, 2018.
- J.P Morgan and RiskMetrics Group. The j.p. morgan guide to credit derivatives. *Working paper, Department of Statistics, Bonn University*, 2006.
- R.B Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer, USA, 2006.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018. URL <https://www.R-project.org/>.
- Felix Salmon. Recipe for disaster: The formula that killed wall street, 2009.
- P.J. Schönbucher and D Schubert. Copula-dependent default risk in intensity models. *Risk Publications*, 2001.

- Philipp J Schönbucher. *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*. John Wiley & Sons, 2003.
- Standard&Poor's. Definiciones de calificaciones de s&p global ratings. *Standard & Poor's Financial Service*, 2018.
- Roberto Torresetti, Damiano Brigo, and Andrea Pallavicini. Implied correlation in cdo tranches: A paradigm to be handled with care. 2006.
- Oldrich Alfons Vasicek. *Probability of loss on loan portfolio*. KMV Corporation, 1987.
- Mathieu Vrac, Lynne Billard, Edwin Diday, and Alain Chédin. Copula analysis of mixture models. *Computational Statistics*, 27(3):427–457, 2012.
- S. Wang and J. Dhaene. Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22:235–242, 1998.
- David Vernon Widder. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, 1941.
- Yafai Xu. Cdo, hame copulas and an r package “cdo”. Master's thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, 2014.
- Melissah Yang. What is a bespoke tranche opportunity? “the big short” ends with a big warning, 2016.
- Yang Yi. Collateralized debt obligation (cdo) modelling and its model comparisons, 2008.
- V.J. Yohai. *Notas de Probabilidades y Estadística*. 2008.