UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propiedades Métricas de Sistemas Rotantes Relativistas con Simetría Axial (Metric Properties of Relativistic Rotating Frames with Axial Symmetry)

Sergio Andrés Torres Suárez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2016

Propiedades Métricas de Sistemas Rotantes Relativistas con Simetría Axial (Metric Properties of Relativistic Rotating Frames with Axial Symmetry)

Sergio Andrés Torres Suárez

Tesis de maestría presentado como requisito parcial para optar al grado de:
Magíster en Ciencias - Astronomía

Director:
José Robel Arenas Salazar

Línea de Investigación:
Gravitación y Cosmología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2016

Página de Aceptación

José Robel Arenas Salazar
Director

Eduard Alexis Larrañaga Rubio
Jurado

Fredy Alexander Ochoa Pérez
Jurado

Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo.

Albert Einstein

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi director de tesis, José Robel Arenas, por su dedicación a guiarme, orientarme, aconsejarme y no dejarme perder la 'brújula' durante todo el proceso de desarrollo del presente trabajo, además por inspirarme y motivarme a la posibilidad de llevar este trabajo más allá. Agradezco al Observatorio Astronómico Nacional por haberme aceptado para realizar este trabajo. Agradezco a mi familia por apoyarme en todas las metas que me propongo.

Agradezco también a los profesores de los seminarios: Leonardo Castañeda, Benjamín Calvo, Eduard Alexis Larrañaga, Giovanni Pinzón, quienes me brindaron también consejos y sugerencias académicas que aportaron en gran medida en mi proceso de formación como investigador.

Agradezco también a mis compañeros de maestría, ya que las inquietudes de algunos de ellos, contribuyeron a la reflexión y discusión de los temas tratados en este trabajo.

Resumen

El presente trabajo caracteriza la naturaleza relativista de las mediciones espacio-temporales sobre sistemas de referencia rotantes con simetría axial. Se introduce una formulación axiomática de los sistemas rotantes relativistas, para luego, con base en el Principio de Relatividad Generalizado (PRG), se extiende el rango de aplicación de la Relatividad Especial a dichos sistemas de referencia, calculando el tensor métrico asociado a un observador rotante arbitrario, a partir de su estado de movimiento. Se observa principalmente la desincronización de los relojes locales sobre los sistema de referencia rotantes. Esta propiedad implica que sobre sistemas de referencia rotantes, se presentan los efectos de dilatación temporal y corrimiento al rojo/azul de las señales de luz. El concepto de simultaneidad sobre sistemas rotantes resulta ser de carácter relativo a cada observador, lo cual conduce a que la forma como un observador fijo a un sistema rotante mide intervalos espaciales y temporales debe ser de carácter local. A partir de estas propiedades de medición, se muestra que la geometría espacial sobre sistemas rotantes debe ser no-euclidiana. Para completar el estudio de las propiedades métricas de un sistema rotante, se estudia la estructura causal del espacio-tiempo asociado a un observador rotante arbitrario. Se concluye que esta estructura causal es un concepto relativo. Se calculan los vectores de Killing asociados a un observador rotante arbitrario, y las ecuaciones de las geodésicas temporales y nulas en sistemas rotantes.

Para conectar las propiedades métricas de los sistemas rotantes con las propiedades de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, se determina la aproximación de campo débil de la solución de Kerr a partir de la métrica de Einstein-Ehrenfest. Se estudian las propiedades de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico a partir de las propiedades espacio-temporales de un sistema de referencia uniformemente rotante, como un caso particular. Finalmente, se estudiaron algunas propiedades adicionales de los campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos y los sistemas de referencia rotantes, como el efecto Lense-Thirring, el efecto Sagnac y la desviación geodésica.

Palabras clave: Sistema rotante, Principio de Relatividad, Métricas Estacionarias.

Abstract

In this thesis we characterize the relativistic nature of spacetime measurements on rotating reference frames with axial symmetry. An axiomatic formulation of relativistic rotating frames is introduced, then, based on the Generalized Relativity Principle (GRP), we extend the application range of Special Relativity to such reference frames, by calculating the metric tensor associated with an arbitrary rotating observer, from its state of motion. Unsynchronization of local clocks on rotating frames is mainly observed. This property implies that on rotating frames, the effects of time dilation and redshift or blueshift of light signals are presented. The concept of simultaneity on rotating frames proves to be relative to each observer, leading the way to a fixed observer to a rotating frame measures spatial and temporal intervals must be local. From these measurement properties, we show that the spatial geometry on rotating frames must be non-Euclidean. To complete the study of the metric properties of a rotating frame, the causal structure of the spacetime associated with an arbitrary rotating observer is studied. We conclude that this causal structure is a relative concept. Killing vectors associated with an arbitrary rotating observer, and the temporal and null geodesic equations on rotating frames are calculated.

To connect the metric properties of rotating frames with the properties of an axially symmetric stationary gravitational field, we determine the weak field limit of the Kerr solution from the Einstein-Ehrenfest metric. The properties of an axially symmetric stationary gravitational field are studied, by considering the spacetime properties of an uniformly rotating reference frame, as a particular case. Finally, some aditional properties of the axially symmetric stationary gravitational fields and the rotating reference frames are studied, as the Lense-Thirring effect, the Sagnac effect and the geodesic deviation.

Keywords: Rotating frame, Relativity Principle, Stationary Metrics.

Contenido

Agradecimientos ix

Resumen xi

Lista de figuras xvii

Notación y Convenciones xix

1. Introducción 1

2. Principios y postulados generales 3
- 2.1. Principios y postulados de la Relatividad Especial . . . 6
- 2.2. Principios y postulados de los sistemas rotantes relativistas . . . 7

3. Definiciones 8
- 3.1. Definiciones en Relatividad Especial . . . 8
- 3.2. Definiciones en sistemas de referencia rotantes . . . 10

4. Espacio-tiempo asociado a un observador rotante 15
- 4.1. Transformaciones de Lorentz . . . 15
- 4.2. Transformación de coordenadas espacio-temporales entre el sistema inercial Σ y el sistema rotante K . . . 16
- 4.3. Otra forma de obtener las Transformaciones de Lorentz . . . 17
  - 4.3.1. Relatividad de la simultaneidad . . . 21
  - 4.3.2. Dilatación temporal . . . 22
  - 4.3.3. Contracción de las longitudes . . . 22
- 4.4. Transformaciones entre un observador inercial y un observador rotante general . . . 23
- 4.5. Propiedades métricas del espacio-tiempo asociado al observador rotante . . . 32
  - 4.5.1. Dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo/azul . . . 32
  - 4.5.2. Relatividad de la simultaneidad de eventos sobre el sistema rotante K . . . 34
  - 4.5.3. Cálculo de la velocidad física de la luz sobre el sistema rotante K . . . 37
  - 4.5.4. Cálculo de la velocidad coordenada de la luz sobre el sistema rotante K . . . 37
  - 4.5.5. Caracterización no euclidiana de la geometría espacial del sistema rotante . . . 40
  - 4.5.6. Cálculo de las geodésicas temporales . . . 42
  - 4.5.7. Cálculo de las geodésicas nulas . . . 44
  - 4.5.8. Vectores de Killing . . . 46

4.5.9. Conos de luz . . . 47
4.5.9.1. Cono de luz asociado al observador "rotante" O'_0 en el origen . . . 47
4.5.9.2. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$, referido al observador "rotante" en el origen . . . 47
4.5.9.3. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con radio de rotación $R \neq 0$ . . . 51
4.5.9.4. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O'', referido a un observador rotante O' con $R \neq 0$ . . . 51
4.6. Cinemática sobre el sistema rotante . . . 52
4.6.1. El movimiento de un móvil a lo largo de un elemento de circunferencia sobre el sistema rotante K, con centro en el eje de rotación . . . 52
4.6.1.1. Movimiento del móvil relativo al sistema inercial Σ . . . 52
4.6.1.2. Movimiento del móvil descrito por el observador "rotante" en el origen . . . 53
4.6.1.3. Movimiento del móvil descrito por un observador rotante con radio coordenado R . . . 54
4.6.2. Movimiento de dos móviles que dan una vuelta completa en sentidos opuestos con la misma velocidad V' con respecto al sistema rotante . . . 55
4.6.2.1. Los dos móviles tienen la misma velocidad coordenada v'_0 . . . 55
4.6.2.2. Los dos móviles tienen la misma velocidad física (local) V' . . . 56
4.6.3. Movimiento de dos móviles que dan una vuelta completa en sentidos opuestos con la misma velocidad V con respecto al sistema inercial Σ . . . 57
4.6.3.1. Los dos móviles dan una vuelta completa con respecto al sistema inercial Σ . 57
4.6.3.2. Los dos móviles dan una vuelta completa con respecto al sistema rotante K 57
4.6.4. El movimiento de fotones en el vacío . . . 58
4.6.5. Transformaciones de Lorentz locales entre el observador inercial O y un observador rotante arbitrario O' . . . 58

5. Campo Gravitacional Estacionario Axialmente Simétrico 61
5.1. Criterios físicos . . . 61
5.1.1. Sistema de referencia uniformemente rotante como un caso especial de campo gravitacional estacionario axialmente simétrico . . . 62
5.1.2. Interpretación gravitacional de la definición de tiempo propio . . . 63
5.1.3. Dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo-azul gravitacional . . . 65
5.1.4. La naturaleza geométrica del espacio-tiempo en la presencia de gravitación . . . 68
5.1.5. Gravedad como un fenómeno métrico . . . 69
5.2. Una conexión entre los efectos no inerciales sobre sistemas rotantes con la gravitación . . . 74
5.3. Perturbación a primer orden de la métrica de Einstein-Ehrenfest . . . 79
5.4. Interpretación gravitacional de las definiciones de tiempo físico dt^* y longitud física dl^* . . . 82

6. Aplicaciones 84
6.1. El efecto Lense-Thirring . . . 84
6.2. El efecto Sagnac desde un punto de vista relativista . . . 88
6.3. Desviación geodésica y curvatura . . . 91

7. Conclusiones y Recomendaciones 95
7.1. Conclusiones . . . 95
7.2. Recomendaciones . . . 97

A. Relatividad General **98**
A.1. Algunos conceptos de Geometría Diferencial . . . 98
A.1.1. Derivada de Lie . . . 98
A.1.2. La métrica . . . 98
A.1.3. Geodésicas métricas . . . 99
A.1.4. Conexión métrica o conexión de Levi-Civita . . . 99
A.1.5. Derivada covariante . . . 100
A.1.6. El tensor de curvatura . . . 100
A.1.7. Vectores de Killing . . . 101
A.1.8. Métricas estacionarias . . . 102
A.1.9. Campos vectoriales ortogonales a las hipersuperficies . . . 103
A.1.10. Métricas estáticas . . . 104
A.2. Postulados de la Teoría de la Relatividad General . . . 106
A.2.1. La variedad espacio-tiempo . . . 107
A.2.2. Los campos de materia . . . 107
A.2.3. Postulados . . . 107

Bibliografía **110**

Lista de Figuras

3-1. Sincronización de Relojes [Tejeiro S., 2005]. 9
3-2. Sincronización de relojes sobre sistemas rotantes. La distancia infinitesimal dL se ha exagerado por motivos de claridad. 13

4-1. Los "ejes coordenados" punteados son los del observador O, mientras que los no punteados son los del observador O'. 16
4-2. Vecindad $\mathcal{V}$ conteniendo un reloj cualquiera C de O'. 17
4-3. Sistema de referencia de un observador inercial O [Cáceres Dominguez, 1998]. 18
4-4. Sistema de referencia de O' visto desde el sistema de O [Cáceres Dominguez, 1998]. 19
4-5. Apariencia de los relojes de O cuando los relojes de O' marcan todos $t' = 0$ [Arzeliès, 1966]. . 20
4-6. Relatividad de la simultaneidad entre dos observadores inerciales O y O' 21
4-7. Línea de mundo de un observador rotante [Cáceres Dominguez, 1998]. 24
4-8. Desincronización de los relojes de O comparados con los relojes de un observador rotante local O'. Los relojes con doble círculo indican el tiempo del observador inercial O, mientras que los relojes sencillos indican el tiempo de los relojes del observador rotante O'. 31
4-9. Representación del tiempo local. Los relojes con doble círculo indican el tiempo del observador inercial O, mientras que los relojes con un sólo círculo indican el tiempo de los observadores locales rotantes [Arzeliès, 1966]. 33
4-10.Efecto de corrimiento al rojo detectado por distintos observadores atados al sistema rotante. . 34
4-11.Comparación entre tiempo local y tiempo natural [Arzeliès, 1966]. 36
4-12.Geodésica de un fotón libre con velocidad física c, respecto a un sistema inercial [Arzeliès, 1966]. 45
4-13.Dibujo esquemático de dos geodésicas nulas que pasan a través de cualquier par de puntos P y Q en K [Arzeliès, 1966]. 45
4-14.Cono de luz asociado al "rotante" en el origen. 48
4-15. 49
4-16.Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$, referido al observador "rotante" en el origen, calculado mediante la ecuación (4-164). La figura **4-15** con $R\omega/c = 0{,}3$ y la figura **4-16** con $R\omega/c = 0{,}8$. 49
4-17.Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$ y $R\omega/c = 0{,}999$, referido al observador "rotante" en el origen, calculado mediante la ecuación (4-164). 50
4-18.Diagrama de conos de luz asociados a observadores rotantes arbitrarios, referidos al observador rotante en el origen [Kajari et al., 2009]. 52
4-19.[Arzeliès, 1966]. 53
4-20.[Arzeliès, 1966]. 54

5-1. Efecto de corrimiento al rojo en la presencia de un campo gravitacional uniforme [Carroll, 1997]. 68
5-2. Representación en el espacio-tiempo de las líneas de mundo de los extremos de una longitud de onda de la luz [Carroll, 1997]. 69
5-3. Una interpretación del efecto de arrastre de los sistemas inerciales, en el contexto de los sistemas rotantes. 79

6-1. Un giroscopo (círculo sólido) cayendo a lo largo del eje de rotación de un cuerpo rotante [M. P. Hobson, 2006]. 86
6-2. El interferómetro de Sagnac rotante [Hecht, 2002]. 89
6-3. Dos geodésicas vecinas [M. P. Hobson, 2006]. 92

A-1. Campo vectorial ortogonal a la familia de hipersuperficies X^α [D'Inverno, 1992]. 104

Notación y Convenciones

En el presente trabajo se utiliza la signatura $(+,-,-,-)$. Los índices griegos $\alpha, \beta, \ldots$ se utilizan para las coordenadas espacio-temporales y van de 0 a 3, los índices latinos $a, b, \ldots$ se utilizan para las coordenadas espaciales y van de 1 a 3.

Símbolo	**Significado**
$\mathcal{A}$	Área
$\frac{D}{D\lambda}$	Derivada covariante a lo largo de una curva
G	Constante de Gravitación Universal $\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^2/_{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\right)$
$g_{\alpha\beta}$	Componentes del tensor métrico en un espacio-tiempo general
∂_α	Derivada parcial con respecto a x^α
∇_α	Derivada covariante
$A_{,\beta}$	Derivada parcial de A con respecto a β
$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$	Tensor de Riemann-Christoffel
${}^nR^a{}_{bcd}$	Tensor de Riemann-Christoffel espacial n-dimensional
$R_{\alpha\beta}$	Tensor de Ricci
${}^nR_{ab}$	Tensor de Ricci espacial n-dimensional
R	Escalar de Ricci
${}^nR$	Escalar de Ricci espacial n-dimensional
R	Radio coordenado de rotación
$\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma}$	Símbolo de Christoffel
$\left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\}$	Símbolo de Christoffel
ρ	Densidad de energía
ω	Velocidad angular de un sistema rotante
K	Sistema rotante
Σ	Sistema inercial
$'_0$	Referente al observador rotante en el origen
$\gamma_{\mu\nu}$	Componentes del tensor métrico en un espacio-tiempo seudoeuclídeo
$\kappa_{\alpha\beta}$	Componentes del tensor métrico en espacial
$ds_{(0)}$	Elemento de línea espacio-temporal en un espacio-tiempo seudoeuclídeo
ds	Elemento de línea espacio-temporal en un espacio-tiempo general
V	Velocidad física
v	Velocidad coordenada
τ	Tiempo propio

t	Tiempo coordenado
t'	Tiempo local
t^*	Tiempo natural o físico
dl^*	Elemento de longitud física
dl	Elemento de longitud sobre un sistema inercial
L	Longitud física
$\mathcal{V}$	Vecindad espacio-temporal
$V_r(O)$	Vecindad espacial con centro en el origen del observador O y radio r

Subíndice	**Significado**
R	Referente a un observador rotante arbitrario, con radio coordenado de rotación R

Abreviatura	**Significado**
PRG	Principio de Relatividad Generalizado
PCG	Principio de Covariancia General
PED	Principio de Equivalencia Débil
PEE	Principio de Equivalencia de Einstein
PAM	Principio de Acoplamiento Mínimo
PRE	Principio de Relatividad Especial
TL	Transformación de Lorentz

Capítulo 1

Introducción

Albert Einstein en su artículo de 1905 presentó dos postulados, el principio de la relatividad especial, el cual afirma que todos los observadores inerciales son equivalentes, esto es, las leyes de la física son las mismas para todos los sistemas inerciales, y un segundo, la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. A partir de estos dos postulados, Einstein fue capaz de derivar las transformaciones de Lorentz, y éstas tienen consecuencias directas sobre la medida de los intervalos temporales y espaciales. Pero no hay razón para pensar que los sistemas de referencia inerciales sean los únicos *permitidos* en los cuales se aplique el principio de relatividad [Einstein, 1986].

Entonces, Einstein generalizó el principio de relatividad especial a sistemas de referencia en general (sean inerciales o no), el cual se expresa así: *Todos los observadores son equivalentes*. Éste es el *principio de relatividad general*izado. En vista de éste principio, él notó que un sistema uniformemente acelerado K se comporta equivalentemente a un sistema inercial Σ en la presencia de un campo gravitacional. A la suposición de la completa equivalencia *local* entre los sistemas de coordenadas K y Σ, Einstein la llamó el *Principio de Equivalencia* [Einstein, 1986].

El principio de equivalencia da cuenta de la igualdad entre las masas inercial y gravitacional; estas masas no sólo son idénticas numérica, sino también conceptualmente, debido a que las fuerzas ficticias y gravitacionales son indistinguibles de manera local [Einstein, 1986].

Einstein, motivado por la sugerencia que le hizo Paul Ehrenfest [Held, 1980], consideró el caso de un sistema de referencia rotante relativista K con simetría axial, y se dio cuenta que la geometría espacial de K no coincidía con la geometría euclidiana, y que los relojes fijos en K se atrasaban radialmente. Estos cambios en la geometría temporal y espacial fueron los que motivaron a Einstein, aplicando su famoso *Principio de Equivalencia* (PEE), a pensar que, si ésto es lo que ocurre para la geometría espacio-temporal de un sistema rotante, entonces lo mismo debería ocurrir en el caso de la gravitación. Por lo tanto, K debe también considerarse como un sistema inercial en la presencia de un campo gravitacional (campo de fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis) y su geometría espacio-temporal ya no es minkowskiana [Einstein, 1986]. Adicionalmente, los sistemas de referencia rotantes permitirían pensar en un Principio de Relatividad Generalizado, independiente de la Relatividad General.

Esta es una motivación suficiente para estudiar las propiedades métricas de los sistemas rotantes relativistas. Entonces, el objetivo principal del presente trabajo es caracterizar la naturaleza relativista de las mediciones espacio-temporales en un sistema rotante con simetría axial, ésto es, este trabajo describe el comportamiento de los relojes y las varillas rígidas con respecto a un cuerpo de referencia en rotación con simetría axial. Además, con la motivación adicional de conectar las propiedades métricas de los sistemas rotantes con las

respectivas propiedades métricas de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, se determina la aproximación de campo débil de la solución de Kerr a partir de la métrica de Einstein-Ehrenfest.
Para llevar a cabo el objetivo principal de este trabajo, después de introducir en los Capítulos 2 y 3 una formulación axiomática de los sistemas rotantes relativistas, en el Capítulo 4, con base en el *Principio de Relatividad Generalizado*, se extiende el rango de aplicación de la Relatividad Especial a sistemas de referencia rotantes, calculando el tensor métrico asociado a un observador rotante a partir de su estado de movimiento. Este tensor métrico debe dar cuenta de las propiedades métricas de un sistema rotante, permitiendo estudiar la naturaleza de las mediciones espacio-temporales de los observadores fijos a estos sistemas. En este mismo capítulo se muestra que en efecto, todos los relojes locales sobre un sistema rotante se desincronizan, ya que éstos marchan a distintas tasas. A partir de ésto, se muestra cómo cambia su geometría espacial.
Para dar completez al estudio de las propiedades métricas de un sistema rotante, en el mismo capítulo, se estudian los conos de luz, asociados a los observadores fijos sobre el sistema rotante, lo cual debe dar una visión más clara de la estructura causal del espacio-tiempo asociado a un observador rotante arbitrario. Se calculan las ecuaciones de las geodésicas temporales y nulas en sistemas rotantes, para mostrar que éstas difieren, en general, de una línea recta, debido a la geometría espacio-temporal de dichos sistemas. Entonces, por el PEE, estas propiedades de las geodésicas se deben tener en la presencia de un campo gravitacional. Adicionalmente, se calculan los vectores de Killing asociados a observadores rotantes, los cuales sirven como una herramienta para calcular las simetrías del espacio-tiempo asociado a dichos observadores. Al final de este capítulo, se estudia la cinemática de móviles sobre sistemas rotantes.

El Capítulo 5 se introdujo en el estudio de las propiedades de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico a partir de las propiedades espacio-temporales de un sistema de referencia uniformemente rotante, lo cual es posible, debido al PEE. En particular, la propiedad de desincronización de relojes que se estudia en el capítulo 4 debe ser compartida por un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, lo cual conduce al efecto de corrimiento al rojo-azul gravitacional. Se mostrará además, una conexión de carácter local entre los efectos de los campos de fuerzas centrífugas y de Coriolis con los efectos de un campo gravitacional débil estacionario axialmente simétrico, mediante el cálculo de la ecuación de la geodésica para una partícula libre en dicho campo gravitacional, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975].

Para determinar la aproximación de campo débil de la solución de Kerr, en el mismo capítulo, se efectúa una perturbación a primer orden a la métrica de Einstein-Ehrenfest, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975].

En el Capítulo 6 se desarrolla el estudio de algunas propiedades adicionales de los campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos y los sistemas de referencia rotantes, como el efecto Lense-Thirring, el efecto Sagnac y la desviación geodésica.

Capítulo 2

Principios y postulados generales

Postulado I (Postulado de Homogeneidad e Isotropía del Espacio) *El espacio físico es homogéneo e isotrópico.*

Lo cual implica que todos los puntos y todas las direcciones espaciales son equivalentes para describir los fenómenos físicos. Esto es, las leyes fundamentales de la física no deben depender de la posición y de la dirección espacial, lo cual significa que podemos escoger arbitrariamente el origen y la dirección de los ejes espaciales.

Postulado II *El espacio físico es tridimensional y obedece los postulados de la geometría euclidiana.*

Postulado III (Postulado de Homogeneidad e Isotropía del Tiempo) *Las leyes de la física no deben depender de un instante particular ni de la dirección del tiempo elegida.*

Ésto quiere decir que la elección del origen y la escala para medir el tiempo es arbitraria (homogeneidad) y que las leyes de la física son invariantes bajo una transformación de la forma $t \longrightarrow -t$ (isotropía).

Estas propiedades del espacio y del tiempo deben quedar reflejadas en el sistema de coordenadas espacio-temporales elegido, así como la forma en que se miden las distancias espaciales y el intervalo temporal entre eventos físicos.

Postulado IV (Postulado de Simultaneidad) *Si dos eventos físicos ocurren en el mismo punto del espacio y simultáneamente (en el mismo instante de tiempo) para un observador arbitrario, entonces estos dos eventos físicos serán simultáneos para todos los demás observadores y ocurrirán en el mismo punto del espacio.*

Esto quiere decir que la simultaneidad de eventos en un mismo punto del espacio es un hecho físico absoluto, i.e., independiente del observador.

Principio I (Principio de Mach) *La inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo. En otras palabras, cada partícula en el Universo tiene una influencia en todas las otras partículas.*

o equivalentemente,

Las leyes físicas locales son determinadas por la estructura a gran escala del Universo [Stephen W. Hawking, 1973].

El punto de partida de Mach es la no existencia de significado del concepto de movimiento, sino sólo del de movimiento relativo [D'Inverno, 1992, Mach, 1912]. Por ejemplo, un cuerpo en algún otro universo vacío

no puede decirse que está en movimiento de acuerdo con Mach, ya que no existe nada respecto al cual el movimiento del cuerpo pueda ser referido. Además, en un universo poblado, es la interacción entre toda la materia en el universo la cual es la fuente de los efectos inerciales; en otras palabras, las fuerzas inerciales tienen su origen físico en la materia. Desde el punto de vista de Mach, un sistema de referencia inercial es un sistema en algún estado privilegiado de movimiento relativo al movimiento promedio de las estrellas fijas. Entonces son las estrellas fijas a través de sus masas, distribución y movimiento las cuales *determinan* un sistema inercial local. Este es el principio de Mach en esencia.

La gran limitación de este principio es que no da una relación cuantitativa para la interacción de la materia. Las ideas de Mach no contribuyen realmente a la comprensión de por qué parece que hay una distinción tan fundamental entre movimiento no-acelerado y acelerado en la naturaleza. Sin embargo, es un hecho que el principio de Mach y la idea de Riemann (la geometría del espacio responde a la física y participa en la física) fueron las dos grandes corrientes de pensamiento las cuales Einstein, por medio de su poderoso Principio de Equivalencia, trajeron juntos en la actualidad una descripción geométrica de la gravitación y el movimiento [C. W. Misner, 1973]. De hecho, la teoría de Einstein dice que la inercia es una manifestación de la geometría del espacio-tiempo. Ésta también dice que la geometría es afectada por la presencia de materia.

Principio II [Principio de Relatividad Generalizado (PRG)] *Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia. En otras palabras, todos los observadores son equivalentes* [D'Inverno, 1992].

Admitiendo que las transformaciones generalizadas de coordenadas (TGC) son las encargadas de relacionar los sistemas coordenados entre dos sistemas de referencia generales, entonces, de acuerdo con el PRG, las leyes de la física deben ser invariantes bajo las TGC. Esto quiere decir que las leyes de la física son independientes de los sistemas coordenados. En [De la Torre G., 2008] se muestra que las ecuaciones tensoriales son automáticamente covariantes bajo el grupo de las TGC, es decir, que las ecuaciones tensoriales son invariantes bajo las TGC. Esto nos lleva a concluir que el PRG se satisface sí y sólo si las leyes de la física se expresan mediante ecuaciones tensoriales. Entonces, el PRG está relacionado con el siguiente Principio de Covariancia General:

Principio III [Principio de Covariancia General (PCG)] *Las ecuaciones de la física deben tener forma tensorial* [D'Inverno, 1992].

El cual también se puede escribir de forma equivalente como:

Las leyes de la física deben expresarse por medio de enunciados que sean invariantes bajo el grupo de las transformaciones generalizadas de coordenadas [De la Torre G., 2008].

Este principio nos dice que al formular una teoría física se deben buscar ecuaciones tensoriales [De la Torre G., 2008]. Estas ecuaciones tensoriales tienen la ventaja que si se cumplen en un sistema coordenado, entonces tienen que cumplirse en todos los sistemas de coordenadas.

Principio IV [Principio de Equivalencia Débil (PED)] *La 'masa inercial'y la 'masa gravitacional'de cualquier objeto son iguales* [Carroll, 1997].

Esta es una consecuencia del Principio de Galileo,

"*El movimiento de cualquier partícula de prueba en la presencia de un campo gravitacional es independiente de su masa, composición y estructura*",

cuando lo aplicamos a las leyes de la mecánica Newtoniana. El PED implica que no hay forma de separar los efectos de un "campo gravitacional" (*en el contexto newtoniano*), de aquellos de un sistema de referencia uniformemente acelerado, simplemente observando el comportamiento de las partículas en caída libre

[Carroll, 1997]. Pero esto resulta ser, en general, sólo válido (aproximadamente) en regiones pequeñas del espacio-tiempo, ya que si consideramos regiones grandes, el "campo gravitacional" podría cambiar de un lugar a otro, mientras que el efecto de la aceleración está siempre en la misma dirección; en este caso, habría una diferencia observable entre un "campo gravitacional" y un sistema de referencia uniformemente acelerado.
Entonces, el PED también puede ser formulado como [Carroll, 1997]:

"*Las leyes de las partículas en caída libre son las mismas tanto en un campo gravitacional como en un sistema de referencia uniformemente acelerado, en pequeñas regiones del espacio-tiempo*".

En regiones grandes del espacio-tiempo existirán inhomogeneidades en el "campo gravitacional" (*en el contexto newtoniano*), las cuales conducirán a fuerzas de marea, las cuales pueden ser detectadas.

Einstein buscó generalizar el PED para que éste fuera más inclusivo; es decir, su idea era simplemente que no debería existir forma alguna que un observador pueda distinguir si su sistema de referencia se encuentra en aceleración uniforme o estático en la presencia de un "campo gravitacional" (*newtoniano*), no importa qué experimentos físicos lleve a cabo este observador (no sólo experimentos de caída libre). Esto llevó a Einstein a la formulación del siguiente principio de equivalencia:

Principio V [Principio de Equivalencia de Einstein (PEE)] *En regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducen a aquellas de la Relatividad Especial; es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional* [Carroll, 1997].

la cual se puede formular de forma equivalente como:

"*Un sistema de referencia linealmente acelerado relativo a un sistema de referencia inercial en Relatividad Especial, es localmente identico a un sistema de referencia en reposo en un campo gravitacional* [D'Inverno, 1992]."

o equivalentemente,

"*No existen experimentos locales que puedan distinguir entre caída libre no-rotante en un campo gravitacional y movimiento uniforme (no-acelerado) en el espacio en la ausencia de un campo gravitacional* [D'Inverno, 1992]."

El PEE implica que la gravedad es inescapable, es decir, no existe tal cosa como un "objeto gravitacionalmente neutro" con respecto al cual podamos medir la aceleración debida a la gravedad. Se sigue que "la aceleración debida a la gravedad" no es algo que pueda ser fiablemente definido. Tiene más sentido, entonces, definir "no-acelerado" como "en caída libre". Entonces, no podemos decir que la gravedad es una "fuerza", ya que una fuerza es algo que produce aceleración, y nuestra definición de no-aceleración es movimiento libre en la presencia de cualquier "campo gravitacional".

Otra consecuencia del PEE es que el espacio-tiempo debería ser curvo en la presencia de gravedad (véase [Carroll, 1997]).

Principio VI [Principio de Acoplamiento Mínimo (PAM)] *El Principio de Acoplamiento Mínimo es una prescripción que indica cómo hacer que una ley o fórmula física sea invariante bajo alguna transformación, sea esta una transformación general de coordenadas o una transformación de gauge [D'Inverno, 1992].*

En el contexto de la Relatividad General, por el PAM, si una ley es válida en un espacio-tiempo plano, entonces, también debe ser válida en un espacio-tiempo curvo. Así, transformamos una ecuación física covariante Lorentz en covariante general. Es decir, mediante esta prescripción sabemos cómo hacer que una ecuación que cumple el PRE, cumpla también el PRG.

Esta receta consiste en hacer el cambio:

$$\eta_{\mu\nu} \longmapsto g_{\mu\nu}(x) \qquad \partial_\mu \longmapsto \nabla_\mu(x) \tag{2-1}$$

De este modo cambiamos de la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski a la métrica $g_{\mu\nu}$ determinada por la ecuación de Einstein, y la derivada ordinaria ∂_μ la convertimos en la derivada covariante general ∇_μ.
Por ejemplo, para transformar la ecuación de continuidad y que sea válida en presencia de gravitación, haremos:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \longmapsto \nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} J^\sigma = 0 \tag{2-2}$$

En el contexto de las Teorías Gauge, el PAM permite hacer que una expresión sea invariante gauge cumpliendo por tanto el principio de invariancia gauge. El cambio que hay que introducir sigue siendo:

$$\partial_\mu \longmapsto D_\mu(x)\,, \tag{2-3}$$

pero ahora D_μ indica derivada covariante gauge.

Principio VII [Principio de Correspondencia] *El Principio de Correspondencia afirma que cualquier teoría nueva debe ser consistente con cualquier teoría aceptable dentro de su rango de validez* [D'Inverno, 1992].

La Relatividad General debe coincidir con la Relatividad Especial en la ausencia de gravitación, y por otro lado, debe coincidir con la teoría gravitacional Newtoniana en el límite de campo gravitacional débil y bajas velocidades (comparadas con la velocidad de la luz).

2.1. Principios y postulados de la Relatividad Especial

En la Teoría de la Relatividad Especial se formulan los cuatro primeros postulados de la sección anterior, relacionados con la homogeneidad e isotropía del espacio y del tiempo, y la estructura geométrica del espacio físico.
La Relatividad Especial está basada adicionalmente sobre otros dos postulados de carácter fundamental, en el sentido de que estos postulados deben ser satisfechos por cualquier teoría física que se proponga, independientemente de las leyes y principios que se postulen para describir esta teoría [Tejeiro S., 2005]. Dichos postulados dicen así:

Postulado V: [Principio de Relatividad Especial (PRE)] *Las leyes de la física son independientes del sistema de referencia inercial, con respecto al cual se midan las variables que describen al sistema físico considerado.*

Este es un caso particular del PRG enunciado en la sección anterior, aplicado a los sistemas de referencia inerciales de la Relatividad Especial. Como las transformaciones de Lorentz (TL) son las encargadas de relacionar los sistemas coordenados entre dos sistemas de referencia inerciales, entonces, de acuerdo con el PRE, las leyes de la física deben ser invariantes bajo las TL. En este caso, las leyes de la física son independientes de los sistemas coordenados asociados a los sistemas inerciales. En [De la Torre G., 2008] se muestra que las ecuaciones tensoriales son automáticamente covariantes bajo el grupo de las TL. Esto nos lleva a concluir que el PRE se satisface sí y sólo si las leyes de la física se expresan mediante ecuaciones tensoriales.

Postulado VI: [Postulado de la Constancia de la Velocidad de la Luz] *La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales, independiente de la dirección de propagación y de la velocidad de la fuente emisora.*

Este postulado establece que la velocidad de la luz en el vacío es constante, independiente del sistema de referencia inercial desde el cual ésta sea medida.

El rango de aplicación de este último postulado se puede extender a todos los observadores en general, en virtud del PRG o el PCG ya que las leyes de la física no deben depender de las coordenadas ni de los observadores. De este modo, podemos ver el carácter fundamental de estos dos últimos postulados.

2.2. Principios y postulados de los sistemas rotantes relativistas

En sistemas de referencia rotantes relativistas vamos a asumir los postulados I, III, IV, el Principio de Relatividad Generalizado (PRG), el cual es equivalente al Principio de Covariancia General (PCG), el Postulado de la constancia de la velocidad de la luz, el Principio de Acoplamiento Mínimo (PAM), y el siguiente postulado, relacionado con la geometría del espacio-tiempo:

Postulado VII *La geometría del espacio-tiempo es seudoeuclídea y está definida por un intervalo* ([Logunov, 1998], p. 100)

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2-4}$$

con un tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$ para el que el tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ es igual a cero.

Capítulo 3

Definiciones

Definición I (Evento) *Un evento es un fenómeno físico independiente del observador (como la colisión entre dos partículas, o la emisión de un fotón por un átomo), el cual ocurre en un punto del espacio y en un instante de tiempo y puede ser medido por instrumentos físicos adecuados* [Tejeiro S., 2005].

Definición II (Observador) *Definimos el concepto de observador como cualquier ente capaz de realizar mediciones de magnitudes físicas de un sistema físico para obtener información sobre el estado físico de dicho sistema, el cual está provisto por reglas o patrón de medida espacial y relojes o patrón de medida temporal, que le permite determinar la posición y el instante de tiempo respecto a un origen arbitrario de un fenómeno físico.*

Definición III (Sistema de referencia) *Un sistema de referencia consiste de un sistema de coordenadas* $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ $\left(\text{con } x^0 \equiv ct\right)$ *y un conjunto de puntos de referencia físicos que únicamente fijan (localizan y orientan) el sistema coordenado y estandarizan las mediciones.*

3.1. Definiciones en Relatividad Especial

Suponemos que se puede definir una escala de medida de longitudes, igual para todos los observadores inerciales, la cual nos permite medir intervalos espaciales utilizando un sistema de reglas rígidas. Este procedimiento define una métrica para el espacio, que cumple con las propiedades de homogeneidad e isotropía y que obedece la geometría euclidiana.

Definición IV (Sistema de coordenadas espacial)
El sistema de coordenadas espaciales que cumple con estas propiedades es el cartesiano (x, y, z) *en* $\mathbb{R}^3$ *con la métrica usual, esto es, la métrica euclidiana, inducida por la norma*:

$$|\vec{x}|^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad \left(\textit{donde } \vec{x} \in \mathbb{R}^3\right) \tag{3-1}$$

nos ofrece el modelo matemático natural para describir el espacio físico.

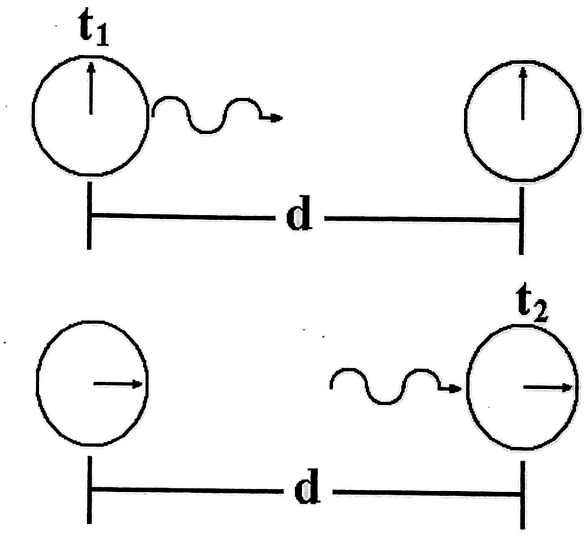

Figura 3-1.: Sincronización de Relojes [Tejeiro S., 2005].

Una vez definida la estructura métrica del espacio y el proceso de medida de los intervalos espaciales, podemos utilizar el postulado de la constancia de la velocidad de la luz para definir el concepto de tiempo físico, esto es, el método operacional para la medida del tiempo que esté de acuerdo con los postulados fundamentales de la física y que refleje las propiedades de homogeneidad e isotropía del tiempo.

De acuerdo con el *Postulado de Simultaneidad* para eventos que tienen lugar en el mismo punto del espacio, es posible introducir las siguientes definiciones de tiempo:

Definición V (Tiempo propio) *Es el tiempo τ marcado por un reloj en reposo relativo a un observador inercial O, para cada evento que ocurra en la posición espacial de dicho reloj.*

Definición VI (Tiempo local) *Es el tiempo t marcado por el reloj en reposo en el origen de coordenadas del observador inercial O, para cada evento que ocurra en su origen de coordenadas* [Tejeiro S., 2005].

Para este tiempo marcado por el reloj se supone haber elegido un instante inicial $t = 0$, el cual es arbitrario, de acuerdo con la hipótesis de homogeneidad del tiempo. El *tiempo local* es un caso particular de tiempo propio.

Ahora, para que el observador inercial O asigne una única coordenada temporal a cada evento físico, independientemente de la posición espacial en la cual suceda dicho evento, es necesario "sincronizar" todos sus relojes. Para lograr esto, vamos a seguir el método de sincronización de relojes de Einstein:

Definición VII (*Método de sincronización de relojes de Einstein*) Consideremos dos relojes, el primero, situado en el origen de coordenadas en un instante de tiempo cualquiera como el tiempo $t = 0$. El segundo reloj está situado a una distancia d del origen y enviemos, desde el primer reloj un pulso de luz hacia el segundo reloj en el instante de tiempo en que el reloj del origen marca t_1 (Figura: **3-1**). El segundo

reloj marcará un tiempo t_2 cuando el rayo de luz lo alcanza, y se define entonces que los dos relojes están *sincronizados*, si se cumple que

$$t_2 = t_1 + \frac{d}{c} \tag{3-2}$$

Así, un observador inercial puede definir una única coordenada temporal a cada evento físico. En este caso, los conceptos de tiempo local y tiempo propio coinciden. Podemos entonces proponer la siguiente definición:

Definición VIII (Coordenada temporal para un evento) *Dado un observador inercial O, la coordenada temporal de un evento se le define como la lectura del reloj que está situado en el punto del espacio donde el evento ocurre.*

Nótese que, por el *Postulado de Simultaneidad*, esta definición es independiente del observador.

Con estas definiciones de medida de distancias e intervalos temporales, un observador inercial puede construir su sistema de coordenadas espacio-temporal:

Definición IX (Sistema de coordenadas espacio-temporal) *Dado un observador inercial O se le puede construir un sistema de coordenadas espacio-temporales* (ct, x, y, z).

Esta definición es consistente y válida para todos los observadores inerciales, ya que la distancia d para puntos en reposo relativo está bien definida y es por su definición independiente del observador, así como la velocidad de la luz en el vacío c es una constante universal, de acuerdo con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

Definición X (Simultaneidad de eventos) *Dos eventos E_1 y E_2 son simultáneos si sus coordenadas temporales son iguales* $(t_1 = t_2)$.

3.2. Definiciones en sistemas de referencia rotantes

Debido al PRG, cualquier observador rotante puede afirmar lo siguiente: *"Mi sistema de referencia es equivalente a uno inercial, pero, bajo la presencia de un campo"*. De hecho, dicho observador, atado a su propio sistema de referencia rotante, se ve a si mismo en reposo. Entonces, podemos definir una escala de medida de longitudes, igual para todos los observadores rotantes de forma similar a como se hace en Relatividad Especial. Para ello, utilizaremos el sistema de coordenadas espaciales *canónico*, el cual consiste en las coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Este procedimiento define una métrica para el espacio, que cumple con las propiedades de homogeneidad e isotropía.

Definición XI (Sistema de coordenadas espacial) *El sistema de coordenadas espaciales canónico es el de coordenadas cilíndricas* (r', θ', z').

Ahora, para poder medir intervalos temporales, debemos utilizar el postulado de la constancia de la velocidad de la luz para definir el concepto de tiempo físico, esto es, el método operacional para la medida del tiempo que esté de acuerdo con los postulados fundamentales de la física y que refleje las propiedades de homogeneidad e isotropía del tiempo.

De acuerdo con el *Postulado de Simultaneidad* para eventos que tienen lugar en el mismo punto del espacio, es posible introducir las siguientes definiciones de tiempo en sistemas rotantes:

Definición XII (Tiempo propio) *Es el tiempo τ marcado por un reloj en reposo relativo a un observador rotante O', para cada evento que ocurra en la posición espacial de dicho reloj* [Einstein, 1905].

Nótese que la definición de tiempo propio se puede generalizar para un observador arbitrario cualquiera: *Una vez definido su sistema de coordenadas espacial asociado, en virtud del carácter fundamental de la constancia de la velocidad de la luz, utilizando el PRG y el Postulado de Simultaneidad, podemos definir el concepto de tiempo propio para dicho observador arbitrario.*

Definición XIII (Tiempo local) *Es el tiempo t' marcado por el reloj en reposo en el origen de coordenadas del observador rotante O', para cada evento que ocurra en su origen de coordenadas.*

Para este tiempo marcado por el reloj se supone haber elegido un instante inicial $t' = 0$, el cual es arbitrario, de acuerdo con la hipótesis de homogeneidad del tiempo. El tiempo local medido por O' es el tiempo propio marcado por el reloj en el origen de coordenadas de O'.

Definición XIV (Tiempo central) *Es el tiempo t'_0 marcado por el reloj en reposo sobre el eje de rotación del sistema de referencia rotante K, para cada evento que ocurra en el eje de rotación.*

Éste tiempo se puede ver como el tiempo propio marcado por los relojes del observador inercial O.

Vamos a demostrar, en el siguiente capítulo, que para el observador rotante O', el tiempo propio es dependiente de la posición y la dirección del reloj que lo mide; y los tiempos locales son dependientes de la posición de dicho observador rotante O'. Esto implica que será imposible sincronizar de carácter *global* todos los relojes del sistema rotante, y por consiguiente, el sistema de coordenadas temporal, asignado a cada observador sobre el sistema rotante, debe ser diferente el uno con respecto al otro. Entonces, resulta imposible asignar sobre el sistema rotante una única coordenada temporal a cada evento físico, y además, será dependiente de la posición espacial en la cual suceda dicho evento. Por tanto, el sistema de coordenadas temporal que se le asigna a cada observador rotante debe ser de carácter *local* (más precisamente, en un punto, sobre su origen de coordenadas espacial).
En vista de esto, una forma de definir, para cada observador rotante, una coordenada temporal a cada evento físico va a ser de la siguiente forma:

Definición XV (Coordenada temporal para un evento) *Dado un observador rotante O', la coordenada temporal de un evento local, se le define como la lectura del reloj que está situado en su origen de coordenadas, ésto es, la lectura t' de un reloj local.*

Nótese que, por el *Postulado de Simultaneidad*, esta definición es independiente del observador.

En el siguiente capítulo, se construirán las coordenadas espacio-temporales asociadas a un observador rotante, a partir de su estado de movimiento [Cáceres Dominguez, 1998], y las podemos definir como sigue:

Definición XVI (Sistema de coordenadas espacio-temporal) *Dado un observador rotante O' se le puede construir un sistema de coordenadas espacio-temporales (t', r', θ', z').*

Debido al PRG, la transformación entre los sistemas de coordenadas espacio-temporales (t, r, θ, z), asociadas al observador inercial O, y las coordenadas (t', r', θ', z'), asociadas al observador rotante, debe considerarse como una transformación de Lorentz, y por el carácter local de t', dicha transformación de Lorentz sólo es válida de manera local (más precisamente, en un punto). Este último hecho implica que el PRG sólo resulta válido de carácter local.

Se mostrará, en el siguiente capítulo, que el elemento de línea asociado al observador rotante O' debe tener la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = g_{00}dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - 2g_{03}dt'd\theta' \tag{3-3}$$

Como un observador rotante O' es *localmente* equivalente a uno inercial O, entonces, O' debería medir *localmente* intervalos espaciales y temporales de forma similar a como lo hace O, esto es, tal que el invariante espacio-temporal ds^2 dado en (3-3) adquiera *localmente* la misma forma Lorentziana que para el observador O, es decir

$$ds^2 = c^2 dt^{*2} - dL^2, \tag{3-4}$$

donde dt^* y dL son los intervalos temporales y espaciales físicos, respectivamente, y los definiremos de forma similar a como se hace en Relatividad Especial:
En este momento, es necesario diferenciar entre dos magnitudes: las coordenadas y las físicas.

Definición XVII (Magnitud coordenada) *Las magnitudes coordenadas dependen de la arbitrariedad en la elección del sistema de coordenadas espacio-temporal utilizada para describir los fenómenos* ([Logunov, 1998], p. 101).

Estas magnitudes se definen con la ayuda de un método concreto de medición.

Definición XVIII (Magnitud física) *Las magnitudes físicas son características objetivas del espacio, el tiempo y la materia* ([Logunov, 1998], p. 101).

Por ello, para construir las magnitudes físicas también es necesario utilizar (aparte de las magnitudes coordenadas) el tensor métrico del espacio-tiempo, que permite eliminar la influencia de la arbitrariedad de la elección de las coordenadas.

Definición XIX (Tiempo natural o físico) *Es el tiempo t^* marcado por un reloj propio C' relativo a un observador rotante O', para cada evento que ocurra en distintos puntos de una localidad espacio-temporal que lo contenga.*

Entonces, dt^* es el intervalo de tiempo que debería medir O' entre eventos aledaños a él.
Ahora, para que el observador rotante O' asigne una única coordenada temporal física a cada evento cercano a él, independientemente de la posición espacial en la cual suceda dicho evento, es necesario "sincronizar" todos sus relojes vecinos. Para lograr esto, vamos a seguir el método de sincronización de relojes de Einstein:

Definición XX (*Método de Sincronización Estándar en Sistemas Rotantes*) Consideremos dos relojes, el primero, situado en el origen de coordenadas de O' en un instante de tiempo cualquiera como el tiempo $t^* = 0$. El segundo reloj está situado a una distancia infinitesimal dL de su origen y enviemos, desde el primer reloj un pulso de luz hacia el segundo reloj en el instante de tiempo en que el reloj del origen marca t_1^* (Véase figura **3-2**). El segundo reloj marcará un tiempo t_2^* cuando el rayo de luz lo alcanza, y se define entonces que los dos relojes están *sincronizados*, si se cumple que

$$t_2^* = t_1^* + \frac{dL}{c} \tag{3-5}$$

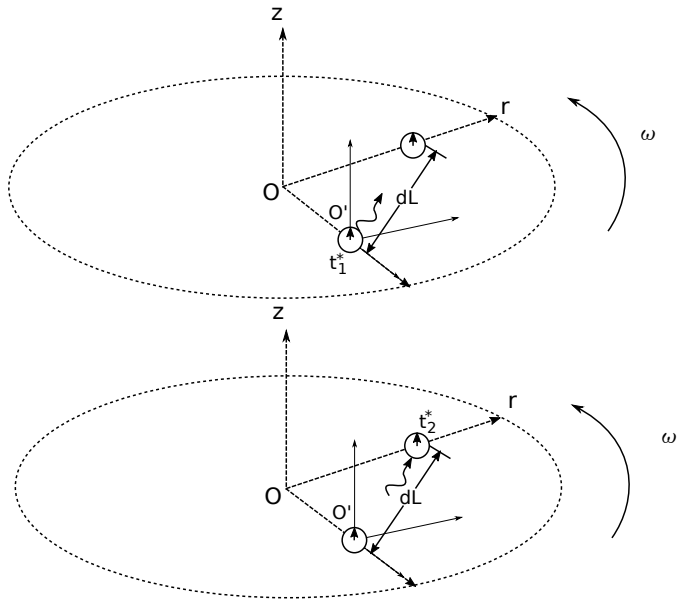

Figura 3-2.: Sincronización de relojes sobre sistemas rotantes. La distancia infinitesimal dL se ha exagerado por motivos de claridad.

Esta definición es consistente y válida para todos los observadores rotantes, ya que la distancia infinitesimal dL para puntos en reposo relativo está bien definida y es por su definición independiente del observador, así como la velocidad de la luz en el vacío c es una constante universal, de acuerdo con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

Definición XXI (Simultaneidad de eventos) *Dos eventos infinitesimalmente cercanos E_1 y E_2 son simultáneos si sus coordenadas temporales físicas son iguales* ($t_1^* = t_2^*$).

Notemos que si escogemos eventos simultáneos de acuerdo con esta definición ($dt^* = 0$), entonces el elemento de línea espacio-temporal ds^2 nos da la distancia espacial entre dichos eventos, la cual está dada por la longitud física anteriormente definida

$$dL^2 = -ds^2 \geq 0 \tag{3-6}$$

Entonces, podemos introducir la siguiente definición de *longitud física*:

Definición XXII (Longitud física) *La longitud dL es la magnitud física que determina la distancia o separación espacial entre dos eventos vecinos simultáneos.*

Si escogemos eventos que ocurren en el mismo punto del espacio ($dL = 0$), entonces, $ds^2 = c^2 dt^{*2}$, en este caso, el tiempo "físico" coincide con el tiempo propio.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, podemos dar una definición de sistema rotante:

Definición XXIII (Sistema de referencia rotante) *Un sistema de referencia uniformemente rotante consiste de un sistema de coordenadas central* $(t'_0, r'_0, \theta'_0, z'_0)$ *y un conjunto de puntos de referencia físicos, fijos sobre un cuerpo de referencia* K *en rotación uniforme relativa a un sistema de referencia inercial* Σ*, es decir, todos los puntos de referencia físicos, fijos sobre* K *tienen la misma velocidad angular* ω *constante, relativa a* Σ*.*

Suponemos dicho cuerpo de referencia K rígido y despreciamos todos los efectos de las tensiones sobre K, producidas por las fuerzas centrífugas.

Definición XXIV (Velocidad física) *La velocidad física de una partícula* P *se define como la longitud física* dL *del elemento de trayectoria recorrida por* P *por unidad de tiempo físico* dt^* ([Logunov, 1998], p. 98):

$$V := \frac{dL}{dt^*} \tag{3-7}$$

Notemos que la validez de esta definición es sólo de carácter local.

Definición XXV (Velocidad coordenada) *Se define la velocidad coordenada de una partícula* P *como la derivada de sus coordenadas espaciales* x^k *con respecto al tiempo coordenado* t([Logunov, 1998], p. 96):

$$\begin{aligned} v^k &:= \frac{dx^k}{dt}, \qquad k = 1, 2, 3 \\ v &= \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{dx^k}{dt}\right)^2} \end{aligned} \tag{3-8}$$

Introducimos ahora dos definiciones de la Teoría de Campos:

Definición XXVI (Campo Estacionario) *Un campo es estacionario si es independiente del tiempo.*

Esto implica que el campo estacionario es invariante bajo una transformación $t \longrightarrow -t$.

Definición XXVII (Campo Axialmente Simétrico) *Un campo es axialmente simétrico si tiene simetría respecto a una línea recta, llamada eje de simetría.*

Esto implica que el campo axialmente simétrico es independiente de un ángulo ϕ a lo largo de un plano perpendicular a dicho eje de simetría, lo cual equivale a decir que este campo es invariante bajo una transformación $\phi \longrightarrow -\phi$.

Entonces, un campo estacionario y axialmente simétrico resulta ser aquel que es independiente del tiempo t y del ángulo ϕ, lo cual implica que dicho campo es invariante simultáneamente bajo las transformaciones $t \longrightarrow -t$ y $\phi \longrightarrow -\phi$.

Capítulo 4

Espacio-tiempo asociado a un observador rotante

En este capítulo, se extiende el rango de aplicación de la Relatividad Especial a sistemas de referencia rotantes, con base en el *Principio de Relatividad Generalizado* (PRG). Primero, se presentan las transformaciones de Lorentz entre dos observadores inerciales. Luego, se muestra una razón por la cual se van a considerar observadores locales para estudiar los sistemas rotantes relativistas. En seguida, se construyen las coordenadas del observador rotante a partir de su estado de movimiento [Cáceres Dominguez, 1998]. Pero para tener claridad en dicha construcción, primero, se presentan las coordenadas de Lorentz. Las transformaciones del observador rotante se deducen a partir de transformaciones de Lorentz infinitesimales.

Una vez obtenidas estas transformaciones, se calcula el tensor métrico asociado a un observador rotante. Este tensor métrico debe dar cuenta de las propiedades métricas de un sistema rotante, permitiendo estudiar la naturaleza de las mediciones espacio-temporales de los observadores fijos a estos sistemas. Se muestra que en efecto, todos los relojes locales sobre un sistema rotante se desincronizan, ya que éstos marchan a distintas tasas. A partir de ésto, se estudia la naturaleza de su geometría espacial.

Para dar completez al estudio de las propiedades métricas de un sistema rotante, se calculan las ecuaciones de las geodésicas temporales y nulas en sistemas rotantes, para mostrar que éstas difieren, en general, de una línea recta, debido a la geometría espacio-temporal de dichos sistemas. Entonces, por el PEE, estas propiedades de las geodésicas se deben tener en la presencia de un campo gravitacional. Luego, se calculan los 4-vectores de Killing. En seguida se estudian los conos de luz, asociados a los observadores fijos sobre el sistema rotante, lo cual debe dar una visión más clara de la estructura causal del espacio-tiempo asociado a un observador rotante arbitrario. Por último, se estudia la cinemática de móviles sobre sistemas rotantes.

4.1. Transformaciones de Lorentz

Ahora, consideremos el caso de dos observadores inerciales O y O' con v la velocidad de O' relativa a O. Se puede encontrar fácilmente, a partir de los postulados de la Relatividad Especial (PRE y el Postulado de la Constancia de la Velocidad de la Luz), que la transformación de coordenadas espacio-temporales entre O y O' resultan ser las transformaciones de Lorentz [De la Torre G., 2008, Tejeiro S., 2005]:

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\
x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

donde $\beta := v/c$, $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

4.2. Transformación de coordenadas espacio-temporales entre el sistema inercial Σ y el sistema rotante K

Sean O y O' observadores asociados al sistema inercial Σ y al sistema rotante K, respectivamente. Supongamos que sus orígenes (y el eje de rotación de O') coinciden en $t = t' = 0$ (Figura 4-1). Como los relojes en sus orígenes están en reposo relativo el uno con respecto al otro, entonces, por el *Postulado de Simultaneidad*, sus sistemas de coordenadas temporales deben coincidir ($t = t'$) por lo menos en sus orígenes. Y la respectiva transformación entre sus sistemas coordenados espaciales debe ser:

$$
\begin{aligned}
x &= r' \cos(\theta' + \omega t') \\
y &= r' \sin(\theta' + \omega t') \\
z &= z'
\end{aligned}
\tag{4-2}
$$

o equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
r &= r' \\
\theta &= \theta' + \omega t' \\
z &= z'
\end{aligned}
\tag{4-3}
$$

donde (r', θ', z') son las coordenadas espaciales cilíndricas asociadas al observador rotante O', y (x, y, z), (r, θ, z) son las coordenadas espaciales cartesianas y cilíndricas, respectivamente, asociadas al observador inercial O; $\omega =$ cte. es la velocidad angular de K con respecto a Σ.

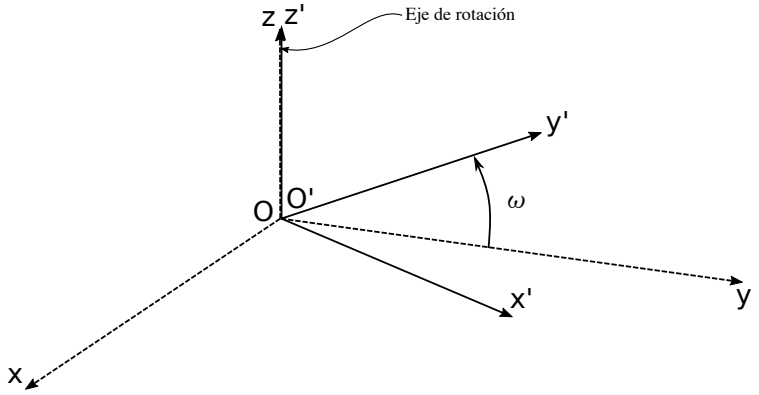

Figura 4-1.: Los "ejes coordenados" punteados son los del observador O, mientras que los no punteados son los del observador O'.

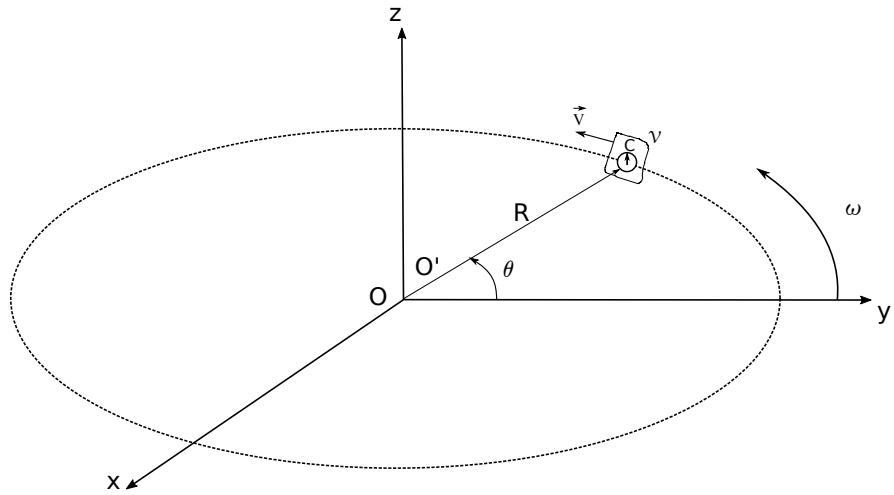

Figura 4-2.: Vecindad $\mathcal{V}$ conteniendo un reloj cualquiera C de O'.

Luego, el sistema de coordenadas espacio-temporales (t', r', θ', z'), asociado a O', junto con el conjunto κ', conforman un sistema de referencia inercial local. Entonces, las coordenadas temporales entre O y O' deben transformarse por medio de una transformación de Lorentz (4-1), es decir que todos los relojes de O' fijos en κ' no se transforman por medio de $t = t'$, salvo si dicha vecindad $\mathcal{V}$ contiene el origen de coordenadas de O'. Entonces, la transformación de coordenadas temporales $t = t'$ sólo es válida, para el observador O', con respecto a un único reloj, ubicado en el eje de rotación y aproximadamente $(t \approx t')$ a lo largo de una vecindad lo suficientemente pequeña alrededor del eje de rotación.

Vemos entonces que, una manera de estudiar la transformación de las coordenadas temporales entre O y O', es introducir para cada punto de referencia físico de K, un observador *local* con origen de coordenadas espaciales, tal que su sistema de coordenadas temporales se transformen *localmente* por medio de una transformación de Lorentz (4-1).

4.3. Otra forma de obtener las Transformaciones de Lorentz

Según la Relatividad Especial, las partículas que mantienen constante en el tiempo propio su cuadrivelocidad, es decir,

$$\frac{d}{d\tau}\mathbb{U} = 0 \tag{4-4}$$

tienen una línea de mundo dada por:

$$\mathbb{X}(\tau) = (ct(\tau), x(\tau)) = (c\tau\cosh(\theta), c\tau\sinh(\theta)) \tag{4-5}$$

$$\tanh(\theta) = \frac{v}{c}$$

la que determina, para un observador inercial, una línea recta cuya pendiente está dada por el cociente c/v, donde v es la velocidad relativa y c es la velocidad de la luz en el vacío.

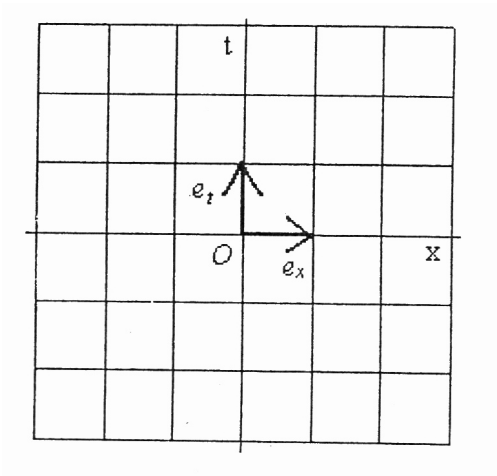

Figura 4-3.: Sistema de referencia de un observador inercial O [Cáceres Dominguez, 1998].

Por lo tanto, en un diagrama que representa los eventos registrados por este observador, el conjunto de eventos que permanecen en reposo, respecto a él, estarán representadas por líneas verticales, mientras el conjunto de eventos simultáneos serán líneas horizontales (Figura **4-3**). De esta forma se construye un sistema de referencia asociado a un observador inercial, utilizando relojes y varas de medida que nos proporcionan los conceptos de simultaneidad y reposo.

Entonces, el *tiempo* t medido por el observador inercial O es el tiempo medido por relojes en reposo, mientras que las *longitudes espaciales* medidas por O son las distancias espaciales entre dos eventos simultáneos.

A este sistema de referencia podemos asignarle una base coordenada $\{\hat{e}_t, \hat{e}_x\}$, que clasifica los eventos en reposo y los eventos simultáneos relativos a un observador inercial O. Teniendo en cuenta que un observador se ve a sí mismo en reposo, su línea de mundo debe ser una línea vertical, por lo tanto, se puede ubicar el 4-vector coordenado temporal $\hat{e}_t$ tangente a ésta. Así mismo, el 4-vector espacial $\hat{e}_x$, cuya dirección representa los eventos simultáneos, se debe ubicar normal a la línea de mundo de O (en dirección horizontal).
Desde el sistema de coordenadas del observador inercial O y por medio de los principios de la Relatividad Especial se construye la base coordenada $\{\hat{e}_{t'}, \hat{e}_{x'}\}$ de otro observador inercial O', en términos de la base coordenada $\{\hat{e}_t, \hat{e}_x\}$ del observador O. El principio de relatividad exige que la línea de mundo de cualquier observador inercial O', vista por O sea una línea recta, por lo tanto, el 4-vector $\hat{e}_{t'}$, tangente a la línea de mundo de O', tiene una inclinación respecto a $\hat{e}_t$, dada por el ángulo θ, determinado por la velocidad relativa v entre los observadores inerciales (Figura **4-4**).
Por otro lado, el principio de la constancia de la velocidad de la luz, exige que la pendiente de la línea de mundo de un rayo de luz sea igual en cada una de las bases coordenadas, y ésta es $\tanh(\theta) = 1$, luego, el ángulo de inclinación de un rayo de luz respecto al 4-vector $\hat{e}_{t'}$ debe ser el mismo que el ángulo de inclinación respecto a $\hat{e}_{x'}$. Teniendo en cuenta que los eventos en reposo para el observador O' deben ser paralelos al 4-vector $\hat{e}_{t'}$ y que los eventos simultáneos deben ser paralelos al 4-vector $\hat{e}_{x'}$, se puede construir el sistema de referencia del observador O' desde el sistema del observador O (Figura **4-4**).

Ahora, vamos a encontrar la transformación de cambio de la base $\{\hat{e}_t, \hat{e}_x\}$ asociada al observador O, a la base $\{\hat{e}_{t'}, \hat{e}_{x'}\}$ asociada al observador O'. Para cumplir ésto, podemos suponer variaciones infinitesimales en la velocidad relativa; esto es, considerar variaciones en el ángulo θ de la forma $\theta + d\theta$. Bajo éstas circunstancias, debemos tener las transformaciones de Galileo entre O' y un observador inercial O'' con una velocidad infinitesimalmente cerca a la de O'.

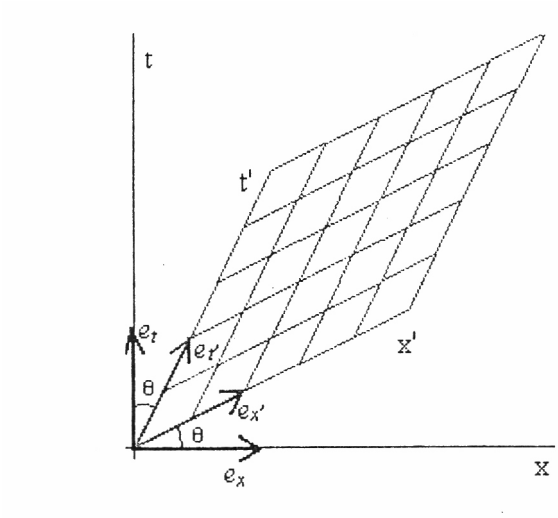

Figura 4-4.: Sistema de referencia de O' visto desde el sistema de O [Cáceres Dominguez, 1998].

Entonces, los eventos simultáneos, determinados por la dirección de $\hat{e}_{x'}$, deben ser independientes de este par de observadores; por lo tanto, el cambio infinitesimal del 4-vector $\hat{e}_{t'}$ por ángulo $d\theta$, que representa el cambio respecto al 4-vector $\hat{e}_{t''}$ del observador O'', debe estar en la dirección de $\hat{e}_{x'}$, es decir,

$$\frac{d\hat{e}_{t'}}{d\theta} = \hat{e}_{x'} \tag{4-6}$$

Debido a la simetría que nos proporciona la invariancia de la velocidad de la luz, el cambio de $\hat{e}_{x'}$ por ángulo $d\theta$ debe estar dado por

$$\frac{d\hat{e}_{x'}}{d\theta} = \hat{e}_{t'} \tag{4-7}$$

Este par de ecuaciones nos conducen a

$$\frac{d^2\hat{e}_{t'}}{d\theta^2} = \hat{e}_{t'} \tag{4-8}$$

$$\frac{d^2\hat{e}_{x'}}{d\theta^2} = \hat{e}_{x'} \tag{4-9}$$

cuyas soluciones expresadas en términos de la base coordenada de O, son:

$$\hat{e}_{t'} = \cosh(\theta)\,\hat{e}_t + \sinh(\theta)\,\hat{e}_x \tag{4-10}$$

$$\hat{e}_{x'} = \sinh(\theta)\,\hat{e}_t + \cosh(\theta)\,\hat{e}_x \tag{4-11}$$

Estas ecuaciones representan la transformación entre las bases coordenadas asociadas a un par de observadores inerciales.

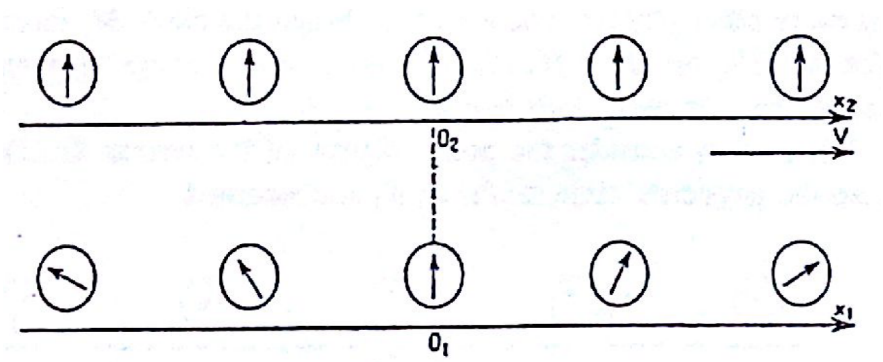

Figura 4-5.: Apariencia de los relojes de O cuando los relojes de O' marcan todos $t' = 0$ [Arzeliès, 1966].

Esta transformación se puede ver como una rotación, en un ángulo θ, tanto del 4-vector $\hat{e}_t$ a lo largo de la hipérbola $\lambda(\theta) = (\cosh(\theta), \sinh(\theta))$, como el 4-vector $\hat{e}_x$ a lo largo de la hipérbola $\lambda(\theta) = (\cosh(\theta), \sinh(\theta))$, cuyas asíntotas son los rayos de luz.
A partir de este resultado podemos encontrar las transformaciones de coordenadas. Teniendo en cuenta que los 4-vectores coordenados se transforman bajo la ley de transformación

$$\hat{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \hat{e}_\nu \tag{4-12}$$

donde se ha hecho uso de la convención de suma de Einstein, encontramos las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cosh(\theta) + x' \sinh(\theta) \\ x &= ct' \sinh(\theta) + x' \cosh(\theta) \end{aligned} \tag{4-13}$$

con $\tanh(\theta) = v/c \equiv \beta$ y v la velocidad relativa entre los observadores. Teniendo en cuenta que

$$\tanh(\theta) = \beta = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} \tag{4-14}$$

y la siguiente identidad entre funciones hiperbólicas

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \tag{4-15}$$

podemos encontrar que

$$\begin{aligned} \sinh(\theta) &= \beta \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \\ \cosh(\theta) &= \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \end{aligned} \tag{4-16}$$

Entonces, las transformaciones de Lorentz (4-13) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma (ct' + \beta x') \\ x &= \gamma (x' + \beta ct') \end{aligned} \tag{4-17}$$

donde $\gamma = \gamma(v) \equiv \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$.

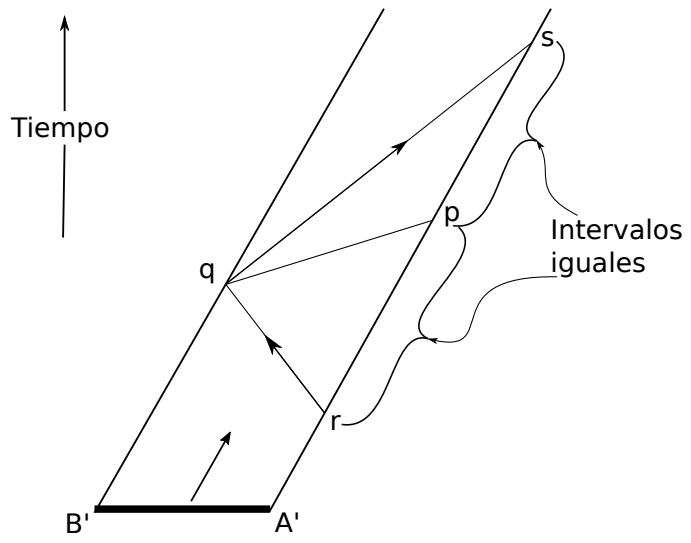

Figura 4-6.: Relatividad de la simultaneidad entre dos observadores inerciales O y O' .

4.3.1. Relatividad de la simultaneidad

Supongamos que los orígenes de los observadores inerciales O y O' coinciden en un tiempo $t = t' = 0$. Sincronicemos todos los relojes del observador inercial O', con el reloj en su origen en $t' = 0$. De esta manera, el reloj en el origen de O queda sincronizado con todos los relojes de O', pero los demás relojes de O se desincronizan con los relojes de O', de acuerdo con las transformaciones de Lorentz:

$$t = \gamma \left(\overset{0}{t'} + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma \frac{vx'}{c^2} \tag{4-18}$$

Vemos entonces que la desincronización de los relojes de O tiene efecto en la dirección de la velocidad relativa entre los dos observadores (Figura **4-5**). Esto refleja el Postulado de Simultaneidad, mencionado en el Capítulo 1, cuando $x' = 0$.

Este efecto implica que si dos eventos son simultáneos según O', entonces, ya no lo son para O, y viceversa. Entonces, el concepto de simultaneidad es *relativo*.

Podemos analizar mejor este efecto, de la siguiente forma, la cual nos servirá más adelante como una guía para analizar la relatividad de la simultaneidad entre un observador inercial y un observador rotante.

Sean A' y B' dos relojes de O', separados una distancia d' y sincronizados entre sí. Supongamos que desde el reloj A' se envía una señal luminosa cuando éste marca t'_0 (evento r) hacia el reloj B'. Dicha señal luminosa llega a B' cuando éste marca $t'_0 + d'/c$ (evento q), y es reflejada de inmediato hacia A', para ser recibida en A' cuando éste marca $t'_0 + 2d'/c$ (evento s) (Véase figura **4-6**). Entonces, O' juzga que un evento p, situado en el reloj A', es simultáneo con q, en el sistema de referencia Σ' asociado a O', si p ocurre en la mitad de tiempo entre la emisión y la recepción final de la señal, es decir, si el intervalo de tiempo de r a p es exactamente el mismo que de p a s, lo cual es equivalente a decir que el reloj A' marca $t'_0 + d'/c$ para el evento p. Entonces, A' y B' marcan el mismo tiempo $t' = t'_0 + d'/c$ para los eventos p y q.
Supongamos ahora que, si hacemos coincidir los orígenes de coordenadas de O y O' en el evento p en el tiempo $t = t' = t'_0 + d'/c = 0$, entonces, por (4-18), según O, el evento q tiene coordenada temporal $t = \gamma v d'/c^2$, y los eventos p y q no son simultáneos para O.

4.3.2. Dilatación temporal

Sean dos eventos E_1 y E_2 en reposo relativo al observador O', es decir que $x'_1 = x'_2$. Utilizando las transformaciones de Lorentz (4-13), tenemos que

$$\begin{aligned} ct_2 - ct_1 &= ct'_2 \cosh(\theta) + x'_2 \sinh(\theta) - ct'_1 \cosh(\theta) - x'_1 \sinh(\theta) \\ &= c\,(t'_2 - t'_1) \cosh(\theta) + (x'_2 - x'_1) \sinh(\theta) \\ &= c\,(t'_2 - t'_1) \cosh(\theta) \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1) \cosh(\theta) = \Delta\tau\gamma$$

Esto quiere decir que si $\Delta\tau$ es el intervalo de tiempo propio entre un par de eventos en reposo relativo al observador O', entonces, el intervalo de tiempo Δt entre dicho par de eventos, medido por los relojes en reposo de O, está dado por:

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau \tag{4-19}$$

4.3.3. Contracción de las longitudes

Considérese ahora una vara en reposo relativa a O'. Entonces los extremos de la vara tienen líneas de mundo paralelas a la línea de mundo de O', luego para cada instante de tiempo t' existe un par de eventos E_1 y E_2 situados en los extremos de la vara, tales que $t'_1 = t'_2 = t'$ (simultáneos respecto a O'). Bajo estas circunstancias, si los extremos de la vara están en x'_1 y x'_2 ($x'_1 < x'_2$), respectivamente, la longitud ΔL_0 de la vara, medida por O', está dada por $x'_2 - x'_1$.
Como las líneas de mundo de los extremos de la vara también son paralelas según el observador inercial O, entonces, para cada instante de tiempo t también existe un par de eventos $\tilde{E}_1$ y $\tilde{E}_2$ situados en los extremos de la vara, tales que $t_1 = t_2 = t$ (simultáneos respecto a O). En este caso, si en dicho instante de tiempo t los extremos de la vara están en x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$), respectivamente, la longitud ΔL de la vara, medida por O, está dada por $x_2 - x_1$.
Dado que los extremos de la vara permanecen fijos según O', y utilizando las transformaciones de Lorentz (4-13), tenemos que

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= -ct_2 \sinh(\theta) + x_2 \cosh(\theta) + ct_1 \sinh(\theta) - x_1 \cosh(\theta) \\ &= -c\,(t_2 - t_1) \sinh(\theta) + (x_2 - x_1) \cosh(\theta) \\ &= (x_2 - x_1) \cosh(\theta) \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\cosh(\theta)} = \frac{\Delta L_0}{\gamma}$$

Esto quiere decir que las mediciones de la longitud de la vara, realizadas tanto por O como por O', están relacionadas por:

$$\Delta L = \frac{\Delta L_0}{\gamma} \tag{4-20}$$

4.4. Transformaciones entre un observador inercial y un observador rotante general

Siguiendo el método de la sección anterior, se puede llegar a la forma explícita de las transformaciones de coordenadas entre un observador inercial O y un observador O' que rota alrededor de éste, con radio coordenado de rotación R (fijo), y velocidad angular ω (constante), tales que $R\omega < c = 1$. Para describir la línea de mundo de los observadores rotantes O' desde el sistema inercial, vamos a calcular la 4-velocidad de una partícula en las coordenadas polares asociadas al observador inercial O, la cual está dada por:

$$\mathbb{U} = \frac{dr}{d\tau}\hat{e}_r + \frac{d\theta}{d\tau}r\hat{e}_\theta + \frac{dt}{d\tau}\hat{e}_t \tag{4-21}$$

En particular, si la partícula "acompaña" al observador rotante O'

$$\left(\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cte.}, \quad r = R = \text{cte.}, \quad \text{según el observador inercial}\right),$$

su 4-velocidad se reduce a:

$$\mathbb{U} = \frac{dt}{d\tau}R\omega\hat{e}_\theta + \frac{dt}{d\tau}\hat{e}_t \tag{4-22}$$

Como $\mathbb{U}$ es un 4-vector, entonces, éste también se puede escribir en la forma:

$$\mathbb{U} = \sinh(\alpha)\,\hat{e}_\theta + \cosh(\alpha)\,\hat{e}_t \tag{4-23}$$

$$\tanh(\alpha) = R\omega$$

de donde,

$$\sinh(\alpha) = \frac{dt}{d\tau}R\omega \tag{4-24}$$

$$\cosh(\alpha) = \frac{dt}{d\tau}$$

Por otro lado, por la identidad entre funciones hiperbólicas

$$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1 \tag{4-25}$$

podemos encontrar que

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha) &= R\omega\left(1 - R^2\omega^2\right)^{-1/2} \\ \cosh(\alpha) &= \left(1 - R^2\omega^2\right)^{-1/2} \end{aligned} \tag{4-26}$$

de donde,

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - R^2\omega^2}} \tag{4-27}$$

y luego, la 4-velocidad (4-23) la podemos escribir como:

$$\mathbb{U} = \frac{R\omega}{\sqrt{1 - R^2\omega^2}}\hat{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{1 - R^2\omega^2}}\hat{e}_t \tag{4-28}$$

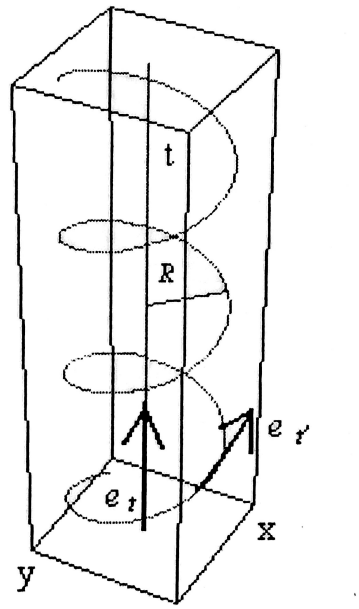

Figura 4-7.: Línea de mundo de un observador rotante [Cáceres Dominguez, 1998].

la cual es equivalente a (4-22). Este 4-vector es tangente a la línea de mundo del observador O', que expresado en coordenadas cartesianas toma la forma [Cáceres Dominguez, 1998]:

$$\mathbb{X} = R\cos\left(\frac{\omega\tau}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\right)\hat{e}_x + R\sin\left(\frac{\omega\tau}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\right)\hat{e}_y + \frac{1}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\hat{e}_t \tag{4-29}$$

Esta línea de mundo representa una espiral alrededor de la línea de mundo del observador inercial O (Figura **4-7**).
Como se ha dicho anteriormente, un observador se ve a sí mismo en reposo. Entonces, según el observador O', su línea de mundo debe ser una línea vertical, por lo tanto, podemos ubicar el 4-vector coordenado temporal $\hat{e}_{t'}$, asociado a O', a lo largo de ésta. Pero según el observador inercial O, dicho 4-vector $\hat{e}_{t'}$ es tangente a la línea de mundo de O', la cual está dada por (4-29). Entonces, podemos identificar $\hat{e}_{t'}$ con $\mathbb{U}$, dado por (4-23):

$$\hat{e}_{t'} = \cosh(\alpha)\,\hat{e}_t + \sinh(\alpha)\,\hat{e}_\theta \tag{4-30}$$

Ahora, si comparamos esta ecuación con (4-10) y (4-11), podemos construir el 4-vector coordenado espacial $\hat{e}_{y'}$ como el 4-vector:

$$\hat{e}_{y'} = \sinh(\alpha)\,\hat{e}_t + \cosh(\alpha)\,\hat{e}_\theta \tag{4-31}$$

cuya dirección representa los eventos simultáneos. Esto significa que estamos considerando la transformación entre bases coordenadas como una transformación infinitesimal de Lorentz, dada por la velocidad tangencial $R\omega$ relativa entre los observadores.

Ahora, se tiene que: $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{\omega}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\hat{e}_r$, debido a que $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, y $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r$. Calculando la 4-aceleración por medio de (4-23) se obtiene:

$$\mathbb{A} = -\frac{\omega}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\sinh(\alpha)\,\hat{e}_r \tag{4-32}$$

Por esta ecuación, junto con (4-23) obtenemos que $\mathbb{A}\cdot\mathbb{U} = 0$. Este hecho nos determina un tercer 4-vector coordenado $\hat{e}_{x'}$ ortogonal a $\hat{e}_{t'}$ y $\hat{e}_{y'}$, dado por [Cáceres Dominguez, 1998]

$$\hat{e}_{x'} = \hat{e}_r \tag{4-33}$$

Las tres ecuaciones (4-30), (4-31) y (4-33) determinan el cambio entre la base coordenada polar $\{\hat{e}_t, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ del observador inercial y la base cartesiana $\{\hat{e}_{t'}, \hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'}\}$ del observador rotante. Expresando la base polar del observador rotante en términos de sus 4-vectores cartesianos, i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{e}_{r'} &= \cos(\theta')\,\hat{e}_{x'} + \sin(\theta')\,\hat{e}_{y'} \\ \hat{e}_{\theta'} &= -\sin(\theta')\,\hat{e}_{x'} + \cos(\theta')\,\hat{e}_{y'}, \end{aligned} \tag{4-34}$$

obtenemos finalmente el cambio entre la base polar $\{\hat{e}_t, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ del observador inercial y la base polar $\{\hat{e}_{t'}, \hat{e}_{r'}, \hat{e}_{\theta'}\}$ del observador rotante [Cáceres Dominguez, 1998]:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{t'} &= \cosh(\alpha)\,\hat{e}_t + \sinh(\alpha)\,\hat{e}_\theta \\ \hat{e}_{r'} &= \sin(\theta')\,(\sinh(\alpha)\,\hat{e}_t + \cosh(\alpha)\,\hat{e}_\theta) + \cos(\theta')\,\hat{e}_r \\ \hat{e}_{\theta'} &= \cos(\theta')\,(\sinh(\alpha)\,\hat{e}_t + \cosh(\alpha)\,\hat{e}_\theta) - \sin(\theta')\,\hat{e}_r \end{aligned} \tag{4-35}$$

Expresando la base polar del observador inercial en términos de sus 4-vectores cartesianos, las tres ecuaciones (4-30), (4-31) y (4-33) se pueden reescribir como:

$$\hat{e}_{t'} = \cosh(\alpha)\,\hat{e}_t + \sinh(\alpha)\,[-\sin(\Omega\tau)\,\hat{e}_x + \cos(\Omega\tau)\,\hat{e}_y] \tag{4-36}$$

$$\hat{e}_{y'} = \sinh(\alpha)\,\hat{e}_t + \cosh(\alpha)\,[-\sin(\Omega\tau)\,\hat{e}_x + \cos(\Omega\tau)\,\hat{e}_y] \tag{4-37}$$

$$\hat{e}_{x'} = \cos(\Omega\tau)\,\hat{e}_x + \sin(\Omega\tau)\,\hat{e}_y \tag{4-38}$$

donde $\Omega \equiv \frac{\omega}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}$. Este es el cambio entre la base cartesiana $\{\hat{e}_t, \hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ del observador inercial y la base cartesiana $\{\hat{e}_{t'}, \hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'}\}$ del observador rotante. Teniendo en cuenta estas transformaciones y la ley de transformación (4-12), obtenemos las siguientes transformaciones diferenciales:

$$dt = \cosh(\alpha)\,dt' + \sinh(\alpha)\,dy' \tag{4-39}$$

$$dx = -\sinh(\alpha)\sin(\Omega t')\,dt' + \cos(\Omega t')\,dx' - \cosh(\alpha)\sin(\Omega t')\,dy' \tag{4-40}$$

$$dy = \sinh(\alpha)\cos(\Omega t')\,dt' + \sin(\Omega t')\,dx' + \cosh(\alpha)\cos(\Omega t')\,dy' \tag{4-41}$$

con $\tanh(\alpha) = R\omega$. Integrando estas ecuaciones, tenemos que las transformaciones (4-36), (4-37) y (4-38) las podemos escribir en una forma más apropiada [Cáceres Dominguez, 1998]:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\left[t' + R\omega r' \sin(\theta')\right] \tag{4-42}$$

$$x = R\cos(\Omega t') + r'\left[\cos(\theta' + \Omega t') + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\right)\sin(\theta')\sin(\Omega t')\right] \tag{4-43}$$

$$y = R\sin(\Omega t') + r'\left[\sin(\theta' + \Omega t') - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}\right)\sin(\theta')\cos(\Omega t')\right] \tag{4-44}$$

con $\Omega \equiv \frac{\omega}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}$, (t, x, y) coordenadas cartesianas asociadas al observador inercial y (t', r', θ') coordenadas polares asociadas al observador rotante. Por el PRG, el elemento de línea ds^2 debe permanecer invariante bajo las transformaciones de coordenadas (4-42), (4-43) y (4-44), luego, este elemento de línea, expresado en coordenadas polares (t', r', θ') del observador rotante general, resulta [Cáceres Dominguez, 1998]:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4-45}$$

$$= \left[\frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r'\cos(\theta')\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1-R^2\omega^2\right)^2}\right] dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - \frac{2r'^2\omega}{1-R^2\omega^2} dt' d\theta' \tag{4-46}$$

y el tensor métrico resulta:

$$\mathbf{g} = \left(g'_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\left(1-R^2\omega^2-R\omega^2 r'\cos(\theta')\right)^2 - r'^2\omega^2}{(1-R^2\omega^2)^2} & 0 & -\frac{r'^2\omega}{1-R^2\omega^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{r'^2\omega}{1-R^2\omega^2} & 0 & -r'^2 \end{pmatrix} \tag{4-47}$$

En cambio, por (4-45), el tensor métrico, expresado en coordenadas cartesianas (t, x, y) asociadas al observador inercial, resulta en el tensor métrico de Minkowski:

$$\mathbf{g} = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4-48}$$

y las componentes del tensor métrico $\mathbf{g}$ se transforman desde las coordenadas cartesianas (t, x, y) del observador inercial a las coordenadas polares (t', r', θ') del observador rotante mediante:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\eta_{\alpha\beta} \tag{4-49}$$

Estudiaremos ahora algunos casos importantes:

I. En el caso $R = 0$, las transformaciones de coordenadas (4-42), (4-43) y (4-44) se reducen a:

$$t = t'_0 \tag{4-50}$$

$$x = r'_0\cos(\theta'_0 + \omega t'_0) \tag{4-51}$$

$$y = r'_0\sin(\theta'_0 + \omega t'_0) \tag{4-52}$$

donde (t'_0, r'_0, θ'_0) son las coordenadas polares asociadas al observador rotante en el origen, el elemento de línea (4-46) se reduce a

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - r'^2_0\omega^2\right) dt'^2_0 - dr'^2_0 - r'^2_0 d\theta'^2_0 - 2r'^2_0\omega dt'_0 d\theta'_0} \tag{4-53}$$

y el tensor métrico (4-47) se reduce a

$$\boxed{\mathbf{g} = \left(g'_{\mu\nu}\right)_0 = \begin{pmatrix} 1 - r'^2_0\omega^2 & 0 & -r'^2_0\omega \\ 0 & -1 & 0 \\ -r'^2_0\omega & 0 & -r'^2_0 \end{pmatrix}} \tag{4-54}$$

Este es el tensor métrico de Einstein-Ehrenfest. En este caso, las transformaciones (4-50), (4-51) y (4-52) representan una transformación entre las coordenadas cartesianas (t, x, y) del observador inercial y las coordenadas polares (t'_0, r'_0, θ'_0) del observador rotante en el origen. Pero según (4-29), la línea de mundo del observador rotante en el origen coincide con la línea de mundo del observador inercial O, $(\mathbb{X}_0 = \hat{e}_t)$. Esto quiere decir que el observador rotante en el origen coincide con el observador inercial O, al cual se le asigna un nuevo sistema de coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0), relacionadas con sus coordenadas cartesianas (t, x, y) mediante (4-50), (4-51) y (4-52).

Por (4-50), (4-51) y (4-52), se puede observar que la transformación entre las coordenadas polares (t, r, θ) del observador inercial O y sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) está dada por:

$$t = t'_0 \tag{4-55}$$
$$r = r'_0 \tag{4-56}$$
$$\theta = \theta'_0 + \omega t'_0 \tag{4-57}$$

II. En el caso $R \neq 0$, $dr' = d\theta' = 0$ y $r' = 0$, las transformaciones de coordenadas (4-42), (4-43) y (4-44) se reducen a:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - R^2\omega^2}} \tag{4-58}$$
$$x = R\cos(\Omega t') \tag{4-59}$$
$$y = R\sin(\Omega t') \tag{4-60}$$

y el elemento de línea (4-46) se reduce a:

$$ds^2 = dt'^2, \tag{4-61}$$

lo cual significa que, en este caso, el tiempo local t' coincide con el tiempo propio τ' medido por el observador rotante O' $(t' = \tau')$. Según (4-58), (4-59) y (4-60), se puede observar que las coordenadas polares (t, r, θ) del observador inercial O están ligadas por:

$$t = \frac{\tau'}{\sqrt{1-R^2\omega^2}} \tag{4-62}$$
$$r = R \tag{4-63}$$
$$\theta = \Omega t' \tag{4-64}$$

Teniendo en cuenta esto, y las transformaciones de coordenadas (4-55), (4-56) y (4-57) se obtiene que las coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) asociadas al observador inercial O están ligadas por:

$$\begin{aligned} t'_0 &= \frac{\tau'}{\sqrt{1-R^2\omega^2}} \\ r'_0 &= R \\ \theta'_0 &= 0 \end{aligned} \tag{4-65}$$

De aquí obtenemos que $dr'_0 = 0$ y $d\theta'_0 = 0$. Luego el elemento de línea (4-53) se reduce a:

$$ds^2 = \left(1 - R^2\omega^2\right) dt'^2_0 \tag{4-66}$$

Por (4-61), (4-66) y el PRG, obtenemos que la relación entre el intervalo de tiempo propio $d\tau'$, medido por un reloj en reposo relativo a O', y el intervalo de tiempo dt, medido por relojes en reposo relativo a O, está dado por:

$$dt = \frac{d\tau'}{\sqrt{1-R^2\omega^2}}. \tag{4-67}$$

Obsérvese que esta relación se pudo haber obtenido mediante (4-27), (4-58), o (4-62). Y representa el mismo efecto de *dilatación temporal*, observado en Relatividad Especial.

III. En el caso $R \neq 0$, $dr' = d\theta' = 0$ y $r' \neq 0$, las transformaciones de coordenadas (4-42), (4-43) y (4-44) tienen la misma forma, con $r' =$ cte. y $\theta' =$ cte., pero el elemento de línea (4-46) queda:

$$ds^2 = \left[\frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r' \cos\left(\theta'\right)\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1-R^2\omega^2\right)^2}\right] dt'^2 \tag{4-68}$$

Ésto quiere decir que la relación entre el intervalo de tiempo propio $d\tau$, medido por un reloj en reposo relativo a O', y el intervalo de tiempo local dt', medido por el reloj en reposo en el origen de coordenadas de O', está dado por:

$$d\tau' = \left[\frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r' \cos\left(\theta'\right)\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1-R^2\omega^2\right)^2}\right]^{1/2} dt' \tag{4-69}$$

Vemos entonces, que para el observador rotante general O', el tiempo propio es dependiente de la posición y la dirección del reloj que lo mide.

III.A. En el caso $R = 0$, $dr'_0 = d\theta'_0 = 0$ y $r'_0 \neq 0$, la ecuación (4-69) se reduce a

$$d\tau'_0 = \left[1 - r'^2_0\omega^2\right]^{1/2} dt'_0 \tag{4-70}$$

Este es un caso particular de I. Aquí, el observador en cuestión O' es el mismo observador inercial O, para el cual, el intervalo de tiempo $d\tau'_0$ ya no es de tiempo propio, debido a que el reloj que lo marca se encuentra en rotación uniforme alrededor de dicho observador. En este caso, $d\tau'_0$ se comporta como un tiempo local, de forma equivalente al caso II.

IV. Ahora, consideremos el caso a primer orden en $R\omega << 1$, i.e., $R^2\omega^2 \approx 0$. Las transformaciones (4-42), (4-43) y (4-44) se reducen a:

$$t \approx t' + R\omega r' \sin(\theta') \tag{4-71}$$
$$x \approx R\cos(\omega t') + r'\cos(\theta' + \omega t') \tag{4-72}$$
$$y \approx R\sin(\omega t') + r'\sin(\theta' + \omega t') \tag{4-73}$$

Nótese que las ecuaciones (4-72) y (4-73) coinciden con las transformaciones de coordenadas clásicas no-relativistas entre las coordenadas cartesianas (t, x, y) del observador inercial O y las coordenadas polares (t', r', θ') del observador rotante O'.

Considérese dos eventos E_1 y E_2 tales que $r'_1 = r'_2$ y $\theta'_1 = \theta'_2$, entonces, por la transformación (4-71), se tiene que:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &\approx t'_2 + R\omega r'_2 \sin(\theta'_2) - t'_1 - R\omega r'_1 \sin(\theta'_1) \\ &\approx t'_2 - t'_1 + R\omega\left(r'_2 \sin(\theta'_2) - r'_1 \sin(\theta'_1)\right) \\ &\approx t'_2 - t'_1 \end{aligned}$$

Luego, $\Delta t = t_2 - t_1 \approx t'_2 - t'_1 = \Delta t'$. Es decir, $\Delta t \approx \Delta t'$. Y regresamos a la relación entre intervalos temporales clásica no-relativista entre el observador inercial O y el observador rotante O'.

El elemento de línea (4-29) se reduce a:

$$ds^2 \approx \left[1 - r'^2\omega^2 - 2R\omega^2 r'\cos(\theta')\right] dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - 2r'^2\omega dt' d\theta' \tag{4-74}$$

Y para relojes lo suficientemente cercanos a O', tales que $r' < R$, tenemos que $r'\omega < R\omega << 1$, luego, $r'^2\omega^2 \approx 0$, y $R\omega^2 r'$ resulta ser de orden 2 en potencias de $R\omega$. Entonces, (4-74) se reduce a

$$ds^2 \approx dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - 2r'^2\omega dt' d\theta' \tag{4-75}$$

A partir de esta relación, para eventos en reposo lo suficientemente cercanos a O', tenemos que el tiempo propio $d\tau'$ entre dichos eventos es aproximadamente el tiempo local medido por el reloj en el origen de O'

$$d\tau' \approx dt' \tag{4-76}$$

Vemos que, bajo esta aproximación de bajas rotaciones, los tiempos marcados por relojes en reposo lo suficientemente cercanos a O' son aproximadamente iguales. Entonces, en este caso, podemos "sincronizar" todos los relojes en reposo lo suficientemente cercanos al origen de O'.

V. Ahora, consideremos el límite $R\omega \to c = 1$. En éste caso, tenemos los siguientes límites para las transformaciones de coordenadas (4-42), (4-43) y (4-44) y para el tensor métrico, respectivamente:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow +\infty \\ x &\longrightarrow -\infty \\ y &\longrightarrow +\infty \end{aligned} \tag{4-77}$$

$$\mathbf{g} = \left(g'_{\mu\nu}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -1 & 0 \\ -\infty & 0 & -r'^2 \end{pmatrix} \tag{4-78}$$

A pesar de que los tiempos propios en cada punto espacial del sistema rotante K transcurran a ritmos distintos, en todos los anteriores casos es posible, para cada observador rotante O' arbitrario, "sincronizar" todos los relojes en reposo lo suficientemente cercanos a él. Ésto lo podemos hacer de la siguiente forma:

Debemos escoger los relojes propios de O' lo suficientemente cercanos tales que estén contenidos en una vecindad espacial $V_{r'}\left(O'\right)$, centrada en el origen de O' y con radio r' (el cual depende de R), debe satisfacer la siguiente condición:

Condición sobre r': Existe $\delta > 0$ con $\sqrt{r'\omega/c} < \delta\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} << 1$ a primer orden, esto es, conservamos las potencias a primer orden en δ y despreciamos las de orden δ^2 y superior. Entonces,

$$r'\omega/c < \delta^2\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right) \approx 0 \tag{4-79}$$

Luego, r' debe ser tal que el cociente a-dimensional $r'\omega/c$ resulte ser despreciable.

Bajo esta condición, la componente g_{00} del tensor métrico (4-47) se reduce a

$$g_{00} = \frac{\left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2} - \frac{R\omega^2 r'}{c^2}\cos\left(\theta'\right)\right)^2 - \frac{r'^2\omega^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)^2} \approx 1 \tag{4-80}$$

El término $\frac{2r'^2\omega}{1-R^2\omega^2/c^2}dt'd\theta'$ del elemento de línea dado en (4-46) resulta despreciable:

$$0 \leq \left|\frac{2r'^2\omega}{1 - R^2\omega^2/c^2}dt'd\theta'\right| = \left|\frac{2r'\omega/c}{1 - R^2\omega^2/c^2}cdt'\left(r'd\theta'\right)\right| < 2\delta^2\left|cdt'\left(r'd\theta'\right)\right| \approx 0 \tag{4-81}$$

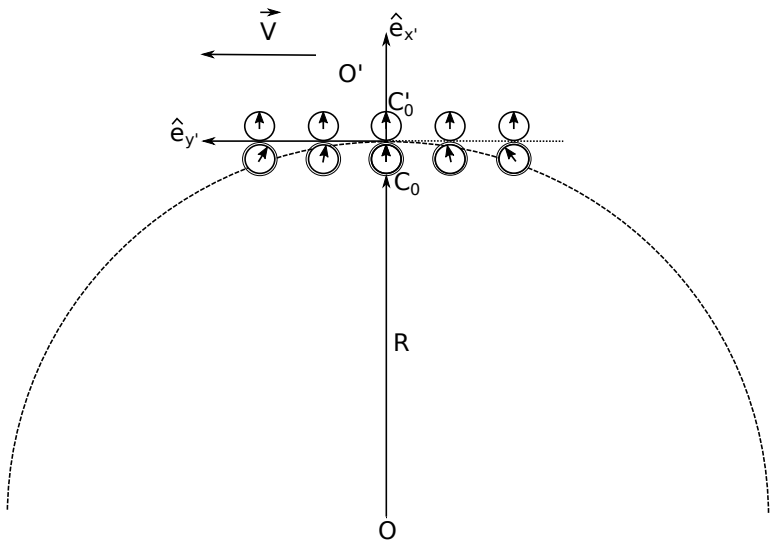

Figura 4-8.: Desincronización de los relojes de O comparados con los relojes de un observador rotante local O'. Los relojes con doble círculo indican el tiempo del observador inercial O, mientras que los relojes sencillos indican el tiempo de los relojes del observador rotante O'.

Por tanto, dentro de la vecindad $V_{r'}(O')$, el elemento de linea (4-46) adquiere la forma

$$ds^2 \approx dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 \tag{4-82}$$

Esto es, podemos "sincronizar" de forma bastante confiable todos los relojes de O' que estén dentro de la vecindad $V_{r'}(O')$.

En el caso que $R\omega \longrightarrow c$, por la condición sobre r', se obtiene

$$0 < \sqrt{r'\omega/c} < \delta\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} \longrightarrow 0 \tag{4-83}$$

y el resultado (4-81) sigue siendo válido.

La condición (4-83) implica que $r' \longrightarrow 0$ y ninguno de los coeficientes del tensor métrico (4-47) divergen si lo evaluamos dentro de tal vecindad $V_{r'}(O')$, y adquiere la misma forma (4-82). En este caso, el rango de validez de sincronización se reduce a un punto.

Por otro lado, por la ecuación (4-39), vemos que si sincronizamos todos los relojes de un observador rotante arbitario O' en $t' = 0$ y luego, sincronizamos uno de los relojes (llámese C_0) de O, situado a un radio coordenado $R > 0$, con el reloj C'_0 del origen de O' que pasa justo sobre el reloj C_0 en $t = t' = 0$ (Véase figura **4-8**), entonces, dicho reloj C_0 queda sincronizado con todos los relojes de O', pero los demás relojes de O se desincronizan con los relojes de O' en la dirección de la velocidad tangencial entre el observador rotante O' y el observador inercial O.

$$dt = \frac{R\omega}{\sqrt{1 - R^2\omega^2}} dy' \tag{4-84}$$

4.5. Propiedades métricas del espacio-tiempo asociado al observador rotante

En la presente sección estudiaremos algunas propiedades métricas, derivadas del carácter local del vector coordenado temporal $\hat{e}_{t'}$, asociado a un observador rotante arbitrario O', como lo son: la dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo, la relatividad de la simultaneidad de eventos entre el observador inercial O y el observador rotante general O', la caracterización no euclidiana de la geometría espacial del sistema rotante, y las geodésicas temporales.

4.5.1. Dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo/azul

Uno de los efectos de la dilatación temporal en sistemas rotantes, observada en la ecuación (4-67), es el del corrimiento al rojo/azul de los pulsos de luz. Para analizar este efecto, vamos a comparar los intervalos de tiempo propio entre eventos medidos por dos observadores $O'^{(1)}$ y $O'^{(2)}$ que rotan alrededor de un observador inercial O, con radios coordenados de rotación $R_{(1)}$ y $R_{(2)}$, respectivamente y ambos observadores tienen velocidad angular ω constante $\left(O'^{(1)} \text{ y } O'^{(2)} \text{ son co-rotantes}\right)$. Consideremos dos eventos E_1 y E_2 que ocurren en el origen de coordenadas de $O'^{(1)}$, luego, las coordenadas polares espaciales $\left(r'^{(1)}, \theta'^{(1)}\right)$ de estos dos eventos, asociadas al observador rotante $O'^{(1)}$, están dadas por ${r'}_1^{(1)} = {r'}_2^{(1)} = 0$ y ${\theta'}_1^{(1)} = {\theta'}_2^{(1)} = 0$. Luego, $\Delta {r'}_{12}^{(1)} = 0$ y $\Delta {\theta'}_{12}^{(1)} = 0$. Entonces, por (4-58), los intervalos temporales Δt_{12} y $\Delta {t'}_{12}^{(1)}$, medidos por O y $O'^{(1)}$ respectivamente, están relacionados mediante:

$$\Delta t_{12} = \frac{\Delta {t'}_{12}^{(1)}}{\sqrt{1 - R_{(1)}^2 \omega^2}} \tag{4-85}$$

Ahora, las coordenadas polares espaciales $\left(r'^{(2)}, \theta'^{(2)}\right)$ de los dos eventos, asociadas al observador rotante $O'^{(2)}$, están dadas por ${r'}_1^{(2)} = {r'}_2^{(2)} > 0$ y ${\theta'}_1^{(2)} = {\theta'}_2^{(2)}$, debido a que los observadores $O'^{(1)}$ y $O'^{(2)}$ son co-rotantes. Luego, $\Delta {r'}_{12}^{(2)} = 0$ y $\Delta {\theta'}_{12}^{(2)} = 0$. Entonces, por (4-42), los intervalos temporales Δt_{12} y $\Delta {t'}_{12}^{(2)}$, medidos por O y $O'^{(2)}$ respectivamente, están relacionados mediante:

$$\Delta t_{12} = \frac{\Delta {t'}_{12}^{(2)}}{\sqrt{1 - R_{(2)}^2 \omega^2}} \tag{4-86}$$

Obsérvese que en este caso, los intervalos $\Delta {t'}_{12}^{(1)}$ y $\Delta {t'}_{12}^{(2)}$ son de tiempo propio. Comparando las ecuaciones (4-85) y (4-86), tenemos que los intervalos de tiempo propio entre los eventos E_1 y E_2, medidos por los observadores $O'^{(1)}$ y $O'^{(2)}$, están relacionados por:

$$\boxed{\frac{\Delta {t'}_{12}^{(1)}}{\Delta {t'}_{12}^{(2)}} = \left(\frac{1 - R_{(1)}^2 \omega^2}{1 - R_{(2)}^2 \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4-87}$$

Este es el *efecto de dilatación temporal* en sistemas rotantes, expresado en su forma general.

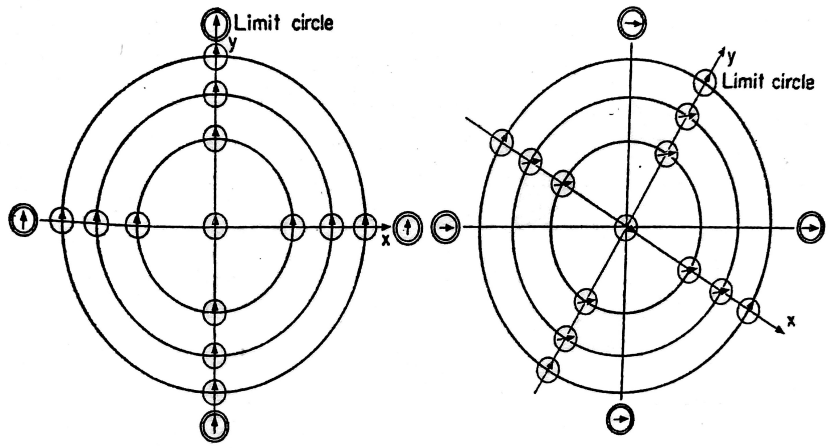

Figura 4-9.: Representación del tiempo local. Los relojes con doble círculo indican el tiempo del observador inercial O, mientras que los relojes con un sólo círculo indican el tiempo de los observadores locales rotantes [Arzeliès, 1966].

Consideremos ahora una onda de luz emitida por una fuente puntual S, fija sobre el sistema de referencia rotante K (es decir, la fuente puntual permanece en reposo relativo a algún observador rotante O'_S que conforma dicho sistema rotante, y la ubicamos en el origen de coordenadas polares espaciales $\left(r'^{(S)}, \theta'^{(S)}\right)$ de dicho observador), y es detectada por un receptor puntual D, fijo en el origen de coordenadas polares espaciales $\left(r'^{(D)}, \theta'^{(D)}\right)$ del observador O'_D, también sobre K. La frecuencia medida por el receptor depende de su posición, en otras palabras, la frecuencia de la onda cambia durante su propagación.

En efecto, consideremos como evento E_1, el inicio de emisión de un pulso de luz por dicha fuente, y el evento E_2 como el final de la emisión de dicho pulso de luz.
Supongamos que los observadores O'_S y O'_D tienen radios coordenados de rotación R_S y R_D, respectivamente. Sea $\nu'^{(S)}$ el número de pulsos emitidos por S por unidad de tiempo propio relativo a O'_S, entonces, por (4-87), tenemos que, $\nu'^{(S)}_D$, el número de pulsos emitidos por S por unidad de tiempo propio relativo a O'_D, está relacionado con $\nu'^{(S)}$, mediante:

$$\frac{\nu'^{(S)}_D}{\nu'^{(S)}} = \left(\frac{1 - R_S^2\omega^2}{1 - R_D^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-88}$$

Pero $\nu'^{(D)}$, el número de pulsos detectados por D por unidad de tiempo propio relativo a O'_D, tiene que ser igual a $\nu'^{(S)}_D$. Luego, la relación (4-88) la podemos escribir como:

$$\boxed{\frac{\nu'^{(D)}}{\nu'^{(S)}} = \left(\frac{1 - R_S^2\omega^2}{1 - R_D^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4-89}$$

Esta ecuación nos dice que si $0 \leq R_D < R_S$, entonces, $\nu'^{(D)} < \nu'^{(S)}$, luego el observador O'_D detecta un corrimiento al rojo de la luz emitida por S (Véase figura **4-10**), mientras que si $0 \leq R_S < R_D$, entonces, $\nu'^{(D)} > \nu'^{(S)}$, luego el observador O'_D detecta un corrimiento al azul de la luz emitida por S. En el caso trivial $R_D = R_S$, se tiene $\nu'^{(D)} = \nu'^{(S)}$, y la frecuencia detectada por O'_D coincide con la frecuencia emitida por S.

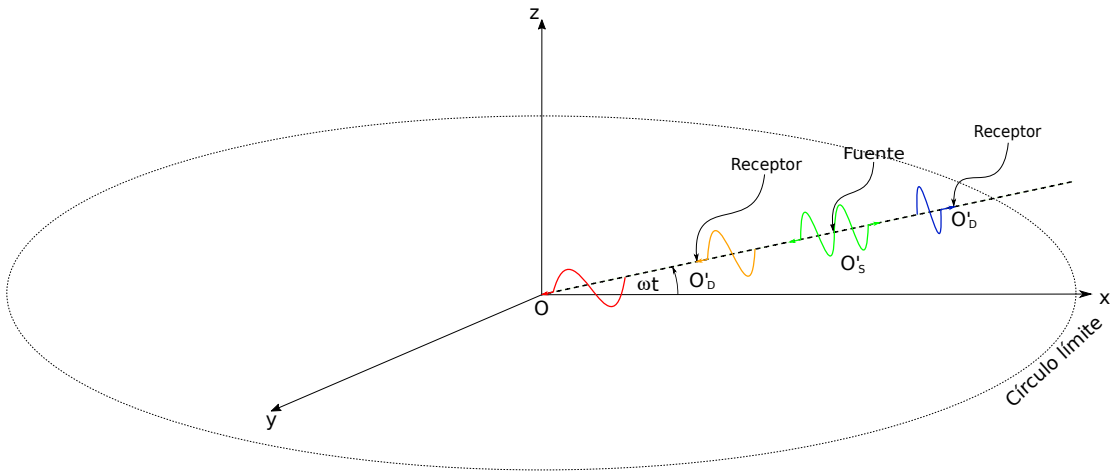

Figura 4-10.: Efecto de corrimiento al rojo detectado por distintos observadores atados al sistema rotante.

En la siguiente sección se mostrará la relatividad de la simultaneidad de eventos entre el observador inercial O y el observador rotante general O', y a partir de esto se definirá el concepto de longitud "natural", y consecuentemente, la noción de intervalo de tiempo "natural" sobre K.

4.5.2. Relatividad de la simultaneidad de eventos sobre el sistema rotante K

En esta sección se estudiará la simultaneidad de eventos teniendo en cuenta el PRG y el *Postulado de la constancia de la velocidad de la luz*. Entonces podemos utilizar la definición de sincronización estándar de dos relojes (infinitesimalmente cercanos) A y B (Véase subsección 4.3.1), en la cual se envía una señal de luz desde A hacia B e inmediatamente es reflejada hacia A, alcanza B cuando B indica un tiempo que es la mitad entre los instantes de emisión y recepción, respectivamente, medidos por A (Repase la subsección 4.3.1). Suponga que A y B, ambos en reposo en el sistema rotante, tienen posiciones con diferencias coordenadas dr' y $d\theta'$. Vamos a considerar primero el elemento de línea (4-53), entonces, la señal de luz entre A y B debe seguir la geodésica nula ($c \neq 1$):

$$ds^2 = \left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) dt'^2_0 - dr'^2_0 - r'^2_0 d\theta'^2_0 - 2r'^2_0\omega dt'_0 d\theta'_0 = 0 \tag{4-90}$$

Esta ecuación da la siguientes soluciones para dt'_0 cuando ésta es aplicada a las señales desde A hacia B, $(dt'_0)^+$, y en dirección opuesta $(dt'_0)^-$, respectivamente:

$$(dt'_0)^\pm = \left| \frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0 \pm \sqrt{\left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) dr'^2_0 + c^2 r'^2_0 d\theta'^2_0}}{c^2 - r'^2_0\omega^2} \right| = \frac{\pm\omega r'^2_0 d\theta'_0 + \sqrt{\left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) dr'^2_0 + c^2 r'^2_0 d\theta'^2_0}}{c^2 - r'^2_0\omega^2} \tag{4-91}$$

Si τ_e es el tiempo coordenado del evento de emisión en A, el evento en A con coordenada temporal $\tau_e + 1/2\left((dt'_0)^+ + (dt'_0)^-\right)$ satisface simultaneidad estándar con el evento en B con tiempo coordenado $\tau_e + (dt'_0)^+$ (Siguiendo la subsección 4.3.1 y utilizando el PRG). Se sigue que la sincronización estándar de relojes infinitesimalmente cercanos corresponde a la siguiente diferencia en el tiempo coordenado t'_0 [Dieks, 2010]:

$$dt'_0 = \left[\tau_e + (dt'_0)^+\right] - \left[\tau_e + 1/2\left((dt'_0)^+ + (dt'_0)^-\right)\right] = \frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0}{c^2 - \omega^2 r'^2_0} \tag{4-92}$$

Observemos que sólo es para eventos que difieren en la coordenada θ'_0 que $dt'_0 = 0$ no es equivalente a simultaneidad estándar sobre K. Esto es de esperar, ya que la velocidad instantánea está dirigida tangencialmente, y los relojes dispuestos en un radio coordenado R fijo, se des-sincronizan en la dirección de la velocidad, con respecto al reloj en el origen de rotación (Véase 4-84).

Decimos que dos eventos E_1 y E_2 son *simultáneos sobre el sistema rotante* K, si sus tiempos coordenados t'_0 satisfacen la anterior diferencia.

Ahora, la longitud de una varilla rígida, en reposo sobre K, cuyos extremos (infinitesimalmente cercanos) representan eventos simultáneos, se calcula sustituyendo la diferencia anterior (4-92) en el elemento de línea (4-53), para obtener el siguiente elemento de línea espacial:

$$dl_0^{*2} := -ds^2 = dr'^2_0 + \frac{r'^2_0 d\theta'^2_0}{1-\omega^2 r'^2_0/c^2} \tag{4-93}$$

Este es el *elemento de longitud natural* sobre K, en términos de las coordenadas del observador "rotante" en el origen [Arzeliès, 1966]. Ahora, completando cuadrados en el elemento de línea (4-53), obtenemos que:

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r'^2_0\omega^2}{c^2}\right)\left[dt'_0 - \frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0}{c^2-\omega^2 r'^2_0}\right]^2 - \left(dr'^2_0 + \frac{r'^2_0 d\theta'^2_0}{1-\omega^2 r'^2_0/c^2}\right) = c^2 dt_0^{*2} - dl_0^{*2} \tag{4-94}$$

donde,

$$dt_0^* := \sqrt{1-\frac{r'^2_0\omega^2}{c^2}}\left[dt'_0 - \frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0}{c^2-\omega^2 r'^2_0}\right] \tag{4-95}$$

Este es el *intervalo de tiempo natural* sobre K, en términos de las coordenadas del observador "rotante" en el origen (véase [Arzeliès, 1966] y [Ruggiero and Tartaglia, 2015] p. 2). Nótese que en este caso, $dt_0^* = 0$ sí es equivalente a simultaneidad estándar sobre K, lo cual implica que

$$dt'_0 = \frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0}{c^2-\omega^2 r'^2_0} \tag{4-96}$$

Notemos que esta ecuación es equivalente a (4-84) si hacemos ($c = 1$):

$$\begin{aligned} t'_0 &= t \\ r'_0 &= R \\ \frac{r'_0 d\theta'_0}{\sqrt{1-\omega^2 r'^2_0}} &= dy' \end{aligned} \tag{4-97}$$

Ahora, para el caso de simultaneidad sobre O ($dt'_0 = 0$), la ecuación (4-95) nos da ($c = 1$)

$$dt_0^* = -\frac{\omega r'^2_0 d\theta'_0}{\sqrt{1-\omega^2 r'^2_0}} \tag{4-98}$$

Consideremos el caso del observador rotante general, para el cual se obtiene (siguiendo el procedimiento anterior) que la sincronización estándar de relojes infinitesimalmente cercanos corresponde a la siguiente diferencia en el tiempo coordenado t':

$$dt' = \left[\tau_e + dt'^+\right] - \left[\tau_e + 1/2\left(dt'^+ + dt'^-\right)\right] = -\frac{g'_{02}}{g'_{00}}d\theta' \tag{4-99}$$

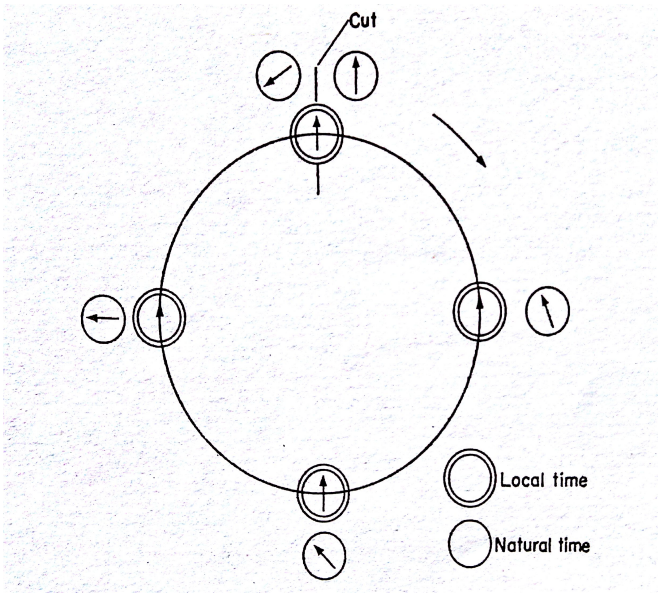

Figura 4-11.: Comparación entre tiempo local y tiempo natural [Arzeliès, 1966].

donde,

$$g'_{00} = \frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r' \cos(\theta')\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1 - R^2\omega^2\right)^2} \tag{4-100}$$

$$g'_{02} = -\frac{r'^2\omega}{1 - R^2\omega^2}$$

Decimos que dos eventos E_1 y E_2 son *simultáneos sobre el sistema rotante* K, si sus coordenadas t' satisfacen la anterior diferencia.
Ahora, el *elemento de longitud natural* sobre K, en términos de las coordenadas del observador rotante general, resulta:

$$dl_R^{*2} := -ds^2 = dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 \left(1 + \frac{g'^2_{02}}{g'_{00} r'^2}\right) \tag{4-101}$$

Observe además que el elemento de línea (4-46) asociado al observador rotante general, se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = c^2 dt_R^{*2} - dl_R^{*2} \tag{4-102}$$

donde,

$$dt_R^* := \sqrt{g'_{00}} \left[dt' + \frac{g'_{02}}{g'_{00}} d\theta'\right] \tag{4-103}$$

Este es el *intervalo de tiempo natural o físico* sobre K, en términos de las coordenadas de un observador rotante arbitrario.

El intervalo de longitud espacial dl_R^*, correspondiente a simultaneidad de acuerdo a $dt_R^* = 0$, son los intervalos que un físico debería medir en el sistema rotante [Adler, 1975]. Con esta definición de longitudes espaciales,

vemos que hay lugar a una correcta dilatación de Lorentz longitudinal, mientras que las escalas normales a la velocidad local permanecen sin cambios. En general, un observador en movimiento intentará definir sus intervalos espacio-temporales locales de tal forma que el elemento de línea sea *localmente* Lorentziano [Adler, 1975], como en (4-102).

Veremos más adelante (subsección 4.6.5), que los intervalos (4-93) y (4-95) satisfacen transformaciones de Lorentz infinitesimales.

4.5.3. Cálculo de la velocidad física de la luz sobre el sistema rotante K

De la sección anterior se puede observar que si $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ representa una longitud física para el observador inercial O, entonces, $dl_0^* = \sqrt{dr'^2_0 + \frac{r'^2_0 d\theta'^2_0}{1-\omega^2 r'^2_0/c^2}}$ representa una longitud física para el observador rotante O'. Teniendo en cuenta las anteriores definiciones de intervalos temporales y espaciales naturales sobre K, vamos a calcular la *velocidad física* de una señal luminosa sobre K. La señal de luz debe seguir la geodésica nula dada por el elemento de línea (4-94):

$$ds^2 = c^2 dt_0^{*2} - dl_0^{*2} = 0 \tag{4-104}$$

De aquí obtenemos que la *velocidad física* de la señal luminosa es:

$$V_0^{\pm} := \frac{dl_0^*}{dt_0^*} = \pm c \tag{4-105}$$

en términos de las coordenadas del observador "rotante" en el origen. Por otro lado, la señal de luz también debe seguir la geodésica nula relativa al observador rotante general, dada por el elemento de línea (4-102):

$$ds^2 = c^2 dt_R^{*2} - dl_R^{*2} = 0 \tag{4-106}$$

De donde obtenemos que la *velocidad física* de la señal luminosa es, según la Definición XXIV:

$$V_R^{\pm} := \frac{dl_R^*}{dt_R^*} = \pm c \tag{4-107}$$

en términos de las coordenadas del observador rotante general.

De lo anterior, observamos que, sobre K, la *velocidad física* de la señal luminosa es $c =$ cte., independientemente de la posición, la dirección y de los observadores estacionarios sobre K, y por tanto, este resultado es consecuente con el PRG.

Notemos que esta definición de velocidad física es sólo de carácter *local*, debido a que los intervalos espaciales y temporales dl_R^* y dt_R^*, respectivamente son sólo válidos localmente. Esto *restringe* el rango de validez del Postulado de la constancia de la velocidad de la luz para pasar a ser de carácter local.

4.5.4. Cálculo de la velocidad coordenada de la luz sobre el sistema rotante K

Ahora vamos a proceder con el cálculo de la velocidad coordenada de una señal de luz sobre el sistema rotante K y compararla con su velocidad física. Aprovechando el PRG, podemos considerar primero, para

simplificar los cálculos, el elemento de línea (4-53) con $c \neq 1$, asociado al observador "rotante" en el origen. La señal de luz debe seguir una geodésica nula:

$$ds^2 = \left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) dt'^2_0 - dr'^2_0 - r'^2_0 d\theta'^2_0 - 2r'^2_0\omega dt'_0 d\theta'_0 = 0 \tag{4-108}$$

Dividiendo esta ecuación por dt'^2_0, tenemos:

$$\left(\frac{dr'_0}{dt'_0}\right)^2 + r'^2_0\left(\frac{d\theta'_0}{dt'_0}\right)^2 + 2r'^2_0\omega\left(\frac{d\theta'_0}{dt'_0}\right) - \left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) = 0 \tag{4-109}$$

Consideremos ahora dos casos:

1. El caso en el que la señal viaja en dirección tangencial, con $\frac{dr'_0}{dt'_0} = 0$, (4-109) se reduce a:

$$r'^2_0\left(\frac{d\theta'_0}{dt'_0}\right)^2 + 2r'^2_0\omega\left(\frac{d\theta'_0}{dt'_0}\right) - \left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) = 0 \tag{4-110}$$

   La cual tiene soluciones [Klauber, 1998]:

$$\frac{d\theta'_0}{dt'_0}^{\pm} = -\omega \pm \frac{c}{r'_0} \tag{4-111}$$

   Luego, la velocidad coordenada tangencial, calculada en coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) del observador inercial O, resulta:

$$(v'_0)^{\pm}_{||} \equiv r'_0\frac{d\theta'_0}{dt'_0}^{\pm} = -r'_0\omega \pm c \tag{4-112}$$

   El signo superior es para la señal que viaja en la dirección de $\omega > 0$, en cambio, el signo inferior es para la señal que viaja en la dirección opuesta.

2. Ahora, si la señal viaja en dirección radial, $\frac{d\theta'_0}{dt'_0} = 0$, (4-109) se reduce a:

$$\left(\frac{dr'_0}{dt'_0}\right)^2 - \left(c^2 - r'^2_0\omega^2\right) = 0 \tag{4-113}$$

   La cual tiene soluciones:

$$(v'_0)^{\pm}_r \equiv \frac{dr'_0}{dt'_0}^{\pm} = \pm c\sqrt{1 - \frac{r'^2_0\omega^2}{c^2}} \tag{4-114}$$

   Esta es la velocidad coordenada radial del rayo de luz, calculada en coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) del observador inercial O. El signo superior es para la señal que viaja en la dirección de $dr'_0 > 0$, en cambio, el signo inferior es para la señal que viaja en la dirección opuesta.

De estos dos casos, se puede observar que la velocidad coordenada de la señal de luz, calculada en coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) del observador inercial O, tiene distintos valores, dependiendo de su posición y dirección.
Veamos que dicha velocidad coordenada depende también del observador sobre K. En efecto, consideremos ahora el elemento de línea (4-46) con $c \neq 1$, asociado al observador rotante general. La señal de luz debe seguir una geodésica nula:

$$ds^2 = \left[\frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r' \cos(\theta')\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1 - R^2\omega^2\right)^2}\right] dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - \frac{2r'^2\omega}{1 - R^2\omega^2} dt' d\theta' = 0 \tag{4-115}$$

Siguiendo el método de los dos casos anteriores, encontramos que la velocidad coordenada tangencial, calculada en las coordenadas polares (t', r', θ') del observador rotante O', resulta:

$$(v')^{\pm}_{||} \equiv r' \frac{d\theta'}{dt'}^{\pm} = -\frac{r'\omega}{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}} \pm c \left| 1 - \frac{R\omega^2}{c^2 - R^2\omega^2} r' \cos(\theta') \right|, \tag{4-116}$$

El signo superior es para la señal que viaja en la dirección de $\omega > 0$, en cambio, el signo inferior es para la señal que viaja en la dirección opuesta.
Y la velocidad coordenada radial del rayo de luz, calculada en las coordenadas polares (t', r', θ') del observador rotante O', resulta:

$$(v')^{\pm}_{r} \equiv \frac{dr'}{dt'}^{\pm} = \pm \frac{c}{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}} \sqrt{\left(1 - \frac{R\omega^2}{c^2}\left(R + r' \cos(\theta')\right)\right)^2 - \frac{r'^2\omega^2}{c^2}}, \tag{4-117}$$

De nuevo, el signo superior es para la señal que viaja en la dirección de $dr' > 0$, en cambio, el signo inferior es para la señal que viaja en la dirección opuesta.

Es muy importante nunca confundir los conceptos de velocidad *física* y velocidad *coordenada*, ya que como lo muestra el anterior resultado, éste no es consecuente con el PRG, lo cual lleva *erróneamente* a cuestionar la validez del PRG y pensar que la Relatividad Especial es sólo es aplicable a los sistemas inerciales, lo cual lleva a confusiones teóricas y a la falta de univocidad en la descripción de los sistemas físicos ([Logunov, 1998], p. 99). En el caso de la velocidad coordenada, los diferenciales dr' y $r'd\theta'$ de las ecuaciones (4-116) y (4-117) no son obtenidos mediante simultaneidad de eventos, como en Relatividad Especial; esto es, si $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ representa una longitud física para el observador inercial O, no implica que $\sqrt{dr'^2 + r'^2 d\theta'^2}$ sea una longitud física para el observador rotante O': Mientras que los eventos con coordenadas espaciales $(r, \theta), (r + dr, \theta)$, ubicados en dirección radial, y $(r, \theta), (r, \theta + d\theta)$, ubicados en dirección tangecial, son simultáneos para O, los correspondientes eventos con coordenadas espaciales $(r', \theta'), (r' + dr', \theta')$ y $(r', \theta'), (r', \theta' + d\theta')$, no son simultáneos para O'.

Notemos que si acotamos r' (como en el final de la sección 4.4) de tal modo que el cociente $r'\omega/c$ sea despreciable, vemos que existe una vecindad espacial $V_{r'}(O')$ centrada en el origen de coordenadas de O' tal que la velocidad coordenada de la luz, calculada en el interior de ésta, por el observador O' tenga componentes

$$(v')^{\pm}_{||} \equiv r' \frac{d\theta'}{dt'}^{\pm} \approx \pm c, \tag{4-118}$$

para el rayo de luz que viaja en dirección tangencial, y

$$(v')^{\pm}_{r} \equiv \frac{dr'}{dt'}^{\pm} \approx \pm c, \tag{4-119}$$

para el rayo de luz que viaja en dirección radial.

Entonces, dentro de una localidad $V_{r'}(O')$ alrededor de O', los conceptos de velocidad coordenada y velocidad física coinciden *aproximadamente*. Este resultado nos muestra nuevamente el carácter local del PRG y el Postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

4.5.5. Caracterización no euclidiana de la geometría espacial del sistema rotante

A partir del elemento de línea espacial (4-93), se mostrará a continuación que la geometría espacial sobre el sistema de referencia rotante no es euclidiana, y luego se procederá a calcular el tensor de curvatura para dicha geometría espacial.

Según (4-93), la longitud de una varilla rígida en reposo sobre el sistema rotante K es:

$$dl_0^{*2} := -ds^2 = dr'^2_0 + \frac{r'^2_0 d\theta'^2_0}{1-\omega^2 r'^2_0/c^2}, \tag{4-120}$$

en términos de las coordenadas del observador "rotante" O' en el origen. Pero para el observador no-rotante O, la longitud de la varilla es:

$$dl^2 := -ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{4-121}$$

Busquemos ahora una relación entre dl_0^* y dl: Teniendo en cuenta que la transformación entre las coordenadas polares (t, r, θ) del observador inercial O y sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) están dadas por las ecuaciones (4-55), (4-56) y (4-57):

$$\begin{aligned} t &= t'_0 \\ r &= r'_0 \\ \theta &= \theta'_0 + \omega t'_0 \end{aligned} \tag{4-122}$$

Y como para medir la longitud de la varilla, los eventos en los extremos de ésta deben ser simultáneos tanto para O como para O', tenemos que $(dt = dt'_0 = 0)$:

$$\begin{aligned} dt &= 0 \\ dr &= dr'_0 \\ d\theta &= d\theta'_0 \end{aligned} \tag{4-123}$$

Entonces, dl_0^* y dl están relacionados por:

$$dl_0^{*2} = \frac{dl^2 - dr^2\omega^2 r^2/c^2}{1-\omega^2 r^2/c^2} \tag{4-124}$$

En el caso de un arco infinitesimal de circunferencia con un radio coordenado R fijo , tenemos:

$$dl_0^* = \frac{R d\theta}{\sqrt{1-\omega^2 R^2/c^2}} \tag{4-125}$$

Integrando esta ecuación, variando θ en el intervalo $[0, 2\pi]$, tenemos que el perímetro l_0^* de la circunferencia de radio coordenado R, centrada en el origen de coordenadas, calculada sobre K, se relaciona con la calculada por el observador O $(2\pi R)$ mediante:

$$l_0^* = \int_0^{l_0^*} dl_0^* = \int_0^{2\pi} \frac{Rd\theta}{\sqrt{1-\omega^2R^2/c^2}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1-\omega^2R^2/c^2}} > 2\pi R \tag{4-126}$$

A partir de esto, podemos ver que las mediciones espaciales hechas sobre K llevan al siguiente resultado: La geometría euclidiana no es válida sobre el sistema rotante para las mediciones de longitud con los estándares naturales.
Además, como la medida del perímetro de la circunferencia es mayor que $2\pi R$, concluimos que la geometría espacial sobre K es hiperbólica.

Procederemos ahora a calcular la curvatura correspondiente a la geometría espacial del sistema de referencia rotante: A partir de (4-93), las componentes covariantes no nulas del tensor métrico espacial $\gamma_{\mu\nu}$ resultan

$$\gamma_{11} = 1, \qquad \gamma_{22} = \frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2} \tag{4-127}$$

Omitimos las primas y los subíndices cero en virtud de las transformaciones (4-55), (4-56) y (4-57). Las componentes contravariantes no nulas del tensor métrico espacial $\gamma_{\mu\nu}$ resultan [Arzeliès, 1966]

$$\gamma^{11} = \frac{\gamma_{22}}{\gamma}, \qquad \gamma^{22} = \frac{\gamma_{11}}{\gamma} = \frac{1-r^2\omega^2/c^2}{r^2}$$

donde γ es el determinante del tensor métrico espacial $\gamma_{\mu\nu}$ dado por

$$\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2} = \gamma_{22}$$

Los símbolos de Christoffel de primer tipo tienen los siguientes valores no nulos [Arzeliès, 1966]

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{221} = -\Gamma_{212} = \frac{r}{\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^2} \tag{4-128}$$

Los símbolos de Christoffel de segundo tipo tienen los valores no nulos [Arzeliès, 1966]

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{22} &= -\frac{r}{\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^2} \\ \Gamma^2{}_{12} &= \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)} \end{aligned} \tag{4-129}$$

El *tensor de curvatura de Riemann* espacial 2-dimensional tiene las siguientes componentes no nulas [Arzeliès, 1966]

$${}^2R_{1212} = {}^2R_{2121} = -{}^2R_{1221} = -{}^2R_{2112} = \frac{3\omega^2r^2/c^2}{\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^3} \tag{4-130}$$

Las componentes del *tensor de Ricci* 2-dimensional resultan ser [Arzeliès, 1966]

$$ {}^2R_{11} = \frac{-3\omega^2}{c^2\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^2}, \quad {}^2R_{12} = 0 \tag{4-131} $$

$$ {}^2R_{21} = 0, \quad {}^2R_{22} = \frac{-3\omega^2r^2}{c^2\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^3} \tag{4-132} $$

Luego, el escalar de curvatura espacial 2-dimensional resulta [Arzeliès, 1966]

$$ {}^2R = -\frac{6\omega^2/c^2}{\left(1-\omega^2r^2/c^2\right)^2} < 0 \tag{4-133} $$

Esto resultado confirma que la geometría espacial sobre el sistema de referencia rotante debe ser hiperbólica (con curvatura negativa). Es de notar que las componentes no nulas del tensor de Ricci ${}^2R_{\alpha\beta}$ satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein 2-dimensionales [Arzeliès, 1966].

4.5.6. Cálculo de las geodésicas temporales

Dividiendo formalmente el elemento de línea (4-53) por ds^2, obtenemos [Sepúlveda, 2013]:

$$ F \equiv \frac{ds^2}{ds^2} = \left(c^2 - r^2\omega^2\right)\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}_0^2 - \dot{z}^2 - 2\omega r^2\dot{\phi}_0\dot{t}_0, \tag{4-134} $$

donde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$. Las ecuaciones de movimiento de una partícula pueden obtenerse a partir del principio variacional:

$$ \delta \int F ds = 0 $$

de la cual se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0 \tag{4-135} $$

Reemplazando F en estas ecuaciones para $\mu = 0, 1, 2, 3$ se obtienen respectivamente:

$$ \left(c^2 - r^2\omega^2\right)\ddot{t} - 2\frac{\omega^2 r}{c}\dot{r}\dot{t} - 2\frac{\omega r}{c}\dot{r}\dot{\phi} - \frac{\omega r^2}{c}\ddot{\phi} = 0 \tag{4-136} $$

$$ \ddot{r} - \omega^2 r\dot{t}^2 - r\dot{\phi}^2 - 2\omega r\dot{\phi}\dot{t} = 0 \tag{4-137} $$

$$ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\omega}{r}\dot{r}\dot{t} + \omega\ddot{t} = 0 \tag{4-138} $$

$$ \ddot{z} = 0 \tag{4-139} $$

Reemplazando $\ddot{\phi}$ de (4-138) en (4-136) se obtiene:

$$ \ddot{t} = 0 \tag{4-140} $$

de donde $\dot{t} = \text{cte.} = 1/c$. Reemplazando este último valor en (4-137) y (4-138) se obtienen las ecuaciones:

$$\ddot{r} - \frac{\omega^2 r}{c^2} - r\dot{\phi}^2 - 2\frac{\omega r}{c}\dot{\phi} = 0 \tag{4-141}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\omega}{cr}\dot{r} = 0 \tag{4-142}$$

Comparando las ecuaciones (4-140), (4-141), (4-142) y (4-139) con las ecuaciones de las geodésicas

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \tag{4-143}$$

se obtienen los símbolos de Christoffel no nulos:

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{\omega^2 r}{c^2}, \quad \Gamma^1{}_{22} = -r, \quad \Gamma^1{}_{02} = \Gamma^1{}_{20} = -\frac{\omega r}{c}, \quad \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = 1/r, \tag{4-144}$$

$$\Gamma^2{}_{01} = \Gamma^2{}_{10} = \frac{\omega}{cr} \tag{4-145}$$

Ahora bien, como $ds = cd\tau$, con τ el tiempo propio para la geodésica de la partícula, (4-141) y (4-142) dan lugar a las ecuaciones de movimiento radial y angular de una partícula libre en el sistema rotante:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \omega^2 r + 2\omega r\frac{d\phi}{d\tau} \tag{4-146}$$

$$r\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = -2\omega\frac{dr}{d\tau} \tag{4-147}$$

Estas ecuaciones coinciden con las de la mecánica clásica para el movimiento de partículas en un sistema rotante ([Goldstein, 1980], p. 177). Los términos de la izquierda corresponden a las aceleraciones radial y angular, respectivamente, mientras los de la derecha corresponden a los efectos de las fuerzas centrífuga y de Coriolis [Sepúlveda, 2013]. Vemos entonces, que la ecuación geodésica para la partícula libre (la cual es una solución puramente geométrica) es equivalente a la ecuación de movimiento clásica de una partícula en un sistema rotante (la cual es una solución puramente mecánica) [Adler, 1975]. En el caso mecánico, la partícula está sometida al efecto de fuerzas ficticias debidas a la rotación, en cambio, en el caso geodésico, la partícula no está sometida a fuerzas ficticias, sino en movimiento libre en una geometría no euclidiana . Por el PEE, *en el caso mecánico*, el campo de fuerzas ficticias equivale a un campo de gravitación [Sepúlveda, 2013, Adler, 1975].

Todos los elementos del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ son cero en el sistema inercial y como éste es un tensor, se sigue que sus componentes son cero en el sistema rotante. También se puede mostrar este resultado por medio de los símbolos de Christoffel (4-144) y (4-145), y luego, calculando el tensor de curvatura para obtener $R_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$.

Vemos entonces, que el espacio-tiempo sobre el sistema rotante es plano, aunque el espacio físico es curvo y el tiempo in-homogéneo.

Fue con este ejemplo de sistemas rotantes que Einstein se dio cuenta, a través de su principio de equivalencia, que la gravitación no es una fuerza; es un efecto asociado a la no euclidianidad del espacio físico y la no uniformidad del tiempo. Esto es, la gravitación es más un fenómeno geométrico que uno mecánico.

Notemos que las ecuaciones (4-146) y (4-147) las podemos escribir de forma vectorial como ([Goldstein, 1980], p. 177)

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}) \tag{4-148}$$

donde $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ representa el efecto de la "fuerza" centrífuga, $-2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}})$ representa el *efecto Coriolis*, y $\vec{v}_{\text{rot}}$ es la velocidad relativa de una partícula libre, respecto al sistema rotante. Como la "fuerza" centrífuga es conservativa, la podemos escribir en términos de un potencial centrífugo Φ_c como

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = -\vec{\nabla}\Phi_c + 2\,(\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{\omega})} \tag{4-149}$$

con $\Phi_c = -\omega^2 r^2/2$.

4.5.7. Cálculo de las geodésicas nulas

Se procederá a realizar el cálculo de las geodésicas nulas de una forma sencilla para mostrar que un rayo de luz cualquiera se curva en el sistema rotante K. Considere una línea recta D_0 en el sistema inercial Σ, la cual representa la geodésica en Σ de un fotón libre con velocidad física c relativa a Σ (Véase figura **4-12**). Se denota la distancia OH de D_0 hacia el eje de rotación de K por a, y se mide el ángulo θ que barre el radio vector del fotón a partir de OH; en Σ se tiene

$$r\cos\theta = a \tag{4-150}$$

Para obtener la geodésica del fotón libre con respecto a K, se efectúa una rotación de D_0 con una velocidad angular en el sentido opuesto a la rotación de K. Como hay dos posibles sentidos de rotación de K, se admitirán ambos signos para ω. Se obtiene entonces que

$$r = r'_0, \quad \theta = \theta'_0 \pm \omega t, \quad a = r'_0 \cos(\theta'_0 \pm \omega t) \tag{4-151}$$

donde (r'_0, θ'_0) son las coordenadas polares "rotantes" asociadas al observador "rotante" en el origen O. Se elimina t por medio de la relación

$$ct = \sqrt{r'^2_0 - a^2} = \sqrt{r^2 - a^2} \tag{4-152}$$

Reemplazando esta expresión en las relaciones (4-151), se tiene

$$a = r\cos\left\{\theta'_0 \pm (\omega/c)\sqrt{r^2 - a^2}\right\} \tag{4-153}$$

Denotando por $\theta_c \equiv \theta'_0$, finalmente obtenemos las geodésicas nulas [Arzeliès, 1966]

$$\boxed{\theta_c = \pm\arccos(a/r) \mp (\omega/c)\sqrt{r^2 - a^2}} \tag{4-154}$$

Vemos entonces que la luz se curva en K debido a su rotación. Por el PEE, esta propiedad se debe tener localmente en la presencia de gravitación.

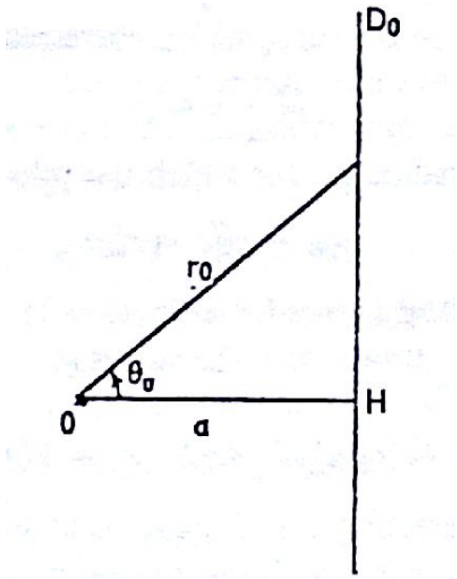

Figura 4-12.: Geodésica de un fotón libre con velocidad física c, respecto a un sistema inercial [Arzeliès, 1966].

Cada curva θ_c está descrita por fotones en una sóla dirección. Entonces, dos curvas diferentes en K corresponden a cada línea recta D_0 en Σ, dependiendo en el sentido en el cual D_0 sea descrita (Véase figura **4-13**). Por tanto hay dos geodésicas nulas θ_c pasando a través de cualquier par de puntos P y Q en K. Ópticamente, ésto significa que el principio de reversibilidad [Hecht, 2002] ya no es aplicable sobre el sistema rotante. Ésto implica que si ponemos una pantalla a través de una de las curvas θ_c, P, por ejemplo, podría ver a Q, pero Q no será capaz de ver a P [Arzeliès, 1966].

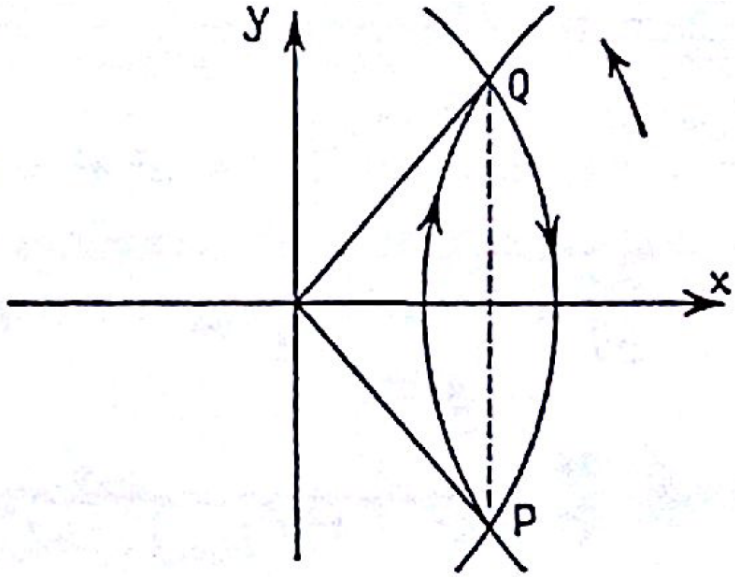

Figura 4-13.: Dibujo esquemático de dos geodésicas nulas que pasan a través de cualquier par de puntos P y Q en K [Arzeliès, 1966].

4.5.8. Vectores de Killing

Los vectores de Killing son herramientas estándar, útiles para determinar las simetrías de una variedad [C. W. Misner, 1973]. Son vectores $\boldsymbol{\xi}$ que indican la dirección en la que se preservan las distancias bajo translaciones infinitesimales. Una condición necesaria y suficiente para que un vector $\boldsymbol{\xi}$ sea un vector de Killing es que sus componentes ξ^μ satisfagan las ecuaciones de Killing [C. W. Misner, 1973]

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{4-155}$$

Si el tensor métrico resulta independiente de una de las coordenadas x^k, es decir $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^k = 0$, entonces, cualquier curva $x^\alpha = c^\alpha(\lambda)$ que se traslade infinitesimalmente en la dirección x^k preservará su longitud. De este modo, el vector coordenado $\left(\partial/\partial x^k\right) \equiv \hat{e}_{x^k}$ resulta ser un vector de Killing, ya que satisface la ecuación (4-155). Teniendo en cuenta que las componentes del tensor métrico (4-54) son independientes del tiempo t'_0 y del ángulo azimutal θ'_0, es decir

$$\frac{\partial\left(g'_{\mu\nu}\right)_0}{\partial t'_0} = 0, \quad \frac{\partial\left(g'_{\mu\nu}\right)_0}{\partial \theta'_0} = 0, \tag{4-156}$$

se tiene que, para el observador "rotante" en el origen O'_0, existen dos vectores de Killing, los vectores coordenados $\mathsf{K}^{(0)}_{O'_0} \equiv \hat{e}_{t'_0}$ y $\mathsf{K}^{(2)}_{O'_0} \equiv \hat{e}_{\theta'_0}$, los cuales coinciden con los vectores coordenados $\mathsf{K}^{(0)}_{O} \equiv \hat{e}_t$ y $\mathsf{K}^{(2)}_{O} \equiv \hat{e}_\theta$ del observador inercial O.

Por otro lado, las componentes del tensor métrico (4-47) con $R \neq 0$ son sólo independientes del tiempo t', más no del ángulo θ'

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial t'} = 0, \quad \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial \theta'} \neq 0, \tag{4-157}$$

luego, para un observador rotante arbitrario O', con radio de rotación $R \neq 0$, se garantiza la existencia de un vector de Killing $\mathsf{K}_{O'} \equiv \hat{e}_{t'}$ como de tiempo. Como para los observadores O y O', los vectores de Killing coinciden con los vectores unitarios, entonces los vectores de Killing como de tiempo asociados a los observadores O y O' se relacionan mediante (4-30)

$$\mathsf{K}_{O'} = \cosh(\alpha)\,\mathsf{K}^{(0)}_{O} + \sinh(\alpha)\,\hat{e}_\theta \tag{4-158}$$

A pesar de que $\tanh(\alpha) = R\omega$ es una cantidad constante, el vector unitario $\hat{e}_\theta$ evoluciona en el tiempo. Esto implica que el vector de Killing asociado a un observador rotante arbitrario con $R \neq 0$, visto por el observador en el origen, no es un vector estacionario [Cáceres Dominguez, 1998]. Además, a cada observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$ le corresponde un vector de Killing como de tiempo $\mathsf{K}_{O'}$ diferente, debido a que, en general, a cada observador rotante arbitrario le corresponde un vector unitario $\hat{e}_\theta$ y un parámetro α diferentes. Lo contrario ocurre en un sistema inercial Σ, donde los vectores de Killing asociados a todos los observadores de Σ coinciden, debido a la posibilidad de sincronizar globalmente todos los relojes de un sistema inercial.

Por lo tanto, la estructura del espacio-tiempo asociado al observador rotante arbitrario con $R \neq 0$ es muy diferente a la del espacio-tiempo asociado al observador "rotante" en el origen.

4.5.9. Conos de luz

Todas las geodésicas nulas $x^\mu(\lambda)$ que pasan a través del punto P deben satisfacer la relación [Kajari et al., 2009]

$$g_{\mu\nu}(p^\sigma)\, u^\mu u^\nu = 0 \tag{4-159}$$

donde u^μ son las componentes del 4-vector tangente $\mathbb{U} = (u^\mu)$ a la geodésica nula $x^\mu(\lambda)$. En particular, en términos de las coordenadas (t'_0, r'_0, θ'_0), asociadas al observador "rotante" en el origen, las geodésicas nulas $x^\mu(\lambda)$ que pasan a través del punto $P = (t'_0, r'_0, \theta'_0)$, deben satisfacer la relación

$$\left(1 - r'^2_0\omega^2/c^2\right) c^2\dot{t}'^2_0 - \dot{r}'^2_0 - r'^2_0\dot{\theta}'^2_0 - 2r'^2_0\omega\dot{t}'_0\dot{\theta}'_0 = 0 \tag{4-160}$$

donde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{d\dot{x}^\mu}{d\lambda} =: u^\mu$, y λ un parámetro afín de la geodésica nula. Vamos a omitir las primas y los subíndices cero en t'_0 y r'_0, ya que estas son idénticas a las correspondientes t y r para el observador inercial.

4.5.9.1. Cono de luz asociado al observador "rotante" O'_0 en el origen

En este caso, el punto P en cuestión está ubicado en el origen, donde se encuentra O'_0, luego, la condición para las geodésicas nulas (4-160) se reduce a

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{r}^2 = 0 \tag{4-161}$$

Luego,

$$c\dot{t}_\pm = \pm\dot{r} \tag{4-162}$$

El signo $(+)$ es para los fotones salientes, mientras que el signo $(-)$ es para los fotones entrantes. Como $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\dot{r}$, tenemos entonces que

$$\left(\frac{cdt}{dr}\right)_\pm = \pm 1 \tag{4-163}$$

de donde, obtenemos el clásico cono de luz Minkowskiano asociado al observador "rotante" en el origen (Véase figura **4-14**). Este resultado es de esperar, debido a que éste observador coincide con el observador inercial O.

4.5.9.2. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$, referido al observador "rotante" en el origen

En este caso, el punto P está ubicado en el origen de coordenadas del observador rotante O', entonces, desde el observador en el origen O'_0, éste debe tener coordenadas $P = (t, R, \theta'_0)$. Resolviendo para $\dot{t}$ en la ecuación (4-160), tenemos que

$$\dot{t}_\pm = \frac{\omega R^2\dot{\theta}'_0 \pm c\sqrt{\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right)\dot{r}^2 + R^2\dot{\theta}'^2_0}}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{4-164}$$

Por motivo de simplificar los cálculos y para mostrar las propiedades fundamentales de los conos de luz asociados a O', referidos al observador O'_0 en el origen, vamos a considerar los siguientes casos particulares:

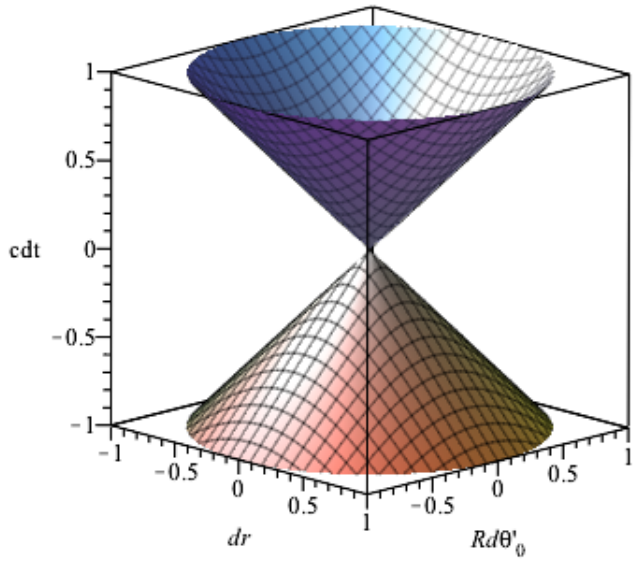

Figura 4-14.: Cono de luz asociado al "rotante" en el origen.

1. Geodésicas nulas en dirección radial $\left(\dot{\theta'}_0 = 0\right)$: La ecuación (4-164) se reduce a

$$c\dot{t}_{\pm} = \pm\frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}} \tag{4-165}$$

El signo $(+)$ es para los fotones salientes, mientras que el signo $(-)$ es para los fotones entrantes. Como $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\dot{r}$, tenemos entonces que

$$\left(\frac{cdt}{dr}\right)_{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}} \tag{4-166}$$

Esta relación representa cortes en dirección radial de los conos de luz de O', referidos al observador "rotante" en el origen.

2. Geodésicas nulas en dirección tangencial $(\dot{r} = 0)$: La ecuación (4-164) se reduce a

$$c\dot{t}_{\pm} = \frac{R\dot{\theta}'_0\left(\frac{\omega R}{c} \pm 1\right)}{1 - R^2\omega^2/c^2} \tag{4-167}$$

El signo $(+)$ es para los fotones en la dirección de rotación de K, mientras que el signo $(-)$ es para los fotones en la dirección opuesta.

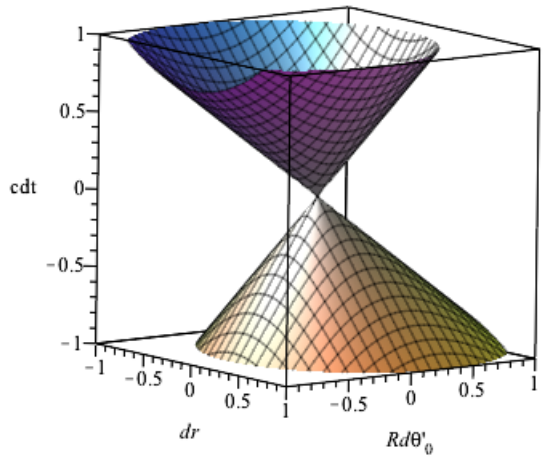

Figura 4-15.:

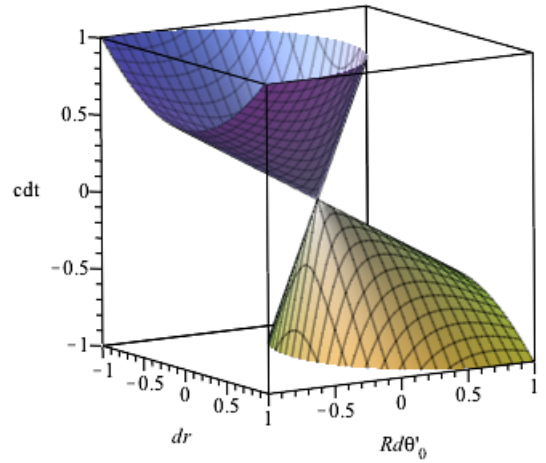

Figura 4-16.: Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$, referido al observador "rotante" en el origen, calculado mediante la ecuación (4-164). La figura **4-15** con $R\omega/c = 0{,}3$ y la figura **4-16** con $R\omega/c = 0{,}8$.

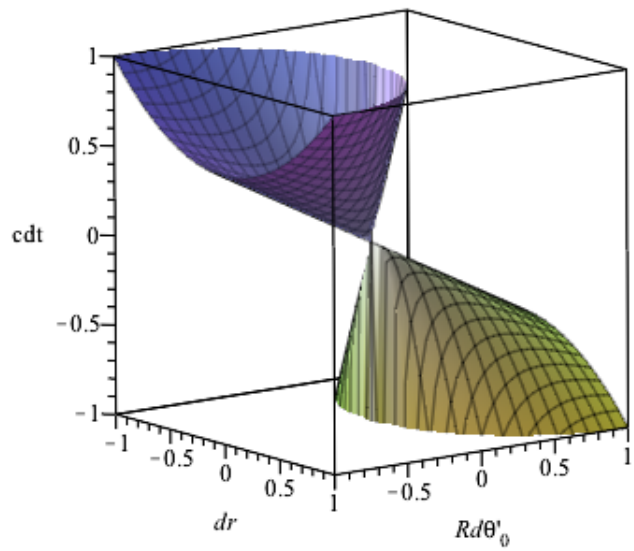

Figura 4-17.: Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con $R \neq 0$ y $R\omega/c = 0{,}999$, referido al observador "rotante" en el origen, calculado mediante la ecuación (4-164).

Como $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{d\theta'_0}\frac{d\theta'_0}{d\lambda} = \frac{dt}{d\theta'_0}\dot{\theta}'_0$, tenemos entonces que

$$\left(\frac{cdt}{Rd\theta'_0}\right)_{\pm} = \frac{\frac{\omega R}{c} \pm 1}{1 - R^2\omega^2/c^2} \tag{4-168}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{cdt}{Rd\theta'_0}\right)_{+} &= \frac{1}{1 - R\omega/c} \\ \left(\frac{cdt}{Rd\theta'_0}\right)_{-} &= -\frac{1}{1 + R\omega/c} \end{aligned} \tag{4-169}$$

Esta relación representa cortes en dirección tangencial de los conos de luz de O', referidos al observador "rotante" en el origen.

Vemos entonces, que, referidos a O'_0, los cortes en dirección radial de los conos de luz asociados a O' se achatan, mientras que los cortes en dirección tangencial se inclinan en la dirección opuesta a la dirección de rotación de K.

Los conos de luz completos se ilustran en las figuras **4-15**, **4-16**, **4-17**.

4.5.9.3. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O' con radio de rotación $R \neq 0$

En términos de las coordenadas (t', r', θ'), asociadas a un observador rotante arbitrario con $R \neq 0$, las geodésicas nulas $x^{\mu}(\lambda)$ que pasan a través del punto $P = (t', r', \theta')$, deben satisfacer la relación

$$\left[\frac{\left(1 - R^2\omega^2 - R\omega^2 r' \cos(\theta')\right)^2 - r'^2\omega^2}{\left(1 - R^2\omega^2\right)^2}\right]\dot{t}'^2 - \dot{r}'^2 - r'^2\dot{\theta}'^2 - \frac{2r'^2\omega}{1 - R^2\omega^2}\dot{t}'\dot{\theta}' = 0 \tag{4-170}$$

En este caso, el punto P está ubicado en el origen de coordenadas del observador rotante O', luego esta relación se reduce a

$$\dot{t}'^2 - \dot{r}'^2 = 0 \tag{4-171}$$

lo que nos conduce nuevamente al clásico cono de luz Minkowskiano.

4.5.9.4. Cono de luz asociado a un observador rotante arbitrario O'', referido a un observador rotante O' con $R \neq 0$

En este caso, el evento P está ubicado en el origen de coordenadas del observador rotante O'', entonces, desde el observador rotante O', éste debe tener coordenadas $P = (t', r', \theta')$. Resolviendo para $\dot{t}'$ en la ecuación (4-170), tenemos que

$$\dot{t}' = \frac{-g'_{02}\dot{\theta}' \pm \sqrt{\left(g'^2_{02} + g'_{00}r'^2\right)\dot{\theta}'^2 + g'_{00}\dot{r}'^2}}{g'_{00}} \tag{4-172}$$

donde $g'_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico asociado al observador rotante O'. En particular, para fotones en dirección radial se tiene

$$\dot{t}' = \pm\frac{\dot{r}'}{\sqrt{g'_{00}}} \tag{4-173}$$

El signo $(+)$ es para los fotones salientes, mientras que el signo $(-)$ es para los fotones entrantes. Como $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dt}{dr}\dot{r}$, tenemos entonces que

$$\left(\frac{dt'}{dr'}\right)_{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{g'_{00}}} \tag{4-174}$$

Esta relación representa cortes en dirección radial de los conos de luz de O'', referidos al observador rotante O'.

Y para los fotones el dirección tangencial se tiene

$$\dot{t}' = \frac{\dot{\theta}'\left(-g'_{02} \pm \sqrt{g'^2_{02} + g'_{00}r'^2}\right)}{g'_{00}} \tag{4-175}$$

Como $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{d\theta'_0}\frac{d\theta'_0}{d\lambda} = \frac{dt}{d\theta'_0}\dot{\theta}'_0$, tenemos entonces que

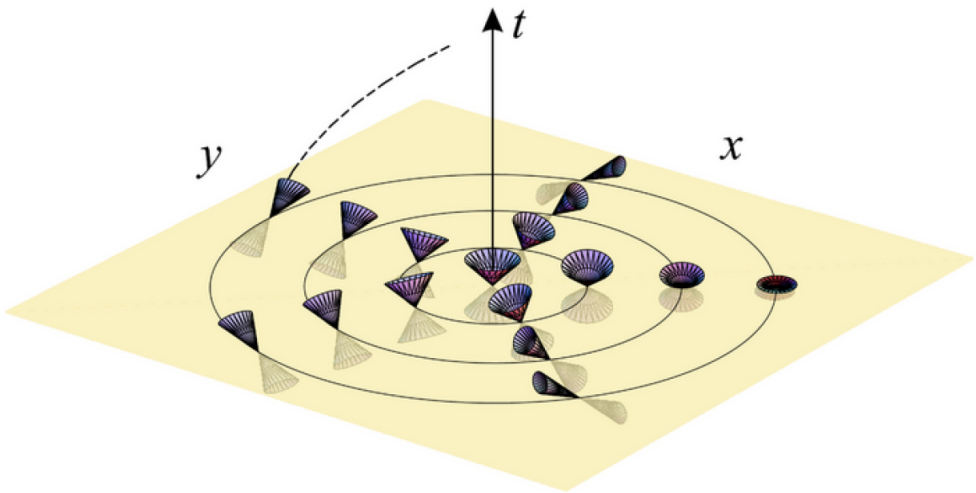

Figura 4-18.: Diagrama de conos de luz asociados a observadores rotantes arbitrarios, referidos al observador rotante en el origen [Kajari et al., 2009].

$$\left(\frac{dt'}{d\theta'}\right)_{\pm} = \frac{-g'_{02} \pm \sqrt{g'^2_{02} + g'_{00} r'^2}}{g'_{00}} \tag{4-176}$$

Los anteriores resultados nos muestran que el cono de luz asociado a un observador rotante O'' difiere, referido a otro observador rotante O'. Entonces, la estructura causal del espacio-tiempo asociado a un observador rotante es un concepto relativo.

4.6. Cinemática sobre el sistema rotante

4.6.1. El movimiento de un móvil a lo largo de un elemento de circunferencia sobre el sistema rotante K, con centro en el eje de rotación

Se estudiará el movimiento de móviles a lo largo de arcos circulares como una forma simplificada para estudiar las propiedades fundamentales del movimiento con respecto al sistema rotante.

4.6.1.1. Movimiento del móvil relativo al sistema inercial Σ

Sea AB un arco infinitesimal de circunferencia de radio coordenado R sobre K, y dl su longitud en Σ. En el tiempo $t = t' = 0$, el móvil se encuentra en A. Cuando éste llega a B, después de un tiempo dt, K ha rotado un ángulo

$$d\alpha = \omega dt \tag{4-177}$$

Si el cuerpo se mueve a lo largo del arco AB en la misma dirección de rotación de K (camino positivo), entonces éste se mueve en Σ a lo largo del arco infinitesimal $A'B$ (Véase figura **4-19**),

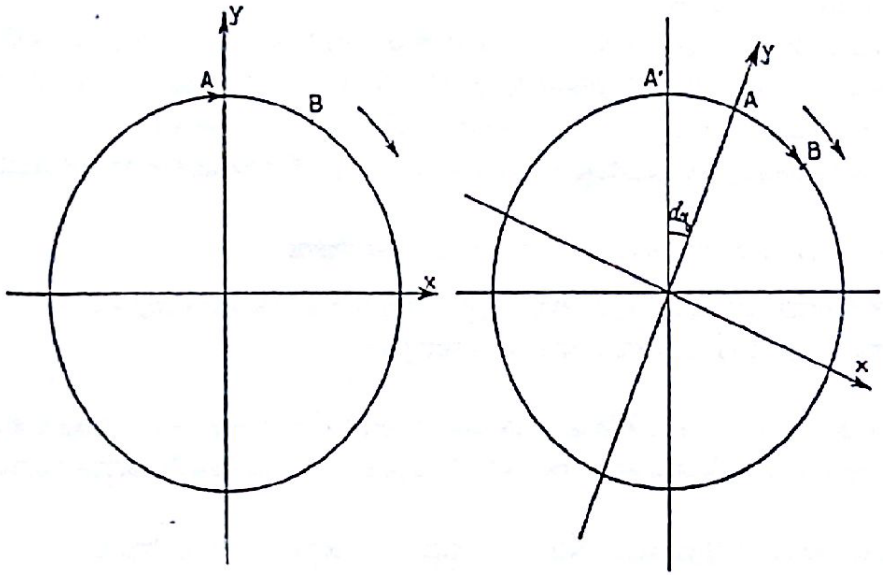

Figura 4-19.: [Arzeliès, 1966].

$$A'B = dL = Rd\alpha + dl = R\omega dt + dl \tag{4-178}$$

Si se denota la velocidad física del móvil en Σ como V, se tiene que

$$dL = Vdt = R\omega dt + dl \tag{4-179}$$

Dividiendo esta ecuación entre dt, se tiene

$$V = R\omega + \frac{dl}{dt}, \quad dt = \frac{dl}{V - R\omega} \tag{4-180}$$

Cuando el cuerpo se mueve en la dirección opuesta a la rotación de K (camino negativo) (Figura **4-20**), se encuentra

$$V^- = \frac{dl}{dt^-} - R\omega, \quad dt^- = \frac{dl}{V^- + R\omega} \tag{4-181}$$

4.6.1.2. Movimiento del móvil descrito por el observador "rotante" en el origen

Como el observador "rotante" O'_0 en el origen es simplemente el mismo observador inercial O en Σ, entonces, sus mediciones espaciales y temporales se pueden escribir en términos de sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) como

$$dl'_0 = dl, \quad dt'_0 = dt, \quad v'_0 = dl'_0/dt'_0 = dl/dt \tag{4-182}$$

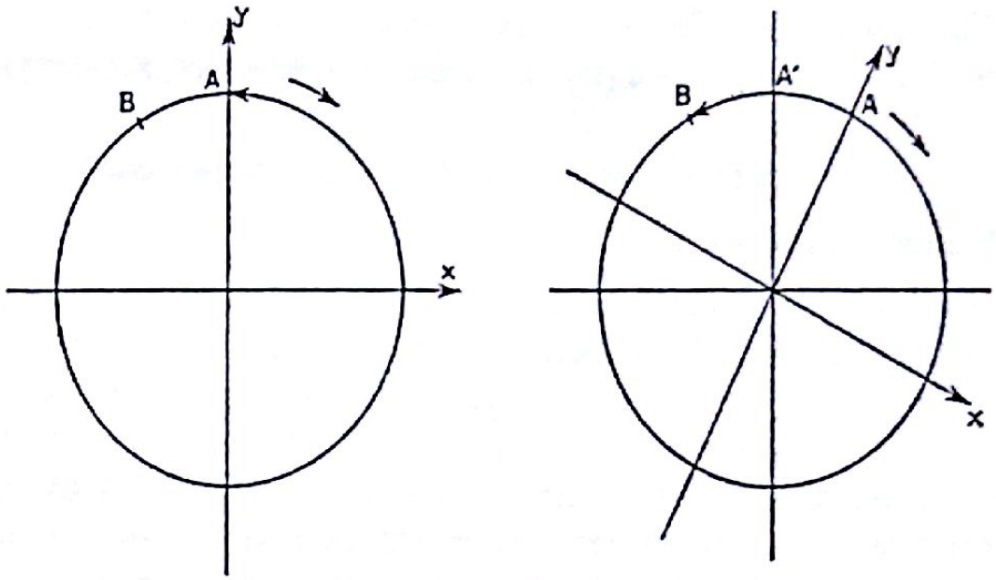

Figura 4-20.: [Arzeliès, 1966].

La velocidad del móvil V, medida por O con sus coordenadas polares estándar (t, r, θ), está relacionada con la respectiva velocidad v'_0, medida por O con sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0), mediante

$$v'_0 = V - R\omega, \quad v'^{-}_0 = V^- + R\omega, \tag{4-183}$$

de acuerdo con la dirección de movimiento del cuerpo. Notemos que las velocidades v'_0 y v'^{-}_0 no coinciden con sus respectivas velocidades físicas V y V^-. En éste caso, v'_0 y v'^{-}_0 corresponden a velocidades coordenadas.

4.6.1.3. Movimiento del móvil descrito por un observador rotante con radio coordenado R

Un observador rotante O', ubicado a un radio coordenado R del origen, deberá usar sus magnitudes físicas para describir el movimiento del móvil, ésto es, lo que O' debe medir es la velocidad física V' del móvil, y como dicha velocidad física es sólo de carácter local, entonces V' debe ser medida por O' en el momento en el que el móvil esté en una vecindad lo suficientemente pequeña $V_{r'}(O')$ a su alrededor, tal que su elemento de línea espacio-temporal ds^2 sea *localmente* Lorentziano.
La velocidad física del móvil es como se definió en la Definición XXIV

$$V' = \frac{dl^*}{dt^*} \tag{4-184}$$

donde dl^* y dt^* son la longitud física y el tiempo físico, respectivamente, dados en (4-93) y (4-95)

$$dl^* = \frac{dl}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2/c^2}} \tag{4-185}$$

$$dt^* = \left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[dt - \frac{\omega R^2 d\theta'_0}{c^2 - \omega^2 R^2}\right] \tag{4-186}$$

En este caso, $d\theta'_0$ es el ángulo barrido sobre K por el radio vector, por tanto,

$$d\theta'_0 = (dl^*/R)\sqrt{1-\omega^2R^2/c^2} \tag{4-187}$$

$$dt^* = \sqrt{1-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}\left\{dt - \frac{\omega R dl^*}{c\sqrt{c^2-\omega^2R^2}}\right\} \tag{4-188}$$

La velocidad física está dada por

$$\frac{1}{V'} = \frac{dt^*}{dl^*} = \sqrt{1-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}\left\{\frac{dt}{dl}\sqrt{1-\frac{\omega^2R^2}{c^2}} - \frac{\omega R}{c\sqrt{c^2-\omega^2R^2}}\right\} \tag{4-189}$$

Sustituyendo el valor de $\frac{dl}{dt} = v'_0 = V - R\omega$ que aparece en la ecuación (4-182) en esta última ecuación, se obtiene que

$$V' = \frac{V-R\omega}{1-R\omega V/c^2}, \qquad \text{para un camino positivo} \tag{4-190}$$

$$V'^- = \frac{V^- + R\omega}{1+R\omega V^-/c^2}, \qquad \text{para un camino negativo} \tag{4-191}$$

Aquí, obtenemos la misma forma del teorema de adición de velocidades de la Relatividad Especial. Nótese nuevamente que, por el carácter local de la velocidad física (V' y V'^-), estas relaciones sólo son válidas localmente.

4.6.2. Movimiento de dos móviles que dan una vuelta completa en sentidos opuestos con la misma velocidad V' con respecto al sistema rotante

Esta afirmación tiene poco significado, hasta que se especifica que tipo de velocidad es (velocidad coordenada o velocidad física). Es decir, la velocidad coordenada, por ejemplo, de dos móviles pueden ser las mismas, pero con distinta velocidad física. Entonces, vamos a considerar los siguientes dos casos:

4.6.2.1. Los dos móviles tienen la misma velocidad coordenada v'_0

Las duraciones de los recorridos de los dos móviles son la misma, respecto al tiempo central t'_0:

$$t'_0 = \frac{2\pi R}{V-R\omega} = \frac{2\pi R}{v'_0}, \quad t'^-_0 = \frac{2\pi R}{V^- + R\omega} = \frac{2\pi R}{v'_0} \tag{4-192}$$

Los dos móviles que salen de A, se encuentran primero de nuevo en el punto de la circunferencia que es diametralmente opuesto, luego se vuelven a encontrar en A y así sucesivamente. Entonces, los móviles se juntan en A simultáneamente, según el observador "rotante" en el origen. Debido al *Postulado de Simultaneidad*, los móviles también se juntan simultáneamente en A, según un observador fijo en A sobre el sistema rotante. Notemos que la velocidad física V, medida por el observador no-rotante O es distinta para los caminos positivos y negativos:

$$V = v'_0 + R\omega \tag{4-193}$$

$$V^- = v'_0 - R\omega \tag{4-194}$$

Y la velocidad física V', medida por un observador rotante O' ubicado a un radio coordenado R, por el teorema de adición de velocidades (4-190) y (4-191), resulta que

$$V' = \frac{v'_0}{1 - R\omega v'_0/c^2 - R^2\omega^2/c^2}, \qquad \text{para el camino positivo} \tag{4-195}$$

$$V'^{-} = \frac{v'_0}{1 - R\omega v'_0/c^2 + R^2\omega^2/c^2}, \qquad \text{para el camino negativo} \tag{4-196}$$

Nótese que, expandiendo a primer orden en $R\omega << c$, se tiene que las velocidades físicas medidas por O' para el camino positivo y el camino negativo son aproximadamente iguales ($V' \approx V'^{-}$).

4.6.2.2. Los dos móviles tienen la misma velocidad física (local) V'

Debido al carácter local de la velocidad física, es más apropiado utilizar en este caso la velocidad coordenada para estudiar la cinemática de los móviles a lo largo de la circunferencia de radio R. A partir del teorema de adición de velocidades (4-190) y (4-191), despejamos V y V^{-}, para obtener

$$V = \frac{V' + R\omega}{1 + R\omega V'/c^2}, \qquad \text{para el camino positivo} \tag{4-197}$$

$$V^{-} = \frac{V' - R\omega}{1 - R\omega V'/c^2}, \qquad \text{para el camino negativo} \tag{4-198}$$

Teniendo en cuenta estas ecuaciones, reemplazando en la ecuación (4-183), obtenemos que las velocidades coordenadas de los dos móviles son diferentes:

$$v'_0 = \frac{V'\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right)}{1 + R\omega V'/c^2}, \qquad \text{para el camino positivo} \tag{4-199}$$

$$v'^{-}_0 = \frac{V'\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right)}{1 - R\omega V'/c^2}, \qquad \text{para el camino negativo} \tag{4-200}$$

Entonces, las duraciones de los recorridos de los dos móviles son diferentes:

$$t'_0 = \frac{2\pi R}{v'_0} = \frac{2\pi R}{V'}\frac{1 + R\omega V'/c^2}{(1 - R^2\omega^2/c^2)}, \qquad \text{para el camino positivo} \tag{4-201}$$

$$t'^{-}_0 = \frac{2\pi R}{v'^{-}_0} = \frac{2\pi R}{V'}\frac{1 - R\omega V'/c^2}{(1 - R^2\omega^2/c^2)}, \qquad \text{para el camino negativo} \tag{4-202}$$

Y obtenemos que la diferencia en los tiempos de llegada en A, según el observador "rotante" en el origen resulta ser:

$$\boxed{\Delta t = t - t^{-} = t'_0 - t'^{-}_0 = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2 - R^2\omega^2} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2}}, \tag{4-203}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área encerrada por el círculo de radio R. Entonces, para este observador en el origen, los dos móviles no vuelven a pasar simultáneamente por A. Debido al *Postulado de Simultaneidad*, los dos móviles

tampoco pasan simultáneamente por A, según un observador fijo en A. En efecto, un reloj local fijo en A debería marcar una diferencia de tiempos de llegada dada por

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}} \tag{4-204}$$

Éste es el *efecto Sagnac*, el cual discutiremos más adelante, en la sección 6.2, y es independiente de la velocidad física V' de los dos móviles sobre el sistema rotante [Ruggiero and Tartaglia, 2015].

Como los móviles no se encuentran simultáneamente en A, ni tampoco lo hacen en sus puntos diametralmente opuestos a A, entonces sus puntos de encuentro precesan, respecto al sistema rotante, en sentido opuesto a la rotación de K.

4.6.3. Movimiento de dos móviles que dan una vuelta completa en sentidos opuestos con la misma velocidad V con respecto al sistema inercial Σ

Vamos a hacer una discusión respecto a los dos sistemas de referencia Σ y K:

4.6.3.1. Los dos móviles dan una vuelta completa con respecto al sistema inercial Σ

Debido a que los dos móviles viajan con la misma velocidad física V con respecto al sistema inercial Σ, entonces, los tiempos de llegada al completar una vuelta completa van a ser los mismos, y por tanto, se encuentran simultáneamente en el punto A'.

4.6.3.2. Los dos móviles dan una vuelta completa con respecto al sistema rotante K

Utilizando la relación (4-183), la velocidad coordenada para los caminos positivos y negativos son respectivamente

$$v'_0 = V - R\omega \tag{4-205}$$

$$v'^{-}_0 = V + R\omega \tag{4-206}$$

Los tiempos centrales de llegada en A para los caminos positivos y negativos son respectivamente

$$t'_0 = \frac{2\pi R}{|v'_0|} = \frac{2\pi R}{|V - R\omega|} \tag{4-207}$$

$$t'^{-}_0 = \frac{2\pi R}{v'^{-}_0} = \frac{2\pi R}{V + R\omega} \tag{4-208}$$

Y tenemos una diferencia de tiempos de llegada en A

$$\Delta t = \Delta t'_0 = \frac{4\pi RV}{R^2\omega^2 - V^2}, \qquad \text{para } 0 \leq V < R\omega \tag{4-209}$$

$$\Delta t = \Delta t'_0 = \frac{4\pi R^2\omega}{V^2 - R^2\omega^2}, \qquad \text{para } R\omega < V \leq c \tag{4-210}$$

para los relojes del observador "rotante" en el origen. Mientras que para un reloj local fijo en A, la diferencia de tiempos de llegada está dada por

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2} = \frac{4\pi RV}{R^2\omega^2 - V^2}\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2}, \qquad \text{para } 0 \leq V < R\omega \tag{4-211}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2} = \frac{4\pi R^2\omega}{V^2 - R^2\omega^2}\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2}, \qquad \text{para } R\omega < V \leq c \tag{4-212}$$

Notemos que en este caso, la diferencia de tiempos de llegada es dependiente de la velocidad física V de los móviles sobre Σ.

4.6.4. El movimiento de fotones en el vacío

Suponga que una serie de espejos envía luz a lo largo de una trayectorial poligonal, la cual en un limite se convierte en un círculo. La velocidad física de la luz es siempre $V = c$ en Σ. Pero en K, la velocidad física de la luz $V' = c$ sólo es válida localmente. En este caso, se obtiene que $v'_0 = c - R\omega$ y $v'^{-}_0 = c + R\omega$, son las mismas velocidades coordenadas de la luz (4-112), calculadas en direcciones opuestas por el observador "rotante" en el origen, con sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0).
Si dos fotones emitidos en A en sentidos opuestos a lo largo de una circunferencia de radio R, después de una vuelta alrededor ésta, los dos fotones son detectados por A con una diferencia de tiempo dada por (4-204)

$$\Delta t' = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2}}, \tag{4-213}$$

y desde Σ, los dos fotones llegan a A con una diferencia de tiempo dada por (4-203)

$$\Delta t = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{4-214}$$

Pero desde Σ, $V = c$, y las diferencias de tiempos de llegada en A (4-212) y (4-210) dan los mismos resultados anteriores:

$$\Delta t' = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2}} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2\sqrt{1-R^2\omega^2/c^2}} \tag{4-215}$$

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2 - R^2\omega^2} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2}, \tag{4-216}$$

para el caso de dos fotones moviéndose con velocidad física $V' = c$, relativa a K.

Regresamos entonces al *efecto Sagnac* para el caso de fotones. Una característica interesante de las diferencias de tiempos de llegada (4-203) y (4-204) dadas en el caso de la subsección 4.6.2.2 (en la cual se consideran dos móviles con la misma velocidad física V' relativa a K) es que son independientes de la velocidad física con la que viajan los móviles, esto es, se obtienen la misma diferencia en los tiempos de llegada tanto para partículasn como para fotones.

4.6.5. Transformaciones de Lorentz locales entre el observador inercial O y un observador rotante arbitrario O'

Es de esperar que el tiempo físico t^* y la longitud física l^* asociados a un observador rotante arbitrario O' tengan una distribución idéntica a la de una transformación de Lorentz con las respectivas variables del

observador inercial O, ya que t^* y l^* hacen que el elemento de línea espacio-temporal ds^2 para un observador rotante arbitrario sea localmente Lorentziano. Se procederá entonces, a demostrar esta afirmación.
En efecto, resolviendo para dt'_0 en la definición de tiempo natural (4-95), tenemos

$$dt = \frac{dt^* + vdl^*/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-217}$$

con

$$v = R\omega, \quad dl^* = \frac{Rd\theta'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-218}$$

donde $v = R\omega$ es la velocidad tangencial de un observador rotante O' relativo a el observador inercial O. La longitud de arco también tiene una distribución idéntica a una transformación de Lorentz. En efecto, consideremos nuevamente el caso de un móvil que se mueve a lo largo de una circunferencia con radio R en la misma dirección de rotación del sistema rotante K. La longitud del arco infinitesimal $A'B$, recorrido por el móvil, respecto al observador inercial O está dada por (4-178)

$$dL = dl + vdt \tag{4-219}$$

Haciendo el cambio de variable de la ecuación (4-217) en la última ecuación, tenemos

$$dL = \frac{dl^* + vdt^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-220}$$

Despejando dl en la ecuación (4-219), y reemplazando este resultado en la definición de longitud natural dl^*, tenemos la siguiente transformación entre las longitudes de arco

$$dl^* = \frac{dL - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-221}$$

Por otro lado, despejando dt^* de la ecuación (4-217), obtenemos

$$dt^* = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt - vdl^*/c^2, \tag{4-222}$$

y sustituyendo en ésta la ecuación (4-221), obtenemos la siguiente transformación entre los tiempos central y natural

$$dt^* = \frac{dt - vdL/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-223}$$

Resumiendo los anteriores resultados, se obtiene la siguiente transformación de Lorentz entre el observador no-rotante O y un observador rotante arbitrario O'

$$dt^* = \frac{dt - vdL/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-224}$$

$$dl^* = \frac{dL - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-225}$$

y la transformación de Lorentz inversa resulta

$$dt = \frac{dt^* + vdl^*/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-226}$$

$$dL = \frac{dl^* + vdt^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-227}$$

Para un camino negativo, tenemos

$$dt^{*-} = \frac{dt^- + vdL^-/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-228}$$

$$dl^{*-} = \frac{dL^- + vdt^-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-229}$$

y la respectiva transformación de Lorentz inversa resulta

$$dt^- = \frac{dt^{*-} - vdl^{*-}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-230}$$

$$dL^- = \frac{dl^{*-} - vdt^{*-}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4-231}$$

A partir de las transformaciones de Lorentz anteriores se puede llegar también al teorema de adición de velocidades (4-190) y (4-191). En efecto, si dividimos la ecuación (4-225) entre la (4-224), tenemos

$$V' = \frac{V - R\omega}{1 - R\omega V/c^2} \tag{4-232}$$

Dividiendo la ecuación (4-227) entre la (4-226), tenemos la transformación inversa

$$V = \frac{V' + R\omega}{1 + R\omega V'/c^2} \tag{4-233}$$

Dividiendo la ecuación (4-229) entre la (4-228), tenemos

$$V'^- = \frac{V^- + R\omega}{1 + R\omega V^-/c^2} \tag{4-234}$$

Dividiendo la ecuación (4-231) entre la (4-230), tenemos la transformación inversa

$$V^- = \frac{V'^- - R\omega}{1 - R\omega V'^-/c^2} \tag{4-235}$$

Vale la pena recordar que todas estas transformaciones sólo son válidas *localmente*.

Capítulo 5

Campo Gravitacional Estacionario Axialmente Simétrico

Este capítulo se introduce en el estudio de las propiedades de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico a partir de las propiedades espacio-temporales de un sistema de referencia uniformemente rotante, lo cual es posible, debido al PEE. En particular, la propiedad de desincronización de relojes que se estudió en el capítulo anterior, debe ser compartida por un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, lo cual conduce al efecto de corrimiento al rojo/azul gravitacional.

Se mostrará que existe una conexión de carácter local entre los efectos de los campos de fuerzas centrífugas y de Coriolis con los efectos de un campo gravitacional débil estacionario axialmente simétrico, mediante el cálculo de la ecuación de la geodésica para una partícula libre en dicho campo gravitacional, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975].

Finalmente, se determinará la aproximación de campo débil de la solución de Kerr, mediante una perturbación a primer orden a la métrica de Einstein-Ehrenfest, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975].

5.1. Criterios físicos

Comencemos con el elemento de línea del tensor métrico de Minkowski

$$ds^2_{(0)} = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \tag{5-1}$$

donde $X^\mu \equiv \left(X^0, X^1, X^2, X^3\right) := (ct, x, y, z)$ son las coordenadas espacio-temporales galileanas, asociadas a un observador inercial. En virtud del PRG, el elemento de línea de Minkowski (5-1) es invariante bajo una transformación de coordenadas general

$$x^\mu := f^\mu\left(X^\nu\right) \tag{5-2}$$

donde los $f^\mu\left(X^\nu\right)$ son funciones arbitrarias de las coordenadas.

Teniendo en cuenta esto, y que las componentes del tensor métrico se transforman mediante

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}, \tag{5-3}$$

la expresión (5-1) se transforma hacia el elemento de línea de un observador acelerado general en un espacio-tiempo seudoeuclídeo ([Logunov, 1998], p. 48):

$$ds^2_{(0)} = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5-4}$$

Por el PEE, (5-4) se puede interpretar *localmente* como el elemento de línea asociado a un observador en reposo sometido a un campo gravitacional.

Podemos concluir razonablemente que el elemento de línea para observadores en general, sometidos a un campo gravitacional debe ser de la forma general:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5-5}$$

donde $x^\mu \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ son coordenadas espacio-temporales generalizadas.

5.1.1. Sistema de referencia uniformemente rotante como un caso especial de campo gravitacional estacionario axialmente simétrico

En el caso de un sistema de referencia uniformemente rotante, *en el contexto newtoniano*, el campo de fuerzas "ficticias", centrífuga y de Coriolis, (debido a la rotación) es estacionario y axialmente simétrico, ya que estas fuerzas son independientes de t y ϕ, lo cual lo podemos ver mediante las ecuaciones de movimiento clásicas de una partícula en un sistema rotante (Véase [Goldstein, 1980], p.177). Estas propiedades se ven reflejadas en la métrica (4-53)

$$ds^2_{(0)} = \left(c^2 - r^2\omega^2\right) dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - 2r^2\omega dt d\theta, \tag{5-6}$$

asociada al observador "rotante" en el origen, pues la métrica es independiente de t y ϕ y permanece invariante simultáneamente bajo las transformaciones $t \longrightarrow -t$ y $\phi \longrightarrow -\phi$. Debido al PEE, podemos interpretar (5-6) *localmente* como el elemento de línea asociado a un observador en reposo en la presencia de un "campo" gravitacional estacionario axialmente simétrico. Entonces, podemos considerar (localmente) un sistema de referencia uniformemente rotante como un caso especial de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico ([Landau, 1980], p. 273).

Veamos que en general, el elemento de línea asociado a un observador en reposo en la presencia de un "campo" gravitacional estacionario axialmente simétrico arbitrario, debe tener una forma similar a (5-6):
En efecto, debido al PRG, se puede concluir que si para un observador acelerado general, su campo de fuerzas "ficticias" es estacionario y axialmente simétrico (en el contexto newtoniano), dichas propiedades deben estar reflejadas en la métrica asociada a dicho observador. Por medio del PEE, la métrica asociada a dicho observador puede interpretarse *localmente* como la métrica asociada a un observador en reposo bajo la influencia de un campo gravitacional axialmente simétrico arbitrario. Luego dicha métrica debe ser independiente del tiempo t y de una coordenada angular ϕ alrededor del eje de simetría, y además debe ser invariante bajo una transformación simultánea $t \longrightarrow -t$ y $\phi \longrightarrow -\phi$.
Aplicando estas condiciones a la métrica (5-5), tenemos que

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left(x^1, x^2\right) \tag{5-7}$$

donde x^1 y x^2 son las dos coordenadas espaciales restantes. Y la condición $t \longrightarrow -t$ y $\phi \longrightarrow -\phi$ requiere que

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0 \tag{5-8}$$

Entonces la métrica la podemos llevar a la forma [M. P. Hobson, 2006]

$$ds^2 = Adt^2 - B\left(d\phi - \Omega dt\right)^2 - Cdr^2 - Dd\theta^2, \tag{5-9}$$

donde A, B, C, D y Ω son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales r y θ. Estas funciones están relacionadas con los coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ por

$$g_{00} = A - B\Omega^2, \quad g_{03} = B\Omega, \quad g_{33} = -B, \quad g_{11} = -C, \quad g_{22} = -D \tag{5-10}$$

$$\Omega = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \tag{5-11}$$

Entonces, la métrica también se puede escribir en la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(A - B\Omega^2\right)dt^2 - Cdr^2 - Dd\theta^2 - Bd\phi^2 + 2B\Omega dtd\phi \tag{5-12}$$

Vemos entonces que (5-6) en coordenadas esféricas tiene la misma forma de (5-12) si hacemos

$$A = c^2, \quad B = r^2\sin^2\theta, \quad C = 1, \quad D = r^2, \quad \Omega = -\omega \tag{5-13}$$

donde $\omega =$ cte. es la velocidad angular del sistema de referencia uniformemente rotante.

Por tanto, es suficiente considerar el caso particular de un sistema de referencia uniformemente rotante para el estudio de las propiedades espacio-temporales de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico.

Para llevar a cabo este estudio, debemos interpretar la geometría abstracta (contenida en la forma funcional del elemento de línea (5-6) en términos de la física mecanicista [Adler, 1975]. Para interpretar la geometría 4-dimensional abstracta y conectar ésta con la realidad, identificando una medición física con la evaluación de un objeto geométrico, necesitamos primero retomar el concepto de tiempo propio.

5.1.2. Interpretación gravitacional de la definición de tiempo propio

Supongamos que el elemento de línea (en Relatividad Especial) entre dos eventos es

$$ds^2_{(0)} = c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \geq 0 \tag{5-14}$$

esto es, un intervalo como de tiempo. Teniendo en cuenta la definición de tiempo propio, si escogemos el sistema de coordenadas en el cual la separación espacial entre los eventos es cero (sistema propio), tenemos que

$$ds^2_{(0)} = c^2dt^2 \tag{5-15}$$

Escogiendo la raíz cuadrada positiva, el intervalo tiempo propio entre los eventos resulta

$$dt = \frac{ds_{(0)}}{c} \tag{5-16}$$

Debido al carácter invariante de $ds_{(0)}$ y c, el intervalo de tiempo propio corresponde al intervalo de tiempo que debería ser medido por un físico, para el cual ambos eventos ocurren en el mismo punto del marco 3-dimensional al cual se encuentra atado. Éste carácter invariante nos garantiza que podemos generalizar la definición de tiempo propio (como fue discutido en el Capítulo 2) a un observador arbitrario. Entonces, podemos hacer la siguiente definición: En Relatividad, un intervalo de *tiempo propio* infinitesimal entre dos eventos vecinos es definido como la generalización invariante de (5-16) a un sistema de coordenadas arbitrario en un espacio-tiempo seudoeuclídeo:

$$d\tau := \frac{ds_{(0)}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\gamma_{00}}dx^0 \tag{5-17}$$

donde $dx^\mu = 0$ para $\mu \neq 0$.

El PEE nos proporciona un carácter gravitacional a esta definición, la cual la podemos escribir en términos de las componentes métricas $g_{\mu\nu}$, que aparecen en (5-5), como:

$$d\tau := \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{5-18}$$

donde $dx^\mu = 0$ para $\mu \neq 0$. Esta definición es válida sólo para $ds^2 \geq 0$, ya que de otro modo $d\tau$ sería imaginario.

Para ilustrar esta definición de tiempo propio, investiguemos la relación entre el intervalo de tiempo propio $d\tau$ con el intervalo de tiempo coordenado dt para dos eventos que ocurren con las mismas coordenadas espaciales (r, θ, z) en el sistema rotante [Adler, 1975]. Por (5-6) obtenemos

$$ds^2 = \left(c^2 - r^2\omega^2\right) dt^2 \tag{5-19}$$

Entonces, por la definición de tiempo propio (5-18),

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \tag{5-20}$$

Esto puede ser interpretado como sigue: $d\tau$ es el intervalo de tiempo entre eventos, medido por un observador atado al sistema rotante. Mientras que dt es el intervalo de tiempo medido por un observador atado al sistema no-rotante y que usa el tiempo coordenado estándar t.
Lo cual, también puede interpretarse gravitacionalmente como sigue: $d\tau$ es el intervalo de tiempo entre eventos, medido por un observador en reposo sometido a un campo gravitacional estacionario con simetría axial. Mientras que dt es el intervalo de tiempo *coordenado*, medido por un observador en reposo en ausencia de campo gravitacional.

A continuación, vamos a investigar el significado gravitacional del término $r^2\omega^2/c^2$ de la ecuación (5-20). Para llevar a cabo esto, vamos a considerar la fuerza "ficticia" centrífuga sobre una partícula de prueba de masa m, fija sobre el sistema rotante

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c = m\frac{v^2}{r}\hat{r} = m\omega^2 r\hat{r} \tag{5-21}$$

donde $v = r\omega$. Como la fuerza centrífuga $\vec{F}_c$ es radial, entonces, es conservativa, luego $\vec{F}_c$ se puede escribir como el gradiente de un potencial escalar Φ_c. Entonces,

$$\vec{F}_c = m\omega^2 r\hat{r} = -m\vec{\nabla}\Phi_c \tag{5-22}$$

con

$$\Phi_c = -\omega^2 r^2/2$$

el *potencial centrífugo*. Por el PEE, podemos interpretar el campo de fuerzas centrífugas $\vec{F}_c$ *localmente* como un campo gravitacional newtoniano $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_g = -m\vec{\nabla}\Phi_g \tag{5-23}$$

con

$$\Phi_g = -GM/r$$

el *potencial gravitacional newtoniano*. Entonces, podemos igualar las ecuaciones (5-22) y (5-23) para obtener (salvo una constante, la cual podemos hacer nula) que

$$\Phi_g = \Phi_c = -\omega^2 r^2/2 = -GM/r \tag{5-24}$$

Lo que quiere decir que el término $r^2\omega^2/c^2$ lo podemos interpretar como un potencial gravitacional newtoniano.

Así, la ecuación (5-20) la podemos escribir en términos del potencial gravitacional newtoniano como:

$$d\tau = \left(1 + \frac{2\Phi_g}{c^2}\right)^{1/2} dt = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt \tag{5-25}$$

Como la definición de tiempo propio sólo es válida para $ds^2 \geq 0$, entonces, la ecuación (5-25) sólo es válida para $\frac{2GM}{c^2 r} \leq 1$, es decir, sólo cuando $r \geq 2GM/c^2$. La relación (5-25) nos quiere decir que la presencia de gravedad, influencia la tasa de avance de los relojes en reposo, comparados con los relojes en ausencia de gravedad. El observador que mide el tiempo dt, en este caso, se llama *observador asintótico*, debido a que sólo cuando $r \longrightarrow +\infty$, el potencial gravitacional newtoniano $\Phi_g \longrightarrow 0$, y por tanto, este observador en el infinito es el único que se encuentra en ausencia de gravedad.

5.1.3. Dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo-azul gravitacional

Debido a PEE, podemos intuir que si sobre sistemas de referencia rotantes se presenta el efecto de corrimiento al rojo-azul de los pulsos de luz, es de esperar que el mismo efecto tenga lugar para un pulso de luz en la presencia de un campo gravitacional. Entonces, podemos analizar este efecto de forma similar a como se hizo para el mismo efecto en sistemas rotantes (Véase sección 4.5.1) . Fue así como Einstein, utilizando su PEE, de forma muy directa, hizo la primera derivación del corrimiento al rojo considerando un sistema rotante con velocidad angular constante ω [Adler, 1975], tal como hemos venido trabajando. Vamos a comenzar, comparando los intervalos de tiempo propio entre eventos medidos por dos observadores O' y O'' en reposo relativo, sometidos a un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, cuyos radios coordenados

son r' y r'', respectivamente. Consideremos dos eventos E_1 y E_2 que ocurren en el mismo punto del espacio, según O', de modo que el intervalo de tiempo $d\tau'$ entre los dos eventos, medido por O' es un intervalo de tiempo propio. Entonces, los intervalos temporales dt y $\Delta\tau'$ entre los dos eventos, medidos por O (observador inercial en ausencia de campo gravitacional) y O' respectivamente, están relacionados mediante (5-25):

$$d\tau' = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r'}\right)^{1/2} dt \tag{5-26}$$

Por otro lado, los dos eventos también ocurren en el mismo punto del espacio según el observador O'', debido a que O' y O'' están en reposo relativo. Entonces, el intervalo de tiempo $d\tau''$ entre los dos eventos, según O'', también es un intervalo de tiempo propio. Entonces, por (5-25), tenemos que

$$d\tau'' = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r''}\right)^{1/2} dt \tag{5-27}$$

Comparando las ecuaciones (5-26) y (5-27), tenemos que

$$\frac{d\tau'}{d\tau''} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r'}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r''}}\right)^{1/2} \tag{5-28}$$

Esta ecuación compara los tiempos propios medidos por dos observadores O' y O'' en reposo relativo, sometidos a un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico. Esta relación nos lleva a describir el efecto de corrimiento al rojo-azul gravitacional:

Consideremos ahora una onda de luz emitida por una fuente puntual S, sometida a un campo gravitacional, con coordenadas espaciales (r_S, θ_S, ϕ_S) fijas, y ubiquemos un observador O_S cuyo origen de coordenadas se encuentre sobre la fuente puntual. Supongamos que dicha onda de luz es detectada por un receptor puntual D, sometido al mismo campo gravitacional, con coordenadas espaciales (r_D, θ_D, ϕ_D) fijas, y ubiquemos un observador O_D cuyo origen de coordenadas se encuentre sobre el receptor puntual.

La ecuación (5-28) implica que $\nu^{(D)}$, el número de pulsos detectados por D por unidad de tiempo propio relativo a O_D, está relacionado con $\nu^{(S)}$, el número de pulsos emitidos por S por unidad de tiempo propio relativo a O_S, mediante:

$$\frac{\nu^{(D)}}{\nu^{(S)}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_S}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_D}}\right)^{1/2} \tag{5-29}$$

Esta ecuación nos expresa el corrimiento al rojo-azul de una onda de luz en la presencia de un campo gravitacional. Nótese que si $0 < r_S < r_D$, entonces, $\nu^{(D)} < \nu^{(S)}$, luego el observador O_D detecta un corrimiento al rojo de la luz emitida por S, mientras que si $0 < r_D < r_S$, entonces, $\nu^{(D)} > \nu^{(S)}$, luego el observador O_D detecta un corrimiento al azul de la luz emitida por S. En el caso trivial $r_D = r_S$, se tiene $\nu^{(D)} = \nu^{(S)}$, y la frecuencia detectada por O_D coincide con la frecuencia emitida por S.

A partir de (5-29) podemos obtener que $\lambda^{(D)}$, la longitud de onda medida por O_D, está relacionada con $\lambda^{(S)}$, la longitud de onda medida por O_S, mediante:

$$\frac{\lambda^{(D)}}{\lambda^{(S)}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_D}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_S}}\right)^{1/2} \tag{5-30}$$

Consideremos el caso de un campo gravitacional débil, es decir, que su potencial gravitacional newtoniano sea tal que $|\Phi_g| = \frac{GM}{c^2 r} << 1$ a primer orden, esto es, que despreciamos potencias de orden 2 o superior en $|\Phi_g|$. Por ejemplo, el campo gravitacional en la superficie de un planeta como la Tierra puede considerarse como un campo gravitacional débil, ya que

$$\frac{GM_T}{c^2 R_T} \sim 10^{-10}$$

sobre la superficie de la Tierra, donde M_T y R_T son la masa y su radio medio, respectivamente. Entonces, podemos considerar el campo gravitacional en las cercanías de la superficie de la Tierra, *aproximadamente* como un campo gravitacional uniforme, es decir, que en las cercanías de la superficie terrestre, sus líneas de campo sean *aproximadamente* líneas rectas paralelas y verticales. Entonces, los vectores

$$\vec{a}_g = -\vec{\nabla}\Phi_g = -\frac{GM_T}{R_T^2}\hat{r} \tag{5-31}$$

que indican la dirección y la intensidad del campo gravitacional, tienen *aproximadamente* la misma dirección y magnitud cerca a la superficie terrestre. a_g (su magnitud) se le conoce, *en el contexto newtoniano*, como la "aceleración debida a la gravedad".

Así que imaginemos una torre de altura $z << R_T$ asentada sobre la superficie de la Tierra [Carroll, 1997]. Supongamos un observador O_D el cual está dentro de una caja en la cima de la torre (capaz de detectar el fotón emitido, pero incapaz de mirar hacia afuera de la caja). Entonces, un fotón con longitud de onda λ_0, emitido desde el suelo hacia el observador O_D en la caja debería estar corrido al rojo según (5-30):

$$\frac{\lambda^{(D)}}{\lambda_0} = \left(\frac{1 - \frac{2GM_T}{c^2(R_T+z)}}{1 - \frac{2GM}{c^2 R_T}}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{\Delta\Phi_g}{c^2} \tag{5-32}$$

o equivalentemente,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{\Delta\Phi_g}{c^2} \tag{5-33}$$

donde $\Delta\lambda := \lambda^{(D)} - \lambda_0$, y $\Delta\Phi_g$ se define como la *diferencia de potencial gravitacional newtoniano*:

$$\Delta\Phi_g := \Phi_g^{(D)} - \Phi_g^{(S)}, \tag{5-34}$$

donde, $\Phi_g^{(S)}$ y $\Phi_g^{(D)}$ son los potenciales gravitacionales newtonianos sobre la superficie terrestre y en la posición del observador O_D, respectivamente. Como a_g es aproximadamente constante en las cercanías de la superficie terrestre, de (5-34) y (5-33) obtenemos [Carroll, 1997]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{\Delta\Phi_g}{c^2} \approx \frac{a_g z}{c^2} \tag{5-35}$$

Y bajo esta aproximación, se presenta una disminución en la frecuencia en:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx -\frac{a_g z}{c^2} \tag{5-36}$$

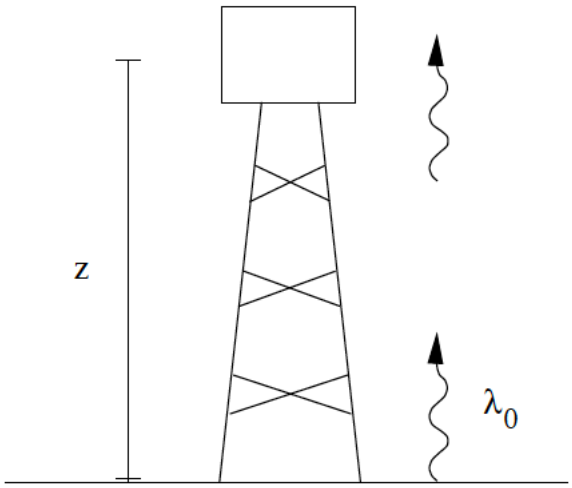

Figura 5-1.: Efecto de corrimiento al rojo en la presencia de un campo gravitacional uniforme [Carroll, 1997].

Es de notar que este efecto del corrimiento al rojo gravitacional es una consecuencia directa del PEE, no de los detalles de la Relatividad General. La primera verificación experimental fue llevada a cabo por Pound y Rebka en 1960. Ellos utilizaron el efecto Mössbauer para medir el cambio en la frecuencia de rayos-γ cuando ellos los enviaban desde el suelo hasta la cima de los Laboratorios Jefferson en Harvard [Carroll, 1997]. Hacer este tipo de medición es una tarea muy difícil para el corrimiento esperado sobre una distancia vertical, ya que si consideramos por ejemplo $z = 100\,\text{ft}$, dicho corrimiento esperado es de sólo del orden de 10^{-15} [Adler, 1975]. Afortunadamente, el descubrimiento del efecto Mössbauer en 1958 dio un método para producir y detectar rayos-γ de muy alta frecuencia, los cuales son monocromáticos en 1 parte en 10^{12} y hace una prueba terrestre factible [Adler, 1975]. Los rayos-γ emitidos a nivel del suelo sufrieron un corrimiento al rojo gravitacional en su viaje hacia el receptor en la cima y, como resultado, fueron menos absorbidos. Moviendo el emisor hacia arriba con una velocidad muy pequeña, se produjo un corrimiento Doppler compensatorio la cual restauró la absorción resonante. Una medición de la velocidad del emisor permitió un cálculo del cociente $\Delta\nu/\nu_0$. El resultado experimental obtenido es $0{,}997 \pm 0{,}008$ veces el corrimiento predicho de $4{,}92 \times 10^{-15}$. Este resultado representa una verificación de la exactitud de la ecuación de corrimiento al rojo (5-36) superior al 1 %.

5.1.4. La naturaleza geométrica del espacio-tiempo en la presencia de gravitación

El corrimiento al rojo gravitacional llevará a argumentar que el espacio-tiempo debería considerarse como curvo [Carroll, 1997]. Consideremos la configuración experimental que teníamos antes, ahora representada en el diagrama espacio-tiempo (véase la figura **5-2**). Una fuente lumínica en el suelo emite un rayo de luz con longitud de onda λ_0 desde una altura z_0, el cual va dirigido a la cima de la torre a una altura z_1. El tiempo entre el comienzo de emisión de cualquier longitud de onda simple de dicho rayo de luz y el final de emisión de la misma longitud de onda es $\Delta t_0 = \lambda_0/c$, y el mismo intervalo de tiempo para la absorción es $\Delta t_1 = \lambda_1/c$. Como supusimos que el campo gravitacional no varía con el tiempo, los caminos a través del espacio-tiempo, seguidos por los extremos delanteros y traseros de la onda simple deben ser congruentes (Estos son representados por algunas curvas genéricas, ya que todavía no se pretende saber que curvas sean). Por geometría simple (plana) debemos tener que los tiempos Δt_0 y Δt_1 deben ser los mismos. Pero por supuesto esto no

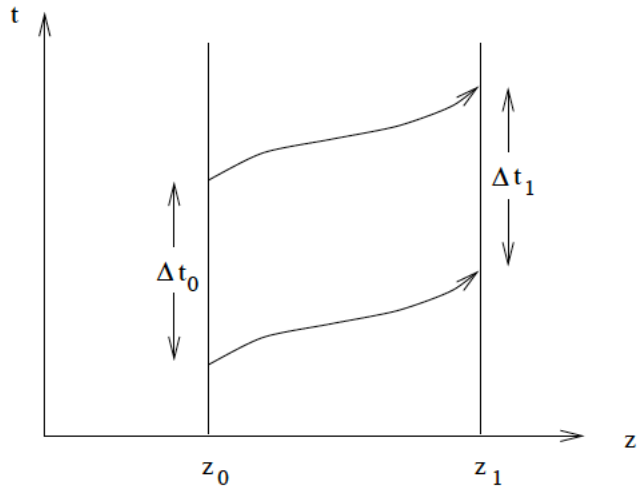

Figura 5-2.: Representación en el espacio-tiempo de las líneas de mundo de los extremos de una longitud de onda de la luz [Carroll, 1997].

es así, ya que el corrimiento al rojo gravitacional implica que $\Delta t_1 > \Delta t_0$. El problema está con la suposición de "geometría simple"; podemos tener una mejor comprensión de lo que ocurre, si se argumenta que el espacio-tiempo es curvo.

Todo lo anterior motiva a afirmar que el espacio-tiempo debe ser concebido como una variedad curva en la presencia de gravedad. En seguida vamos a ver una muy buena justificación a esta afirmación.

5.1.5. Gravedad como un fenómeno métrico

En la subsección 4.5.6,se encontró que usando la métrica (5-6) y la ecuación de la geodésica como ecuaciones de movimiento, se obtuvo una descripción razonable del movimiento de una partícula libre en una geometría espacial no euclidiana. A continuación se seguirá el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975] para mostrar que, por medio de una aproximación, el efecto de un "campo gravitacional" también puede ser descrito usando la ecuación geodésica como una ecuación de movimiento, y perturbando el tensor métrico para que difiera de "algún modo" de la métrica de Minkowski. Este procedimiento servirá como una justificación para conectar la "fuerza" física de la gravedad con la naturaleza no-minkowskiana del espacio-tiempo y para usar las ecuaciones de las geodésicas como ecuaciones de movimiento para partículas en un campo gravitacional.

Se mostrará que, sólo una muy pequeña perturbación de la métrica de Minkowski es la agente de los efectos gravitacionales. Entonces, se considerará un tensor métrico independiente del tiempo de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\Delta_{\mu\nu} \tag{5-37}$$

donde los $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico de Minkowski y los $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ representan perturbaciones muy pequeñas, independientes del tiempo, las cuales son debidas a la presencia de un cuerpo que produce gravedad, y que tienden a cero muy lejos del cuerpo. Las componentes $g_{\mu\nu}$ dadas por (5-37) conforman un tensor métrico *cuasi-Minkowskiano* [M. P. Hobson, 2006].

Para mostrar que los $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ son, en efecto, los agentes de las "fuerzas" gravitacionales, se calculan las ecuaciones geodésicas de movimiento en un espacio-tiempo con métrica dada por (5-37). Además, para hacer una

conexión cercana con la teoría Newtoniana, se va a suponer que la velocidad de la partícula a lo largo de la geodésica es mucho más pequeña que c, ésto es, que $\beta := v/c << 1$ a primer orden, es decir, que en la aproximación se conservarán sólo los términos a primer orden en ϵ y β, despreciando los términos de orden ϵ^2, β^2, $\epsilon\beta$ y superior.

Usando las coodenadas de la Relatividad Espacial y el tensor métrico cuasi-Minkowskiano (5-37), se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + \epsilon\Delta_{\mu\nu})\, dx^\mu dx^\nu \tag{5-38}$$

Dividiendo esta ecuación por $\left(dx^0\right)^2 = (cdt)^2$, se obtiene que

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - \beta^2 + \epsilon\Delta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}, \tag{5-39}$$

la cual, a primer orden en ϵ y β, se tiene

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 \approx 1 + \epsilon\Delta_{00} \tag{5-40}$$

A continuación se aplica la misma aproximación a las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{5-41}$$

donde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} := \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ son los símbolos de Christoffel de segundo tipo, definidos en el Apéndice A. Se va a considerar ahora el segundo término de esta ecuación. Como los $\eta_{\mu\nu}$ son constantes en el espacio-tiempo, es evidente que, a partir del tensor métrico (5-37), cada símbolos de Christoffel contiene un ϵ. Usando la expresión (5-40), se puede escribir

$$\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \approx \frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} \tag{5-42}$$

De esta expresión se obtienen los siguientes casos:

1. $\mu \neq 0$ y $\nu \neq 0$: (5-42) se puede escribir en términos de la velocidad como

   $$\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} = \beta^i\beta^j\frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} \tag{5-43}$$

   donde $\beta^i := \frac{dx^i}{dx^0} = \frac{dx^i}{cdt} = \frac{v^i}{c}$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces la expresión (5-43) es de orden β^2. En este caso, por nuestra aproximación se tiene que

   $$\Gamma^\alpha_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \sim \epsilon\beta^2 \approx 0 \qquad \text{para } i, j = 1, 2, 3,$$

   Y por tanto, estos términos los despreciamos bajo nuestra aproximación.

2. $\mu = 0$ o $\nu = 0$: (5-42) se puede escribir en términos de la velocidad como

$$\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} = \beta^i \frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} \qquad i = 1, 2, 3,$$

el cual es de orden β. Luego,

$$\Gamma^\alpha_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds} \sim \epsilon\beta \approx 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3$$

ya que esta expresión resulta ser de orden $\epsilon\beta$, y por tanto es despreciable bajo nuestra aproximación.

3. $\mu = 0$ y $\nu = 0$: (5-42) se reduce a

$$\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}} = \frac{1}{1+\epsilon\Delta_{00}}$$

Luego,

$$\Gamma^\alpha_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} \sim \epsilon$$

Por lo tanto, estos términos los conservamos bajo nuestra aproximación.

Entonces, el problema de calcular las ecuaciones geodésicas se reduce a calcular los símbolos de Christoffel Γ^α_{00}.
Luego, la ecuación geodésica a primer orden en ϵ y β queda

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0, \tag{5-44}$$

la cual en virtud de (5-40), se reduce a

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{00}c^2 = 0 \tag{5-45}$$

Como se supuso que los términos perturbativos $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ son independientes del tiempo, entonces en Γ^α_{00} sólo sobreviven las derivadas espaciales $g_{00,\delta} = (\epsilon\Delta_{00})_{,\delta}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{00} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\delta}g_{00,\delta} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\delta} - \epsilon\Delta^{\alpha\delta}\right)(\epsilon\Delta_{00})_{,\delta} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}(\epsilon\Delta_{00})_{,\delta} + \frac{1}{2}\epsilon\Delta^{\alpha\delta}(\epsilon\Delta_{00})_{,\delta} \\
&\approx -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}(\epsilon\Delta_{00})_{,\delta}
\end{aligned}$$

La última línea se tiene porque suponemos que las derivadas de $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ deben ser de orden ϵ. Luego, el término $\frac{1}{2}\epsilon\Delta^{\alpha\delta}(\epsilon\Delta_{00})_{,\delta}$ debe ser de orden ϵ^2.

1. Si $\alpha = 0$, se obtiene que $\Gamma^0_{00} = 0$.
2. Si $\alpha = k = 1, 2, 3$, tenemos que

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}\left(\epsilon\Delta_{00}\right)_{,k}$$

Entonces, la ecuación de la geodésica (5-45) se reduce a

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\left(\epsilon\Delta_{00}\right)_{,k} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{5-46}$$

$$\frac{d^2x^0}{dt^2} = 0 \tag{5-47}$$

De la última ecuación, se obtiene que $\frac{dx^0}{dt} = \text{cte.}$, de la cual cte. $= c$. Luego, esta ecuación no nos dice más que $dx^0 = cdt$. La ecuación importante para nosotros es (5-46), la cual podemos escribir en forma vectorial 3-dimensional como:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}\left(\epsilon\Delta_{00}\right) \tag{5-48}$$

Ésta es simplemente la ecuación de movimiento en un campo gravitacional clásico

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi_g, \tag{5-49}$$

si identificamos el potencial gravitacional newtoniano Φ_g como:

$$\Phi_g = \frac{c^2}{2}\epsilon\Delta_{00} \tag{5-50}$$

Recíprocamente, dado un potencial gravitacional newtoniano Φ_g, el movimiento de una partícula será a lo largo de una geodésica 4-dimensional si el término g_{00} del tensor métrico tiene la forma

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi_g}{c^2} \tag{5-51}$$

Las otras componentes no aparecen en la aproximación, a menos que se asuma que ellas sean independientes del tiempo y cuasi-minkowskianas.

De acuerdo con Alder, se puede concluir, a partir de lo anterior que: Si ignoramos los términos a segundo orden en ϵ y β (aproximación de campo débil y bajas velocidades), entonces, la ecuación geodésica (la cual es una relación puramente geométrica) es equivalente a la ecuación de movimiento newtoniana (la cual es una relación puramente mecánica), siempre y cuando la componente g_{00} del tensor métrico satisface la relación (5-51).

Ésta es más que una buena justificación para el uso de una métrica no-Minkowskiana para describir el "campo" gravitacional y para el uso de las ecuaciones geodésicas de movimiento en el espacio-tiempo resultante [Adler, 1975]

Por completez del argumento anterior, se introduce el siguiente calculo del tensor de Ricci para la aproximación de campo débil. Consideremos primero el tensor de curvatura (Véase Apéndice A)

$$R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta} := \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\ \beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\ \beta\gamma} \tag{5-52}$$

Los símbolos de Christoffel son sumas de las primeras derivadas de $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$, luego los productos $\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\ \beta\delta}$ resultan ser de orden 2 en potencias de $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$, y bajo nuestra aproximación, dichos productos resultan despreciables. Entonces, las componentes del tensor de curvatura se reducen a

$$R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta} \approx \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma,\delta} \tag{5-53}$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\ \mu\sigma\nu}$ resulta entonces

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\approx \Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\ \mu\sigma,\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[g^{\sigma\rho}\left(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right)\right]_{,\sigma} - \frac{1}{2}\left[g^{\sigma\rho}\left(g_{\rho\mu,\sigma} + g_{\sigma\rho,\mu} - g_{\mu\sigma,\rho}\right)\right]_{,\nu} \end{aligned} \tag{5-54}$$

Usando (5-37) y la aproximación de campo débil, tenemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\sigma\rho}\left(\left(\epsilon\Delta_{\rho\mu}\right)_{,\nu} + \left(\epsilon\Delta_{\nu\rho}\right)_{,\mu} - \left(\epsilon\Delta_{\mu\nu}\right)_{,\rho}\right)\right]_{,\sigma} - \frac{1}{2}\left[\eta^{\sigma\rho}\left(\left(\epsilon\Delta_{\rho\mu}\right)_{,\sigma} + \left(\epsilon\Delta_{\sigma\rho}\right)_{,\mu} - \left(\epsilon\Delta_{\mu\sigma}\right)_{,\rho}\right)\right]_{,\nu} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}\left[\left(\epsilon\Delta_{\nu\rho}\right)_{,\mu,\sigma} - \left(\epsilon\Delta_{\mu\nu}\right)_{,\rho,\sigma} - \left(\epsilon\Delta_{\sigma\rho}\right)_{,\mu,\nu} + \left(\epsilon\Delta_{\mu\sigma}\right)_{,\rho,\nu}\right] \end{aligned} \tag{5-55}$$

Consideremos ahora la componente R_{00}:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}\left[\left(\epsilon\Delta_{0\rho}\right)_{,0,\sigma} - \left(\epsilon\Delta_{00}\right)_{,\rho,\sigma} - \left(\epsilon\Delta_{\sigma\rho}\right)_{,0,0} + \left(\epsilon\Delta_{0\sigma}\right)_{,\rho,0}\right] \tag{5-56}$$

Como los términos perturbativos $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ los asumimos independientes del tiempo, las derivadas respecto a x^0 son cero, y R_{00} se reduce a

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}\eta^{ij}\left(\epsilon\Delta_{00}\right)_{,i,j} \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2\left(\epsilon\Delta_{00}\right) \end{aligned}$$

Por (5-50), tenemos [De la Torre G., 2008]

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi_g \tag{5-57}$$

Por otro lado, por la ecuación de campo de la gravitación newtoniana

$$\nabla^2\Phi_g = 4\pi G\rho, \tag{5-58}$$

la ecuación (5-57) queda

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi_g = \frac{4\pi G}{c^2}\rho \tag{5-59}$$

donde ρ es la densidad de masa del cuerpo que produce gravedad.

Este último resultado es una muy buena justificación a la afirmación en la subsección 5.1.4: *El espacio-tiempo debe ser pensado como una variedad curva en la presencia de gravedad.*

De los anteriores resultados se puede afirmar, alternativamente, que: *La gravitación es la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.*

5.2. Una conexión entre los efectos no inerciales sobre sistemas rotantes con la gravitación

En la subsección 5.1.2 hicimos una conexión local entre los efectos del campo de fuerzas "ficticias" centrífugas y el campo gravitacional newtoniano a través del PEE. Ahora, se procede a investigar una conexión entre los efectos del campo de fuerzas "ficticias" de Coriolis y los efectos de la aproximación de campo débil, vista en 5.1.5. Siguiendo nuevamente el método de Adler-Bazin-Schiffer. Entonces, se considerará nuevamente un tensor métrico independiente del tiempo de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\Delta_{\mu\nu} \tag{5-60}$$

donde los $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico de Minkowski y los $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ representan perturbaciones muy pequeñas, independientes del tiempo, las cuales son debidas a la presencia de un cuerpo que produce gravedad, y que tienden a cero muy lejos del cuerpo [Adler, 1975].
En el marco de la teoría de gravitación Newtoniana, una partícula de prueba de masa m, sometida a un campo gravitacional, debe satisfacer la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + \Phi_g \tag{5-61}$$

debido a que el campo gravitacional nevtoniano es conservativo. Para energías orbitales muy pequeñas, es decir, $\left|E/mc^2\right| << 1$, conservando potencias a primer orden en $\left|E/mc^2\right|$ y despreciando las de orden superior. Entonces, es natural pensar que, podemos tomar

$$\beta^2 := \frac{v^2}{c^2} = 2\left(\frac{E}{mc^2} - \frac{\Phi_g}{c^2}\right) \tag{5-62}$$

del mismo orden de Φ_g/c^2. Según la relación (5-50),

$$\frac{2\Phi_g}{c^2} = \epsilon\Delta_{00} \tag{5-63}$$

Vemos entonces, que podemos tomar $\beta^2 \sim \epsilon$. En esta nueva aproximación vamos a conservar ϵ, β, $\beta^2 \sim \epsilon$, $\beta^3 \sim \epsilon^{3/2}$, $\epsilon\beta \sim \epsilon^{3/2}$, y despreciaremos los de orden ϵ^2, $\beta^4 \sim \epsilon^2$, $\epsilon\beta^2 \sim \epsilon^2$ y superior.

Usando las coodenadas de la Relatividad Espacial y el tensor métrico cuasi-Minkowskiano (5-37), se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\, dx^\mu dx^\nu, \tag{5-64}$$

donde de ahora en adelante vamos a usar, por simplicidad, la convención $h_{\mu\nu} \equiv \epsilon\Delta_{\mu\nu}$. Dividiendo esta ecuación por $\left(dx^0\right)^2 = (cdt)^2$, se obtiene que

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - \beta^2 + h_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}, \tag{5-65}$$

la cual, en nuestra aproximación, tenemos

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 \approx 1 + h_{00} - \beta^2 + 2h_{0i}\beta^i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5-66}$$

A continuación aplicamos nuestra aproximación a las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{5-67}$$

donde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} := \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ son los símbolos de Christoffel de segundo tipo. Consideramos el segundo término de esta ecuación y procedemos ahora como en la subsección 5.1.5, utilizando nuestra aproximación, para obtener que el problema de calcular las ecuaciones geodésicas se reduce a calcular los símbolos de Christoffel Γ^α_{00} y $\Gamma^\alpha_{0i}, \quad i = 1, 2, 3$.

Luego, la ecuación geodésica en nuestra aproximación, queda

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^\alpha_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0, \tag{5-68}$$

la cual en virtud de (5-66), se reduce a

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{00}c^2 + 2c\Gamma^\alpha_{0i}\frac{dx^i}{dt} = 0 \tag{5-69}$$

Nuevamente, como los términos perturbativos $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ son independientes del tiempo, los símbolos de Christoffel Γ^α_{00} resultan, como los calculamos anteriormente:

$$\Gamma^\alpha_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}h_{00,\delta} = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{para } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2}h_{00,k} & ; \quad \text{para } \alpha = k = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{5-70}$$

Por otro lado, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{0i}, \quad i = 1, 2, 3$, resultan:

$$\Gamma^\alpha_{0i} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(h_{\sigma 0,i} - h_{0i,\sigma}\right) \tag{5-71}$$

Estudiemos los siguientes casos:

1. Si $\alpha = 0$, tenemos

$$\Gamma^0{}_{0i} \approx \frac{1}{2}\left(h_{00,i} - h_{0i,0}\right) = \frac{1}{2}h_{00,i} \tag{5-72}$$

ya que consideramos las cantidades perturbativas $h_{\mu\nu}$ independientes del tiempo.

2. Si $\alpha \neq 0$, tenemos

$$\Gamma^k{}_{0i} \approx -\frac{1}{2}\delta^\sigma_k\left(h_{\sigma 0,i} - h_{0i,\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\left(h_{k0,i} - h_{0i,k}\right) \tag{5-73}$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^\alpha{}_{0i} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}h_{00,i} & ; \quad \text{para } \alpha = 0 \\ -\frac{1}{2}\left(h_{k0,i} - h_{0i,k}\right) & ; \quad \text{para } \alpha = k = 1,2,3 \end{cases} \tag{5-74}$$

Sustituyendo los símbolos de Christoffel (5-70) y (5-74) en la ecuación de las geodésicas (5-68), o (5-69)tenemos:

1. Para $\alpha = 0$,

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + h_{00,i}\frac{dx^i}{dx^0}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0 \tag{5-75}$$

En el segundo término, sabemos que, en la aproximación de campo gravitacional débil, se satisface (5-50),

$$\frac{2\Phi_g}{c^2} = h_{00} \tag{5-76}$$

Entonces, la ecuación (5-75) se puede reescribir como

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{2}{c^3}v^i\partial_i\Phi_g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{5-77}$$

O en forma vectorial,

$$\boxed{\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{2}{c^3}\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi_g\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0} \tag{5-78}$$

Esta ecuación representa la relación entre el tiempo propio τ y el tiempo coordenado t a lo largo de la geodésica de la partícula.

2. Para $\alpha = k = 1, 2, 3$,

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}h_{00,k} + c\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right)\frac{dx^i}{dt} \tag{5-79}$$

Si definimos un vector 3-dimensional $\vec{A}_g$ como $A_g^i := ch^{0i}$, tenemos:

$$c\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right) = \partial_k A_g^i - \partial_i A_g^k \tag{5-80}$$

Estas son las componentes de $\vec{\nabla} \times \vec{A}_g$, entonces, el segundo término de (5-79) lo podemos escribir en forma vectorial como:

$$c\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right)\frac{dx^i}{dt} = \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g\right) \tag{5-81}$$

Por tanto, (5-79) se puede escribir en forma vectorial como:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi_g + \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g\right)} \tag{5-82}$$

Si suponemos el caso particular de un "campo" gravitacional débil estacionario axialmente simétrico, el elemento de línea (5-38) debe adquirir la forma de (5-12). Entonces, en coordenadas de la Relatividad Especial, por lo menos dos de las componentes h_{0i} deben ser no nulas.
Por otro lado, por el PEE, la ecuación geodésica (5-82) resulta *localmente* equivalente a la ecuación de la geodésica de una partícula libre sobre un sistema rotante (Ecuación (4-149))

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = -\vec{\nabla}\Phi_c + 2\left(\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{\omega}\right) \tag{5-83}$$

Entonces, podemos hacer la siguiente identificación

$$\Phi_c \equiv \Phi_g \tag{5-84}$$

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g\right) \tag{5-85}$$

Por otro lado, $\vec{\omega}$ se puede escribir como

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{cor}}\right), \tag{5-86}$$

donde se ha definido el 3-vector $\vec{A}_{\text{cor}}$ como

$$\vec{A}_{\text{cor}} := \left(\omega y, -\omega x, 0\right), \tag{5-87}$$

es decir, $A^i_{\text{cor}} := c\gamma^{0i}$, con $\gamma^{\mu\nu}$ las componentes contravariantes del tensor métrico de Einstein-Ehrenfest en coordenadas cartesianas

$$ds^2 = \left(c^2 - r^2\omega^2\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2\omega\left(xdy - ydx\right) dt \tag{5-88}$$

Los resultados para $\vec{\omega}$, (5-86) y (5-85), indican que se puede hacer la siguiente identificación:

$$\boxed{\vec{A}_g \equiv -\vec{A}_{\text{cor}} = (-\omega y, \omega x, 0)} \tag{5-89}$$

En resumen, los potenciales centrífugo Φ_c y de Coriolis $\vec{A}_{\text{cor}}$ se pueden interpretar *localmente* como potenciales gravitacionales:

$$\Phi_g \equiv \Phi_c = -r^2\omega^2/c^2 \tag{5-90}$$
$$\vec{A}_g \equiv -\vec{A}_{\text{cor}} = (-\omega y, \omega x, 0) \tag{5-91}$$

Vemos entonces que los efectos de las "fuerzas" centrífugas y de Coriolis en sistemas rotantes, los podemos interpretar *localmente* como la presencia de un "campo" gravitacional débil estacionario axialmente simétrico. Notemos que en el caso de un campo gravitacional estático, todas las componentes h_{0i} son cero, y por tanto, $\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g\right) = \mathbf{0}$.

Las ecuaciones (5-82) y (5-83) son idénticas a la *Fuerza de Lorentz Gravitacional* ([M. P. Hobson, 2006], p. 492)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{E}_g + \vec{v} \times \vec{B}_g \tag{5-92}$$

con $\vec{E}_g$ y $\vec{B}_g$ los campos *gravito-eléctrico* y *gravito-magnético*, definidos respectivamente por:

$$\vec{E}_g = -\vec{\nabla}\Phi_g \tag{5-93}$$
$$\vec{B}_g = \vec{\nabla} \times \vec{A}_g \tag{5-94}$$

El primer término del lado derecho de (5-92) da el resultado Newtoniano estándar para el movimiento de una partícula de prueba en un "campo" gravitacional débil estático, mientras que el segundo término da como resultado una fuerza 'extra' sentida por una partícula de prueba en movimiento en la presencia de un "campo" gravitacional débil estacionario axialmente simétrico [M. P. Hobson, 2006].

En el caso concreto del límite de bajas rotaciones de la métrica de Kerr $\left(\frac{J}{Mcr} << 1, \left(\frac{J}{Mcr}\right)^2 \approx 0\right)$ en coordenadas cartesianas [M. P. Hobson, 2006]

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + \frac{4GJ}{c^2 r^3}\left(xdy - ydx\right) dt \tag{5-95}$$

se obtiene que

$$\boxed{\omega \equiv \frac{2GJ}{c^2 r^3}} \tag{5-96}$$

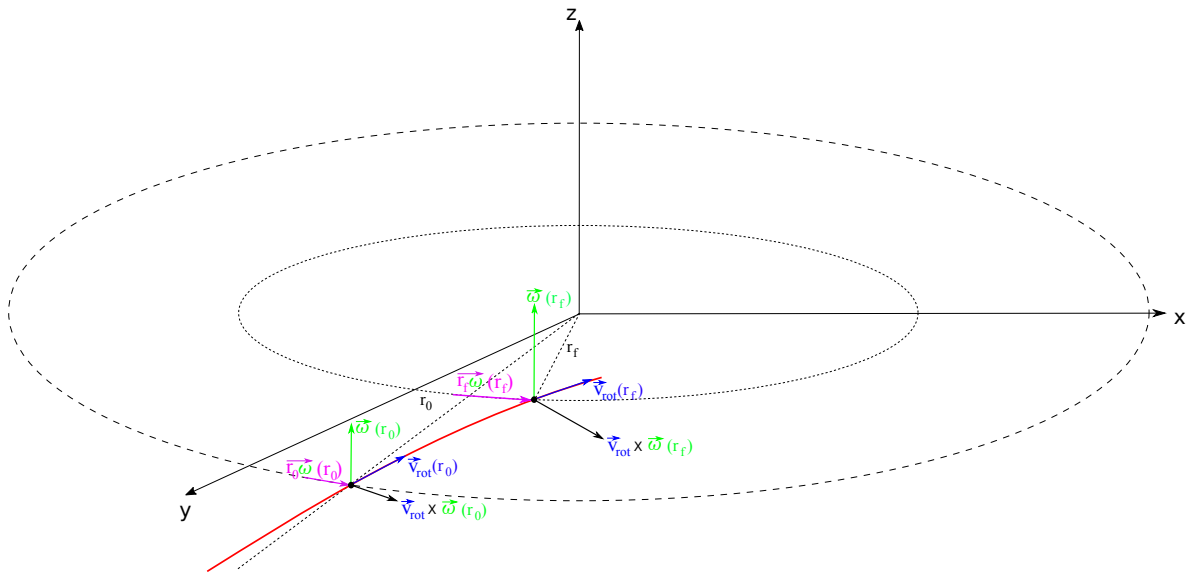

Figura 5-3.: Una interpretación del efecto de arrastre de los sistemas inerciales, en el contexto de los sistemas rotantes.

El término de la derecha coincide con la velocidad angular coordenada de una partícula con momento angular nulo a lo largo de su geodésica [M. P. Hobson, 2006]. Entonces, $\omega = \omega(r)$ se puede interpretar como la velocidad angular coordenada de un sistema rotante, sobre el cual, dicha partícula permanece *instantáneamente* con velocidad angular coordenada $d\theta_0'/dt$ nula (Figura **5-3**).

5.3. Perturbación a primer orden de la métrica de Einstein-Ehrenfest

Consideremos el elemento de línea:

$$ds^2_{(0)} = \left(1-\delta^2\right)\left(d\bar{x}^0\right)^2 - \left(d\bar{x}^1\right)^2 - \left(d\bar{x}^2\right)^2 - \left(d\bar{x}^2\right)^2 - 2\delta d\bar{x}^0 d\bar{x}^3 = \gamma_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \tag{5-97}$$

donde $\delta := \frac{r_0'\omega \sin\theta_0'}{c}$ y se han definido unas nuevas coordenadas "rotantes" $\bar{x}^\mu \equiv \left(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\right)$, asociadas al observador "rotante" en el origen, en términos de sus *coordenadas esféricas "rotantes"* $(t_0', r_0', \theta_0', \phi_0')$, omo:

$$\begin{array}{lcr} d\bar{x}^0 & := & cdt_0' \\ d\bar{x}^1 & := & dr_0' \\ d\bar{x}^2 & := & r_0' d\theta_0' \\ d\bar{x}^3 & := & r_0' \sin\theta_0' d\phi_0' \end{array} \tag{5-98}$$

Siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975], consideramos un tensor métrico independiente del tiempo de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \epsilon\Delta_{\mu\nu} \tag{5-99}$$

donde $\gamma_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico asociado al observador "rotante" en el origen y $\epsilon\Delta_{\mu\nu}$ representa una perturbación muy pequeña (a primer orden en $\epsilon << 1$, $\epsilon^2 \approx 0$) e independiente del tiempo,

con la condición: $|\epsilon\Delta_{\mu\nu}| << |\gamma_{\mu\nu}|$, la cual nos va a garantizar que el espacio-tiempo resultante sea estacionario y axialmente simétrico. El correspondiente elemento de línea resulta:

$$ds^2_{(1)} = g_{\mu\nu}d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = \left(\gamma_{\mu\nu} + \epsilon\Delta_{\mu\nu}\right) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \tag{5-100}$$

En coordenadas $\left(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3\right)$, éste elemento de línea resulta:

$$ds^2_{(1)} = \left(1 - \delta^2 + \epsilon\Delta_{00}\right)\left(d\bar{x}^0\right)^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{11}\right)\left(d\bar{x}^1\right)^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{22}\right)\left(d\bar{x}^2\right)^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{33}\right)\left(d\bar{x}^3\right)^2 - 2\left(\delta - \epsilon\Delta_{03}\right) d\bar{x}^0 d\bar{x}^3 \tag{5-101}$$

o equivalentemente,

$$\boxed{ds^2_{(1)} = \left(1 - \delta^2 + \epsilon\Delta_{00}\right) c^2 dt'^2_0 - \left(1 - \epsilon\Delta_{11}\right) dr'^2_0 - \left(1 - \epsilon\Delta_{22}\right) r'^2_0 d\theta'^2_0 - \left(1 - \epsilon\Delta_{33}\right) r'^2_0 \sin^2\theta'_0 d\phi'^2_0 - 2\left(\delta - \epsilon\Delta_{03}\right) r'_0 \sin\theta'_0 c dt'_0 d\phi'_0 \quad (5\text{-}102)}$$

en términos de las *coordenadas esféricas "rotantes"* $(t'_0, r'_0, \theta'_0, \phi'_0)$ asociadas al observador "rotante" en el origen. Expresando este elemento de línea, en términos de las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ), asociadas al observador inercial O, tenemos:

$$\boxed{ds^2_{(1)} = \left(1 + \epsilon\Delta_{00} + \epsilon\delta^2\Delta_{33} - 2\epsilon\delta\Delta_{03}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{11}\right) dr^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{22}\right) r^2 d\theta^2 - \left(1 - \epsilon\Delta_{33}\right) r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + 2\left(\epsilon\Delta_{03} - \epsilon\delta\Delta_{33}\right) r \sin\theta c dt d\phi \quad (5\text{-}103)}$$

Consideraremos ahora los siguientes límites de este elemento de línea:

Límite Newtoniano: En el límite Newtoniano imponemos que la velocidad angular es cero ($\delta = 0$) y que la velocidad física de una partícula de prueba relativa al sistema no-rotante es muy pequeña con respecto a c, es decir que $\beta := \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{cdt}\right)^2} << 1$ a primer orden, es decir, $\beta^2 \approx 0$. Donde se han definido las coordenadas no-rotantes $x^\mu \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, asociadas al observador inercial O, en términos de las *coordenadas esféricas* (t, r, θ, ϕ) asociadas a este observador como:

$$\begin{aligned} dx^0 &:= cdt \\ dx^1 &:= dr \\ dx^2 &:= rd\theta \\ dx^3 &:= r\sin\theta d\phi \end{aligned} \tag{5-104}$$

En éste límite, el elemento de línea (5-103) se reduce a:

$$ds^2_{(1)} \approx \left(1 + \epsilon\Delta_{00}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{5-105}$$

Límite de bajas energías: En el límite de bajas energías, $\beta^2 \approx 0$, pero no imponemos condición sobre δ. Entonces, (5-103) se reduce a:

$$ds^2_{(1)} \approx \left(1 + \epsilon\Delta_{00} + \epsilon\delta^2\Delta_{33} - 2\epsilon\delta\Delta_{03}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{5-106}$$

Límite de bajas rotaciones: En el límite de bajas rotaciones, conservamos términos a primer orden en δ, pero despreciamos los de orden δ^2, ϵ^2, $\epsilon\delta$ y superior. Entonces, (5-103) se reduce a:

$$\boxed{ds^2_{(1)} \approx (1+\epsilon\Delta_{00})\, c^2dt^2 - (1-\epsilon\Delta_{11})\, dr^2 - (1-\epsilon\Delta_{22})\, r^2d\theta^2 - (1-\epsilon\Delta_{33})\, r^2\sin^2\theta d\phi^2 + 2\epsilon\Delta_{03} r\sin\theta c dt d\phi} \tag{5-107}$$

Límite $\epsilon \longrightarrow 0$: En el límite $\epsilon \longrightarrow 0$, (5-102) y (5-103) se reducen a (5-97) y

$$ds^2_{(0)} = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{5-108}$$

respectivamente.

Ahora, consideremos el elemento de línea de Einstein-Ehrenfest (5-6)

$$ds^2 = \left(c^2 - r^2\omega^2\right) dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - 2r^2\omega dt d\theta \tag{5-109}$$

En la subsección 5.1.2 se mostró que el término $r^2\omega^2/c^2$ se interpreta como un potencial gravitacional newtoniano Φ_g mediante la relación (5-24)

$$\Phi_g = \Phi_c = -\omega^2r^2/2 = -GM/r \tag{5-110}$$

A partir de ésto, podemos escribir el término con $r^2\omega$ del elemento de línea (5-6) como

$$\omega r^2 = \frac{2}{\omega}\frac{GM}{r} = -\frac{2}{\omega}\Phi_g = \kappa\cdot\Phi_g \tag{5-111}$$

con κ una constante. Por el PEE, y por lo visto en la sección 5.2, esta misma propiedad la debe tener un "campo" gravitacional débil estacionario axialmente simétrico, ésto es, el término con $2\epsilon\Delta_{03}r\sin\theta c$ en el elemento de línea (5-107) se puede escribir como ($\theta = \pi/2$)

$$2\epsilon\Delta_{03}cr = K\cdot\Phi_g, \tag{5-112}$$

con K una constante. Consideremos el límite de "campo" débil y bajas rotaciones de la métrica de Kerr en coordenadas esféricas y $\theta = \pi/2$ ([M. P. Hobson, 2006], p. 347)

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right)\left(dr^2 + r^2d\phi^2\right) + \frac{4GJ}{c^2r}d\phi dt, \tag{5-113}$$

donde $J = Mac$ es el momento angular del cuerpo que produce gravedad, M su masa y a una constante. Identificando el coeficiente de $d\phi dt$ de esta última ecuación con (5-112), tenemos

$$\frac{4GJ}{c^2r} = 2\epsilon\Delta_{03}cr = K\cdot\Phi_g, \tag{5-114}$$

de la cual fácilmente obtenemos

$$K = -\frac{4J}{Mc^2} \tag{5-115}$$

$$\epsilon = \frac{J}{Mcr} = \frac{a}{r} \tag{5-116}$$

$$\Delta_{03} = -\frac{2\Phi_g}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r} \tag{5-117}$$

Vemos entonces que la relación (5-112) es consistente con el límite de campo débil de la teoría de la Relatividad General.

Por otro lado, los coeficientes $1-\epsilon\Delta_{11}$, $1-\epsilon\Delta_{22}$, y $1-\epsilon\Delta_{33}$ del elemento de línea (5-107) los podemos identificar con los respectivos coeficientes $1+\frac{2GM}{c^2 r}$ del elemento de línea asociado al límite de "campo" débil y bajas rotaciones de la métrica de Kerr en coordenadas esféricas y $\theta = \pi/2$ (5-113), siempre y cuando se cumpla que

$$\epsilon\Delta_{11} = \epsilon\Delta_{22} = \epsilon\Delta_{33} = -\frac{2GM}{c^2 r} \tag{5-118}$$

Bajo estas condiciones, se puede ver que el elemento de línea (5-113) es un caso particular de la perturbación a primer orden de la métrica de Einstein-Ehrenfest en el límite de bajas rotaciones (5-107).

5.4. Interpretación gravitacional de las definiciones de tiempo físico dt^* y longitud física dl^*

La ecuación (4-95) nos muestra la relación entre simultaneidad sobre el sistema rotante K y simultaneidad sobre el sistema inercial (no-rotante) Σ. Esta relación tiene el siguiente análogo gravitacional:

$$dt^* := \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[dt - \frac{\omega r^2 d\theta}{c^2 - \omega^2 r^2}\right]. \tag{5-119}$$

La ecuación (5-119) expresa la relación entre simultaneidad sobre el campo gravitacional estacionario con simetría axial y simultaneidad sobre el sistema inercial en ausencia de todo campo gravitacional.

Por otro lado, la ecuación (4-93)nos da la noción de longitud física, la cual se construye a partir del concepto físico de simultaneidad (con respecto al tiempo físico dt^*). Esta relación tiene el siguiente análogo gravitacional:

$$dl^{*2} := dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} \tag{5-120}$$

La ecuación (5-120) relaciona la longitud física dl^* de, por ejemplo una varilla, medida por un observador en reposo en la presencia de un "campo" gravitacional estacionario con simetría axial, con la longitud física $dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ de la misma varilla, medida por un observador inercial en ausencia de gravitación.

Hemos visto (ecuación (4-94)) que el tiempo físico y la longitud física son tales que el elemento de línea ds^2 es localmante Lorentziano

$$ds^2_{(0)} = c^2 dt^{*2} - dl^{*2}. \tag{5-121}$$

Procederemos ahora a generalizar las definiciones de tiempo físico y longitud física. Debido al PRG, un observador con aceleración arbitraria debe también medir sus intervalos espaciales dl^* y temporales dt^* de tal forma que su elemento de línea $ds^2_{(0)}$ es localmante Lorentziano. Consideremos un sistema de coordenadas arbitrario en un espacio-tiempo seudoeuclídeo ([Logunov, 1998], p. 48):

$$ds^2_{(0)} = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{5-122}$$

donde $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 son coordenadas espaciales y $\gamma_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. La expresión (5-122) se puede escribir como ([Logunov, 1998], p.49):

$$ds^2_{(0)} = c^2\gamma_{00}dt^2 + 2c\gamma_{0i}dx^i dt + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{5-123}$$

Completando cuadrados en esta última expresión, se obtiene

$$ds^2_{(0)} = c^2 \left[\sqrt{\gamma_{00}}dt + \frac{\gamma_{0i}dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}}\right]^2 - \left[-\gamma_{ij} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0j}}{\gamma_{00}}\right] dx^i dx^j \tag{5-124}$$

Como $ds^2_{(0)}$ debe ser localmente Lorentziano, entonces, se definen el tiempo físico dt^* y la longitud física como:

$$dt^* = \sqrt{\gamma_{00}}dt + \frac{\gamma_{0i}dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}} \tag{5-125}$$

$$dl^{*2} = \kappa_{ij}dx^i dx^j, \tag{5-126}$$

donde se ha introducido el nuevo tensor

$$\kappa_{ij} = -\gamma_{ij} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \tag{5-127}$$

El PEE proporciona un carácter gravitacional a el elemento de línea (5-124), el cual lo podemos escribir en términos de las componentes métricas $g_{\mu\nu}$ que aparecen en (5-5) como:

$$ds^2 = c^2 \left[\sqrt{g_{00}}dt + \frac{g_{0i}dx^i}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \left[-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right] dx^i dx^j, \tag{5-128}$$

y se definen entonces el tiempo físico dt^* y la longitud física como:

$$dt^* = \sqrt{g_{00}}dt + \frac{g_{0i}dx^i}{c\sqrt{g_{00}}} \tag{5-129}$$

$$dl^{*2} = \left[-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right] dx^i dx^j, \tag{5-130}$$

Nótese que estas expresiones tienen la misma forma que las definiciones (5-119) y (5-120). Si el "campo" gravitacional es estacionario, por lo menos dos de los coeficientes g_{0i} son distintos de cero, y estas componentes son las responsables del efecto Sagnac en un "campo" gravitacional estacionario axialmente simétrico ([Kajari et al., 2009], p. 6).

Capítulo 6

Aplicaciones

En el presente capítulo se desarrolla el estudio de algunas propiedades adicionales de los campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos y los sistemas de referencia rotantes, como el efecto Lense-Thirring, el efecto Sagnac y la desviación geodésica.

6.1. El efecto Lense-Thirring

A continuación vamos a deducir el efecto Lense-Thirring a partir del tensor métrico para la aproximación de campo débil

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6-1}$$

donde los $h_{\mu\nu} \equiv \epsilon\Delta_{\mu\nu}$ representan perturbaciones muy pequeñas, independientes del tiempo, las cuales son debidas a la presencia de un cuerpo que produce gravedad, y que tienden a cero muy lejos del cuerpo.

Supongamos ahora un giroscopio que se mueve a lo largo de una geodésica λ como de tiempo, de modo que su 4-velocidad $\mathbb{U}(\tau)$ satisface la condición de transporte paralelo

$$\nabla_{\partial_\lambda}\mathbb{U} = \frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \tag{6-2}$$

Supongamos que el espín del giroscopio se puede describir mediante un 4-vector $\mathbb{S}(\tau)$ a lo largo de su geodésica, tal que

$$\mathbb{S}\cdot\mathbb{U} = g_{\mu\nu}s^\mu u^\nu = 0 \tag{6-3}$$

Como el 4-vector velocidad $\mathbb{U}$ del giroscopio es transportado paralelamente a lo largo de su geodésica, para asegurar que el producto interno se conserve a lo largo de todos los puntos de su línea de mundo, se requiere que $\mathbb{S}(\tau)$ también sea transportado paralelamente a lo largo de su geodésica. Luego, sus componentes deben satisfacer

$$\nabla_{\partial_\lambda}\mathbb{S} = \frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}s^\mu u^\nu = 0 \tag{6-4}$$

En la aproximación de campo débil, los símbolos de Christoffel de segundo tipo resultan ser

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}\right) \tag{6-5}$$

De la cual obtenemos

$$\Gamma^{k}_{\ i0} = -\frac{1}{2}\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right) \tag{6-6}$$

$$\Gamma^{k}_{\ ij} = -\frac{1}{2}\left(h_{ki,j} + h_{jk,i} - h_{ij,k}\right) \tag{6-7}$$

$$\Gamma^{0}_{\ 00} = 0 \tag{6-8}$$

$$\Gamma^{0}_{\ 0j} = \frac{1}{2}h_{00,j} \tag{6-9}$$

$$\Gamma^{0}_{\ ij} = \frac{1}{2}\left(h_{0i,j} + h_{j0,i}\right) \tag{6-10}$$

$$\Gamma^{k}_{\ 00} = \frac{1}{2}h_{00,k} \tag{6-11}$$

Reemplazando estos coeficientes en las ecuaciones (6-4), tenemos

1. Para $\alpha = 0$

$$\frac{ds^0}{d\tau} + \frac{1}{2}h_{00,j}s^0u^j + \frac{1}{2}h_{00,i}s^iu^0 + \frac{1}{2}\left(h_{0i,j} + h_{j0,i}\right)s^iu^j = 0 \tag{6-12}$$

2. Para $\alpha = k = 1, 2, 3$

$$\frac{ds^k}{d\tau} + \frac{1}{2}h_{00,k}s^0u^0 - \frac{1}{2}\left(h_{0k,j} - h_{0j,k}\right)s^0u^j - \frac{1}{2}\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right)s^iu^0 - \frac{1}{2}\left(h_{ki,j} + h_{jk,i} - h_{ij,k}\right)s^iu^j = 0 \tag{6-13}$$

Vamos a suponer que el giroscopio cae con una velocidad no-relativista ($u^i/c \approx 0$ y $u^0 \approx 1$), entonces, las ecuaciones (6-12) y (6-13) se reducen a

$$\frac{ds^0}{d\tau} + \frac{1}{2}h_{00,i}s^i \approx 0 \tag{6-14}$$

$$\frac{ds^k}{d\tau} + \frac{1}{2}h_{00,k}s^0 - \frac{1}{2}\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right)s^i \approx 0 \tag{6-15}$$

Consideremos el caso particular, que el giroscopio cae a lo largo del eje z (Véase figura **6-1**), de modo que $\mathbb{U}$ y $\mathbb{S}$ conservan su forma a lo largo de la geodésica; y que además, inicialmente el 4-vector velocidad $\mathbb{U}$ y el 4-vector de espín $\mathbb{S}$ del giroscopio en coordenadas cartesianas tienen la forma

$$\mathbb{U} = \left(u^t, 0, 0, u^z\right) \quad \text{y} \quad \mathbb{S} = \left(0, s^x, s^y, 0\right) \tag{6-16}$$

Entonces, las ecuaciones (6-14) y (6-15) se reducen a

$$\frac{ds^k}{d\tau} \approx \frac{1}{2}\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right)s^i \tag{6-17}$$

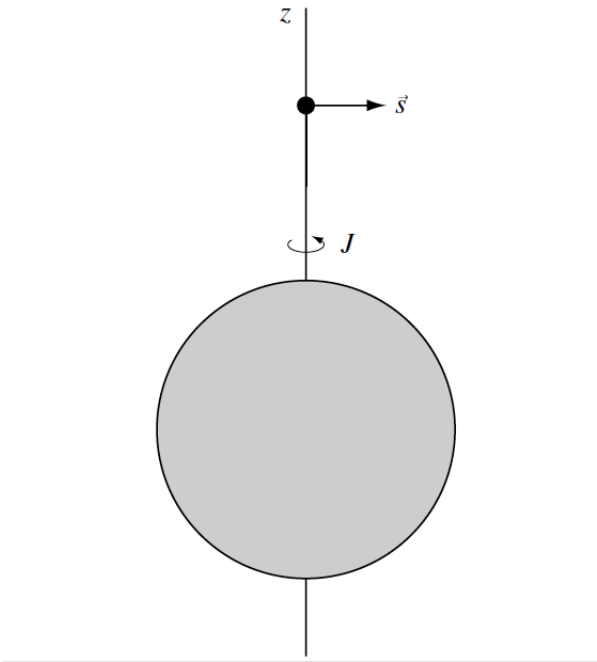

Figura 6-1.: Un giroscopo (círculo sólido) cayendo a lo largo del eje de rotación de un cuerpo rotante [M. P. Hobson, 2006].

Si definimos el 3-vector $\vec{A}_g$ como $A_g^i := h^{0i}$, la ecuación (6-17) la podemos escribir en forma vectorial como

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} \approx \frac{1}{2}\vec{s} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g\right) \tag{6-18}$$

Si tomamos $\vec{B}_g = \vec{\nabla} \times \vec{A}_g$ el "campo" gravito-magnético definido en la ecuación (5-94), tenemos que

$$\boxed{\frac{d\vec{s}}{d\tau} \approx \frac{1}{2}\left(\vec{s} \times \vec{B}_g\right)} \tag{6-19}$$

Éste es el llamado *efecto Lense-Thirring*, el cual nos indica que los coeficientes no nulos g_{0i} del tensor métrico, van a inducir un efecto de precesión sobre el giroscopio con espín $\vec{s}$. Entonces, $\vec{s}$ precesa con una velocidad angular ([M. P. Hobson, 2006], p. 397)

$$\Omega_{\mathrm{LT}} = -\frac{1}{2}\left|\vec{B}_g\right| \tag{6-20}$$

Nótese que si el giroscopio tiene espín cero ($\vec{s} = \mathbf{0}$), entonces, éste no va a experimentar el efecto de precesión.

En el caso particular del límite de "campo" débil y bajas rotaciones de la métrica de Kerr ([M. P. Hobson, 2006], p. 347)

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) + \frac{4GJ}{c^2 r}\sin^2\theta d\phi dt, \tag{6-21}$$

y considerando que la velocidad de caída libre del giroscopio es no-relativista, la relación (6-19) se reduce a

$$\frac{ds^x}{d\tau} = -\frac{2GJ}{c^2 z^3} s^y, \quad \frac{ds^y}{d\tau} = \frac{2GJ}{c^2 z^3} s^x \tag{6-22}$$

con J el momento angular del cuerpo que produce gravedad. Y a una altura z, la velocidad angular de precesión resulta ([M. P. Hobson, 2006], p. 349)

$$\Omega_{\mathrm{LT}} = \frac{2GJ}{c^2 z^3} \tag{6-23}$$

Se concluye que el giroscopio precesa en la misma dirección que lo hace el cuerpo rotante con momento angular J.

El efecto Lense-Thirring no sólo implica la precesión de los giroscopios en caída libre, sino que también implica que los sistemas inerciales están rotando con respecto al infinito. Para ver ésto, consideremos un observador O que se mueve a lo largo de una geodésica λ como de tiempo, con 4-velocidad $\mathbb{U}(\tau)$. Como este observador está en caída libre, por el PEE, este debe ser equivalente a un observador inercial en ausencia de gravitación. Así que, cualquier 4-vector $\mathbb{X}(\tau)$ que represente las coordenadas espacio-temporales, relativas a O, de un evento cualquiera E, deben ser transportadas paralelamente a lo largo de la geodésica. Luego, sus componentes deben satisfacer

$$\nabla_{\partial_\lambda} \mathbb{X} = \frac{dx^\alpha}{cd\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} x^\mu u^\nu = 0, \tag{6-24}$$

de tal forma que el producto interno $\mathbb{X} \cdot \mathbb{U} = g_{\mu\nu} x^\mu u^\nu$ se conserve a lo largo de todos los puntos de su línea de mundo. Supongamos además que la velocidad de caída libre de dicho observador es no-relativista ($u^i/c \approx 0$ y $u^0 \approx 1$). Calculando los símbolos de Christoffel de segundo tipo para la aproximación de campo débil, como lo hicimos anteriormente, y sustituyendo estas en la condición de transporte paralelo (6-24), tenemos

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{2} h_{00,i} x^i \approx 0 \tag{6-25}$$

$$\frac{dx^k}{cd\tau} + \frac{1}{2} h_{00,k} x^0 - \frac{1}{2} \left(h_{0k,i} - h_{0i,k} \right) x^i \approx 0 \tag{6-26}$$

Teniendo en cuenta que en la aproximación de campo débil $\frac{2\Phi_g}{c^2} = h_{00}$. Entonces, estas relaciones las podemos escribir en forma vectorial como

$$\frac{dt}{d\tau} \approx -\frac{1}{c} \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi_g \tag{6-27}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} \approx -t \vec{\nabla} \Phi_g + \frac{1}{2} \vec{x} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_g \right) \tag{6-28}$$

donde definimos el 3-vector $\vec{A}_g$ como $A_g^i := \frac{h^{0i}}{c}$. Si consideramos el conjunto de los 4-vectores $\mathbb{X}$ que representan eventos en reposo E_0 respecto a O, el segundo término de la ecuación (6-28) nos indica que los vectores posición espaciales $\vec{x}$ (los cuales indican la posición de los eventos E_0 relativos al infinito) están rotando con velocidad angular

$$\boxed{\Omega_{\mathrm{LT}} = -\frac{1}{2} \left| \vec{B}_g \right| = -\frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \times \vec{A}_g \right|} \tag{6-29}$$

respecto al infinito. Por lo tanto, los sistemas inerciales rotan con respecto al infinito si las componentes g_{0i} no son nulas. Además esta rotación se da en la dirección de rotación del cuerpo que produce gravedad.

6.2. El efecto Sagnac desde un punto de vista relativista

El interferómetro de Sagnac consiste de un láser en uno o más de sus brazos, una serie de espejos, una placa semi-transparente y un detector, el cual es puesto a rotar alrededor de un eje perpendicular que pasa a través de su centro (Véase figura **6-2**). El láser S emite un haz de luz que incide sobre un placa semi-transparente A, la cual divide el haz en dos partes. Una parte atraviesa la placa y alcanza un espejo D, donde es reflejado un ángulo de 90° hacia un espejo C, el cual lo refleja un ángulo de 90° hacia un espejo B, el cual lo refleja de nuevo un ángulo de 90° hacia la placa A, y lo refleja finalmente un ángulo de 90° hasta llegar a un detector T. La otra parte del haz original es reflejado un ángulo de 90° hacia el espejo B, y recorre el camino opuesto del primer haz hasta llegar de nuevo hacia la placa A, y se refleja finalmente un ángulo de 90° hasta llegar al detector T. Debido a la rotación del interferómetro, se acorta el camino tomado por el primer haz en comparación con el del segundo haz. Como resultado de ésto, T detecta un corrimiento de franjas proporcional a la velocidad angular de rotación ω.

La placa A y los espejos se mueven con una velocidad tangencial $v = R\omega$, donde R es la mitad de la diagonal del cuadrado. Debido a las distintas longitudes de los caminos seguidos seguidos por los dos haces, usando un razonamiento clásico, se encuentra que la diferencia de tiempos totales que le toma a los haces recorrer todo el cuadrado es [Hecht, 2002]

$$\Delta t = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2}; \qquad \text{para } R\omega << c \tag{6-30}$$

donde $\mathcal{A} = 2R^2$ es el área del cuadrado. Sea el periodo de la luz monocromática usada, $\tau = \lambda/c$; entonces, el desplazamiento fraccional de las franjas, dado por $\Delta N = \Delta t/\tau$, es [Hecht, 2002]

$$\Delta N = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c\lambda} \tag{6-31}$$

La primera comprobación experimental de este resultado fue realizada por Georges Sagnac en 1913 [Sagnac G., 1913, R. and D., 1979], utilizando el interferómetro anteriormente descrito. Michelson y Gale [Michelson, 1925, Hecht, 2002] usaron este método para determinar la velocidad angular de la Tierra.

A continuación, daremos un tratamiento relativista a este experimento, para obtener, en un límite de bajas rotaciones ($R\omega << c$) el mismo resultado (6-30). Por simplicidad en los cálculos, vamos a realizar nuestro análisis, suponiendo que el interferómetro se dispone en una serie de espejos a lo largo de una trayectoria poligonal, la cual en el límite se convierte en un círculo de radio coordenado R, y también suponiendo que el láser S coincide con el detector T. Teniendo en cuenta ésto, desde el sistema de referencia del laboratorio (el sistema no-rotante), el haz de luz sigue la geodésica nula

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2d\theta^2 = 0 \tag{6-32}$$

Debido a la rotación del interferómetro, el elemento de circunferencia $Rd\theta'$ recorrido por el haz de luz sobre el sistema rotante está relacionado con el elemento de circunferencia $Rd\theta$ recorrido por el haz de luz sobre el sistema de referencia del laboratorio mediante

$$Rd\theta = Rd\theta' \pm R\omega dt^{\pm} \tag{6-33}$$

donde el signo superior está asociado al haz de luz en la dirección de la rotación, y el signo inferior, asociado al haz de luz en la dirección opuesta.

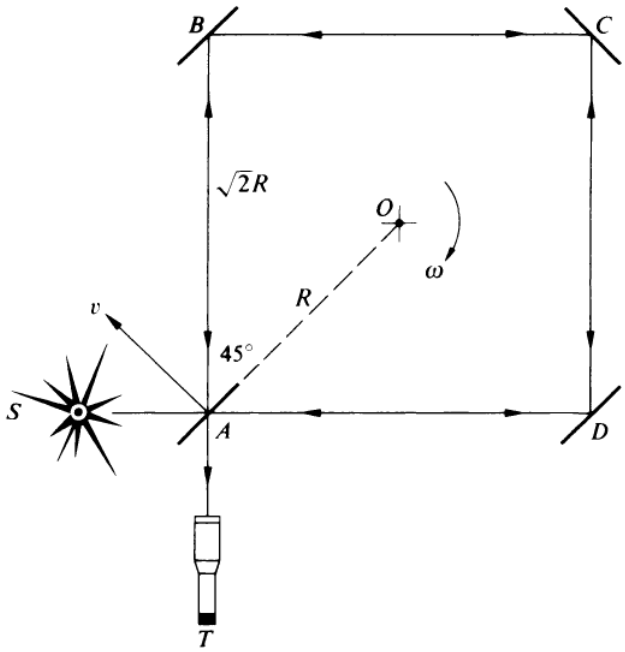

Figura 6-2.: El interferómetro de Sagnac rotante [Hecht, 2002].

Esta relación también se puede ver mediante las transformaciones (4-55), (4-56) y (4-57) entre las coordenadas polares (t, r, θ) del observador inercial O (en el sistema del laboratorio) y sus coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0) .

Resolviendo (6-32) para dt y teniendo en cuenta (6-33) obtenemos

$$dt^{\pm} = \frac{Rd\theta'_0 \pm R\omega dt^{\pm}}{c} \tag{6-34}$$

Luego,

$$dt^{\pm} = \frac{Rd\theta'_0}{c \mp R\omega} \tag{6-35}$$

Integrando esta ecuación a lo largo de toda la circunferencia de radio R en el sistema rotante, obtenemos los tiempos totales t^+ y t^- que le toman a los haces de luz ir en la dirección de la rotación, y en la dirección opuesta, resultan respectivamente

$$t^+ = \frac{2\pi R}{c - R\omega} \tag{6-36}$$

$$t^- = \frac{2\pi R}{c + R\omega} \tag{6-37}$$

Entonces, la diferencia de tiempos totales de recorrido de los haces de luz, medidos en el sistema del laboratorio, resulta

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{2\pi R}{c - R\omega} - \frac{2\pi R}{c + R\omega} = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2 - R^2\omega^2} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2}, \tag{6-38}$$

donde $\mathcal{A} = \pi R^2$ es el área de la circunferencia de radio R. Y el desplazamiento fraccional de las franjas resulta

$$\Delta N = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c\lambda\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right)} \tag{6-39}$$

Obsérvese que, para $R\omega << c$ volvemos a obtener los resultados (6-30) y (6-31).

Debido al PCG, este análisis también se puede hacer, comenzando con el elemento de línea en (6-32) expresado en las coordenadas polares "rotantes" (t'_0, r'_0, θ'_0)

$$ds^2 = \left(c^2 - R^2\omega^2\right) dt'^2_0 - R^2 d\theta'^2_0 - 2\omega R^2 d\theta'_0 dt'_0 = 0 \tag{6-40}$$

Resolviendo (6-40) para dt'_0, obtenemos

$$dt'^{\pm}_0 = \frac{(c \pm R\omega)\, R d\theta'_0}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{6-41}$$

Integrando esta ecuación a lo largo de toda la circunferencia de radio R en el sistema rotante, obtenemos los tiempos totales t'^+_0 y t'^-_0 que le toman a los haces de luz ir en la dirección de la rotación, y en la dirección opuesta, resultan respectivamente

$$t'^+_0 = \frac{2\pi R\,(c + R\omega)}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{6-42}$$

$$t'^-_0 = \frac{2\pi R\,(c - R\omega)}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{6-43}$$

Entonces, la diferencia de tiempos totales de recorrido de los haces de luz, medidos por el observador en el eje de rotación, resulta

$$\Delta t'_0 = t'^+_0 - t'^-_0 = \frac{2\pi R\,(c + R\omega)}{c^2 - R^2\omega^2} - \frac{2\pi R\,(c - R\omega)}{c^2 - R^2\omega^2} = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2 - R^2\omega^2} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{6-44}$$

donde $\mathcal{A} = \pi R^2$ es el área de la circunferencia de radio R. Como el tiempo $\Delta t'_0$ marcado por el reloj en el eje de rotación es el mismo que para el observador en el sistema del laboratorio Δt, entonces, tenemos

$$\Delta t = \Delta t'_0 = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{6-45}$$

Ésta es la misma ecuación (6-38), la cual, para $R\omega << c$ volvemos a obtener el resultado (6-30).

Para un reloj local en la posición del detector T, la diferencia de tiempos totales de recorrido de los haces de luz está dada por ([D. Klauber, 2004], p.130)

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c^2\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}} \tag{6-46}$$

Y el desplazamiento fraccional de las franjas resulta

$$\Delta N' = \frac{\Delta t'}{\tau'} = \frac{\Delta t\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}{\tau\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{4\mathcal{A}\omega}{c\lambda\left(1 - R^2\omega^2/c^2\right)} = \Delta N \tag{6-47}$$

Estos resultados confirman la afirmación que el *Postulado de la constancia de la velocidad de la luz* sólo tiene validez local, más no global. Vemos entonces que es más apropiado utilizar la velocidad coordenada que la velocidad física de la luz para describir su movimiento a lo largo de distancias finitas sobre el sistema rotante, en cambio, resulta más apropiado utilizar la velocidad física de la luz para describir su movimiento a lo largo de distancias infinitesimales, ya que la velocidad coordenada y la velocidad física de la luz coinciden *aproximadamente* en la localidad.

Debido al PEE, esta propiedad también debe ser observada en cualquier espacio-tiempo estacionario por un observador local T, que efectúa un experimento similar al descrito anteriormente (para más detalles, véase [Kajari et al., 2009], §2, p. 6).

El efecto Sagnac tiene múltiples aplicaciones: por ejemplo en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) [Ashby, 2004].Como un método para determinar la velocidad angular de la Tierra [Michelson, 1925]. También se utiliza en el sistema de navegación inercial, en el cual se emplean giroscopios de anillo láser. Dos haces láser recorren el giroscopio en direcciones opuestas; debido al efecto Sagnac, se puede determinar rotaciones del giroscopio en una u otra dirección [H. Titterton and L. Weston, 2004].

6.3. Desviación geodésica y curvatura

En un espacio plano, dos geodésicas se acercan o se alejan a una tasa constante, ya que éstas representan las trayectorias de partículas libres, las cuales se mueven con velocidad relativa constante. En esta sección, se mostrará que una de las propiedades importantes de la curvatura de un espacio de Riemann es que las geodésicas se acercan o se alejan a una tasa no constante.
En efecto, considere dos geodésicas cercanas, $\mathcal{C}$ dada por $x^\alpha(\lambda)$ y $\overline{\mathcal{C}}$ dada por $\bar{x}^\alpha(\lambda)$, y λ es un parámetro afín, sean $\xi^\alpha(\lambda)$ las componentes de un pequeño "vector" (con el mismos parámetro λ) conectando los puntos de las dos geodésicas (Figura **6-3**), esto es

$$\bar{x}^\alpha(\lambda) = x^\alpha(\lambda) + \xi^\alpha(\lambda) \tag{6-48}$$

Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que, para un valor arbitrario de λ, el vector $\xi^\alpha(\lambda)$ conecta un punto arbitrario P en $\mathcal{C}$ con un punto Q en $\overline{\mathcal{C}}$. Entonces, las ecuaciones de las dos geodésicas resultan:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}(P)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{6-49}$$

$$\frac{d^2\bar{x}^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}(Q)\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{6-50}$$

Se expanden los coeficientes de la conexión $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$ en serie de Taylor alrededor de P, conservando los términos a primer orden en ξ^α, y despreciando los de orden superior:

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}(Q) \approx \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}(P) + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}(P)\,\xi^\sigma \tag{6-51}$$

Reemplazando esta expresión en (6-50), y teniendo en cuenta (6-48), se tiene

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} + \left(\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}(P) + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}(P)\,\xi^\sigma\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{d\xi^\mu}{d\lambda}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{d\xi^\nu}{d\lambda}\right) \approx 0 \tag{6-52}$$

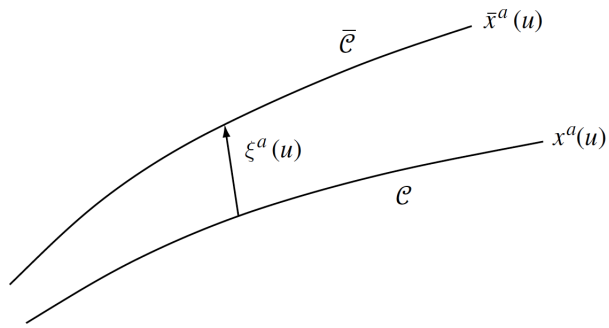

Figura 6-3.: Dos geodésicas vecinas [M. P. Hobson, 2006].

Simplificando y conservando términos hasta primer orden en ξ^α, se obtiene

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+2\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}\xi^\sigma\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\approx 0 \tag{6-53}$$

Restando lado a lado la ecuación (6-53) menos la ecuación (6-49), se tiene

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2}\approx -2\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}-\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}\xi^\sigma\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{6-54}$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada de un campo vectorial A^α a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ con parámetro λ (Véase Apéndice A):

$$\frac{DA^\alpha}{D\lambda}:=A^\alpha_{\ ;\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}=\frac{dA^\alpha}{d\lambda}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}A^\alpha\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{6-55}$$

y derivando dos veces ξ^α utilizando esta última derivada, se obtiene

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2}=\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}+2\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\xi^\mu\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha_{\ \beta\nu}\Gamma^\beta_{\ \gamma\delta}\xi^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{6-56}$$

Utilizando la ecuación de las geodésicas para el término con $\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2}$, esta última ecuación se convierte en

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2}=\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}+2\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}-\Gamma^\alpha_{\ \mu\beta}\Gamma^\beta_{\ \gamma\delta}\xi^\mu\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\delta}{d\lambda}+\Gamma^\alpha_{\ \beta\nu}\Gamma^\beta_{\ \gamma\delta}\xi^\gamma\frac{dx^\delta}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{6-57}$$

Reemplazando la ecuación (6-54) en la ecuación (6-57), se obtiene

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2}=-\left(\Gamma^\alpha_{\ \nu\sigma,\mu}-\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu,\sigma}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\beta}\Gamma^\beta_{\ \nu\sigma}-\Gamma^\alpha_{\ \sigma\beta}\Gamma^\beta_{\ \mu\nu}\right)\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=-R^\alpha_{\ \nu\sigma\mu}\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \tag{6-58}$$

donde los $R^\alpha_{\ \nu\sigma\mu}$ son las componentes del tensor de Riemann. Como las componentes de dicho tensor son anti-simétricas en sus últimos par de índices, se obtiene finalmente que [De la Torre G., 2008]

$$\boxed{\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2}=R^\alpha_{\ \nu\mu\sigma}\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}} \tag{6-59}$$

La ecuación (6-59) es la *ecuación de desviación geodésico*. En el caso que $R^{\alpha}_{\ \nu\mu\sigma} = 0$, la ecuación de desvío geodésico se reduce a $D^2\xi^\alpha/D\lambda^2 = d^2\xi^\alpha/d\lambda^2 = 0$, de donde $\xi^\alpha(\lambda) = A^\alpha\lambda + B^\alpha$, con A^α y B^α constantes. En este caso, las geodésicas se acercan o se alejan dependiendo del signo de A^α, y permanecen paralelas, si $A^\alpha = 0$, como era de esperarse.

La ecuación de desvío geodésico (6-59) es similar a la ecuación que describe el efecto de las *fuerzas de marea gravitacionales* en gravedad Newtoniana

$$\frac{d^2\zeta^i}{dt^2} = -\left(\frac{\partial^2\Phi_g}{\partial x^i\partial x^j}\right)\zeta^j \tag{6-60}$$

donde $\zeta^i = x^i - \bar{x}^i$ son las componentes del vector separación de dos partículas cercanas con trayectorias $x^i(t)$ y $\bar{x}^i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, respectivamente en coordenadas cartesianas, y Φ_g es el potencial gravitacional Newtoniano [M. P. Hobson, 2006].

Entonces, una forma en la que la gravitación se manifiesta es en el efecto de desviación geodésica.

Regresando a la ecuación (6-59), considere el caso particular de usar coordenadas geodésicas alrededor de P, luego los coeficientes de la conexión $\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ se anulan en P, pero sus derivadas no se anulan allí. En estas coordenadas, la ecuación (6-57) se reduce a

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu,\sigma}\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}, \tag{6-61}$$

y la ecuación de desvío geodésico (6-59) se reduce a

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\sigma,\mu}\right)\xi^\mu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \tag{6-62}$$

en P. De estas dos últimas ecuaciones se desprende que el PEE sólo es aplicable en el punto P, es decir, en el límite $\xi^\mu \to 0$, puesto que un observador O_P en P que use coordenadas geodésicas, por el PEE, es equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad. Luego, sus geodésicas vecinas no deben experimentar el efecto de desviación geodésica. Pero éste requerimiento sólo se satisface cuando todos los ξ^μ son cero, es decir, en el punto P.

En el caso de la aproximación de "campo" débil, estudiada en el capítulo anterior, el tensor métrico es de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6-63}$$

con $h_{\mu\nu} \equiv \epsilon\Delta_{\mu\nu}$ pequeñas perturbaciones del tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, las cuales son debidas a la gravitación. Las componentes del tensor de Riemann en la aproximación de "campo" débil resultaron (Véase ecuación (5-53))

$$R^{\alpha}_{\ \nu\mu\sigma} \approx \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\sigma,\mu}, \tag{6-64}$$

debido a que las conexiones métricas $\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ resultan, en este caso, del orden de ϵ, y se desprecian potencias de éste de orden 2 o superior. Considere ahora, dos geodésicas vecinas tales que $\xi^\mu \equiv \delta\Lambda^\mu$, con $\delta > 0$ del mismo

orden de ϵ. Bajo esta aproximación, se conservan los términos a primer orden en ϵ y δ y despreciamos los términos de orden ϵ^2, δ^2, $\epsilon\delta$ y superior. Entonces, la ecuación (6-57) se reduce a

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2} \approx \frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} \tag{6-65}$$

Luego, la ecuación de desvío geodésico (6-59) se reduce a

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} \approx 0 \tag{6-66}$$

Esto es, en aproximación de "campo" débil, para geodésicas lo suficientemente cercanas, no es apreciable el efecto de desviación geodésica. Entonces, para un observador en caída libre en la presencia de un "campo" gravitacional débil, las geodésicas lo suficientemente cercanas no deben experimentar el efecto de desviación geodésica, y por tanto, en vecindades lo suficientemente cercanas a este observador, debe ser aplicable el principio de equivalencia.

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se estudiaron las propiedades métricas de los sistemas rotantes de una forma consistente y libre de ambigüedades, mediante la introducción de una estructura axiomática, en el Capítulo 2, y un conjunto de definiciones relacionadas con los sistemas inerciales y los sistemas rotantes, en el Capítulo 3.

Se muestra entonces, la importancia del estudio de las propiedades métricas de los sistemas rotantes para el estudio de las respectivas propiedades métricas del espacio-tiempo en la presencia de materia. Ésto llevaría a comprender e interpretar más fácilmente las soluciones de tipo estacionario de las ecuaciones de campo de Einstein.

Para estudiar todas las propiedades métricas del espacio-tiempo asociado a un observador rotante arbitrario, en el Capítulo 4 se calculó el tensor métrico asociado a dicho observador a partir de su estado de movimiento, donde se observa principalmente la desincronización de los relojes locales sobre el sistema rotante K, salvo la posibilidad de que cada observador fijo sobre K, pueda "sincronizar" todos sus relojes en reposo relativo lo suficientemente cercanos a él. Esta propiedad implica la dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo-azul de las señales de luz sobre K. El concepto de simultaneidad sobre K resulta ser entonces de carácter relativo a cada observador, lo cual conduce a que la forma como un observador fijo sobre K mide intervalos espaciales y temporales debe ser de carácter local, para que éstos correspondan a magnitudes físicas que dicho observador pueda medir, es decir, de tal forma que el elemento de línea espacio-temporal sea localmente Lorentziano. Ésto implica que dichos intervalos espaciales y temporales se transformen entre un observador no-rotante y uno rotante como una transformación de Lorentz *local*.
A partir de estas propiedades de medición, se muestra que la geometría espacial sobre el sistema rotante debe ser no-euclidiana, con curvatura negativa, aunque la geometría espacio-temporal sobre el sistema rotante sea plana, más no por ésto, minkowskiana.

En el mismo Capítulo, se efectuó el cálculo de las geodésicas temporales, el cual condujo a que sus ecuaciones coinciden con las de la mecánica clásica [Goldstein, 1980] para el movimiento de partículas libres en un sistema rotante, de lo cual se concluye, siguiendo a Adler [Adler, 1975], que la ecuación de la geodésica para la partícula libre es equivalente a la ecuación de movimiento clásica de una partícula en un sistema rotante. Mediante el cálculo de las geodésicas nulas sobre el sistema rotante K, se concluyó que la trayectoria de un rayo de luz se curva sobre K debido a su rotación. Debido al PEE, esta propiedad la debe compartir localmente la luz en la presencia de gravitación. Adicionalmente, se obtiene que, sobre el sistema rotante, ya no es aplicable el principio de reversibilidad de la óptica [Arzeliès, 1966, Hecht, 2002].

Al efectuar el cálculo de los vectores de Killing para el observador "rotante" en el origen, éstos coinciden con los vectores de Killing asociados a un observador inercial. Pero para un observador rotante arbitrario, con radio coordenado de rotación $R \neq 0$, se obtiene un solo vector de Killing, el cual es como de tiempo. Al comparar éste con el vector de Killing como de tiempo asociado al observador inercial, se obtiene que el vector de Killing como de tiempo asociado al observador rotante con $R \neq 0$, visto por el observador en el origen, no es un vector estacionario [Cáceres Dominguez, 1998]. Se obtiene además que, a cada observador rotante arbitrario con $R \neq 0$ le corresponde un vector de Killing como de tiempo diferente. Lo contrario ocurre en un sistema inercial Σ, donde los vectores de Killing asociados a todos los observadores de Σ coinciden, debido a la posibilidad de sincronizar globalmente todos los relojes de un sistema inercial.

El estudio de los conos de luz, asociados a los observadores fijos sobre el sistema rotante, permite concluir que la estructura causal del espacio-tiempo asociado a un observador rotante es un concepto relativo.

Los resultados obtenidos de los cálculos de la velocidad física y la velocidad coordenada de la luz, y haciendo un estudio completo de la cinemática de móviles sobre el sistema rotante K, hacen manifiesta la diferencia conceptual entre velocidad física y velocidad coordenada, a diferencia de los sistemas inerciales, en los cuales, operacionalmente, no hay diferencias entre estos dos conceptos. Como caso particular, se estudia el movimiento de fotones en el vacío, de donde se obtiene cuantitativamente el efecto Sagnac.

En el Capítulo 5 fueron estudiadas las propiedades de un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico a partir de las propiedades de un sistema de referencia uniformemente rotante, como un caso particular. El PEE nos permitió entonces hacer una comparación entre las propiedades métricas del espacio-tiempo asociado a un observador rotante arbitrario, con las propiedades métricas del espacio-tiempo en la presencia de materia. La principal consecuencia de ésto es que todas las propiedades métricas, estudiadas en el Capítulo 4, deben ser compartidas por cualquier campo gravitacional estacionario axialmente simétrico, en particular, la dilatación temporal y el efecto de corrimiento al rojo-azul de las señales de luz en la presencia de tal campo gravitacional, lo cual motivó a afirmar que la gravitación se debe manifestar como la curvatura del espacio-tiempo.

En el mismo Capítulo, se estudió una conexión entre los efectos de los campos de fuerzas centrífugas y de Coriolis con los efectos de un campo gravitacional débil estacionario axialmente simétrico, mediante el cálculo, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975], de la ecuación de la geodésica para una partícula libre en dicho campo gravitacional. Por el PEE, dicha ecuación geodésica resulta ser *localmente* equivalente a la ecuación de la geodésica de una partícula libre sobre un sistema rotante. Ésto implica entonces que los efectos de las fuerzas centrífugas y de Coriolis en sistemas rotantes los podemos interpretar *localmente* como la presencia de un campo gravitacional débil estacionario axialmente simétrico. Adicionalmente, la ecuación de la geodésica para una partícula libre en dicho campo gravitacional resulta idéntica a la ecuación de la *Fuerza de Lorentz Gravitacional* ([M. P. Hobson, 2006], p. 492).

Por medio de una perturbación a primer orden a la métrica de Einstein-Ehrenfest, siguiendo el método de Adler-Bazin-Schiffer [Adler, 1975], se logró, efectivamente escribir el elemento de línea resultante de la misma forma que el elemento de línea en el límite de campo débil y bajas rotaciones de la métrica de Kerr en coordenadas esféricas. Es más, éste último es un caso particular de la perturbación a primer orden de la métrica de Einstein-Ehrenfest.

Al final del Capítulo 5, se extendió la definición de los intervalos de tiempo físico y longitud física, introducidos en los Capítulos 2 y 4 a observadores con aceleración arbitraria, y por el PEE, se les dio una interpretación gravitacional.

En el Capítulo 6 se estudiaron algunas propiedades adicionales de los campos gravitacionales estacionarios axialmente simétricos y los sistemas de referencia rotantes, como el efecto Lense-Thirring, el efecto Sagnac y la desviación geodésica. El efecto Lense-Thirring se calculó para el caso de un campo gravitacional débil, y

se mostró que en un campo gravitacional estacionario axialmente simétrico no sólo se presenta la precesión de los giroscopios en caída libre, sino que también los sistemas inerciales rotan con respecto a un observador asintótico.

En la sección 6.2, mediante el estudio del efecto Sagnac de forma relativista, se confirma que el *Postulado de la constancia de la velocidad de la luz* sólo tiene validez local más no global. Se concluye que es más apropiado utilizar la velocidad coordenada que la velocidad física de la luz para describir su movimiento a lo largo de distancias finitas sobre el sistema rotante, en cambio, resulta más apropiado utilizar la velocidad física de la luz para describir su movimiento a lo largo de distancias infinitesimales, ya que la velocidad coordenada y la velocidad física de la luz coinciden *aproximadamente* en la localidad. Debido al PEE, esta propiedad también debe ser observada en cualquier espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico ([Kajari et al., 2009], §2, p. 6).

Al final del Capítulo 6 se llevó a cabo el estudio del efecto de la desviación geodésica, y comparando éste con el efecto de las fuerzas de marea en gravedad newtoniana, se concluye que el efecto de desviación geodésica es una manifestación de la gravitación. Adicionalmente se concluye que el PEE sólo es aplicable localmente.

7.2. Recomendaciones

Para extender el alcance del presente trabajo, es recomendable estudiar:

- La dinámica sobre sistemas rotantes, y contrastar estos resultados con los obtenidos mediante la Relatividad General.
- La influencia del efecto Lense-Thirring en la estructura galáctica.
- La posibilidad de construir una transformación de coordenadas rotacional entre la métrica de Kerr a bajas rotaciones, construida en el Capítulo 6 y la métrica de Kerr [Nikolic and Pantic, 2012], pero con el sustento conceptual físico del presente trabajo.

Apéndice A

Relatividad General

A.1. Algunos conceptos de Geometría Diferencial

A continuación, vamos a introducir algunos conceptos básicos de la Geometría Diferencial.

A.1.1. Derivada de Lie

La *derivada de Lie* L_X de un tensor $T^{\alpha\beta}$ con respecto a un campo vectorial X^α, se define como [D'Inverno, 1992, M. Wald, 1984]:

$$\mathrm{L}_X T^{\alpha\beta} := \lim_{\delta\lambda \longrightarrow 0} \frac{T^{\alpha\beta}(x') - T'^{\alpha\beta}(x')}{\delta\lambda} = X^\gamma \partial_\gamma T^{\alpha\beta} - T^{\alpha\gamma}\partial_\gamma X^\beta - T^{\gamma\beta}\partial_\gamma X^\alpha, \tag{A-1}$$

donde

$$x'^\alpha = x^\alpha + \delta\lambda X^\alpha(x) \tag{A-2}$$

es una transformación puntual, que envía un punto P con coordenadas x^α, al punto Q, con coordenadas $x'^\alpha = x^\alpha + \delta\lambda X^\alpha(x)$.

A.1.2. La métrica

Cualquier campo tensorial covariante simétrico de rango 2, $g_{\alpha\beta}(x)$ define una *métrica*. Una variedad, dotada con una métrica se llama una *Variedad Riemanniana* [D'Inverno, 1992]. La distancia o intervalo ds entre dos puntos vecinos x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$ es definida por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \tag{A-3}$$

Esta ecuación también es conocida como el elemento de línea, y $g_{\mu\nu}$ también se conoce como la *forma métrica* o *primera forma fundamental* [D'Inverno, 1992].

A.1.3. Geodésicas métricas

Las ecuaciones para una *geodésica métrica temporal*, están dadas por [D'Inverno, 1992]:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{A-4}$$

con

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1, \tag{A-5}$$

donde $\{\alpha\gamma, \beta\}$ son los llamados *símbolos de Christoffel de primer tipo* los cuales están definidos por [D'Inverno, 1992]:

$$\{\alpha\gamma, \beta\} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}\right). \tag{A-6}$$

Multiplicando por $g^{\beta\delta}$ y sumando sobre δ se obtienen los *símbolos de Chiristoffel de segundo tipo* definidos por:

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix} := g^{\beta\delta}\{\alpha\gamma, \delta\} \tag{A-7}$$

Las ecuaciones para una *geodésica métrica nula*, están dadas por [D'Inverno, 1992]:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{A-8}$$

con

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{A-9}$$

donde estas curvas son parametrizadas por λ, llamado *parámetro afín*.

A.1.4. Conexión métrica o conexión de Levi-Civita

La *conexión métrica* o *conexión de Levi-Civita* se define como [D'Inverno, 1992]:

$$\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} := \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\beta\delta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\delta}\right) \tag{A-10}$$

Se sigue a partir de esta ecuación que la conexión métrica es necesariamente simétrica respecto a los índices covariantes, i.e.,

$$\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha} \tag{A-11}$$

A.1.5. Derivada covariante

La *derivada covariante* de un vector X^α contravariante, se define como [D'Inverno, 1992, De la Torre G., 2008]:

$$\nabla_\gamma X^\alpha \equiv X^\alpha_{;\beta} := \partial_\gamma X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta \tag{A-12}$$

Para las componentes covariantes se tiene [De la Torre G., 2008]:

$$\nabla_\gamma X_\alpha \equiv X_{\alpha;\beta} := \partial_\gamma X_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} X_\beta \tag{A-13}$$

La *derivada covariante a lo largo de una curva*, parametrizada por λ, de un vector X^α, se define como [De la Torre G., 2008]:

$$\frac{DX^\alpha}{D\lambda} := X^\alpha_{;\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{dX^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} X^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{A-14}$$

Un vector X^α se dice *transportado paralelamente* a lo largo de una curva, si se satisface [D'Inverno, 1992]:

$$\frac{DX^\alpha}{D\lambda} = 0. \tag{A-15}$$

Y como $dx^\beta/d\lambda$ es arbitrario, entonces, la derivada covariante de X^α se anula, esto es:

$$\nabla_\gamma X^\alpha = \partial_\gamma X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta = 0 \tag{A-16}$$

A.1.6. El tensor de curvatura

El *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann-Christoffel* está definido por [D'Inverno, 1992]:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} := \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \tag{A-17}$$

donde $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ es la conexión métrica, definida por (A-10). Se sigue inmediatamente a partir de la definición que éste es anti-simétrico en su último par de índices, esto es,

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma} \tag{A-18}$$

Como la conexión métrica es simétrica, se llega a la siguiente identidad

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = 0 \tag{A-19}$$

Bajando el primer índice de las componentes del tensor de curvatura, (A-17) también se puede escribir como:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma_{\alpha\sigma\delta}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}, \tag{A-20}$$

el cual es simétrico bajo el intercambio del primer y último par de índices, esto es

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{A-21}$$

El tensor de curvatura se puede utilizar para definir otros tensores importantes como el *tensor de Ricci*, el cual es definido por la contracción [D'Inverno, 1992]:

$$R_{\alpha\beta} := R^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta} = g^{\sigma\rho} R_{\rho\alpha\sigma\beta}, \tag{A-22}$$

el cual es simétrico por (A-21). Una contracción adicional define el *escalar de curvatura* o *escalar de Ricci* R como:

$$R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{A-23}$$

A.1.7. Vectores de Killing

Considere las componentes métricas $g_{\mu\nu}$ relativas a alguna base coordenada dx^{α}, y suponga que los $g_{\mu\nu}$ son independientes de las coordenadas x^K, entonces,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} = 0 \tag{A-24}$$

Esta relación posee una interpretación geométrica: Cualquier curva $x^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda)$ puede ser trasladada en la dirección x^K por un corrimiento coordenado infinitesimal $\Delta x^K = \varepsilon$ para formar una curva equivalente:

$$x^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda) \quad \text{para } \alpha \neq K \quad \text{y} \quad x^K = c^K(\lambda) + \varepsilon. \tag{A-25}$$

La longitud de la curva original es [C. W. Misner, 1973]:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda \tag{A-26}$$

Entonces, expandiendo $g_{\mu\nu}$ en serie de Taylor alrededor de $x^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda)$, la curva desplazada tiene longitud [C. W. Misner, 1973]:

$$L(\varepsilon) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\left\{ g_{\mu\nu}(x(\lambda)) + \varepsilon \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^K} \right\} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda \tag{A-27}$$

Pero, el coeficiente de ε en el integrando es cero. Por lo tanto, la longitud de la nueva curva es idéntica a la de la original: $dL/d\varepsilon = 0$.
El vector

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{d}{d\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial x^K} \right) \tag{A-28}$$

provee una descripción infinitesimal de estas "traslaciones" que preservan las longitudes. Este es llamado un *vector de Killing*, y satisface la *ecuación de Killing* [M. Wald, 1984, C. W. Misner, 1973, Schutz, 1980]:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{A-29}$$

Esta es una condición necesaria y suficiente sobre el vector $\boldsymbol{\xi}$ para asegurar que todas las longitudes son preservadas por traslaciones infinitesimales.
Por tanto, es suficiente establecer ésto en el sistema coordenado de (A-24). En tal sistema de coordenadas, el campo vectorial, según (A-28), tiene componentes [C. W. Misner, 1973]

$$\xi^{\mu} = \delta^{\mu}_{K} \tag{A-30}$$

A partir de la ecuación de Killing (A-29) y de la ecuación de la geodésica (A-4), se tiene un resultado importante: *En cualquier geometría dotada con una simetría descrita por un campo vectorial de Killing* $\boldsymbol{\xi}$*, el movimiento a lo largo de cualquier geodésica, deja constante el producto escalar del vector tangente* $\mathbf{X}$ *con el vector de Killing* [C. W. Misner, 1973]:

$$p_K = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\xi} = \text{cte.} \tag{A-31}$$

A.1.8. Métricas estacionarias

Se dice que una métrica es estacionaria, si ésta es independiente del tiempo. Pero ésto no significa que la métrica no evolucione en el tiempo, sino que el tiempo no entra explícitamente en ella. Entonces, una métrica es estacionaria, si existe un sistema de coordenadas especial, tal que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \overset{*}{=} 0 \tag{A-32}$$

donde el símbolo $\overset{*}{=}$ quiere decir que la igualdad se da bajo ese tipo de coordenadas especial; x^0 es la coordenada temporal. Para garantizar que la solución sea estacionaria, se necesita imponer que la condición (A-32) sea independiente de las coordenadas [D'Inverno, 1992]. Si se define un campo vectorial

$$X^{\alpha} \overset{*}{=} \delta^{\alpha}_{0} \tag{A-33}$$

en el sistema de coordenadas especial, entonces la derivada de Lie del tensor métrico, resulta

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_X g_{\mu\nu} &= X^{\sigma} g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma} X^{\sigma}_{\ ,\nu} + g_{\nu\sigma} X^{\sigma}_{\ ,\mu} \\ &\overset{*}{=} \delta^{\sigma}_{0} g_{\mu\nu,\sigma} \\ &= g_{\mu\nu,0} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A-34}$$

debido a que la métrica es estacionaria. Como $\mathrm{L}_X g_{\mu\nu}$ se anula en un sistema de coordenadas, entonces se anula en todos los sistemas de coordenadas, ya que éste es un tensor. Por tanto, X^{α} es un campo vectorial de Killing [D'Inverno, 1992]. Recíprocamente, dado un campo vectorial de Killing X^{α}, existe un sistema de coordenadas tal que sus componentes se escriben de la forma (A-33), luego

$$0 = \mathrm{L}_X g_{\mu\nu} \overset{*}{=} g_{\mu\nu,0}, \tag{A-35}$$

y por tanto, la métrica es estacionaria. Se puede llegar entonces al siguiente resultado importante, el cual es independiente de las coordenadas [D'Inverno, 1992]

Un espacio-tiempo es estacionario sí y sólo si éste admite un campo vectorial de Killing temporal.

A.1.9. Campos vectoriales ortogonales a las hipersuperficies

Considere la ecuación de una *familia* de hipersuperficies dada por

$$f\left(x^{\alpha}\right)=\mu \tag{A-36}$$

donde diferentes miembros de la familia corresponden a diferentes valores de μ y f es algún campo escalar [D'Inverno, 1992]. Considere dos puntos vecinos P y Q con coordenadas $\left(x^{\alpha}\right)$ y $\left(x^{\beta}\right)$, respectivamente, estando en alguna de las hipersuperficies S de dicha familia. Entonces, por la condición (A-36) se debe tener, expandiendo a primer orden en serie de Taylor, que

$$\begin{aligned}\mu &= f\left(x^{\alpha}+dx^{\alpha}\right)\approx f\left(x^{\alpha}\right)+\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha} \\ \mu &= f\left(x^{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{A-37}$$

de donde se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}=0 \tag{A-38}$$

en P [D'Inverno, 1992]. Se puede escribir, equivalentemente esta ecuación como

$$n_{\alpha}dx^{\alpha}=g_{\alpha\beta}n^{\beta}dx^{\alpha}=0, \tag{A-39}$$

en P, donde se define el campo vectorial covariante n_{α} a la familia de hipersuperficies como [D'Inverno, 1992]

$$n_{\alpha}=\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \tag{A-40}$$

Entonces, n^{α} es ortogonal al vector infinitesimal contravariante dx^{α}. Como dx^{α} está en S por construcción, se sigue que n^{α} es ortogonal a S, y por lo tanto, se conoce como el *campo vectorial normal* a S en P. Cualquier otro campo vectorial X^{α} se dice *ortogonal a la familia de hipersuperficies* si éste es ortogonal en cada punto a la familia de hipersuperficies, en cuyo caso, debe ser proporcional a n^{α} en cada punto. es decir

$$X^{\alpha}=\lambda\left(x\right)n^{\alpha} \tag{A-41}$$

para algún factor de proporcionalidad λ, el cual puede cambiar de punto a punto. Entonces, las curvas integrales de X^{α} son ortogonales a la familia de hipersuperficies (Figura **A-1**).
Por (A-41) y (A-40), la condición de ortogonalidad se puede escribir como [D'Inverno, 1992]

$$X_{\alpha}=\lambda\left(x\right)n_{\alpha}=\lambda f_{,\alpha} \tag{A-42}$$

Luego,

$$X_{\alpha}\partial_{\beta}X_{\gamma}=\lambda f_{,\alpha}\lambda_{,\beta}f_{,\gamma}+\lambda^{2}f_{,\alpha}f_{,\gamma\beta} \tag{A-43}$$

Tomando la parte antisimétrica total de esta ecuación, se tiene que [D'Inverno, 1992]

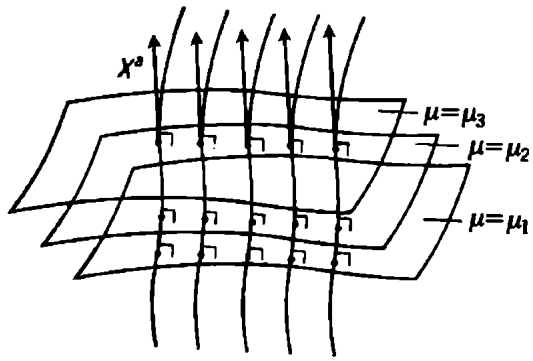

Figura A-1.: Campo vectorial ortogonal a la familia de hipersuperficies X^α [D'Inverno, 1992].

$$X_{[\alpha}\,\partial_\beta X_{\gamma]} = 0, \tag{A-44}$$

ya que el primer término en la derecha de la ecuación (A-43) es simétrico en α y γ y el segundo término es simétrico en β y γ. Se puede demostrar fácilmente que la forma de esta ecuación no cambia si se reemplaza la derivada ordinaria por una derivada covariante [D'Inverno, 1992]

$$X_{[\alpha}\,\nabla_\beta X_{\gamma]} = 0 \tag{A-45}$$

ya que en la derivada covariante, la conexión métrica $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$ es simétrica con respecto a los índices inferiores μ y ν. Se muestra entonces que cualquier campo vectorial ortogonal a las hipersuperficies satisface (A-45). Se puede demostrar también que: *Cualquier campo vectorial de Killing no nulo X^α satisfaciendo (A-45) es necesariamente ortogonal a la familia de hipersuperficies.* En este caso, el campo vectorial X^α resulta de la forma

$$X_\alpha = X^2 f_{,\alpha}, \tag{A-46}$$

la cual es la misma condición de ortogonalidad (A-42), con $\lambda = X^2 := X^\alpha X_\alpha$ [D'Inverno, 1992].

A.1.10. Métricas estáticas

Una métrica $g_{\mu\nu}$ es estática, si además de ser estacionaria, el intervalo espacio-temporal $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ es invariante bajo una inversión del tiempo alrededor de cualquier origen temporal. Considere entonces el intervalo de tiempo entre dos eventos $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ y $\left(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3\right)$ en el sistema de coordenadas especial considerado anteriormente. Entonces,

$$ds^2 \stackrel{*}{=} g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}\left(dx^1\right)^2 \tag{A-47}$$

donde todos los $g_{\mu\nu}$ dependen de x^k $(k = 1, 2, 3)$ solamente. Bajo una inversión temporal

$$x^0 \longrightarrow x'^0 = -x^0 \tag{A-48}$$

los $g_{\mu\nu}$ permanecen invariantes, pero ds^2 se transforma en

$$ds^2 \overset{*}{=} g_{00}\left(dx^0\right)^2 - 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}\left(dx^1\right)^2 \tag{A-49}$$

Como la métrica es estática, se puede igualar las dos ecuaciones (A-47) y (A-49), para obtener que el coeficiente g_{01} se anula. Por un procedimiento similar, se debe obtener que los demás coeficientes g_{02} y g_{03} se deben anular. Por lo tanto, en una métrica estática no deben aparecer términos cruzados dx^0dx^k, con el sistema de coordenadas especial utilizado [D'Inverno, 1992].

Ahora, se va a estudiar la condición de ortogonalidad (A-46) en un espacio-tiempo estacionario, en un sistema de coordenadas adaptado al campo vectorial de Killing temporal, esto es, $X^\alpha \overset{*}{=} \delta^\alpha_0$. Entonces

$$X_\alpha = g_{\alpha\nu}X^\nu \overset{*}{=} g_{\alpha\nu}\delta^\nu_0 = g_{0\alpha} \tag{A-50}$$

y

$$X^2 = X_\alpha X^\alpha \overset{*}{=} g_{0\alpha}\delta^\alpha_0 = g_{00} \tag{A-51}$$

Luego, la condición de ortogonalidad (A-46) da

$$g_{0\alpha} \overset{*}{=} g_{00}f_{,\alpha} \tag{A-52}$$

para algún campo escalar f [D'Inverno, 1992]. Cuando $\alpha = 0$, se obtiene que $f_{,0} \overset{*}{=} 1$, e integrando, da

$$f\left(x^\alpha\right) \overset{*}{=} x^0 + h\left(x^k\right); \quad k = 1, 2, 3 \tag{A-53}$$

donde h es una función arbitraria de las coordenadas espaciales solamente. Considere la transformación de coordenadas

$$x^0 \longrightarrow x'^0 = x^0 + h\left(x^k\right), \qquad x^k \longrightarrow x'^k = x^k \tag{A-54}$$

Entonces, aplicando esta transformación de coordenadas, se obtiene

1. $$X'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}X^\mu \overset{*}{=} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\delta^\mu_0 = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} = \begin{cases} 1 & ;\ \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & ;\ \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases} = \delta^\alpha_0 \overset{*}{=} X^\alpha \tag{A-55}$$

2. $$g'_{\mu\nu,0} = 0$$

   ya que la definición de métrica estacionaria es independiente de las coordenadas.

3. Con las nuevas coordenadas, se puede subir o bajas índices con las componentes $g'_{\mu\nu}$ del tensor métrico, luego

   $$X'_\alpha = g'_{\alpha\nu}X'^\nu \overset{*}{=} g'_{\alpha\nu}X^\nu \overset{*}{=} g'_{\alpha\nu}\delta^\nu_0 = g'_{0\alpha} \tag{A-56}$$

Entonces,

$$X'^2 = X'_\alpha X'^\alpha \overset{*}{=} g'_{0\alpha}\delta^\alpha_0 = g'_{00} \tag{A-57}$$

Como X^2 es invariante bajo transformaciones de coordenadas, entonces, $X'^2 = X^2$, luego, por (A-51) se tiene que

$$g'_{00} = X'^2 = X^2 \overset{*}{=} g_{00} \tag{A-58}$$

4. Aplicando la transformación de coordenadas (A-54) a la función escalar f, tenemos

$$f\left(x^\alpha\right) = x^0 + h\left(x^k\right) = x'^0 \tag{A-59}$$

Como el vector de Killing X satisface la condición de ortogonalidad (A-46), tenemos

$$g'_{0\alpha} = X^2 \frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} \overset{*}{=} \begin{cases} g_{00} & ;\ \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & ;\ \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{A-60}$$

Luego,

$$g'_{0k} \overset{*}{=} 0, \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \tag{A-61}$$

Como la función $h\left(x^k\right)$ en la transformación de coordenadas (A-54) es arbitraria, entonces los cuatro resultados anteriores son independientes del sistema de coordenadas utilizado. En especial la última ecuación dice que no hay términos cruzados $dx^0 dx^\alpha$ en el elemento de línea ds^2, entonces, la métrica es estática. Se llega entonces al siguiente resultado [D'Inverno, 1992].

Un espacio-tiempo se dice estático sí y sólo si éste admite un campo vectorial de Killing temporal ortogonal a la familia de hipersuperficies.

A.2. Postulados de la Teoría de la Relatividad General

Al final de la subsección 5.1.5 se afirmó que: *La gravitación es la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.* Con esta motivación, se introducirá a continuación, un modelo matemático para el espacio-tiempo, siguiendo la estructura propuesta por Stephen W. Hawking y G.F.R. Ellis [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005], luego se introducirán los primeros dos postulados en los que se fundamenta la Teoría de la Relatividad General, éstos son, causalidad local y conservación local de la energía. Estos postulados son comunes tanto en la Relatividad Especial como en la General. Por último, se introducirá el tercer postulado, las ecuaciones de campo de Einstein.

A.2.1. La variedad espacio-tiempo

Los eventos físicos del espacio-tiempo se describen en términos de puntos que conforman una variedad $\mathcal{M}$ diferenciable suave (C^∞) 4-dimensional conexa de Haussdorf, con una estructura métrica Lorentziana $\mathbf{g}$ (*es decir, una métrica con signatura* -2) *sobre* $\mathcal{M}$.

La variedad $\mathcal{M}$, con las mencionadas propiedades, y dotada con la métrica Lorentziana $\mathbf{g}$, conforman un modelo matemático $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Dos modelos $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ y $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ son *equivalentes* si ellos son *isométricos*, ésto es, si existe un difeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$, la cual envía la métrica $\mathbf{g}$ a la métrica $\mathbf{g}'$, ésto es, $\phi(\mathbf{g}) = \mathbf{g}'$. Más precisamente, el modelo para el espacio-tiempo no es sólo una pareja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, sino toda una clase de equivalencia de todas las parejas $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ las cuales son equivalentes a $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Se trabaja normalmente con un elemento representativo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de la clase de equivalencia.
La métrica $\mathbf{g}$ divide a los vectores no nulos en un punto $p \in \mathcal{M}$ en tres clases disyuntas [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005]:

1. $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ se llama *como de tiempo* si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$.
2. $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ se llama *como de espacio* si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$.
3. $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ se llama *como de luz o nulo* si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.

A.2.2. Los campos de materia

Los campos que se definen en $\mathcal{M}$, tales como el campo electromagnético, el campo de neutrinos, etc., describen el contenido de materia del espacio-tiempo. Dichos campos obedecen a ecuaciones que se expresan como relaciones entre tensores sobre $\mathcal{M}$, en las cuales las derivadas con respecto a las coordenadas son derivadas covariantes con respecto a la conexión simétrica definida por la métrica $\mathbf{g}$.
Se denotan los campos de materia incluidos en la teoría por $\Psi^{\alpha\ldots\beta}_{(i)\gamma\ldots\delta}(x)$, donde el subíndice (i) numera los diferentes campos considerados. Los siguientes dos postulados sobre la naturaleza de las ecuaciones obedecidas por los campos $\Psi^{\alpha\ldots\beta}_{(i)\gamma\ldots\delta}(x)$ son comunes tanto para la Teoría Especial como para la Teoría General de la Relatividad [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005]:

A.2.3. Postulados

Postulado I (Causalidad local) *Las ecuaciones que gobiernan los campos de materia deben ser tales que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ es una vecindad normal convexa y $p, q \in \mathcal{U}$, entonces una señal puede ser enviada en $\mathcal{U}$ entre p y q sí y sólo si p y q pueden ser unidos por una C^1-curva completamente contenida en $\mathcal{U}$, cuyo vector tangente en todas partes es diferente de cero y es como de tiempo o como de luz; tal curva se llama no como de espacio* [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005].

Una forma más precisa de establecer este postulado, y físicamente más significativa, se puede dar en términos del problema de Cauchy (Véase [Stephen W. Hawking, 1973], cáp. 7) para los campos de materia: Sea $p \in \mathcal{U}$ tal que toda curva no como de espacio a través de p interseca la superficie como de espacio $x^0 = \text{cte.}$ dentro de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de puntos en la hipersuperficie $x^0 = \text{cte.}$, los cuales pueden ser alcanzados por curvas no como de espacio en $\mathcal{U}$ a través de p. Se exige entonces, que los valores de los campos de materia en p deben estar unívocamente determinados por los valores del campo y sus derivadas a un orden finito sobre $\mathcal{F}$ [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005].

El postulado de causalidad sitúa a la métrica $\mathbf{g}$ aparte de los otros campos de materia sobre $\mathcal{M}$, dado su carácter geométrico especial [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005].

Definición (Vecindad convexa) *Una vecindad $\mathcal{V}_p$ de un punto $p \in \mathcal{M}$ es convexa si todo punto $q \in \mathcal{V}_p$ puede ser unido a cualquier otro punto $r \in \mathcal{V}_p$ por una única geodésica que parte del punto q y está totalmente contenida en $\mathcal{V}_p$* [Tejeiro S., 2005].

Este comportamiento de las geodésicas en una vecindad normal convexa no se da, en general, sobre toda la variedad, pues es posible que dados dos puntos cualesquiera de $\mathcal{M}$ no se puedan unir por una geodésica, y por otra parte, hay casos en los que a través de dos puntos cualesquiera de la variedad, pasen más de una geodésica, por ejemplo en una subvariedad espacial asociada a un sistema rotente K pasan dos geodésicas nulas a través de cualquier par de puntos p y q de dicha subvariedad (Véase subsección 4.5.7).

Postulado II (Conservación local de la energía) *Las ecuaciones que gobiernan los campos de materia son tales que existe un tensor simétrico $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\left(\mathbf{g}, \Psi_{(i)}, \nabla\Psi_{(i)}, \ldots\right) = T_{\nu\mu}$, que depende de la métrica, los campos y sus derivadas covariantes hasta un orden finito, tal que* [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005]:

1. *$T_{\mu\nu} = 0$ sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ sí y sólo si todos los campos de materia se anulan sobre $\mathcal{U}$.*
2. $T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0$.

La primera condición expresa que todos los campos de materia tienen energía. La segunda condición expresa la conservación de la energía-momento: Si la variedad espacio-tiempo admite un vector de Killing $\mathbf{K}$, entonces se obtiene una ley de conservación, pues sean

$$p^\alpha = T^{\alpha\beta} K_\beta \tag{A-62}$$

las componentes del vector $\mathbf{P}$ obtenido por la contracción del tensor momento-energía con el campo de Killing, entonces

$$p^\alpha_{\ ;\alpha} = T^{\alpha\beta}_{\ ;\alpha} K_\beta + T^{\alpha\beta} K_{\beta;\alpha} = 0 \tag{A-63}$$

pues $T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0$ *y* $\mathbf{K}$ satisface la ecuación de Killing (A-29). Entonces, si $\mathcal{D}$ es una región compacta y orientable, por el teorema de Gauss se tiene que

$$\int_{\partial\mathcal{D}} p^\alpha d\sigma_\alpha = \int_{\mathcal{D}} p^\alpha_{\ ;\alpha} dv = 0 \tag{A-64}$$

Este resultado se puede interpretar físicamente como: *El flujo de la componente p^α del tensor momento-energía en la dirección del campo de Killing $\mathbf{K}$ sobre una superficie cerrada se anula.* Esta es la generalización del teorema de Noether, el cual establece que a toda simetría le corresponde una ley de conservación [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005].

Postulado III (Ecuaciones de campo de Einstein) *La métrica sobre la variedad espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein*

$$\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}\right) + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \tag{A-65}$$

donde G es la constante de gravitación universal, y Λ es la constante cosmológica [Stephen W. Hawking, 1973, Tejeiro S., 2005].

Estas ecuaciones deben reducirse en un límite de "campo" débil y bajas energías a las ecuaciones de campo de la teoría de la gravitación Newtoniana. En efecto, si el "campo" es débil, la métrica se puede escribir en la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \quad |h_{\mu\nu}| << 1 \tag{A-66}$$

donde los $h_{\mu\nu}$ representan perturbaciones muy pequeñas, independientes del tiempo a las componentes del tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, debidas a un cuerpo que produce gravedad. Considere una partícula de prueba cuya velocidad a lo largo de su geodésica es mucho más pequeña que c, ésto es, que $\beta := v/c << 1$ a primer orden. Suponga que en éste límite, las presiones internas del cuerpo que produce gravedad son despreciables ($p \approx 0$), y que la constante cosmológica es nula ($\Lambda = 0$).

Con estas consideraciones, y siguiendo un procedimiento análogo al de la subsección 5.1.5, se obtiene que la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla} h_{00} \tag{A-67}$$

coincide con la ecuación de movimiento en un campo gravitacional clásico

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi_g, \tag{A-68}$$

si identificamos el potencial gravitacional newtoniano Φ_g como:

$$\Phi_g = \frac{c^2}{2} h_{00} \tag{A-69}$$

Ahora bien, escribamos las ecuaciones de campo de Einstein (A-65) en una forma más apropiada como (Véase [De la Torre G., 2008])

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\ \alpha}\right) \tag{A-70}$$

Calculando, en particular la componente R_{00} del tensor de Ricci se obtiene que

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi_g, \tag{A-71}$$

y considerando la aproximación de fluido constituido de partículas no interactuantes ($p \approx 0$), el lado derecho de la ecuación (A-70), correspondiente a la componente 00, se reduce a [De la Torre G., 2008]

$$-\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\ \alpha}\right) \approx \frac{4\pi G}{c^2}\rho \tag{A-72}$$

Por las dos últimas ecuaciones se obtiene el límite newtoniano:

$$\nabla^2\Phi_g = 4\pi G\rho \tag{A-73}$$

Bibliografía

[Adler, 1975] Adler, Ronald Bazin, M. S. M. (1975). *Introduction to General Relativity.* International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, New York, 2 edition.

[Arzeliès, 1966] Arzeliès, H. (1966). *Relativistic Kinematics.* Pergamon Press, París.

[Ashby, 2004] Ashby, N. (2004). The sagnac effect in the global positioning system. In Rizzi, G. and Ruggiero, M., editors, *Relativity in Rotating Frames*, volume 135 of *Fundamental Theories of Physics*, pages 11–28. Springer Netherlands.

[C. W. Misner, 1973] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. W. (1973). *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, San Francisco.

[Carroll, 1997] Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity.

[Cáceres Dominguez, 1998] Cáceres Dominguez, A. (1998). Estado de vacío de un observador rotante. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia - sede Bogotá.

[D. Klauber, 2004] D. Klauber, R. (2004). Toward a consistent theory of relativistic rotation. In Rizzi, G. and Ruggiero, M., editors, *Relativity in Rotating Frames*, pages 103–137.

[De la Torre G., 2008] De la Torre G., L. (2008). *Elementos de Relatividad.* Editorial Universidad de Antioquia.

[Dieks, 2010] Dieks, D. (2010). Space, time and coordinates in a rotating world. In Rizzi, G. and Ruggiero, M., editors, *Relativity in Rotating Frames*, pages 29–43.

[D'Inverno, 1992] D'Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein's Relativity.* Clarendon Press, Oxford.

[Einstein, 1905] Einstein, A. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. In H. A. Lorentz, A. Einstein, H. M. and Weyl, H., editors, *The Principle of Relativity*, volume 17 of *A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, pages 35–65. Dover Publications, Inc.

[Einstein, 1986] Einstein, A. (1986). *Sobre la teoría especial y la teoría general de la relatividad - El significado de la relatividad.* Obras Maestras del Pemsamiento Contemporáneo. Planeta-Agostini.

[Goldstein, 1980] Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics.* Addison Wesley, Columbia University, 2 edition.

[H. Titterton and L. Weston, 2004] H. Titterton, D. and L. Weston, J. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology.* The Institution of Electrical Engineers, United Kingdom, 2 edition.

[Hecht, 2002] Hecht, E. (2002). *Optics.* Adelphy University, San Francisco, CA, 4 edition.

[Held, 1980] Held, A. (1980). *General Relativity and Gravitation - One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein*, volume 1. Institute of Theoretical Physics, University of Berne, Berne, Switzerland.

[Kajari et al., 2009] Kajari, E., Buser, M., Feiler, C., and Schleich, W. P. (2009). Rotation in relativity and the propagation of light. *Riv. Nuovo Cim.*, 32:339–438.

[Klauber, 1998] Klauber, R. D. (1998). New perspectives on the relativistically rotating disk and non-time-orthogonal reference frames. *Found. Phys. Lett.*, 11(5):405–443.

[Landau, 1980] Landau, L.D. Lifshitz, E. (1980). *The Classical Theory of Fields.* Course of Theoretical Physics Vol. 2. Butterworth-Heinemann, Columbia University, 4 edition.

[Logunov, 1998] Logunov, A. (1998). *Curso de Teoría de la Relatividad y de la Gravitación - Análisis contemporáneo del problema.* Academia de Ciencias de Rusia, URSS, Moscú.

[M. P. Hobson, 2006] M. P. Hobson, G. Efstathiou, A. N. L. (2006). *General Relativity - An Introduction for Physicists.* Cambridge University Press.

[M. Wald, 1984] M. Wald, R. (1984). *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago and London.

[Mach, 1912] Mach, E. (1912). *The Science of Mechanics.* The Open Court Publishing, Chicago-London.

[Michelson, 1925] Michelson, A. A., G. H. G. (1925). The effect of the earth's rotation on the velocity of light, ii. *Astrophysical Journal*, 61:140.

[Nikolic and Pantic, 2012] Nikolic, B. D. and Pantic, M. R. (2012). A possible intuitive derivation of the kerr metric in orthogonal form based on ellipsoidal metric ansatz.

[R. and D., 1979] R., H. and D., T. (1979). *The Einstein Myth and the Ives Papers: A Counter-Revolution in Physics.* Devin-Adair, Old Greenwich.

[Ruggiero and Tartaglia, 2015] Ruggiero, M. L. and Tartaglia, A. (2015). A note on the sagnac effect for matter beams. *Eur. Phys. J. Plus*, 130(5):90.

[Sagnac G., 1913] Sagnac G., C. R. (1913). *Acad. Sci., Paris*, 157:1410.

[Schutz, 1980] Schutz, B. (1980). *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

[Sepúlveda, 2013] Sepúlveda, A. (2013). *Elementos de Relatividad General*, volume 1. Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Medellín.

[Stephen W. Hawking, 1973] Stephen W. Hawking, G. E. (1973). *The Large Structure of Space Time.* Cambridge University Press.

[Tejeiro S., 2005] Tejeiro S., J. M. (2005). *Sobre la Teoría Especial de la Relatividad.* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional.