UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

INCIDENCIA DEL JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCO FIDEL SUAREZ DEL MUNICIPIO DE PÁCORA

JHOINER ALFONSO MEJÍA CASTAÑEDA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MANIZALES, COLOMBIA
2015

INCIDENCIA DEL JUEGO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARCO FIDEL SUAREZ DEL MUNICIPIO DE PÁCORA

JHOINER ALFONSO MEJÍA CASTAÑEDA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

DIRECTOR:
Magister GONZALO MEDINA ARELLANO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MANIZALES, COLOMBIA
2015

AGRADECIMIENTOS

Una de las bondades más grandes del ser humano es la gratitud, pues las metas se alcanzan no en soledad, sino con el acompañamiento de quienes de manera directa o indirecta despejan el camino para poder recorrerlo, así, es importante reconocer la ayuda de Dios quien lo hace todo posible, de mis padres y hermana con su apoyo incondicional, de mi novia quien me acompañó permanentemente, con su creatividad, destreza para el arte y la decoración y al profesor Gonzalo Medina Arellano quien me guió asertivamente para el desarrollo de este proyecto.

RESUMEN

En el presente trabajo se proponen dos juegos didácticos para fortalecer la solución de problemas con funciones trigonométricas, reconociendo el carácter motivador que lleva intrínseco el juego y las bondades sustentadas dentro de la enseñanza de la matemática, para aprovecharlas y generar aprendizajes significativos mientras el estudiante se divierte. Así mismo se presenta un análisis epistemológico del juego y una reseña histórica de la trigonometría, que permite dar una visión más amplia de los aspectos importantes para el desarrollo del estudio investigativo, el cual es orientado por la metodología de la Investigación-Acción, que permite al investigador reflexionar sobre su quehacer, todo un proceso contextualizado de carácter principalmente cualitativo, aunque vincula análisis cuantitativos.

Para el desarrollo del trabajo se realiza un pre-test que permite reconocer las capacidades de los estudiantes para identificar correctamente componentes básicos en el estudio de la trigonometría y la solución de problemas, posteriormente se propone la realización del juego "expedición trigonométrica", donde en equipos deben solucionar una serie de problemas por estaciones o bases, ayudados de un instrumento de medición de ángulos construido por ellos mismo, también un juego de mesa "carrera trigonométrica" que como el anterior se puede trabajar en equipos o de forma individual, solucionando tareas, preguntas y problemas dados en cartas. Al final de la aplicación de estas propuestas se implementa el post-test, para realizar un contraste con los primeros resultados y empleando también la observación y registro de hallazgos de cada sesión de clase, llegar a conclusiones y recomendaciones sobre la implementación de los juegos mencionados.

Toda la propuesta se centra en los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez del municipio de Pácora, quienes presentan dificultad para hacer uso del conocimiento en la solución de problemas.

PALABRAS CLAVE:
Trigonometría, juego, solución de problemas, motivación.

ABSTRACT

Incidence of the game in solving problems with trigonometric functions in the tenth grade of Educational Institution Marco Fidel Suarez, Pácora municipality.

In this work two educational games are proposed to strengthen problem solving with trigonometric functions; recognizing the intrinsic motivating character that games have and their benefits supported in the teaching of mathematics. Learners have fun while they take advantage and generate meaningful learning. An epistemological analysis of the game and a historical background of trigonometry are also presented, in order to give a broader view about the important aspects for the development of research study, which is guided by the Action-Research methodology that allows the researcher to reflect on his work, it is a contextualized process mainly qualitative although quantitative analysis is also linked.

In order to develop this work a pre-test is done to recognize the learners' capacities to identify correctly basic components related to the study of trigonometry and problem solving, later the realization of the game "Trigonometric expedition" is proposed, in this game learners work in teams to solve series of problems in different bases, using an angles measuring instrument built by themselves. Besides, a game board "trigonometric race" is also proposed and as the previous one, can be played in teams or individually, it consists on solving tasks, questions and problems given in cards. At the end of the implementation of these proposals, a post-test is done, in order to contrast it with the first results. With this information and through the observation and findings' registers of each class session some conclusions and recommendations about the games' implementation are mentioned.

The entire proposal is focused on tenth graders of the Educational Establishment Marco Fidel Suárez, located in the municipality of Pácora, these students have difficulty making use of knowledge in problem solving.

KEY WORDS:
Trigonometry, game, problem solving, motivation.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN IV
ABSTRACT V
TABLA DE CONTENIDO VI
LISTA DE FIGURAS VIII
LISTA DE TABLAS IX
1. INTRODUCCIÓN 1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 2
2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA 2
3. JUSTIFICACIÓN 3
4. OBJETIVOS 6
4.1. OBJETIVO GENERAL 6
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 6
5. ANTECEDENTES 7
6. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS 10
6.1. ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO SOBRE EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA 10
6.2. ANÁLISIS HISTÓRICO DE LA TRIGONOMETRÍA 17
7. ASPECTOS PEDAGÓGICOS 20
7.1. EL JUEGO COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA 20
7.2. LA MOTIVACIÓN EN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE 26
8. DISEÑO METODOLÓGICO 30
8.1. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO 31
8.1.1. Fase de planificación. 31
8.1.2. Fase de acción. 31
8.1.3. Fase de observación. 32
8.1.4. Fase de reflexión. 32
8.2. POBLACIÓN Y MUESTRA 33

8.3. PROPUESTAS INNOVADORAS 34
8.3.1. Expedición trigonométrica. 35
8.3.2. Carrera trigonométrica. 41
8.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN 57
8.4.1. Pre-Test. 57
8.4.2. Post-Test. 57
8.4.3. Diario de campo. 58
8.5. PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN 58
8.5.1. Análisis test. 58
8.5.2. Análisis diario de campo. 64
9. CONCLUSIONES 74
10. RECOMENDACIONES 77
11. REFERENCIAS 80
12. APÉNDICES 82
12.1. APÉNDICE A: ELABORACIÓN INSTRUMENTO DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS 82
12.2. APÉNDICE B: TEST 84
12.3. APÉNDICE C: MATRIZ DIARIO DE CAMPO 87
12.4. APÉNDICE D: FOTOS 88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Resultados por número de estudiantes en la primera actividad del pre-test y post-test 58
Figura 2. Resultados por número de estudiantes en la segunda actividad del pre-test y post-test 59
Figura 3. Resultados por número de estudiantes en la tercera actividad del pre-test y post-test.. 60
Figura 4. Resultados por número de estudiantes en la cuarta actividad del pre-test y post-test... 61
Figura 5. Resultados por número de estudiantes en la quinta actividad del pre-test y post-test... 62
Figura 6. Resultados por número de estudiantes en la sexta actividad del pre-test y post-test 63

LISTA DE TABLAS

Tabla 1- *Aciertos en la segunda actividad* 59
Tabla 2- *Aciertos en la tercera actividad* 60
Tabla 3- *Aciertos en la cuarta actividad* 61
Tabla 4- *Aciertos en la quinta actividad* 62
Tabla 5- *Diario de campo sesión 1* 64
Tabla 6- *Diario de campo sesión 2* 65
Tabla 7- *Diario de campo sesión 3* 66
Tabla 8- *Diario de campo sesión 4* 69
Tabla 9- *Diario de campo sesión 5* 71
Tabla 10- *Diario de campo sesión 6* 72
Tabla 11- *Diario de campo sesión 7* 73

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo, parte de una problemática presente en los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez, la cual se delimita por medio de una indagación tipo estado de arte, de forma que se pueda reconocer la línea a seguir y servir de base para sustentar el trabajo, así mismo realizar un análisis epistemológico del juego y la trigonometría y una búsqueda de los conceptos pedagógicos del juego en la enseñanza de la matemática.

Toda esta información permitió concebir la idea de estructurar dos juegos didácticos, uno que apunte al movimiento y la construcción y otro con característica de mesa, aunque en la misma línea de vincular acción, creatividad y trabajo en equipo.

Respondiendo a lo anterior se proponen las estrategias "Expedición trigonométrica" y "carrera trigonométrica" de las cuales se puede apreciar toda su construcción, puestas en práctica después de un pre-test que permite establecer un punto de partida en cuanto a las competencias del estudiante para la solución de problemas y ser comparado con el pos-test, y de ello recolectar la información para darle validez o no a los juegos, acompañado de una observación participante con lo cual analizar los elementos necesarios para responder la pregunta planteada. Todo este análisis permite llegar a conclusiones que se enfocan al trabajo en la clase de matemáticas y posible de generalizarse a diferentes contextos de aula y recomendaciones para los docentes que deseen reproducir la experiencia en sus lugares de trabajo, aquellos que quieran transformar sus prácticas educativas tradicionales a unas más atrayentes para jóvenes estudiantes que consideran la matemática aburrida y complicada.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Qué importancia tiene el uso del juego como estrategia para fortalecer el manejo de las funciones trigonométricas en la solución de problemas?

2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El trabajo final de la Maestría se desarrolló en el grado décimo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez del municipio de Pácora, grupo conformado por 39 estudiantes, 26 hombres y 13 mujeres, con edades entre 14 y 18 años. La problemática se hace evidente en la dificultad que tiene la mayoría de educandos para la comprensión de los saberes en el área de matemáticas, en especial las relaciones trigonométricas. Antes de trabajar en esta propuesta, la didáctica dentro del aula se ha venido realizando con metodología tradicional, con explicaciones en tablero y la ejercitación individual y grupal, lo que no ha sido suficiente, pues los desempeños son básicos o bajos, lo cual se observa de mayor manera cuando se pretende solucionar problemas afines a los temas tratados.

Algunos estudiantes expresan su desinterés por el área, y en su mayoría la consideración de la misma como aburrida y difícil de entender lo que deja ver desmotivación por el aprendizaje que cierra las puertas para mejorar los procesos académicos en el área, por lo que se requiere la implementación de estrategias que despierten en ellos motivación y gusto por el trabajo matemático, a su vez que les demuestre de manera vivencial la utilidad de los saberes estudiados para procesos y actividades de la vida.

A lo anterior se suma que en los últimos años la Institución ha tenido problemas con su planta de personal docente, lo que ha repercutido en el proceso de los estudiantes, pues estos han visto alterado su intensidad horaria por los momentos en los que no han tenido profesor, lo que se muestra en algunos vacíos y atrasos en los contenidos que deben tener para el grado y nivel de formación.

3. JUSTIFICACIÓN

Este proyecto de Grado se presenta como una propuesta de solución a la problemática existente en los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez, en cuanto se observan dificultades para hacer uso de las relaciones trigonométricas en la solución de problemas, resaltando de esta competencia su importancia en la formación matemática, bien lo sustenta Corbalán (1994) en "Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato" "el núcleo fundamental de las matemáticas lo constituye la resolución de problemas" (p. 57).

Entendiendo que "un problema sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad…, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos" (Corbalán, 1994, p. 59). Implica entonces que el estudiante frente a un problema debe utilizar sus habilidades y saberes, relacionarlos de manera que lo entienda y halle su solución atendiendo a uno de los múltiples caminos que puede encontrar para ello, lo que es más significativo que resolver un ejercicio de repaso de algún algoritmo. Pero los educandos, por lo que se ha mencionado en cuanto a la complejidad de un problema, se desmotivan y pierden el interés en el trabajo y en la matemática misma, que desafortunadamente ha tenido un estigma de ser muy difícil y reservada para algunos pocos afortunados que la entienden.

Para Vicenç Font (1994) una de las causas más importantes de las dificultades para el aprendizaje de la matemática es la falta de motivación, reconociendo ésta como "la intención con que el alumno se enfrenta a la tarea propuesta" (p. 11). La que puede ser de dos tipos, la primera donde el estudiante busca verdaderamente comprender, por lo que relaciona su conocimiento ya adquirido con el nuevo y la segunda es más superficial donde solo busca cumplir con las tareas del docente. Esta elección depende del sentido que el educando encuentre al proceso mismo de enseñanza-aprendizaje, sentido que se observa en sus metas, es decir los objetivos propuestos por él para su desarrollo en la vida educativa, "una de las causas que influyen en la manera de afrontar las situaciones escolares es el tipo de meta que el alumno persiga en su actividad escolar" (Font, 1994, p. 12).

En el campo de lo educativo la motivación cobra gran importancia como lo expresan Farías y Pérez (2010) “para conseguir que los alumnos aprendan, no basta explicar bien la materia y exigirles que aprendan. Es necesario despertar su atención, crear en ellos un genuino interés por el estudio, estimular su deseo de conseguir los resultados previstos y cultivar el gusto por los trabajos escolares. (p. 37). La propuesta del presente trabajo se centra en los juegos al reconocer su carácter motivador, como lo sustenta Corbalán (1994) para quien los juegos “comparándolos con las actividades habituales de las clases de matemáticas, tienen un atractivo añadido: apetece dedicarse a ellos. No hay que empujar a los alumnos para que comiencen el análisis de los mismos; lo hacen voluntariamente” (p. 8).

Así, se reconoce en la motivación un elemento importante en la consolidación de aprendizajes significativos y, en esta línea, un aprendizaje se puede considerar significativo si se utiliza para solucionar satisfactoriamente una situación problema; el juego se toma como herramienta motivadora y elemento central de todo el proceso, en cuanto se pretende estudiar las implicaciones de su uso como mediador en el proceso de solución de problemas en los que el estudiante pueda utilizar los saberes enseñados y ver de esta manera la importancia de los mismos, “suele ser bastante más atractivo abordar la resolución de problemas partiendo de situaciones lúdicas equivalentes, que de las descarnadas propuestas puramente matemáticas” (Corbalán, 1994, p. 21).

También se debe atender el impacto que para los jóvenes tiene el paso de la educación básica secundaria a la media, siendo el grado décimo y la iniciación al estudio de la trigonometría un proceso algo tedioso para ellos, cargando con la mala fama que tiene la matemática y, en particular, la trigonometría, por lo que es necesario afrontar también la predisposición negativa al trabajo en esta área; predisposición que se buscará mitigar con los resultados del presente trabajo, pues con la implementación de los juegos se tendrá la premisa que “incluso para los que tienen una percepción positiva de las matemáticas, los colocan en una situación mucho más atractiva y motivadora. Y que puede dar lugar en algunos casos a una relación durable y jovial con las matemáticas” (Corbalán, 1994, p. 22).

Al mismo tiempo, el trabajo con los juegos permite fortalecer actitudes y valores necesarios para la vida social, pues es una actividad que requiere necesariamente la relación con los otros, el trabajo en equipo y el reconocimiento de las capacidades y habilidades tanto de los compañeros como de los oponentes, y a su vez, "se asimila que perder forma parte del juego, y hacerlo sin angustia es una de las características indispensables del buen jugador (y condición necesaria para enfrentarse a la vida) y se aprende también a ganar sin arrogancia" (Corbalán, 1994, p. 55). Lo que se resume en apuntar que el trabajo se visiona de manera integral, reconociendo las diferentes dimensiones del estudiante.

Cabe en este momento utilizar la analogía sobre la necesidad de cimientos fuertes para construcciones resistentes, para ilustrar que si se quiere garantizar desempeños exitosos en el área de trigonometría es significativa la comprensión de lo básico en cuanto al estudio de las relaciones trigonométricas y así poder avanzar a niveles superiores de complejidad; lo que se tiene en cuenta en este trabajo final de maestría por orientarse a la solución de problemas cotidianos que requieran el uso de triángulos rectángulos, temática básica para continuar con el estudio del área. Este trabajo pretende contribuir también a la obtención de mejores resultados en las pruebas de evaluación externa, por cuanto estas se orientan en gran medida a la solución de problemas, competencia que, como se ha mencionado, se busca fortalecer.

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

Identificar los efectos de hacer uso del juego como estrategia para fortalecer el manejo de las funciones trigonométricas en la solución de problemas.

4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconocer la importancia del manejo de la lúdica y el juego en la construcción de aprendizajes significativos.
- Elaborar dos juegos didácticos que vinculen la solución de problemas con funciones trigonométricas.
- Fortalecer la competencia solución de problemas en los estudiantes.
- Estudiar las implicaciones del manejo del juego para el aprendizaje de la trigonometría.

5. ANTECEDENTES

En la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá en el año 2012 Ginés Salgado Garzón realizó un proceso de investigación que tituló ELEMENTOS BÁSICO DE LA TRIGONOMETRÍA DESDE EL PASO DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA; en este escrito realiza un recorrido histórico de la trigonometría mencionando componentes importantes que determinan el paso de razón trigonométrica a función trigonométrica y posterior a esto plantea una unidad didáctica compuesta de cuatro talleres donde se observa variedad de actividades en su mayoría lúdica, enfocadas a la solución de problemas. Concluye que la trigonometría puede ser dinámica, valiéndose de la historia y herramientas ya diseñadas; las razones trigonométricas permiten desarrollar actividades interesantes y es significativo que el estudiante haga sus propios instrumentos de medición.

En esta misma universidad y sede, en el año 2013, Nathalia Katerin Valderrama Ramírez plantea su trabajo titulado CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS HACIENDO UN CONTRASTE ENTRE LA UTILIZACIÓN Y AUSENCIA DE TIC'S donde la docente realiza un proceso de investigación en el cual trabaja con dos grados décimos, en uno emplea metodología tradicional y en el otro apoyada en las TIC's, concluyendo que es importante que el docente haga un análisis disciplinar para comprender a profundidad el área y el saber, para llevarlo al aula y poderlo enseñar; las herramientas TIC's utilizadas requieren un buen proceso de planeación y evaluación objetiva, y a su vez el uso de estas, permite alfabetizar tecnológicamente a los estudiantes, lo que le otorga habilidades para la vida y el mundo laboral; también, reconoce que el papel del docente es muy importante siendo quien plantea las herramientas y sirve de mediador entre estas y los estudiantes, por lo que propone enriquecer las clases tradicionales con recursos TIC's.

De otro lado Gisela Montiel Espinosa, investigadora del Instituto Politécnico Nacional de México, en 2013 recopila su investigación en el libro DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO donde da una mirada a la realidad en cuanto a la enseñanza de la

trigonometría en México, resalta la importancia de problematizar el conocimiento, de enfrentar al estudiante a problemas de su entorno, para lo cual presenta un proceso didáctico para su abordaje, desde la presentación del problema, su contexto para la construcción geométrica, la construcción de las funciones trigonométricas y la resignificación de las funciones trigonométricas.

Así mismo, Asunción Reyes Hernández, en la Universidad Autónoma de Nuevo León (México) en 1999, genera una propuesta didáctica titulada JUEGOS DIDÁCTICOS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR. Desarrolla una serie de estrategias didácticas como una lotería trigonométrica donde se unen preguntas con respuestas, rompecabezas cuyo objetivo es completar unas tablas con las funciones trigonométricas y un tercer juego de simulación o desempeño de papeles, lo cual implica una asignación de roles por parte de los estudiantes simulando ser ingenieros que solucionan problemas. La investigadora concluye que los estudiantes presentan problemas para asimilar el contenido, posible consecuencia de incorrectos métodos de enseñanza, los juegos didácticos son buena alternativa para confrontar esta problemática, pero atendiendo a metodologías bien definidas.

En el marco del XX Concurso Universitario Feria de las Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México se presentó una investigación documental titulada PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. El equipo de trabajo bajo el seudónimo "Lúdicos", plantea un juego de aplicación para las gráficas de las funciones seno y coseno relacionando amplitud, fase, frecuencia y valor constante. Establece además un juego de mesa donde los participantes a medida que lo desarrollan construyen las gráficas mencionadas.

También, en la web se encuentran páginas con pasatiempos y juegos para la clase de matemática, uno de ellos es "Sudomates" de trigonometría elaborados por la profesora Caroline Ducos (https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2014/12/05/3758/), aprovechando la estrategia de los Sudokus para reforzar conceptos de trigonometría; y en otro lugar, eHow en español (http://www.ehowenespanol.com/juegos-mesa-trigonometria-como_52134/) se publica un artículo escrito por Will Milner titulado "Cómo hacer juegos de mesa de trigonometría", propone

tres juegos, el primero “Batalla Naval”, donde los participantes ubican triángulos en dos tableros para acertar a su ubicación empleando ángulos y coordenadas. El segundo “el mapa del mundo”, en el cual deben seleccionar tres ciudades en el mapamundi, cumpliendo con orientaciones que toman de cartas en el juego, formando con ellas un triángulo, gana quien forme el triángulo de mayor área, para los cálculos pueden medir lados y ángulos y encontrar la información faltante con las relaciones trigonométricas. El tercero es más una recomendación, modificar juegos existentes como el “sabelotodo” conformado por cartas con preguntas, las cuales se pueden cambiar incluyendo saberes de trigonometría.

6. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

6.1. ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO SOBRE EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA

El "juego" definido por la Real Academia Española como "ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde" (RAE, 2012). Teniendo en cuenta que es el centro y eje de este trabajo y que se quiere analizar desde el campo de lo educativo, la definición anterior se queda corta para resaltar las diferentes potencialidades y características que se encierran en él, porque no se le puede relegar al mero espacio del pasatiempo o recreación, se ha convertido en una herramienta para la educación gracias a la labor de investigadores que han detectado bondades en su implementación en el aula. Uno de ellos a destacar es Jean Piaget (1896- 1980) psicólogo suizo considerado el padre de la epistemología genética, diferentes autores lo toman como referencia y hacen análisis de sus obras, Andrés Tripero (2011) aporta sobre el trabajo de Piaget:

> Andrés Tripero (2011),
>
> Una perspectiva "activa", en la que el juego y los juguetes son considerados como "materiales útiles" para el desarrollo psicomotor, sensorio motor, cognitivo, del pensamiento lógico y del lenguaje en el niño, abriría de forma inmediata el camino de Piaget para la elaboración de una Teoría estructuralista del juego, a partir de los estudios sobre la dinámica interior de las funciones mentales del niño.

Mas adelante se hablará de los aportes de Piaget a la temática, de momento cabe reconocer que el juego también ha sido fruto de un proceso evolutivo, analizándolo desde su carácter como deporte rescatando aportes de Hernández (2009a) en su texto "El Juego Deportivo en la Prehistoria" muestra como el juego ha estado presente en los diferentes momentos de la historia, incluso antes que dicha historia pudiera ser escrita, lo que remonta a la época prehistórica. Estas investigaciones se basan más en estudios antropológicos que arqueológicos, debido a la escasez en muestras recolectadas, brindando al juego un espacio en estas comunidades, donde en momentos de ocio jóvenes y adultos mejoraban sus habilidades para la caza, la pesca, la lucha, entre otras; con prácticas que simulaban situaciones como las mencionadas o competencias que

requerían destrezas propias de ellas, como la puntería, la resistencia o la fuerza. Todos en diferentes hemisferios del planeta, pero con particularidades que los relacionan, tal como el uso de herramientas.

Hernández (2009a) muestra también que posteriormente en la Edad Antigua, se presentan juegos que tienden más hacia el deporte, por lo elaborado de sus reglas y el uso de escenarios diseñados para tal fin; en América existen vestigios de un juego de pelota donde sus participantes hacían uso de diferentes partes de su cuerpo para dirigir una pelota de caucho y pasarla por entre un aro de piedra. En otro texto de Hernández (2009c) llamado "El juego deportivo en las culturas urbanas plenas: Roma" se muestra como ejemplo en Europa a Roma, donde el deporte se enfoca a las luchas con gladiadores, sujetos que demostraban su fuerza y destreza en el manejo de armas, tanto en peleas con otros jugadores como con animales salvajes, las carreras de carros, las cacerías, la esgrima, la natación y también juegos con pelotas. Y Hernández (2009b) en "El juego deportivo en las culturas urbanas plenas: Grecia" da otro ejemplo, los juegos olímpicos en Grecia, donde se daba cuenta de las potencialidades de hombres para competir en carreras, lanzamientos, saltos y luchas, se daba mucha importancia al entrenamiento físico considerándolo como primordial para la educación moral y estética, Hernández (2009b) señala en su texto una máxima griega "No hay educación sin deporte, no hay belleza sin deporte, sólo el hombre educado físicamente es verdaderamente educado y hermoso" (p.5).

Hasta este momento se ha hablado del juego y el deporte, no considerándolos sinónimos, pero en estas épocas de la historia el juego deportivo cumplía un papel educativo, al responder a la necesidad de aquellas poblaciones de mejorar las habilidades que les garantizara su supervivencia, bien sea para la adquisición de alimentos o la defensa o ataque en la guerra, o al considerarlo necesario para la formación misma como se mencionó anteriormente. Reconociendo además que conforme avanza la historia empieza a adquirir características de entretenimiento, más de quienes los observan que de quienes lo practican. Por lo que es importante para la mejor comprensión de la temática tratada y evitar confusiones diferenciar estos dos conceptos, para lo cual se resalta los aportes de Palacios (2007) en su trabajo "Técnicas Lúdicas" para quien el juego es importante en los procesos de aprendizaje, considerándolo una actividad libre, espontánea, que genera placer y permite la socialización con normas variables; este autor también resalta que los juegos:

> Palacios (2007),
>
> Unas veces, aparecen unidos a formas religiosas, ya que, según aceptan la mayor parte de los estudiosos del juego, cuanto más primitiva es la cultura, más identificado se halla éste con los ritos, los asuntos sagrados y las significaciones mágicas. Otras veces, aparecen vinculados a intereses educativos, puesto que, desde siempre, el juego ha influido para que los aprendizajes se consolidaran y fueran la antesala de la especialización en determinadas labores y trabajos. (p. 484)

El deporte en comparación con el juego, tiene un reglamento mucho más elaborado y espacios definidos para su ejecución, pero como lo considera el autor anterior, casi todas las practicas deportivas surgen de juegos, "sus orígenes casi siempre son juegos espontáneos que se van complicando paulatinamente y se van definiendo y delimitando con reglas y normas hasta perder su carácter de naturalidad y espontaneidad para convertirse en deportes institucionalizados" (Palacios, 2007, p. 504). Y también, la prácticas predeportivas son en esencia juegos, tienen en sí un carácter mucho más educativo, se fortalecen habilidades fuera de la técnica y la táctica, por eso "la iniciación deportiva es, sobre todo, juego. De lo contrario se comienza desde la incorrección y dicha iniciación deportiva sin juego estaría condenada al fracaso" (Palacios, 2007, p. 503). Se podría decir entonces que el deporte tiende hacia el rendimiento mientras el juego hacia el aprendizaje.

Continuando con el análisis histórico, Tostado (2013) ofrece en su blog una visión general del juego en la edad media, resaltando la gran mortalidad infantil y la utilización de los hijos para el trabajo con poco tiempo de esparcimiento, se presenta la costumbre sobre todo en las clases altas, que también son los que pueden gozar del proceso educativo, de la fabricación de juguetes para los hijos y la práctica de juegos de mesa y estrategia que vieron su origen desde la edad antigua. Corbalán (1994) recuerda de esta época el primer libro de juegos publicado en Europa por el rey Alfonso X en el siglo XIII "libros de ajedrez, dados y tablas" destacando en él los pasatiempos más importantes en ese momento. Ya en la edad moderna, con el surgimiento de nuevos movimientos culturales como el humanismo se retoman ideas clásicas, surgen corrientes y pensadores que le dan al acto educativo un nuevo rumbo, a su vez, se empieza a ver el juego como una herramienta para este proceso. Es una época donde los niños disfrutan de diferentes juguetes como muñecas y pelotas, se expande el uso de juegos de azar como el naipe y juegos de

mesa como el ajedrez, también existen diferentes momentos de esparcimiento en ratos de ocio como las marionetas y la cacería, muchos juegos eran practicados de acuerdo al nivel social de la persona.

En la edad contemporánea, la industrialización y la fabricación en serie, permite la creación de mayor cantidad de juguetes. Hoy se puede ver la evolución de los mismos y al estar en una era digital, los videojuegos tienen gran acogida, relegando a los juegos de mesa y los tradicionales, aunque estos últimos aun tienen sus adeptos. Se fortalecen los trabajo en procura de entender el papel del juego, como una herramienta útil para el aprendizaje en las diferentes etapas del desarrollo del escolar, no solo para ocupar los tiempos de ocio, sino como un proceso con grandes potencialidades. En estos momentos, los juguetes empiezan a adquirir connotaciones más formativas, los juegos se presentan no solo para desarrollar habilidades y destrezas para la vida, también para el desarrollo del pensamiento y las capacidades cognitivas, al propiciar ambientes de reflexión, de análisis y de raciocinio en torno a un reto de conocimiento.

Recogiendo lo dicho hasta el momento y con base en los autores mencionados se puede deducir la función del juego en cada periodo histórico mencionado, en la prehistoria el juego tiene un enfoque preparatorio o de adiestramiento, al igual que en la edad antigua, solo que desde este momento empieza a tener un rol educativo. En la revista Vinculando (2009) expresan al respecto que "pensadores clásicos como Platón y Aristóteles ya daban una gran importancia al aprender jugando, y animaban a los padres para que dieran a sus hijos juguetes que ayudaran a "formar sus mentes" para actividades futuras como adultos". De otro lado, en la edad media, se relega al campo del entretenimiento, a los espacios de descanso, sin darle mucha importancia a su carácter formador. Ahora bien, tomando el artículo de Nevado F (2008) es en la edad moderna en el siglo XVII donde se gestan ideas nuevas respecto al acto educativo, con pensadores como Juan Amós Comenio quien realizó grandes aportes a la didáctica, vislumbrando el acto educativo como un juego, donde los niños se deben divertir y vivirlo con alegría. En el siglo XVIII, momento de grandes cambios y transformaciones, donde nace la pedagogía activa desde pedagogos como Juan Jacobo Rousseau con sus ideas naturalistas y de libertad, otorgándole al juego la posibilidad de propiciar el aprendizaje de manera más libre y espontánea, al igual que mostrarlo como un instrumento pedagógico de validez, para una etapa de la vida donde las características son distintas a las del adulto, viendo en la infancia un periodo específico del

desarrollo; así mismo Johan Heinrich Pestalozzi observa en el juego la posibilidad de brindar experiencias y actividades significativas al estudiante.

Ramos Valdez (2007) en su libro muestra que en el siglo XIX August W. Friedrich Fröbel fundador de los jardines infantiles, y con un trabajo enfocado a la edad preescolar, ve en el juego la forma en que el niño se desarrolla más libremente, algo que es propio de él, momento donde se puede observar las realidades del infante, hasta sus dificultades. Durante el siglo XX, se puede distinguir diferentes funciones del juego, en especial en el desarrollo infantil, como lo expone Rollins (n.d.) en publicación web, John Dewey refuerza la función preparatoria del juego, pues puede tomarse como un espacio para entregarle al niño una sociedad en miniatura, para que se prepare para su futuro. En María Montessori el juego fortalece el aprendizaje sensorial, pues con su metodología rica en la utilización de herramientas que propician el uso de los sentidos, el estudiante aprende en su contacto directo con los juguetes, bien sea solo o en grupo. El juego como terapia lo formula Sigmund Freud entendiendo en éste la virtud de mejorar el sentimiento frente a vivencias traumáticas o dañinas, buscando fortalecer el dominio de sí mismo. De otro lado, el juego puede tomar una función de ensayo, como lo defiende Jerome Bruner pues para él cuando un niño juega está ensayando en ambientes controlados lo que le puede suceder después y poderlo sortear de la mejor manera. Lev Semynovich Vigotsky le da una función diferente al juego, en este caso social, pues es la oportunidad para compartir, para aprender del otro, muy relacionado con su teoría de la zona de desarrollo próximo y de andamiaje, donde se requiere de los compañeros de juego y de adultos expertos para ir aprendiendo y creciendo.

Ahora volviendo a Jean Piaget, quien podría ser de los estudiosos más importantes sobre el juego en edades tempranas, analizándolo desde la mirada de Andrés Tripero (2011) donde resalta el valor del juego en la teoría estructuralista piagetiana, se tiene como principio teórico los movimientos de los bebes en los primeros meses de vida, como chuparse el dedo, agarrar y lanzar objetos, evidencia de dos tipos de mecanismos, "los de acomodación, ajuste de los movimientos y de las percepciones a las cosas, y otro de asimilación de esas mismas cosas a la comprensión de su propia actividad" (Andrés Tripero, 2011). Existe pues dos asimilaciones de lo real, una en cuanto a la función, por la repetición de una acción y otra mental donde los objetos se identifican por lo que puede hacer con ellos. Todas estas acciones son egocéntricas y permiten la asimilación de la cosas, que se transforman en esquemas. "Se produce entonces una auténtica

revolución cognitiva mediante la cual los esquemas se convierten en ideas o conceptos" (Andrés Tripero, 2011). Después de estos primeros aprendizajes en la vida del infante, comienza a realizar dichas acciones por puro placer de hacerlas, esto fue llamado "juego de ejercicio" y posterior de la mano con el pensamiento simbólico (2 a 4 años) donde con la imaginación la imagen se convierte en "símbolo lúdico", el niño toma cualquier objeto de su alrededor como representación de otros, (un palo puede ser un caballo), aparece el "juego simbólico" "el niño no sólo asimila la realidad sino que la incorpora para poderla revivir, dominarla o compensarla" (Andrés Tripero, 2011).

Continuando con este análisis, cuando el niño empieza su procesos de socialización con sus semejantes, se da paso al juego preescolar, donde necesariamente para poder jugar con varios individuos, se establecen unas normas de juego, es decir un "juego de reglas" lo que se ve en el niño en un primer periodo de los cuatro a los seis años de edad, y un segundo periodo más complejo de los seis a los once años. Con lo dicho al momento, se puede deducir que el símbolo remplaza al ejercicio, a su vez éste es remplazado por la regla.

> Andrés Tripero (2011),
>
> "Estos juegos de reglas van a integrar y combinar todas las destrezas adquiridas: combinaciones sensorio-motoras (carreras, lanzamientos, etc.,) o intelectuales (ajedrez) con el añadido de la competitividad (sin la que la regla no sería de utilidad) y bajo la regularización de un código normativo vinculado a la naturaleza del propio juego o por simples pactos puntuales e improvisados"

Se puede concluir retomando el aporte de Rollins (n.d.), sobre el trabajo de Piaget, como éste observa en el juego una función hacia lo intelectual, donde conforme el niño avanza en cada etapa, va cambiando su juego y se produce desarrollo en este campo. De lo cual se aprecia su importancia en la formación del individuo, y el impacto para el intelecto por prácticas apropiadas en todas las etapas de desarrollo, de ahí que actualmente el juego no solo se trabaja en edades preescolares, se plantea como una oportunidad de mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje y manejarlo en diferentes niveles educativos y en todas las áreas del conocimiento, por la posibilidad de trabajar en un ambiente controlado, viéndolo más que como un pasatiempo para

los descansos, como el cambio en la estructura de las clases, dejar de lado la monotonía del aula e innovar en situaciones que propicien el aprendizaje significativo.

6.2. ANÁLISIS HISTÓRICO DE LA TRIGONOMETRÍA

Para realizar este recorrido histórico sobre el desarrollo de la trigonometría, se tomó como referencia el articulo "Trigonometría" en la enciclopedia Gran Larousse Universal de Itard y Hernández Pibernat (1982) y el libro "Historia y Didáctica de la Trigonometría" de Flores Gil (2008). La definición de trigonometría dado por los primeros autores referenciados anteriormente, "rama de las matemáticas elementales que calcula los elementos de un triángulo definido mediante datos numéricos" (p. 12526). Permite dar una mirada general reconociéndola como parte de la ciencia matemática cuyo eje principal es el triángulo; es importante resaltar que ha tenido su evolución en el transcurso de la historia, subdividida en trigonometría plana y esférica, siendo esta última la primera en ser estudiada. Flores Gil (2008) expone que vestigios antiguos señalan que los egipcios y babilónicos 4.000 años antes de Cristo utilizaban proporciones de triángulos en sus construcciones como las famosas pirámides, también para todo el proceso agrícola, el estudio de los cuerpos celestes, la navegación y el manejo del tiempo en su cálculo y calendario. En la antigüedad los griegos la tomaban como herramienta para el estudio de la astronomía, se considera como el padre de la trigonometría a Hiparco de Nicea (190-120 a. C.) a pesar de que otros matemáticos anteriores como Hipócrates de Quíos (470-410 a. C.) y Eratóstenes de Cirene (276-194 a. C.) sentaron elementos importantes al utilizar proporciones de los triángulos en la astronomía. Hiparco construyo tablas de cuerdas, partiendo de un circulo de radio r, que se desconoce en la actualidad el valor que utilizó para éste, tomando la medida de la cuerda conforme avanzaba desde un ángulo de $0°$ a $180°$ muy similar a la tabla actual del seno.

Luego con estudios como los de Menelao (70-140 d. C.) la trigonometría se encargaba del análisis de las cuerdas de los arcos de circunferencia en una esfera, el teorema propuesto por él en "tratado de las esféricas", es referenciado en el artículo sobre trigonometría de la enciclopedia Gran Larousse Universal de Itard y Hernández:

> Itard & Hernández Pibernat (1982),
>
> Si un triangulo ABC, plano o esférico, es cortado por medio de una recta o de un circulo máximo en L, M, N se tiene que:

En el plano $\frac{LA}{LB} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{MC}{MB}$

En la esfera $\frac{senLA}{senLB} = \frac{senNA}{senNC} \cdot \frac{senMC}{senMB}$

(p. 12526)

Lo anterior sirvió de fundamento para que Claudio Ptolomeo (100-170 d. C.) planteara las proposiciones fundamentales de la trigonometría, tomando también postulados de los "Elementos" de Euclides, plasmándolas es su obra sobresaliente "Sintaxis matemática" o "Almagesto", el cual se utilizó durante siglos como base de estudio por los astrónomos (Itard & Hernández Pibernat, 1982).

De otro lado, Itard y Hernández Pibernat (1982), resaltan el papel de los Indios quienes dieron nombre a lo que hoy después de diversas traducciones se conoce como Seno, aunque su interpretación no era como el actual de una proporción sino la longitud del lado opuesto del ángulo en el triangulo rectángulo. Los Árabes realizaron cálculos de tablas para los valores de seno en divisiones sexagesimales, dos personalidades importantes fueron Abu al-Wafa` al-Buzadjani (940-997 o 998) quien además de implantar cuatro divisiones sexagesimales introdujo aunque con otros nombres los conceptos de tangente y secante y Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) con su "tratado del cuadrilátero" donde emplea el teorema de Menelao y resuelve triángulos planos. Flores Gil (2008) muestra como la matemática árabe propuso el uso de $r = 1$ lo que produjo los valores actuales de las funciones trigonométricas y que ya para el siglo X habían completado las seis funciones trigonométricas, avances que se lograron por la religiosidad de estos personajes, que buscaban siempre la manera más precisa de realizar sus oraciones en dirección a la Meca, por lo que el desarrollo de la trigonometría les fue útil como herramienta para sus cálculos.

En su trabajo Itard y Hernández Pibernat (1982), exponen como en occidente se continua con la relación de la trigonometría con la astronomía y la astrología, en su estudio se puede resaltar a la Escuela de Oxford en el siglo XIV y ya en el siglo XV Johann Müller (1436-1476) con su apodo Regiomontanus y su obra "De Triangulis" muy relacionada con el tratado del cuadrilátero pero con su redacción original afirma las bases de la trigonometría occidental, así aparecen el

coseno, la tangente, la secante y la cosecante, al astrónomo austriaco Georges Joachim (1514-1574), conocido como Rhetikus, alumno de Copérnico, se le debe el concepto actual de función trigonométrica como proporciones en lugar de longitudes de líneas. El francés François Viète (1540-1603) es otro destacado matemático, pionero en el estudio de la trigonometría, construyó una tabla de seis líneas trigonométricas, calculadas de minuto a minuto para el radio de 100000, siendo la primera completa con estas características, trabajando mediante fórmulas, triángulos planos y esféricos. Con el nacimiento de los logaritmos por John Napier (1550-1617) se abre la puerta a grandes progresos, apareciendo junto a las líneas trigonométricas naturales las líneas trigonométricas artificiales, es decir, sus logaritmos, como también sus analogías, donde los triángulos esféricos oblicuos se pueden resolver con algunas proporciones.

Ambos trabajos mencionados coinciden en que, para los tiempos modernos Sir Isaac Newton (1642-1727) en el siglo XVII realiza su aporte con el desarrollo de las funciones circulares tanto directas como inversas gracias a su estudio del cálculo diferencial e integral, con sus series infinitas encuentra la serie para el seno, el coseno y la tangente. Pero es a Leonard Euler (1707-1783) a quien se le puede distinguir en la época como el mayor precursor de la trigonometría moderna, con aportes como el uso de las letras a, b, c para los lados del triangulo y A, B, C para sus respectivos ángulos opuestos, además en cuanto a la trigonometría esférica encontró las 10 relaciones existentes entre los elementos de un triángulo esférico rectángulo y después logró aplicarlas a todo tipo de triángulo, pero su contribución más importante se centra en el estudio de las funciones circulares, con sus desarrollos en series enteras o en productos infinitos, gracias a esto “el estudio de las funciones trigonométricas se fundamenta en el estudio general de las funciones” (Itard & Hernández Pibernat, 1982, p. 12528).

7. ASPECTOS PEDAGÓGICOS

7.1. EL JUEGO COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

El juego tiene un carácter lúdico por naturaleza, con características importantes de mencionar, como que es libre, produce placer tanto en su contemplación como en su ejecución, tiene un objetivo a cumplir, se toma en serio a pesar de su función de divertir, permite fortalecer los lazos entre quienes lo practican, facilita el alejarse de la vida cotidiana, libera la tensión, tiene normas claras que cumplir. En el desarrollo de la matemática misma, se ha visto involucrado el juego como lo detalla Guzmán (1989) cuando nombra los juegos con piedras realizados por los pitagóricos que permitieron el desarrollo de teoremas, hasta el mismo Euclides (n.d.) motivó a sus estudiantes con juegos y han surgido diferentes teoremas que por su estructura permiten un desarrollo de lo lúdico y problemas que generan competencia para llegar a su solución.

La matemática es una de las áreas que mayor rechazo tiene por los estudiantes, al considerarla aburrida, difícil, estática, por su carácter tan abstracto y la misma carencia de motivación que los docentes crean. El juego como lo plantea Gairín, (1989) puede promover actitudes positivas hacia la matemática, propicia el desarrollo de competencias en los participantes, por la generación de estrategias, puede servir para desarrollar conceptos, ejercitar saberes, desplegar habilidades y potenciar el pensamiento lógico. Para lo cual los juegos requieren una planeación muy rigurosa, "es preciso que haya una fase previa en la que los alumnos conozcan el juego, que las reglas sean correctas, que no haya situaciones confusas, que el juego no se haga tedioso" (Gairín, 1989, p.66), a su vez es necesario una adaptación a las características del contexto y de las particularidades del grupo de estudiantes igual que sus capacidades para el desarrollo del juego.

Así mismo, otra bondad que trae intrínseca el juego es su posibilidad de realizar procesos concretos con la matemática, siendo ésta tan abstracta lo que la hace difícil para los estudiantes, Jean Piaget ve que "en los alumnos jóvenes la acción sobre los objetos resulta totalmente

indispensable para la comprensión, no sólo de las relaciones aritméticas, sino también de las geométricas" (Piaget, 1980, p.220) se trata entonces de entregar una serie de elementos y herramientas, que hagan posible una interacción más profunda con el saber estudiado, poderlo ver actuar en situaciones creadas por el educador para sus educandos, lo que resalta también Piaget pues para él "resulta particularmente difícil que un profesor de matemáticas, cuyo espíritu es abstracto por definición, situarse en la perspectiva fundamentalmente concreta de sus jóvenes alumnos" (Piaget, 1980, p.225). Se aprecia en esto un reto importante para la labor formadora, no se trata de llegar a la clase a recitar algoritmos, teoremas, y demás saberes matemáticos, sin propiciar una verdadera asimilación y comprensión de los mismos, es en realidad un proceso complejo, de planeación y entrega para alcanzar los objetivos esperados, por eso hablando del maestro, "su papel no debe constituir en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten a investigar, utilizando los dispositivos apropiados" (Piaget, 1980, p.226).

En este orden de ideas, la preparación del docente debe ser tal, que pueda crear en su aula de clase un espacio para el trabajo matemático vivencial, entregando más que procesos acabados para solucionar un problema, el fortalecimiento de las capacidades del estudiante para razonar, pues en su cotidianidad se puede ver abocado a situaciones disímiles, que se sortean cada una por sus particularidades y no con la misma formula. El juego para este caso, puede verse como una herramienta de la cual echar mano para lograr lo planteado, pues debe dejar de verse como en la pedagogía tradicional, una actividad sin sentido exclusiva para los ratos de descanso, aclarando eso sí que no es jugar por jugar, es tener una completa intencionalidad que se la da el maestro en su planeación quien también debe estar atento a las interacciones de los estudiantes, no se trata de dejarlos solos jugando, pues pueden caer en diferentes errores y problemas, al igual que comprender que los espacios de juego necesariamente vinculan la generación de buenas emociones en los educandos, lo que se traduce en carcajadas y ruidos por el mismo placer de la actividad, esto en ningún momento debería causar malestar, "un ambiente de trabajo distendido no significa necesariamente menos aprendizaje e, inversamente, un aula silenciosa y ordenada no garantiza el éxito del proceso de enseñanza - aprendizaje" (Torres, 2001, p. 27).

Partiendo de lo anterior, es importante indagar por las particularidades de un juego paro poder ser considerado como elemento didáctico en una clase de matemáticas, a lo que Chamoso

Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, y Rodríguez Sánchez, (2004) proponen unas características que deben tener los juegos, la primera es que sean lúdicos e improductivos, refiriéndose a que sean divertidos, que mientras se logra una familiarización la utilidad didáctica no tiene que verse o decirse de manera inmediata, la segunda es su carácter libre es decir que puedan despertar en los estudiantes un deseo por jugar para que no sea un ejercicio impuesto, el tercero es que tenga sus reglas propias, limitadas espacial y temporalmente, lo cual depende mucho del grado de formación de los participantes, pero en general no se quiere atiborrar de normas rebuscadas para que no generen reacciones adversas, y la cuarta y ultima es que su resultado sea incierto, si se puede llegar a un resultado de manera inmediata o muy predecible provocará aburrimiento y falta de interés. Estos mismos investigadores se basan en el trabajo de Corbalán (1994) para clasificar los juegos en tres grandes grupos, los de conocimiento, los de estrategia y los de azar; los de conocimiento se refieren a los que hacen uso de los contenidos curriculares del área, bien sea para ejercitar, comprender o construir conceptos de manera más atractiva, los de estrategia suponen la elección de diversas posibilidades para llegar a un objetivo, estrechamente relacionado con las competencias necesarias para solucionar un problemas, y en los de azar sobresale su carácter aleatorio, con movimiento fruto de lanzar dados o sacar cartas que resultan importantes para el análisis probabilístico. Pueden existir juegos que tengan dos o las tres características.

Para complementar a lo dicho, resulta interesante resaltar otra característica del juego como es la competencia, su "Carácter competitivo: Aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodriguez Sánchez, 2004, p. 49). Algo que para los estudiantes es atrayente, por el mismo carácter humano de querer superarse a sí mismo y a sus rivales, para sentir la sensación de triunfo que los satisface y para poder comparar sus capacidades. Esto a su vez muestra el gran componente social que se enmarca en el juego, por la necesidad de realizarse en compañía de otros, el coequipero o el contrincante, esto "estimulará el trato con otras personas, la colaboración entre iguales y el trabajo en equipo, la aceptación de normas, la comunicación y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodríguez

Sánchez, 2004, p. 50). Se nombra un factor preponderante para alcanzar los logros esperados en el desempeño del juego y es el trabajo en equipo, lo que supone una distribución de las funciones, una adopción de roles qué desempeñar pensando en el beneficio de todos los integrantes que apuntan su trabajo a un mismo objetivo pero cumpliendo cada uno con sus responsabilidades.

En lo dicho hasta hora se puede resaltar el carácter lúdico que todo juego tiene, este carácter lo dota de motivación, ya que el sentimiento de placer que se experimenta al jugar se convierte en interés para quererlo practicar, reconociendo entonces que los juegos "Pueden crear un ambiente lúdico que contribuya a despertar la curiosidad de los alumnos y les ayude a disfrutar de la alegría del descubrimiento y el placer del conocimiento" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodríguez Sánchez, 2004, p. 49). Lo anterior se encuentra en la tendencia actual de erradicar la idea de la educación como un proceso lineal, aburrido y tedioso, al respecto argumenta Guzmán (1989):

> Guzmán (1989),
>
> "¿Por qué no fomentar el espíritu lúdico en el acercamiento didáctico a todos los temas matemáticos? El juego matemático bien escogido puede conducir al estudiante de cualquier nivel a la mejor atalaya de observación y aproximación inicial a cualquiera de los temas de estudio con los que se ha de enfrentar. Los beneficios de hacerlo así son innumerables: apertura, desbloqueo, motivación, interés, diversión, entusiasmo." (p. 64)

Se trata entonces de despertar en los jóvenes interés por el estudio del área, pudiendo observar que no es la materia aburrida cargada de contenido como lo supuso antes, sino que puede recoger de ella aspectos interesantes, útiles, prácticos y divertidos, todo gracias a la mediación de un docente que empleó en sus clases el juego como estrategia didáctica, que reconoció que los juegos "requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, estimulan la imaginación, favorecen la creatividad y enseñan a pensar con espíritu crítico" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodríguez Sánchez, 2004, p. 50), es decir que no es solo jugar, mientras los estudiantes lo ejecutan desarrollan toda esa gama de aptitudes y actitudes mencionadas anteriormente, porque se pasa de un recital de saberes por el docente a un trabajo

concreto y práctico del educando pues “en todos los niveles –incluida la adolescencia- y de un modo tanto más sistemático cuanto más elemental es el nivel de que se trata, el alumno es capaz de “hacer” y de “comprender en acción” mucho más de lo que puede expresar verbalmente” (Piaget, 1980, p. 227).

Es importante señalar que dentro de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano se menciona para el nivel de formación media:

> Ministerio de Educación Nacional (1998),
>
> Un objetivo fundamental es el de proporcionar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarla o refutarlas, argumentar a favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibida a primera vista, construir algunas demostraciones para enunciados matemáticos, dar contraejemplos. (Ubicado en: 2. Referentes Curriculares, 2.4 Hacia una estructura curricular, 2.4.3 Procesos generales, El razonamiento, p. 88)

Lo que sin duda supone alejarse de una metodología pasiva, donde el estudiante sea meramente receptor, y permitir el desarrollo de clases activas, con estrategias que faciliten el dinamismo, la participación, no se menciona explícitamente, pero sí da la pauta para que se pueda pensar en el juego, que como ya se ha mencionado, puede por sus bondades ser útil en esta misión formadora que propone el Ministerio de Educación Nacional, de la mano con otro eje central en el proceso como es la problematización del saber en el Aula, pues en otro aparte de los lineamientos mencionan:

> Ministerio de Educación Nacional (1998),
>
> La resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo,

> deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos. (Ubicado en: 2. Referentes Curriculares, 2.4 Hacia una estructura curricular, 2.4.3 Procesos generales, La resolución y el planteamiento de problemas, p. 75)

Esta parte puede vincularse positivamente al desarrollo de los juegos en el aula, es decir que los juegos puedan enriquecerse con la necesidad de resolver problemas académicos y formativos, donde se esta propendiendo por un desarrollo en esta competencia, indispensable en el procesos de formación matemática, pues el área además de desarrollar procesos cognitivos complejos, es una ciencia útil, que permite ser empleada en la cotidianidad para sobrellevar, resolver o sortear problemáticas, "el espíritu lúdico de acercamiento a los problemas matemáticos más serios es el aspecto que más puede beneficiar al estudiante, impregnando positivamente toda su personalidad científica para el futuro, como estudiante y como posible investigador" (Guzmán, 1989, p.64).

Se puede reconocer con todo lo planteado hasta el momento, que el juego ha hecho parte de la misma evolución de la matemática, puede ser utilizado por sus grandes utilidades en el aula de clase, siempre con una intencionalidad pedagógica que lo enriquece y lo orienta, teniendo en cuenta sus características que lo resaltan como herramienta útil en el proceso formativo, más aun cuando se fusiona con componentes importantes como la solución de problemas.

7.2. LA MOTIVACIÓN EN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Como se ha mencionado, un factor que se considera importante para el desarrollo del presente trabajo es la motivación, por lo que se hace necesario discernir algunas cuestiones en cuanto a su manejo, analizando los aportes de Ospina Rodriguez (2006) quien inicia su articulo afirmando "Uno de los aspectos más relevantes para que se dé el aprendizaje es la motivación y no hay duda alguna acerca de que cuando esta no existe, los estudiantes difícilmente aprenden" (p. 158). Pero dicha motivación debe darse en ambos sujetos del proceso, es decir tanto del docente como del estudiante, y en un mismo sentido, evitando inconsistencia entre lo que pretenden ambos, pues esto puede generar desmotivación, al igual que la relación afectivas que entre ambos se pueda dar, que sin duda debe estar cargada de cordialidad y cariño, evitar que el estudiante tome una mala imagen del área por culpa de la actitud del profesor, y también el circulo vicioso que se genera cuando existe desmotivación por el hecho de no aprender.

Continuando con este autor, para quien la motivación es el motor del aprendizaje, y el papel del maestro es clave y debe tener claro el sentido y los objetivos del proceso, se hace importante también el reconocimiento de los tipos de motivación existentes, por lo que "han sido definidas motivaciones intrínsecas y extrínsecas, que hacen parte de los enfoques cognitivos de la motivación del ser hacia la comprensión de la realidad que lo rodea" (Ospina Rodríguez, 2006, p. 159). La intrínseca procede del sujeto mismo, busca la autorrealización, logro de metas y satisfacer su curiosidad, la extrínseca apunta a los factores externos a él, importando más los resultados y sus consecuencias, (pueden ser estudiantes para quienes la nota que da el docente es lo más importante). "Los alumnos intrínsecamente motivados toman el aprendizaje en sí mismo como una finalidad y los incentivos para aprender se encuentran en la propia tarea… el alumno extrínsecamente motivado asume el aprendizaje como un medio para lograr beneficios o evitar incomodidades" (Ospina Rodríguez, 2006, p. 159).

Como ya se mencionó, el docente tiene un papel muy importante en la existencia de motivación para el aprendizaje, por su decisión en cuanto al desarrollo del currículo, directamente relacionado con su metodología de trabajo, su didáctica, la cual debe apuntar a la motivación intrínseca, evitando al máximo que el estudiante se sitúe exclusivamente en la

motivación extrínseca que solo genera aprendizajes superficiales, al no estar en completa conciencia de lo que se va a aprender y solo se busca cumplir para tener un beneficio, sin saber que el mayor beneficio es el aprendizaje mismo, por el contrario, el estudiante debe encontrar interesante y útil el saber, y en este sentido enfocar su trabajo. Estos puntos son importantes en el acto educativo, y son objeto de estudio e investigación, Ospina Rodríguez (2006) resalta, "Estudiar y profundizar sobre cómo desarrollar el interés, una relación alumno-profesor productiva y una motivación intrínseca es responsabilidad de la educación" (p.160).

Otro trabajo a analizar es el realizado por Valle, Rodríguez, Núñez, Cabanach, Gonzalez y Rosario (2010), para quienes es importante ante todo enseñar a aprender, formar estudiantes "autorregulados" que tengan deseo por el aprendizaje, busquen alcanzar sus metas utilizando los recursos de su medio, como lo definen ellos mismos, "La combinación de expectativas positivas, motivación y estrategias diversas para la solución de un problema son virtudes de los aprendices autorregulados" (Valle et al., 2010, p. 87). Esa motivación que se ha calificado como virtud del tipo de estudiante mencionado, es la que interesa resaltar en este texto, la cual es posible autorregular para oponerse a emociones negativas como el miedo o la ansiedad, pues la "motivación se observa en la elección personal del estudiante de implicarse en la tarea y en la intensidad de su esfuerzo y persistencia en la actividad de aprendizaje. (Valle et al., 2010, p. 89)

Valle y otros (2010) retoman postulados de Pintrich para explicar la "planificación y activación motivacional", la primera sería las metas académicas, que podrían ser de aprendizaje, para incrementar su capacidad y, de rendimiento, para demostrar dicha capacidad, evidenciando que los estudiantes con interés por el aprendizaje, se esfuerzan por alcanzarlo, planteándose metas para ello, y no necesariamente de un solo tipo, puede ser varias, generando mejores rendimientos académicos, es decir apuntando a lo intrínseco y extrínseco simultáneamente, pues si el estudiante solo apunta a metas de rendimiento a pesar que pudiera alcanzar mejores resultados por su esfuerzo de conseguir los beneficios esperados, también corre el riesgo de caer en algún desinterés por su afán de superar a los compañeros y pudiendo emplear también estrategias no éticas en su trabajo, como la trampa.

La segunda seria las creencias motivacionales, como la capacidad que tiene cada individuo para afrontar una tarea, es decir ese "sentirse capaz", "sentirse bueno para", otra es considerar

fácil una tarea, o si es agradable, si despierta interés, o si justifica su realización, encontrarle un valor, una utilidad al desarrollo de la misma, estos valores se recogen en la teoría de Eccles y Wigfield (2002) citados por Valle y otros (2010).

Valle et al, (2010),

> Eccles y Wigfield (2002) han descrito el valor de la tarea en relación con (a) el valor de logro, que se refiere a la importancia personal de hacer bien la tarea; (b) el valor intrínseco, que se refiere al disfrute que la persona siente por la realización de la tarea, que equivaldría a la denominada motivación intrínseca (c) el valor de utilidad, que tiene que ver con la relación entre la tarea y las metas de la persona; y (d) el coste, que se refiere a los aspectos negativos que implica para la persona realizar la tarea. (p.92)

En cuanto a la regulación de la motivación, es decir no perder el control en una actividad o el interés puesto en la misma, mantener el estado de animo adecuado para realizar la labor, en el texto de Valle y otros (2010) se plantean estrategias, destacando principalmente dos, la primera "orientada al compromiso y las intenciones de aprendizaje" (p. 92), es decir la superación de dificultades o perdidas de animo para continuar con la tarea con el mismo esfuerzo puesto desde el comienzo o mejor. La segunda "destinadas a la defensa y protección del bienestar personal" (p. 92), donde lo principal es el control de las emociones y superar cualquier situación negativa que vaya en contra del individuo. Lo que se debe hacer con las anteriores estrategias es enseñarlas y fortalecerlas en los estudiantes para que puedan hacer uso de ellas en las diferentes situaciones de clase. Por ejemplo en la primera hacer uso de "lenguaje autodirigido" decirse a sí mismo palabras de aliento, motivarse con recompensas si cumple la tarea, volver la tarea interesante si se pone aburrida, destacar la importancia de la tarea realizada; y en cuanto a la segunda estrategia velar siempre por el bienestar personal, decirse a sí mismo palabras que permitan controlar la ansiedad, destacar los efectos negativos de no alcanzar la meta propuesta.

Ya al final de la actividad, de acuerdo al resultado de la misma y en comparación con lo esperado, se realiza por parte del estudiante una reflexión que produce una reacción de tipo emocional, bien sea positiva o negativa, y busca las causas que se pueden atribuir de diferentes

maneras, siendo importante no la causa en si misma, sino sus propiedades y características, Valle y otros (2010) las clasifican de la siguiente manera:

> Valle et al, (2010),
>
> (a) internas (es decir, el factor causal está dentro de la persona, p.e. la capacidad y el esfuerzo), o externas (como la suerte y la dificultad de la tarea); (b) estables (inalterable a través del tiempo, por ejemplo, la capacidad) o inestables (como el esfuerzo); y (c) controlables (es decir, los factores cau- sales están bajo nuestro control), o no controlables. (p.94)

Se hace importante en esta instancia resaltar que de acuerdo a las causas que considere cada estudiantes, así será las repercusiones futuras, si toma los factores internos, inestables y controlables, su motivación aumentará al ver que depende de él cambiar y mejorar y, de tomar como causa factores externos, estables y no controlables, provocará desanimo y baja moral para futuras tareas (Valle et al., 2010). Ya para culminar traer algunas recomendaciones respecto a la motivación por parte de Farías y Pérez (2010):

> Farías & Pérez, (2010),
>
> Para permear los niveles de motivación del estudiante se requiere de algunas condiciones y acciones: conociendo muy bien el tema a tratar, enseñando con el ejemplo, respetando al estudiante, enseñando habilidades para resolver problemas, instrumentando la participación, construyendo mecanismos de evaluación válidos, mostrando entusiasmo en la labor docente y enseñando a través de preguntas. (p. 38)

8. DISEÑO METODOLÓGICO

Este trabajo final de maestría se fundamenta en la investigación-acción, buscando la solución a un problema concreto que no pretende salirse del contexto, el diseño metodológico esta planteado de acuerdo a las caracterizaciones que establece Rafael Bisquerra, en su libro "Métodos de investigación educativa guía práctica", donde afirma acerca del objeto de esta investigación que "se reconoce situado en su contexto espaciotemporal, intencionalmente unido al campo doxológico, el de la "realidad de cada día" se origina a partir de la experiencia vivida como problemática por un sujeto o grupo de sujetos" (Bisquerra, 1989, p.279). De esta manera, se convierte en una herramienta valiosa para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en las situaciones específicas, este método de trabajo requiere una planificación con carácter flexible, adecuándose a los sucesos y hallazgos, permitiendo devolverse de manera cíclica a cualquier etapa para fortalecer la investigación.

El trabajo goza principalmente de un carácter cualitativo, aunque se vinculen también análisis cuantitativos. Bisquerra (1989) asocia la idea de "praxis" planteada por Habermas, donde no es solo la práctica, es trascender a una vinculación reflexiva entre teoría y práctica, lo que permite ver el aula de clase como un campo de investigación, donde el maestro mientras desarrolla su trabajo reflexiona y contrasta la teoría con sus vivencias, propone alternativas de solución y las pone en juego, para medir resultados y llegar a conclusiones.

8.1. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

8.1.1. Fase de planificación.

Reconociendo la problemática de los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez del municipio de Pácora, los cuales presentan poca motivación frente al área y bajos desempeños académicos que se traducen en calificaciones pobres o muy básicas, observable en la incapacidad de la mayoría de solucionar un problema referente a las temáticas vistas, se realiza una delimitación de la misma, encausando el proyecto hacia el juego, por considerarlo un campo de acción interesante y de carácter motivador; se plantea una justificación para realizar el trabajo y unos objetivos para orientarlo. Posterior a esto, se indaga sobre investigaciones afines para tener unos antecedentes base, y también un recorrido epistemológico sobre el juego y la trigonometría, y un referente teórico sobre el uso del juego en la enseñanza de las matemáticas y la importancia de la motivación en el campo del aprendizaje, que puedan dar luz sobre lo que se desea proponer como alternativa de solución.

De lo anterior surge la idea de plantear dos propuestas de juego, uno que implique movimiento y construcción y otro que sea de mesa, para verificar la importancia del juego en la enseñanza de la matemática para mejorar la competencia de solución de problemas en los estudiantes, por lo que se estructura un test que evaluará este tipo de competencia, para realizarlo antes y después de la implementación de las propuestas.

8.1.2. Fase de acción.

Se realiza el pre-test, que da una mirada de los niveles en los estudiantes en cuanto a su conocimiento de conceptos básicos de trigonometría y la utilización de los mismos en la solución de problemas. De acuerdo a los resultados se estructuran los equipos, pensando en que no queden los mejores puntajes juntos, sino que se mezclen lo más equitativamente posible para posibilitar una ayuda efectiva entre los miembros del equipo, posterior a esto construyen su instrumento de medición necesario para realización del primer juego. Así, con los materiales necesarios se realiza el juego “expedición trigonométrica” y en las clases siguientes el juego de mesa “carrera trigonométrica” que requiere buen tiempo de preparación por la cantidad de estudiantes, para

poder continuar en los equipos y que sea atractivo visualmente. Finalmente se realiza el post-test para contrastar resultados, los estudiantes conocieron sus resultados iniciales, pero no las respuestas a las preguntas, para generar un procesos de automotivación por la mejoría en el resultado.

8.1.3. Fase de observación.

Esta fase está estrechamente ligada a la de acción, pues en la aplicación de la propuesta se lleva registro de observación en el diario de campo, para poder reflexionar en contraste con la teoría, así se recoge información teniendo en cuenta el tipo de interacción entre los estudiantes, su forma de operar los instrumentos, el manejo de roles en equipo, la aceptación y motivación en las actividades, la superación de dificultades que se les presenten, la correcta solución de los problemas, la recursividad en sus procedimientos, la honestidad en las respuestas, el trato con el otro y el alcance de los objetivos.

8.1.4. Fase de reflexión.

En primera instancia se realiza reflexión entorno al pre-test, como una mirada a la realidad inicial de los estudiantes, posterior a lo cual se presenta la revisión de las observaciones analizándolas a la luz de la teoría, y finalmente llegar a la realización del post-test y poder establecer un comparativo entre ambas avaluaciones determinando la efectividad de la propuesta y poder llegar a conclusiones sobre el trabajo realizado, al igual que algunas recomendaciones y nuevas preguntas que surgen frente a lo sucedido.

8.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

La población y muestra objeto de estudio está conformada por los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez, 26 hombres y 13 mujeres para un total de 39 estudiantes, de personalidades variadas, con edades entre 14 y 18 años, que en su mayoría presentan comportamiento normal para su edad, aunque algunos hombres han tenido problemas por su actitud y forma de relacionarse. A pesar de ser un grupo sectorizado por sus gustos, en términos generales son receptivos a las actividades nuevas, la mayoría de ellos se distraen con facilidad y presentan desmotivación ante el área, solo algunos pocos estudiantes muestran verdadero interés.

Este pequeño subgrupo de estudiantes algo adelantados con respecto a los demás pueden aprovecharse para jalonar el proceso, no obstante la mayoría se han caracterizado por un desempeño básico o bajo en el área. Es importante resaltar también que un buen número son activos y presentan buenas facultades para el desarrollo del trabajo de investigación y siendo tan variado en sus actitudes y aptitudes, permiten realizar un estudio de la incidencia del juego en su proceso de aprendizaje, pues se puede caracterizar cómo desde sus individualidades trabajan en equipo, se ayudan mutuamente y disfrutan mientras aprenden.

8.3. PROPUESTAS INNOVADORAS

Las propuestas que se presentan son dos juegos, el primero “expedición trigonométrica”, ejercicios de trabajo en equipos, donde con el empleo del instrumento de medición de ángulos que ellos mismos construyen en una sesión de una hora (VER APÉNDICE A), deben resolver una serie de problemas presentados por etapas, propuesta para durar alrededor de dos horas brindándoles también gráficas que deben analizar para comprender el proceso a seguir empleando las funciones trigonométricas y así encontrar los datos solicitados. El segundo es un juego de mesa “carrera trigonométrica” que se compone de un camino de 10 secciones, cada una de estas dividida en cuatro colores, que se encuentran representados en el tablero por personajes sobre los cuales se tiene diferentes cartas que llevan indicaciones, problemas, preguntas y retos para cumplir por los estudiantes, éste se juega por dos personas o dos equipos, en diferentes sesiones, la duración depende de la intención del docente.

8.3.1. Expedición trigonométrica.

HERRAMIENTAS:

-Instrumento de medición de ángulos

-2 palos de 1,5 m de longitud

-Libreta de apuntes

-Calculadora científica

CHARLA TÉCNICA:

Esta juego se centra en el trabajo coordinado en equipo, el dinamismo para el cumplimiento de las actividades pues se tendrá en cuenta el tiempo y la precisión para tomar los datos. Se le dará un premio a los equipos que ocupen los tres primeros lugares, reconociendo que gana el equipo con mayor precisión en sus mediciones (como característica primordial) y en el menor tiempo posible. El éxito en la actividad depende de la dedicación, entusiasmo y concentración para solucionar cada una de las pruebas. No se permite el plagio o trampa que vaya en contra del desempeño de los demás grupos participantes en el juego, lo cual tendría una penalización con tiempo adicional o descalificación de la competencia. ÉXITOS Y ¡A GANAR…!

CALENTAMIENTO:

1. Nombre de los integrantes del equipo, asignación de número.

_____ Estudiante número 1

_____ Estudiante número 2

_____ Estudiante número 3

2. Denle un nombre al equipo.

NOMBRE DEL EQUIPO:_____

3. Ingéniense un lema, porra o cántico de animo para el equipo.

_____

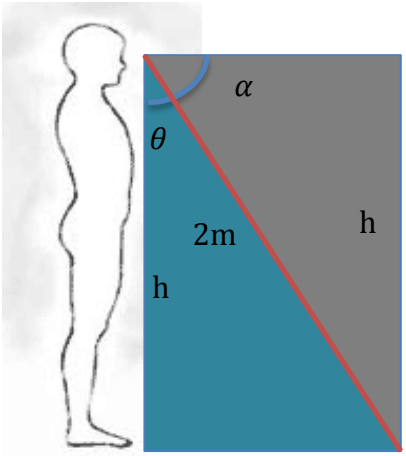
_____

4. Terminado lo anterior lean su nombre en voz alta y griten su lema, porra o cántico, para recibir la primera hoja con las actividades de medición.

FASE INICIAL:

1. En el patio del colegio y con la herramienta de medición elaborada previamente, realicen la medida de cada uno de los integrantes del grupo, hasta la altura de sus ojos.

El estudiante que será medido se ubica de pie y derecho, otro estudiante sujeta el medidor a la altura de los ojos del compañero con los primeros grados del transportador en la parte inferior, fijándose que la burbuja del nivel permanezca en el centro, el otro estirará totalmente la cuerda sujeta al dispositivo, se toma el ángulo. Se calcula con la medida del ángulo, la de la cuerda (2m) y las funciones trigonométricas la longitud del individuo hasta sus ojos.



α será el ángulo que indique el medidor de ángulos. θ será el ángulo complementario de α, es decir $\theta = 90° - \alpha$

Encuentren una altura con la medida de α y dos con la de θ lo cual implica utilizar una función trigonométrica distinta, analizar la gráfica.

2. Consignen la información en el siguiente cuadro.

No.	Nombre Estudiante	Ángulo	Operación	Altura
1				
2				
3				

3. Muestren el resultado al docente quien les dará el visto bueno para seguir.

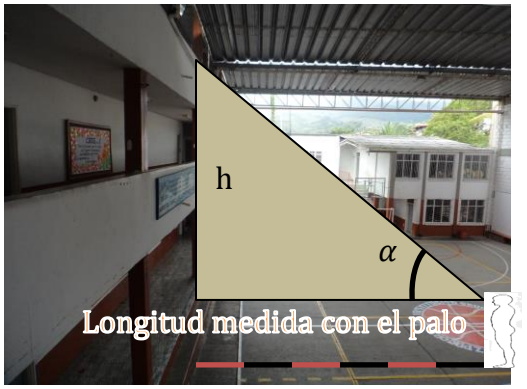
FASE CENTRAL:

1. DETERMINAR ALTURA DEL EDIFICIO

Con la ayuda de los palos de 1,5m van a determinar una distancia aleatoria desde la base de la pared, midiendo en línea recta y perpendicular al edificio, cualquier cantidad de veces la longitud del palo hasta un lugar en el patio, (apuntar dicha distancia) seguir las funciones de cada estudiante en este lugar de acuerdo al puesto asignado en el calentamiento.

- El estudiante 1, se ubica derecho, justo en la distancia medida y mirando al edificio, sujeta el medidor de ángulos y observa por entre el pitillo moviéndolo hasta ubicar la parte superior del muro del mirador del tercer piso.
- El estudiante 2, estará atento a que el nivel en el medidor de ángulos permanezca la burbuja en el centro y leerá el ángulo dado por el estudiante 1.
- El estudiante 3, se encargará de tomar nota de la medición.

Analicen la gráfica que representa el proceso de medición.



Con ayuda de las funciones trigonométricas encuentren la longitud de la altura teniendo el ángulo y la distancia desde la pared.

NOTA: para la altura total hasta el tercer piso es necesario sumar la altura del estudiante 1

-Consignen la información en el siguiente cuadro.

Longitud desde la pared	Ángulo	Operación	Altura estudiante 1	Altura del edificio

-Muestren el resultado al docente quien les dará el visto bueno para seguir.

2. DETERMINAR DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

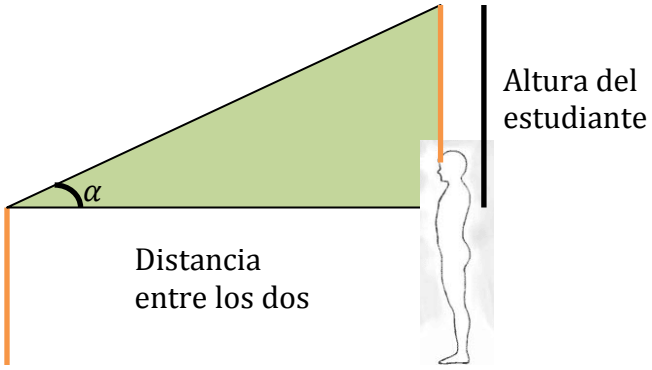
En el patio se encuentran dos puntos, lo que se pretende es encontrar las distancia que los separa, para lo cual deben seguir las instrucciones:

-El estudiante 2 se ubica en un punto, con el palo ubicado a la altura de sus ojos, como prolongando su estatura y tomará nota del ángulo.

-El estudiante 1 se ubica en el otro punto, sosteniendo el palo contra el piso y colocando el instrumento de medición de ángulos de tal manera que la parte central coincida con la punta del palo, prestando atención al nivel, la intención es separar el instrumento del piso 1.5 m es decir la longitud del palo.

-El estudiante 3 observará por el pitillo del instrumento de medición, moviéndolo hasta ubicar la punta del palo que sujeta el estudiante 2. El estudiante 1 realiza la lectura del ángulo.

Analicen la gráfica que representa el proceso de medición.



Con ayuda de las funciones trigonométricas encuentren la distancia entre los dos puntos, teniendo el ángulo y la altura del estudiante 2.

NOTA: como el instrumento de medición se pone a una altura de 1,5m y a la altura del joven se adicionan 1,5m entonces se trabaja solo con la altura del estudiante.

-Consignen la información en el siguiente cuadro.

Altura estudiante 2	Ángulo	Operación	Distancia entre los puntos

-Muestren el resultado al docente quien les dará el visto bueno para seguir.

3. DETERMINAR LONGITUD DE CABLE

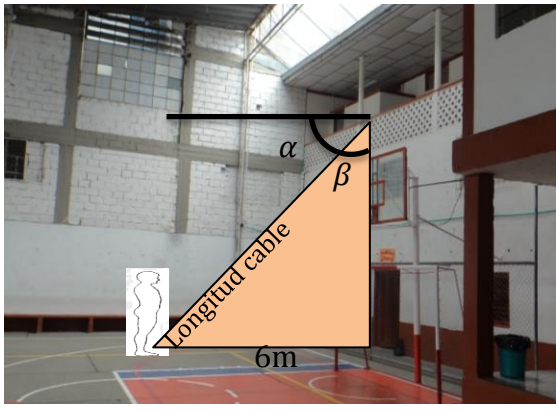
Se quiere colocar un cable desde el mirador de la sala de profesores hasta un punto a 6m de distancia de la pared al patio, su misión es descubrir de qué longitud se debe comprar dicho cable. Para lo cual:

-El estudiante 1 se ubica a 6m de la pared, midiendo la longitud con los palos.

-El estudiante 2 subirá hasta el mirador de la sala de profesores, con el medidor, ubicándolo justo sobre el muro del mirador con los primeros grados hacia abajo, mirando por el pitillo hasta encontrar los zapatos del estudiante 1.

-El estudiante 3 acompaña al estudiante 2, se cerciora que en el nivel la burbuja permanezca en el centro y toma el dato del ángulo

Analicen la gráfica que representa el proceso de medición.



Con ayuda de las funciones trigonométricas encuentren la longitud del cable teniendo el ángulo y los 6 m que separan al estudiante de la pared.

NOTA: el transportador les da la medida del ángulo α, β es su complemento, por tanto $\beta = 90° - \alpha$

-Consignen la información en el siguiente cuadro.

Ángulo	Operación	Longitud de cable

-Muestren el resultado al docente quien les dará el visto bueno para seguir.

FASE FINAL

CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN SOBRE EL TRABAJO

En el equipo responden:

¿Cuáles fueron las dificultades que encontraron para la solución de los planteamientos y problemas?

_____

_____

_____

¿Cómo superaron las dificultades?

_____

_____

_____

¿Cómo definirían el desempeño del equipo en el juego?

_____

_____

_____

¿Es importante trabajar con los contenidos matemáticos en la solución de problemas reales?

_____

_____

_____

Enumeren tres conclusiones del trabajo realizado.

_____

_____

_____

8.3.2. Carrera trigonométrica.

PIEZAS DE JUEGO:

1 Tablero de juego.

1 Dado de cuatro caras de colores.

2 Fichas de diferente color.

15 Cartas verdes.

15 Cartas rojas.

15 Cartas amarillas.

15 Cartas azules.

REGLAS DE JUEGO:

El tablero que representa una pista de carrera desde la salida hasta la meta, se divide en diez sectores, en cada uno hay cuatro casillas de colores que simbolizan:

GRÁFICOS PROBLEMAS SELECCIÓN MÚLTIPLE RETOS

El juego es para dos equipos conformado por tres o cuatro personas. Cada uno de los cuales cuenta con una ficha de color que lo representa en el tablero.

Para el inicio las fichas se ubican en la casilla de salida del tablero, se sortea quien tira primero el dado mediante piedra papel o tijera. El dado tiene cuatro caras con los colores amarillo, rojo, azul, verde; que indica el color donde se debe posicionar el jugador en cada uno de sus turnos.

Al estar en cada casilla deberá sacar una carta del respectivo color, que no podrá ver puesto que en ella también se encuentra la respuesta para poder socializar, calificar y aprender sobre la misma, y será leída por el jugador opuesto. Estas cartas tendrán una indicación o pregunta que habrán de cumplir en un tiempo no mayor a cuatro minutos, contabilizados por el rival.

Por la existencia de actividades que requieren trabajos individuales, estos deben rotarse para que todos los miembros del equipo participen y lideren en algún momento.

La finalidad del juego es alcanzar la meta, sabiendo que no pueden avanzar de sección si no cumplen acertadamente con la indicación de la carta, lo que implica que si fallan en un intento tirarán el dado en su próximo turno para determinar el color de la carta, pero estarán en la misma sección. Los turnos no se repiten por acertar, cada momento acierte o falle se irá intercalando entre cada jugador o equipo.

LAS CARTAS REPRESENTAN:

Verde: ejercicios de dibujo y gráficas que deber realizar para avanzar. Al inicio del juego los jugadores cuentan con hojas en blanco, lápiz, borrador y transportador, para con ellos realizar los dibujos o gráficas que se piden, pueden ser dibujar la gráfica de una función, graficar ángulos o representar un problema.

Rojo: preguntas abiertas y problemas que deben resolver para avanzar. Para lo cual pueden hacer uso de sus calculadoras científicas, charlar en el equipo y concertar antes de dar la respuesta final, que se podrá verificar y contrastar con la respuesta que se encuentra en la carta.

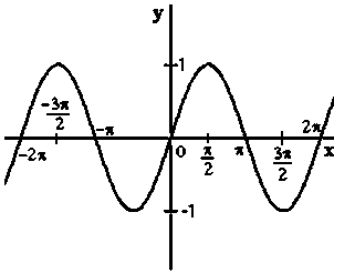
Amarillo: preguntas de selección múltiple con única respuesta que deben acertar para avanzar. El equipo deberá ponerse de acuerdo en la respuesta correcta a la pregunta y contestar antes que se termine el tiempo.

Azul: Retos que deben cumplir para avanzar. Estas cartas explican actividades divertidas donde deben moverse, cantar, crear, entre otras.

CARTAS VERDES DE DIBUJO:

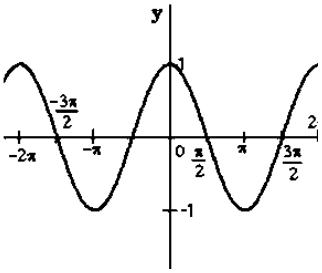
1) Realizar la gráfica de la función seno.

R=/



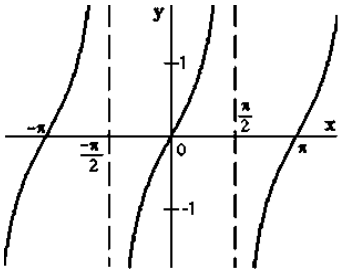
2) Realizar la gráfica de la función coseno.

R=/



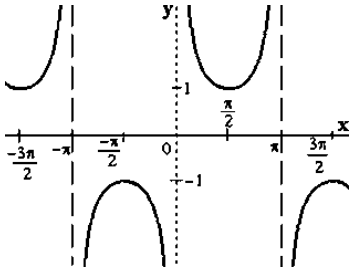
3) Realizar la gráfica de la función tangente.

R=/



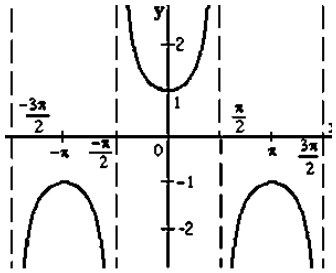
4) Realizar la gráfica de la función cosecante.

R=/



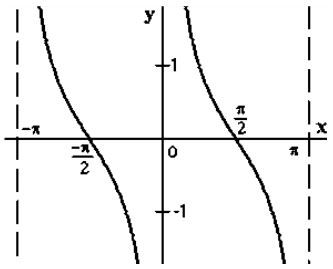
5) Realizar la gráfica de la función secante.

R=/



6) Realizar la gráfica de la función cotangente.

R=/

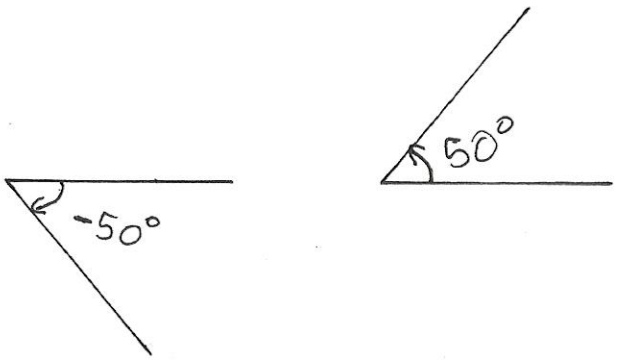


7) Realizar con la ayuda del transportador un ángulo de 195° y 340°.

R=/

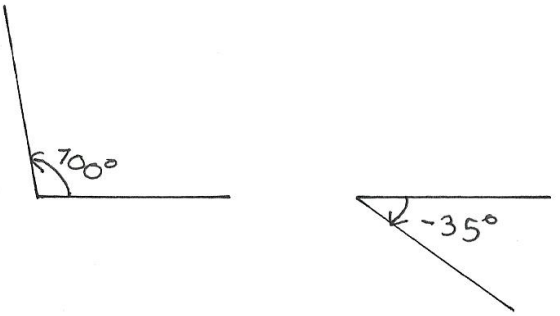
8) Realizar con la ayuda del transportador un ángulo de $-50°$ y $50°$.

R=/



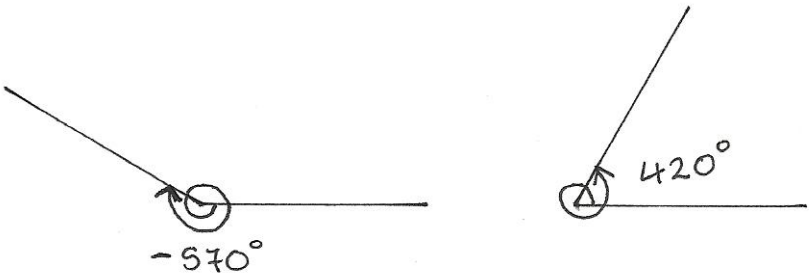
9) Realizar con la ayuda del transportador un ángulo de $100°$ y $-35°$.

R=/



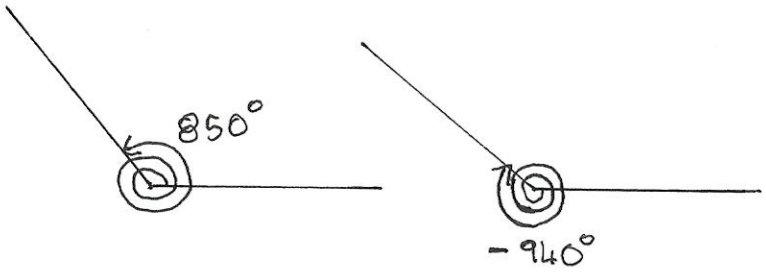
10) Realizar con la ayuda del transportador un ángulo de $-570°$ y $420°$.

R=/



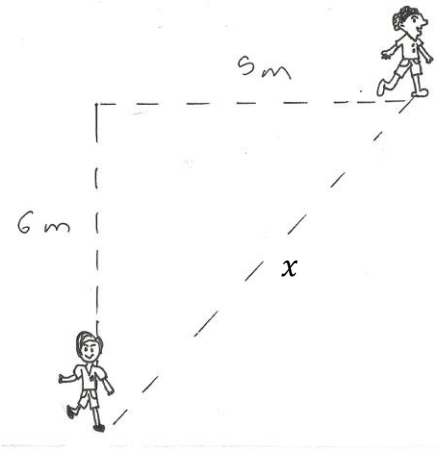
11) Realizar con la ayuda del transportador un ángulo de $850°$ y $-940°$.

R=/



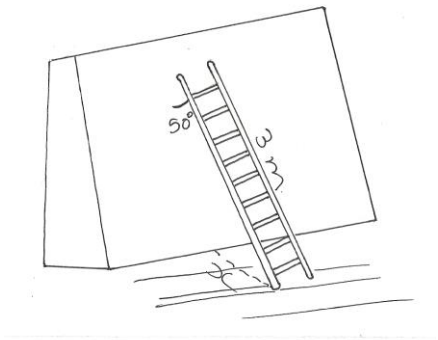
12) Realizar la gráfica que represente el siguiente problema: dos sujetos parten del mismo lugar, uno en dirección oriente $5m$, y el otro en dirección sur $6m$ ¿cuál es la distancia en línea recta que separa a estas personas?

R=/



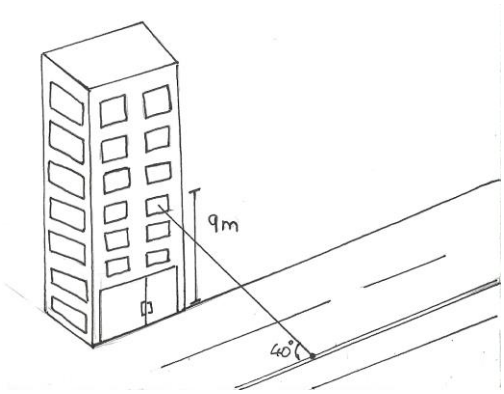
13) Realizar la gráfica que represente el siguiente problema: una escalera de $3m$ se apoya en la pared formado un ángulo de $50°$con ella, ¿cuál es la distancia de la pared a la base de la escalera?

R=/



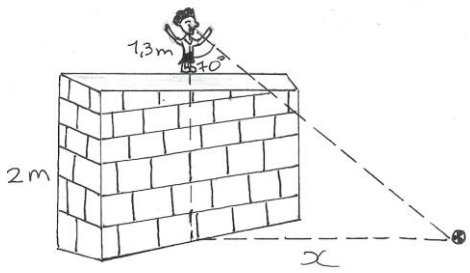
14) Realizar la gráfica que represente el siguiente problema: se extiende un cable desde la ventana de un apartamento ubicado en un cuarto piso, hasta la acera del otro lado de la calle, formando un ángulo de $40°$ con el piso, si la ventana esta a $9m$ del suelo, ¿cuál es la longitud del cable?

R=/



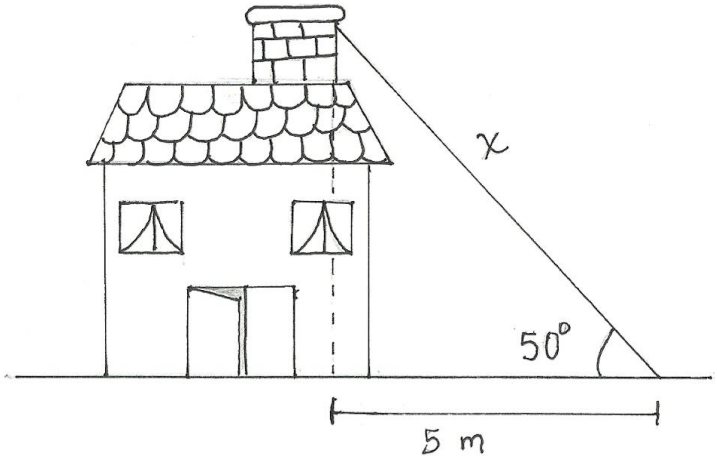
15) Realizar la gráfica que represente el siguiente problema: un niño esta parado sobre un muro desde el cual observa un balón en el suelo, creando un ángulo de $70°$ de la línea de visión con el cuerpo del niño, sabiendo que el niño mide $1{,}3\ m$ y el muro $2m$ ¿a qué distancia esta el balón del muro?

R=/



CARTAS ROJAS DE PREGUNTAS ABIERTAS Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

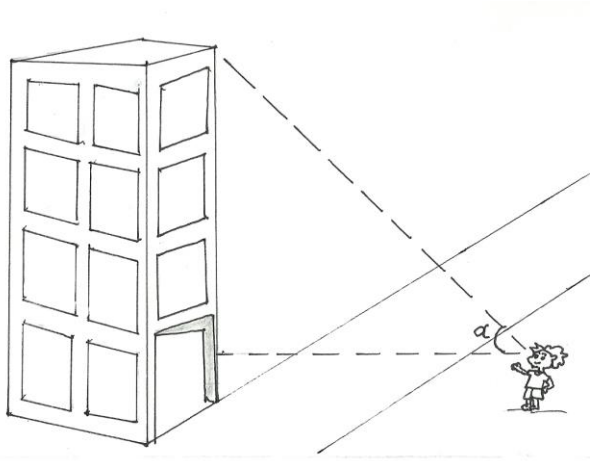
1) Analizar la gráfica y determinar la longitud del cable que va de la chimenea al suelo.



R=/ $\cos 50° = \frac{5\,m}{x} \rightarrow x = \frac{5m}{\cos 50°}$

$\rightarrow x \approx 7{,}78m$

2) ¿Cuál es la altura del edificio? sabiendo que el sujeto mide $1{,}7m$, que esta ubicado a $4m$ del edificio y con su medidor tiene $62°$ de la horizontal a la línea de visión.

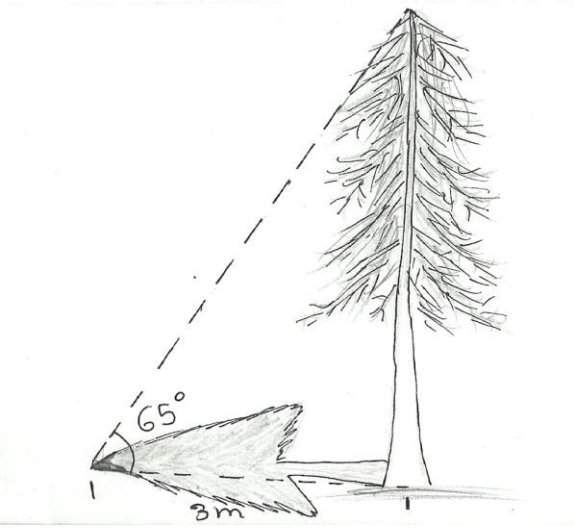


R= /$\tan 62° = \frac{x}{4m} \rightarrow x = \tan 62° \times 4m$

$\rightarrow x \approx 7{,}52m$

Sumando la altura del sujeto, tenemos que la altura del edificio es: $7{,}52m + 1{,}7m = 9{,}22m$

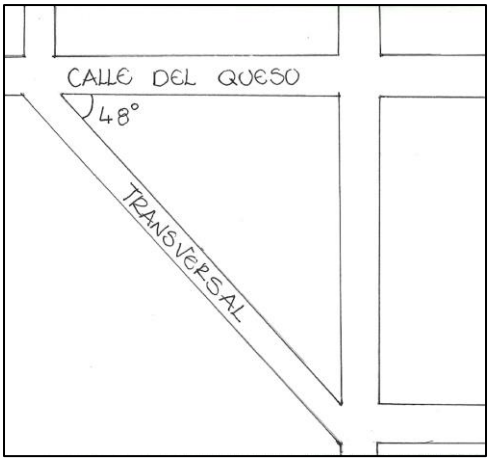
3) Determinar la altura del árbol con los datos proporcionados en la gráfica.



R=/ $\tan 65° = \frac{x}{3m} \rightarrow x = \tan 65° \times 3m$

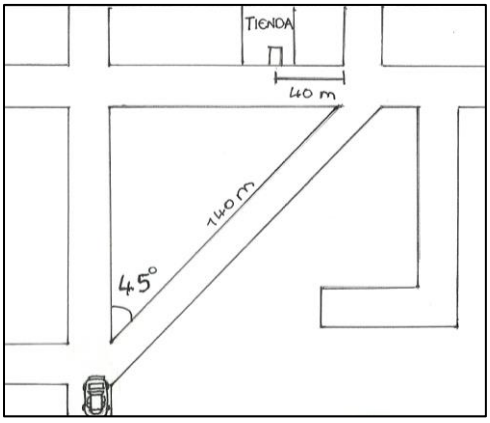
$\rightarrow x \approx 6{,}43m$

4) Cuál es la longitud de la transversal, sabiendo que la calle del queso tiene una longitud de $115m$? Analizar la gráfica.



R=/ $\cos 48° = \frac{115\,m}{x} \rightarrow x = \frac{115m}{\cos 48°} \rightarrow x \approx 171{,}86m$

5) Según la gráfica, ¿cuál es la ruta más cercana desde el lugar del taxi para llegar a la tienda?



R=/ como el triangulo es rectángulo y sus otros ángulos de 45° significa que sus catetos son de igual longitud, por lo tanto se puede encontrar la medida de cualquiera de ellos: $\text{sen}\,45° = \frac{x}{140m} \rightarrow x = \text{sen}\,45° \times 140m$

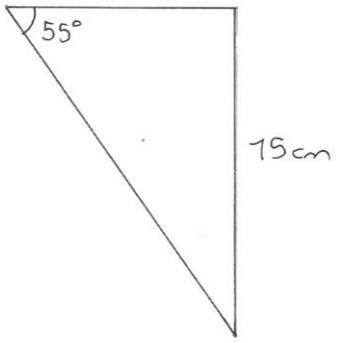
$$\rightarrow x \approx 98{,}99m$$

Para llegar a la tienda por la transversal recorre: $140m + 40m = 180m$

Para llegar a la tienda por la calle y la carrera recorre: $98{,}99m + 58{,}99m = 157.98$

Lo que significa que es más cercano tomando la calle y la carrera.

6) Determinar el área del triangulo:

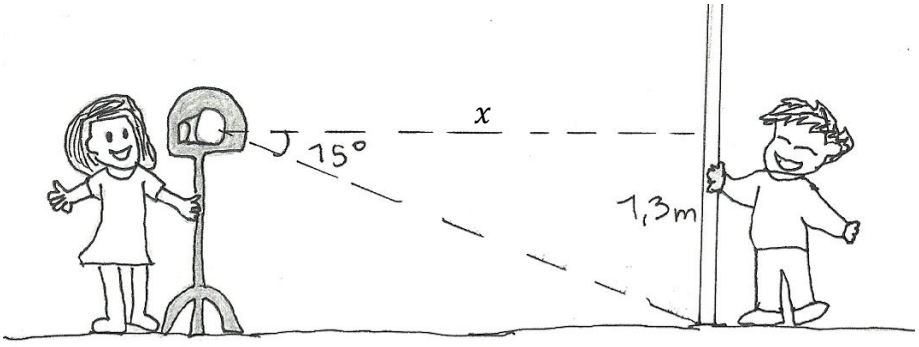


R=/ calculando la base: $\tan 55° = \frac{15cm}{x} \rightarrow x = \frac{15cm}{tan55°}$

$$\rightarrow x \approx 10{,}5cm$$

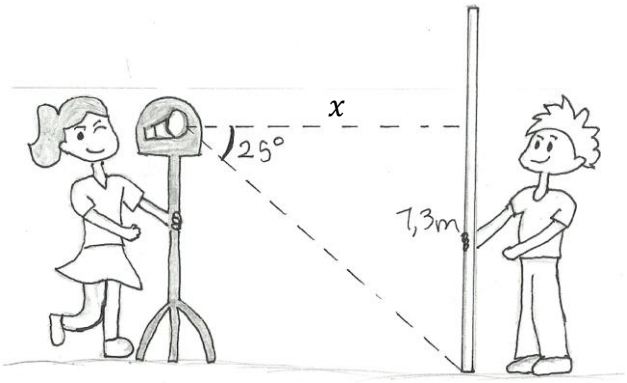
Calculando el área del triangulo: $A = \frac{10{,}5cm \times 15cm}{2} = 78{,}75cm^2$

7) ¿Cuál es la distancia entre los dos niños?



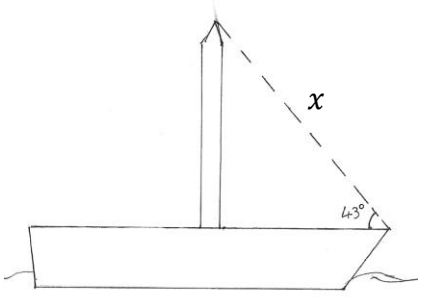
R=/ $\tan 15° = \frac{1{,}3m}{x} \rightarrow x = \frac{1{,}3m}{tan15°} \rightarrow x \approx 4{,}85m$

8) ¿Cuál es la distancia entre los dos niños?



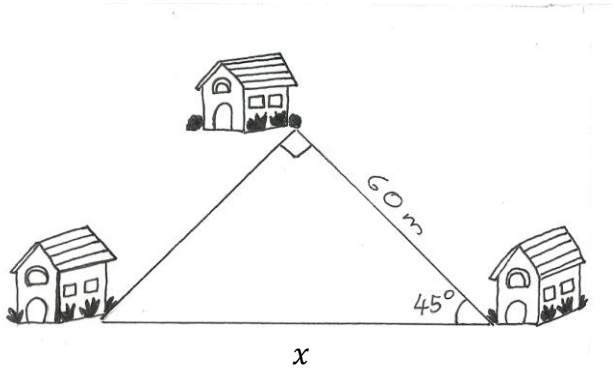
R=/ $\tan 25° = \frac{1{,}3m}{x} \rightarrow x = \frac{1{,}3m}{tan25°} \rightarrow x \approx 2{,}79m$

9) Se quiere comprar un cable que vaya desde la punta del mástil hasta la proa, cual debe ser su longitud si se conoce que el mástil mide $2{,}5m$ y se formará un ángulo entre el cable y la proa de 43°.



R=/ $\text{sen}\, 43° = \frac{2{,}5m}{x} \rightarrow x = \frac{2{,}5m}{sen43°} \rightarrow x \approx 3{,}67m$

10) ¿Cuántos metros de cable se necesitan para unir las tres casas?

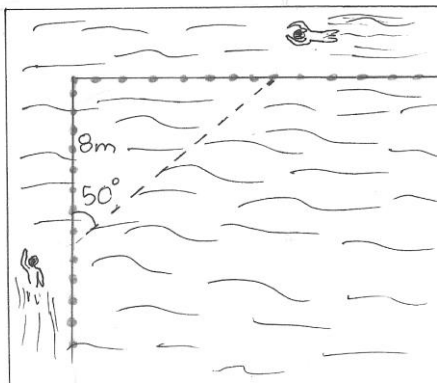


R=/ como el triangulo es rectángulo y sus otros ángulos de 45° significa que sus catetos son de igual longitud, por lo tanto ambos catetos miden $60m$, para encontrar la hipotenusa se puede utilizar el teorema de Pitágoras o las funciones trigonométricas así:

$$\text{sen } 45° = \frac{60m}{x} \rightarrow x = \frac{60m}{\text{sen } 45°} \rightarrow x \approx 84{,}85m$$

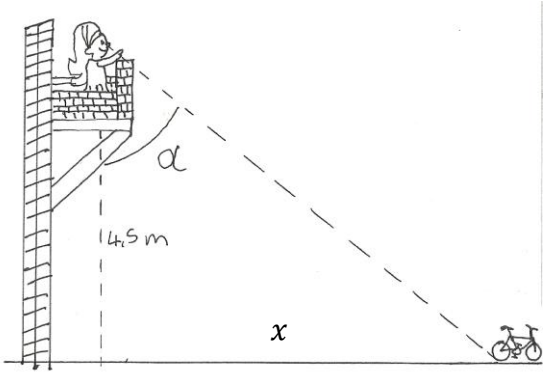
Así, el cable deberá tener como mínimo: $60m + 60m + 84{,}85m = 204.85m$

11) Dos deportistas que nadan en un piscina lo hacen hacia la misma esquina, mientras que a uno le faltan $8m$ ¿cuántos metros le restan al otro?



R=/ $\tan 50° = \frac{x}{8m} \rightarrow x = \tan 50° \times 8m \rightarrow x \approx 9{,}53m$

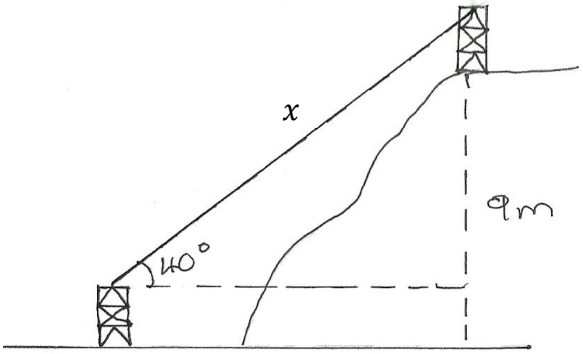
12) Una niña parada en un balcón, observa su bicicleta como lo muestra la gráfica, si la niña mide $1{,}2m$ y el balcón está a una altura de $4{,}5m$ y la vertical con la línea de visión forma un ángulo de 48° a que distancia de la edificación se encuentra la bicicleta.



R=/ $\tan 48° = \frac{x}{4{,}5m+1{,}2m} \rightarrow x = \tan 48° \times 5{,}7m$

$\rightarrow x \approx 6{,}33m$

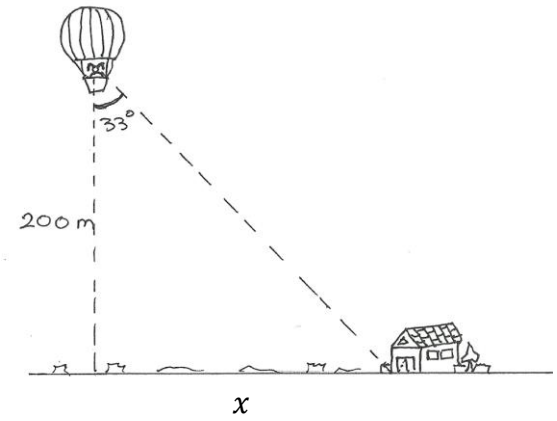
13) Se instalan dos andamios del mismo tamaño para hacer una garrucha, uno se instala a una altura de $9m$ con respecto al otro, ¿qué longitud tiene el cable, si en el andamio inferior se forma un ángulo de 40°.



R=/ Como ambos andamios tienen la misma altura esta se puede despreciar, entonces:

$$\text{sen } 40° = \frac{9m}{x} \rightarrow x = \frac{9m}{sen40°} \rightarrow x \approx 14m$$

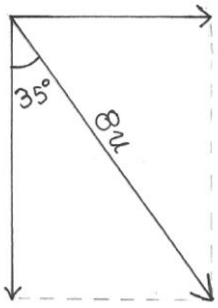
14) Una niña en globo a $200m$ de altura, observa su casa, formando entre su cuerpo y la línea de visión un ángulo de 33° ¿cuál es la distancia entre la casa y el punto del suelo donde se corta la perpendicular que pasa por el globo?



R=/ $\tan 33° = \frac{x}{200m} \rightarrow x = \tan 33° \times 200m$

$$\rightarrow x \approx 129{,}88m$$

15) Determina la componente "x" del vector de magnitud $8u$ como lo muestra la gráfica.



R=/ Para encontrar la componente "x" se debe tener en cuenta el ángulo complementario de 35° es decir 55° así:

$$\cos 55° = \frac{x}{8u} \rightarrow x = \cos 55° \times 8u \rightarrow x \approx 4{,}59u$$

CARTAS AMARILLAS DE PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA:

1) ¿Cuál es la relación $^{co}/_{h}$?

a. coseno
b. seno
c. tangente
d. cotangente

R=/ b

2) ¿Cuál es la relación $^{ca}/_{h}$?

a. cosecante
b. seno
c. coseno
d. cotangente

R=/ c

3) ¿Cuál es la relación $^{co}/_{ca}$?

a. cosecante
b. secante
c. seno
d. tangente

R=/ d

4) La relación cosecante es:

a. $^{co}/_{ca}$
b. $^{h}/_{ca}$
c. $^{h}/_{co}$
d. $^{ca}/_{co}$

R=/ c

5) La relación secante es:

a. $^{co}/_{h}$
b. $^{h}/_{co}$
c. $^{h}/_{ca}$
d. $^{co}/_{ca}$

R=/ c

6) La relación cotangente es:

a. $^{ca}/_{h}$
c. $^{h}/_{ca}$
b. $^{ca}/_{co}$
d. $^{co}/_{ca}$

R=/ b

7) Un ángulo coterminal con $550°$ es:

a. $150°$
c. $190°$
b. $50°$
d. $90°$

R=/ c

8) Un ángulo coterminal con $280°$ es:

a. $380°$
c. $-280°$
b. $80°$
d. $-80°$

R=/ d

9) Un ángulo coterminal con $970°$ es:

a. $250°$
c. $520°$
b. $360°$
d. $70°$

R=/ a

10) ¿Cuál de los siguientes ángulos es complementario con $75°$?

a. $105°$
c. $0°$
b. $75°$
d. $15°$

R=/ d

11) ¿Cuál de los siguientes ángulos es complementario con $35°$?

a. $145°$
c. $30°$
b. $55°$
d. $35°$

R=/ b

12) El seno de 30° y coseno de 60° es igual a:

a. $\sqrt{3}/_2$
c. $\sqrt{2}/_2$
b. $1/_2$
d. 1

R=/ b

13) El coseno de 30° y seno de 60° es igual a:

a. $\sqrt{3}/_2$
c. $\sqrt{2}/_2$
b. $1/_2$
d. 1

R=/ a

14) El seno y coseno de 45° es igual a:

a. $\sqrt{3}/_2$
c. $\sqrt{2}/_2$
b. $1/_2$
d. 1

R=/ c

15) $\sqrt{3}/_3$ es la relación de:

a. tan 90°
c. tan 30°
b. tan 45°
d. tan 60°

R=/ c

CARTAS AZULES DE RETOS:

En las cartas de retos, aparecerán las siguientes indicaciones:

1) Tres jugadores deberán formar con sus cuerpos y en el piso:
    - Un triángulo rectángulo.
    - Un triángulo acutángulo.
    - Un triángulo obtusángulo.

2) Los jugadores se ubican en fila, para jugar teléfono roto, pasando los mensajes que el ultimo debe escribir en una hoja para verificarlos al final:
    - Etimológicamente trigonometría significa "medición de triángulos".
    - $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

3) Los jugadores se ubican en fila, para jugar teléfono roto, pasando los mensajes que el ultimo debe escribir en una hoja para verificarlos al final:
    - En el circulo trigonométrico unitario el radio es la unidad.
    - El cateto opuesto es al seno como el cateto adyacente es al coseno.

4) Con una canción inventar un estribillo en forma de parodia que contenga alguna información sobre trigonometría.

5) Con una canción infantil inventar un estribillo en forma de parodia que contenga alguna información sobre trigonometría.

6) Elaborar una trova con el tema "relaciones trigonométricas".

7) Elaborar una trova con el tema "circulo trigonométrico unitario".

8) Elaborar una trova que contenga la frase "la trigonometría tiene numerosas aplicaciones".

9) Elaborar una trova sobre trigonometría que contenga la frase “es útil hasta en la NASA”.

10) Mímica: un jugador elegido deberá sin hablar, vocalizar ni hacer señales de letras con las manos, transmitir el mensaje que los demás descubrirán:
    - Relaciones trigonométricas.

11) Mímica: un jugador elegido deberá sin hablar, vocalizar ni hacer señales de letras con las manos, transmitir el mensaje que los demás descubrirán:
    - La trigonometría es útil en la vida.

12) Mímica: un jugador elegido deberá sin hablar, vocalizar ni hacer señales de letras con las manos, transmitir el mensaje que los demás descubrirán:
    - Funciones trigonométricas de ángulos notables.

13) Salir al patio y encontrar en la estructura de la planta física tres triángulos rectángulos.

14) Salir al patio y darle dos vueltas completas, llegar y recitar el nombre de las funciones trigonométricas.

15) Salir al patio y jugar a encestar cada uno su zapato en tres veces.

8.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

8.4.1. Pre-Test.

Para poder analizar el progreso de los estudiantes se realizó un primer test antes de poner en práctica la propuesta. Lo cual ayuda a tener una base sobre el nivel de conocimiento en cuanto a los conceptos básicos de trigonometría y la forma de utilizarlos en la solución de problemas prácticos, teniendo en cuenta que los estudiantes conocen sus resultados para incentivar su espíritu de superación en cuanto a sus desempeños, pero no se les da las respuestas correctas. El test se compone de seis actividades con la primera se busca saber si identifican las partes de un triangulo rectángulo con respecto a un ángulo; la segunda se enfoca a establecer las relaciones trigonométricas de dicho ángulo en el triángulo, esperando que racionalicen y simplifiquen las fracciones; la tercera es un apareamiento para relacionar funciones de ángulos notables con sus valores; la cuarta permite saber si los estudiantes diferencian las gráficas de las funciones trigonométricas; con la quinta se pretende que a partir de la representación gráfica de un problemas, se le de solución a tres indicaciones cambiando el lado solicitado y los valores dados y la sexta es una pregunta abierta con el fin de saber cómo los estudiantes reconocen la utilidad de lo que han estudiado para situaciones reales. (VER APÉNDICE B)

8.4.2. Post-Test.

Al haber implementado las propuestas de trabajo con los estudiantes, se realizó el post-test para poder establecer un comparativo entre los resultados de ambos test y de esta manera llegar a conclusiones sobre el trabajo. Las actividades y problemas son los mismos en los dos test, pues en ningún momento se les da las respuestas correctas ni se les permite contacto con el material mientras no se realice el post-test, son ellos quienes en el transcurso de las clases y con el desarrollo de los juegos, van fortaleciendo sus competencias y saberes para enfrentarse a este.

8.4.3. Diario de campo.

Como instrumento de recolección de información, busca mediante la observación, recopilar los hechos destacados para su análisis. Se diligencia una matriz que contiene el nombre del proyecto, la Institución Educativa, la población, el investigador y una tabla dividida en dos columnas, la primera de hallazgos, donde se narra la experiencia realizada en cada sesión de clase, resaltando los acontecimientos importantes para el estudio realizado y la segunda de Conclusiones, donde se confronta la teoría con la práctica para determinar el grado de valides de las afirmaciones establecidas en el marco teórico. (VER APÉNDICE C)

8.5. PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

8.5.1. Análisis test.

A continuación presento un estudio de cada pregunta por individual, contrastando los resultados del pre-test y del post-test, la población total es de 39 estudiantes. Sobre la primera actividad donde debían identificar las partes de un triángulo rectángulo con respecto a un ángulo, en el pre-test 37 estudiantes acertaron (94,87%) y 2 fallaron en su respuesta (5,13%) reconociéndose entonces que casi la totalidad empiezan el proceso con este conocimiento de base, en el post-test la totalidad de los estudiantes (100%) acertaron en este punto.

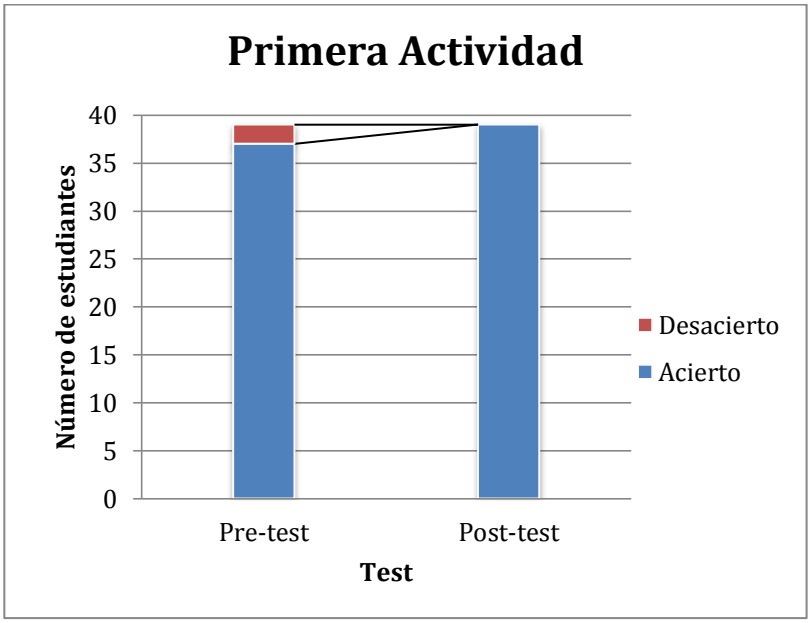


Figura 1. Resultados por número de estudiantes en la primera actividad del pre-test y post-test

En la segunda actividad, los estudiantes debían definir las seis relaciones trigonométricas a partir de lo establecido en el triángulo rectángulo, se presentan siete posibilidades, desde cero hasta seis acierto, las cuales se muestran en la tabla discriminando los resultados del pre-test y el post-test.

Tabla 1

Aciertos en la segunda actividad

		Aciertos						
		Cero	**Uno**	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**	**Seis**
No. de Estu-diantes	**Pre-test**	6 (15,38%)	0 (0%)	2 (5,13%)	2 (5,13%)	3 (7,69%)	3 (7,69%)	23 (58,97%)
	Post-test	0 (0%)	0 (0%)	2 (5,13%)	8 (20,51%)	0 (0%)	0 (0%)	29 (74,36%)

Se puede observar mejoría en los resultados del pre-test al post-test, pues ningún estudiante presentó cero o una sola relación acertada, aumentó el número de estudiantes que pueden establecer por lo menos dos o tres, siendo estas principalmente seno, coseno y tangente, las más aplicadas en los juegos didácticos, y aumentó también la cantidad de estudiantes que acertaron a las seis relaciones trigonométricas estudiadas, adicionando que en el pre-test, solo 3 estudiantes además de realizar bien las seis relaciones, simplificaban y racionalizaban la fracción y en el post-test, ya fueron 11 los estudiantes que lo realizaron, cabe resaltar que los juegos no hacían mucho hincapié en los procesos mencionados.

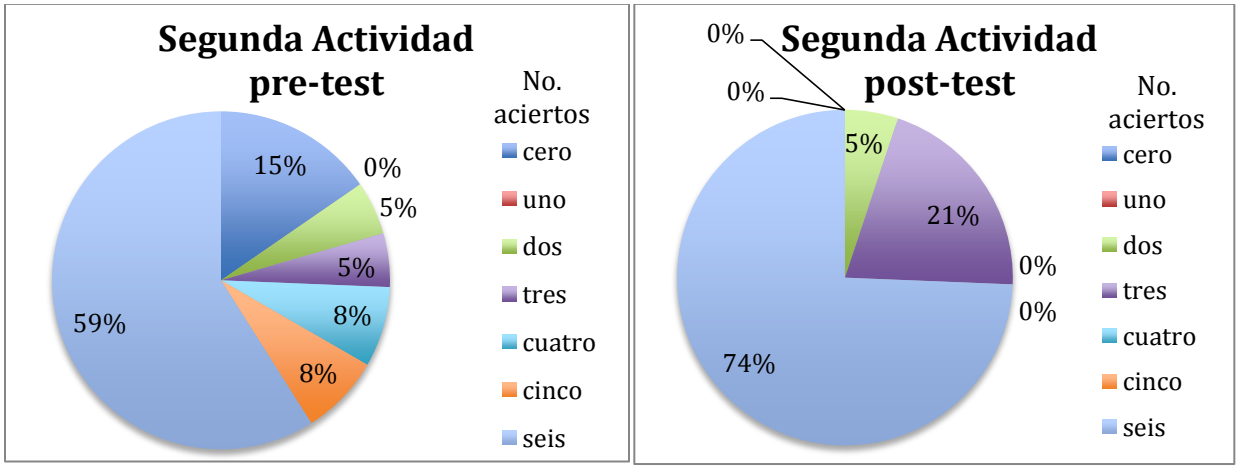


Figura 2. Resultados por número de estudiantes en la segunda actividad del pre-test y post-test

Para la tercera actividad donde se pretendía que dieran cuenta de sus conocimiento sobre las funciones trigonométricas de ángulos notables con un apareamiento, formando en total nueve parejas, lo que supone diez posibilidades contando no acertar a ninguna. La siguiente tabla muestra al número de estudiantes agrupados por la cantidad de parejas acertadas tanto en el pre-test como en el post-test.

Tabla 2

Aciertos en la tercera actividad

		Parejas									
		Cero	**Uno**	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**	**Seis**	**Siete**	**Ocho**	**Nueve**
No. de Estudiantes	**Pre-test**	5 (12,82 %)	10 (25,64 %)	5 (12,82 %)	7 (17,95 %)	3 (7,69%)	0 (0%)	1 (2,56%)	1 (2,56%)	0 (0%)	7 (17,95 %)
	Post-test	0 (0%)	3 (7,69%)	7 (17,95 %)	7 (17,95 %)	0 (0%)	3 (7,69%)	2 (5,13%)	2 (5,13%)	0 (0%)	15 (38,46 %)

En esta tercera actividad de apareamiento, se observó diferencia entre ambos test, pues en el post-test aumentó la cantidad de estudiantes que acertaron la totalidad de parejas y a su vez mayor número identifican funciones en ángulos notables.

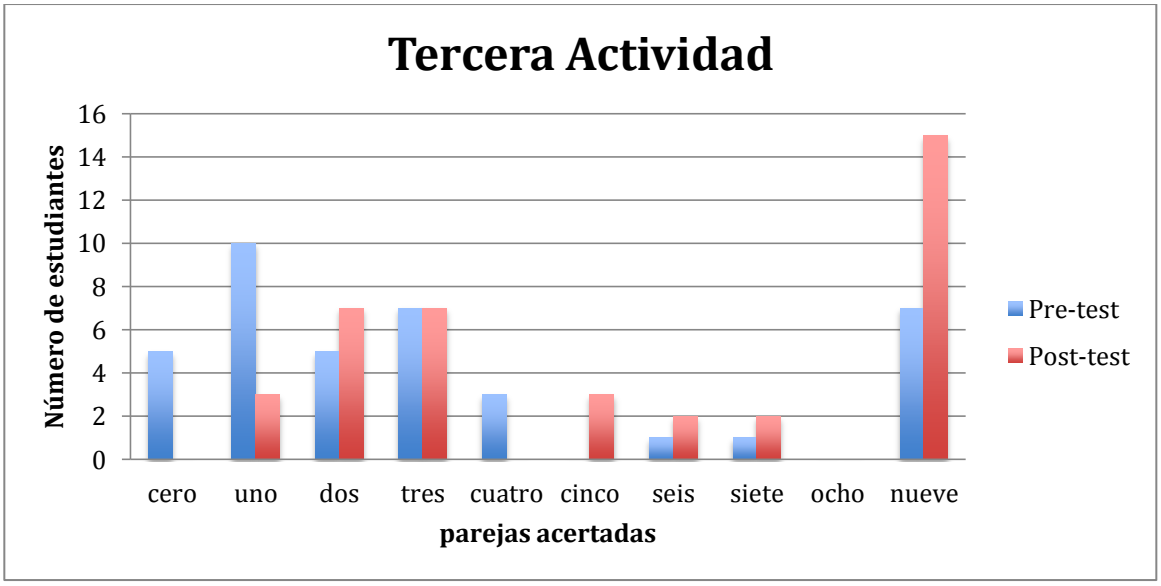


Figura 3. Resultados por número de estudiantes en la tercera actividad del pre-test y post-test

La cuarta actividad requería identificar las diferentes gráficas de las funciones trigonométricas, reconociéndolas a partir de sus puntos notables, siendo seis gráficas, lo que refiere siete posibilidades contando también que fallen en todas. Los resultados se muestran en la siguiente tabla agrupando los estudiantes según sus aciertos.

Tabla 3

Aciertos en la cuarta actividad

		Aciertos						
		Cero	**Uno**	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**	**Seis**
No. de Estu-diantes	**Pre-test**	4 (10,26%)	4 (10,26%)	4 (10,26%)	9 (23,08%)	10 (25,64%)	0 (0%)	8 (20,51%)
	Post-test	0 (0%)	0 (0%)	5 (12,82%)	8 (20,51%)	7 (17,95%)	0 (0%)	19 (48,72%)

Es posible apreciar una notable mejoría en cuanto a los resultados del post-test, comparados con el pre-test, los estudiantes se agrupan principalmente en los seis aciertos y ninguno falló o reconoció solo una.

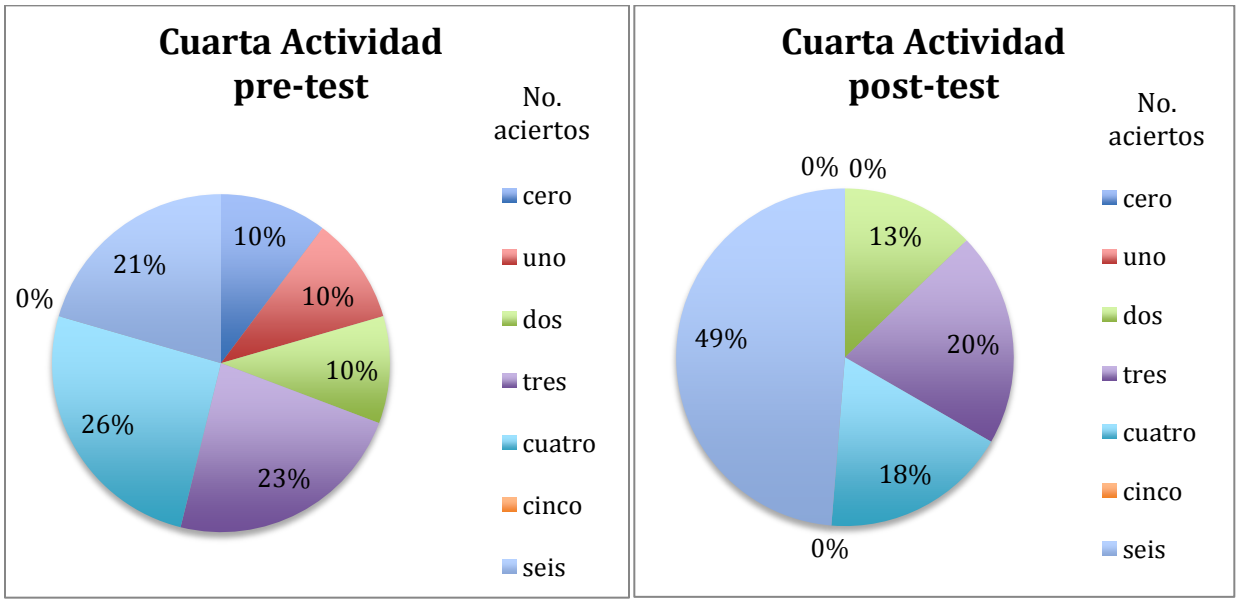


Figura 4. Resultados por número de estudiantes en la cuarta actividad del pre-test y post-test

Ya la quinta actividad recogía estos conocimientos en la solución de tres problemas que se pueden analizar a partir de la gráfica que los representa, existe entonces cuatro posibles resultados, desde que falle en todas hasta que acierte las tres. Los resultados se agrupan en la siguiente tabla.

Tabla 4

Aciertos en la quinta actividad

		Aciertos			
		Cero	**Uno**	**Dos**	**Tres**
No. de Estudiantes	**Pre-test**	33 (84,62%)	2 (5,13%)	1 (2,56%)	3 (7,69%)
	Post-test	8 (20,51%)	10 (25,64%)	6 (15,38%)	15 (38,46%)

Estos resultados, muestran un avance en el proceso de solución de problemas, que aunque continúan estudiantes sin saber solucionar o fallando en la selección de la función a utilizar o el despeje de la variable buscada, o hasta errores en el manejo de la calculadora, se puede ver una marcada diferencia entre ambos test, lo que resalta la importancia de la propuesta en el avance de estos procesos.

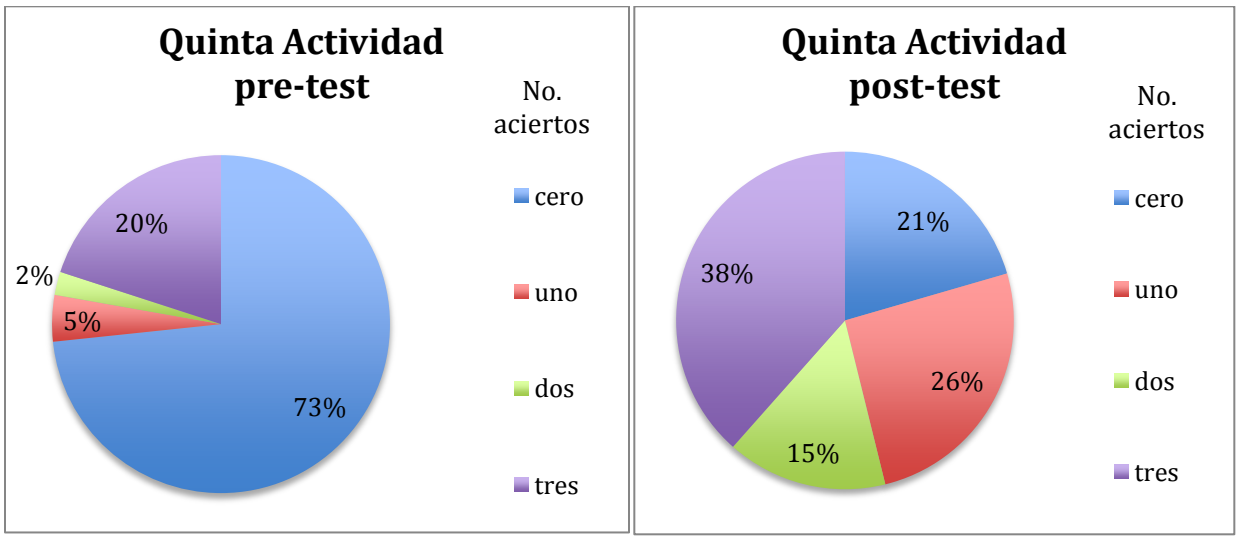


Figura 5. Resultados por número de estudiantes en la quinta actividad del pre-test y post-test

La sexta actividad por ser una pregunta abierta permitió más variedad en las respuestas, para el pre-test 20 estudiantes (51,28%) dejaron en blanco esta pregunta, 10 estudiantes (25,64%) lo relacionaron con la temática caída libre en física, que permite calcular la altura, 2 estudiantes (5,13%) reconocen que podrían hacer uso de las funciones trigonométricas sin especificar un proceso, 1 (2,56%) mencionó las relaciones de proporcionalidad de triángulos rectángulos, 2 (5,13%) plantea que se debe medir el ángulo pero tampoco especifican un proceso, solo 4 estudiantes (10,26%) acertaron en una buena explicación sobre el proceso a seguir para encontrar la altura del edificio teniendo el ángulo de visión y ubicándose en una distancia conocida.

En el post-test 4 estudiantes (10,26%) dejaron la actividad en blanco, 2 (5,13%) continuaron relacionando la idea en el área de física con caída libre, 7 estudiantes (17,95%) nombraron la necesidad de medir el ángulo, pero no describen el proceso, y 26 (66,67%) ya describen el proceso a seguir empleando el ángulo, un lado del triangulo que resulta entre los puntos de la situación problema y las funciones trigonométricas, y sumando su propia altura, para encontrar la del colegio.

Lo anterior reconoce que la experiencia vivencial de los estudiantes en el juego favoreció la comprensión de la utilidad de este saber en la solución de problemas de la vida, pues a pesar de que ya habían resuelto problemas antes del pre-test, la mayoría no logró relacionar este proceso con la pregunta que se les hacía, cosa que fue distinta en el post-test después de la práctica del juego y se evidenció resultados más positivos en cuento al aprendizaje significativo.

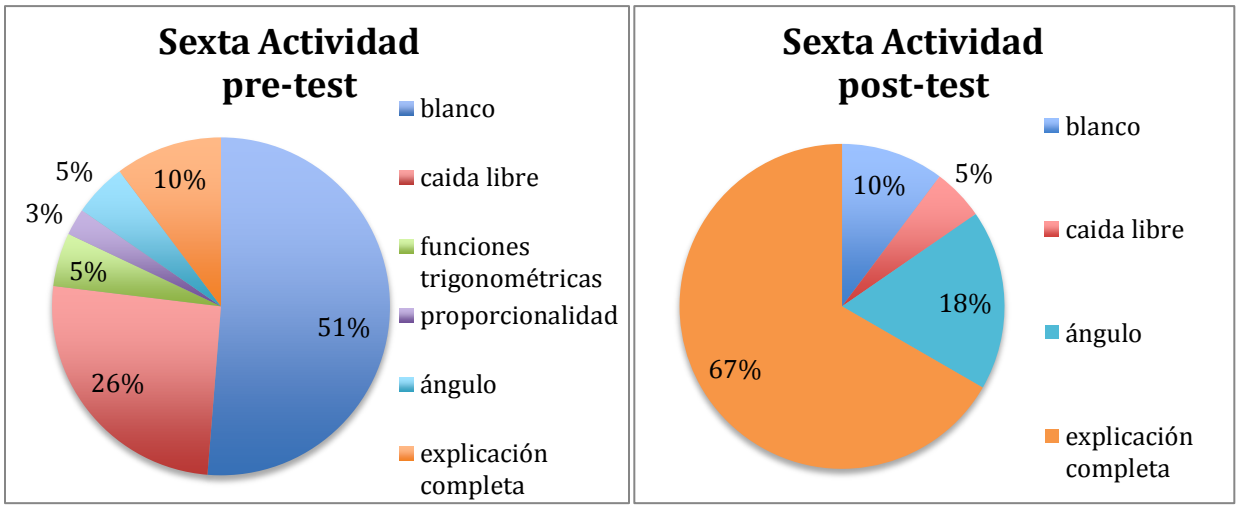


Figura 6. Resultados por número de estudiantes en la sexta actividad del pre-test y post-test

8.5.2. Análisis diario de campo.

Tabla 5

Diario de campo sesión 1

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
Con la realización del pre-test se da pie para la construcción de los equipos de trabajo, de tal manera que en cada uno quede un estudiante en el rango de los mejores desempeños, otro estudiantes en un rango medio y también uno con el rango más bajo en resultados. Para lo cual entonces se socializa en orden decreciente los resultados en cuanto a calificaciones de cada estudiante pero sin dar las respuestas correctas, evitando así que esto pueda interferir en los resultados del post-test. Se aprovecha la sesión para dar una información general sobre las actividades, motivando hacia un trabajo ordenado y generando expectativas en cuanto a que las clases se realizarán por medio del juego e informando lo que se requiere para iniciar la construcción del instrumento de medición y otros elementos importantes para el trabajo, por lo que se solicitó reunirse por primera vez en los equipos y que se organizaran para traer sus materiales de trabajo.	Para la realización de los juegos es necesario una buena planeación de todo el proceso, hasta de la estructura de los equipos, procurando que en los mismos se pueda observar un trabajo productivo, de ayuda y colaboración mutua. Es importante destinar un primer momento de contacto con las generalidades del juego, contextualizar al estudiante, para que comprenda lo que va a realizar como lo dice Gairín (1989) "es preciso que haya una fase previa en la que los alumnos conozcan el juego, que las reglas sean correctas, que no haya situaciones confusas, que el juego no se haga tedioso" (p. 66), con esta premisa se proyecta un juego intencionado hacia el desarrollo y fortalecimiento de competencias y habilidades, no simplemente jugar por jugar, es preparar todo un escenario que propenda por mejores aprendizajes, lo que se favorece con una primera sesión de motivación y de reconocimiento de las características, normas y generalidades de la estrategia didáctica.

Tabla 6

Diario de campo sesión 2

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
Se les presentó a los estudiantes la guía para la construcción de su instrumento de medición del ángulo de visión, se pudo observar algo de dificultad para seguir las instrucciones, sobre todo en la ubicación del nivel, pero después de una explicación y con el primer trabajo del equipo se construyeron todos los instrumentos. Los estudiantes expresaron curiosidad sobre su manejo, sobre todo la utilidad del mismo y de sus componentes, indagaron entre ellos mismos, llegando a conclusiones algunas alejadas, y otras acertadas sobre todo en la utilidad del pitillo. Ya cada equipo con su instrumento, se explicó el funcionamiento de las partes, la manera de mejorar la precisión en las lecturas, más aun bajo la necesidad de un buen trabajo en equipo para su manejo, pues requiere atención en el nivel, buena lectura del compas y una postura adecuada de quien soporta el instrumento es decir que cada uno tiene su responsabilidad. Se realizaron prácticas sencillas corrigiendo errores que se podían apreciar.	Jean Piaget ve que "en los alumnos jóvenes la acción sobre los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión, no sólo de las relaciones aritméticas, sino también de las geométricas" (Piaget, 1980, p.220), apuntando a este postulado, se plantea la elaboración del instrumento de medición, en reconocimiento a esa necesidad de que el estudiante tenga contacto directo con los objetos, y en esta interacción fue posible confirmar el interés que despierta el hecho de manipular una herramienta construida por ellos mismos a partir de materiales sencillos, y el poder entender el concepto de ángulo de visión y su utilidad. En el manejo del instrumento, se pudo observar que reconocían características importantes de la medición de ángulos y de mayor manera algo que para algunos venia siendo difícil como la amplitud del mismo, en cuanto saber leer el transportador utilizando correctamente las dos filas de valores que en ellos se presentan.

Tabla 7

Diario de campo sesión 3

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
Al hacer entrega de la primera hoja a cada equipo, se realizó la charla técnica, los nombres seleccionados por ellos fueron muy variados, algunos lo escogieron relacionado con la temática o el área, otros con la competencia y unos pocos con cosas en general, que junto a la realización del lema, la porra o el cántico les dio una primera identidad de grupo, al cantarla o decirla se notó un grado de motivación importante e interés por comenzar el trabajo, esa oportunidad de gritar o cantar en tono alto, les dio mayor ánimo para dar inicio a la competición. Cuando tenían en sus manos la fase inicial empezaron a leer, la mayoría de equipos con sus lideres entendieron las instrucciones, pero para otros fue necesaria la orientación del docente, lo que se realizó pidiéndoles leer nuevamente las indicaciones y que explicaran lo que entendían, aclarando algunas confusiones. Como la actividad consistía en medir a todos los miembros del equipo empleando el instrumento con la cuerda de la cual conocen su longitud, con el ángulo resultante debían calcular la altura hasta los ojos, las tareas fueron rotadas necesariamente para poder tener la longitud de los tres, al	Otra idea de Piaget resaltada en este trabajo, con respecto a la labor del maestro reza que "su papel no debe constituir en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten a investigar, utilizando los dispositivos apropiados" (Piaget, 1980, p.226), lo cual se hace evidente en la posibilidad de cambiar el ambiente de aula tradicional con esta estrategia implementada, dejando a un lado la solución de problemas de manera plana, solo con el tablero o el cuaderno y llevarlo a ser algo concreto, donde el estudiante puede sentirse parte del proceso y no un sujeto que observa desde la distancia. El juego propuesto cumple con las características que plantean Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, y Rodríguez Sánchez, (2004) al ser lúdico y despertar un sentimiento de gusto en el desarrollo del mismo, se lleva a cabo con total participación, libre de obligaciones o imposiciones, cuanta con reglas claras que se deben cumplir para lograr los objetivos y el resultado de cada basé es incierto para los participantes, no pueden a simple vista dar una solución, requiere actuar frente al problema con las herramientas que cuentan.

entregar sus resultados, se podía apreciar a simple vista en algunos un mal manejo del instrumento y del cálculo con la función trigonométrica equivocada, por lo que se les pedía analizar si sus resultados eran lógicos, a lo que entendían su error, retomaban la teoría explicada y mejoraban sus resultados. Con las respuestas aprobados por el docente se pasa a la fase central, con una primera actividad que pretendía la medición de la altura del edificio del colegio, tomada desde el patio, para lo cual con ayuda de sus palos podían ubicarse a cualquier distancian que quisieran de la pared, en lo que se pudo apreciar una buena experiencia al notar por ellos mismos cambios en el ángulo de visión de acuerdo a la distancia de la pared, en este momento se presentaron equipos a pedir explicación en cuanto a la distribución de las tareas, la gráfica fue de mucha ayuda para entender el problema. En la revisión del trabajo para dar el visto bueno todavía algunos grupos fallaban en la elección de la función a utilizar de acuerdo a los datos, pero con las orientaciones entendían su error y lo corregían. Ya en la segunda actividad de la fase central, fue necesaria una orientación para los cálculos, pues a pesar de que mejoraron al entender y seguir las instrucciones dadas, no apreciaban el por qué no tener en cuenta la longitud del palo y solo trabajar con la altura del	Se confirma de estos mismos autores la idea de que el "carácter competitivo: Aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodriguez Sánchez, 2004, p. 49). Elemento que le dio a la actividad un realce de importancia en el sentido de buscar ganar, y evitar caer en actitudes dañinas para el objetivo propuesto, como darle las respuestas correctas a los otros equipos para que éstos no tengan que realizar los ejercicios y sin una actuación consiente en este sentido, no se puede esperar resultados apropiados. Otro aspecto importante de analizar se puede apreciar en lo dicho por Piaget "resulta particularmente difícil que un profesor de matemáticas, cuyo espíritu es abstracto por definición, situarse en la perspectiva fundamentalmente concreta de sus jóvenes alumnos" (Piaget, 1980, p.225), reconociendo que los docentes de matemáticas frecuentemente pretenden que sus estudiantes comprendan lo que para él ya fue asimilado tan solo con una explicación o una narración del saber, esperando que en las cabezas de quien los escucha, se esté construyendo todo el conocimiento acertadamente, pero lo real es

estudiante, pero se logró la comprensión de la mayoría, evidente en las respuestas dadas por ellos. En la ultima actividad se notó un incremento en cuanto a la comprensión de las instrucciones y el cálculo realizado con respecto a las anteriores, se veían más apropiados del proceso y entendieron mucho mejor la gráfica, pues en la revisión fueron muy pocos los equipos que debieron reconsiderar su respuesta. Y eso teniendo en cuenta que cada actividad era diferente en su cálculo, la función trigonométrica utilizada y la forma de despejar la ecuación. Los equipos se demoraron desde hora y media hasta dos horas en terminar todas las actividades, incluidas la evaluación que se socializa en la clase siguiente; se podía observar mucho dinamismo y participación de la mayoría, aunque unos pocos equipos rezagados con respecto a los demás fueron más pasivos, requerían mayor explicación y se debía estar pendiente de que no hicieran algún tipo de copia de sus compañeros en su afán por mejorar sus resultados, pero con la ventaja de ser una competencia, que se media por el tiempo en resolver correctamente cada actividad y se recoge las hojas en cada una, los estudiantes fueron más celosos con sus respuestas para no ser alcanzados y poder ganar.	que una cosa es lo que el educador enseña y otra lo que su educando aprende, por lo que se hace necesario acercarse a la forma de pensamiento del joven que es mayoritariamente concreta, es decir, que a pesar de lo difícil que sea, pensar en la manera de que ese conocimiento matemático tan abstracto se pueda presentar de manera concreta y entendible. De otro lado una ventaja a resaltar en el juego es que "estimulará el trato con otras personas, la colaboración entre iguales y el trabajo en equipo, la aceptación de normas, la comunicación y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodríguez Sánchez, 2004, p. 50), esto fue visto en las interacciones de cada equipo, cuando superaban sus dificultades, discutían sobre la manera de solucionar los problemas, respetaban las reglas de juego, se valían de las cualidades de cada jugador y aceptaban las dificiencias de algunos, teniendo paciencia para explicar; se trata entonces no solo de una formación en saberes, también en valores, cualidades y aptitudes para vivir en sociedad.

Tabla 8

Diario de campo sesión 4

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
Con los resultados de cada equipo, sus respuestas y el tiempo empleado en resolver todo la actividad, se hizo un recuento de lo realizado pidiendo por equipos que comentaran su experiencia en la solución de cada una, se repasó el procedimiento y la forma de calcular, analizando todos los resultados con un margen de error establecido, comparando con las medidas tomadas directamente con un flexómetro sobre las longitudes, dicho margen de error varió de acuerdo a la actividad entre 4cm a 10cm. También se dio la pauta para socializar el último momento de la "expedición trigonométrica", la evaluación. Llegando a unas muy buenas consideraciones en cuanto a las dificultades que ellos mismos lograron apreciar, como que no se leía correctamente las indicaciones lo que dificultaba entenderlo, algunos fueron muy bruscos en el manejo de su instrumento de medición de ángulos, por lo que debieron arreglarlo sobre la marcha. Saber que función trigonométrica escoger también fue para ellos una dificultad y sobre todo buscar mayor precisión en sus lecturas, lo que suponía prestar atención al nivel y a la posición de quien sostenía el instrumento.	Guzmán (1989) plantea una pregunta interesante de analizar "¿Por qué no fomentar el espíritu lúdico en el acercamiento didáctico a todos los temas matemáticos?" (p. 64) entendiéndolo como una propuesta a valerse de los juegos para motivar el trabajo matemático con los estudiantes, se trata entonces de aprovechar el carácter lúdico para desterrar la idea del aburrimiento en clase, del área difícil y tediosa, y acercar el saber al estudiante, sin restarle importancia, exigencia o complejidad. Para lo cual se hace necesaria asertividad en la selección de la estrategia, que verdaderamente apunte a cumplir con su papel de motivadora, de despertar interés, de divertir mientras se aprende, mejorar la receptividad a la asignatura, fortalecer el conocimiento, ejercitar las habilidades, superar las dificultades y desarrollar las competencias. Se plantea entonces como una ayuda que no resuelve todo por sí sola, pero que unida a otras estrategias previas o posteriores mejoran el proceso de enseñanza aprendizaje. En este sentido, cabe mencionar que los juegos "requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, estimulan la imaginación, favorecen la creatividad y enseñan a pensar con espíritu

Expresaron que la forma de superar esas dificultades fue mejorar su trabajo en equipo, valerse de sus apuntes en el cuaderno, repetir en varias ocasiones los ejercicios y atender las orientaciones del docente, reconocieron acertadamente como fue su desempeño, siendo muy honestos aquellos que notaron sus propias fallas en el proceso, así mismo al expresar la importancia de estos contenidos, ver la utilidad de la matemática en diferentes situaciones de la vida. Llegaron a concluir que la matemática también es divertida, que es importante y útil en diferentes procesos de la cotidianidad, existiendo variadas maneras de solucionar un problema y reconociendo el papel de la trigonometría y en especial de sus funciones en actividades necesarias como las mediciones. Se le dio el premio al equipo ganador por realizar todas las actividades correctamente en el menor tiempo. Es también de resaltar que la conformación de los equipos se prestó para dos escenarios, en el primero los estudiantes adelantados tomaron el liderazgo y querían realizar ellos solos las operaciones y cálculos, por lo que fue necesario estar al pendiente de la participación de todos; en el segundo se vio una muy buena comprensión y explicación con paciencia a sus compañeros de los procesos necesarios para llegar a la respuesta acertada.	crítico" (Chamoso Sanchez, Durán Palmero, García Sánchez, Martín Lalanda, & Rodríguez Sánchez, 2004, p. 50), lo dicho por estos autores se pudo constatar, en la medida en que los equipos requirieron poner en el juego todas sus habilidades adquiridas, ejercitarlas mientras trabajaban superando los obstáculos, apoyándose entre ellos mismos y valiéndose de las explicaciones y la teoría, para lo cual se supone además el seguir correctamente instrucciones, llegar a consensos en el equipo, respetar las normas, valorar el trabajo de los demás y confiar en sus determinaciones. En este orden de ideas, vale la pena recordar lo que dijo Guzman "el espíritu lúdico de acercamiento a los problemas matemáticos más serios es el aspecto que más puede beneficiar al estudiante, impregnando positivamente toda su personalidad científica para el futuro, como estudiante y como posible investigador" (Guzman, 1989, p.64), se resalta entonces cómo en la actividad propuesta se le da un acercamiento a problemas matemáticos de una manera lúdica y atrayente para el joven, lo que se puede analizar en sus respuestas en la evaluación, al plasmar que sintieron placer en el desarrollo de la "expedición trigonométrica", y ven que la matemática también se puede aprender de una manera divertida.

Tabla 9

Diario de campo sesión 5

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
Para iniciar esta sesión se dio una explicación detallada del juego "carrera trigonométrica" presentando las piezas y reglas de juego, se organizaron en los mismo equipos, y entre ellos se escogieron unos rivales, al ser en total trece equipos, de dos de ellos se seleccionaron un participante de cada uno para formar una nueva pareja, quedando entonces catorce equipos para jugar en siete tableros, se toma la decisión de hacer esta cantidad, para evitar equipos demasiado grandes que no permitieran la participación de todos. Las normas se asimilaron con facilidad y todos con sus piezas de juego iniciaron rifando el equipo que debía comenzar. Cada mesa de juego, vivía su propia experiencia por la aleatoriedad en los resultados del dado y en las cartas, pero en general se apreciaba buena actividad, motivación y dinamismo. Se controló muy bien el tiempo para cada pregunta o actividad y el hecho de las cartas tener la pregunta y respuesta en ella fue algo positivo, pues nuevamente el carácter competitivo dio pie para ser celosos con las respuestas y exigentes con sus compañeros. Como al transcurrir las dos horas de clase no	La posibilidad de brindar espacios de juego didáctico, donde el estudiante se convierte en sujeto activo del proceso, permite una mejor comprensión de las temáticas, como lo definió Piaget "en todos los niveles –incluida la adolescencia- y de un modo tanto más sistemático cuanto más elemental es el nivel de que se trata, el alumno es capaz de "hacer" y de "comprender en acción" mucho mas de lo que puede expresar verbalmente" (Piaget, 1980, p.227), así, alejarse de las clases verbales tradicionales y pasar a la acción sobre el mismo conocimiento, es apuntar a fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje. En lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, (1998) en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas el objetivo es "proporcionar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro" (Ministerio de Educación Nacional,1998, p. 88) permitirles aprovechar su potencial, para confrontar el saber en la práctica, vivenciar experiencias significativas para el aprendizaje, motivar el trabajo colaborativo que apunte al fortalecimiento de las competencias necesarias

habían terminado de jugar se escribió la posición de cada equipo para poder continuar y guardar las cartas en orden para no repetir las ya trabajadas.	para desempeñarse en los ámbitos matemáticos.

Tabla 10

Diario de campo sesión 6

HALLAZGOS	**CONCLUSIONES**
Se dio continuidad a las partidas iniciadas en la sesión anterior, los estudiantes estaban más apropiado con el proceso, fue común escuchar carcajadas en especial en el momento de tirar el dado por querer sacar especialmente el color amarillo o azul que consideraron más fácil. Fue necesario estar muy atento a que todos los estudiantes participaran en la solución de cada carta, para que la responsabilidad no la asumiera uno solo. El hecho de tener la solución correcta escrita en las mismas cartas fue un factor importante para analizar las respuestas de los compañeros y entablar debate en cuanto a si era correcta o no, en especial en la construcción de gráficas, donde existían muy buenas aproximaciones y en la solución de problemas, para darse cuenta que dejaron escapar algunos detalles importantes por no analizar correctamente las gráficas para dar su respuesta, en esta sesión ya se tuvieron ganadores. Se inicio una segunda ronda cambiando de contrincante.	Es normal en el desarrollo del juego y a su vez es muestra de como lo disfruta el estudiante que se suba el volumen de las voces, que resulten carcajadas espontaneas, que salgan discusiones entre risas, lo dijo Torres "un ambiente de trabajo distendido no significa necesariamente menos aprendizaje e, inversamente, un aula silenciosa y ordenada no garantiza el éxito del proceso de enseñanza - aprendizaje" (Torres, 2001, p. 27). Si se aprende mientras se disfruta, se esta abonando un terreno para que el saber germine fuerte y prevalezca. De otro lado, el trabajo que se realiza de manera autónoma da pie para que ellos mismos se den cuenta de los errores cometidos o ratifiquen la comprensión de la temática, permitiendo así mayor apropiación del proceso y reconocimiento de la necesidad de analizar las respuestas cumpliendo con el objetivo del juego y dándole sentido al mismo.

Tabla 11

Diario de campo sesión 7

HALLAZGOS	CONCLUSIONES
En esta tercera sesión del juego "carrera trigonométrica" los estudiantes que se venían enfrentando a nuevos contrincantes, por azar les corresponde en algunas ocasiones repetir cartas, en lo que se pudo apreciar mejoría en sus procesos, pues al haber analizado anteriormente sus equivocaciones, aprenden de ello y las superan, aunque continúan equipos mostrando dificultades, por no ser suficientemente atentos al juego. La cantidad de cartas fue suficiente, pues a pesar de llevar varios juegos, todavía se siguen encontrando nuevos problemas y actividades, lo que supone un buen número. Los tiempos también van mejorando, y las cartas azules les han despertado un buen proceso creativo al realizar sus trovas, sus parodias y resolver las mímicas. Los jóvenes expresan su gusto por el juego y el cambio de las rutinas de clase, por estrategias más atrayentes y divertidas para ellos.	Así como se mencionó anteriormente en este trabajo, resaltando lo planteado por Gairín, (1989) cuando reconoce las cualidades propias del juego que potencia actitudes positivas hacia la matemática, facilita el desarrollo de competencias y es una estrategia que permite motivar, indagar, abordar, ejercitar y evaluar cualquier tema. Para este caso valiéndose también de un eje importante en la enseñanza de la matemática como es la solución de problemas, resaltado por el Ministerio de Educación Nacional (1998), como objetivo y parte integral de todo el proceso matemático de los escolares, no como un tema aislado, sino transversalizando los contenidos programáticos, para que el estudiante vea confrontado el saber con la realidad.

9. CONCLUSIONES

Con el desarrollo del trabajo surgen las siguientes conclusiones:

- El juego como herramienta didáctica, es un buen aliado para los docentes que quieren transformar sus clases de trigonometría, brindar con la mediación de esta estrategia, la posibilidad de fortalecer competencias, construir y reforzar conocimientos, vivenciar valores, hacer útil el saber, aprender para la vida y motivar para el aprendizaje.

- La solución de problemas con funciones trigonométricas se hace más entendible cuando se le permite al estudiante interactuar con el saber en su realidad, indagando en su propio entorno, aprendiendo de sus compañeros, poniendo en funcionamiento todas sus capacidades y habilidades para alcanzar su objetivo, un mediador importante para este procesos es el juego.

- Una de las cualidades más sobresalientes del juego es su carácter motivador, y siendo la motivación un facilitador del aprendizaje, por ende el juego sobresale como instrumento para la asimilación del saber y la incorporación de habilidades y destrezas para la vida.

- El éxito en la implementación del juego en el aula radica en el esfuerzo por parte del docente en cada etapa del proceso, desde la planeación, que debe realizarse de tal forma que no quede ningún engranaje suelto en la maquinaria que se está construyendo, adelantarse a las posibles eventualidades, construir la normativa lo suficientemente clara para que no permita ningún atajo o salida rápida, reconocer las características de la población y adecuarse a ellas. También estar atento en su ejecución para resolver cualquier inquietud y orientar el transcurso de la actividad hacia el logro esperado y en la fase final no olvidarse de evaluar, tanto los resultados como el juego y su proceso.

- La facultad que tiene el juego de facilitar la socialización enmarcada en espacios de disfrute permite vivenciar los valores necesarios para una convivencia asertiva como son el respeto hacia si mismo y el otro, la colaboración en los momentos necesarios, hablar

con el lenguaje y tono apropiado, escuchar a su igual para aprender de él y moverse en diferentes roles dentro del trabajo en equipo para cumplir con los objetivos planteados.

- La posibilidad de construir sus propias herramientas de trabajo y el empleo de materiales de su entorno para las actividades de clase son factores significativos para los estudiantes, como también lo es el hecho de salir de las cuatro paredes del salón, moverse por diferentes espacios y de mayor manera poder vivenciar en la realidad aquellos problemas que se plasman en el tablero y que no son descifrados en su totalidad por seguir siendo abstractos y poco entendibles para las mentes de los educandos, es decir, volver concreto y asimilable el saber enseñado.

- La competencia que surge con los demás equipos cuando se está realizando las actividades sirve como elemento de motivación extrínseca, la cual se puede aprovechar pero sin perder de vista que la motivación esté dentro de cada estudiante y sea despertada por la actividad misma y el interés verdadero de aprender.

- Cuando el estudiante juega, y más aun cuando el juego se orienta a la solución de problemas debe hacer uso de todas sus habilidades, requiere esfuerzo, conocimiento y manejo de herramientas. Puede suceder que algunos cuando vean dificultad en lo que hacen o si no tienen los presaberes necesarios se desmotiven, por lo que se deben pensar estrategias alternativas; puede ser la distribución correcta de equipos, donde se puedan aprovechar las características de los sujetos para la ayuda mutua, o las pistas o notas aclaratorias dentro de los instrucciones, todo lo que sea necesario para que no se pierda el interés.

- Con el juego se abre la puerta al aprender disfrutando, que vinculado a la enseñanza de la matemática, en este caso de las funciones trigonométricas, es un comienzo para desmitificar la consideración de esta área como tediosa, que el educando trabaje con gusto, viendo al tiempo la utilidad de su conocimiento.

- La limitante más grande que se puede presentar cuando se quiere trabajar con estrategias lúdicas como el juego es el factor tiempo, pues como ya se mencionó, requiere de una buena planeación que se traduce en inversión por parte del docente en horas de trabajo, pero se ve retribuida con los resultados cuando se ha hecho todo a conciencia.

10. RECOMENDACIONES

Para los docentes que quieran reproducir la experiencia se les recomienda:

- Reconociendo la importancia de problematizar el conocimiento matemático y las dificultades y el desinterés que los estudiantes presentan para esto. La recomendación es el uso de juegos que motiven y propicien el ambiente necesario para aprender mientras se divierte.

- El juego por sí solo no es garantía de aprendizaje significativo, requiere de espacios de reflexión y de orientaciones precisas del docente.

- La intencionalidad del juego debe ser clara pues de acuerdo a ella se genera su estructura, puede ser para motivar y entrar a un tema nuevo, o para el descubrimiento o construcción del conocimiento, o como herramienta evaluativa o de refuerzo, todo lo cual es posible con esta estrategia.

- La mayor inversión de tiempo en el juego lo realiza el docente en toda la etapa previa. Antes de presentarlo a los estudiantes es importante planear de manera meticulosa cada detalle, ponerse en el papel del jugador, predecir y solucionar los contratiempos para que resulten los menos posibles en el momento de la ejecución y se pueda cumplir en realidad el objetivo propuesto.

- La primera charla explicativa o preparación previa del estudiante para enfrentarse al juego es importante hacerla con total dedicación, pues permite dotarlo de toda la información necesaria para un desempeño exitoso.

- Para los problemas con funciones trigonométricas se recomienda presentar la gráfica, para que el estudiante pueda hacer un mejor análisis identificando los datos y el proceso

correcto, es importante también que sepa graficar un planteamiento o problema y reconozca las gráficas de las funciones trigonométricas y sus puntos notables.

- A pesar de que el juego por esencia tiene un carácter libre, el docente debe ser sujeto observador y actuar en los momentos que lo considere para que la actividad no se desoriente pues algunos estudiantes por su manera de pensar pueden encontrar diferentes trampas para cumplir su meta de ganar, pero el objetivo del docente no es que jueguen y ganen, sino que aprendan y desarrollen competencias y debe permanecer atento a ello.

- Propiciar el juego en equipo es importante para fortalecer la dimensión social del joven, que comprenda la dinámica del trabajo para que la relación sea efectiva y se generen interacciones enriquecedoras para el proceso formativo.

- En los juegos de mesa, hay que prestar atención a los detalles estéticos, pues los jóvenes están en contacto con atracciones llamativas visualmente y las propuestas del docente deben estar a este nivel.

- Las normas en los juegos deben ser suficientemente claras y no demasiadas, para no abrumar o confundir a los jugadores.

- Se debe permitir a los estudiantes construir sus herramientas, pues de esta manera entienden y asimilan la utilidad de sus componentes y su manejo hace posible comprender mejor el concepto o saber enseñado.

- Las situaciones en los juegos deben ser organizadas de tal forma que permita el descubrimiento, la indagación, la discusión, el debate, llegar a consensos, concluir, comparar, entre otros procesos propios del aprendizaje.

- Con juegos correctamente planeados y dirigidos, el docente propende por despertar motivación intrínseca en el estudiante para el aprendizaje, pero también puede aprovechar otros elementos que apuntan más a la motivación extrínseca como los premios o la nota

siendo un complemento o ayuda, pero sin desviarse o desconocer los verdaderos objetivos del trabajo.

- Para la distribución de los equipos, es importante conocer las características de la población, para realizarlo de una manera equilibrada donde se puedan apreciar sujetos aventajados ayudando a aquellos que han presentado dificultad, pero se hace imprescindible la atención constante del docente para evitar que el trabajo lo realice uno solo de ellos, logrando que los roles sean rotados en cada momento.

- La revisión de los avances en el trabajo deberá hacerse lo más frecuentemente posible, para evitar que los estudiantes continúen con errores conceptuales o de procedimiento en el transcurso del juego, estos deben corregirse rápidamente para garantizar aprendizajes y fortalecimiento de competencias.

- Solicitar canticos o porras de aliento, se convierte en una píldora de ánimo, que motiva y le da alegría al juego, así como el nombre del equipo genera identidad y sentido de pertenencia.

- Las evaluaciones finales, donde el estudiante se autoevalúa y evalúa el proceso, propicia compromisos de mejora para futuras interacciones con juegos o trabajos de aula, a su vez que permite recolectar información para perfeccionar los juegos o la manera de planearlos.

11. REFERENCIAS

Andrés Tripero, T. de. (2011). Piaget y el valor del juego en su Teoria Estruturalista. *Einnov@ Revista Electrónica de Educación*, *6*. Retrieved from http://biblioteca.ucm.es/revcul/e-learning-innova/6/art431.php

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa Guía Práctica*. España: Grupo Editorial Ceac, S.A.

Chamoso Sanchez, J. M., Durán Palmero, J., García Sánchez, J. F., Martín Lalanda, J., & Rodriguez Sánchez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *SUMA*, *47*, 47–58.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Farías, D., & Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria*, *3*, 33–40.

Flores Gil, F. L. (2008). *Hisotira y Didáctica de la Trigonometría*. España: publicatuslibros.com.

Font, V. (1994). Motivación y Dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *SUMA*, *17*, 10–16.

Gairín, J. M. (1989). Recursos para la clase de Matemáticas: el Juego. *SUMA*, *3*, 65–66.

Guzmán, M. de. (1989). Juegos y Matemáticas. *SUMA*, *4*, 61–64.

Hernández, M. (2009a). El Juego Deportivo en la Prehistoria. Retrieved from http://museodeljuego.org/wp-content/uploads/contenidos_0000001377_docu1.pdf

Hernández, M. (2009b). El Juego Deportivo en las Culturas Urbanas Plenas: Grecia. Retrieved from http://museodeljuego.org/wp-content/uploads/contenidos_0000001379_docu1.pdf

Hernández, M. (2009c). El Juego Deportivo en las Culturas Urbanas Plenas: Roma. Retrieved from http://museodeljuego.org/wp-content/uploads/contenidos_0000001380_docu1.pdf

Itard, J., & Hernández Pibernat, J. L. (1982). Trigonometría. In *Gran Larousse Universal* (Vol. 40, pp. 12526–12528). Plaza & Janés S. A.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares* (1st ed.). Santafe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Nevado F, C. (2008). El componente lúdico en las clases de ELE. *Revista de Didáctica ELE*, *7*.

Ospina Rodríguez, J. (2006). La motivación, motor del aprendizaje. *Revista Ciencias de la Salud*, *4*, 158–160.

Palacios, J. (2007). Técnicas Lúdicas. In *Manual del monitor/a de tiempo libre* (pp. 477–516). Valladolid: Junta de Castilla y Leon: Consejería de Familia e Igualdad de Oportunidades.

Piaget, J. (1980). Observaciones Sobre la Educación Matemática. In *La Enseñanza de las Matemáticas Modernas* (segunda, pp. 219–227). Madrid: Alianza Editores S.A.

RAE. (2012). juego. *Diccionario de la lengua Española* (22nd ed.). Retrieved from http://www.rae.es

Ramos Valdez, A. (2007). *Algunos protagonistas de la pedagogía; vida y obra de grandes maestros: antología básica*. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Revista Vinculando. (2009, July 20). Historia y evolución del juego. *Revista vinculando*. Retrieved from http://vinculando.org/articulos/historia_y_evolucion_del_juego.html

Rollins, S. (n.d.). Las Teorías sobre el Juego en la Educacion de la Primera Infancia [Blog]. Retrieved from http://www.ehowenespanol.com/teorias-juego-educacion-primera-infancia-sobre_169383/

Torres, M. de. (2001). El juego en el aula: una experiencia de perfeccionamiento docente en Matemática a nivel institucional. *SUMA*, *38*, 23–29.

Tostado, F. J. (2013, October 9). El juego en la Edad Media [Blog]. Retrieved from http://franciscojaviertostado.com/2013/10/09/el-juego-en-la-edad-media/

Valle, A., Rodríguez, S., Núñez, J. C., Cabanach, R. G., González, J. A., & Rosario, P. (2010). Motivación y Aprendizaje Autorregulado. *Revista Interamericana de Psicología*, *44*(1), 86–97.

12. APÉNDICES

12.1. APÉNDICE A: ELABORACIÓN INSTRUMENTO DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

MATERIALES:

-Transportador (que tenga la señal del "centro", vértice del ángulo, en medio de la paleta central y no en un borde y que sea traslúcido)

-Chincheta

-Pitillo

-Nivel

-Hilo de cometa

-Tijeras

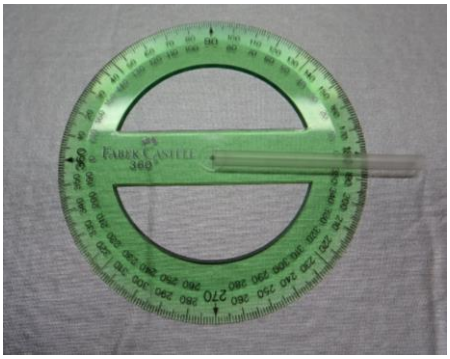
-Silicona

-Cinta adhesiva

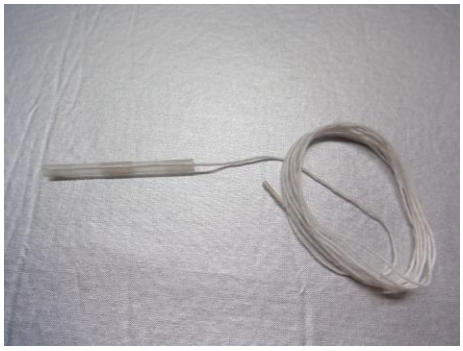
-Cinta métrica, flexómetro

PROCESO:

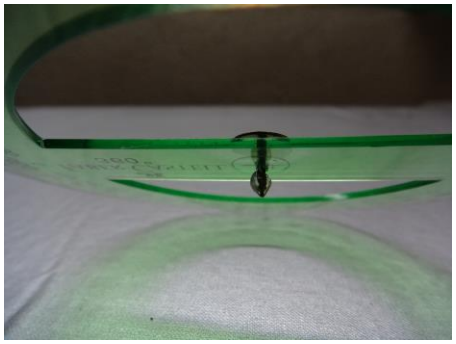
1. Tomar la medida del pitillo, ubicando uno de sus extremos en el centro del transportador y cortar de tal forma que sobresalga fuera del instrumento.



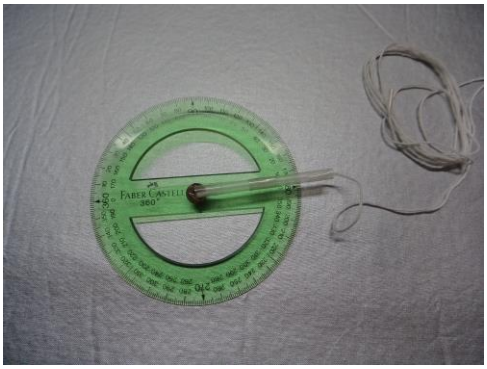
2. Cortar dos metros de hilo de cometa y pegar con la cinta adhesiva un extremo en el pitillo que se corto previamente.



3. Con la chincheta perforar el transportador justo en la señal donde se ubica el vértice del ángulo, para lo cual es importante haber seleccionado un transportador que tenga la señal del "centro", vértice del ángulo, en medio de la paleta central y no en un borde; con la silicona se hace un tapón a la punta para que la chincheta no salga, pero permitiendo su movilidad.



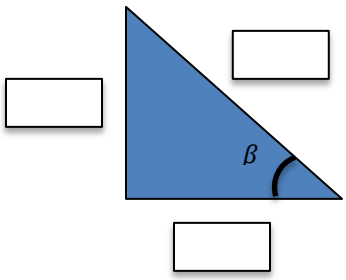
4. Se pega la punta del pitillo a la chincheta, fijándose que la punta coincida con el centro.



5. Se pega por el reverso del transportador el nivel, prestando atención a que quede bien posicionado y permita una buena lectura.

12.2. APÉNDICE B: TEST

1. Determino las partes del triangulo con respecto al ángulo β



Hipotenusa ($2\sqrt{41}$cm)

Cateto Adyacente (8cm)

Cateto Opuesto (10cm)

2. Escribo las funciones trigonométricas de β

$\text{sen}\,\beta =$ $\quad\quad$ $\csc\beta =$

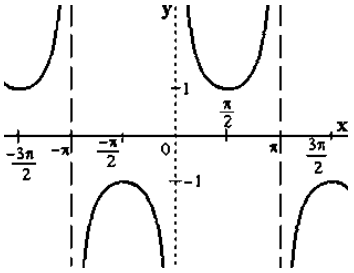
$\cos\beta =$ $\quad\quad$ $\sec\beta =$

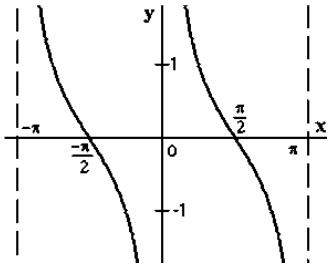
$\tan\beta =$ $\quad\quad$ $\cot\beta =$

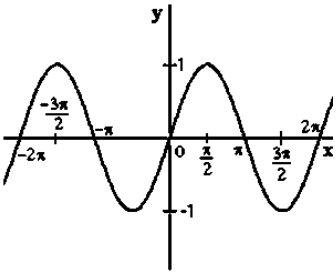
3. Relaciono las funciones de la columna de la derecha con sus respectivos valores en la columna de la izquierda.

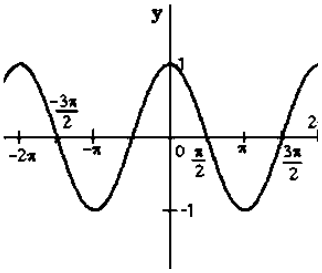
1) $sen\ 60°$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2) $cos\ 60°$	( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $tan\ 60°$	( ) $\frac{1}{2}$
4) $sen\ 30°$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5) $cos\ 30°$	( ) $\sqrt{3}$
6) $tan\ 30°$	( ) 1
7) $sen\ 45°$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8) $cos\ 45°$	( ) $\frac{1}{2}$
9) $tan\ 45°$	( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

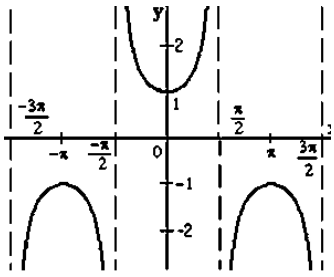
4. Escribo debajo de cada gráfica la función que representa:

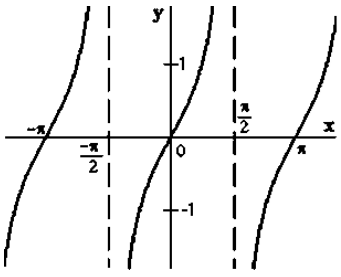




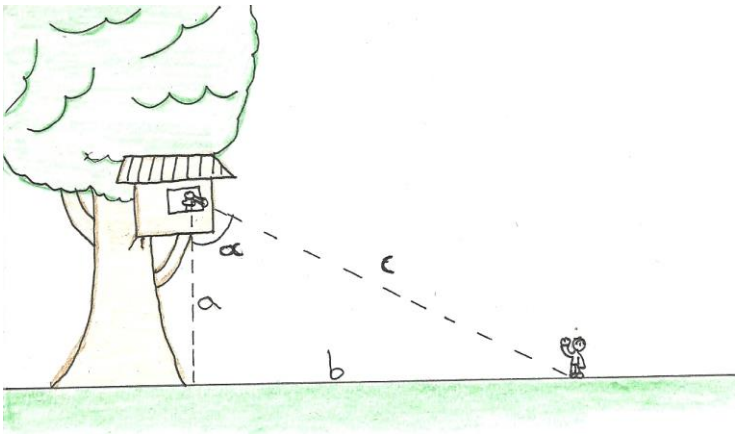








5. De acuerdo a la siguiente gráfica determino:



a) la longitud de c siendo $\alpha = 60°$ y $b = 2{,}5\ m$

b) la longitud de b siendo $\alpha = 55°$ y $a = \ 2\ m$

c) la longitud de a siendo $\alpha = 50°$ y $c = \ 3\ m$

6. De acuerdo a lo visto hasta el momento en el área ¿cómo podría calcular la altura del edificio del colegio sin medirlo directamente con una cinta métrica, cuerda o cualquier objeto que represente su longitud de manera directa?

_____
_____
_____
_____
_____

12.3. APÉNDICE C: MATRIZ DIARIO DE CAMPO

Nombre del proyecto:_____

Institución Educativa:_____

Población:_____

Investigador:_____

HALLAZGOS	CONCLUSIONES

12.4. APÉNDICE D: FOTOS