



Confiabilidad Inversa, Optimización basada en Confiabilidad y Optimización del Riesgo Estructural usando el gráfico de confiabilidad

Daniela Riaño López

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Civil
Manizales, Colombia

2019

Confiabilidad Inversa, Optimización basada en Confiabilidad y Optimización del Riesgo Estructural usando el gráfico de confiabilidad

Daniela Riaño López
darianolo@unal.edu.co

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Ingeniería - Estructuras: Perfil investigativo

Director:
Ph.D Jorge Eduardo Hurtado Gómez
jehurtado@unal.edu.co

Línea de investigación:
Confiabilidad Estructural
Grupo de investigación:
Earthquake Engineering and Seismology Group

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Departamento de Ingeniería Civil
Manizales, Colombia

2019

Inverse Reliability, Reliability-based Optimization and Risk Optimization using Reliability plot

Daniela Riaño López
darianolo@unal.edu.co

Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of:
Master of Engineering - Structures: Research Profile

Advisor:
Ph.D Jorge Eduardo Hurtado Gómez
jehurtado@unal.edu.co

Research line:
Structural Reliability
Research group:
Earthquake Engineering and Seismology Group

Universidad Nacional de Colombia
Faculty of Engineering and Architecture. Department of Civil Engineering
Manizales, Colombia

2019

RESUMEN

El diseño estructural empleando métodos deterministas, es decir, usando métodos en los que no se tienen en cuenta la incertidumbre han sido el común denominador en el momento de diseñar estructuras dada su fácil aplicación; sin embargo estos no tienen en cuenta factores como la variabilidad en las propiedades de los materiales, cargas o el costo monetario de manera explícita, ya sea representado en maximizar las ganancias o en minimizar gastos. En esta tesis se muestran tres métodos alternativos para el diseño de estructuras: Confiabilidad inversa (IR), Optimización basada en confiabilidad (RBO) y Optimización del Riesgo (RO), los cuales representan un enfoque alternativo al diseño clásico de estructuras. Adicional a esto, se muestran estos procesos de optimización vistos desde el gráfico de confiabilidad, este método aborda el diseño estructural de una manera visible transfiriendo la información de un número determinado de dimensiones a un espacio de dos dimensiones. Se hablan de las ventajas y desventajas de la representación en el gráfico de confiabilidad y finalmente se dan unos ejemplos que muestran la efectividad de este mecanismo.

Palabras clave: Gráfico de confiabilidad, Optimización basada en confiabilidad (RBO), confiabilidad inversa, Optimización del riesgo (RO), optimización del riesgo estructural (SRO)

ABSTRACT

Deterministic design has been very used when the engineers realize structural designs because this is a easy method for applications; However this kind of design method don't consider some factors like loads, costs and material variability in a explicit manner, either maximizing profits or minimizing expenses. In this thesis are presented three alternative methods for design civil structures: Inverse reliability (IR), Reliability-based Optimization (RBO) and Risk Optimization (RO), which represent an alternative approach instead the classic structure design. Additional to this, these optimization process are showed usign the reliability plot, this method shows in a visible manner a structural design, transforming the information from a determinated number of variables to a two-dimensions space. Also are showed advantages and disadvantages of using the reliability plot and finally are presented some examples that show its effectiveness.

Palabras clave: Reliability plot, Reliability-Based Optimization (RBO), Inverse reliability, Risk Optimization (RO), Structural Risk Optimization (SRO)

A mi familia, seres queridos, compañeros y docentes.

MOTIVACIÓN

En el contexto de la ingeniería estructural se ha implementado de manera extendida el diseño determinístico el cual está arraigado en el saber ingenieril ya que aparentemente tiene consideraciones económicas y se fía únicamente de casos exitosos los cuales se consideran replicables haciendo ciertas simplificaciones al momento de realizar el diseño estructural. Así es como se ha diseñado desde la antigüedad y se han mejorado las técnicas y restricciones que limitan a las variables.

Este diseño determinístico implica el uso tanto de formulaciones deterministas como de constantes y restricciones empíricas las cuales no representan de manera adecuada los fenómenos mecánicos y que presentan problemas de diversos tipos tales como:

- Las constantes empíricas no representan de una manera adecuada los fenómenos mecánicos, químicos y una combinación de ambas pues generalmente estas constantes se han generado para un promedio de casos que son posibles pero no representan la totalidad de los datos.
- Este tipo de constantes no ayudan a optimizar el costo de la estructura pues sus criterios no van encaminados directamente a buscar unas dimensiones que cumplan con requerimientos económicos sin dejar de lado el requerimiento estructural.
- No se tienen consideraciones probabilísticas en el momento de realizar el cálculo de las dimensiones de diseño, por lo que se pueden tener variables que cumplen con criterios mecánicos pero que tienen probabilidades de falla altas con respecto a otros tipos de diseño

que podrían cumplir de igual manera y que serían confiables, es decir, con probabilidades menores de falla.

Es decir, los diseños que se han realizado implementando este método son diseños desproporcionados en dimensiones que muchas veces son poco confiables o costosos o una combinación de ambos problemas. Esto se hace evidente en casos críticos en los que la estructura empieza a trabajar en ciertas circunstancias y que por los problemas de diseño puede entrar en estado de falla.

Teniendo en cuenta todas estas dificultades y con la necesidad apremiante de generar diseños más confiables y duraderos se hace necesario que se tengan unos criterios tanto de selección como de restricción los cuales ayudarían en el momento de planear una estructura. En este caso se podría considerar diseñar teniendo en cuenta la probabilidad de falla que se puede tener de cualquier estructura la cual a su vez está definida por ciertos factores como la importancia de la edificación en la sociedad (eg. hospitales, estación de bomberos), el peligro que conlleva el daño de una parte o la totalidad de la estructura como pasa por ejemplo con las construcciones relacionadas con los reactores nucleares, el riesgo económico en el daño que se tiene o el ciclo de vida de la edificación (Ver 1).

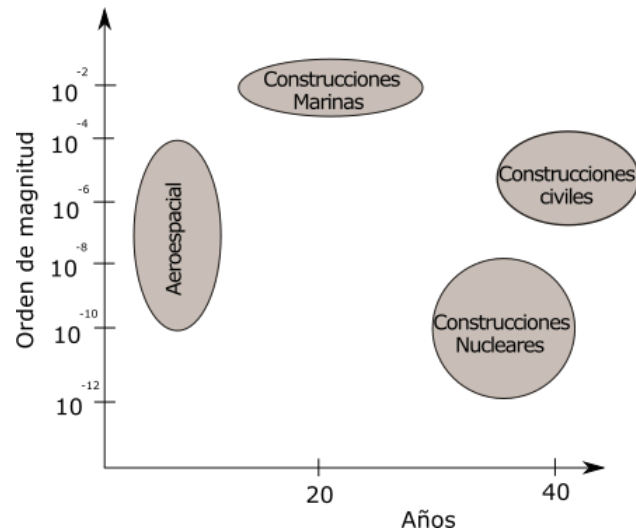


Figura 1: Probabilidad de falla de acuerdo al uso de estructura y ciclo de vida útil de la estructura. [Lemaire, 2009]

Para poder diseñar teniendo consideraciones no solamente empíricas se pueden enunciar varias formas de diseño que se han implementado en el campo de la ingeniería estructural:

- **Confianza inversa (IR):** Es el hallazgo de unas variables de diseño teniendo en cuenta

una probabilidad de falla preestablecida por diversos motivos.

- **Optimización basada en confiabilidad (RBO):** Consiste en encontrar unas variables de diseño las cuales minimizan una función de costo (puede ser el peso de una estructura, por ejemplo) teniendo en cuenta una probabilidad de falla preestablecida y unas limitaciones en las variables de diseño.
- **Optimización del Riesgo Estructural (RO):** Es el diseño en el cual se encuentran unas variables de diseño minimizando los gastos económicos de la estructura teniendo en cuenta unas consideraciones probabilísticas.

Si bien estos métodos han sido estudiados e implementados usando diversas técnicas, en especial la optimización basada en confiabilidad, se hace necesaria la aplicación de un método gráfico el cual ayude a visualizar y a diferenciar datos que cumplen con los criterios probabilísticos establecidos en el problema de una manera rápida y efectiva teniendo en cuenta un número determinado de datos. Es así que, mediante el uso de las propiedades que se tienen de los gráficos asociados a la confiabilidad surge el gráfico de confiabilidad como una manera de manejar un problema de un número de dimensiones plasmándolo en un problema de dos dimensiones.

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es la aplicación del gráfico de confiabilidad [Hurtado, 2012] en problemas relacionados con confiabilidad estructural. Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Descripción del gráfico de confiabilidad como método de reducción dimensional
- Implementar el método del gráfico de confiabilidad en problemas relacionados con Confiabilidad inversa, Optimización basada en confiabilidad y Optimización del riesgo estructural.

Esquema de la tesis

La tesis está dividida en dos partes: una correspondiente al marco teórico y otra correspondiente a aplicaciones del gráfico de confiabilidad.

En la primera parte se encuentran dos capítulos, el primero relacionado con el planteamiento del problema de confiabilidad, formulación de la probabilidad de falla y métodos que se han implementado para encontrar probabilidades de falla ya sea de manera analítica o con métodos de simulación. En el segundo capítulo se relaciona la teoría concerniente al gráfico de confiabilidad como un método de reducción dimensional de un problema; se especifican las propiedades y los trabajos relacionados con el gráfico de confiabilidad.

La segunda parte relaciona todas las aplicaciones al gráfico de confiabilidad que se harán en el marco de esta tesis. En el capítulo 3 se aborda el problema de confiabilidad inversa con una breve descripción del desarrollo de la teoría de la misma y cómo se puede trabajar este problema con la aplicación del gráfico de confiabilidad; se ilustra la aplicación del gráfico de confiabilidad en IR mediante cuatro ejemplos. El capítulo 4 aborda el problema de RBO visto desde el gráfico de confiabilidad resolviendo dos problemas estructurales y finalmente el capítulo 5 trata el problema de RO usando el gráfico de confiabilidad resolviendo cuatro ejemplos. Se describen además unas conclusiones importantes que se obtuvieron al desarrollar la tesis y se esbozan algunos objetivos a desarrollar en el futuro con la teoría del gráfico de confiabilidad.

Adicionalmente se tiene el apéndice A, en el que se relacionan las herramientas usadas para la construcción de la tesis.

ÍNDICE GENERAL

I Marco Teórico	1
1. El problema de Confiabilidad	3
1.1. Introducción	3
1.2. Definición de probabilidad de falla (POF)	4
1.3. Evaluación de la confiabilidad	5
1.3.1. Métodos de simulación	5
1.3.2. Métodos analíticos	9
1.4. Códigos de diseño estructural	13
1.4.1. Desarrollo y Calibración de códigos de diseño	14
1.4.2. Clasificación de los códigos existentes	17
1.5. Ejemplos de confiabilidad	20
1.5.1. Una función explícita optimizada	20
1.5.2. Una función implícita	24
1.6. Representación de elementos finitos estocásticos	25
1.6.1. Representación de procesos estocásticos	26
1.6.2. Expansión de Karhunen-Loève	27
1.6.3. Método de expansiones de Neumann	32
1.6.4. Caos Homogéneo	33

1.7. Representación de Elementos finitos Estocásticos	33
2. Reducción de dimensionalidad	39
2.1. Definición	39
2.2. Transformación polar	41
2.3. Características del gráfico	47
2.4. Ventajas	51
2.5. Limitaciones	51
2.6. Algoritmo	52
2.7. El meta-problema de confiabilidad y el gráfico de confiabilidad	52
2.8. El gráfico de confiabilidad y el metaproblema	55
2.9. Aplicaciones existentes de la reducción dimensional y el gráfico de confiabilidad	56
II Desarrollos propuestos para diseño óptimo de estructuras	57
3. Confiabilidad inversa	59
3.1. La confiabilidad inversa	59
3.2. Desarrollo del problema de confiabilidad inversa.	61
3.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad	62
3.3.1. Una columna esbelta en pandeo	63
3.3.2. Una viga en voladizo	65
3.3.3. Una cercha espacial	68
3.3.4. La viga de Euler-Bernoulli resuelta por SFEM	70
4. Optimización basada en confiabilidad	75
4.1. Definición	75
4.1.1. Clasificación de problemas asociados a RBO	77
4.1.2. Solución de problemas asociados a RBO	77
4.2. Desarrollo del problema de RBO	80
4.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad.	83
4.4. Ejemplos	83
4.4.1. Una columna esbelta en pandeo	84
4.4.2. Una viga en voladizo	85

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XV
4.4.3. Una cercha espacial	88
4.4.4. La viga de Euler-Bernoulli resuelta por SFEM	89
5. Optimización del riesgo estructural (RO)	93
5.1. Definición	93
5.2. Desarrollo del problema de Optimización del riesgo estructural	96
5.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad	97
5.4. Ejercicio numérico	99
5.4.1. Una columna en pandeo	99
5.4.2. Una viga en voladizo	102
5.4.3. Una cercha Espacial	105
5.4.4. La viga de Bernoulli	109
6. Conclusiones y Desarrollos futuros	111
6.1. Conclusiones	111
6.2. Desarrollos futuros	114
A. Herramientas computacionales	117

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Probabilidad de falla de acuerdo al uso de estructura y ciclo de vida útil de la estructura. [Lemaire, 2009]	X
1.1. Superficie de falla en el plano cartesiano	4
1.2. Muestreo con el método LHS, método de Stein para 2 dimensiones y 1000 muestras.	7
1.3. Representación de β en el espacio de variables estándar \mathbf{u} en dos dimensiones	13
1.4. Ejemplo 1: Proceso de FORM para hallar β	22
1.5. Fuerzas aplicadas en la cercha	24
1.6. Representación de la función de Covarianza descrita en la ecuación con $a = 0.5$ y $b = 1$	30
1.7. Representación de las funciones propias con $n = 1, 2, 3, 4$, $a = 0.5$ y $b = 1$	32
1.8. Viga De Euler Bernoulli.	36
1.9. Desplazamiento de viga Euler-Bernoulli sometido a carga distribuída.	37
2.1. Clasificación de los métodos de reducción dimensional [Van Der Maaten et al., 2009]	40
2.2. El coseno representa la similitud entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j	42
2.3. El vector norma es una medida de similitud entre el vector \mathbf{u}_i y dos vectores de igual dirección y sentido y diferente longitud.	42
2.4. Función de densidad de probabilidad de la norma de un vector aleatorio con distribución estándar. [Hurtado, 2012]	45

2.5. Evaluación de la función de densidad de probabilidad del ángulo de un vector distribuido aleatoriamente de manera uniforme en una esfera unitaria [Hurtado, 2012]	45
2.6. Función de densidad de probabilidad conjunta de v_1 y v_2 para $d = 5$. [Hurtado, 2012]	46
2.7. Función de densidad de probabilidad conjunta de v_1 y v_2 para $d = 30$. [Hurtado, 2012]	47
2.8. Gráfico de confiabilidad para bajas dimensiones [Hurtado, 2012]	48
2.9. Gráfico de confiabilidad para moderadas y altas dimensiones [Hurtado, 2012]	48
2.10. Representación del punto de falla y elementos importantes en la solución en FORM [Hurtado, 2012]	49
3.1. Columna esbelta estudiada en el problema de confiabilidad inversa	62
3.2. Columna esbelta estudiada en el problema de confiabilidad inversa	63
3.3. Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad.	65
3.4. Viga en voladizo sometida a cargas	66
3.5. Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad en el gráfico de Confiabilidad.	68
3.6. Una cercha espacial	69
3.7. Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad en el gráfico de Confiabilidad.	71
3.8. Viga De Euler Bernoulli.	71
3.9. Gráfico de confiabilidad del problema de confiabilidad inversa.	73
4.1. Sismo de Taiwan. 2016 [Santana, 2016]	75
4.2. Diseño simplificado de un RBDO de doble ciclo anidado [Nguyen et al., 2010]	79
4.3. Diseño empleando un ciclo sencillo [Nguyen et al., 2010]	80
4.4. Comparación entre DDO y el diseño empleando procesos de optimización [Arora, 2012]	82
4.5. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO.	84
4.6. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de una columna esbelta.	86
4.7. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la viga: Clasificación de puntos según función límite.	88
4.8. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la cercha: Clasificación de puntos según probabilidad de falla.	89
4.9. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la viga: Clasificación de puntos según función.	91

5.1. Objetivos de las formulaciones de optimización estructural [Beck et al., 2012].	94
5.2. Zonas de costos máximos y mínimos generados en el gráfico de confiabilidad	98
5.3. Columna esbelta estudiada en el problema de SRO	99
5.4. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la columna esbelta	100
5.5. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la columna esbelta con probabilidad de falla incluida	101
5.6. Viga estudiada en el problema de SRO	102
5.7. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la viga en voladizo.	104
5.8. Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la viga en voladizo con probabilidad de falla incluida	105
5.9. Gráfico de confiabilidad de la cercha espacial con optimización de la función $C(A_1, A_2, A_3)$	107
5.10. Gráfico de confiabilidad de la cercha espacial con optimización de la función $C(A_1, A_2, A_3)$ incluyendo restricción de confiabilidad.	108
5.11. Viga de Euler Bernoulli.	109
5.12. Gráfico de confiabilidad de la viga de Bernoulli con optimización de la función $C(b, h)$	110
6.1. Caja de probabilidad definida por dos funciones	115

ÍNDICE DE CUADROS

1.1. Variantes del método LHS	9
1.2. Nivel de Confiabilidad en los códigos de diseño [Melchers and Beck, 2018].	16
1.3. Confiabilidades objetivo anuales dadas por el JCSS [Baravalle and Köhler, 2016].	18
1.4. Distribución de variables x_1, x_2 y x_3	20
1.5. Pasos de iteración en algoritmo de FORM	23
1.6. Datos de trabajo en el ejercicio de la cercha	24
1.7. Valores de confiabilidad y punto de diseño en ejemplo de la cercha.	25
3.1. Datos de trabajo de ejercicio de columna esbelta	63
3.2. Datos de puntos seleccionados en gráfico	65
3.3. Datos de puntos seleccionados en gráfico en coordenadas naturales.	65
3.4. Variables con distribución Normal en el ejercicio de viga en voladizo	67
3.5. Variables involucradas en el cálculo de confiabilidad del sistema de viga en voladizo	67
3.6. Variables de diseño con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial	69
3.7. Variables en el proceso de confiabilidad con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial	70
3.8. Descripción de los términos en expansión de Karhunen-Loève.	72
3.9. Descripción de las variables a trabajar en el problema de Confiabilidad inversa.	72
4.1. Métodos que emplean un ciclo doble de iteración [Valdebenito and Schuëller, 2010].	78

4.2. Definición de variables aleatorias para el problema de RBDO en una columna esbelta	85
4.3. Definición de variables aleatorias de diseño para el problema de RBDO en una columna esbelta	85
4.4. Definición de variables aleatorias para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal	87
4.5. Definición de variables aleatorias para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución uniforme	87
4.6. Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal estándar truncada.	87
4.7. Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal estándar truncada.	88
4.8. Descripción de las variables a trabajar en el problema de RBDO.	90
5.1. Definición de variables aleatorias para el problema de RO en una columna esbelta .	99
5.2. Vectores de falla según restricciones de confiabilidad	102
5.3. Definición de variables aleatorias para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución normal	103
5.4. Definición de variables aleatorias para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución uniforme	103
5.5. Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución normal truncada	104
5.6. Vectores de falla según restricciones de confiabilidad	105
5.7. Variables de diseño con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial . .	106
5.8. Vectores de falla según restricciones de confiabilidad	108
6.1. Comparación entre graficos de confiabilidad generados por resolver los problemas de Confiabilidad inversa, RBO y SO de una columna esbelta en pandeo.	112
6.2. Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de confiabilidad inversa	113
6.3. Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de Optimización basada en confiabilidad (RBO)	113
6.4. Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de Optimización del Riesgo (SO)	113

ÍNDICE DE SIGLAS

DDO	Diseño determinista (<i>Deterministic Design Optimization</i>)
FORM	Método de confiabilidad de primer orden (<i>First Reliability Order Method</i>)
IR	Confiabilidad inversa (<i>Inverse Reliability</i>)
LHS	<i>Latin Hypercube Sampling</i>
MC	Método de Monte Carlo (<i>Monte Carlo method</i>)
PDF	Función de densidad de probabilidad (<i>Probability Density Function</i>)
PMA	Enfoque en el desarrollo del desempeño (<i>Performance measure approach</i>)
RBO	Optimización basada en confiabilidad (<i>Reliability-Based Optimization</i>)
RBDO	Optimización del diseño basada en confiabilidad (<i>Reliability Based-Design Optimization</i>)
RIA	Desarrollo basado en el índice de Confiabilidad (<i>Reliability Index Approach</i>)
RO	Optimización del Riesgo (<i>Risk Optimization</i>)
SRO	Optimización del riesgo estructural (<i>Structural Risk Optimization</i>)
HLRF	(<i>Hasofer- Lind Rackwitz-Fiessler algorithm</i>)

Parte I

Marco Teórico

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE CONFIABILIDAD

1.1. Introducción

Para definir una probabilidad de falla se debe tener en cuenta, en primera instancia, que un fenómeno mecánico puede ser representado por una **función de estado límite** que representa el comportamiento de la estructura en el caso en el que solamente puede resistir las cargas que se le aplican. Así, cuando el estado límite es sobrepasado, provocando problemas con la estructura e impactando el uso de la misma se tiene el **estado de falla**. Este estado se presenta cuando la funcionalidad y la serviciabilidad se ven afectados (ya sea por deflexiones visibles, vibraciones excesivas, etc), y cuando el **estado último** es alcanzado, es decir, cuando se presentan casos de corrosión, fatiga, entre otros que hacen que la estructura esté en peligro de colapso o entonces se alcanza la falla. Si la estructura no está en ninguno de los estados se dice que está en **estado seguro**.

Como se puede observar en la figura 1.1 , el estado límite se puede representar mediante una función denominada **función de estado límite**, que se denotará como $g(\cdot)$. Esta función puede ser una función explícita o implícita y a su vez esta puede tomar formas lineales o no-lineales. Los estados de la estructura pueden ser descritos mediante regiones delimitadas por la función de estado límite de la siguiente manera [Lemaire, 2009]:

- La **superficie de estado límite** que se representa cuando $g(\cdot) = 0$ y constituye la frontera entre las zonas segura y de falla.
- La **zona segura** la cual es representada por la región en la que $g(\cdot) > 0$.

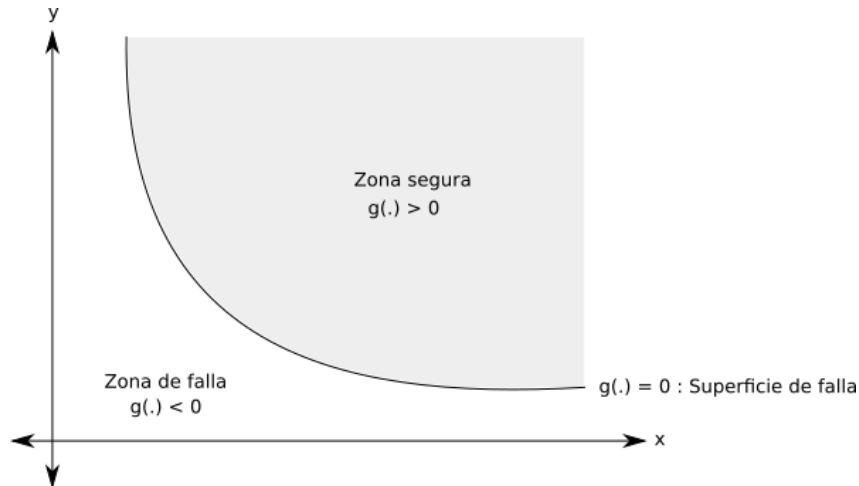


Figura 1.1: Superficie de falla en el plano cartesiano

- La **zona de falla** la cual queda representada de manera que $g(\cdot) < 0$. La zona de falla es muy importante pues esta define gran cantidad de conceptos que son clave en el momento de estudiar la confiabilidad estructural.

Así, la confiabilidad se puede definir como :

La probabilidad que tiene la estructura (o un componente de la misma) de tener un comportamiento adecuado a lo largo de su tiempo de uso bajo unas condiciones de operación adecuadas. [Sørensen, 2004], [Sobieszczanski-Sobieski et al., 2015]

La definición de confiabilidad contiene dos parámetros involucrados: La capacidad de cumplir una función determinada en un tiempo planeado y teoría de probabilidad

1.2. Definición de probabilidad de falla (POF)

La probabilidad de falla se puede definir de manera matemática como:

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int \int \cdots \int_F f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

Donde F representa la zona de falla de la siguiente manera:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (1.2)$$

1.3. Evaluación de la confiabilidad

La probabilidad de falla puede ser evaluada mediante el uso de métodos analíticos basados en simulación numérica los cuales se han desarrollado de acuerdo al avance matemático y computacional que ha tenido la ingeniería a lo largo de los años:

1.3.1. Métodos de simulación

Constituyen todas las técnicas en las cuales no se usan descomposiciones teóricas de la función de estado límite para evaluar la probabilidad de falla de un sistema. Se caracterizan por usar métodos asociados a la población a examinar y por lo tanto dependen de manera directa de la cantidad de muestras a trabajar, convirtiéndose en algunas ocasiones en procedimientos costosos computacionalmente que pueden ser mejorados con técnicas de optimización. Dentro de los métodos de simulación para evaluar se pueden describir el Método Monte-Carlo, *Latin Hypercube Sampling*, *Importance Sampling*, *Subset Simulation* entre otros métodos de los cuales se describirán los dos primeros métodos a continuación por su uso frecuente en el campo de la confiabilidad estructural.

Método Monte-Carlo

El método se desarrolló principalmente por Metrópolis y Ulam [Metropolis and Ulam, 1949] como un desarrollo estadístico para el estudio de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integro-diferenciales que son frecuentes en la naturaleza el cual convierte incertidumbres existentes en las variables de entrada en un problema cuyas variables de entrada son representadas por distribuciones de probabilidad cuya influencia se ve reflejada en las variables de salida [Park, 2008]. La estrategia es crear una pseudo-población [Mooney, 1997], la cual se ajustará de manera aproximada al modelo real que se desea modelar. Esta población "ficticia" se usa para producir diferentes pruebas del fenómeno de interés con el fin de observar cómo se comporta la población al desarrollar los ensayos. La precisión del cálculo del método de Monte-Carlo es **independiente** de la dimensionalidad del problema y **depende** del número de muestras escogidas y de la varianza del problema [Katzgraber, 2011].

El procedimiento básico de Monte-Carlo se puede describir como [Mooney, 1997]:

1. Desarrollar un algoritmo para generar los datos de la manera deseada, es decir, para ge-

nerar la pseudo-población. En gran parte de los experimentos computacionales realizados usando la herramienta de Monte-Carlo, el investigador define la pseudo-población con un algoritmo computacional, así, la pseudo-población no se puede observar físicamente pero son muestras que pueden usarse en el modelo. En este punto se pueden definir *variables aleatorias*, *variables deterministas* o *constantes* [Mooney, 1997] según el objetivo del procedimiento.

2. Obtener muestras de la pseudo-población, es decir, obtener las pseudo-muestras.
3. Calcular la variable objetivo evaluada en una pseudo-muestra y almacenar en un vector de pseudo-muestras.
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta completar el número de ensayos.
5. Construir una distribución de frecuencia para el vector de pseudo-muestras obtenidas.

La simulación por el método Monte-Carlo constituye un proceso que es fácil de programar pues funciona con la concepción de una distribución muestral ¹ [Mooney, 1997]. Aunque es un procedimiento manejable presenta dos dificultades:

1. Los códigos computacionales para simular los datos deseados en muchos casos representan gran carga computacional.
2. La interpretación de los resultados obtenidos mediante el uso del método Monte-Carlo.

Latin Hypercube Sampling (LHS)

Es uno de los métodos más implementados en la ingeniería para realizar el muestreo el cual se puede implementar en procedimientos para la evaluación de la confiabilidad o como un proceso anidado en un proceso Monte-Carlo el cual se puede manejar en altas dimensiones [Owen, 1994]. Este procedimiento planteado inicialmente por McKay, Beckam y Conover [M. D. McKay, 1979] es elegido sobre otros debido a su manera eficiente de elegir variables de entrada para implementar en modelos computacionales [Budiman Minasny, 2006] tipo Monte-Carlo o directamente en modelos de Confiabilidad como el RBDO, Confiabilidad inversa, entre otros.

El método LHS selecciona una cantidad n de valores para cada k variables X_1, \dots, X_k tomando el rango de cada variable X y dividiéndolo en n intervalos que no se solapan teniendo como base

¹La distribución muestral (*Sampling distribution*) representa la distribución de probabilidad de un conjunto de muestras [LeBlanc, 2004].

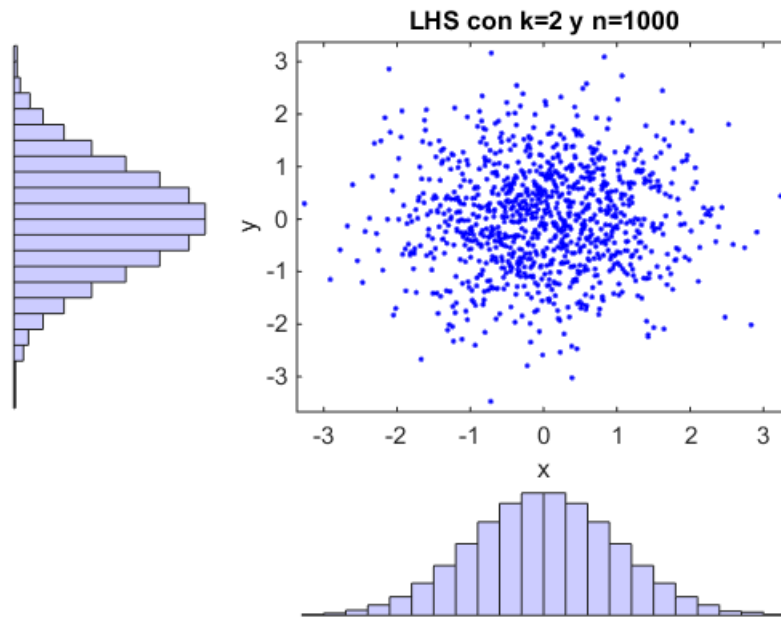


Figura 1.2: Muestreo con el método LHS, método de Stein para 2 dimensiones y 1000 muestras.

una probabilidad igual para todos los intervalos. Ahora bien, un valor de cada intervalo es seleccionado ya sea aleatoriamente o con un proceso de optimización con respecto a la densidad de probabilidad en el intervalo [Budiman Minasny, 2007]. Por lo tanto, los valores n obtenidos para X_1 son emparejados con los valores de X_2 ya sea con el uso de métodos de optimización o de manera aleatoria y así sucesivamente con cada una de las variables hasta formar las n k -uplas. Estas n k -uplas son las mismas que los n vectores de entrada de dimensión k . Es conveniente aclarar que este muestreo forma una matriz de dimensiones $(n \times k)$ donde la i -ésima fila contiene valores específicos de cada una de las variables a usar en cada una de las veces en que se hace efectivo el procedimiento de cálculo [Gregory D. Wyss, 1998].

El método LHS ha sido optimizado de diversas maneras [Razi Sheikholeslami, 2017], algunas de las cuales se muestran en la tabla 1.1

Mejora en el proceso de selección de puntos	Autores	Método implementado

Space-filling Latin hypercube designs	[Husslage et al., 2011]	Implementan diseños periódicos y algoritmos estocásticos evolucionarios planteados en trabajos anteriores para incorporar en el método LHS de Audeze-Eglais ²
Algoritmo de propagación translacional	[Viana et al., 2010]	El uso de una variante del criterio de la máxima distancia (ϕ_p criterion) para hallar un método más eficiente para poder obtener un LHS más eficiente sin la necesidad de utilizar procedimientos de optimización formal.
Método "Branch-and-Bound"	[van Dam et al., 2007]	Se obtienen varias formulaciones generales del maximin LHS para medidas generales como l^∞ y l^1
Algoritmos genéticos	[Sienz and Toropov, 2004], [De Rainville et al., 2012]	Se emplean algoritmos genéticos para optimizar los procesos de selección de puntos usando el método de LHS ya sea con algoritmos de permutación o con otro tipos de algoritmos genéticos con el objetivo de generar procesos cuyo gasto computacional sea el mínimo posible.
Algoritmos de Recocido simulado, <i>Simulated Annealing</i>	[Morris and Mitchell, 1995], [Iooss et al., 2010]	Encontrar diseños que sirvan tanto para los métodos basados en entropía como los métodos basados en distancia con el objetivo de optimizar el proceso de elección de los puntos para realizar el proceso de LHS garantizando que se cumplan ciertas propiedades

²También denominado maximin LHS concepción matemática del mundo.

Programación Lineal	[Hernandez, 2008]	Se presentan técnicas de programación lineal para mejorar la respuesta computacional de los métodos LHS Ortogonales y <i>nearly-orthogonal</i>
Otros métodos implementados	[Owen, 1994], [Cioppa and Lucas, 2007], [Jourdan and Franco, 2010] , [Ye et al., 2000], [Jin et al., 2005]	relacionan diferentes métodos como los algoritmos estocásticos evolutivos (ESE) [Jin et al., 2005], entre otros basados en el método de la entropía o de la distancia para mejorar el LHS

Cuadro 1.1: Variantes del método LHS

La eficiencia computacional del método LHS depende del tamaño del espacio en el que se buscan las variables que son objetivo para el muestreo y de la forma en que el muestreo escoja los puntos, así, el muestreo aleatorio o mediante el uso de procesos de optimización incrementa o disminuye el nivel de eficiencia del LHS [Razi Sheikholeslami, 2017]. Esto quiere decir que el proceso se puede volver costoso computacionalmente para valores grandes de dimensión y de intervalos.

Anotación

Cabe anotar que existen otros tipos de muestreo y métodos de simulación pero para objetivos de esta tesis no se van a describir a profundidad pues no representan el fin de la tesis, solamente se hace referencia a aquellos métodos que se han utilizado con mayor frecuencia en el análisis de la confiabilidad en estructuras. Para profundizar en el tema se recomienda [Lohr, 2010].

1.3.2. Métodos analíticos

Se acostumbra a emplear métodos analíticos de la función de estado límite para evaluar la probabilidad de falla de un sistema cuando se conoce ya sea de forma definitiva o de manera aproximada la función de estado límite que representa al problema a solucionar. Los métodos más conocidos y empleados para encontrar la confiabilidad de un sistema son:

Método de primer Orden (FOSM)

Formulado inicialmente por Cornell, este método implementa la aproximación en series de Taylor de primer orden de la función límite y utiliza únicamente momentos estadísticos de primer y segundo orden estadísticos, es decir, la media y las varianzas de las variables aleatorias para encontrar el índice de seguridad asumiendo que estas variables son estadísticamente independientes.

Para comprender mejor lo planteado en el FOSM considérese el siguiente problema: se tiene un sistema el cual posee una resistencia R la cual tiene una distribución normal con una media de μ_R y una desviación estándar de σ_R al cual se le aplica una carga S cualquiera con una distribución $N(\mu_S, \sigma_S)$. La resistencia del sistema ante la carga está definida por la función:

$$Z = R - S \quad (1.3)$$

Por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_Z &= \sigma_R - \sigma_S \end{aligned}$$

Por lo tanto el índice de confiabilidad queda descrito como:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_R - \sigma_S} \quad (1.4)$$

EL FOSM ha sido implementado para generar las primeras versiones de los formatos de diseño basados en confiabilidad³ como los empleados por el Instituto Americano de Construcción en Acero, por la Asociación Canadiense de Normas y el Comité Europeo del Concreto (CEB) [White and Ayyub, 1987].

Este método planteado tiene un problema: el valor de β puede cambiar de acuerdo a la formulación de la función de estado límite pues este método asume las distribuciones de todas las variables del problema, es decir, un problema puede tener dos formulaciones matemáticas distintas y representar de manera equivalente un mismo suceso, pues bien, cuando se usa el método FOSM

³Este método implementa análisis probabilísticos y genera modelos de tal manera que puedan ser implementados por todos los ingenieros estructurales para el diseño de estructuras más confiables. Un ejemplo de este tipo de métodos es el implementado para el modelo LRFD [White and Ayyub, 1987]

para encontrar la confiabilidad del sistema se pueden encontrar con dos valores distintos de índice de confiabilidad, por tal motivo este método encontrará valores exactos de β solamente en algunos casos.

Método de Confiabilidad de primer orden (FORM)

Este procedimiento sirve para calcular el índice de confiabilidad de un sistema, constituyéndose como uno de los algoritmos más usados dada su facilidad de comprensión tanto matemática como algorítmicamente, es decir, es un proceso que es fácil de programar, tiene buena proximidad con las soluciones reales cuando se tienen funciones que no tienen un alto grado de no linealidad y no tiene una deducción matemática extensa. Su nombre se debe al hecho de que aproxima la función límite mediante la expansión de primer orden de Taylor, es decir, se le realiza una linealización de la función límite [Du, 2005]. En este caso se va a presentar el método desarrollado conjuntamente por Hasofer y Lind y retomado más adelante por Rackwitz y Fiessler pues este método ha sido ampliamente usado para encontrar índices de confiabilidad.

Sea $g(\mathbf{u})$ la función límite que se encuentra definida en el espacio estándar centrado, \mathbf{u} las variables expresadas en el espacio normal estándar y P^* el **punto de diseño**⁴. Este método escoje un punto P^* con coordenadas $\mathbf{u}^i = [u_1^i, \dots, u_n^i]$ con n representando el número de dimensiones del vector y el superíndice i representa el paso de iteración con $i = 1$ para la primera iteración y $g(\mathbf{u}^i)$ no necesariamente igual a cero. Por lo tanto, la expansión en series de Taylor alrededor del punto u_n estaría expresada como:

$$g(u_n) = g(u_n^i) + \|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) + \mathcal{O}^2$$

Y la ecuación del hiperplano tangente a $H(u_n)$ queda descrita como:

$$\|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i} \mathbf{u} + c = 0$$

Ahora, si el punto satisface la ecuación del hiperplano, la nueva ecuación se puede escribir de la forma:

$$g(u_n^{i+1}) = g(u_n^i) + \|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i} (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) = 0 \quad (1.5)$$

Dividiendo la ecuación (1.5) entre la norma del gradiente $\|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i}$, se obtienen los **cosenos**

⁴Este punto también es conocido como el **Punto más probable de falla** o **MPP** por sus siglas en inglés

directores

$$\frac{g(u_n^i)}{\|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i}} + \|\alpha^n\| (\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) = 0$$

Donde los cosenos directores se definen como:

$$\alpha = \frac{\nabla g(u_n)}{\|\nabla g(u_n)\|} \quad (1.6)$$

Al utilizar esta nueva notación, la ecuación (1.5) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}^{i+1} \alpha^i = \mathbf{u}^i \alpha - \frac{g(u_n^i)}{\|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i}} \quad (1.7)$$

Ahora, si se toma el límite en (1.7) cuando $i \rightarrow \infty$, se obtiene que, $\|\mathbf{u}^i\| = \beta$ y $\mathbf{u} = -\beta\alpha$ cuando el algoritmo converge. Así, en la i -ésima iteración se tiene que:

$$\mathbf{u}^{i+1} = -\beta^i \alpha^i \rightarrow \beta^i = -\mathbf{u}^{i+1} \alpha^i \quad (1.8)$$

Y así se obtiene una fórmula para la iteración:

$$\beta^i = -(\mathbf{u}^i \alpha^i) + \frac{g(u_n^i)}{\|\nabla g(u_n)\|_{u_n^i}} \quad (1.9)$$

El algoritmo para hallar el índice de confiabilidad se puede describir en los siguientes pasos:

1. Escoger un punto de inicio \mathbf{u}^0 de forma aleatoria.
2. Evaluar la función de estado límite $g(u_n^i)$.
3. Calcular $\nabla g(u_n)$ y $\|\nabla g(u_n)\|$. Deducir α^i usando (1.6)
4. Calcular β^i usando (1.9)
5. Calcular \mathbf{u}^{i+1} haciendo uso de la (1.8)
6. Si $\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\| < \varepsilon$ detener la iteración, de otro modo tomar $i = i + 1$ y regresar al paso 2

Utilidad de β

En los pasos mostrados para calcular el punto más probable de falla en el procedimiento de FORM mostrado con anterioridad se da a conocer un valor que aparece en la ecuación (1.9) Al se le de-

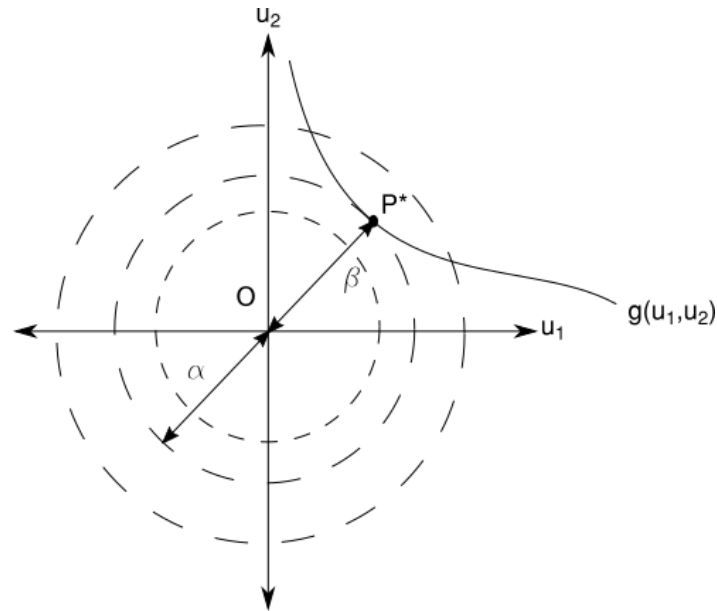


Figura 1.3: Representación de β en el espacio de variables estándar \mathbf{u} en dos dimensiones

nomina **índice de confiabilidad** y representa la **distancia más corta entre el origen del sistema estándar de coordenadas y la función $g(\mathbf{u})$ evaluada en el punto más probable de falla** [Lemaire, 2009] e indica, como lo dice su nombre, el nivel de confiabilidad que tiene el sistema. Este valor se puede calcular ya sea a partir de la probabilidad de falla del sistema el cual quedaría relacionado como:

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (1.10)$$

o mediante el proceso de FORM, en el cual el valor de β será el que se encuentra en la última iteración realizada en la que se cumplan las condiciones de parada del procedimiento con la ecuación (1.9).

Como se puede observar el valor no solamente tiene implicaciones probabilísticas, también tiene implicaciones geométricas pues representa la distancia entre dos puntos en el sistema de coordenadas estándar.

1.4. Códigos de diseño estructural

El objetivo del diseño estructural se puede ver como la maximización de la utilidad esperada de una estructura por parte del diseñador cuyos criterios de optimización vienen dados por unos

lineamientos formulados por un comité de formulación de códigos el cual formula los parámetros de diseño teniendo en cuenta factores como la seguridad estructural, costos, serviciabilidad, disponibilidad de materiales, etc. Los códigos ayudan a entender el comportamiento de la estructura a construir en el tiempo de vida esperado bajo el uso predispuesto para la edificación y de esta manera participan de una manera activa en la toma de decisiones tanto económicas como constructivas.

La teoría de confiabilidad se está implementando para la creación de códigos de diseño estructural con el objetivo de migrar del diseño determinista, en el ensayo-error, basado en la experiencia a un diseño basado en un análisis estructural el cual trate tanto a las cargas como a las resistencias como variables aleatorias las cuales tienen un grado de incertidumbre. En los códigos de diseño son conciliados intereses presentes en el momento de la concepción de la construcción los cuales, generalmente, son conflictivos de manera que de un lado está el interés del diseñador que es el diseño de una estructura segura y el del constructor el cual consiste en la construcción de una obra de bajo valor monetario el cual muchas veces va en contravía de la seguridad.

1.4.1. Desarrollo y Calibración de códigos de diseño

Para la creación de un código de diseño o para la modificación de uno ya existente (calibración) se recomienda seguir una serie de pasos los cuales ayudan a formular de una manera clara y comprensible el contenido del código y de esta manera lograr que las edificaciones lleguen a satisfacer ciertos niveles de seguridad.

1. Alcance del código

Se definen los parámetros que debe tener la estructura para ser diseñada por el código que se está formulando, los cuales deben ser aclarados por el comité que está encargado de . Estos parámetros incluyen el material de construcción (acero, madera, concreto, etc.), tipo de estructura, elementos estructurales, filosofía de diseño (evaluación de estados límites o estados admisibles) entre otros proporcionando una base racional para el diseño estructural. Generalmente se cubren estructuras similares entre sí con el fin de que se alcancen los objetivos más fácilmente para no tener problemas en el dimensionamiento.

2. Definición del objetivo del código

En este paso se define el nivel de confiabilidad y los elementos necesarios para alcanzar tal nivel de confiabilidad. Este nivel de confiabilidad varía de acuerdo al tipo de estructural,

material, entre otros elementos y es formulado de acuerdo al **costo monetario que representa la falla**. La tendencia es el uso de un nivel de confiabilidad para cada elemento estructural de tal manera que se obtenga una confiabilidad uniforme de cada elemento y no un índice global de confiabilidad de toda la estructura pues los modos de falla de cada parte de la estructura son diferentes y dificultaría enormemente alcanzar un nivel de confiabilidad para toda la estructura. La selección del nivel de confiabilidad se establece basados en el criterio ingenieril y en la evaluación de estructuras existente; Cuando se trabaja con un factor de seguridad parcial el objetivo puede ser la maximización de alguna utilidad monetaria [Ditlevsen and Madsen, 1996].

3. Establecer la frecuencia de demanda

Se define la frecuencia de ocurrencia de eventos de falla y de chequeos de seguridad para la clase de estructuras definidas en el primer paso.

4. Definir nivel de confiabilidad del diseño

Se definen criterios de cercanía entre el nivel de confiabilidad definido por el código y el nivel de confiabilidad calculado por el diseñador. Sin este elemento no se puede establecer una elección de conveniencia del código y no se podría hacer un uso racional del mismo. Para este paso se puede tener, por ejemplo, restricciones del tipo $\beta_{i,\min} < \beta_i$ en donde $\beta_{i,\min}$ es el valor de confiabilidad más pequeño admisible [Ditlevsen and Madsen, 1996].

5. Formato del código.

En este punto se establecen los formatos para que el diseño sea realizado de una forma simple y clara para su implementación en futuras instancias. Como se puede observar en el cuadro 1.2, el nivel 1 es el más simple y el más empleado en la práctica de la ingeniería pero a su vez es el más impreciso dada la naturaleza determinística de los factores. En los niveles superiores se tienen criterios definidos como probabilidades de falla, costo económico, entre otros, para definir con mayor precisión el diseño estructural.

Cuadro 1.2: Nivel de Confiabilidad en los códigos de diseño [Melchers and Beck, 2018].

Nivel	Métodos de cálculo	Distribución de probabilidad.	Función de Estado límite	Incertidumbre en datos	Resultados
1	Calibración de los códigos existentes que usan nivel 2 y 3	No se usa	Generalmente son funciones lineales	Factores arbitrarios	Factores Parciales
2	Álgebra de segundo momento	Solamente se usan distribuciones normales	Lineal o aproximadas a una lineal	Se pueden incluir como datos de segundo momento	Probabilidad 'Nominal' de falla p_{fN}
3	Transformación Integración numérica y simulaciones	Equivalentes a la distribución normal Se puede usar cualquiera	Lineal o Aproximadamente lineal Adopta cualquier forma	Pueden incluirse como variables aleatorias	Probabilidad de falla p_f
4		Cualquiera de las anteriores	adicionando datos económicos		Costo mínimo o máximo beneficio

1.4.2. Clasificación de los códigos existentes

En general los códigos se pueden clasificar en tres grupos los cuales se diferencian en las limitaciones y en los alcances que tengan en su contenido [Baravalle and Köhler, 2016]. Surgen a partir de la necesidad de tener en cuenta aspectos importantes en el diseño como el impacto ambiental, monetario y social de las construcciones típicas o atípicas a lo largo de un período de tiempo determinado. Estos grupos son:

1. **Desarrollo del diseño basado en el riesgo:** Consiste en la aplicación de un análisis completo de riesgo para obtener un diseño óptimo el cual tenga en cuenta la probabilidad de falla de alguno o de la totalidad de sus elementos estructurales y la incidencia de los mismos en diferentes aspectos [Baravalle and Köhler, 2016]. Así, se habla de un diseño óptimo que adopta un nivel de seguridad p_f^* superior al mínimo aceptable dado por algún procedimiento de diseño p_{acc} . Estos desarrollos no tienen límites pues pueden considerar los riesgos que tiene el diseño y la construcción de una obra y se pueden usar en elementos o estructuras que son atípicas, con mecanismos de falla desconocidos y/o de alto impacto en la sociedad. En este grupo tenemos como ejemplo a dos guías [Holicky et al., 2015]: la norma **ISO/FDIS 2394:2015** y la norma **EN 1990:2002** en las que la confiabilidad de una estructura es evaluada en determinado período de tiempo, ya sea un año, cincuenta años o el tiempo de vida de la estructura empleando para la consideración de los costos de optimización en el ciclo de vida de la edificación la norma ISO 15686-5 en su versión más reciente [ISO, 2017]. En general el costo esperado se expresa por [Holicky et al., 2015]

$$E[C_f(t, d)] \approx C_f p_f(d) Q(t, d)$$

En donde C_f es el valor presente del costo de falla, $p_f(d)$ la probabilidad de falla en un periodo de tiempo referencia y $Q(t, d)$ el factor relativo al tiempo. Esta formulación ayuda a que sea más cómo alcanzar un diseño económicamente óptimo cumpliendo unos requerimientos de confiabilidad determinados.

2. **Desarrollo del diseño basado en la confiabilidad:** es la simplificación del diseño desarrollado a partir del estudio del riesgo y se usa cuando se puede entender los riesgos de la estructura en rangos conocidos [Baravalle and Köhler, 2016], agrupando las construcciones similares en términos de construcción, seguridad, etc. para asignarles un nivel de confia-

Cuadro 1.3: Confiabilidades objetivo anuales dadas por el JCSS [Baravalle and Köhler, 2016].

Costo relativo de las medidas de seguridad	Estado límite último - Consecuencias de falla			Estado límite de serviciabilidad irreversible
	Menores	Moderadas	Grandes	
Grande	3.1	3.3	3.7	1.3
Normal	3.7	4.2	4.4	1.7
Pequeña	4.2	4.4	4.7	2.3

bilidad. No se tienen en cuenta los costos por reparaciones a lo largo de la vida útil de la estructura. En esta categoría se tienen los **códigos probabilísticos** como lo son los del JCSS y el PMC los cuales agrupan las probabilidades de falla de acuerdo a las consecuencias que producen las fallas (Ver en la Tabla 1.3).

3. **Desarrollo del diseño semiprobabilístico:** Es la simplificación del diseño basado en confiabilidad, en el cual se estandarizan y categorizan las consecuencias, modos de falla y representación de la incertidumbre por lo que el código desarrollado a partir de estos estándares solamente se puede aplicar en las estructuras que se digan en los objetivos. Se caracterizan por manejar factores parciales de seguridad para controlar la confiabilidad de la estructura diseñada los cuales se asignan en el proceso de calibración del código. El uso de los códigos semiprobabilísticos facilita el diseño de estructuras estandarizando el nivel de seguridad en estructuras comunes, manejando los escenarios más comunes en los cuales las estructuras más usadas se encuentran en el ciclo de vida. Este tipo de diseño empieza a presentar dificultades en el momento en el que se encuentran estructuras no comunes o con tipos de falla especiales pues genera estructuras antieconómicas y en algunos casos supera la probabilidad de falla permitida [Baravalle and Köhler, 2016].

Los factores que se trabajan varían según la norma que se esté aplicando y dependen del alcance que el comité redactor de la norma haya decidido asumir para un tipo de construcciones determinada. En estos factores se reflejan las posibles desviaciones y se pueden agrupar en uno o varios factores. En general los factores se agrupan en **factores de resistencia** los cuales modifican la resistencia de la estructura y en **factores de carga** los cuales incrementan la acción de la carga sobre la estructura, creando escenarios futuros de carga y así se diseña para el peor escenario predispuesto por la norma. Entre más factores se tengan en cuenta mayor es la posibilidad de considerar imprecisiones e incertidumbres y será un

diseño más refinado.

Los diseños semiprobabilísticos han sido empleados con el fin de encontrar consensos en los diseños y la tendencia mundial ha sido emplear factores de carga similares para evitar inconsistencias existentes entre varios códigos de diseño estructural.

- **Reglas del CEB:** En este tipo de diseño se evalúa la capacidad de resistencia de acuerdo a una fórmula general de la forma

$$g_R \left(\frac{f_k}{\gamma_{m1}\gamma_{m2}\gamma_{m3}} \right) \geq g_s (\gamma_{f1}\gamma_{f2}\gamma_{f3}Q_k)$$

en donde los factores γ_{mi} corresponden a los factores de resistencia dependiendo de las variaciones e incertidumbres relacionadas con la estructura teniendo en cuenta la forma, material y proceso constructivo y γ_{fi} corresponde a las combinaciones de carga, es decir, son los factores de carga con sus desviaciones respectivas y el escenario más desfavorable. Como se puede observar se tienen varios factores de carga lo que permite modelar diversos materiales e incertidumbre en el tratamiento del material.

- **National Building Code (Canadá):** Se caracteriza por trabajar con un solo factor de resistencia, incrementando su simplicidad, por lo que las fallas e incertidumbres del material están representados por un solo elemento, algo que es desventajoso en el momento en el que se necesite trabajar con diferentes materiales. La fórmula de trabajo sería de la forma

$$\phi R \geq g_s (\gamma_D D_n + \Psi (\gamma_L L_n + \gamma_W W_n + \dots))$$

En donde γ_i representa las consecuencias de la falla, Ψ la probabilidad de que las cargas actúen con su valor nominal de manera simultánea y Φ es el factor de resistencia de la estructura.

- **Load and Resistance Factor Design LRFD:** Tiene la ventaja de que este modelo de diseño ha sido adoptado por muchos países, con pocos factores y que trabaja con una relación lineal entre las cargas y los efectos de la carga. Su formulación se describe como

$$\sum_i \phi R \geq \sum_k \gamma_k S_{km} \quad (1.11)$$

En donde γ_i representa las consecuencias de la falla, ϕ es el factor de resistencia de la estructura, R la resistencia nominal y S_{km} la carga promedio.

1.5. Ejemplos de confiabilidad

Para presentar de una manera clara el método planteado por HLRF se van a presentar unos ejemplos los cuales explican la manera en la que trabaja el algoritmo tanto en funciones explícitas como en funciones implícitas.

1.5.1. Una función explícita optimizada

▪ Ejemplo 1

Se va a calcular el índice de confiabilidad de la función $g(\mathbf{x})$ representada por:

$$g(\mathbf{x}) = 6.2x_1 - x_2x_3^2$$

con las variables \mathbf{x} expresadas como se listan en el Cuadro 1.4 :

Cuadro 1.4: Distribución de variables x_1, x_2 y x_3

Variable	Distribucion	Media	Desviación estandar
x_1	Normal	20	3.5
x_2	Normal	5	0.8
x_3	Normal	4	0.4

Como se puede observar no se tienen variables aleatorias en el espacio estándar. Teniendo en cuenta esta característica, las variables \mathbf{x} deben ser transformadas al espacio estándar de la siguiente manera:

Para la variable x_1 :

$$x_1 = \mu_1 + u_1\sigma_1$$

$$x_1 = 20 + 3.5u_1$$

Para la variable x_2 :

$$x_2 = \mu_2 + u_2\sigma_2$$

$$x_2 = 5 + 0.8u_2$$

Para la variable x_3 :

$$x_3 = \mu_3 + u_3\sigma_3$$

$$x_3 = 4 + 0.4u_3$$

Reemplazando las variables \mathbf{x} en el anterior procedimiento se tiene que la función expresada en términos del espacio estándar es:

$$g(\mathbf{u}) = 44 + 21.7u_1 - 12.8u_2 - 16u_3 + 0.8u_3^2 - 2.56u_2u_3 - 0.128u_2u_3^2$$

Para este ejemplo el punto inicial para el inicio de las iteraciones será el origen del espacio estándar, es decir, $\mathbf{u}_0 = [0, 0, 0]$. Después de 5 iteraciones se obtiene un valor de $\beta^* = 1.4451$, con MPP en $[-1.0073, 0.6897, 0.7734]$ empleando el código . Ahora, estos valores deben ser transformados al espacio inicial, es decir, deben transformarse en variables de \mathbf{x} , así el MPP quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \langle 16.4745, 5.5518, 4.3094 \rangle$$

En la figura 1.4 es notoria la eficiencia del algoritmo de FORM para encontrar la mínima distancia desde el origen del sistema de coordenadas del espacio estándar hasta la función pues encontró el punto de una manera que requirió pocas iteraciones empleando un algoritmo fácilmente programable. Este es el programa en MATLAB implementado para solucionar este problema:

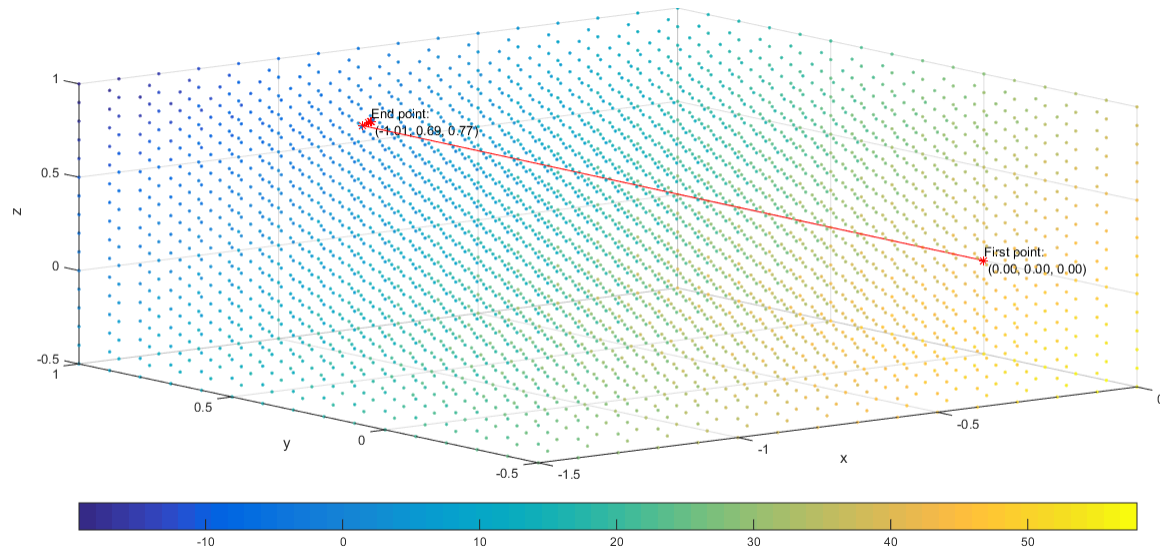


Figura 1.4: Ejemplo 1: Proceso de FORM para hallar β

Código 1.1: Estimación del índice de seguridad β

```

%% Caracterizacion: Generacion de vector Beta para mostrar la evolucion
    del indice de seguridad

clc
clear
close all

%% Definicion de las variables y la funcion
syms x y z
delta = 1e-3;
fun = 44+21.7*x-12.8*y-16*z+0.8*(z^2)-2.56*y*z-0.128*y*(z^2);
u = zeros(1,3);
i = 1;
error = 1;
%% Ciclo FORM
while error>delta
    U(i,:) = u;
    H = double(subs((fun),{x,y,z},{u}));
    Fun(i) = H;
    gH = double(subs(gradient(fun,[x,y,z]),{x,y,z},{u})); %% Calculo de
        gradiente de la funcion en el punto ui
    norm_gH = norm(gH); %% Calculo de la norma
        del gradiente de la funcion en el punto ui
    alpha = gH/norm_gH; %% Calculo de alfa segun

```

```

    ecuacion (1.6)
    beta = -(u*alpha)+ H/norm_gH;           %% Calculo del indice
    de confiabilidad segun ecuacion (1.9)
    Beta(i) = beta;
    ui = -beta*alpha;                       %% Calculo de u_(i+1)
    error = norm(u.'-ui);
    u = ui.';
    i = i+1;
end
disp(U)
disp(Fun)
disp(Beta)

```

■ Ejemplo 2

Para este ejemplo se va a obtener el valor de β de la función de estado límite [Lemaire, 2009]:

$$g(\mathbf{u}) = 12.5u_1u_2 + 250u_1 + 100u_2 - 200u_3 + 1000$$

Con punto inicial de la iteración $\langle 0, 0, 0 \rangle$. Las variables desconocidas en esta función son u_1, u_2 and u_3 , con $\varepsilon = 10^{-3}$. Los pasos dados por el algoritmo para encontrar el *punto de optimización* son plasmados en el Cuadro 1.5:

Cuadro 1.5: Pasos de iteración en algoritmo de FORM

Step(i)	\mathbf{u} Vector	$g(\mathbf{u}_i)$	β^i
0	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	1000	2.9814
1	$\langle -2.2222, -0.8889, 1.7778 \rangle$	24.6914	3.0496
2	$\langle -2.2779, -0.6887, 1.9071 \rangle$	-0.1393	3.0491
3	$\langle -2.2891, -0.6783, 1.8966 \rangle$	-0.0015	3.0491
4	$\langle -2.2898, -0.6768, 1.8966 \rangle$	0	3.0491

En este caso FORM necesitó solamente 5 iteraciones, incluyendo la elección del punto inicial, para encontrar el punto de diseño porque el valor del error está relacionado con el tercer número decimal de cada cantidad involucrada en el hallazgo de \mathbf{u} en cada una de las iteraciones. Si el error se escogiera de una magnitud mayor no sería necesaria tal cantidad de iteraciones. Usualmente se escoge como criterio de parada $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.5.2. Una función implícita

Es frecuente encontrar este tipo de funciones en la solución de problemas de ingeniería pues algunos resultados dependen de variables cuya participación en el problema no se puede ver de una manera clara. De esta manera, otros métodos son empleados para resolver algunos pasos del proceso para encontrar el punto de diseño implementando FORM como, por ejemplo, el uso de diferencias finitas para encontrar las derivadas de la función implícita $g(\cdot)$.

▪ Ejemplo: Optimización de un desplazamiento

En este caso el problema consiste en una cercha la cual tiene ciertas características. Esta cercha tiene nueve barras y seis nodos en los que sus elementos se encuentran conectados, sus apoyos consisten en articulaciones colocadas en los dos extremos inferiores de la cercha. El módulo de elasticidad y las fuerzas aplicadas están descritas en el Cuadro 1.6. Así,

Cuadro 1.6: Datos de trabajo en el ejercicio de la cercha

	Distribución	Media	Desviación estándar
Módulo de elasticidad	Gausiana	$200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$40 \times 10^9 \text{ N/m}$
Fuerza Horizontal	Gausiana	600 N	60 N
Fuerza Vertical	Gausiana	1550 N	180 N

las variables aleatorias son el módulo de elasticidad y las fuerzas tanto horizontales como verticales y el vector \mathbf{u} será de distribución normal. El problema manejará un $\varepsilon = 1 * 10^{-3}$ y queda:

$$x = \mu + \sigma u$$

Las fuerzas estarán aplicadas de la manera en que se ilustra en la figura 1.5 y el área transversal de cada elemento en la barra será de 0.16 m^2 .

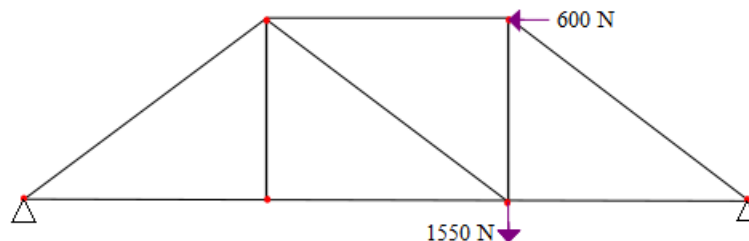


Figura 1.5: Fuerzas aplicadas en la cercha

Se representa la función de estado límite como:

$$g(\mathbf{u}) = 0.185 \times 10^{-5} - \delta(\mathbf{u}) \text{ m}$$

El punto de inicio de la iteración será $\mathbf{u}_0 = [-0.1793, -0.4471, -0.4127]$. Como en este caso la función objetivo no tiene las variables aleatorias de manera explícita es necesario usar diferencias finitas para encontrar el gradiente. El tamaño de paso que ha sido escogido para emplear el método de diferencias finitas es de $\Delta = 1 \times 10^{-8}$ y se emplearon diferencias finitas centrales para mayor precisión. Usando estos elementos se empleó el FORM y se obtuvieron los resultados plasmados en el Cuadro 1.7. Este valor de β equivale a hablar de una

Cuadro 1.7: Valores de confiabilidad y punto de diseño en ejemplo de la cercha.

β	2.4004
\mathbf{u}^*	$\langle -2.3107, 0.0197, -0.6497 \rangle$

probabilidad de falla de $P_f = 0.0082$.

1.6. Representación de elementos finitos estocásticos

La solución de problemas en ingeniería ha presentado grandes escollos a lo largo del tiempo los cuales se pueden resumir en dos puntos:

- La complejidad del problema relacionada con el tamaño del mismo. Cuanto mayor sea la dimensionalidad mayor capacidad tanto computacional como analítica se requiere para poder solucionarlo.
- La incertidumbre involucrada la cual es inherente al sistema estudiado y los cuales ya no quedarían solucionado con soluciones deterministas.

A su vez la incertidumbre proviene de dos cosas: la imposibilidad de realizar una descripción determinística exhaustiva del problema y el desconocimiento del tipo de sistema a trabajar. Esta incertidumbre puede estar presente no solamente en la descripción de las cargas aplicadas en el sistema, sino que también se presentan en la geometría de los elementos y en las propiedades del material trabajado lo cual se traduce en la introducción de aleatoriedad a la respuesta y por lo tanto no se obtendrá una solución determinista para el sistema en el momento de solucionar el problema.

Los problemas relacionados con el tamaño han sido superados enormemente con la implementación de métodos numéricos que ayudan a abordar, desde el punto de vista computacional, la solución del problema y ahorran tiempo en el momento de solucionar problemas complejos. Ahora, los problemas relacionados con la incertidumbre han empezado a tomar fuerza ya que en el modelamiento de sistemas de ingeniería se está empezando a expandir la necesidad de desarrollar modelos confiables y que representen de la manera más cercana posible a la realidad el comportamiento de los sistemas bajo diversas circunstancias [Stefanou, 2009].

Para resolver, en parte, el tema de la incertidumbre se han desarrollado métodos analíticos tales como los métodos estocásticos y métodos computacionales los cuales han empezado a ser tratados con especial atención recientemente. Es así como en la parte de la mecánica se ha tomado la derivación de un método determinista clásico como lo son los Elementos Finitos y se ha extendido para solucionar problemas involucrando elementos finitos en los que sus propiedades son aleatorias. A esta derivación se le denomina **método de Elementos Finitos Estocásticos** (SFEM) y permite usar herramientas computacionales y analíticas para la solución de problemas con alta complejidad de una manera eficiente.

1.6.1. Representación de procesos estocásticos

Según Ghanem y Spanos [Ghanem and Spanos, 2003], el problema considerado involucra un medio que tiene propiedades cuya caracterización exhibe un grado de fluctuación aleatoria la cual será sujeta a una excitación proveniente del exterior. Así, su representación matemática está descrita de la siguiente manera:

$$\Lambda(\mathbf{x}, \theta) u(\mathbf{x}, \theta) = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (1.12)$$

En la que:

- La variable θ representa la fluctuación aleatoria del proceso aleatorio y \mathbf{x} representan los puntos en el espacio físico
- $\Lambda(\mathbf{x}, \theta)$ representa un operador diferencial que tiene fluctuaciones con respecto a unas variables independientes el cual tiene unas restricciones el cual lo convierten en un proceso de segundo orden. Sea $\alpha_k(\mathbf{x}, \theta)$ un proceso aleatorio su descomposición quedaría representada de la siguiente manera:

$$\alpha_k(\mathbf{x}, \theta) = \bar{\alpha}_k(\mathbf{x}) + \alpha_{\sigma k}(\mathbf{x}, \theta)$$

En donde $\bar{\alpha}_k(\mathbf{x})$ es la componente puramente determinista del campo y $\alpha_{\sigma k}(\mathbf{x}, \theta)$ es el componente representado como un proceso aleatorio de media cero. Por lo tanto, se puede decir que α representa un proceso aleatorio.

- $u(\mathbf{x}, \theta)$ es la respuesta del sistema,
- $f(\mathbf{x}, \theta)$ es la representación de la excitación a la cual es sometido el sistema

Teniendo en cuenta la aleatoriedad del sistema, el problema planteado en se puede reescribir de forma matricial como:

$$(\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}, \theta))u(\mathbf{x}, \theta) = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (1.13)$$

En donde $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ es el operador diferencial determinista, $\Pi(\mathbf{x}, \theta)$ es el operador diferencial del proceso aleatorio cuyos coeficientes son procesos aleatorios de media cero. Una forma muy general de la solución de la ecuación está dada por:

$$u = g[\alpha_k(\mathbf{x}, \theta), f(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x}] \quad (1.14)$$

1.6.2. Expansión de Karhunen-Loève

Se tiene un proceso aleatorio $w(\mathbf{x}, \theta)$ el cual puede ser descompuesto por medio de valores y vectores propios, por un valor medio o valor esperado $\bar{w}(\mathbf{x})$ sobre todas las posibles realizaciones y $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ la cual expresa la función de covarianza⁵ asociada al proceso aleatorio. La descomposición espectral de la función de covarianza queda expresada como:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(\mathbf{x}_1) f_n(\mathbf{x}_2) \quad (1.15)$$

En donde λ_n y $f_n(\mathbf{x})$ son los valores y vectores propios de la función de covarianza, respectivamente. Ahora, esta corresponde a la solución de la ecuación integral:

$$\int_D C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n f_n(\mathbf{x}_2) \quad (1.16)$$

Esto se puede normalizar con el siguiente criterio:

$$\int_D f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{mn} \quad (1.17)$$

⁵La función de covarianza por definición es definida positiva y simétrica

Es decir, el proceso aleatorio se puede representar como

$$w(\mathbf{x}, \theta) = \bar{w}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}, \theta) \quad (1.18)$$

en la que $\alpha(\mathbf{x}, \theta)$ es el proceso con media cero y con función de covarianza $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. El proceso $\alpha(\mathbf{x}, \theta)$ se puede expresar en términos de sus valores propios y vectores propios de la siguiente manera:

$$\alpha(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(\theta) \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

Por lo que el proceso aleatorio $w(\mathbf{x}, \theta)$ se puede describir como

$$w(\mathbf{x}, \theta) = \bar{w}(\mathbf{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(\theta) \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \quad (1.20)$$

En la que

$$\|\mathbf{u}_n(\theta)\| = 0 \quad , \quad \|\mathbf{u}_n(\theta)\mathbf{u}_m(\theta)\| = \delta_{mn} \quad (1.21)$$

La expresión 1.20 puede ser truncada en un término M para objetos computacionales, por lo que esta quedaría reescrita considerando el truncamiento así:

$$w(\mathbf{x}, \theta) \approx \bar{w}(\mathbf{x}) + \sum_{n=0}^M \mathbf{u}_n(\theta) \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

Estas expansiones de Karhunen-Loève presentan propiedades especiales dadas por las características de la función de covarianza las cuales convierten a este desarrollo como uno de los más usados para el cálculo de elementos finitos estocásticos [Ghanem and Spanos, 2003]. Estas propiedades se describen brevemente a continuación.

- **Minimización del error**

El sistema de coordenadas generalizado definido por las funciones propias de la función de covarianza es óptimo en el sentido de que el error cuadrático medio que resulta de una representación finita del proceso $w(\mathbf{x}, \theta)$ es minimizado [Ghanem and Spanos, 2003].

- **Unicidad de la expansión**

Las variables aleatorias que aparecen en una expansión de la forma dada por la ecuación 1.19 son ortonormales sí y solamente si las funciones ortonormales $f(\mathbf{x})$ y las constantes λ_n son las funciones y valores propios, respectivamente, de la función de covarianza dada en 1.16 [Ghanem and Spanos, 2003].

- **Expansión del proceso Gaussiano** Se tiene un proceso normal estándar $w(\mathbf{x}, \theta)$ con función de covarianza $C(\mathbf{x})$ con el proceso descrito a través de la ecuación 1.20 con un vector $\mathbf{u}_i(\theta)$ el cual tiene una **distribución normal estándar**, por lo que cualquier subconjunto de $\mathbf{u}_i(\theta)$ tiene la misma distribución. Como esta variable es no correlacionada entonces se tiene que las propiedades dadas por la distribución probabilística generan la independencia de estas, además, que la expansión de Karhunen-Loève resulta convergente.

Y además existen varias maneras de solucionar la ecuación integral. Estos métodos se pueden describir de acuerdo a los procesos estocásticos que resuelve como **de espectro racional**, el cual se enfoca en procesos con salida estacionaria y **espectro no racional** el cual soluciona otro tipo de procesos estocásticos [Ghanem and Spanos, 2003].

- **Solución en espectro racional** Este tipo de solución se aplica especialmente a aquellos procesos aleatorios que se puedan realizar como la salida estacionaria de un filtro lineal sometido a una excitación del tipo ruido blanco [Ghanem and Spanos, 2003]. Estos procesos tienen una densidad espectral que se puede expresar de la siguiente manera:

$$S(\omega) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} \quad (1.23)$$

con $N(\cdot)$ y $D(\cdot)$ son operadores polinomiales de orden n y d respectivamente. Esta expresión constituye una condición necesaria y suficiente para que un proceso sea realizable como un proceso Markoviano⁶. Así, el proceso descrito por

$$\int_D C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda f(\mathbf{x}_1) \quad (1.24)$$

Se puede convertir en

$$\int_D C(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda f(\mathbf{x}_1) \quad (1.25)$$

⁶Que un proceso sea Markoviano significa que los efectos del pasado no influyen en los efectos que se tengan del proceso en el presente, es decir, tiene una memoria finita

Y así hallar la solución del sistema, la cual serían las funciones propias $f(\cdot)$ y los valores propios λ

- **Ejemplo** Se tiene una función de covarianza de la forma

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{-|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|/b} \quad (1.26)$$

la cual está definida entre $[-a, a]$ el cual sería el dominio D y en el que b representa la

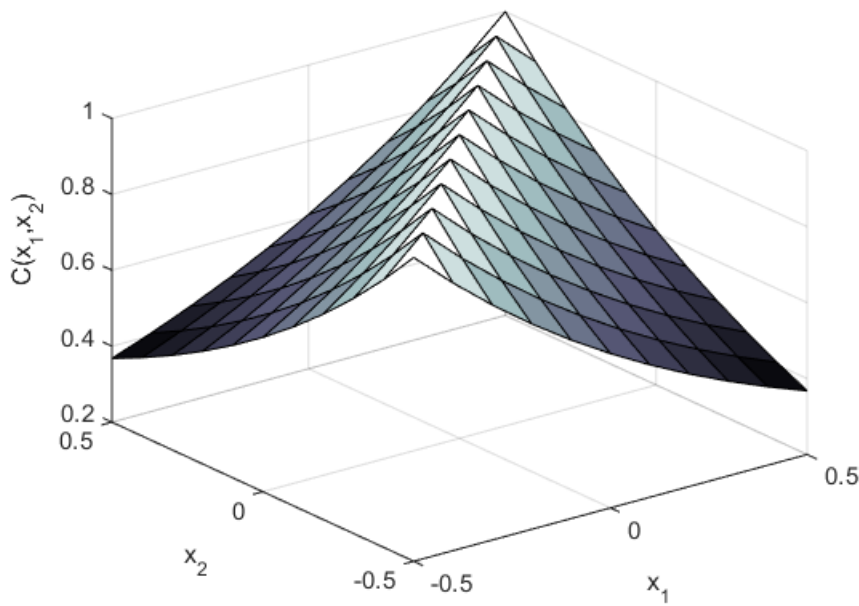


Figura 1.6: Representación de la función de Covarianza descrita en la ecuación con $a = 0.5$ y $b = 1$.

longitud de correlación el cual refleja la velocidad a la que la correlación decrece entre dos puntos del proceso y está en las mismas unidades de x . Reemplazando la ecuación 1.6 y los valores descritos anteriormente en la ecuación 1.20 se tiene que los valores y las funciones propias se hallan resolviendo la ecuación

$$\int_D C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \int_{-a}^a e^{-|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|/b} f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda f(\mathbf{x}_1) \quad (1.27)$$

haciendo la sustitución $c = 1/b$ se introduce una nueva variable

$$\omega^2 = \frac{2c - c^2 \lambda}{\lambda} \quad (1.28)$$

Por lo cual la solución del sistema da como resultado que los valores y funciones propias salen de la solución de la ecuación diferencial

$$f''(\mathbf{x}) + \omega^2 f(\mathbf{x}) = 0 \quad a \leq x \leq a \quad (1.29)$$

Para este caso se tiene que las funciones propias están definidas por la función:

$$f_n(x) = \frac{\cos(x\omega_n)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2a\omega_n)}{2\omega_n}}}, \quad n \text{ impar} \quad (1.30)$$

$$f_n(x) = \frac{\sin(x\omega_n^*)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2a\omega_n^*)}{2\omega_n^*}}}, \quad n \text{ par} \quad (1.31)$$

para los valores propios se tiene entonces que

$$\lambda_n = \frac{2c}{\omega_n^2} \quad n \text{ impar} \quad (1.32)$$

$$\lambda_n = \frac{2c}{\omega_n^{*2}} \quad n \text{ impar} \quad (1.33)$$

De donde ω sale de la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c - \omega \tan(a\omega) & = 0 \\ \omega^* + c \tan(a\omega^*) & = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Por lo tanto, un proceso definido por esta ecuación $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se puede expandir de la forma

$$w(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{u}_n \sqrt{\lambda_n} f_n(x) + \mathbf{u}_n^* \sqrt{\lambda_n^*} f_n^*(x) \right] \quad (1.35)$$

La siguiente gráfica muestra la representación de las funciones propias en función de los primeros cuatro valores propios asociados a esta función de covarianza, con $a = 0.5$ y $b = 1$. Los valores de ω resulta de la solución de la ecuación 1.34 son

n	1	2	3	4
ω	1.30	3.67	6.58	9.63

El valor de cada ω es reemplazado en las ecuaciones 1.30 y 1.31 y se obtiene el gráfico, el cual es realizado entre $-0.5 \leq x \leq 0.5$, trabajando así con los límites definidos para la función de covarianza.

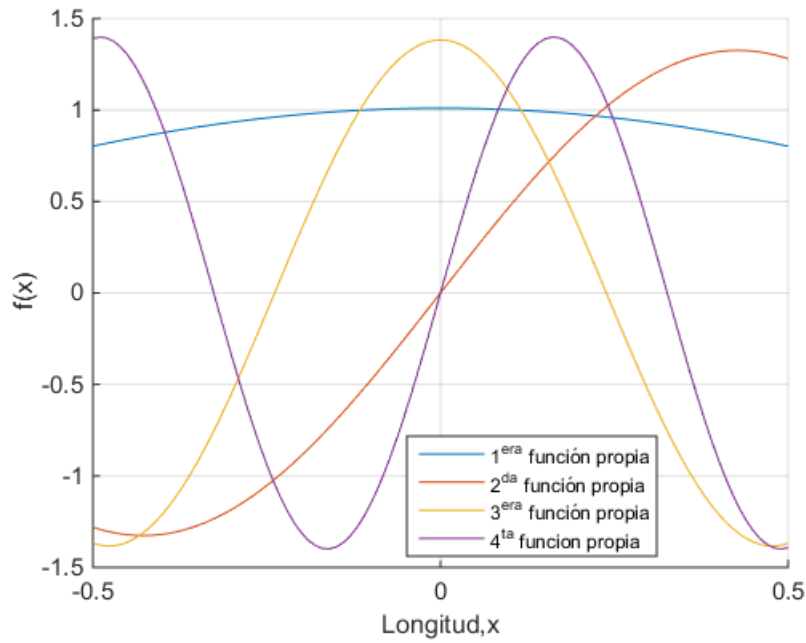


Figura 1.7: Representación de las funciones propias con $n = 1, 2, 3, 4$, $a = 0.5$ y $b = 1$

- **Solución en espectro no racional** El método aplicado en el ítem anterior se puede aplicar para aquellos procesos como la suma de funciones exponenciales y triangulares, integrales de la función triangular y a procesos no estacionarios (Ver [Ghanem and Spanos, 2003] para mayor información).

1.6.3. Método de expansiones de Neumann

Teniendo en cuenta la dificultad para encontrar el inverso del operador ⁷ dado en la solución de la ecuación 1.39, se puede expandir este por medio de series convergentes en términos de sus *iterated kernels*. El método de expansiones de Neumann consiste en expresar la solución de la ecuación 1.39 como series de la siguiente manera:

$$u(\alpha(\theta), \mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x})\Pi(\alpha(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x})]^i [f(\mathbf{x}, \theta)] \quad (1.36)$$

Para garantizar la convergencia de esta serie se coloca una **frontera de operador** descrito así:

$$\|\mathbf{L}(\mathbf{x})\Pi(\alpha(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x})\| < 1 \quad (1.37)$$

⁷denominado *resolvent*

Para este método se presentan discusiones que se han presentado en el método de perturbación y se muestra que es complicado extender el método para obtener momentos más allá de los primeros dos [Ghanem and Spanos, 2003].

1.6.4. Caos Homogéneo

El método de las expansiones de Karhunen-Loève no se pueden implementar cuando se desconoce la función de covarianza del proceso y por lo tanto se desconocen las funciones propias. Para solucionar este inconveniente se propone una expansión la cual involucra una base de funciones aleatorias conocidas con coeficientes de carácter deterministas a encontrar mediante la minimización de una norma del error que resulte de una representación finita [Ghanem and Spanos, 2003]. Todo lo dicho anteriormente se puede construir de manera similar a la solución en series de Fourier de ecuaciones diferenciales deterministas en las que las constantes satisfacen algún criterio óptimo. Haciendo una pequeña modificación a la ecuación 1.14 se puede expresar de la siguiente forma:

$$u = h[\xi_i(\theta), x] \quad (1.38)$$

Donde $h[\cdot]$ es un funcional de tipo no lineal de estos argumentos. En la expresión 1.38 los elementos que involucran la aleatoriedad del proceso han sido reemplazados por la representación de los términos en la expansión de Karhunen-Loève; Si el proceso que define el operador es de distribución Normal, su conjunto es derivado de un proceso de Wiener, por lo que el funcional es el que se emplea en el movimiento Browniano. Todo esto es lo que plantea el concepto de Caos Homogéneo [Ghanem and Spanos, 2003]. Ahora, así como la expansión mediante el método de Caos Homogéneo se puede ver como un desarrollo ortogonal para funcionales no lineales con medida gaussiana, el Caos Discreto es un desarrollo ortogonal con respecto a una medida de tipo Poisson. Mayor información de este método se puede encontrar en [Ghanem and Spanos, 2003].

1.7. Representación de Elementos finitos Estocásticos

La ecuación 1.6.1 se puede reescribir de forma que se evidencia la influencia de la aleatoriedad en la construcción de las matrices del sistema de la siguiente manera:

$$[\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \Pi(\alpha(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x})] u(\alpha(\mathbf{x}, \theta), \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (1.39)$$

La representación de los problemas asociados a elementos finitos estocásticos se puede dividir en dos tipos:

- **Desarrollo Espectral:** En estos se emplea la expansión de Karhunen-Loève en combinación con algún método para mejorar el tratamiento de la parte aleatoria del sistema cuando se tienen sistemas altamente no lineales. Son métodos matemáticamente complejos los cuales podrán ser profundizados en [Ghanem and Spanos, 2003]. Los métodos de desarrollo espectral son:

- **Método de perturbación.**
- **Expansiones de Neumann mejoradas:** en este método se combinan los métodos de la *expansión de Karhunen-Loève* para representar el campo aleatorio de entrada y la *expansión de Neumann* de la inversa de la matriz de rigidez.
- **Proyección del caos homogéneo:** Se recurre a esta forma de resolución de problemas asociados a elementos finitos estocásticos cuando la aplicación de las expansiones de Neumann afecta la convergencia del problema. Así, se usan de manera conjunta la *expansión de Karhunen-Loève* para representar el campo aleatorio de entrada y la *expansión por Caos Polinomial* para la representación de la solución.

- **Desarrollo no espectral: Método Monte Carlo**

Como se ha comentado con anterioridad el método Monte-Carlo involucra la simulación de un sistema físico mediante un número determinado de realizaciones para realizar un procesamiento estadístico de los datos obtenidos. Este mismo principio se usa para la simulación de SFEM empleando este método usando como población un conjunto de realizaciones de un campo aleatorio para posprocesar los resultados obtenidos empleando herramientas estadísticas. Este campo aleatorio generalmente representa variaciones físicas en el material, representadas por una función de covarianza, las cuales se emplean en el modelamiento matemático de una estructura y sus resultados varían desde desplazamientos en nodos hasta esfuerzos en los elementos finitos y constituye uno de los métodos más empleados para la solución del problema de SFEM dada la sencillez para la formulación, comprensión y creación del código de programación aunque esto represente un gasto computacional considerable dependiendo del problema a solucionar.

El desarrollo empleado para solucionar un problema mediante SFEM difiere del usado con

el método FEM en el cálculo de la matriz de rigidez [Sudret and Der Kiureghian, 2000]⁸. Se tiene una realización del tipo $H(\mathbf{x}, \theta_0)$ del campo aleatorio que modela el módulo de Young del material, en donde se observa que la matriz constitutiva es afectada por la aleatoriedad del módulo de Young [Uribe Castillo et al.,], por lo que la matriz constitutiva que finalmente se va a emplear, escrita en función de la realización, queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \theta) = H(\mathbf{x}, \theta) \mathbf{D}_0$$

En la que \mathbf{D}_0 representa la **matriz constitutiva determinista** [Oñate, 1995]. Reescribiendo la formulación de la matriz de rigidez se puede obtener que esta queda afectada por la aleatoriedad de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \theta_0) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (1.40)$$

Empleando la formulación en coordenadas naturales se obtiene que la matriz de rigidez queda expresada como:

$$\mathbf{K}^e(\theta) = \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} H(\mathbf{x}(\xi, \eta), \theta_0) \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\xi, \eta) d\Omega_{\mathcal{R}} \quad (1.41)$$

Usando cuadraturas de Gauss-Legendre para resolver la integral dada en 3.8 se tiene:

$$\mathbf{K}^e(\theta) \approx \sum_{m=1}^{N_{PGL}} \sum_{n=1}^{N_{PGL}} H(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_n), \theta_0) \mathbf{B}^T(\xi_m, \eta_n) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\xi_m, \eta_n) |\mathbf{J}^e(\xi_m, \eta_n)| w_m w_n \quad (1.42)$$

en la que N_{PGL} es el número de puntos de integración que se van a emplear en el método de cuadraturas de Gauss-Legendre y (ξ_m, η_n) representan las coordenadas naturales y w_m y w_n son los pesos empleados según el número de puntos que se tengan en cada coordenada. Con el objeto de hacer el cálculo de las realizaciones se puede reemplazar la función $H(\cdot)$ por una expansión truncada así:

$$\hat{H}(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_n), \theta_0) = \mu + \sum_{i=1}^M H_i(\mathbf{x}(\xi_i, \eta_i)) \mathbf{u}_i(\theta_0) \quad (1.43)$$

Si $H(\cdot)$ es de tipo Gaussiana. Para el caso en el que se tenga una $H(\cdot)$ del tipo lognormal se

⁸Para mayor información referente a la formulación del problema de elementos finitos deterministas consúltese a [Oñate, 1995]

tiene:

$$\hat{H}(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_n), \theta_0) = \exp\left(\lambda + \sum_{i=1}^M H_i(\mathbf{x}(\xi_i, \eta_i)) \mathbf{u}_i(\theta_0)\right) \quad (1.44)$$

Tratamiento estadístico de los resultados

La media y la varianza sin sesgo de los resultados se puede obtener como

$$E^{MC}[\mathbf{U}] = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \mathbf{U}(\theta_i) \quad (1.45)$$

$$\text{Var}^{MC}[\mathbf{U}] = \frac{1}{N_{sim} - 1} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \mathbf{U}^2(\theta_i) - N_{sim} \left(E^{MC}[\mathbf{U}]\right)^2 \quad (1.46)$$

En la que $\mathbf{U}(\theta_i)$ representa los desplazamientos nodales que están asociados a θ_i , N_{sim} es el número de muestras consideradas y $\mathbf{U}^2(\theta_i)$ contiene el cuadrado de los desplazamientos nodales. La efectividad del modelo matemático es examinada mediante el **coeficiente de variación** de la media hallada en 1.45, el cual da como resultado:

$$\text{COV}^{MC} = \frac{\sqrt{\text{Var}^{MC}[\mathbf{U}]}}{\sqrt{N_{sim}} E^{MC}[\mathbf{U}]} \quad (1.47)$$

- **La viga de Bernoulli y SFEM**

Se tiene una viga del tipo Euler-Bernoulli de longitud $l = 2.5$ m con sección transversal $b = h = 0.5$ m como se observa en la Figura 3.8 la cual está sometida a una carga distribuida a lo largo de la viga de $q = -1000$ N/m y en la que se asume que el módulo de Young del material de la viga es aleatorio, el cual varía de acuerdo a una función de covarianza descrito por $C(x_1, x_2) = \exp(-|x_1 - x_2|/b)$ con $b = 1$, en el que $\mu_E = 200$ GPa y $\sigma_E = 20$ GPa. La viga está dividida en intervalos de 0.05 m para efectos de los elementos finitos.

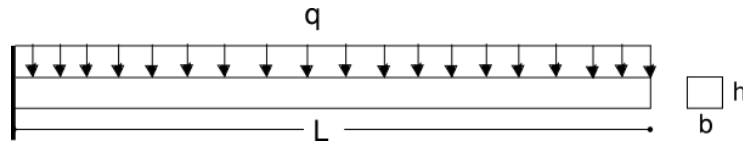


Figura 1.8: Viga De Euler Bernoulli.

La formulación de la matriz de rigidez determinista y del vector de cargas sigue de manera fiel lo contemplado en [Oñate, 1995] teniendo en cuenta que $|\mathbf{J}^e(\xi_m, \eta_n)| = l_e/2$ y se usó el método de Karhunen-Loève para descomponer la función de covarianza en

10 valores propios y vectores propios. Para la solución de este problema se usaron un número de realizaciones $i = 1000$ para las realizaciones por el método Monte-Carlo y la deformación promedio en el extremo libre de la viga es de -4.9312×10^{-6} m como se muestra en la figura 1.9

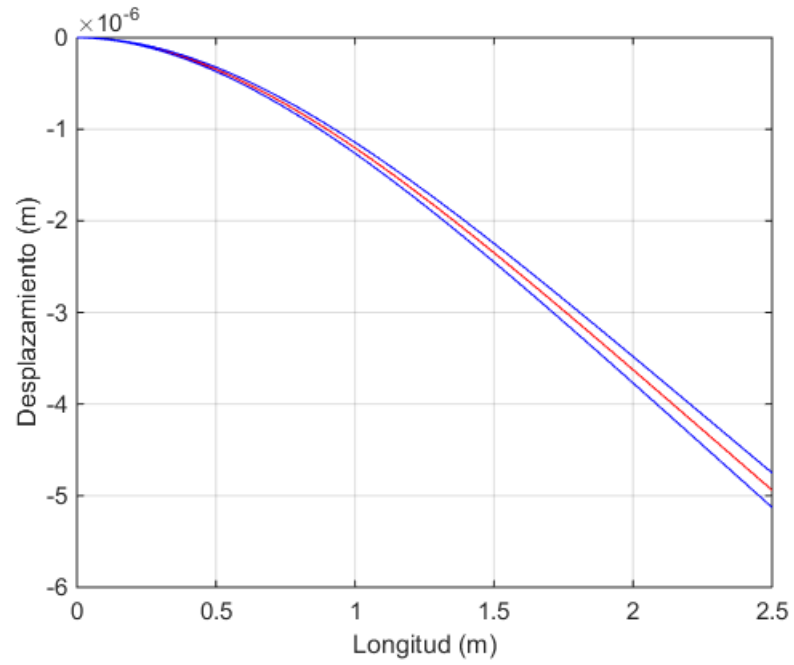


Figura 1.9: Desplazamiento de viga Euler-Bernoulli sometido a carga distribuida.

CAPÍTULO 2

REDUCCIÓN DE DIMENSIONALIDAD

2.1. Definición

Se puede definir la reducción dimensional de la siguiente manera: supóngase que se tiene una muestra de un problema el cual tiene D dimensiones, que es representado mediante n vectores formando una matriz que contiene datos relevantes del problema de tamaño $n \times D$ la cual se va a denominar \mathbf{X} ; además, tiene una dimensionalidad intrínseca ¹ d , en donde $d < D$ y en muchas ocasiones $d \ll D$. Ahora, las técnicas de reducción dimensional transforman la matriz \mathbf{X} en una nueva matriz de datos Y con dimensión d , conservando las características de los datos tanto como sea posible, matemáticamente $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $d < D$. Ahora, al no conocerse la totalidad de las características de los datos o la dimensionalidad intrínseca d , este problema se convierte en un problema "mal planteado" (*ill-posed problem*) el cual podrá ser resuelto asumiendo ciertas características y a d [Van Der Maaten et al., 2009]. Para la profundización de los métodos de reducción dimensional se recomienda la guía del gráfico 2.1 y las definiciones consignadas en [Van Der Maaten et al., 2009].

Los métodos de reducción dimensional se clasifican **métodos convexos** y **métodos no convexos**. Los métodos convexos optimizan una función objetivo la cual tiene un único mínimo, local, el cual coincide con el global, es decir, el espacio solución es convexo; mientras que los métodos no convexos optimizan funciones que contienen varios puntos óptimos locales [Van Der Maaten et al., 2009]. Un requisito importante para una técnica de reducción dimensional es la capacidad

¹La Dimensionalidad Intrínseca (DI) de un conjunto de objetos hace referencia al número mínimo de parámetros necesarios para la "generación" de dichos objetos. [Baydal et al., 1987]

de integrar nuevos puntos de alta dimensionalidad en una representación de datos existente en bajas dimensiones [Van Der Maaten et al., 2009].

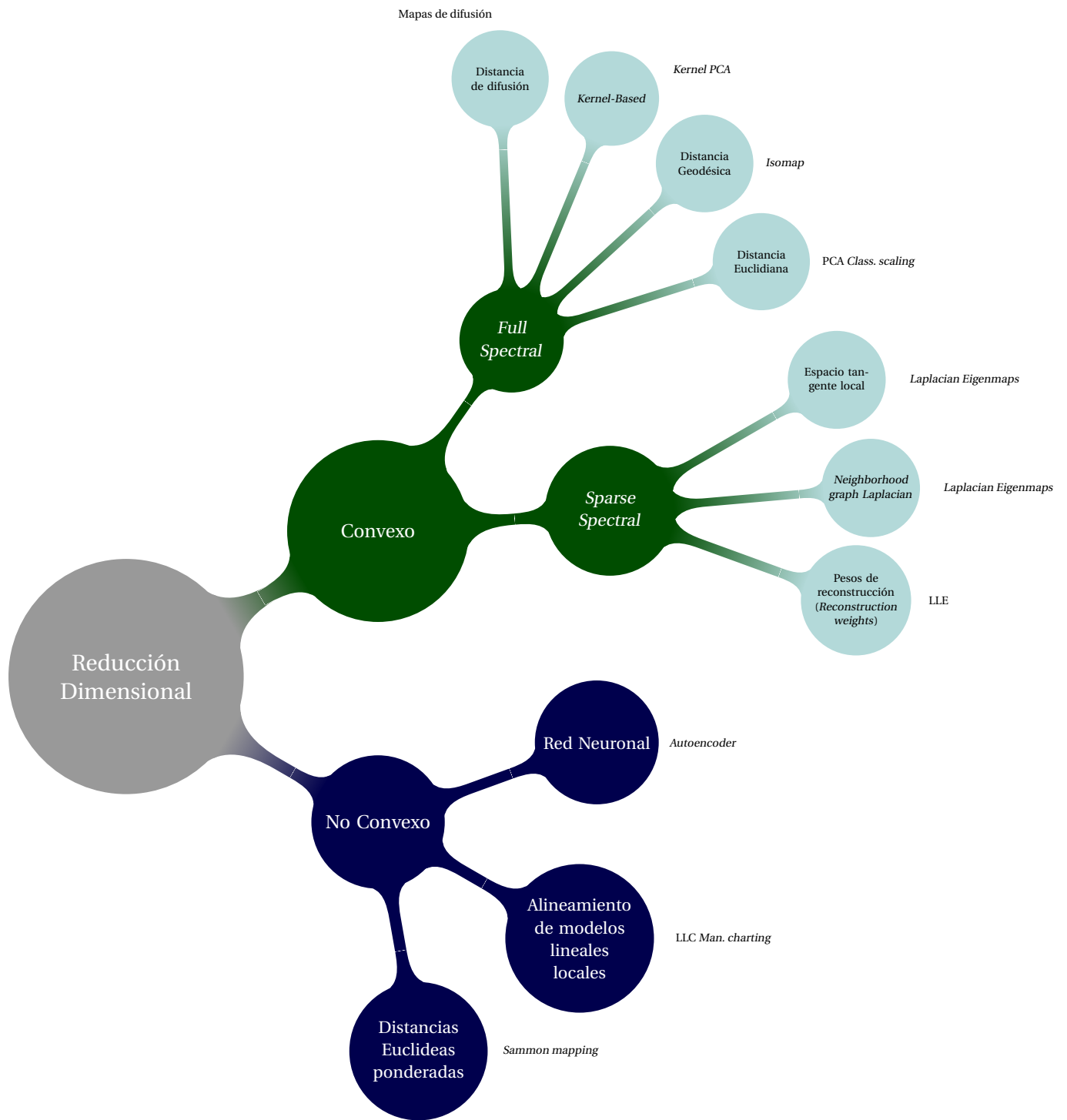


Figura 2.1: Clasificación de los métodos de reducción dimensional [Van Der Maaten et al., 2009]

Un objetivo común en estas técnicas es la conversión de un número grande de variables correlacionadas a un número menor de variables, las cuales no deben estar correlacionadas [Hurtado, 2012], es decir:

$$E[y_i y_j] = 0 \quad i \neq j \quad (2.1)$$

Se desea que la correlación entre variables en el nuevo problema sea nula pues el cambio en alguna de las variables que componen a Y no afectaría el cambio en las restantes variables. Ahora, esta afirmación solamente es válida en el sentido lineal pues se sabe que la correlación es una medida de la dependencia lineal que existe entre dos variables.

Ahora, si se logra realizar una reducción de dimensión significativa, es decir, si $d = 2$ o $d = 3$ sin pérdida de información pobabilística, el nuevo problema se puede ilustrar mediante el uso de gráficos manejables los cuales permitan la visualización de los datos y además sean accesibles para la extracción de datos del gráfico, los cuales se pueden usar para diversos propósitos.

Al trabajarse los problemas de confiabilidad generalmente se trabaja en espacios estándares en los que sus variables no están correlacionadas [Lemaire, 2009] se puede considerar la aplicación de otras técnicas para la reducción de dimensionalidad. El objeto principal es transformar este problema, mediante el uso del Método Monte-Carlo, en un problema de dos dimensiones [Hurtado, 2012].

2.2. Transformación polar

A continuación se presenta un método desarrollado para resolver el problema de confiabilidad empleando el método Monte-Carlo [Hurtado, 2012] en un sistema de coordenadas estándar \mathbf{u} valiéndose de la propiedad de simetría esférica de la función de densidad de la distribución normal estándar².

Considérese dos muestras \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j las cuales se encuentran en el dominio de falla F . Por lo que se pueden tomar como indicadores de variables dos medidas los cuales representan la similitud entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j :

1. El ángulo α_j formado entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j :

$$\cos \alpha_j = \cos \angle(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_i\| \|\mathbf{u}_j\|} \quad (2.2)$$

²Un vector \mathbf{u} se dice que tiene una distribución con simetría esférica si un vector $\mathbf{A}\mathbf{u}$, donde \mathbf{A} es una matriz ortogonal, tiene la misma distribución.

Esto puede ser tomado como una medida de **similitud** entre dos vectores, por lo cual se puede tomar como un indicador de acoplamiento entre variables que se encuentran en la misma clase tal y como se observa en la figura 2.2

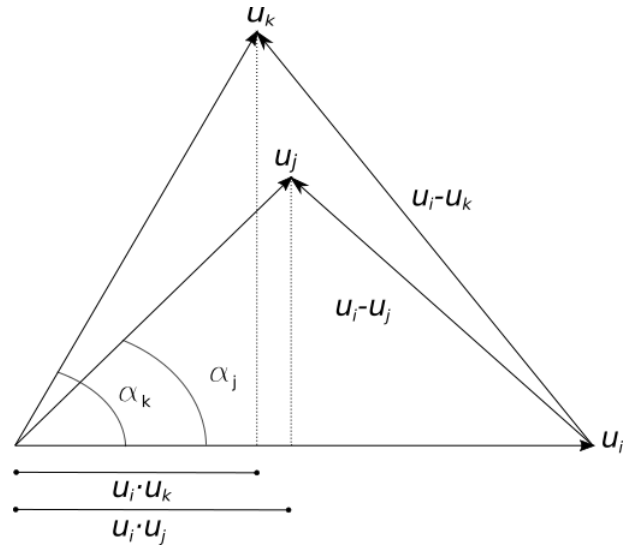


Figura 2.2: El coseno representa la similitud entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j .

2. La diferencia de longitud entre los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_j como se observa en la figura 2.3.

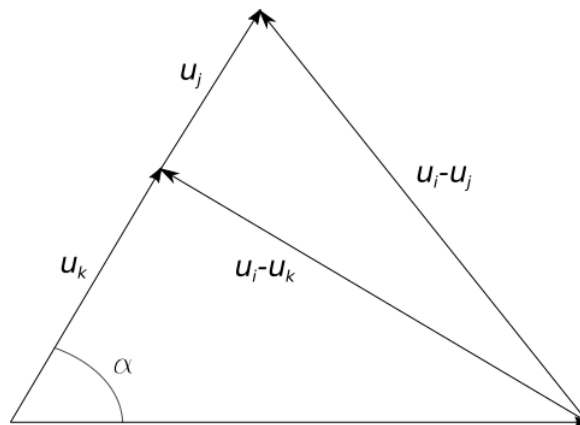


Figura 2.3: El vector norma es una medida de similitud entre el vector \mathbf{u}_i y dos vectores de igual dirección y sentido y diferente longitud.

En el espacio de representación de variables \mathbf{u} se encuentra implícito un sistema de coordenadas polares sobre una función de densidad radialmente simétrica tal y como se ha explicado con anterioridad. Por lo tanto, la transformación para capturar la similitud de las las muestras en dos

clases es definida como:

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3)$$

Donde:

$$v_1 = r = \sqrt{\sum_{i=1}^d u_i^2} \quad (2.4)$$

$$v_2 = \cos \alpha = \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (2.5)$$

En el que el vector \mathbf{w} representa el centro de masa del dominio de falla, el cual esta dado por:

$$\mathbf{w} = P_F^{-1} \left(\int_F \mathbf{u} \phi_d(\mathbf{u}) \right) \quad (2.6)$$

Ahora, se puede escoger un vector sustituto de \mathbf{w} el cual implique un esfuerzo computacional menor y que sea colineal con el vector \mathbf{w} . Se plantea el uso del vector $\boldsymbol{\alpha}$ calculado a través de FORM el cual incorpora la información acerca de la distribución de probabilidad de las variables de entrada; Por la teoría planteada en [Hassofer and Lind, 1974] se tiene que β representa la distancia más corta existente entre el origen de coordenadas estándar y la función de estado límite, denotada en este caso como $g(\mathbf{u}) = 0$. β cual es la norma del vector u^* y su vector unitario está representado como:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\nabla g(\mathbf{u}^*)}{\|\nabla g(\mathbf{u}^*)\|} \quad (2.7)$$

Dada la naturaleza radialmente simétrica de $\phi_d(\mathbf{u})$ se dice que el índice β identifica la zona en el dominio de falla en la que se encuentra la mayor probabilidad de falla, por lo que se tiene que la gran mayoría de los vectores de falla son similares a $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido definido anteriormente, por lo que se puede aceptar a a como un vector sustituto natural de \mathbf{w} [Hurtado, 2012]. Ahora, si se trabaja en el espacio \mathbf{u} rotado de tal manera que el eje u_d coincida con el vector $\boldsymbol{\alpha}$, las parejas (v_1, v_2) de una muestra \mathbf{u} serán las medidas de similitud con el vector $\boldsymbol{\alpha}$, por lo tanto se tendría que:

$$E[v_1 v_2] \equiv E[r \cos a] = E[u_d] = 0 \quad (2.8)$$

Pues todas las coordenadas u_i con $i = 1, 2, \dots, d$ tienen $\mu_u = 0$, por lo tanto se cumple el objetivo principal de la reducción dimensional, es decir, son variables no correlacionadas.

Ahora, estas variables no solamente son no correlacionadas, también son **independientes**, es decir:

$$p_{v_1, v_2}(v_1, v_2; d) = p_{v_1}(v_1; d) p_{v_2}(v_2; d) \quad (2.9)$$

Donde $p_{v_1}(v_1; d)$ y $p_{v_2}(v_2; d)$ representan las funciones de densidad de probabilidad marginal de las variables v_1 y v_2 y $p_{v_1, v_2}(v_1, v_2; d)$ representa la PDF conjunta teniendo en cuenta la dimensión. Según [Hurtado, 2012], la variable v_1 que se encuentra definida por 2.4 responde a una función de densidad tipo Chi ³ de la siguiente manera:

$$p_{v_1}(v_1; d) = \frac{1}{\Gamma(d/2)} 2^{1-d/2} v_1^{d-1} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \quad (2.10)$$

En la que d representa los grados de libertad y $\Gamma(\cdot)$ es la función tipo Gamma. Esta densidad tiende a la izquierda cuando se tienen bajos valores de d y asume de manera gradual una forma cercana a la Gaussiana a medida que d se incrementa [Hurtado, 2012]. La media y la varianza están dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{v_1} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2)}, \\ \sigma_{v_1}^2 &= d - 2 \frac{\Gamma^2((d+1)/2)}{\Gamma^2(d/2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Lo que indica que a medida que la dimensionalidad se incrementa la media de esta variable tiende a \sqrt{d} y la varianza a 0.5; además, a medida que d se incrementa la longitud de los vectores tiende a ser similar y de esta manera la discriminación visual existente entre las muestras seguras y falladas estaría determinada por el ángulo α ⁴.

La generación de la función de densidad de la variable v_2 se hace de la siguiente manera: las variables estándar multidimensionales se pueden generar multiplicando un vector unitario \mathbf{z} , uniformemente distribuido en una hipérbola unitaria de dimensiones d , y una variable con distribución Chi con d grados de libertad. El ángulo α que forma un vector en el espacio d -dimensional con algún eje coordenado responde a la siguiente distribución:

$$p_\alpha(\alpha; d) = \frac{\sin^{d-2} \alpha}{I_d} \quad (2.12)$$

En la que

$$I_d = \int_0^\pi \sin^{d-2} \alpha \, d\alpha \quad (2.13)$$

para $d \geq 2$. Nótese en la figura 2.5 que la función crea un pico en $\alpha = \pi/2$ a medida que la dimen-

³Una distribución tipo Chi describe la variación del valor de la media de la distancia normalizada de un conjunto de variables aleatorias independientes que tienen una distribución normal [Gooch, 2010]

⁴Para esta afirmación existe una excepción [Hurtado, 2012]

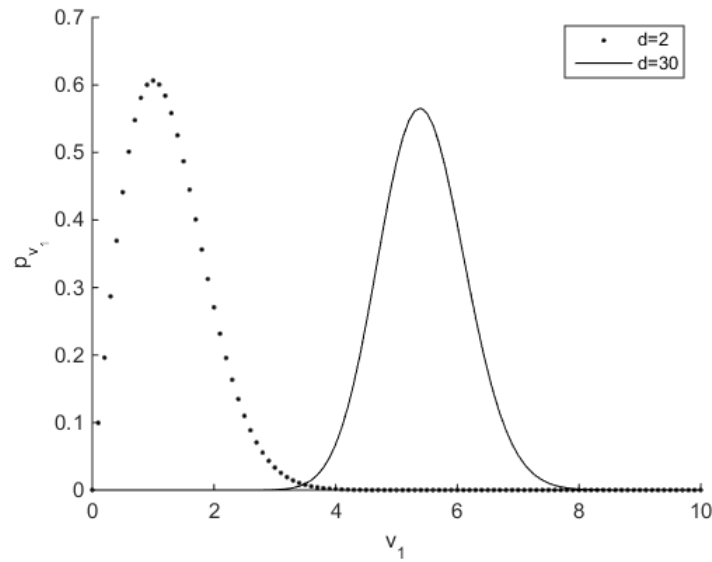


Figura 2.4: Función de densidad de probabilidad de la norma de un vector aleatorio con distribución estándar. [Hurtado, 2012]

ción se incrementa, aproximándose así a una función tipo Delta de Dirac, lo que significa que a medida que el número de muestras se incrementa, $\cos \alpha \approx 0$ para altas dimensiones, es decir, las muestras tienden a ser ortogonales entre sí. Además, por ser la función de densidad normal isotrópica, se extiende al vector \mathbf{w} , porque cualquier eje coordenado puede coincidir con este. Así,

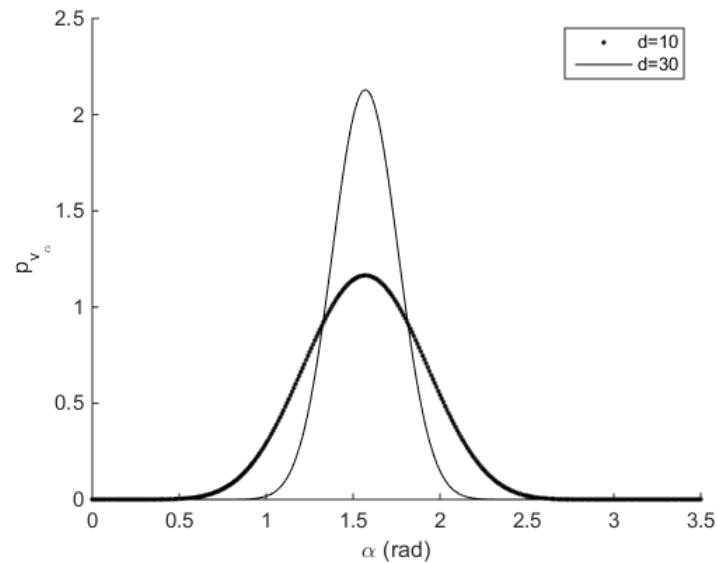


Figura 2.5: Evaluación de la función de densidad de probabilidad del ángulo de un vector distribuido aleatoriamente de manera uniforme en una esfera unitaria [Hurtado, 2012]

la función de densidad de v_2 podría ser derivada usando las reglas de transformación de densidad de probabilidad [Papoulis, 1991]. Así, las raíces de la ecuación $v_2 = \cos \alpha$ en el rango $[0, \pi]$ son $\alpha_1 = \cos^{-1}(v_2)$ y $\alpha_2 = \pi - \cos^{-1}(v_2)$, mientras que

$$\left| \frac{dv_2}{d\alpha} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}} \quad (2.14)$$

Por lo tanto

$$p_{v_2}(v_2; d) = \frac{1}{I_d \sqrt{1-v_2^2}} (\sin^{d-2}(\cos^{-1}(v_2)) + \sin^{d-2}(\pi - \cos^{-1}(v_2))) \quad (2.15)$$

Por lo tanto si las dos variables son independientes la ecuación quedaría como

$$\begin{aligned} p_{v_1, v_2}(v_1, v_2; d) &= p_{v_1}(v_1; d) p_{v_2}(v_2; d) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(d/2)} 2^{1-d/2} v_1^{d-1} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{I_d \sqrt{1-v_2^2}} (\sin^{d-2}(\cos^{-1}(v_2)) + \sin^{d-2}(\pi - \cos^{-1}(v_2))) \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nótese que a medida que d se incrementa la densidad adquiere contornos redondos y se concentra alrededor del punto $(\mu_{v_1}, 0)$. La forma singular de la densidad en $d = 2$ obedece a que se tiene que $p_{v_2}(v_2; 2) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-v_2^2}}$ la cual tiende a ∞ cuando $v_2 \rightarrow \pm 1$.

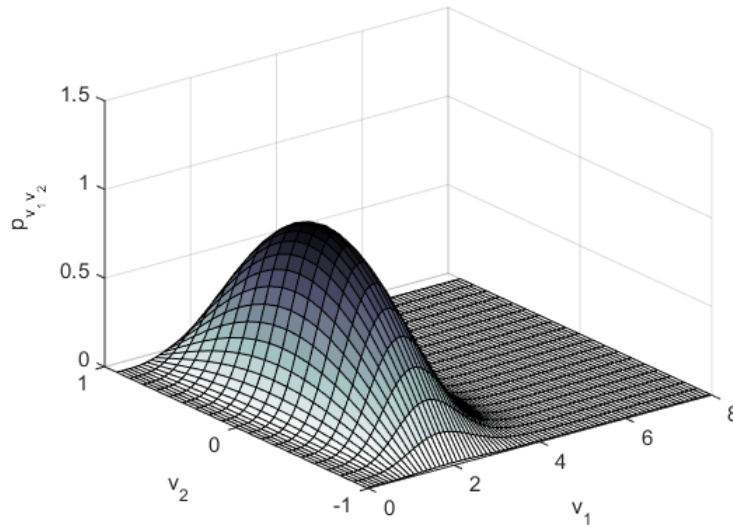


Figura 2.6: Función de densidad de probabilidad conjunta de v_1 y v_2 para $d = 5$. [Hurtado, 2012]

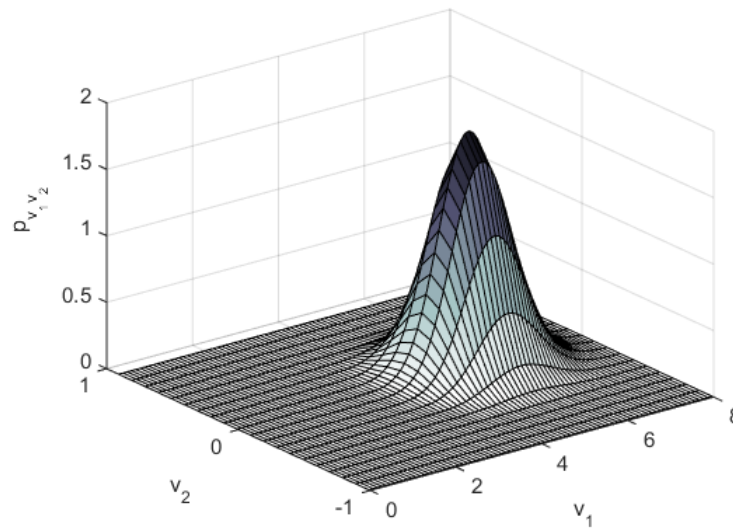


Figura 2.7: Función de densidad de probabilidad conjunta de v_1 y v_2 para $d = 30$. [Hurtado, 2012]

2.3. Características del gráfico

Para problemas que tienen baja dimensionalidad, es decir, que su dimensión es menor a 5 el gráfico toma una forma cercana a la rectangular (ver Figura 2.8) y a medida que la dimensionalidad del problema se incrementa, es decir, $d > 5$, la forma del gráfico empieza a cambiar colocando los datos en una nube de datos con forma redonda (ver Figura 2.9). En la zona superior de la nube de puntos se puede representar claramente a aquellos que pertenecen a una zona de falla, localizándose en el caso de bajas dimensiones en la zona superior derecha y en el de moderadas y altas dimensiones en la zona superior. El punto \mathbf{u}^* en las nuevas coordenadas \mathbf{v}^* queda representado como: $\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*) = (\beta, 1)$ y este se localiza detrás de la nube de datos transformados para moderadas y altas dimensiones debido a que este punto permanece fijo a una distancia β . La línea que separa las zonas de falla y puntos seguros representan las raíces de la función de aproximación por SORM [Hurtado, 2012].

La diferencia entre las Figuras 2.8 y 2.9 se puede representar de la siguiente manera [Hurtado, 2012]: Considérese la descomposición de la probabilidad de falla en dos factores, empleando el concepto de probabilidad condicional. La probabilidad queda dada por

$$P_f = P_{f|\beta} P_\beta \quad (2.17)$$

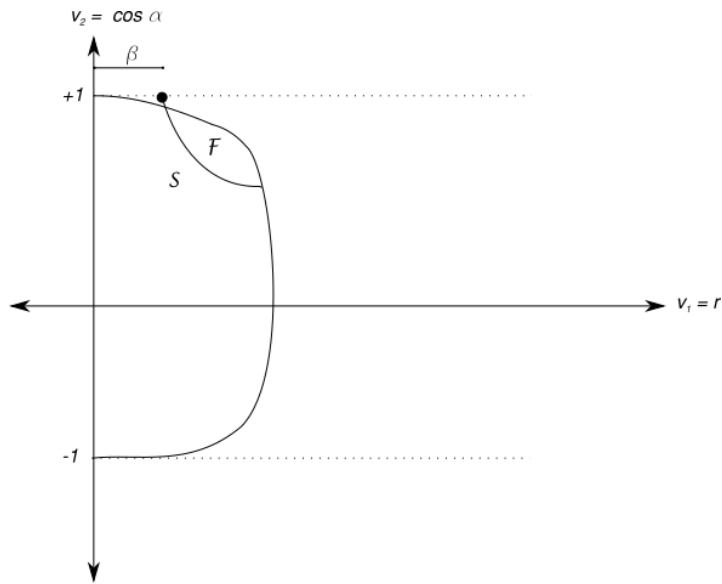


Figura 2.8: Gráfico de confiabilidad para bajas dimensiones [Hurtado, 2012]

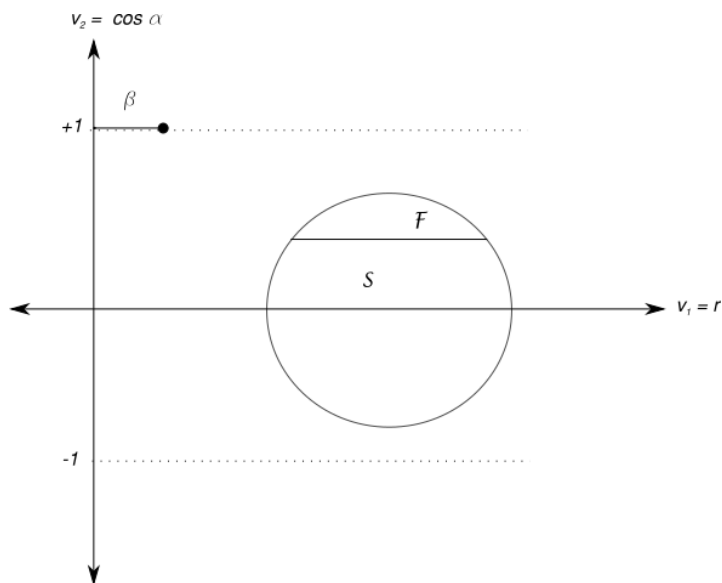


Figura 2.9: Gráfico de confiabilidad para moderadas y altas dimensiones [Hurtado, 2012]

en la que $P_{f|\beta}$ es la probabilidad de falla dada que la norma de la variable \mathbf{u} es mayor que β en la que el índice de confiabilidad es el radio de una hipersfera que está en el dominio seguro

$$P_{f|\beta} = P[g(\mathbf{u}) \leq 0 : \|\mathbf{u}\| > \beta] \quad (2.18)$$

Este término puede ser solucionado empleando Monte-Carlo con N muestras que yacen fuera de

la hipersfera. De otro lado el segundo término de la ecuación 2.17 está dado por:

$$P_\beta = P[\|\mathbf{u}\| > \beta] = 1 - \chi(\beta; d) \quad (2.19)$$

Con una distribución Chi $\chi(\beta; d)$, de d grados de libertad. A medida que la dimensionalidad del problema crece, la totalidad de muestras fluye de manera gradual hacia el exterior de la esfera de radio β y la deja sin muestras, por lo que el primer término en la ecuación 2.17 se vuelve irrelevante, por lo que los términos relacionados con d pierden efecto. Lo dicho anteriormente significa que para grandes valores de d el punto de diseño \mathbf{u}^* toma un significado geométrico, perdiendo su significado probabilístico pues ningún punto se encuentra en la vecindad de este.

Cuando se trabaja con el vector polar \mathbf{w} encontrado en el método de FORM se hacen varias cosas evidentes, las cuales hacen fácil la selección de las muestras de falla. En el gráfico de confiabilidad el punto de diseño \mathbf{u}^* tiene coordenadas en el espacio \mathbf{v} de $(\beta, 1)$ pues $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ el cual representa el índice de confiabilidad. De otro lado el hiperplano $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ está representada por la línea $v_2 = \beta / v_1$ [Hurtado et al., 2017].

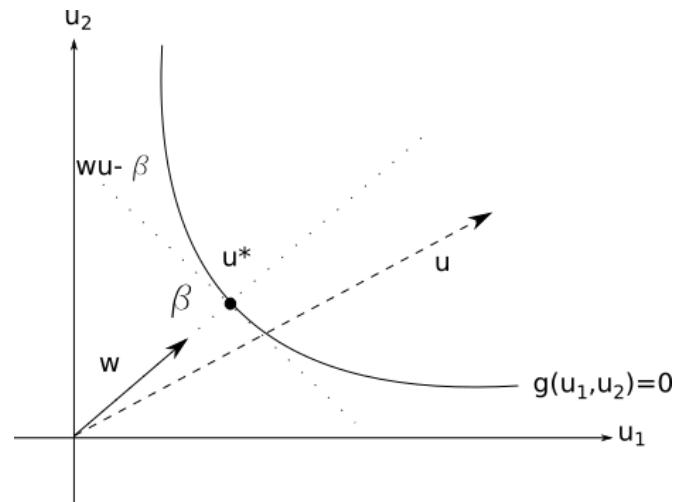


Figura 2.10: Representación del punto de falla y elementos importantes en la solución en FORM [Hurtado, 2012]

Cuando se presentan los valores en el gráfico de confiabilidad se observa una evolución de la función $g(\mathbf{u})$ desde los valores más altos, ubicados en la parte inferior, hasta los valores más bajos de la función en la parte superior del gráfico con una estructura hiperbólica [Hurtado et al., 2017]. Los primeros elementos del gráfico quedan representados mediante la hipérbola $v_2 = \beta / v_1$, esto, debido a que v_2 representaría el coseno de cualquier muestra que esté sobre el vector polar

$\mathbf{w} = \mathbf{u}^*$ y representaría tanto la dirección de evolución de la función como el vector ortogonal al hiperplano $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - \beta$.

Para la representación polar del problema es de interés la hipérbola que pase a través del punto $(\mu_{v_1}, 0)$ en el que la primera coordenada representa la media de la variable v_1 y la cual está representada por la ecuación 2.11 y la ecuación objetivo estaría representada por:

$$v_1 = \mu_{v_1} \sqrt{1 + v_2^2} \quad (2.20)$$

Por lo que para $v_2 = 0$, $v_1 = \mu_{v_1}$ y por lo tanto las funciones:

$$\begin{aligned} v_2 &= b/v_1 \\ v_1 &= \mu_{v_1} \sqrt{1 + v_2^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

en donde v_2 representa la **hipérbola de selección** usada para la selección de muestras localizadas a una distancia b del origen en el espacio de variables estándar \mathbf{u} y v_1 en la ecuación 2.21 es la hipérbola que describe la evolución de la función alrededor de \mathbf{w} llamada **hipérbola de estructuración** [Hurtado et al., 2017] la cual, en $v_2 = \pm 1$ es

$$v_1 = \sqrt{2} \mu_{v_1} \quad (2.22)$$

para los valores de la hipérbola de selección y la hipérbola de estructuración se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2m)!}{4^m m!} \end{aligned}$$

Ahora, una aproximación a la función de estado límite $g(\mathbf{u})$ está dada por FORM de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) &\approx \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \beta \\ &\approx \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \beta \\ &\approx \|\mathbf{w}\| v_1 v_2 - \beta \end{aligned} \quad (2.23)$$

Lo cual explica que las coordenadas (v_1, v_2) representan de manera aproximada la función de

estado límite pues los otros valores son constantes, lo cual explica la razón por la que la evolución de la función $g(\mathbf{u})$ es representada de manera explícita en el gráfico de confiabilidad.

2.4. Ventajas

Esta representación es una forma fácil de visualizar un problema de confiabilidad pues mediante el uso de la reducción dimensional se convierte en un problema comprensible el cual se puede emplear para diversos fines, además no ofrece una limitación en el número de variables que contenga el problema y las posibilidades para la construcción del vector w no se limitan al vector de cosenos directores proporcionados por FORM.

2.5. Limitaciones

El método del gráfico de confiabilidad solamente puede emplearse para problemas estáticos, pues en los problemas dinámicos no existe una relación directa entre el estado de falla y la posición de la muestra en el espacio de variables estándar \mathbf{u} .

De la misma manera este método está diseñado para ser usado **únicamente en una función de estado límite**, es decir, no se puede usar en problemas que tienen más de una función de daño ya que el espacio de variables \mathbf{v} depende del vector de falla \mathbf{w} que está asociado a una única función de estado límite, es decir, a un nivel de confiabilidad determinado. Así, los problemas que no pueden ser abordados con respecto a este tema son de dos tipos:

- En los que existan varios niveles de confiabilidad β_n asociados a $g_n(\cdot)$ funciones de estado límite.
- Los problemas del tipo *First Passage Problem* [Di Nardo, 2002]. Este tipo de problemas consisten en la evaluación de la distribución de probabilidad del tiempo cuando algún proceso X_t el cual modela un sistema estocástico alcanza una frontera determinada o se encuentra en una región crítica designada con anterioridad, definiéndose de esta manera:

$$T = \min_{t \in N} \{t : X_t \leq S_t\}$$

En donde S_t representa la frontera. Entonces, para r instantes de tiempo, por cada instante de tiempo evaluadas en la función de estado límite $g(t, \mathbf{u})$ se tendrán funciones de estado

límite diferentes entre sí, por lo que la confiabilidad β del sistema quedaría descrita por

$$\beta = P[g(t_1, \mathbf{u}) < c, g(t_2, \mathbf{u}) < c, \dots, g(t_r, \mathbf{u}) < c]$$

Teniendo, de esta manera, r funciones de estado límite, para lo cual no está diseñado el algoritmo.

2.6. Algoritmo

Para la construcción del gráfico de confiabilidad de un problema en el espacio constituido por los vectores v_1 y v_2 se siguen los siguientes pasos:

1. Formular el problema de confiabilidad:

$$s(\mathbf{u}) = c - g(\mathbf{u}) \quad (2.24)$$

En donde c representa un valor **razonable** que puede llegar a tomar la función $g(\mathbf{u})$ con el objetivo de que la solución obtenida por el procedimiento FORM sea convergente.

2. Resolver el problema FORM para la ecuación (2.8) para obtener tanto el vector de falla \mathbf{w} como el índice de confiabilidad β .
3. Generar N muestras de variables u con distribución Normal.
4. Calcular v_1 y v_2 para cada muestra de acuerdo a las ecuaciones (2.4) y (2.5) respectivamente.
5. Dibujar el gráfico con coordenadas (v_1, v_2)

2.7. El meta-problema de confiabilidad y el gráfico de confiabilidad

El gráfico de confiabilidad también se puede emplear para resolver problemas relacionados con intervalos de confiabilidad asociados a unas variables las cuales tienen un intervalo definido de variación empleando un método similar al planteado para resolver el problema de la ecuación (2.8). Este método consiste en definir unas variables de diseño θ en un intervalo definido y transformarlas a un espacio de variables normales \mathbf{z} , en donde la dimensionalidad del problema será

dada por el número de intervalos en las distribuciones de las variables de entrada. Así, el problema en función de las variables de diseño quedaría formulado como:

$$f(\boldsymbol{\theta}) = P - P_f(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.25)$$

En donde P representa un límite de confiabilidad o una confiabilidad de diseño y $P_f(\boldsymbol{\theta})$ es la probabilidad de falla asociada a las variables de diseño. Este problema también se puede plantear en términos del índice de confiabilidad como:

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \beta(\boldsymbol{\theta}) - \beta \quad (2.26)$$

Para resolver el problema se deben definir un conjunto de variables con distribución normal simétricamente truncada en el rango $[-3, +3]$ definido por la regla del 3σ para cada m cantidad de intervalos:

$$z_k = \frac{6\theta_k - 3(\bar{\theta}_k - \underline{\theta}_k)}{|\bar{\theta}_k - \underline{\theta}_k|}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.27)$$

De esta manera la propiedad de simetría de la función de distribución normal se preserva y se puede emplear el método de FORM para la solución del problema de confiabilidad.

La transformación de la variable del espacio $\boldsymbol{\theta}$ al espacio de variables \mathbf{z} implica una transformación de la función del metaproblema así:

$$f(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{h}(\mathbf{z})) \equiv f(\mathbf{z}) \quad (2.28)$$

En donde $\mathbf{h}(\cdot) = [h_1(z_1), h_2(z_2), \dots, h_m(z_m)]$ representa el vector conformado por las funciones inversas dadas por la función:

$$\theta_k = h_k(z_k) = \frac{1}{6}(|\bar{\theta}_k - \underline{\theta}_k|z_k + 3(\bar{\theta}_k - \underline{\theta}_k)) \quad (2.29)$$

Por lo que la función de estado límite para este tipo de problema queda enunciado como:

$$f(\mathbf{z}) = P - P_f(\mathbf{z}) \quad (2.30)$$

y en términos de la confiabilidad:

$$f(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta \quad (2.31)$$

Ahora, en este caso el problema de confiabilidad asociado a la ecuación (2.25) o (2.25) tiene asociado un vector de falla \mathbf{z}_f el cual se puede hallar de diversas maneras ya sea aplicando procedimientos de confiabilidad (FORM, SORM) o métodos Monte Carlo [Hurtado, 2013]. Para efectos de esta tesis se toma el uso de FORM, teniendo como consecuencia un desarrollo de FORM constituido por dos niveles. El primer nivel está conformado por la función de estado límite $g(\mathbf{u})$ la cual se define en el espacio \mathbf{u} y tiene una dimensionalidad d . El segundo nivel está definido por la función $f(\mathbf{z})$ definida en el espacio \mathbf{z} con una dimensionalidad m , por lo que por cada iteración en el espacio \mathbf{z} se tiene un problema subyacente $P_f = P[g(\mathbf{u}) \leq 0]$.

Cabe anotar que los parámetros deben ser generados a partir de una distribución radialmente simétrica, ya sea una distribución normal o una distribución tipo Student para que el problema de confiabilidad cobre sentido. De esta manera se puede construir el problema de dos niveles los cuales asumen la siguiente forma:

1. Primer nivel:

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \beta = \|\mathbf{u}\| \\ \text{sujeto a: } & g(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. Segundo nivel:

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \delta = \|\mathbf{z}\| \\ \text{sujeto a: } & f(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ahora, el criterio de parada tanto el primer nivel como el segundo nivel se puede definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta^{(i)} - \beta^{(i-1)} & \leq 0.001 \\ \delta^{(i)} - \delta^{(i-1)} & \leq 0.01 \end{aligned}$$

Estos criterios de parada se establecen para obtener una rápida convergencia del problema. El primer nivel de confiabilidad implica un criterio más estricto de parada ya que el valor de β se emplea para el cálculo de la probabilidad de falla, dada por la ecuación:

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (2.32)$$

El valor de δ no tiene valor probabilístico alguno sino que representa la norma del vector de falla \mathbf{z}_f , usado para la construcción del gráfico de confiabilidad asociado al metaproblema.

2.8. El gráfico de confiabilidad y el metaproblema

El gráfico de confiabilidad sufre una pequeña variación al tomar al vector \mathbf{z}_f , graficándose con las coordenadas (t_1, t_2) definido como:

$$t_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i^2} \quad (2.33)$$

$$t_2 = \cos(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (2.34)$$

El algoritmo para la construcción del gráfico de confiabilidad en el metaproblema es similar al desarrollado para resolver el problema planteado en mostrado en la Sección 2.6. Así, el algoritmo queda representado de la siguiente manera:

1. Resolver el problema de confiabilidad mostrado en la ecuación 2.30 o en la ecuación 2.31 empleando el FORM de dos niveles planteado en la sección 2.7 con el objetivo de encontrar el vector de falla \mathbf{z}_f .
2. Generar M muestras de variables \mathbf{z} con distribución normal truncada de acuerdo a la regla del 3σ .
3. Calcular t_1 y t_2 para cada muestra de acuerdo a las ecuaciones 2.33 y 2.34 tomando a $\mathbf{y} = \mathbf{z}_f$
4. Dibujar el gráfico con coordenadas (t_1, t_2)

2.9. Aplicaciones existentes de la reducción dimensional y el gráfico de confiabilidad

Este tipo de reducción dimensional se encuentra por primera vez en [Hurtado, 2012] en el que se introduce el tema de reducción dimensional teniendo en cuenta las características geométricas del aporte realizado por Hassofer y Lind en [Hassofer and Lind, 1974]; este nuevo aporte se aplica al uso de variables de tipo Gaussianas, a transformaciones No Gaussianas en las que hay que tener en cuenta la transformación al espacio estándar de la función de estado límite. Además se consideraron casos especiales como la existencia de varios puntos de diseño, formas degeneradas cuadráticas, entre otros y su comportamiento al aplicar la reducción dimensional descrita en el artículo. Teniendo en cuenta lo anterior descrito se plantea el uso de métodos como FORM, SORM, *Importance sampling*, entre otros y su relación con el método de reducción dimensional y el gráfico de confiabilidad.

A partir de este aporte se encuentran aplicaciones del gráfico de confiabilidad en el análisis estructural difuso [Hurtado et al., 2012], localización de muestras críticas [Hurtado and Alvarez, 2012]⁵ en métodos como análisis de intervalos y en análisis probabilísticos y para mejorar la eficiencia de métodos como el Monte Carlo para calcular probabilidades de falla [Hurtado and Alvarez, 2013]. Además de estos desarrollos se tiene la aplicación del método de reducción dimensional en la solución del *meta-problema* [Hurtado, 2013], el cual se va a explicar posteriormente.

Además de estos campos de investigación se tienen las siguientes aplicaciones:

- Optimización por enjambre de partículas [Hurtado and Ramírez, 2013].
- Intervalos de confiabilidad estructural con conjuntos aleatorios (*random sets*), modelamiento de dependencias (*dependence modeling*) e incertidumbre en parámetros [Alvarez and Hurtado, 2014] y con información estadística de los datos de entrada [Hurtado et al., 2017].

⁵En este caso consideran la aproximación de segundo orden de la función de estado límite $g(\mathbf{u})$

Parte II

Desarrollos propuestos para diseño óptimo de estructuras

CAPÍTULO 3

CONFIABILIDAD INVERSA

3.1. La confiabilidad inversa

El problema de confiabilidad inversa ha sido ampliamente usado para sortear uno de las inquietudes más comunes de la ingeniería, la cual consiste en la incertidumbre existente en las variables de entrada de tal manera que se puedan diseñar estructuras que respondan de acuerdo a un nivel de confiabilidad requerido, el cual debe ser alto para garantizar el funcionamiento de la estructura sin que supere el estado límite. Este concepto aparece cuando se buscan determinar unos parámetros que son desconocidos de tal manera que se alcance un nivel de confiabilidad preescrito [Cheng et al., 2007b] por diversos motivos, ya sea para un nivel de probabilidad de falla teórico o un índice de confiabilidad [Novák and Lehky, 2010]. Este método fue desarrollado con el fin de resolver los problemas relacionados con RBDO [Xiang and Liu, 2011]¹ y permite el cálculo directo y eficiente de parámetros de diseño [Foschi and Li, 2000].

En el capítulo anterior se introdujo la noción de metaproblema, en el que se crea un problema de confiabilidad de segundo grado con respecto a unas variables de diseño \mathbf{z} que gobierna un valor de confiabilidad objetivo. En el caso del problema de confiabilidad inversa se proponen que las variables de diseño sean representadas por el vector \mathbf{z} , al igual que en el metaproblema, de

¹RBDO significa Confiabilidad basada en la optimización del diseño, y en inglés *Reliability-Based Design Optimization*, lo cual se tratará en el capítulo 4.

manera que el problema de confiabilidad inversa se formula de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \min \quad & ||\mathbf{z}|| \\ \text{tal que } & f(\mathbf{z}) : \beta^* \leq \beta(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En la que $f(\mathbf{z})$ es una función de restricción que representa el índice de confiabilidad que se debe tener para que un sistema cumpla con ciertos requerimientos objetivo que se deben cumplir y β^* es el índice de confiabilidad objetivo. Ahora, esta función se puede escribir en términos de probabilidad de falla como:

$$P_f(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \leq P_f^* \quad (3.2)$$

En donde P_f^* representa la probabilidad de falla deseada en el sistema.

Algunos problemas se presentan al tratar de solucionar el problema de confiabilidad inversa, los cuales hacen que algunos ingenieros vean defectos en los métodos que se han empleado. Algunos de los problemas son [Roberto Minguez, 2005]:

1. El usuario de los métodos debe conocer de manera profunda los métodos de optimización pues puede presentarse dificultad en el momento de proponer nuevas acotaciones para las restricciones.
2. En algunos casos el tamaño de paso usado es fundamental para alcanzar la convergencia del problema.
3. Algunas búsquedas en línea (*line searches*), si bien mejoran los métodos de confiabilidad inversa, en algunos casos complican el método, haciéndose innecesario el uso de las búsquedas complicadas.
4. No existe la sensibilidad en los índices de confiabilidad con respecto a las variables de diseño que son dadas para el sistema.
5. No se da información cuando se tienen varias soluciones o cuando la solución no es posible.

Estos problemas se han intentado sortear de acuerdo a las necesidades de precisión o de velocidad de convergencia que se tengan aunque en realidad no se puede decir que exista un método infalible para solucionar este problema pues algunos métodos presentan una o varias de las falencias expuestas con anterioridad.

3.2. Desarrollo del problema de confiabilidad inversa.

Al encontrarse con diversos problemas se han planteado técnicas que mejoren tanto el tiempo de cálculo como la estabilidad y la precisión en la obtención de los datos de diseño. Es así como se han implementado métodos como las redes neuronales [Cheng et al., 2007b] confiriéndole al método de FORM inverso capacidades para resolver problemas de confiabilidad inversa en los que se encuentran involucradas funciones de estado límite que están expresadas de manera implícita; también está la implementación de reducción dimensional [Lee et al., 2008], MCMC [Perrin et al., 2007] y técnicas de descomposición [Roberto Minguez, 2005] con el objetivo de disminuir el tiempo de cálculo sin afectar la precisión del método de confiabilidad inversa.

Este tipo de problema también se ha utilizado en el diseño de estructuras sometidas a sismos con el objetivo de mejorar el diseño estructural con altos niveles de confiabilidad teniendo en cuenta que para este tipo de problemas hay que hacer cierto tipo de generalizaciones para poder aplicar técnicas de confiabilidad inversa como el FORM inverso [Saha and Manohar, 2005] pues algunas técnicas son viables solamente cuando existe invarianza en el tiempo [Nakamura and Nakamura, 2000]. Es así como se han presentado desarrollos recientes como los realizados por [Saha and Manohar, 2005], [van de Lindt and Niedzwecki, 2002], [Nakamura and Nakamura, 2000]. También se ha planteado el diseño de materiales que están sometidos a fatiga tales como [Xiang and Liu, 2011], [Xiang and Liu, 2009] y el planteado en [Guan et al., 2014]. En cada una de las aplicaciones se hace énfasis en los problemas más recurrentes en el momento de solucionar este tipo de problemas bajo ciertas condiciones dadas por el sistema: consumo computacional alto y la necesidad de hacer ciertas simplificaciones para poder desarrollar los métodos ya planteados, como en el caso sucedido con las cargas sísmicas.

Otros diseños solucionados con la metodología planteada por la confiabilidad inversa son aquellos que involucran problemas geotécnicos y de cimentaciones [Babu and Basha, 2008], cables de suspensión para puentes [Cheng et al., 2007a], entre otros. Hay que resaltar que muchos autores tales como [Saha and Manohar, 2005] y [Cheng et al., 2007b] hablan de la necesidad existente de investigar con mayor profundidad sobre estos temas, tanto sobre algoritmos como de aplicaciones que son fundamentales al momento de plantear problemas de optimización basados en probabilidades de falla de los sistemas estructurales bajo diversas condiciones.

3.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad

El gráfico de confiabilidad representa una herramienta de gran utilidad en el momento de resolver el problema de confiabilidad inversa pues ayuda a encontrar aquellos puntos que cumplen con el criterio de restricción que se planteó en la ecuación 3.1. El gráfico de confiabilidad ayuda a separar los puntos en dos grandes zonas: la región que representa el cumplimiento de la condición y una zona que representa el no cumplimiento de la condición. Al igual que en el gráfico de confiabilidad se habla de las coordenadas t pues se va a solucionar un problema que involucra a las variables de diseño. Así, las coordenadas estarán construidas por:

$$t_1 = \|\mathbf{z}\| \quad (3.3)$$

$$t_2 = \cos(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \quad (3.4)$$

En la que \mathbf{z}^* representa el vector de falla del sistema, es decir, representa las variables de diseño las cuales cumplen las condiciones de la ecuación 3.1; de la misma manera se puede ver la evolución de las gráficas teniendo tanto la hipérbola de estructuración como la hipérbola de selección. Adicionalmente se pueden obtener zonas de acuerdo al índice de confiabilidad que tienen los datos que están en determinadas zonas, es decir, también ayuda a mostrar la evolución de la confiabilidad del sistema teniendo en cuenta los datos usados para crear el gráfico de confiabilidad.

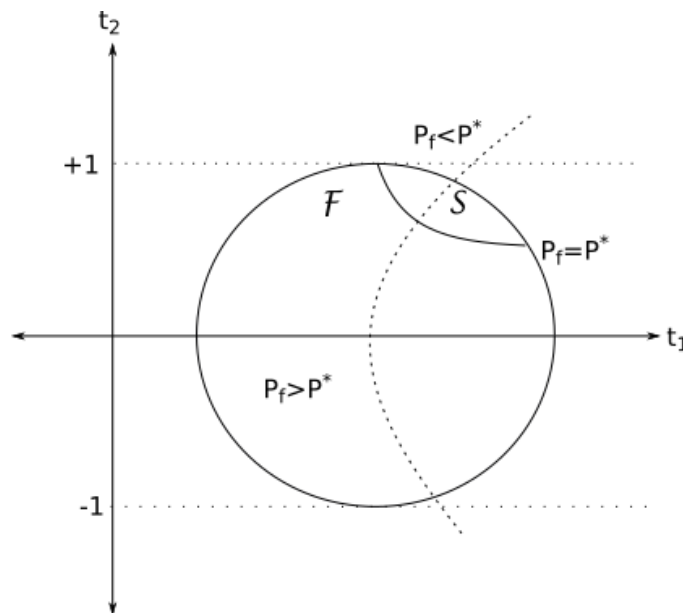


Figura 3.1: Columna esbelta estudiada en el problema de confiabilidad inversa

Cuadro 3.1: Datos de trabajo de ejercicio de columna esbelta

	Variable	Intervalo	Media	Desviación Estándar
P	Normal	$[0.97, 1.03] \times 10^6$ N		2×10^5 N
H	Normal	$[0.97, 1.03] \times 10^4$ N		2×10^3 N
E	Normal	$[1.94, 2.06] \times 10^4$ N/mm ²		2×10^3 N/mm ²
L	Normal	$[0.97, 1.03] \times 10^4$ mm		500 mm
I	Normal	$[0.101, 0.107] \times 10^{11}$ mm ⁴		0.520×10^9 mm ⁴
S	Normal	$[0.404, 0.429]$ Nm		0.0417 Nm

A continuación se presentarán algunos ejemplos en los que se puede evidenciar la aplicación del gráfico de confiabilidad en la solución del problema de confiabilidad inversa.

3.3.1. Una columna esbelta en pandeo

En este caso se tiene una columna con un apoyo en resorte en el extremo inferior y con extremo libre en la parte superior sometida a una carga horizontal y vertical en el extremo superior, las cuales ocasionan un estado de pandeo como se muestra en la figura 3.2. Esta columna tiene una longitud L , un módulo de elasticidad E , momento de inercia I y está conectada a un resorte rotacional no lineal. Las variables aleatorias están consignadas en la Tabla 3.4

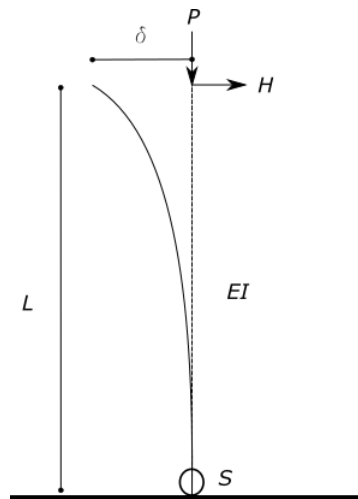


Figura 3.2: Columna esbelta estudiada en el problema de confiabilidad inversa

Así, la función de estado límite estaría descrita como

$$g(\mathbf{u}) = 40 - \delta(\mathbf{u})$$

En la que $\delta(\mathbf{u})$ representa el desplazamiento horizontal del extremo superior expresada en mm.

Este desplazamiento está dado por la ecuación:

$$\delta(\mathbf{u}) = t \left[(\tan(qL) - qL) + \frac{S^2 \left(1 + \sqrt{1 - 4(HEI \tan^2(qL))/S^2} \right)^2}{4HEI \tan(qL)} \right]$$

Además se tiene que

$$q = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{y} \quad t = \frac{H}{EI \left(\frac{P}{EI} \right)^{1.5}}$$

Por lo tanto, el problema a solucionar contiene 6 variables en el vector \mathbf{u} y el problema de confiabilidad inversa quedaría definido como:

$$f(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* = \beta(\mathbf{z}) - 2.9$$

En donde el vector \mathbf{z} representa las variables de diseño las cuales están relacionadas con las variables del sistema: $\mathbf{z} : [P, H, E, L, I, S]$. Estas variables en función de \mathbf{z} son construidas empleando la regla de 3σ descrita en el capítulo 2 y teniendo como valores superiores e inferiores los valores consignados en la tabla 3.4 para cada variable correspondiente. El vector \mathbf{z}^* que optimiza el proceso es:

$$\mathbf{z}^* = [-0.8108, 1.9327, 0.3705, 1.3885, -0.0012, 0.3360]$$

Empleando a \mathbf{z}^* para la creación de los vectores t_1 y t_2 , se obtiene el gráfico de confiabilidad correspondiente a este problema, construido con una cantidad de datos $N = 1000$ el cual se puede ver en la Figura 3.3. Un uso útil que tiene el gráfico es la permisibilidad en el momento de clasificar zonas de confiabilidad con respecto a un vector \mathbf{z}^* tal y como se puede ver en la Figura 3.3, esto, con el fin de encontrar otros niveles de confiabilidad desarrollados en el proceso de la construcción del gráfico de una manera ágil, tal y como puede proporcionar esta herramienta.

Otro dato para anotar es que este, al ser un problema con una dimensionalidad comparativamente alta con otros problemas estructurales ($d = 6$), el vector t_2 tiende a tener una distribución normal estándar mientras que el vector t_1 empieza a alejarse del origen de coordenadas, formando, de esta manera, una nube de datos de forma redondeada.

A continuación se muestra una tabla con los datos que se obtendrían de este gráfico. Para este procedimiento se escogen tres datos ubicados de manera aleatoria y se obtienen los valores para \mathbf{z}^*, β y los valores reales de las variables respectiva

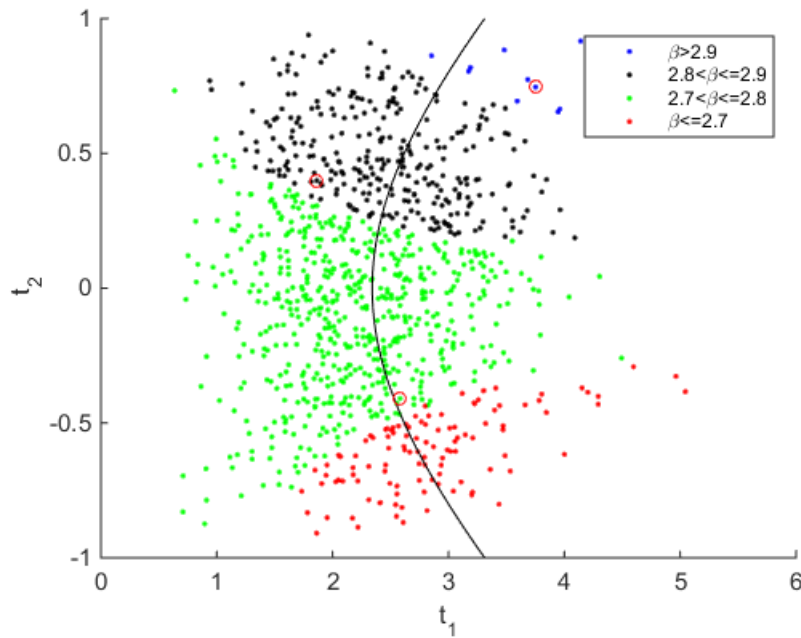


Figura 3.3: Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad.

Cuadro 3.2: Datos de puntos seleccionados en gráfico

Punto	z^*	β
1	$[-1.7115, 2.7526, -0.3384, -0.2698, -1.7745, 0.4807]$	2.9201
2	$[0.5377, 0.6737, 0.2962, 0.8706, 1.3056, -0.4277]$	2.8085
3	$[1.8339, -0.6691, 1.2008, 0.3308, 0.9840, -0.5794]$	2.7102

A los cuales corresponden los siguientes valores en coordenadas naturales:

Cuadro 3.3: Datos de puntos seleccionados en gráfico en coordenadas naturales.

Punto	Variables
1	$[1.2022 \times 10^6, 4.9047 \times 10^3, 1.9932 \times 10^4, 9.8048 \times 10^3, 1.0223 \times 10^{10}, 0.4185]$
2	$[1.2141 \times 10^6, 4.8920 \times 10^3, 2.0059 \times 10^4, 9.9274 \times 10^3, 1.0531 \times 10^{10}, 0.4147]$
3	$[1.2206 \times 10^6, 4.9433 \times 10^3, 2.0240 \times 10^4, 9.8769 \times 10^3, 1.0498 \times 10^{10}, 0.4141]$

3.3.2. Una viga en voladizo

Se tiene una viga en voladizo con sección transversal tubular de sección transversal con diámetro D la cual está empotrada en uno de sus extremos y está sometida a dos cargas F_1 y F_2 las cuales están inclinadas θ_1 y θ_2 aplicadas a una distancia L_1 y L_2 del empotramiento, respectivamente y a dos cargas concentradas en el extremo libre de la viga P y T las cuales ejercen tracción sobre la

misma tal y como se puede observar en la figura 3.4.

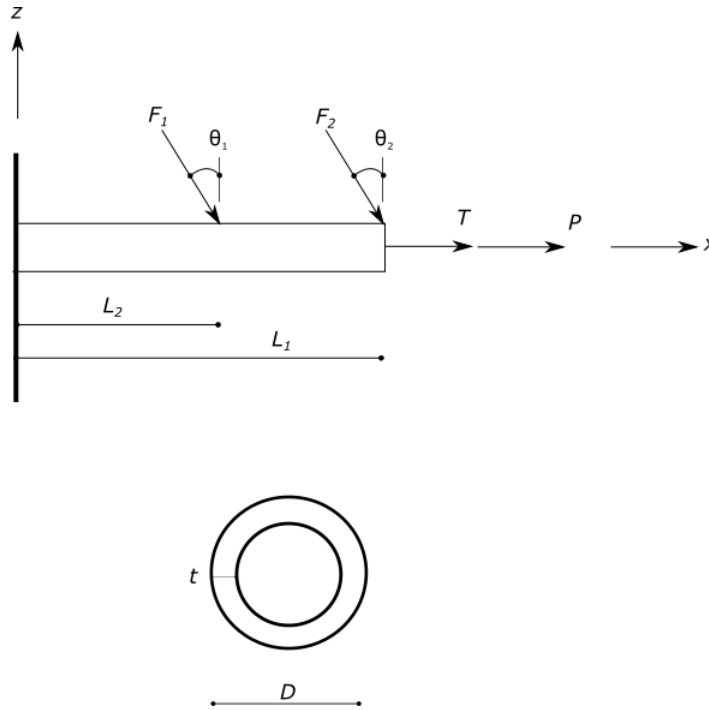


Figura 3.4: Viga en voladizo sometida a cargas

La función de estado límite es:

$$g(\mathbf{u}) = \sigma_y - \sigma_{\max} \quad (3.5)$$

En donde σ_{\max} es el esfuerzo de Von Mises:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}$$

En donde

$$\sigma_x = \frac{P + F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2}{A} + \frac{MD}{2I}$$

$$\tau_{xz} = \frac{TD}{4I}$$

$$M = F_1 L_1 \cos\theta_1 + F_2 L_2 \cos\theta_2$$

Las variables de diseño involucradas en el vector \mathbf{z} son: $\mathbf{z} : [\mu_{F_1}, \mu_{F_2}, \mu_P, \mu_T, \mu_\sigma]$ en donde se observa que la dimensionalidad del vector de variables de diseño $d = 5$ y la dimensionalidad del vector de variables involucradas en el ciclo de confiabilidad es de 6 conformadas por las variables

$[t, D, L_1, L_2, \theta_1, \theta_2]$ para una dimensionalidad del problema total de 11. Las variables que conforman el vector \mathbf{z} tienen una distribución normal la cual está descrita en la tabla 3.4:

Cuadro 3.4: Variables con distribución Normal en el ejercicio de viga en voladizo

	Variable	Intervalo de la media	Desviación Estándar
F_1	Normal	$[1.95, 2.05] \times 10^3$ kN	2×10^2 kN
F_2	Normal	$[2.9, 3.1] \times 10^4$ kN	3×10^2 kN
P	Normal	$[12.3, 12.7] \times 10^3$ kN	1×10^3 kN
T	Normal	[88, 92] Nm	9 Nm
σ	Normal	$[215, 225] \times 10^6$ MPa	22×10^6 MPa

Las variables restantes aleatorias involucradas en el cálculo de confiabilidad se enuncian como lo referencia 3.5, las cuales tienen una distribución de probabilidad es uniforme.

Cuadro 3.5: Variables involucradas en el cálculo de confiabilidad del sistema de viga en voladizo

Variable	Distribución	Rango
t	Uniforme	$[2.8, 3.2] \times 10^{-3}$ m
D	Uniforme	$[41.8, 42.2] \times 10^{-3}$ m
L_1	Uniforme	$[119.75, 120.25] \times 10^{-3}$ m
L_2	Uniforme	$[59.75, 60.25] \times 10^{-3}$ m
θ_1	Uniforme	[19, 21] deg
θ_2	Uniforme	[30, 35] deg

La función empleada para resolver el problema de confiabilidad inversa está descrita de la forma:

$$f(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* = \beta(\mathbf{z}) - 2.9$$

se obtiene que el vector de falla está representado por:

$$\mathbf{z}^* = [-0.6087, -0.5830, -0.1914, -0.0263, 1.7736]$$

Empleando 1000 datos para la representación del gráfico de confiabilidad se obtiene que este adquiere una forma redonda haciendo caso a la dimensionalidad del vector de falla que se trabaja que es de 5 tal y como se puede observar en la figura 3.5. Como en el caso de la columna esbelta, se puede dividir el gráfico de confiabilidad en diversas zonas de confiabilidad las cuales agrupan los puntos de acuerdo a su nivel de confiabilidad tal y como se puede observar en la figura 3.5 y que los puntos cada vez se acercan a cumplir las distribuciones esperadas para altas dimensiones y se

observa la hipérbola que ilustra la evolución del nivel de confiabilidad en el gráfico con respecto al vector de falla.

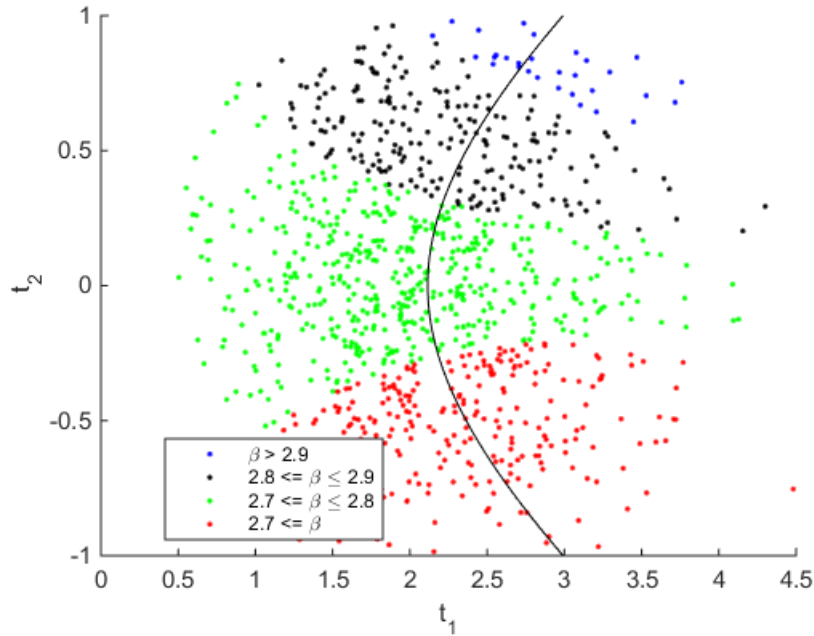


Figura 3.5: Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad en el gráfico de Confiabilidad.

3.3.3. Una cercha espacial

Se tiene una cercha como la de la figura 3.6 en el cual se tienen como variables de diseño las áreas transversales de las barras agrupadas en tres grupos: los radios del hexágono conforman un grupo, las barras que forman la figura de hexágono constituyen otro grupo y el resto de barras conforman el último grupo cuya distribución se ve reflejada en la tabla 5.7. Así, el vector de diseño \mathbf{z} tiene una dimensionalidad de $d = 3$ y las variables involucradas en el proceso de confiabilidad son $D = 22$ las cuales son las cargas aplicadas en los nudos que no están apoyados en las direcciones x , y y z y el módulo de elasticidad, plasmadas en la tabla 3.7. La función de estado límite está definida por:

$$g(\mathbf{u}) = 5.5 \times 10^{-3} - |\delta(\mathbf{u})|$$

En donde $\delta(\mathbf{u})$ representa el desplazamiento en dirección z del punto más alto de la cercha, en este caso, el centro del hexágono.

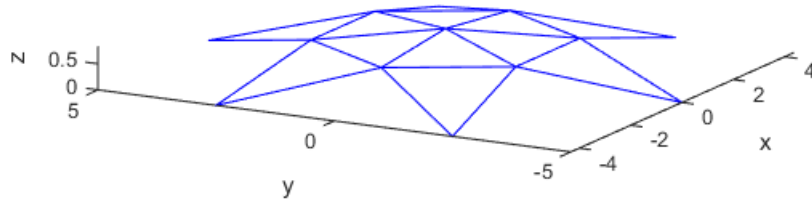


Figura 3.6: Una cercha espacial

Cuadro 3.6: Variables de diseño con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial

	Variable	Intervalo de la media	c.o.v
A_1	Normal	$[80, 120] \times 10^{-6}$ m	0.02
A_2	Normal	$[10, 30] \times 10^{-6}$ m	0.02
A_3	Normal	$[60, 100] \times 10^{-6}$ m	0.02

La función empleada para resolver el problema de confiabilidad inversa está descrita de la forma:

$$f(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* = \beta(\mathbf{z}) - 2.7$$

se obtiene que el vector de falla está representado por:

$$\mathbf{z}^* = [1.2084, 1.7360, 0.6856]$$

Empleando una cantidad de muestras para \mathbf{z} de $N = 100$ se obtiene el gráfico de la figura 3.7. Como se puede observar se evidencia la evolución de los niveles de confiabilidad a través de los puntos escogidos para hacer el gráfico de confiabilidad para el problema inverso y la separación de los puntos que tienen una confiabilidad superior a $\beta^* = 2.7$, es decir, de aquellos puntos que tienen una confiabilidad superior a la confiabilidad objetivo del resto de puntos. Esta evolución del nivel

Cuadro 3.7: Variables en el proceso de confiabilidad con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial

	Variable	Media	c.o.v	Dirección
P_1	Normal	0.5 kN	0.02	x
P_2	Normal	0.5 kN	0.02	y
P_3	Normal	-6 kN	0.01	z
P_4	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_5	Normal	0.3 kN	0.02	y
P_6	Normal	-3 kN	0.01	z
P_7	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_8	Normal	0.3 kN	0.02	y
P_9	Normal	-3 kN	0.01	z
P_{10}	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_{11}	Normal	0.3 N	0.02	y
P_{12}	Normal	-3 kN	0.01	z
P_{13}	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_{14}	Normal	0.3 kN	0.02	y
P_{15}	Normal	-3 kN	0.01	z
P_{16}	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_{17}	Normal	0.3 kN	0.02	y
P_{18}	Normal	-3 kN	0.01	z
P_{19}	Normal	0.3 kN	0.02	x
P_{20}	Normal	0.3 kN	0.02	y
P_{21}	Normal	-3 kN	0.01	z
E	Normal	205.8×10^7 MPa	0.05	-

de confiabilidad está guiada por la hipérbola de estructuración tal y como se espera según la teoría enunciada en el capítulo anterior.

3.3.4. La viga de Euler-Bernoulli resuelta por SFEM

Se tiene una viga del tipo Euler-Bernoulli empotrada en uno de sus extremos de longitud $l = 2.5$ m la cual está sometida a una carga distribuida a lo largo de la viga de $q = -1000$ N/m tal y como se puede ver en la figura y en la que se asume que el módulo de Young es aleatorio, el cual varía de acuerdo a una función de covarianza descrito por $C(x_1, x_2) = \exp(-|x_1 - x_2|/b)$ con $b = 1$, en el que $\mu_E = 27 \times 10^9$ Pa y $\sigma_E = 20 \times 10^8$ Pa. La viga está dividida en intervalos de 0.05 m.

La función de estado límite para este problema se tiene de la siguiente forma:

$$g(\mathbf{u}) = (3.0 \times 10^{-5}) - |\delta(\mathbf{u})| \quad (3.6)$$

En donde $\delta(\mathbf{u})$ representa el desplazamiento en el extremo libre de la viga expresado en metros

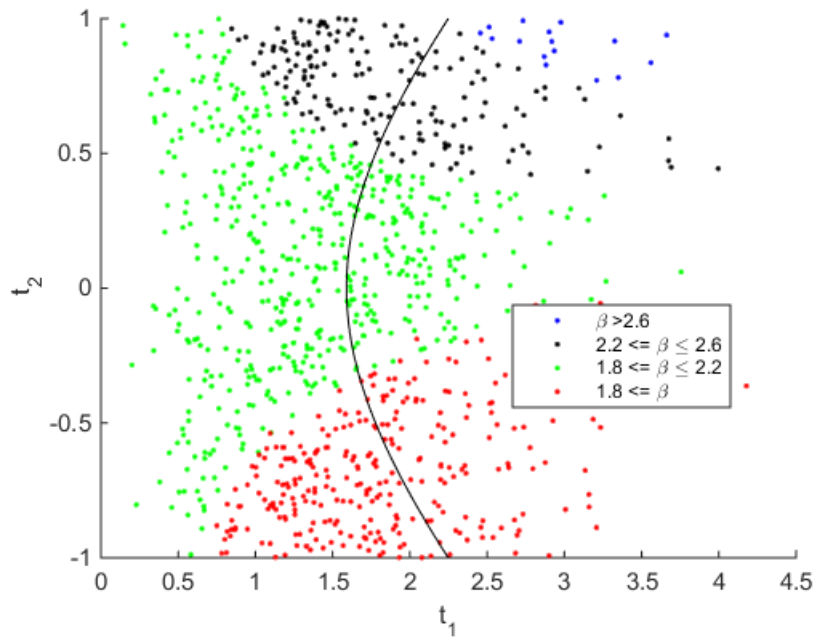


Figura 3.7: Clasificación de zonas según nivel de confiabilidad en el gráfico de Confiabilidad.

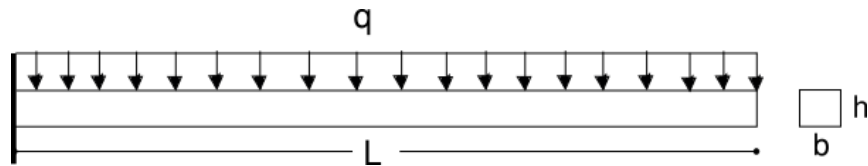


Figura 3.8: Viga De Euler Bernoulli.

(m).

En la solución de la viga de Euler-Bernoulli se emplean elementos finitos estocásticos con el método Monte Carlo en donde la matriz constitutiva se descompone en dos partes, una determinista y una con comportamiento aleatorio de la forma

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \theta) = H(\mathbf{x}, \theta) \mathbf{D}_0$$

En la que \mathbf{D}_0 representa la **matriz constitutiva determinista** [Oñate, 1995] y la función $H(\mathbf{x}, \theta)$ es la realización del campo aleatorio. Así, la matriz de rigidez para cada elemento finito empleada en la solución queda afectada por la aleatoriedad del sistema así

$$\mathbf{K}^e(\theta) = \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \theta) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \tag{3.7}$$

Empleando coordenadas naturales para la solución del problema se tiene

$$\mathbf{K}^e(\theta) = \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} H(\mathbf{x}(\xi, \eta), \theta_0) \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\xi, \eta) d\Omega_{\mathcal{R}} \quad (3.8)$$

Con el objetivo de programar el método de elementos finitos estocásticos se emplearon cuadraturas de Gauss-Legendre para la solución de la integral involucrada en la ecuación 3.8 por lo que se tendría

$$\mathbf{K}^e(\theta) \approx \sum_{m=1}^{N_{PGL}} \sum_{n=1}^{N_{PGL}} H(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_n), \theta_0) \mathbf{B}^T(\xi_m, \eta_n) \mathbf{D}_0 \mathbf{B}(\xi_m, \eta_n) |\mathbf{J}^e(\xi_m, \eta_n)| w_m w_n \quad (3.9)$$

en la que N_{PGL} es el número de puntos de integración que se van a emplear en el método de cuadraturas de Gauss-Legendre y (ξ_m, η_n) representan las coordenadas naturales y w_m y w_n son los pesos empleados según el número de puntos que se tengan en cada coordenada. La realización $H(\cdot)$ se representa por medio de la expansión truncada

$$\hat{H}(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_n), \theta_0) = \mu + \sum_{i=1}^M H_i(\mathbf{x}(\xi_i, \eta_i)) \omega_i(\theta_0) \quad (3.10)$$

en donde $M = 10$ y los coeficientes quedan representados de la siguiente manera

Cuadro 3.8: Descripción de los términos en expansión de Karhunen-Loève.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	1.3065	3.67	6.5846	9.632	12.7232	15.8341	18.9549	22.0817	25.2120	28.3444

Las variables de diseño, es decir, las que conforman el vector \mathbf{z} a trabajar en el problema de confiabilidad inversa son b y h los cuales tienen una distribución normal están construidos de esta manera:

Cuadro 3.9: Descripción de las variables a trabajar en el problema de Confiabilidad inversa.

Variable	Intervalo de la media(m ²)	Desviación estándar(m ²)
b	[0.70, 0.75]	0.09
h	[0.70, 0.75]	0.09

En este caso la función está representada de la presente manera:

$$f(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - 3.0$$

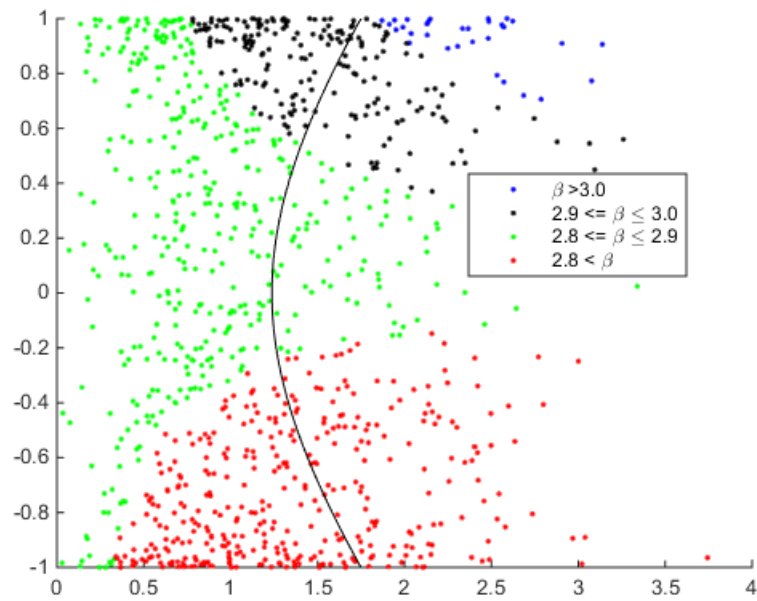


Figura 3.9: Gráfico de confiabilidad del problema de confiabilidad inversa.

Empleando el método de FORM inverso para obtener el vector de falla se obtiene que:

$$\mathbf{z}^* = [0.4333, 1.8128]$$

Como se puede observar en la figura 3.9, el gráfico de confiabilidad generado con 1000 puntos muestra una clara separación entre zonas de confiabilidad, mostrando así que el gráfico de confiabilidad también se aplica para problemas cuya solución se aborda desde el punto de vista de SFEM, es decir, que presenta cierto grado de aleatoriedad en el sistema. Así mismo se puede observar que en este caso, al tenerse dos variables como objeto de estudio el gráfico adquiere formas esperadas como se puede observar en la figura 3.9 y los datos presentes en las variables tienen las distribuciones esperadas.

CAPÍTULO 4

OPTIMIZACIÓN BASADA EN CONFIABILIDAD



Figura 4.1: Sismo de Taiwan. 2016 [Santana, 2016]

4.1. Definición

La Optimización basada en Confiabilidad (o RBO por sus siglas en inglés *Reliability-based optimization*)¹ es una metodología creada para generar un diseño óptimo que sea confiable con una

¹También es referida como RBDO (*Reliability- Based Design Optimization*) en la literatura citada [Sobieszcanski-Sobieski et al., 2015]

probabilidad de falla muy baja teniendo en cuenta un nivel de confiabilidad preestablecido de acuerdo a unas restricciones geométricas o físicas [Sobieszczanski-Sobieski et al., 2015]. Se debe diferenciar entre el diseño determinístico y el diseño basado en optimización. Como se observa en la figura 4.4 el diseño determinista basa su proceso en la existencia de certidumbre en las variables del sistema, además realiza la elección y actualización de las variables de salida del diseño basada en la experiencia del diseñador o de acuerdo a experiencias pasadas de estructuras similares; por otro parte, el diseño basado en la optimización utiliza conceptos de optimización para actualizar las variables a diseñar en el proceso iterativo, además permite considerar incertidumbre en las variables, lo cual hace que la elección de las variables de diseño esté basado en el criterio del diseñador teniendo adicionalmente el conocimiento en la incertidumbre de las variables la cual puede ser modelada mediante la implementación de modelos probabilísticos [Arora, 2012].

Así, el diseño empleando conceptos y procedimientos relacionados con el campo de la optimización se hace más confiable que el realizado empleando métodos determinísticos. Para resolver este tipo de diseños y problemas, específicamente en el diseño estructural, el RBO constituye una herramienta poderosa para resolverlos [Valdebenito and Schuëller, 2010] pues determina la configuración estructural de una estructura de acuerdo a un criterio predefinido de diseño, el cual podría, por ejemplo, ser el peso de la edificación, teniendo en cuenta las incertidumbres en las variables del problema.

El problema de RBO consiste en optimizar una función de mérito o **función de costo** la cual debe cumplir con unas restricciones tanto de carácter probabilístico como determinista con variables de entrada denominadas **variables de diseño** [Nguyen et al., 2010]. La formulación queda de la siguiente manera: Sea $f(\mathbf{d})$ una función de costo definida por variables de diseño \mathbf{d} , con unas restricciones $h(\mathbf{d})$, la solución empleando RBO sería :

$$\begin{aligned}
 & \text{Hallar } \mathbf{d} \\
 & \text{que minimice } f(\mathbf{d}) \\
 & \text{Tal que } P_f(g(\mathbf{d})) \leq P_f^* \\
 & \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \\
 & h_j(\mathbf{d}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde P_f^* constituye la probabilidad de falla objetivo del sistema ya sea por condiciones de serviciabilidad, fatiga, colapso u otros elementos que puedan condicionar el funcionamiento de la

estructura [Gasser and Schuëller, 1997] y $\mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U$ son delimitaciones de las variables de diseño.

4.1.1. Clasificación de problemas asociados a RBO

El problema de confiabilidad de tipo RBO puede clasificarse de acuerdo a los parámetros de diseño involucrados de la siguiente manera [Thoft-Christensen, 1991] :

1. **Nivel 1: Optimización de la sección transversal (*Cross-sectional optimization*)**

En este nivel se optimiza el parámetro de diseño relacionado con el dimensionamiento físico de los elementos involucrados en el problema estructural (*Sizing design variables*).

2. **Nivel 2: Optimización de la forma estructural (*Shape optimization*)**

Se optimiza los parámetros de diseño relacionados con el dimensionamiento de los elementos físicos y la forma óptima de la configuración estructural (*Shape design optimization*)

3. **Nivel 3: Optimización de la configuración (*Configuration optimization*)**

Se tienen los dos niveles de optimización anteriores con adición de las variables de configuración del sistema

4. **Nivel 4: Configuración total (*Total Configuration*)**

Es la compilación de todos los niveles de optimización incluyendo variables asociadas a los materiales que se trabajan

4.1.2. Solución de problemas asociados a RBO

Para solucionar el problema de RBO existen diversos métodos asociados a la forma de solución del problema, los cuales se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Implementación con doble ciclo
- Transformación de doble ciclo a un ciclo sencillo
- Desarrollos desacoplados

Todos estos métodos implementan elementos asociados a las técnicas de confiabilidad tales como FORM, SORM y Método de Reducción dimensional, los cuales involucran tanto la existencia del índice de confiabilidad β , como la del punto óptimo para la solución del problema de RBO de una manera eficiente. [Valdebenito and Schuëller, 2010].

Reliability Index Approach (RIA)	Performance Measure Approach (PMA)
$\min f(\mathbf{z})$ <p>Donde \mathbf{z} son las variables de diseño y \mathbf{p} son unas variables predeterminadas tal que</p> $\beta(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \geq \beta^*$ <p>con $\min \ \mathbf{z}\$ Sujeto a que : $h(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \leq 0$ [Deodatis et al., 2014], [Nguyen et al., 2010]</p>	$\min f(\mathbf{z})$ <p>con $\beta(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \min \ \mathbf{z}\$ sujeto a que $h(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \geq 0$, en la que $h(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ es la función de estado límite para el cálculo de β [Deodatis et al., 2014], [Nguyen et al., 2010].</p>

Cuadro 4.1: Métodos que emplean un ciclo doble de iteración [Valdebenito and Schuëller, 2010].

Iteración empleando un ciclo doble. [Valdebenito and Schuëller, 2010]

Esta es una forma directa de solucionar un problema asociado a RBO al estimar la confiabilidad del sistema para cada conjunto de variables de diseño que se van a utilizar para la optimización del algoritmo. Este método a su vez se divide en dos tipos de soluciones: *Reliability Index Approach (RIA)* y *Performance Measure Approach (PMA)*. Estos procedimientos involucran ciclos anidados de procedimientos relacionados con confiabilidad estructural (FORM, SORM) para solucionar el problema de confiabilidad. Este tipo de procedimiento es la forma tradicional de desarrollar el problema de RBO. Se caracteriza por anidar el análisis de confiabilidad en el proceso de optimización y se puede usar para los problemas de RBDO basado en RIA y RBDO basado en PMA. Generalmente se emplea el segundo procedimiento sobre el primero en algunos casos, e.g., los que contienen variables con distribuciones tipo Gumbel aunque no sea tan eficiente para aplicaciones en grandes dimensiones [Nguyen et al., 2010]. Ver Figura 4.2

Cabe anotar que este método es costoso computacionalmente y por esta razón se han desarrollado métodos para disminuir tanto el costo computacional como el tiempo empleado para realizar este cálculo. [Nguyen et al., 2010]

Iteración empleando un ciclo sencillo [Valdebenito and Schuëller, 2010]

En este tipo de procedimiento se busca evadir el ciclo interno que contiene por aproximaciones al punto de diseño empleando condiciones y procedimientos como, por ejemplo, las condiciones de tipo KKT² y los multiplicadores de Lagrange. De esta manera no hay la necesidad de evaluar

²KKT: Son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, empleadas en teoría de optimización

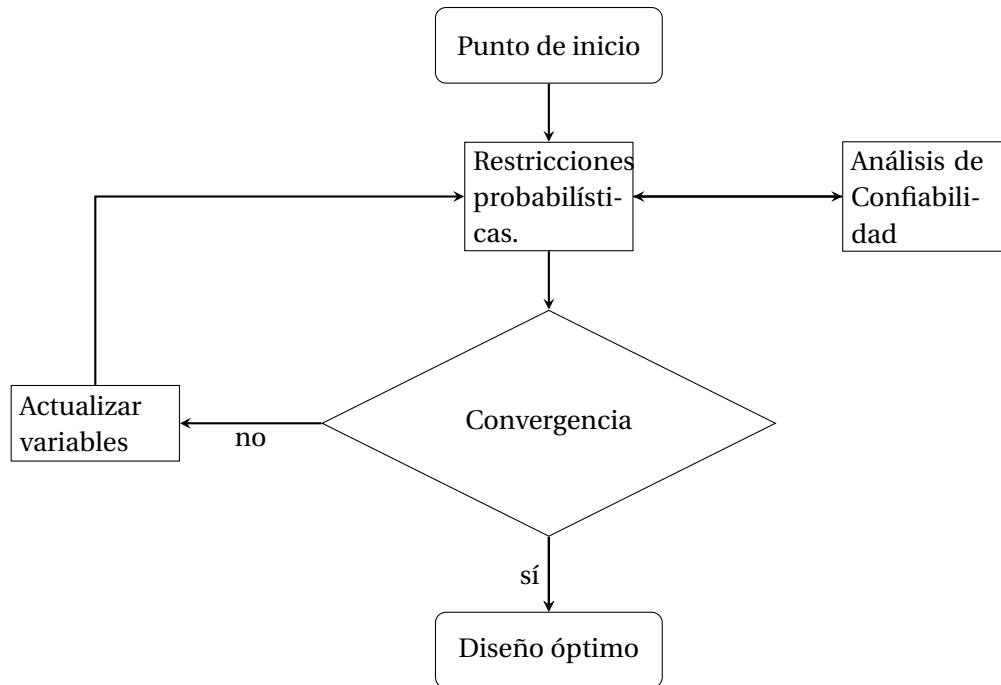


Figura 4.2: Diseño simplificado de un RBDO de doble ciclo anidado [Nguyen et al., 2010]

el análisis de confiabilidad y el doble ciclo es convertido en un ciclo sencillo de optimización [Yu, 2011]

Desarrollos Desacoplados

Consiste en emplear una serie de optimizaciones determinísticas seguidas por sus correspondientes análisis de confiabilidad [Deodatis et al., 2014]. De esta manera se evita la realización de los procesos de doble ciclo pues no se consideran necesario el desarrollo de un análisis completo de confiabilidad en cada actualización de las variables para cada iteración [Valdebenito and Schuëller, 2010]. Se pueden usar métodos como la programación lineal para abordar el problema de confiabilidad [Weiji and Li, 1994], descomposición de Bender [Mínguez and Castillo, 2009], optimización secuencial y evaluación de confiabilidad³ (SORA) [Du and Chen, 2002], aproximación ponderada de la probabilidad de falla [Valdebenito and Schuëller, 2011], entre otros, para lograr métodos más eficientes.

Se basa en la idea de separar los procesos de análisis de confiabilidad y del ciclo de optimización, permitiendo la opción de emplear programas computacionales destinados a la optimización sin

³En inglés: *Sequential optimization and reliability assessment*

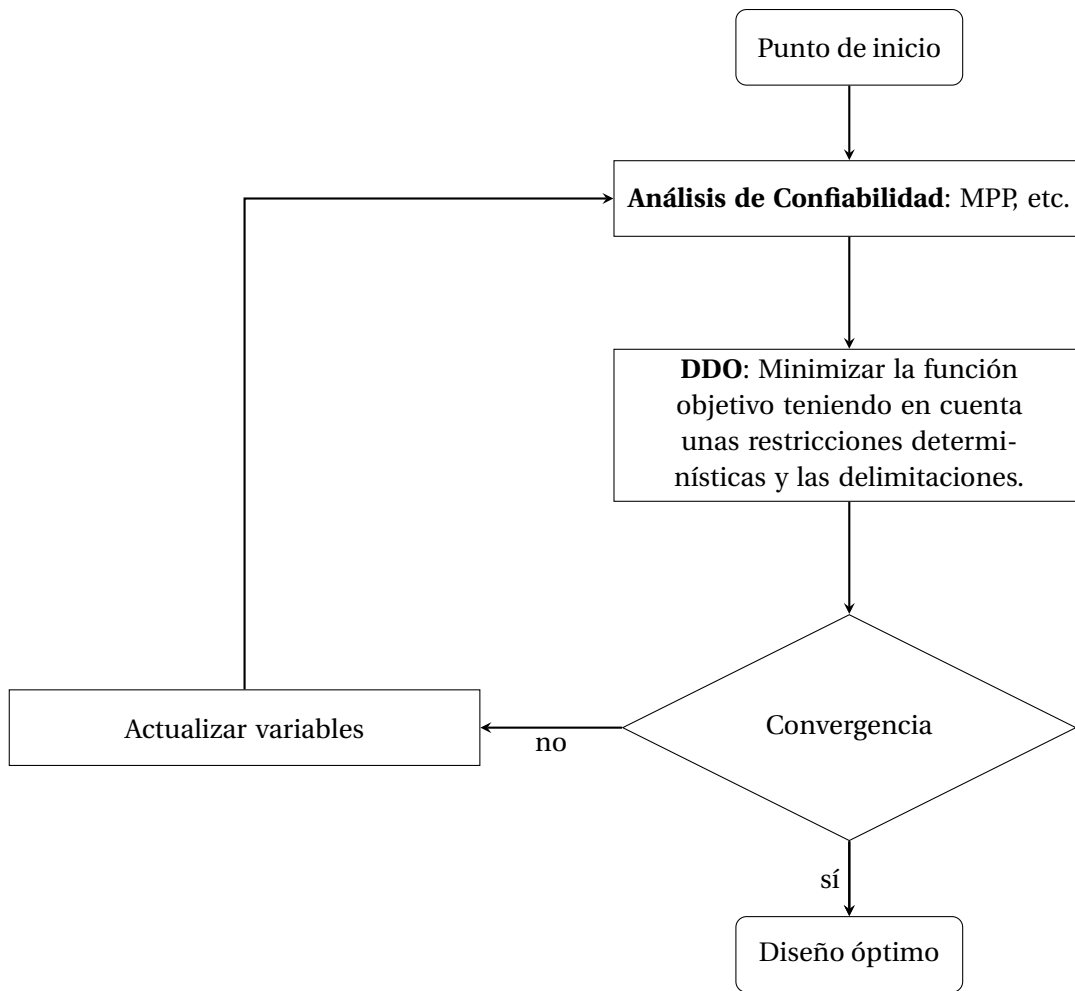


Figura 4.3: Diseño empleando un ciclo sencillo [Nguyen et al., 2010]

necesidad de hacer cambios en el código, de esta manera, el ciclo de optimización y de confiabilidad son desarrollados de manera secuencial hasta alcanzar la convergencia [Nguyen et al., 2010]. Este ciclo se puede observar de manera más clara en la Figura 4.3.

4.2. Desarrollo del problema de RBO

Este tipo de problemas surge como respuesta a la necesidad de diseñar estructuras que tengan un nivel determinado de confiabilidad, traducido en probabilidades de falla específicas, teniendo en cuenta estados de serviciabilidad y estados últimos de la estructura [Frangopol, 1985]. Es así como se refieren investigaciones iniciales como [James W. Davidson and Hart, 1978] y la encontrada en [James W. Davidson and Hart, 1980] empiezan abordando la optimización de estructuras teniendo como función a optimizar el peso de la estructura sujeto a sismos bajo ciertas condi-

deraciones probabilísticas todo esto ante la necesidad de mejorar las técnicas de diseño pues las herramientas computacionales y la teoría de confiabilidad estaban avanzando vertiginosamente y era imperativa la implementación de herramientas más precisas y eficaces para obtener resultados más confiables; todo lo anterior se empieza a aplicar a herramientas computacionales que empiezan a surgir en los años 1990 y posteriores con [Nakib and Frangopol, 1990], [Kim and Kwak, 1996] y [Rajagopalan and Grandhi, 1996] buscando no solamente eficiencia en los diseños sino también darle la capacidad al usuario de ser parte del proceso, permitirle intervenir en ciertos estados del cálculo para el entendimiento de los algoritmos implementados.

Los procedimientos de RBDO han sido combinados con diferentes técnicas de optimización tales como la optimización no lineal [Hu et al., 2010], optimización secuencial [Cho and Lee, 2011], optimización por enjambre de partículas [Arya et al., 2012], entre otros métodos usados en optimización [Shahraki and Noorossana, 2014] o una combinación de varios métodos [Zhang et al., 2013] con el fin de mejorar el proceso de optimización involucrado en el hallazgo de las variables de diseño. También se han implementado mejoras en el proceso de confiabilidad intrínseco en los problemas asociados a RBDO como por ejemplo [Mínguez and Castillo, 2009] con el fin de incrementar eficiencia en el proceso de diseño bajo criterios probabilísticos.

Estos métodos han sido aplicados en el diseño involucrando diversos materiales usados ampliamente en diseños estructurales y combinaciones de estos como por ejemplo el concreto pretensado [Barakat et al., 2004], concreto reforzado [Biondini and Frangopol, 2009], materiales compuestos [Miki et al., 1997], entre otros, además de dar solución a problemas complejos como [Song et al., 2017] mostrando la efectividad de diversos métodos desarrollados en el marco de la solución del problema de RBDO en diversas circunstancias. Hay que anotar que la teoría desarrollada alrededor de la optimización basada en confiabilidad ha servido para construir muchos problemas como por ejemplo los relacionados con SRO como se verá más adelante, y de la optimización topológica, el cual no se encuentra entre los alcances de esta tesis.

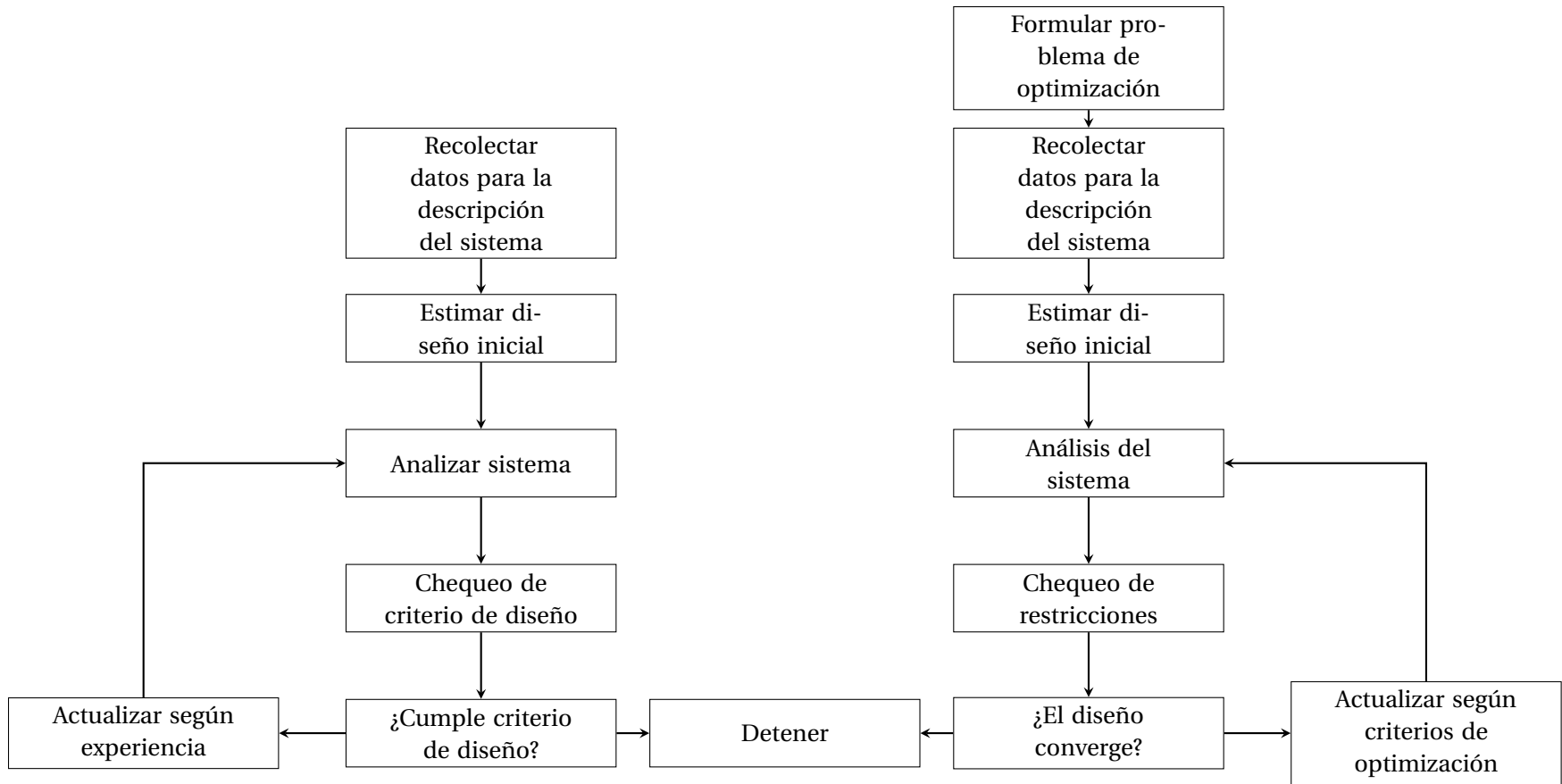


Figura 4.4: Comparación entre DDO y el diseño empleando procesos de optimización [Arora, 2012]

4.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad.

Retomando la formulación del problema se tiene que la función de costo a optimizar es una función relacionada con alguna variable de diseño la cual se puede definir como una variable con distribución normal truncada de acuerdo a la regla del 3σ . Así, el problema presentado en 4.1 se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \text{Hallar } \mathbf{d}(\mathbf{z}) \\
 & \text{que minimice } f(\mathbf{d}(\mathbf{z})) \\
 & \text{Tal que } P_f(g(\mathbf{d}(\mathbf{z}))) \leq P_f^* \\
 & \mathbf{d}^L(\mathbf{z}) \leq \mathbf{d}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{d}^U(\mathbf{z}) \\
 & h_j(\mathbf{d}(\mathbf{z})) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por lo tanto el gráfico de confiabilidad estaría construido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \|\mathbf{z}\| \\
 t_2 &= \cos(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

En donde \mathbf{z}^* representa el vector que constituye la solución del sistema planteado en 4.2, es decir, representa el vector que minimiza la función $f(\cdot)$. El gráfico de confiabilidad permite la separación de los datos trabajados en zonas de clasificación de acuerdo a la evaluación de la probabilidad de falla, separando los datos que tienen mayor probabilidad de falla que la probabilidad de falla objetivo P^* de los datos que poseen una probabilidad de falla inferior a P^* . Esta clasificación se puede realizar ya que las variables de diseño del problema tienen una distribución normal que permiten la representación de los datos en un gráfico polar y la separación entre zonas de probabilidad dado que el vector \mathbf{z}^* , que es un vector de referencia, tiene relación con la P^* dada las restricciones del problema dadas en (4.2).

4.4. Ejemplos

A continuación se mostrarán algunos ejemplos que ayudarán a observar las aplicaciones de este gráfico a la solución de problemas de RBO

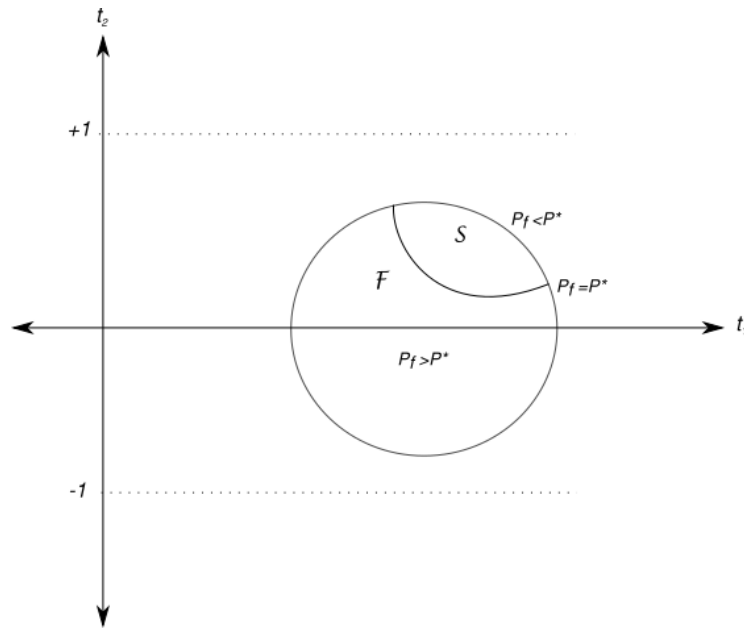


Figura 4.5: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO.

4.4.1. Una columna esbelta en pandeo

Retomando el ejemplo 1 del capítulo anterior, se tiene una columna sometida a la misma configuración de aplicación de fuerzas apoyada sobre igual condición de apoyo la cual está en proceso de pandeo. En este caso tendrá una función objetivo a optimizar la cual se expresa como:

$$f(L, I) = 1.2L\sqrt{I}$$

con una restricción de:

$$h(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* \leq 0$$

En la que $\beta^* = 2.8$

Las variables aleatorias a optimizar están restringidas en un intervalo de acuerdo a la Tabla 4.2, es decir, estas están relacionadas con el vector con distribución normal truncada \mathbf{z} y por lo tanto estarán relacionadas con $\mathbf{z}: [L, I]$, por lo que el problema de RBDO tiene una dimensionalidad de 2 para las variables objeto de optimización y las variables de diseño están definidas de acuerdo a Tabla 4.3, por lo que el problema tiene una dimensionalidad total de $d = 6$.

De acuerdo a la información suministrada se obtiene un vector \mathbf{z}^* equivalente a:

$$\mathbf{z}^* = [2.40766, 1.83389]$$

Variable	Media	Desviación estándar
P	$0.99 \times 10^6 \text{N}$	$\sigma_P = 2 \times 10^5 \text{N}$
H	$0.97 \times 10^4 \text{ N}$	$\sigma_H = 2 \times 10^3 \text{N}$
E	$1.94 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_E = 2 \times 10^3 \text{N/mm}^2$
S	0.404N-m	$\sigma_S = 0.0417 \text{N-m}$

Cuadro 4.2: Definición de variables aleatorias para el problema de RBDO en una columna esbelta

Variable	Media
L	$[1.02, 1.07] \times 10^4 \text{mm}$
I	$[0.108, 0.115] \times 10^{11} \text{mm}^4$

Cuadro 4.3: Definición de variables aleatorias de diseño para el problema de RBDO en una columna esbelta

con este vector se construye el gráfico de confiabilidad con las variables \mathbf{z} para crear el sistema coordinado formado por las variables t_1 y t_2 . Con una cantidad de datos equivalente a $N = 1000$ se obtiene la gráfica plasmada en la Figura 4.6. A partir de esta figura se pueden tener dos anotaciones:

- El gráfico, al tener dos variables de optimización, como lo son las variables L e I , pierde la forma circular obtenida en los gráficos aplicados a otros problemas y tiene a tener una forma rectangular. Esto significa que la variable t_2 tendrá una distribución de probabilidad cuya media estará más cercana al eje de t_2 y existirán puntos que estarán cerca de los límites $t_2 \in [-1, +1]$ como se puede ver en el gráfico 4.6.
- El gráfico de confiabilidad en este caso también permite la clasificación de los datos usados para la construcción del mismo tanto en zonas seguras como de zonas no seguras medidas con respecto a la función que se ha de optimizar, en este caso, la función $f(L, I)$.

4.4.2. Una viga en voladizo

Se tiene una viga en voladizo con las características del problema plasmado en Subsección 4.4.1 con un $\beta = 2.5$ y una función de costo:

$$f(D, t) = 3.14tD^2$$

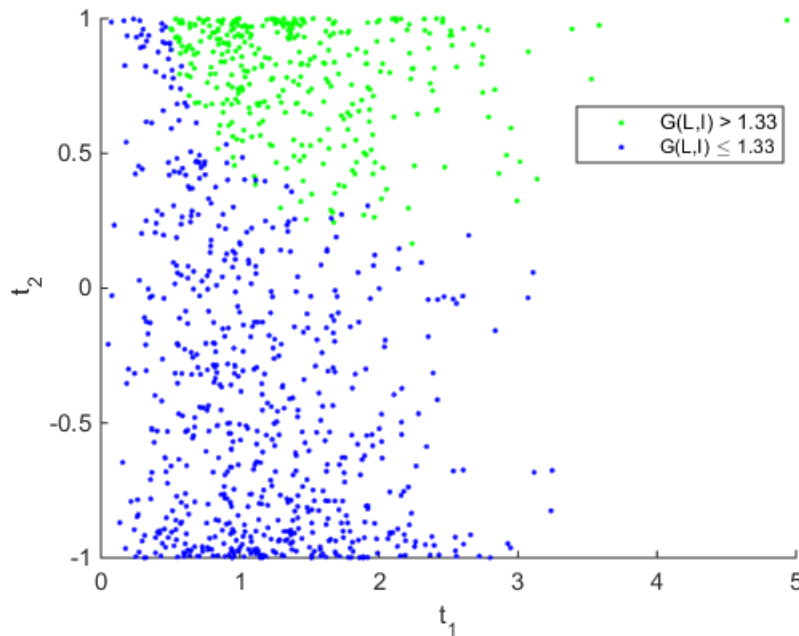


Figura 4.6: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de una columna esbelta.

y una restricción:

$$h(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - 2.5 \leq 0$$

Además tiene una restricción de rango para las variables a optimizar:

$$t \in [2.8 \times 10^{-3}, 3.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

$$D \in [41.8 \times 10^{-3}, 42.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

Así, el problema contaría con una dimensionalidad total de $d = 11$ y una dimensionalidad del vector de diseño objeto de optimización de $d = 2$ dada por las , descrita de la siguiente manera:

- Los elementos que no están involucrados de manera directa en la función de optimización pero que se encuentran en el cálculo de la restricción se encuentran definidos por los elementos consignados en las tablas 4.4 y 4.5.
- Las variables a optimizar son las variables t y D , las cuales obedecen a una distribución normal estándar truncada de acuerdo a la regla de 3σ , las cuales están descritas en la tabla 4.6.

Variable	Media	Desviación estándar
F_1	$2.05 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_{F_1} = 2 \times 10^2 \text{ kN}$
F_2	$3.1 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_{F_2} = 3 \times 10^2 \text{ kN}$
P	$12.7 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_P = 1 \times 10^3 \text{ kN}$
T	92 Nm	$\sigma_T = 9 \text{ Nm}$
σ_y	$225 \times 10^6 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 22 \times 10^6 \text{ MPa}$

Cuadro 4.4: Definición de variables aleatorias para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal

Variable	Rango
L_1	$[119.75, 120.25] \times 10^{-3} \text{ m}$
L_2	$[59.75, 60.25] \times 10^{-3} \text{ m}$
θ_1	$[19, 21]^\circ$
θ_1	$[19, 21]^\circ$

Cuadro 4.5: Definición de variables aleatorias para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución uniforme

De acuerdo con la información suministrada se tiene que \mathbf{z}_f equivale a:

$$\mathbf{z}^* = [0.97760, 0.19529]$$

con este vector de falla se construye el gráfico de confiabilidad con las variables \mathbf{z} para crear el espacio $\mathbf{t} = \{t_1, t_2\}$ y con una cantidad de $N = 1000$ se obtiene el gráfico 4.7.

En este gráfico se dividen los puntos en dos zonas en las cuales la función es mayor a un límite denominado **zona de mayor costo** y otra zona en la que se encuentran todos aquellos puntos en los que la función objeto es de igual o menos valor al límite el cual se denomina **zona de menor costo**; de la misma manera se puede observar que al igual que en el ejemplo de la 4.4.1 el gráfico no posee una forma redonda sino que los puntos tienden a concentrarse alrededor de los ejes t_1 y t_2 y en las fronteras $t_2 \in [-1, +1]$ tal y como se puede observar en .

Variable	Intervalo de la variable
t	$[2.8, 3.2] \times 10^{-3} \text{ m}$
D	$[41.8, 42.2] \times 10^{-3} \text{ m}$

Cuadro 4.6: Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal estándar truncada.

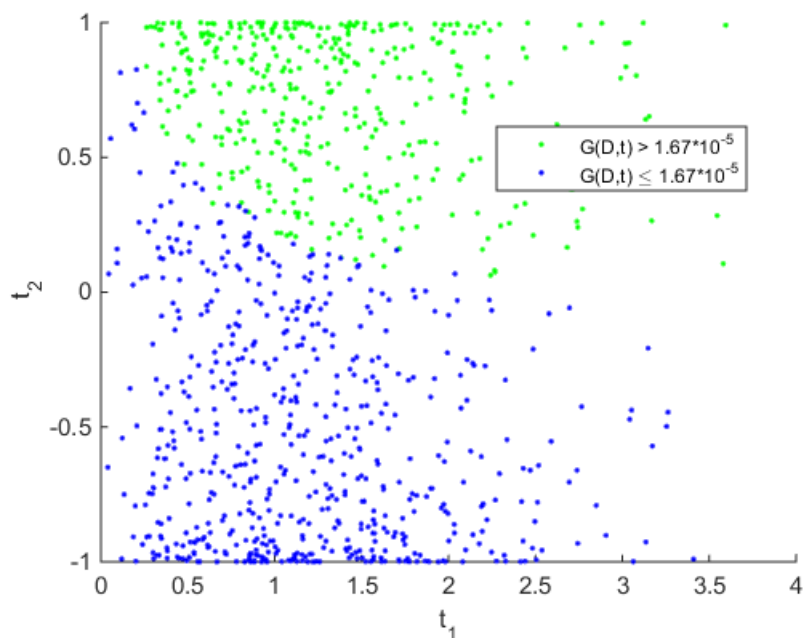


Figura 4.7: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la viga: Clasificación de puntos según función límite.

4.4.3. Una cercha espacial

Retomando el ejemplo 3 de la sección anterior se tiene la cercha espacial sometida a la misma configuración de carga y la misma característica de material empleada en la Tabla 1.8. En este caso la función que se va a optimizar teniendo las características de RBDO está definida de la siguiente manera:

$$f(A_1, A_2, A_3) = A_1^2 - A_2(A_3 - A_1) + A_3^2 \quad (4.4)$$

En que las variables de diseño se encuentran en los intervalos descritos en la Tabla 4.7

Variable	Distribución	Intervalo de la variable
A_1	Normal Truncada	$[80, 120] \times 10^{-6}$ m
A_2	Normal Truncada	$[10, 30] \times 10^{-6}$ m
A_3	Normal Truncada	$[60, 100] \times 10^{-6}$ m

Cuadro 4.7: Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de RBDO. Estas variables tienen distribución normal estándar truncada.

con una restricción de probabilidad de

$$h(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* = \beta(\mathbf{z}) - 3.1 \quad (4.5)$$

Realizando la optimización de la función 4.7 se tiene que el vector de falla es

$$\mathbf{z}^* = [2.4410, 3.0000, 1.0176] \quad (4.6)$$

El gráfico de confiabilidad ha sido construido usando $N = 1000$ usando el vector \mathbf{z}^* hallado anteriormente usando como parámetro de separación de los datos a $P_f = 0.0139$ que es equivalente a un $\beta = 2.1$. Los datos se pueden observar en la figura 4.9 y P_f fue calculado como $P_f(\mathbf{z}) = \Phi(-\beta)$. En el gráfico se ve la separación entre los datos que tienen probabilidades de falla menores a P_f ubicados en la parte superior derecha y de los datos que tienen una probabilidad de falla superior a la P_f .

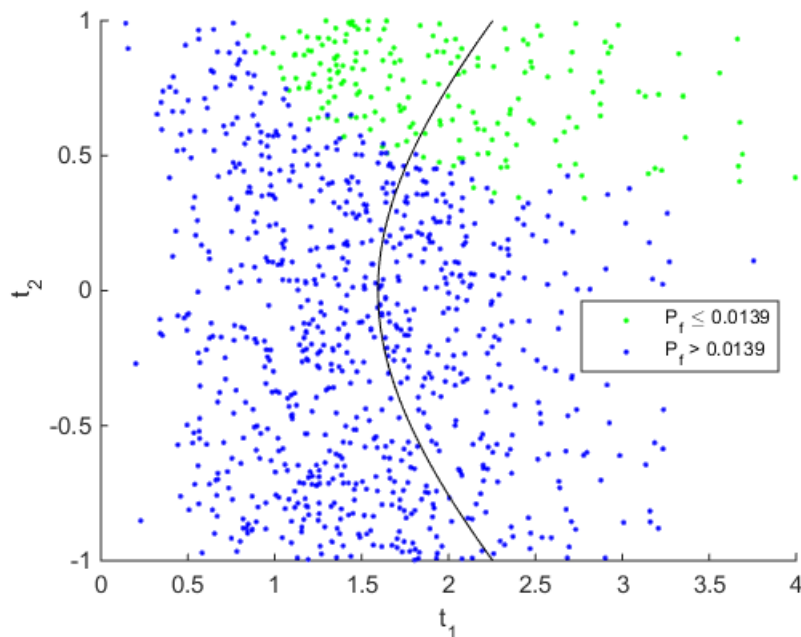


Figura 4.8: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la cercha: Clasificación de puntos según probabilidad de falla.

4.4.4. La viga de Euler-Bernoulli resuelta por SFEM

Se toman las características de aplicación de carga, apoyos y de variabilidad del material de la viga empotrada que se encuentra en el problema 4 del capítulo anterior. Las variables de diseño, es decir, las que conforman el vector \mathbf{z} a trabajar en el problema de RBDO son b y h los cuales tienen una distribución normal los cuales están contruidos de esta manera:

Cuadro 4.8: Descripción de las variables a trabajar en el problema de RBDO.

Variable	Distribución de la variable	Intervalo de variable(m)
b	Normal truncada	[0.70, 0.75]
h	Normal truncada	[0.70, 0.75]

Y la función a optimizar queda representada como:

$$f(b, h) = bh \quad (4.7)$$

con una restricción de probabilidad de

$$h(\mathbf{z}) = \beta(\mathbf{z}) - \beta^* = \beta(\mathbf{z}) - 3.15 \quad (4.8)$$

Por lo que el vector de falla estaría dado por

$$\mathbf{z}^* = [2.7329, 2.9370] \quad (4.9)$$

El gráfico de confiabilidad ha sido construido empleando un número de datos $N = 1000$ y un límite de $f(b, h) = 0.53$. Así, el gráfico, al igual que en los casos con sistemas deterministas, genera las dos zonas de separación en donde se encuentran, de un lado, los datos que tienen un valor de función inferior a la frontera $f(b, h) = 0.53$ y por otro lado los datos que tienen un valor de función mayor que esta, mostrando que el gráfico de confiabilidad tiene usos también en el campo de estructuras analizadas empleando el método de elementos finitos estocásticos.

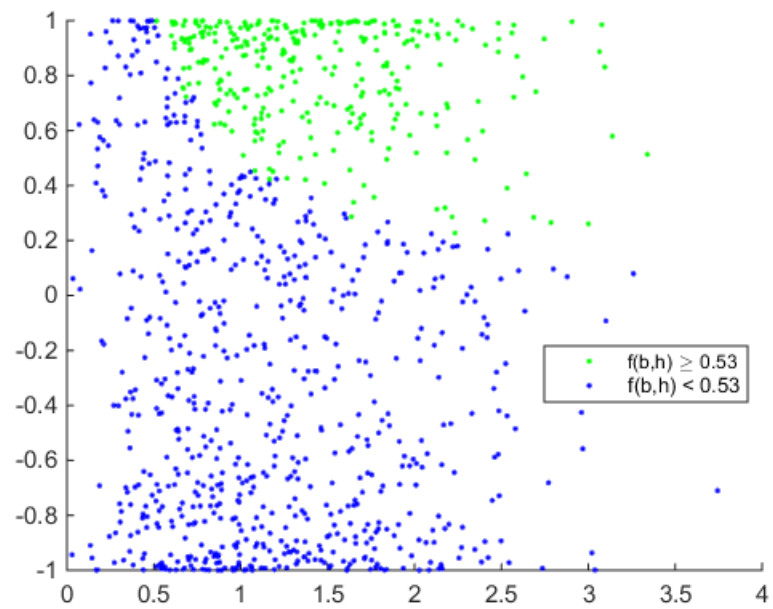


Figura 4.9: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de RBDO de la viga: Clasificación de puntos según función.

CAPÍTULO 5

OPTIMIZACIÓN DEL RIESGO ESTRUCTURAL (RO)

5.1. Definición

Los problemas asociados a RO representan la optimización del costo final esperado de una estructura la cual, para alcanzar una eficiencia deseada debe cumplir con unos parámetros mecánicos, los cuales son hallados por la solución de un problema del tipo RBO, pues el objetivo de un diseño estructural comprende fines económicos y de seguridad [Beck and de Santana Gomes, 2012]. Lo que hacen los problemas asociados al RO es acrecentar el objetivo de la optimización por RBO, involucrando a los objetivos de seguridad física los asociados a la economía [Gomes and Beck, 2016]. Ahora, el incremento de la eficiencia implica el incremento de los costos, lo cual no constituye el objeto de la optimización y al pretender bajar los costos de construcción y mantenimiento de cualquier estructura se podría ver comprometida la seguridad tanto en estado de serviciabilidad como en estado último del elemento a diseñar y cuyo problema puede ser resuelto mediante la implementación de teoría de optimización [Beck and de Santana Gomes, 2012].

Así, RO podría definirse como:

RO^a es la evaluación y minimización de los costos esperados con el objetivo de tener un nivel de confiabilidad deseado teniendo en cuenta incertidumbres en el modelo del sistema [Beck et al., 2012].

^aRO: *Risk Optimization* la cual se encuentra en diversas fuentes como *Structural Risk Optimization* (SRO)

Tanto los problemas relacionados con RBO como con RO están ligados a problemas con alta complejidad computacional para su solución pues muchas veces tienen involucrados ciclos relacio-

nados con análisis de confiabilidad y optimización, los cuales alargan el tiempo de cálculo e incrementan el costo computacional, especialmente en casos como en los análisis dinámicos y por FEM, los cuales tienen intrínsecos ciclos adicionales para ciertos cálculos tales como el ensamblaje de matrices de rigidez, de masa, etc [Gomes and Beck, 2016]. Ahora, la solución del proceso asociado a RBO es fundamental para la solución del problema asociado al RO y teniendo en cuenta la complejidad de este tipo de temas se ha empezado a abordar desde hace unos años el tema de manera somera, entendiéndose como un problema complejo el cual puede ser solucionado empleando métodos de simulación o técnicas con el iFORM y demás [Gomes and Beck, 2016].

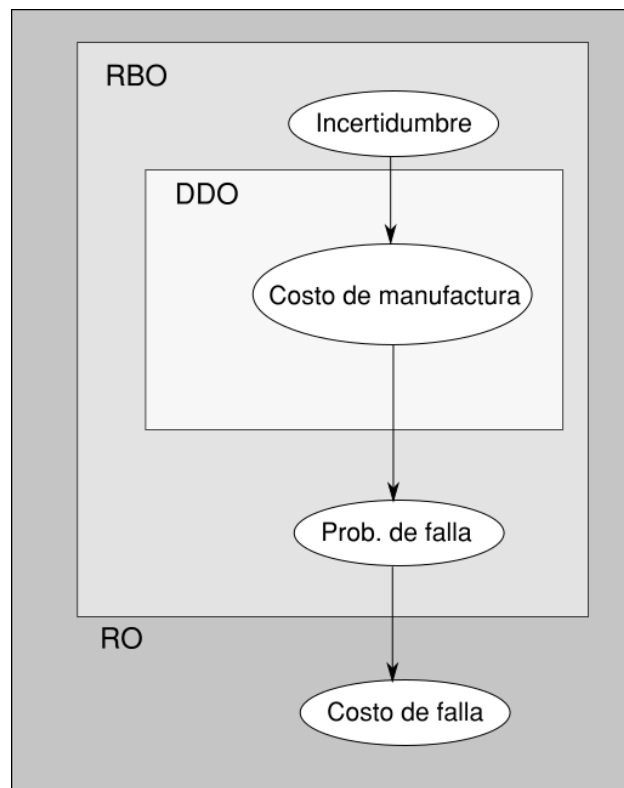


Figura 5.1: Objetivos de las formulaciones de optimización estructural [Beck et al., 2012].

El **costo del ciclo de vida**, C_T , el cual es función de unas variables de diseño \mathbf{d} , constituye todos los costos que se tienen a lo largo del ciclo de vida útil de una estructura. Según Gomez y Beck [Gomes and Beck, 2016], este costo puede ser desglosado en varios tipos de costos que se listan a continuación:

- **Costo inicial**, $C_{\text{inicial}}(\mathbf{d})$: Estos costos se incrementan conforme se incrementa el índice de seguridad del diseño y el sostenimiento de este nivel. Mayor seguridad en las estructuras implican estructuras redundantes que tienden a ser conservativas en su operación.

- **Costo de construcción (también conocido como costo de manufactura), $C_{\text{inicial}}(\mathbf{d})$**
- **Costo de operación, $C_{\text{operación}}(\mathbf{d})$**
- **Costos relacionados con el mantenimiento de la estructura, $C_{\text{mantenimiento}}(\mathbf{d})$:** dependen del costo de los métodos usados para la inspección y de un plan de mantenimiento para la estructura.
- **Costo esperado de falla.** C_{ex} el cual se puede describir de la siguiente manera [Thoft-Christensen,]:

$$C_{\text{ex}}(\mathbf{d}) = P_f(\mathbf{d}) * C_{\text{failure}} \quad (5.1)$$

Estos **costos de falla**, C_{failure} incluyen costos de reparación de elementos dañados en la estructura, la remoción de los elementos inútiles, costos y estudios de inviabilidad estructural, costos de compensación por enfermedad y muerte a causa de la estructura, es decir, todos los costos asociados al mal comportamiento de la estructura y bajan a medida que se incrementa el índice de seguridad [Gomes and Beck, 2016].

Así, el costo total de la estructura estaría constituido de la siguiente manera:

$$C_T(\mathbf{d}) = C_{\text{inicial}}(\mathbf{d}) + C_{\text{operación}}(\mathbf{d}) + C_{\text{mantenimiento}}(\mathbf{d}) + C_{\text{ex}}(\mathbf{d}) \quad (5.2)$$

Ahora, teniendo en cuenta que existen diversas secuencias de falla la formulación de 5.2 se puede escribir de la siguiente manera:

$$C_T(\mathbf{d}) = C_{\text{inicial}}(\mathbf{d}) + C_{\text{operación}}(\mathbf{d}) + C_{\text{mantenimiento}}(\mathbf{d}) + \sum_{\text{modos de falla}} P_f(\mathbf{d}, \lambda) * C_{\text{failure}} \quad (5.3)$$

Todo esto, relacionado con unas variables de diseño \mathbf{d} con $S = \{\mathbf{d}_{\text{min}} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_{\text{max}}\}$ las cuales están involucradas directamente con el proceso de SRO y λ representa un factor de seguridad el cual se encuentra en códigos de diseño y por lo tanto no representa una variable de optimización. Los cambios en la variable de diseño los cuales van dirigidos a disminuir costos pueden resultar en el incremento de los costos de falla y la reducción en el costo de falla implica el incremento de las variables de diseño de \mathbf{d} , lo que significa incremento de costos [Gomes and Beck, 2016]. Esta relación existente entre seguridad y costo es algo común en los sistemas estructurales [Beck et al., 2012] .

En términos de las variables de diseño la optimización del riesgo se puede describir como:

$$\mathbf{d}^* = \arg \min[C_T(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in S] \quad (5.4)$$

De manera que la optimización del riesgo se puede formular matemáticamente de la siguiente manera [Beck et al., 2012]:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar: } \mathbf{z}^*, \lambda^* \text{ y } P_f^*(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \\ &\text{que minimice: } C_T(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Una formulación alternativa de la optimización del riesgo se da como [Beck et al., 2012]:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar: } \mathbf{z}^*, \lambda^* \text{ y } P_f^*(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \\ &\text{que maximice: Ganancias} = \text{Ingresos} - C_T(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ahora, si se involucran variables tales como el daños ambiental o afectación a la sociedad, se tienen que involucrar restricciones de probabilidad las cuales representen estos daños de la siguiente manera [Beck et al., 2012]:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar: } \mathbf{d}^*, \lambda^* \text{ y } P_f^*(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \\ &\text{que minimice: } C_T(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\text{Sujeto a: } P_f(\mathbf{d}) < P_{f_{\text{admisible}}}$$

El problema de optimización del riesgo estructural también puede tener restricciones no asociadas a la confiabilidad del sistema, como por ejemplo restricciones relacionadas con la geometría del sistema dada su relación con el problema optimización denominado RBDO del cual se habló en el capítulo anterior [Beck and de Santana Gomes, 2012].

5.2. Desarrollo del problema de Optimización del riesgo estructural

El costo económico de la construcción de una estructura se ha tenido en cuenta desde la década de 1970 [Adeli and Sarma, 2006] inicialmente con estructuras de concreto en [Goble and Lapay, 1971], [Kirsch, 1972] y [Kirsch, 1973], tomando como elementos de cálculo el costo de vigas en secciones uniformes, vigas pretensadas y placas pretensadas, respectivamente, de acuerdo a los pa-

rámetros de diseño planteados en [Committee, 1963]. A partir del estudio realizado por [Naaman, 1977] se concluyó que el menor peso generalmente conlleva a un menor costo en los elementos existentes en una obra.

El diseño relacionado con el costo del ciclo de vida y con la optimización del riesgo con el objeto de minimizar los costos que se generan en los diferentes estados del ciclo de vida útil de la estructura teniendo en cuenta probabilidades de falla se encuentra relacionado por primera vez en [Soltani and Corotis, 1988], en la que relacionan los costos iniciales y finales de una estructura con los momentos plásticos capaces de resistir, siendo este el primer contacto que se tuvo con este tipo de formulaciones relacionando el costo monetario con capacidades físicas de la estructura. Es así como el estudio del ciclo de vida útil de una estructura con un enfoque económico y probabilístico en conjunto se ha realizado empleando herramientas como **redes neuronales** [de Santana Gomes and Beck, 2013] y se ha empleado en la optimización de estructuras como se ve en [Aktas et al., 2001], [Frangopol and Maute, 2003] y en [Bucher and Frangopol, 2006]; además se ha empleado en el estudio de estructuras sometidas a cargas sísmicas [Haukaas, 2008] y en el análisis de optimización de estructuras metálicas [Beck and Verzenhassi, 2008]. Actualmente se tienen los estudios de [Gomes and Beck, 2016], [Beck and de Santana Gomes, 2012] y [Beck et al., 2012] los cuales fueron empleados para construir la teoría de SRO.

5.3. Metodología propuesta basada en el gráfico de confiabilidad

Para la solución del problema del tipo SRO se definen variables \mathbf{z} las cuales son las variables de diseño y tienen una distribución normal truncada de acuerdo a la regla de 3σ . Así, la formulación del problema a resolver empleando las variables de diseño \mathbf{z} quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Hallar: } & \mathbf{d}(\mathbf{z}^*), \lambda^* \text{ y } P_f^*(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \\ \text{Minimizando: } & C_T(\mathbf{d}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ahora, si se incluye la restricción de probabilidad se tiene entonces que la formulación del problema estaría dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hallar: } & \mathbf{d}(\mathbf{z}^*), \lambda^* \text{ y } P_f^*(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \\ \text{Minimizando: } & C_T(\mathbf{d}) \\ \text{Sujeto a: } & P_f(\mathbf{d}) < P_{f_{\text{admisible}}} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Con \mathbf{z}^* el vector que constituye la solución de la ecuación de Costos optimizada. Ahora, para la construcción del gráfico de confiabilidad se tendría entonces que las coordenadas t_1 y t_2 estarían formulados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t_1 &= \|\mathbf{z}\| \\ t_2 &= \cos(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \end{aligned} \quad (5.10)$$

En el caso de los problemas de SRO el gráfico de confiabilidad representa los datos en el espacio de variables (t_1, t_2) separando de manera clara dos zonas teniendo en cuenta la función de costo monetario a optimizar en este caso de manera similar a lo empleado en la solución de problemas relacionados con RBDO y con Confiabilidad inversa:

- Una zona que representa aquellos costos que superan una frontera de **costo máximo**, los cuales se ubican en la zona superior derecha de la nube de puntos.
- Una zona que representa todos los puntos que no logran superar una frontera de **costo mínimo** que se encuentran en la parte inferior derecha.

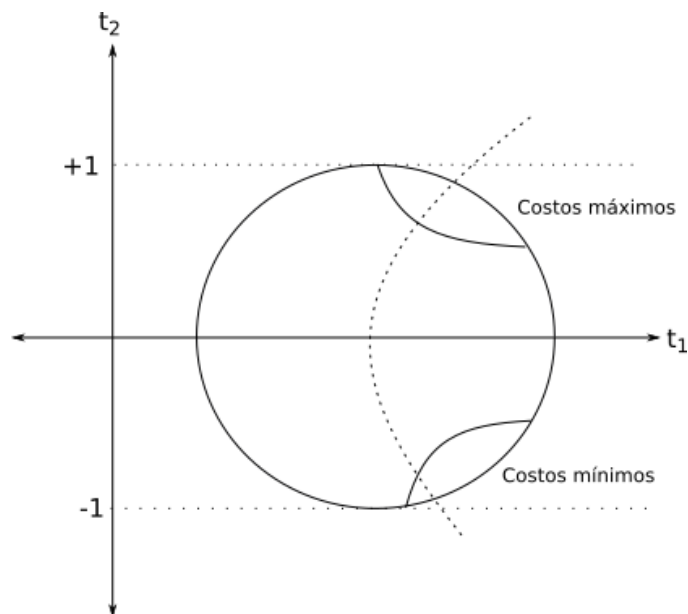


Figura 5.2: Zonas de costos máximos y mínimos generados en el gráfico de confiabilidad

5.4. Ejercicio numérico

5.4.1. Una columna en pandeo

Se tiene el caso de una columna con un módulo de elasticidad E y apoyada en un resorte con característica S como la presente en la figura 5.3 la cual está sometida a dos cargas, una vertical y una horizontal, cuyas características de apoyo, materialidad y cargas se encuentra en la tabla 5.1, las cuales producen pandeo en la columna. En la que la función de costo a minimizar queda

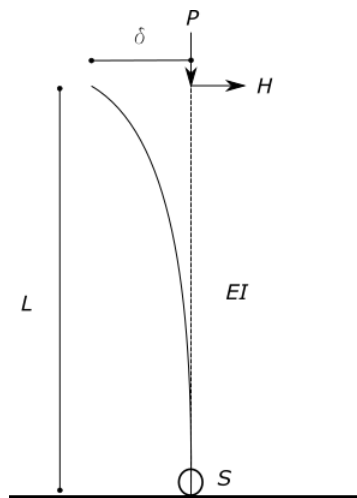


Figura 5.3: Columna esbelta estudiada en el problema de SRO

Variable	Media	Desviación estándar
P	$0.99 \times 10^6 \text{ N}$	$\sigma_P = 2 \times 10^5 \text{ N}$
H	$0.97 \times 10^4 \text{ N}$	$\sigma_H = 2 \times 10^3 \text{ N}$
E	$1.94 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_E = 2 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
S	0.404 N-m	$\sigma_S = 0.0417 \text{ N-m}$

Cuadro 5.1: Definición de variables aleatorias para el problema de RO en una columna esbelta

representada por

$$\text{minimizar : } C(L, I) = 4.25L\sqrt{I} + 0.001P_f(L, I)$$

$$\text{sujeto a : } L > 0 \text{ y } I > 0$$

$$L \in [2.0 \times 10^4, 2.1 \times 10^4] \text{ m}$$

$$I \in [0.10 \times 10^{11}, 0.20 \times 10^{11}] \text{ m}$$

La probabilidad de falla $P_f(L, I)$ se calcula empleando el método FORM explicado en el primer capítulo. Minimizando la función de costos $C(L, I)$ se obtuvo que :

$$z^* = [5.71429, -0.61512]$$

Empleando 1000 puntos para la realización del gráfico se obtuvo la Figura 5.4. Como se puede ob-

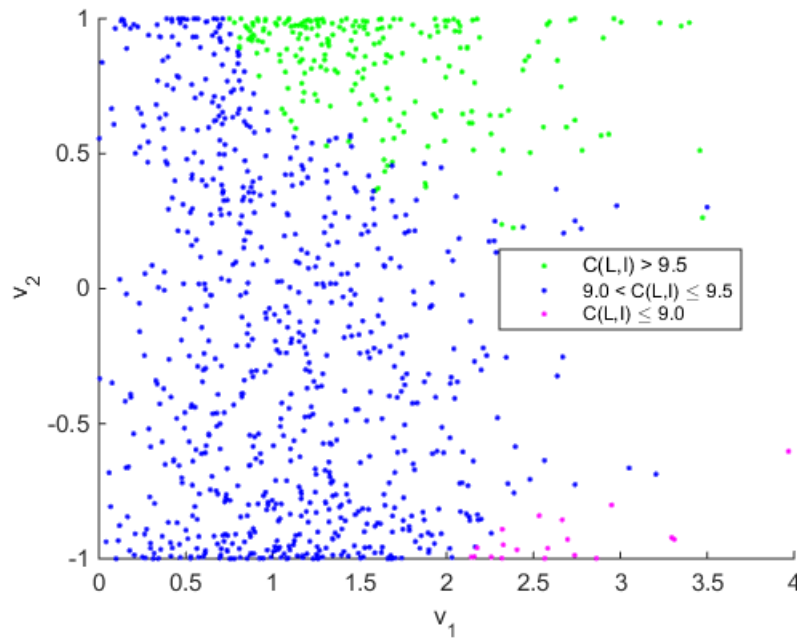


Figura 5.4: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la columna esbelta

servar se tienen delimitadas de manera clara dos zonas importantísimas en el gráfico: La primera zona corresponde a todos los **costos máximos** que se pueden obtener al resolver el problema de optimización y que se encuentran de color verde y los **costos mínimos**, de color magenta, los cuales corresponden a valores que contienen los menores costos. Es de resaltar que en este problema no se tienen restricciones relacionadas con una probabilidad de falla objetivo, solamente se plantean restricciones para las dimensiones que se están optimizando, en este caso, la longitud y el momento de inercia y la distribución de los datos en el plano \mathbf{v} sigue cumpliendo con lo planteado en el capítulo 2 tal y como se muestra en la figura 5.4.

Ahora, si se plantea una formulación del problema como la existente en 5.9, es decir, adicionando una restricción asociada a la confiabilidad del sistema se tendría una restricción de tipo probabilística, por lo que la formulación quedaría como:

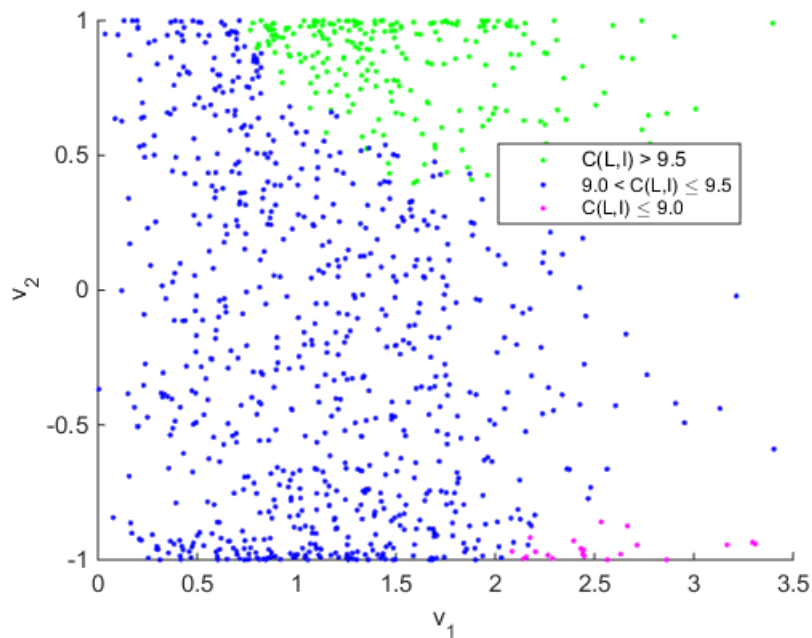


Figura 5.5: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la columna esbelta con probabilidad de falla incluida

$$\text{minimizar : } C(L, I) = 4.25L\sqrt{I} + 0.001 * P_f(L, I)$$

$$\text{sujeto a : } L > 0 \text{ y } I > 0$$

$$L \in [2.0 \times 10^4, 2.1 \times 10^4] \text{ m}$$

$$I \in [0.10 \times 10^{11}, 0.20 \times 10^{11}] \text{ m}$$

$$h(L, I) : 2.6 - \beta(L, I) \leq 0$$

Donde $h(\cdot)$ representa la restricción de probabilidad en función del índice de confiabilidad, que es una forma alternativa de trabajar la confiabilidad del sistema. Al realizar el proceso de minimización se obtiene un vector de falla de:

$$z^* = [8.4164, -0.5994]$$

Y se obtendrían de igual manera las zonas de costos mínimos y costos máximos delimitadas como en el anterior caso tal y como lo muestra la figura 5.5 empleando 1000 puntos como datos de entrada para el gráfico. Como se puede observar se siguen conservando las dos zonas más importantes del gráfico, es decir, las zonas de mayor y menor costo, como se esperaba del gráfico de

confiabilidad, además se puede notar la diferencia de los vectores de falla en ambos casos dada la adición de una restricción asociada a la confiabilidad en el segundo caso. Adicional a eso se observa en el gráfico de confiabilidad que dada las dimensiones del problema la figura tiene una forma rectangular, similar a la encontrada al resolver problemas de RBDO asociadas a la optimización de variables físicas tales como distancias o áreas.

z_f	Caso	Restricción de confiabilidad
$z_f = [5.71429, -0.61512]$	1	Ninguna
$z_f = [8.4164, -0.5994]$	2	$h(L, I) : 2.6 - \beta(L, I) \leq 0$

Cuadro 5.2: Vectores de falla según restricciones de confiabilidad

5.4.2. Una viga en voladizo

Se tiene una viga dispuesta en voladizo con unas cargas aplicadas en L_1 , L_2 , T y P como lo muestra la figura 5.6 de manera similar a la planteada en [Hurtado et al., 2017]. Con la siguiente caracte-

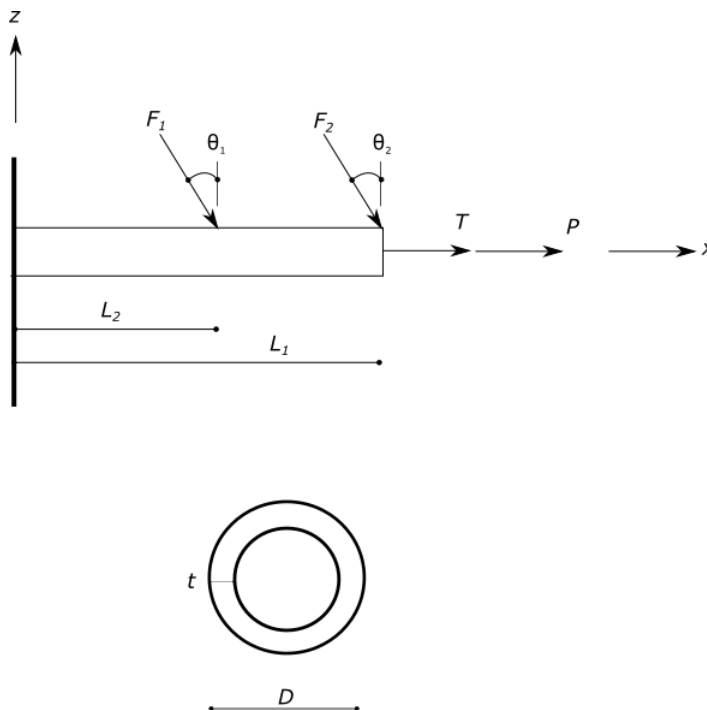


Figura 5.6: Viga estudiada en el problema de SRO

rización de las variables aleatorias las cuales se van a emplear para encontrar la probabilidad de falla usando el método de FORM (ver Cuadro 5.8 y 5.4). y las variables a optimizar son las variables t y D , las cuales tienen la siguiente distribución (ver Cuadro 5.5). Estas variables de diseño

Variable	Media	Desviación estándar
F_1	$2.05 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_{F_1} = 2 \times 10^2 \text{ kN}$
F_2	$3.1 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_{F_2} = 3 \times 10^2 \text{ kN}$
P	$12.7 \times 10^3 \text{ kN}$	$\sigma_P = 1 \times 10^3 \text{ kN}$
T	92 Nm	$\sigma_T = 9 \text{ Nm}$
σ_y	$225 \times 10^6 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 22 \times 10^6 \text{ MPa}$

Cuadro 5.3: Definición de variables aleatorias para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución normal

Variable	Rango
L_1	$[119.75, 120.25] \times 10^{-3} \text{ m}$
L_2	$[59.75, 60.25] \times 10^{-3} \text{ m}$
θ_1	$[19, 21]^\circ$
θ_1	$[19, 21]^\circ$

Cuadro 5.4: Definición de variables aleatorias para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución uniforme

son variables \mathbf{z} normales estándar truncadas de acuerdo a la regla del 3σ . La función a optimizar es de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } C(t, D) = 0.15tD^2 + 0.001P_f(t, D)$$

$$\text{sujeto a: } D > 0 \text{ y } t > 0$$

$$t \in [2.8 \times 10^{-3}, 3.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

$$D \in [51.8 \times 10^{-3}, 52.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

Ahora, con estas variables y estas consideraciones se tiene que el vector de falla está definido como:

$$\mathbf{z}^* = [0.23652, 0.01309]$$

Como se puede observar en el gráfico 5.7, con la configuración de las variables aleatorias de diseño se sigue obteniendo tanto las zonas de costos máximos y mínimos como la distribución marginal de los datos esperada. Ahora, si se emplea una restricción probabilística para evaluar la

Variable	Intervalo de la variable
t	$[2.8, 3.2] \times 10^{-3} \text{m}$
D	$[51.8, 52.2] \times 10^{-3} \text{m}$

Cuadro 5.5: Definición de variables aleatorias de diseño para resolver el problema de SRO. Estas variables tienen distribución normal truncada

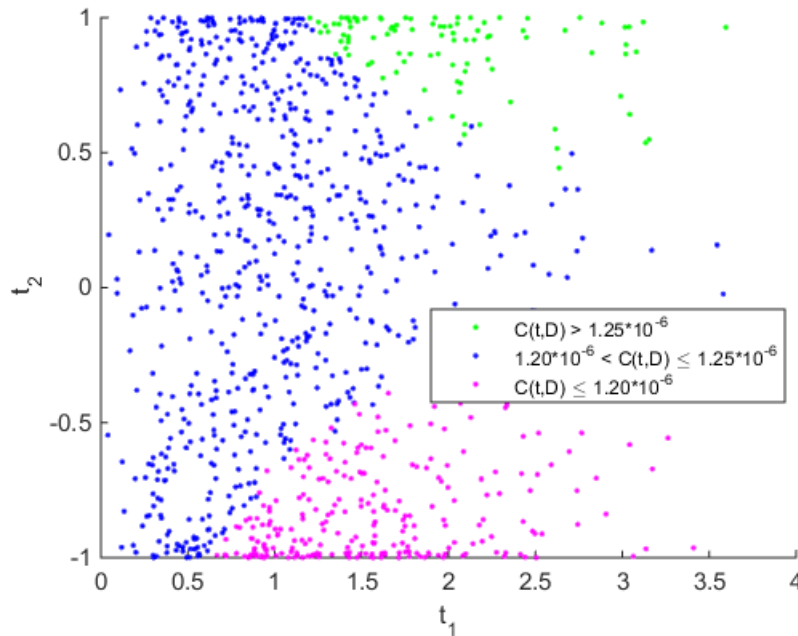


Figura 5.7: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la viga en voladizo.

función de costo el problema quedaría construido de la siguiente manera:

$$\text{minimizar : } C(t, D) = 0.15tD^2 + 0.001P_f(t, D)$$

$$\text{sujeto a : } D > 0 \text{ y } t > 0$$

$$t \in [2.8 \times 10^{-3}, 3.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

$$D \in [51.8 \times 10^{-3}, 52.2 \times 10^{-3}] \text{ m}$$

$$h(t, D) : 4.8 - \beta(t, D) \leq 0$$

Al minimizar esta función con estas restricciones se obtienen el siguiente punto de falla:

$$z^* = [0.16800, 0.01451]$$

y los datos estarían representados en el gráfico de confiabilidad como se puede observar en la figura 5.8. Como se puede observar, en cada uno de los casos expuestos se cumple tanto la sepa-

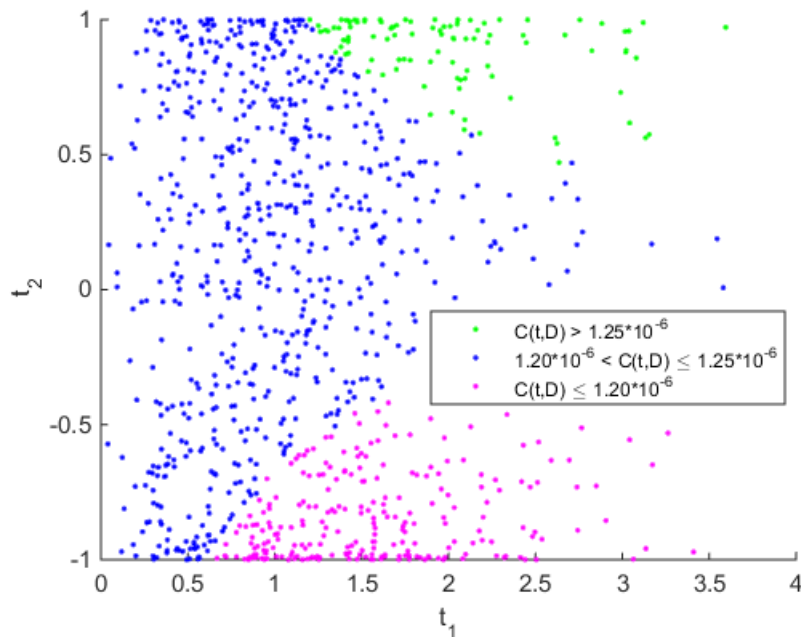


Figura 5.8: Gráfico de confiabilidad para resolver el problema de costo en la viga en voladizo con probabilidad de falla incluída

ración de las zonas de menor y mayor costo como la distribución marginal en cada uno de los ejes que conforman el espacio t como se observa en la tabla 5.8

z_f	Caso	Restricción de confiabilidad
$z_f = [0.2365, 0.0131]$	1	Ninguna
$z_f = [0.1680, 0.0145]$	2	$h : 2.6 - \beta(L, I) \leq 0$

Cuadro 5.6: Vectores de falla según restricciones de confiabilidad

5.4.3. Una cercha Espacial

Se tiene una cercha espacial como la mostrada en la figura 3.6 la cual está sometida a unas cargas en direcciones x , y y z en los nudos que no están apoyados. Las variables de diseño constituyen las áreas transversales de las barras agrupadas en tres grupos: los radios del hexágono conforman un grupo, las barras que forman la figura de hexágono constituyen otro grupo y el resto de barras conforman el último grupo cuya distribución se ve reflejada en la tabla 5.7. Así, el vector de diseño

\mathbf{z} tiene una dimensionalidad de $d = 3$ y las variables involucradas en el proceso de confiabilidad son $d = 22$ las cuales son las cargas aplicadas en los nudos que no están apoyados en las direcciones x, y y z y el módulo de elasticidad, plasmadas en la tabla 3.7. La función de estado límite del

Cuadro 5.7: Variables de diseño con distribución Normal en el ejercicio de la cercha espacial

	Variable	Intervalo de la media
A_1	Normal	$[80, 120] \times 10^{-6}$ m
A_2	Normal	$[9, 20] \times 10^{-6}$ m
A_3	Normal	$[60, 100] \times 10^{-6}$ m

sistema de cercha espacial está descrito como:

$$g(\mathbf{u}) = 5.5 \times 10^{-3} - |\delta(\mathbf{u})|$$

En donde $\delta(\mathbf{u})$ representa el desplazamiento en dirección z del punto más alto de la cercha, en este caso, el centro del hexágono y la función de costos a optimizar se encuentra descrita por:

$$\text{minimizar : } C(A_1, A_2, A_3) = 200 + \frac{A_1 + A_3}{3 \times 10^6} + \frac{A_2}{2 \times 10^6} + 1000P_f(A_1, A_2, A_3)$$

$$\text{sujeto a : } A_1 > 0, A_2 > 0 \text{ y } A_3 > 0$$

$$A_1 \in [80, 120] \text{ mm}^2$$

$$A_2 \in [9, 20] \text{ mm}^2$$

$$A_3 \in [60, 100] \text{ mm}^2$$

En este caso no se tiene en cuenta una restricción de carácter probabilístico para la optimización. Realizando el proceso de minimización de la función $C(A_1, A_2, A_3)$ se tiene entonces que el vector de falla asociado a la minimización del problema está dado por:

$$\mathbf{z}^* = [-1.3330 - 2.7263 - 0.5796] \quad (5.11)$$

Ahora, este vector de falla es empleado para construir el gráfico de confiabilidad. Con una cantidad de datos $N = 1000$ se construye el gráfico de confiabilidad que se encuentra en la figura 5.9. Como se observa se ven claramente las dos zonas descritas en la teoría, las de costos máximos y mínimos, los cuales fueron separados por el vector de falla y además es notoria la hipérbola de estructuración que describe la evolución de la función de costos, pasando de la zona con meno-

res costos a la zona con mayores costos. Ahora se examina la función evaluada con anterioridad

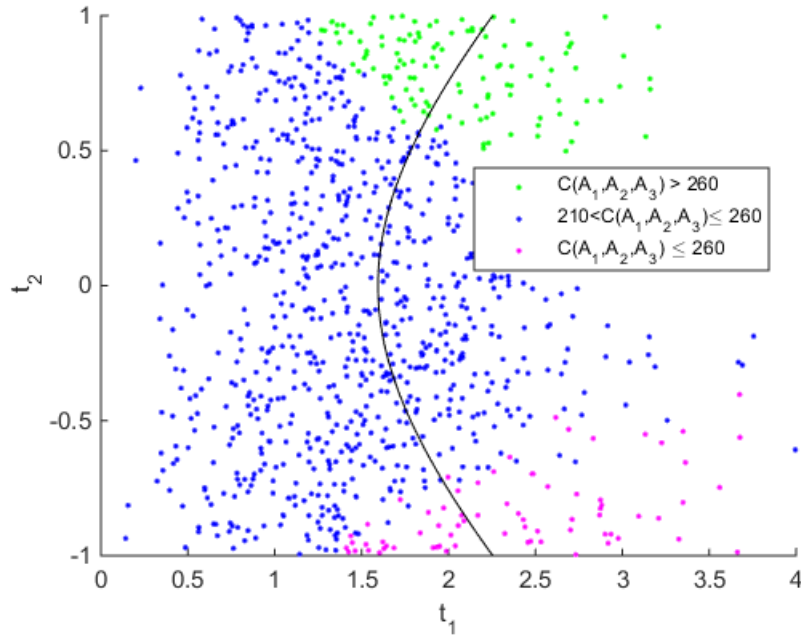


Figura 5.9: Gráfico de confiabilidad de la cercha espacial con optimización de la función $C(A_1, A_2, A_3)$

pero al conjunto de restricciones existentes se le adiciona una relacionada con la confiabilidad del sistema. Así, el problema de optimización estará formulado de la siguiente manera:

$$\text{minimizar : } C(A_1, A_2, A_3) = 200 + \frac{A_1 + A_3}{3 \times 10^6} + \frac{A_2}{2 \times 10^6} + 1000P_f(A_1, A_2, A_3)$$

$$\text{sujeto a : } A_1 > 0, A_2 > 0 \text{ y } A_3 > 0$$

$$A_1 \in [80, 120] \text{ mm}^2$$

$$A_2 \in [9, 20] \text{ mm}^2$$

$$A_3 \in [60, 100] \text{ mm}^2$$

$$h(A_1, A_2, A_3) : 7.0 - \beta(A_1, A_2, A_3) \leq 0$$

Por lo tanto el vector de falla que se obtiene de optimizar este problema es:

$$\mathbf{z}^* = [-1.2828 - 2.5450 - 0.5149] \quad (5.12)$$

Y este vector de falla \mathbf{z}^* es empleado para construir el gráfico de confiabilidad. Con una cantidad de muestras $N = 1000$ se tiene el gráfico de la figura 5.10. Al igual que en el caso anterior, los datos están clasificados, gracias al vector de falla, en las zonas de mayor y menor costo, en verde y magenta, respectivamente. En este ejemplo, tanto en el caso de la optimización sin restricción en

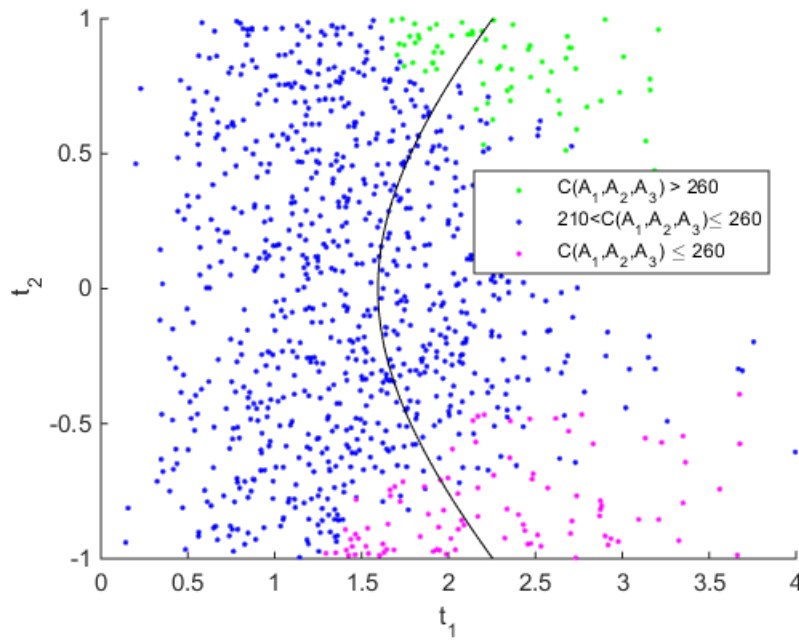


Figura 5.10: Gráfico de confiabilidad de la cercha espacial con optimización de la función $C(A_1, A_2, A_3)$ incluyendo restricción de confiabilidad.

confiabilidad como en el caso en el que se impone la restricción, en el que existen tres variables de diseño para el problema de optimización, a diferencia de los otros problemas evaluados en este capítulo, la nube de datos empieza a separarse del eje t_2 , esto, debido a que la dimensionalidad del problema empieza a incrementarse.

z_f	Caso	Restricción de confiabilidad
$z_f = [-1.3330 - 2.7263 - 0.5796]$	1	Ninguna
$z_f = [-1.2828 - 2.5450 - 0.5149]$	2	$h(A_1, A_2, A_3) : 7.0 - \beta(A_1, A_2, A_3) \leq 0$

Cuadro 5.8: Vectores de falla según restricciones de confiabilidad

5.4.4. La viga de Bernoulli

Se toman las características de aplicación de carga, apoyos y de variabilidad del material de la viga empotrada que se encuentra en el problema 4 del capítulo 3 (ver figura 5.11). Las variables de diseño, es decir, las que conforman el vector \mathbf{z} a trabajar en el problema de RO son b y h . La función de costo a optimizar teniendo en cuenta la restricción de probabilidad es la siguiente:

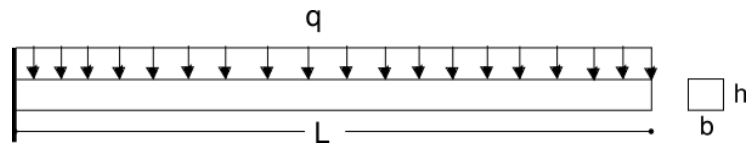


Figura 5.11: Viga de Euler Bernoulli.

$$\text{minimizar : } C(b, h) = bh + P_f(b, h)$$

$$\text{sujeto a : } b > 0, h > 0$$

$$b \in [0.70, 0.75] \text{ m}$$

$$h \in [0.70, 0.75] \text{ m}$$

$$h(b, h) : 3.15 - \beta(b, h) \leq 0$$

Por lo que el vector de falla estaría dado por

$$\mathbf{z}^* = [2.4685, 2.9981] \quad (5.13)$$

Ahora, este vector de falla es empleado para construir el gráfico de confiabilidad. Con una cantidad de datos $N = 1000$ se construye el gráfico de confiabilidad que se encuentra en la figura 5.12. Como se observa se ven claramente las dos zonas descritas en la teoría, las de costos máximos y mínimos, los cuales fueron separados por el vector de falla y además es notoria la hipérbola de estructuración que describe la evolución de la función de costos, pasando de la zona con menores costos a la zona con mayores costos.

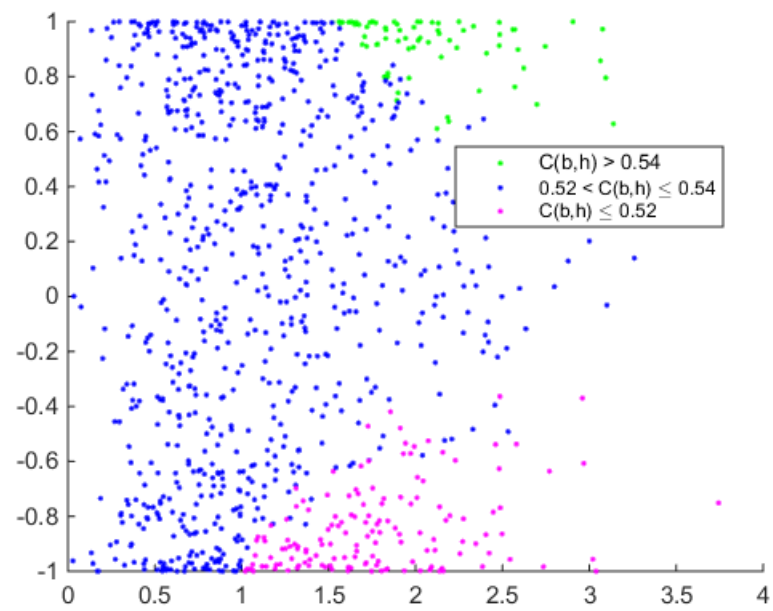


Figura 5.12: Gráfico de confiabilidad de la viga de Bernoulli con optimización de la función $C(b, h)$

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

6.1. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado la implementación del gráfico de confiabilidad en la representación de problemas asociados a la optimización estructural basada en probabilidad tales como la confiabilidad inversa, RBO y SO tanto en problemas cuyas variables estaban representadas por funciones de probabilidad como problemas asociados a procesos estocásticos, con el fin de escoger muestras representativas de una región determinada para tratamientos posteriores necesarios.

A partir de los resultados se pueden plantear algunas observaciones:

- El gráfico de confiabilidad es una herramienta útil en el cual, aprovechándose de ciertas propiedades de las variables cuyo comportamiento obedece a una distribución normal (o de la familia de las distribuciones normales tales como la exponencial), construye un nuevo espacio bidimensional de tal manera en que se pueden separar los datos que cumplen cierto criterio de probabilidad con aquellos que no lo cumplen. Retomando el ejemplo de la columna en pandeo examinada en los capítulos de Confiabilidad inversa, RBO y SO se pueden comparar los gráficos de confiabilidad generados en cada caso y que están plasmados en la tabla 6.1.

Problema	Gráfico de confiabilidad	Dimensionalidad	β
Confiabilidad inversa	Ver Figura 3.3	2	6
RBO	Ver Figura 4.6	2	2.737

SO	Ver Figura 5.4	2	-
SO	Ver Figura 5.5	2	2.6

Cuadro 6.1: Comparación entre graficos de confiabilidad generados por resolver los problemas de Confiabilidad inversa, RBO y SO de una columna esbelta en pandeo.

De acuerdo a lo referido en los gráficos se puede deducir lo siguiente:

- La forma que adquieren los puntos en el gráfico de confiabilidad depende de la dimensionalidad del problema. Es decir, para dimensionalidades bajas ($2 \leq d \leq 5$) se obtienen formas rectangulares y a medida que se asciende en la dimensionalidad del problema a solucionar la nube de puntos adquiere una forma circular ($d > 6$).
- Los problemas asociados a confiabilidad inversa no solamente involucran la minimización de una función a partir de unas variables asociadas a las dimensiones físicas del elemento, sino que también se pueden obtener datos mínimos que cumplen condiciones probabilísticas a partir de variables como módulo de elasticidad, cargas, ángulo de incidencia de cargas, etc. Por lo tanto, al emplear el gráfico de confiabilidad en problemas de Confiabilidad inversa se puede esperar obtener desde gráficos con formas rectangulares hasta gráficos con formas circulares.
- Para los casos en los que se desea observar el problema de RBO y SO desde el punto de vista del gráfico de confiabilidad usualmente se optimizan variables asociadas a la dimensionalidad de los objetos tales como la longitud, el área transversal, los cuales usualmente no superan dos o tres variables. A partir de esto se puede decir que los gráficos de confiabilidad obtenidos de los problemas de confiabilidad asociados a RBO y SO usualmente tienen formas rectangulares.

Estas formas rectangulares llevan a obtener distribuciones peculiares de los datos que se encuentran asociados a los ejes t_1 y t_2 . Estas distribuciones, ya sean marginales o conjuntas están asociadas directamente con la forma del gráfico de confiabilidad.

- La cantidad de tiempo empleada para realizar el gráfico de confiabilidad depende directamente del número de datos, siendo mayor el tiempo cuanto más número de puntos tenga la

base de datos a emplear al ser el proceso de creación del gráfico de confiabilidad un método Monte- Carlo. A continuación se muestra una recopilación del tiempo de ejecución de cada uno de los ejemplos realizados:

1. Confiabilidad inversa

Para el caso de confiabilidad inversa se hicieron dos ejemplos y los tiempos de ejecución se muestran a continuación:

Problema	N	Tiempo (s)
Una columna esbelta en pandeo	1000	0.033
Una viga en voladizo	1000	0.24
Una cercha espacial	1000	32
La viga de Bernoulli	1000	578

Cuadro 6.2: Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de confiabilidad inversa

2. Problemas asociados a RBO

Problema	N	Tiempo (s)
Una columna esbelta en pandeo	1000	0.94
Una viga en voladizo	1000	2.26
Una cercha espacial	1000	28
La viga de Bernoulli	1000	1111.67

Cuadro 6.3: Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de Optimización basada en confiabilidad (RBO)

3. Problemas asociados a Optimización del Riesgo (SO)

Problema	N	Tiempo (s)
Una columna esbelta en pandeo - sin restricción de probabilidad	1000	0.63
Una columna esbelta en pandeo - con restricción de probabilidad	1000	0.59
Una viga en voladizo - sin restricción de probabilidad	1000	0.47
Una viga en voladizo - con restricción de probabilidad	1000	0.46
Una cercha espacial - sin restricción de probabilidad	1000	36.67
Una cercha espacial - con restricción de probabilidad	1000	41.09
La viga de Bernoulli - con restricción de probabilidad	1000	2413

Cuadro 6.4: Tiempo empleado para realización del gráfico de confiabilidad en problemas de Optimización del Riesgo (SO)

Como se puede observar el proceso de formación del gráfico de confiabilidad toma tiempos de cálculos que convierten al método en una muy buena alternativa para el análisis de datos en cualquier máquina de cálculo para problemas relativamente sencillos.

- En el caso de la solución del problema de confiabilidad inversa en el caso de la viga de Bernoulli construída a partir del uso de elementos finitos estocásticos se observó que a pesar del alto costo computacional requerido para la solución de los sistemas calculados de manera sucesiva, se obtienen soluciones similares a las obtenidas en los casos en los que no se implementaron asociaciones estocásticas a las variables de entrada del problema o a las variables que describen el sistema físico.
- El éxito del gráfico radica en que el vector \mathbf{w} represente de manera plena la probabilidad de falla del sistema, así, entre más se acerque \mathbf{w} a ser el vector de falla los puntos con probabilidad de falla mayor que la designada para el sistema y los puntos que tengan menor probabilidad de fallo, es decir, con un índice de confiabilidad mayor quedarán ubicados en zonas claramente delimitadas.
- El gráfico de confiabilidad se puede construir tanto con la generación clásica de datos a través de la conversión a espacio estándar de las variables de diseño normales como con la regla de 3σ para generación tanto de datos como de otros factores involucrados en las variables de diseño normales. Para variables de diseño que no tengan una distribución normal hay que tener en cuenta que para la aplicación del gráfico de confiabilidad hay que transformar las variables de entrada desde la distribución de entrada hacia una distribución equivalente en el espacio estándar pues las variables estándar hacen parte de los requisitos para la generación del gráfico de confiabilidad.
- El gráfico de confiabilidad no es útil solamente para separar zonas de falla y de seguridad definidas como parámetros para encontrar el vector de falla. También se puede implementar para separar zonas con ciertos niveles de confiabilidad con el objetivo de realizar otros estudios con los datos obtenidos.

6.2. Desarrollos futuros

Para trabajos posteriores correspondientes al nivel de doctorado y con el objetivo de profundizar en la aplicación del gráfico de confiabilidad en el campo de la optimización del diseño estructural

se tienen planteados los siguientes campos de estudio:

- **Optimización topológica y Gráfico de confiabilidad** La optimización topológica (*Topology optimization*) se refiere a la distribución óptima de un material en un espacio físico bidimensional o tridimensional de acuerdo a unos criterios determinados por el modelo físico del problema [Bendsøe and Sigmund, 1999]. El objetivo general de la aplicación del gráfico de confiabilidad es caracterizar los puntos que cumplen tanto la optimización topológica como unos criterios de confiabilidad preestablecidos en el problema.

- **Cajas de probabilidad**

Sea \bar{F} y \underline{F} funciones no decrecientes de la recta real R en $[0, 1]$ y $\underline{F}(x) \leq \bar{F}(x)$ para todo $x \in R$. Sea $[\underline{F}, \bar{F}]$ el conjunto de todas las funciones no decrecientes F en los reales en $[0, 1]$ tal que $\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \bar{F}(x)$. Cuando las funciones \underline{F} y \bar{F} delimitan una distribución de probabilidad que no está definida de manera clara se denomina al par formado por $[\underline{F}, \bar{F}]$ una **caja de probabilidad** o *p-box* [Ferson et al., 2003].

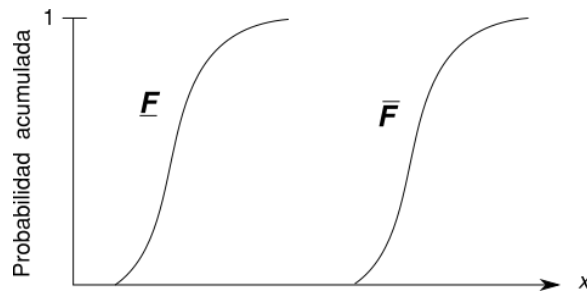


Figura 6.1: Caja de probabilidad definida por dos funciones

Se puede implementar este método para solucionar problemas de confiabilidad estructural, ya sea confiabilidad inversa, RBDO o SRO y construir el gráfico de confiabilidad dándole solución a este tipo de problema.

CAPÍTULO A

HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES

Para la realización de la tesis se emplearon varias herramientas para poder realizar tanto los cálculos como las gráficas y las imágenes usadas en el escrito final. Las herramientas empleadas en la realización de la tesis de maestría fueron:

- **Diagramación:** Las imágenes encontradas en la tesis se realizaron con el programa **Inkscape**, el cual es un editor de gráficos de código libre y gratuito.
- **Edición de texto:** La edición del texto plasmado en la tesis, así como los mapas conceptuales, mapas y demás elementos fueron realizados en **TeXworks** empleando el sistema de composición de texto \LaTeX ayudados de la distribución **TeX Live** en la edición de 2017.
- **Cálculos:** Para la realización de los ejercicios y sus correspondientes gráficas se usó:
 - **Matlab®** en su distribución de 2014b para Windows 10. Se hace hincapié en lo siguiente: para realizar los cálculos de optimización se usó el *toolbox* de optimización, *Optimization toolbox* en su división de optimización no lineal y el *toolbox* de cálculo simbólico: *Symbolic Math Toolbox*

Bibliografía

- [Adeli and Sarma, 2006] Adeli, H. and Sarma, K. C. (2006). *Cost optimization of structures: fuzzy logic, genetic algorithms, and parallel computing*. John Wiley & Sons. (Citado en la página 96.)
- [Aktas et al., 2001] Aktas, E., Moses, F., and Ghosn, M. (2001). Cost and safety optimization of structural design specifications. *Reliability Engineering & System Safety*, 73(3):205–212. (Citado en la página 97.)
- [Alvarez and Hurtado, 2014] Alvarez, D. A. and Hurtado, J. E. (2014). An efficient method for the estimation of structural reliability intervals with random sets, dependence modeling and uncertain inputs. *Computers and Structures*, 142:54 – 63. (Citado en la página 56.)
- [Arora, 2012] Arora, J. S. (2012). Chapter 1 : Introduction to design optimization. In Arora, J. S., editor, *Introduction to Optimum Design (Third Edition)*, pages 1 – 15. Academic Press, Boston, 3rd edition. (Citado en las páginas XVIII, 76, and 82.)
- [Arya et al., 2012] Arya, R., Choube, S., Arya, L., and Kothari, D. (2012). Reliability enhancement of a radial distribution system using coordinated aggregation based particle swarm optimization considering customer and energy based indices. *Applied Soft Computing*, 12(11):3325–3331. (Citado en la página 81.)
- [Babu and Basha, 2008] Babu, G. S. and Basha, B. M. (2008). Optimum design of cantilever sheet pile walls in sandy soils using inverse reliability approach. *Computers and Geotechnics*, 35(2):134–143. (Citado en la página 61.)

- [Barakat et al., 2004] Barakat, S., Bani-Hani, K., and Taha, M. Q. (2004). Multi-objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams. *Structural Safety*, 26(3):311–342. (Citado en la página 81.)
- [Baravalle and Köhler, 2016] Baravalle, M. and Köhler, J. (2016). Risk and reliability based calibration of design codes for submerged floating tunnels. *Procedia engineering*, 166:247–254. (Citado en las páginas XXI, 17, and 18.)
- [Baydal et al., 1987] Baydal, E., Andreu, G., Rulot, H., and Vidal, E. (1987). Dimensionalidad intrínseca de un conjunto de palabras aisladas. *Questiíó: Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa*, 11(1):37–48. (Citado en la página 39.)
- [Beck and de Santana Gomes, 2012] Beck, A. T. and de Santana Gomes, W. J. (2012). A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 28:18–29. (Citado en las páginas 93, 96, and 97.)
- [Beck et al., 2012] Beck, A. T., Gomes, W. J., and Bazán, F. A. (2012). On the robustness of structural risk optimization with respect to epistemic uncertainties. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2(1). (Citado en las páginas XIX, 93, 94, 95, 96, and 97.)
- [Beck and Verzenhassi, 2008] Beck, A. T. and Verzenhassi, C. C. (2008). Risk optimization of a steel frame communications tower subject to tornado winds. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5(3):187–203. (Citado en la página 97.)
- [Bendsøe and Sigmund, 1999] Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69(9):635–654. (Citado en la página 115.)
- [Biondini and Frangopol, 2009] Biondini, F. and Frangopol, D. M. (2009). Lifetime reliability-based optimization of reinforced concrete cross-sections under corrosion. *Structural safety*, 31(6):483–489. (Citado en la página 81.)
- [Bucher and Frangopol, 2006] Bucher, C. and Frangopol, D. M. (2006). Optimization of lifetime maintenance strategies for deteriorating structures considering probabilities of violating safety, condition, and cost thresholds. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(1):1–8. (Citado en la página 97.)

- [Budiman Minasny, 2006] Budiman Minasny, A. B. M. B. (2006). A conditioned latin hypercube method for sampling in the presence of ancillary information. *Computers and Geosciences*, 32:1378–1388. (Citado en la página 6.)
- [Budiman Minasny, 2007] Budiman Minasny, A. B. M. B. (2007). Latin hypercube sampling as a tool for digital soil mapping. In P. Lagacherie, A.B McBratney, M. V., editor, *Developments in Soil Science*. Elsevier. (Citado en la página 7.)
- [Cheng et al., 2007a] Cheng, J., Cai, C., and Xiao, R.-C. (2007a). Estimation of cable safety factors of suspension bridges using artificial neural network-based inverse reliability method. *International journal for numerical methods in engineering*, 70(9):1112–1133. (Citado en la página 61.)
- [Cheng et al., 2007b] Cheng, J., Zhang, J., Cai, C., and Xiao, R.-C. (2007b). A new approach for solving inverse reliability problems with implicit response functions. *Engineering structures*, 29(1):71–79. (Citado en las páginas 59 and 61.)
- [Cho and Lee, 2011] Cho, T. M. and Lee, B. C. (2011). Reliability-based design optimization using convex linearization and sequential optimization and reliability assessment method. *Structural Safety*, 33(1):42–50. (Citado en la página 81.)
- [Cioppa and Lucas, 2007] Cioppa, T. M. and Lucas, T. W. (2007). Efficient nearly orthogonal and space-filling latin hypercubes. *Technometrics*, 49(1):45–55. (Citado en la página 9.)
- [Committee, 1963] Committee, A. (1963). Building code requirements for reinforced concrete ACI 318-63. American Concrete Institute. (Citado en la página 97.)
- [De Rainville et al., 2012] De Rainville, F.-M., Gagné, C., Teytaud, O., and Laurendeau, D. (2012). Evolutionary optimization of low-discrepancy sequences. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 22(2):9:1–9:25. (Citado en la página 8.)
- [de Santana Gomes and Beck, 2013] de Santana Gomes, W. J. and Beck, A. T. (2013). Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ann surrogates. *Computers & Structures*, 126:56–68. (Citado en la página 97.)
- [Deodatis et al., 2014] Deodatis, G., Ellingwood, B., and Frangopol, D. (2014). *Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures*. CRC Press. (Citado en las páginas 78 and 79.)

- [Di Nardo, 2002] Di Nardo, E. (2002). On first-passage problem for a non-singular gaussian discrete-time series. *Quad. Stat.*, 4:51–70. (Citado en la página 51.)
- [Ditlevsen and Madsen, 1996] Ditlevsen, O. and Madsen, H. O. (1996). *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York. (Citado en la página 15.)
- [Du, 2005] Du, X. (2005). First order and second reliability methods. In Du, X., editor, *Probabilistic Engineering Design*. Missouri University of Science and Technology. (Citado en la página 11.)
- [Du and Chen, 2002] Du, X. and Chen, W. (2002). Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. In *ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 871–880. American Society of Mechanical Engineers. (Citado en la página 79.)
- [Ferson et al., 2003] Ferson, S., Kreinovich, V., Ginzburg, L., Myers, D. S., and Sentz, K. (2003). Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures. Technical report, Technical report, Sandia National Laboratories. (Citado en la página 115.)
- [Foschi and Li, 2000] Foschi, R. O. and Li, H. (2000). Inverse reliability applications and performance-based design in timber engineering. In *Proceedings, World Timber Engineering Conference, Whistler, BC Canada*. (Citado en la página 59.)
- [Frangopol, 1985] Frangopol, D. M. (1985). Multicriteria reliability-based structural optimization. *Structural Safety*, 3:23–28. (Citado en la página 80.)
- [Frangopol and Maute, 2003] Frangopol, D. M. and Maute, K. (2003). Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. *Computers & structures*, 81(7):397–410. (Citado en la página 97.)
- [Gasser and Schuëller, 1997] Gasser, M. and Schuëller, G. I. (1997). Reliability-based optimization of structural systems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 46(3):287–307. (Citado en la página 77.)
- [Ghanem and Spanos, 2003] Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. (2003). *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Courier Corporation. (Citado en las páginas 26, 28, 29, 32, 33, and 34.)
- [Goble and Lapay, 1971] Goble, G. and Lapay, W. (1971). Optimum design of prestressed beams. In *Journal Proceedings*, volume 68, pages 712–718. (Citado en la página 96.)

- [Hurtado, 2013] Hurtado, J. E. (2013). Assessment of reliability intervals under input distributions with uncertain parameters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 32:80–92. (Citado en las páginas 54 and 56.)
- [Hurtado and Alvarez, 2012] Hurtado, J. E. and Alvarez, D. A. (2012). The encounter of interval and probabilistic approaches to structural reliability at the design point. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225–228:74 – 94. (Citado en la página 56.)
- [Hurtado and Alvarez, 2013] Hurtado, J. E. and Alvarez, D. A. (2013). A method for enhancing computational efficiency in monte carlo calculation of failure probabilities by exploiting {FORM} results. *Computers and Structures*, 117:95 – 104. (Citado en la página 56.)
- [Hurtado et al., 2017] Hurtado, J. E., Alvarez, D. A., and Paredes, J. A. (2017). Interval reliability analysis under the specification of statistical information on the input variables. *Structural Safety*, 65:35 – 48. (Citado en las páginas 49, 50, 56, and 102.)
- [Hurtado et al., 2012] Hurtado, J. E., Alvarez, D. A., and Ramírez, J. (2012). Fuzzy structural analysis based on fundamental reliability concepts. *Computers and Structures*, 112–113:183 – 192. (Citado en la página 56.)
- [Hurtado and Ramírez, 2013] Hurtado, J. E. and Ramírez, J. (2013). The estimation of failure probabilities as a false optimization problem. *Structural Safety*, 45:1 – 9. (Citado en la página 56.)
- [Husslage et al., 2011] Husslage, B. G., Rennen, G., van Dam, E. R., and den Hertog, D. (2011). Space-filling latin hypercube designs for computer experiments. *Optimization and Engineering*, 12:611–630. (Citado en la página 8.)
- [Iooss et al., 2010] Iooss, B., Boussouf, L., Feuilleard, V., and Marrel, A. (2010). Numerical studies of the metamodel fitting and validation processes. *arXiv preprint arXiv:1001.1049*. (Citado en la página 8.)
- [ISO, 2017] ISO, B. (2017). 15686-5: 2017. *Buildings and constructed assets. Service life planning. Life-cycle costing*. Bsi. (Citado en la página 17.)
- [James W. Davidson and Hart, 1978] James W. Davidson, L. P. F and Hart, G. C. (1978). Reliability-based optimization for dynamic loads. *Computer-Aided Design*, 10:209. (Citado en la página 80.)

- [James W. Davidson and Hart, 1980] James W. Davidson, L. P. F. and Hart, G. C. (1980). On reliability-based structural optimization for earthquakes. *Computers and Structures*, 12(1):99–105. (Citado en la página 80.)
- [Jin et al., 2005] Jin, R., Chen, W., and Sudjianto, A. (2005). An efficient algorithm for constructing optimal design of computer experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 134(1):268 – 287. (Citado en la página 9.)
- [Jourdan and Franco, 2010] Jourdan, A. and Franco, J. (2010). Optimal latin hypercube designs for the kullback–leibler criterion. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 94(4):341–351. (Citado en la página 9.)
- [Katzgraber, 2011] Katzgraber, H. G. (2011). Introduction to monte carlo methods. Technical report, uuuuu. (Citado en la página 5.)
- [Kim and Kwak, 1996] Kim, D. W. and Kwak, B. M. (1996). Reliability-based shape optimization of two-dimensional elastic problems using bem. *Computers & structures*, 60(5):743–750. (Citado en la página 81.)
- [Kirsch, 1972] Kirsch, U. (1972). Optimum design of prestressed beams. *Computers & Structures*, 2(4):573–583. (Citado en la página 96.)
- [Kirsch, 1973] Kirsch, U. (1973). Optimum design of prestressed plates. *Journal of the Structural Division*, 99(6):1075–1090. (Citado en la página 96.)
- [LeBlanc, 2004] LeBlanc, D. (2004). *Statistics: Concepts and Applications for Science*. Number v. 2 in *Statistics: Concepts and Applications for Science*. Jones and Bartlett. (Citado en la página 6.)
- [Lee et al., 2008] Lee, I., Choi, K., Du, L., and Gorsich, D. (2008). Inverse analysis method using mpp-based dimension reduction for reliability-based design optimization of nonlinear and multi-dimensional systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1):14–27. (Citado en la página 61.)
- [Lemaire, 2009] Lemaire, M. (2009). *Structural Reliability*. Wiley, Hoboken, NJ 07030 USA. (Citado en las páginas x, xvii, 3, 13, 23, and 41.)
- [Lohr, 2010] Lohr, S. L. (2010). *Sampling: Design and analysis*. Cengage Learning, 20 Channel Central Street, Boston MA 02210 ,USA. (Citado en la página 9.)

- [M. D. Mckay, 1979] M. D. Mckay, R. J. Beckman, W. J. C. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21:239–245. (Citado en la página 6.)
- [Melchers and Beck, 2018] Melchers, R. E. and Beck, A. T. (2018). *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley & Sons. (Citado en las páginas XXI and 16.)
- [Metropolis and Ulam, 1949] Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341. (Citado en la página 5.)
- [Miki et al., 1997] Miki, M., Murotsu, Y., Tanaka, T., and Shao, S. (1997). Reliability-based optimization of fibrous laminated composites. *Reliability Engineering and System Safety*, 56(3):285–290. (Citado en la página 81.)
- [Mínguez and Castillo, 2009] Mínguez, R. and Castillo, E. (2009). Reliability-based optimization in engineering using decomposition techniques and forms. *Structural Safety*, 31(3):214–223. (Citado en las páginas 79 and 81.)
- [Mooney, 1997] Mooney, C. Z. (1997). *Monte Carlo Simulation*. Sage University Paper, Thousands Oaks, California 91320. (Citado en las páginas 5 and 6.)
- [Morris and Mitchell, 1995] Morris, M. D. and Mitchell, T. J. (1995). Exploratory designs for computational experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 43(3):381 – 402. (Citado en la página 8.)
- [Naaman, 1977] Naaman, A. (1977). Minimum cost versus minimum weight of prestressed slabs. *JOURNAL OF THE STRUCTURAL DIVISION-ASCE*, 103(12):2417–2419. (Citado en la página 97.)
- [Nakamura and Nakamura, 2000] Nakamura, Y. and Nakamura, T. (2000). Inverse reliability-based design of shear buildings supported by springs with stochastic stiffnesses. *Probabilistic engineering mechanics*, 15(3):295–303. (Citado en la página 61.)
- [Nakib and Frangopol, 1990] Nakib, R. and Frangopol, D. M. (1990). Reliability-based structural optimization using interactive graphics. *Computers and Structures*, 37(1):27–34. (Citado en la página 81.)

- [Nguyen et al., 2010] Nguyen, T., Song, J., and Paulino, G. (2010). Single-loop system reliability based design optimization (srbdo) using matrix-based system reliability (msr) method. (Citado en las páginas XVIII, XVIII, 76, 78, 79, and 80.)
- [Novák and Lehky, 2010] Novák, D. and Lehky, D. (2010). An inverse reliability analysis based on stochastic simulation and artificial neural network. In Zingoni, A., editor, *Advances and trends in structural engineering, mechanics and computation*. CRC Press. (Citado en la página 59.)
- [Oñate, 1995] Oñate, E. (1995). *Calculo de estructuras por el método de elementos finitos*. Cimne, Barcelona. (Citado en las páginas 35, 36, and 71.)
- [Owen, 1994] Owen, A. B. (1994). Controlling correlations in latin hypercube samples. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428):1517–1522. (Citado en las páginas 6 and 9.)
- [Papoulis, 1991] Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables, and stochastic processes*. (Citado en la página 46.)
- [Park, 2008] Park, J. (2008). *Assesing climate change under uncertainty: A Monte Carlo approach*. PhD thesis, Duke University. (Citado en la página 5.)
- [Perrin et al., 2007] Perrin, F., Sudret, B., Pendola, M., and De Rocquigny, E. (2007). Comparison of markov chain monte-carlo simulation and a form-based approach for bayesian updating of mechanical models. In *Proc. 10th Int. Conf. on Applications of Stat. and Prob. in Civil Engineering (ICASP10)*. (Citado en la página 61.)
- [Rajagopalan and Grandhi, 1996] Rajagopalan, H. and Grandhi, R. (1996). Reliability based structural analysis and optimization in x window environment. *Computers & structures*, 60(1):1–10. (Citado en la página 81.)
- [Razi Sheikholeslami, 2017] Razi Sheikholeslami, S. R. (2017). Progressive latin hypercube sampling: An efficient approach for robust sampling-based analysis of environmental models. *Environmental Modelling and Software*, 93:109–126. (Citado en las páginas 7 and 9.)
- [Roberto Mínguez, 2005] Roberto Mínguez, Enrique Castillo, A. S. H. (2005). Solving the inverse reliability problem using decomposition techniques. *Structural Safety*, 27:1–23. (Citado en las páginas 60 and 61.)

- [Saha and Manohar, 2005] Saha, S. and Manohar, C. (2005). Inverse reliability based structural design for system dependent critical earthquake loads. *Probabilistic engineering mechanics*, 20(1):19–31. (Citado en la página 61.)
- [Santana, 2016] Santana, W. (2016). Taiwan rescuers find signs of life in quake rubble. (Citado en las páginas XVIII and 75.)
- [Shahraki and Noorossana, 2014] Shahraki, A. F. and Noorossana, R. (2014). Reliability-based robust design optimization: a general methodology using genetic algorithm. *Computers and Industrial Engineering*, 74:199–207. (Citado en la página 81.)
- [Sienz and Toropov, 2004] Sienz, J. and Toropov, V. (2004). Formulation of the optimal latin hypercube design of experiments using a permutation genetic algorithm. In *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. Aerospace Research Central (ARC). (Citado en la página 8.)
- [Sobieszczanski-Sobieski et al., 2015] Sobieszczanski-Sobieski, J., Morris, A., and van Tooren, M. (2015). *Multidisciplinary design optimization supported by knowledge based engineering*. John Wiley & Sons. (Citado en las páginas 4, 75, and 76.)
- [Soltani and Corotis, 1988] Soltani, M. and Corotis, R. B. (1988). Failure cost design of structural systems. *Structural Safety*, 5(4):239 – 252. (Citado en la página 97.)
- [Song et al., 2017] Song, L.-K., Fei, C.-W., Wen, J., and Bai, G.-C. (2017). Multi-objective reliability-based design optimization approach of complex structure with multi-failure modes. *Aerospace Science and Technology*, 64:52–62. (Citado en la página 81.)
- [Sørensen, 2004] Sørensen, J. D. (2004). Notes in structural reliability theory and risk analysis. *Aalborg University*. (Citado en la página 4.)
- [Stefanou, 2009] Stefanou, G. (2009). The stochastic finite element method: past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12):1031–1051. (Citado en la página 26.)
- [Sudret and Der Kiureghian, 2000] Sudret, B. and Der Kiureghian, A. (2000). *Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley. (Citado en la página 35.)

- [Thoft-Christensen,] Thoft-Christensen, P. Risk based structural optimization. In *Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability*., pages 535–538. ASCE. (Citado en la página 95.)
- [Thoft-Christensen, 1991] Thoft-Christensen, P. (1991). *On Reliability-Based Structural Optimization*, pages 387–402. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. (Citado en la página 77.)
- [Uribe Castillo et al.,] Uribe Castillo, F. et al. *Probabilistic analysis of structures using stochastic finite elements*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales. (Citado en la página 35.)
- [Valdebenito and Schuëller, 2011] Valdebenito, M. and Schuëller, G. (2011). Efficient strategies for reliability-based optimization involving non-linear, dynamical structures. *Computers and Structures*, 89(19–20):1797 – 1811. Civil-Comp. (Citado en la página 79.)
- [Valdebenito and Schuëller, 2010] Valdebenito, M. A. and Schuëller, G. I. (2010). A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(5):645–663. (Citado en las páginas XXI, 76, 77, 78, and 79.)
- [van Dam et al., 2007] van Dam, E. R., Husslage, B., and den Hertog, D. (2007). Maximin latin hypercube designs in two dimensions. *Operations Research*, 55:158–169. (Citado en la página 8.)
- [van de Lindt and Niedzwecki, 2002] van de Lindt, J. and Niedzwecki, J. M. (2002). An inverse-reliability approach to generating composite seismic response spectra. *International Journal of Modelling and Simulation*, 22(1):47–56. (Citado en la página 61.)
- [Van Der Maaten et al., 2009] Van Der Maaten, L., Postma, E., and Van den Herik, J. (2009). Dimensionality reduction: a comparative. *J Mach Learn Res*, 10:66–71. (Citado en las páginas XVII, 39, and 40.)
- [Viana et al., 2010] Viana, F. A., Venter, G., and Balabanov, V. (2010). An algorithm for fast optimal latin hypercube design of experiments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82:135–156. (Citado en la página 8.)
- [Weiji and Li, 1994] Weiji, L. and Li, Y. (1994). An effective optimization procedure based on structural reliability. *Computers and Structures*, 52(5):1061 – 1067. (Citado en la página 79.)

- [White and Ayyub, 1987] White, G. J. and Ayyub, B. M. (1987). Reliability-based design format for marine structures. *Journal of Ship Research*, 31:60–69. (Citado en la página 10.)
- [Xiang and Liu, 2009] Xiang, Y. and Liu, Y. (2009). Inverse first-order reliability method for probabilistic fatigue life prediction of composite laminates under multiaxial loading. *Journal of Aerospace Engineering*, 24(2):189–198. (Citado en la página 61.)
- [Xiang and Liu, 2011] Xiang, Y. and Liu, Y. (2011). Application of inverse first-order reliability method for probabilistic fatigue life prediction. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26(2):148–156. (Citado en las páginas 59 and 61.)
- [Ye et al., 2000] Ye, K. Q., Li, W., and Sudjianto, A. (2000). Algorithmic construction of optimal symmetric latin hypercube designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 90(1):145 – 159. (Citado en la página 9.)
- [Yu, 2011] Yu, H. (2011). *Optimisation fiabiliste des structures: méthodes et applications au contrôle des vibrations*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon. (Citado en la página 79.)
- [Zhang et al., 2013] Zhang, G., Wang, G., Li, X., and Ren, Y. (2013). Global optimization of reliability design for large ball mill gear transmission based on the kriging model and genetic algorithm. *Mechanism and Machine Theory*, 69:321–336. (Citado en la página 81.)

Índice alfabético

- Códigos de diseño
 - Calibración, 14
 - Clasificación, 17
- Confiabilidad, 4
- Confiabilidad inversa
 - Aplicaciones, 61
 - Definición, 59
 - Problemas, 60
- FORM, 11
- FOSM, 10
- Función de estado límite, 3
- Gráfico de Confiabilidad
 - Características, 47
- Latin Hypercube Sampling (LHS), 6
- Método Monte- Carlo, 5
- Probabilidad de falla, 4
- Procesos Estocásticos
 - Caos Homogéneo, 33
 - Expansión de Karhunen-Loève, 27
 - Solución en espectro no racional, 32
 - Solución en espectro racional, 29
 - Expansión de Neumann, 32
 - Representación, 26
- RBO
 - Clasificación, 77
 - Definición, 75
 - Iteración con ciclo doble, 78
 - Iteración con ciclo sencillo, 78
 - Solución, 77
- Reducción Dimensional
 - Definición, 39
 - Métodos convexos, 39
 - Métodos no convexos, 39
- RO
 - Definición, 93
 - Formulación, 96
- SFEM
 - Definición, 26
 - Desarrollo Espectral, 34

Desarrollo no Espectral (Monte Carlo), 34

Representación, 33

Superficie de falla, 3

Transformación Polar

Definición, 41