Análisis espectral de operadores de Schrödinger ergódicos

Pablo Blas Tupac Silva Barbosa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2022

Análisis espectral de operadores de Schrödinger ergódicos

Pablo Blas Tupac Silva Barbosa

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. Rafael José Álvarez Bilbao

Codirector:
Ph.D. Serafín Bautista Díaz

Línea de Investigación:
Sistemas dinámicos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2022

A mis papás, por su acompañamiento y amor;
a mi hermana, por ser un ejemplo de virtud;
y a mi amigo fiel Pancho.

Agradecimientos

Quiero agradecerle a mi director Rafael Álvarez por su acompañamiento, generosidad y paciencia a lo largo del proyecto. No hubo una sola duda que el profesor Rafael no estuviera dispuesto a ayudarme a resolver de la mejor manera. Sin su orientación hubiera sido imposible sacar adelante el trabajo. Agradezco también a mi codirector Serafín Bautista por su respaldo y sugerencias. Sus exposiciones en el Seminario de sistemas dinámicos y en el curso Ecuaciones diferenciales ordinarias fueron de gran importancia para ayudarme a contextualizar el trabajo y para apreciar el encanto de la teoría de sistemas dinámicos.

Tuve la fortuna de encontrarme con excelentes profesores a lo largo de la maestría. Estoy muy agradecido con todos ellos por sus lecciones. Me gustaría destacar a dos: primero, a Carolina Neira, pues su curso Variedades diferenciables es uno de los desafíos académicos más grandes que he afrontado y de los que más he aprendido. Segundo, a Leonardo Rendón, ya que su claridad y rigor me motivaron a hacer este trabajo de grado en la línea de los cursos que tomé con él.

Por último y más importante, quiero agradecerle a mi familia. El apoyo de mi papá fue lo que me permitió cursar y sacar adelante la maestría. Él es mi ejemplo a seguir. También le agradezco a mi mamá por sus enseñanzas, pues ha sido mi profesora toda la vida, y por su acompañamiento y respaldo constante todos los días. Hacer la maestría en matemáticas era un anhelo personal que tenía desde hace mucho tiempo. Haber tenido la posibilidad de cumplir ese sueño estando en compañía de mi familia era impensable meses atrás y resultó ser, sin duda, un tiempo de mucha felicidad. También agradezco a los amigos con los que pude compartir en este tiempo: Walter, Rolando y Juan Sebastián.

Análisis espectral de operadores de Schrödinger ergódicos

Resumen

En este trabajo final de maestría estudiamos los tipos espectrales de las familias de operadores de Schrödinger unidimensionales discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en las que el potencial de H_ω está dado por $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$, para $n \in \mathbb{Z}$, donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua y T es un homeomorfismo ergódico en un espacio compacto Ω. Con base en la investigación de Boshernitzan y Damanik (2008), definimos las propiedades de repetición topológica y métrica en el sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ y demostramos detalladamente que cada una de estas propiedades es condición suficiente para que el espectro puramente continuo sea una propiedad genérica de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. La principal herramienta del trabajo es el lema de Gordon, del cual proponemos una demostración paso a paso y analizamos sus implicaciones. También exponemos y demostramos dos resultados propios que generalizan el teorema central de la investigación citada y discutimos ejemplos de aplicación.

Palabras clave: operadores de Schrödinger, espectro continuo, ergodicidad, propiedad de repetición, propiedad de repetición topológica, propiedad de repetición métrica.

Spectral analysis of ergodic Schrödinger operators

Abstract

In this thesis we study the spectral types of the families of discrete one-dimensional Schrödinger operators $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ in which the potential of H_ω is given by $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$, for $n \in \mathbb{Z}$, where $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is a continuous function and T is an ergodic homeomorphism on a compact space Ω. Based on the research of Boshernitzan and Damanik (2008), we define the topological and metric repetition properties on the dynamical system $\{\Omega, T\}$ and show that each of these properties is a sufficient condition for the purely continuous spectrum to be a generic property of $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. The main tool of the work is Gordon's lemma, of which we propose a step-by-step demonstration and analyze its implications. We propose two generalizations of the main theorem of the above research and discuss examples of application.

Keywords: Schrödinger operators, continuous spectrum, ergodicity, repetition property, topological repetition property, metric repetition property.

Contenido

Agradecimientos VII

Resumen IX

Introducción 1

1. Fundamentos de teoría espectral y de sistemas dinámicos 4
1.1. Definiciones básicas 4
1.2. Propiedades espectrales de operadores acotados autoadjuntos 11
1.3. Sistemas dinámicos y ergodicidad 14

2. Operadores de Schrödinger ergódicos 18
2.1. Historia e importancia de los operadores de Schrödinger 18
2.2. Investigaciones anteriores relacionadas 25

3. El lema de Gordon 29
3.1. Características de la función potencial de Gordon 29
3.2. Demostración del lema 34

4. Espectro continuo de los operadores de Schrödinger ergódicos 37
4.1. Las propiedades de repetición 37
4.2. El espectro continuo es genérico: enfoque topológico 42
4.3. El espectro continuo es genérico: enfoque de la teoría de la medida 49

5. Aplicaciones-Ejemplos 57
5.1. *Shift* ergódico en el toro $\mathbb{T}^d$ 57
5.2. *Skew Shift* en el toro $\mathbb{T}^2$ 59

6. Conclusiones y discusión 62

A. Propiedades genéricas en topología y en teoría de la medida 65

Bibliografía 71

Introducción

Un operador de Schrödinger describe el comportamiento de un sistema conservativo de partículas de escala atómica o molecular en ausencia de fuerzas relativistas. Estos operadores son a la mecánica cuántica lo que la segunda ley de Newton es a la mecánica clásica, puesto que permiten representar la energía total de un sistema en función de la posición y del momento de las partículas que lo componen.

El origen de los operadores de Schrödinger no está plenamente establecido. La versión más aceptada sugiere que estos operadores fueron propuestos por primera vez por el físico austriaco Erwin Schrödinger, en el marco de sus investigaciones experimentales sobre la dinámica del átomo de hidrógeno en 1926 (Renn, 2013). Desde entonces, la teoría de operadores de Schrödinger ha sido una herramienta de importancia capital en campos como la física del estado sólido o el desarrollo de nuevos materiales. De acuerdo con Barry Simon (2000):

"[In the twentieth century] one can make the case that the most spectacular scientific development was the discovery of nonrelativistic quantum mechanics in the first quarter of the century. Its aftermath not only changed the physicist's view of matter but it set the stage for the revolutions in chemistry, our understanding of stars, biology, and practical electronics."

A pesar de su origen fenomenológico, la teoría de operadores de Schrödinger se erige como una rama autónoma de las matemáticas. Su estudio vincula nociones de ecuaciones diferenciales, análisis geométrico y teoría de la medida, entre otros dominios. En este trabajo estudiamos las propiedades de los operadores de Schrödinger unidimensionales discretos. A grandes rasgos, estos son operadores definidos en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ de la forma:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V)\psi \end{aligned}$$

donde Δ_d es el operador laplaciano y V es la función potencial. La definición formal de estos operadores se presenta en el capítulo 2. La teoría espectral de operadores de Schrödinger estudia las propiedades espectrales de H de acuerdo con las características de la función V.

Dado un sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ es posible definir para cada $\omega \in \Omega$ un operador de Schrödinger $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$ cuya función potencial está dada por $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$. Este planteamiento relaciona la teoría de sistemas dinámicos con la teoría espectral de operadores de Schrödinger. En este contexto, el análisis se centra en las propiedades de la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, en particular, aquellas que se satisfacen para un elemento genérico o para "casi todos" los elementos de dicha familia. Si la transformación T en Ω es ergódica, entonces $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de operadores de Schrödinger ergódicos.

La teoría de operadores de Schrödinger ergódicos ha sido intensamente estudiada a lo largo de más de cincuenta años y muchos de sus problemas todavía se encuentran abiertos. La cuestión central en esta teoría consiste en estudiar cómo la estructura del sistema $\{\Omega, T\}$ incide sobre las propiedades espectrales de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Establecer los tipos espectrales (puntual, absolutamente continuo y singular continuo) observados en esta familia de operadores es de interés ya que estos determinan el comportamiento de las partículas en ciertos sistemas.

Un ejemplo representativo de operador de Schrödinger ergódico es el operador *almost Mathieu*: $H_\omega = \Delta_d + 2\lambda\cos(2\pi(\omega + n\alpha))$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$, para α un número irracional y $|\lambda| < 1$. El espectro de H_ω es absolutamente continuo y es un conjunto de Cantor, según el célebre problema de los diez martinis (Damanik, 2017). Otro resultado de referencia se conoce como localización de Anderson. Este afirma que si $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de operadores de Schrödinger unidimensionales donde, para cada $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$ se tiene que $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces un elemento genérico de la familia $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ tiene espectro puramente puntual.

El objetivo del presente trabajo es identificar condiciones suficientes para que un elemento genérico de la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ no tenga espectro puntual, y por tanto su espectro sea puramente continuo. El trabajo se apuntala en dos herramientas teóricas:

(i) Lema de Gordon: este es un postulado clásico de la teoría espectral de operadores de Schrödinger que permite descartar la existencia del espectro puntual de un operador, dadas ciertas características de la función potencial.

(ii) Las propiedades de repetición topológica y métrica: estas propiedades fueron introducidas por Boshernitzan y Damanik (2008) y proveen al sistema $\{\Omega, T\}$ de una estructura que permite, usando el lema de Gordon, mostrar que un operador genérico H_ω de la familia $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ tiene espectro puramente continuo.

En este trabajo demostramos en detalle los teoremas principales del trabajo de Boshernitzan y Damanik (2008). Según los autores, tanto la propiedad de repetición topológica como la propiedad de repetición métrica son condiciones suficientes para que el espectro puramente continuo sea una propiedad genérica de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, donde el potencial $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$ está dada por un homeomorfismo ergódico T en un espacio compacto Ω.

Los dos principales aportes del trabajo son: primero, que se expone una demostración detallada del lema de Gordon haciendo uso únicamente de propiedades elementales de los operadores de Schrödinger. Lo anterior es un valor agregado, pues a pesar de que el lema de Gordon ha sido ampliamente referenciado en disintas investigaciones en los últimos cuarenta años (Simon 1982, Cycon et al. 1987, Lenz 2002, Damanik 2017, entre otros), en la literatura estudiada para la elaboración de este trabajo fue imposible encontrar una demostración de dicho lema. Segundo, que se propone una generalización del teorema central del trabajo de Boshernitzan y Damanik (2008), pues se debilitan las hipótesis usadas por los autores.

A partir de resultados básicos de teoría espectral y de sistemas dinámicos, los cuales se referencian de manera sistemática en el primer capítulo del documento, se procura que este trabajo sea una presentación autocontenida (en la medida de lo posible) en la que se demuestran detalladamente los teoremas que responden al objetivo propuesto. A lo largo del trabajo se hace énfasis en la motivación física de los planteamientos expuestos y se busca que estos sean accesibles a quienes no estén familiarizados con los operadores de Schrödinger.

Además de esta introducción, el documento se divide en seis capítulos. En el **capítulo 1** se estabalece el lenguaje y se reseñan los resultados de teoría espectral y de sistemas dinámicos que le dan contexto al trabajo. En el **capítulo 2** se definen los operadores de Schrödinger ergódicos y se comentan algunos teoremas de referencia. En el **capítulo 3** se expone y se demuestra el lema de Gordon. En el **capítulo 4** se estudian los teoremas principales del trabajo, que permiten determinar el espectro genérico de los operadores de Schrödinger ergódicos. En el **capítulo 5** se presentan ejemplos de aplicación de los teoremas presentados en el capítulo anterior. Por último, en el **capítulo 6** se concluye.

Capítulo 1

Fundamentos de teoría espectral y de sistemas dinámicos

En este capítulo se presentan las nociones de teoría espectral y de sistemas dinámicos que le dan contexto a la definición de los operadores de Schrödinger ergódicos. Para esto nos basamos en Kreyszig (1978, capítulos 7 y 9) y en Reed y Simon (1980, capítulo VII).

El capítulo se divide en tres secciones. En la primera, se establece el lenguaje y los resultados básicos de la teoría espectral en los que se enmarca el trabajo. En la segunda, se estudia la teoría espectral de operadores acotados y autoadjuntos. En la tercera, se presentan las definiciones y resultados de teoría ergódica requeridos para los objetivos del trabajo.

1.1. Definiciones básicas

La primera definición a referir es la de espectro y resolvente de un operador lineal. El espectro de un operador es una generalización, en espacios de dimensión infinita, del concepto de valor propio de una transformación lineal.

Definición 1.1.1. (*Kreyszig, 1978 definition 7.2-1, p.371*). Sea X un espacio vectorial normado y $T : \mathcal{D}(T) \to X$ un operador lineal. Considere el operador $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$. El *resolvente* de T es el conjunto:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R_\lambda(T) \text{ existe, es acotado y está densamente definido en } X\}$$

El *espectro* de T es el conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, que a su vez se categoriza en:

- *Espectro puntual* $\sigma_p(T)$: $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $R_\lambda(T)$ no existe (λ es valor propio de T).
- *Espectro continuo* $\sigma_c(T)$: $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $R_\lambda(T)$ existe pero no es acotado.
- *Espectro residual* $\sigma_r(T)$: $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $R_\lambda(T)$ existe y es acotado pero $\mathcal{D}(T)$ no es denso en X.

De acuerdo con la definición 1.1.1, dado un operador lineal T en un espacio vectorial normado X, los conjuntos: $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ son mutuamente disjuntos. En consecuencia, el plano complejo puede representarse como la unión disjunta:

$$\mathbb{C} = \rho(T) \sqcup \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$$

Definición 1.1.2. El operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$, donde X y Y son espacios vectoriales normados, es *acotado* si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

Si T es un operador acotado, entonces la *norma de* T está dada por:

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0$$

Teorema 1.1.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T : X \to X$ un operador lineal acotado. Entonces $\sigma(T)$ es compacto. Además:*

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$$

Demostración. Primero se muestra que $\sigma(T)$ es cerrado y luego que $\sigma(T)$ es acotado.

$\sigma(T)$ es cerrado:
De acuerdo con la definición 1.1.1: $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Para demostrar que $\sigma(T)$ es cerrado basta con demostrar que $\rho(T)$ es abierto. Suponga que $\lambda_0 \in \rho(T)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Observe que:

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I) \cdot [I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]$$

El operador: $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 I)^{-1} = T_{\lambda_0}^{-1}$ existe y es acotado pues por hipótesis $\lambda_0 \in \rho(T)$. Considere el operador: $V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$. De acuerdo con la representación de un operador en series de Neumann (*Kreyszig, 1978 theorem 7.3-1, p. 375*), el operador V^{-1} está dado por:

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j$$

para todo λ tal que:

$$\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1, \quad \text{equivalentemente:} \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

De esta última desigualdad se sigue que la inversa del operador T_λ es:

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0}, \quad \text{si:} \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

En resumen: dado $\lambda_0 \in \rho(T)$, si λ es tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ entonces $\lambda \in \rho(T)$. Se concluye que $\rho(T)$ es abierto y por lo tanto $\sigma(T)$ es cerrado.

$\sigma(T)$ es acotado:
Sea $\lambda \neq 0$. El operador R_λ (definición 1.1.1) puede representarse como:

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{1}{\lambda}T)^j$$

La serie en la igualdad anterior converge cuando:

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| > \|T\|$$

Es decir que si $|\lambda| > \|T\|$ entonces R_λ está definido y $\lambda \in \rho(T)$. Dado que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$:

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$$

Se concluye que $\sigma(T)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$ y por lo tanto compacto. $\square$

Ejemplo 1.1.4. Considere el operador multiplicación $M : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $Mx(t) = tx(t)$. Observe que el espectro puntual de M es vacío, ya que si λ fuese un valor propio de M entonces $tx(t) = \lambda x(t)$, pero esto ocurre únicamente cuando $x(t)$ es la función nula. De otra parte:

$$(M - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t) \quad \Rightarrow \quad (M - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{t - \lambda}x(t)$$

Según esta última igualdad, el operador $(M - \lambda I)^{-1}$ no está definido cuando $\lambda = t$. Dado que $x(t) \in C[0,1]$, se concluye que el espectro de M es $\sigma(M) = [0,1]$.

La teoría de operadores de Schrödinger tiene origen en problemas de caracter físico. En este dominio ocupan un papel central los espacios de Hilbert, que son una generalización del concepto de espacio euclídeo.

Definición 1.1.5. Un *espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial completo dotado de un *producto interno*, es decir una función: $\langle , \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que satisface las propiedades:

(i) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ y además: $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

El producto interno $\langle , \rangle$ induce la definición de la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ y la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, para todo x y y en $\mathcal{H}$.

En mecánica cuántica, las propiedades de un sistema físico que son objeto de medición experimental se denominan *observables*. En el caso de sistemas unidimensionales, los observables son operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.6. El espacio $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ de funciones cuadrado integrables se define como:

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}) = \{\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathcal{D}(\Psi)} \|\Psi(q)\|^2 dq < \infty\}$$

donde el producto interno está dado por:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \overline{\Psi(q)} \Phi(q) dq$$

Definición 1.1.7. El espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ es la versión discreta de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ y se define como:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty\}$$

dotado del producto interno:

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\psi(n)} \varphi(n)$$

Observación 1.1.8. Las definiciones 1.1.6 y 1.1.7 se extienden al estudio de sistemas en dimensión superior sustituyendo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}^n$, respectivamente. La justificación para enfocarse en el caso unidimensional es que esto permite prescindir de detalles técnicos que no son el objetivo central de este trabajo. No obstante, en los capítulos posteriores se comentan las implicaciones de los teoremas estudiados para sistemas en dimensión mayor.

Definición 1.1.9. Sea $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal, donde $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert. El *adjunto* de T es el operador $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que:

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T^* \varphi \rangle \tag{1-1}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(T)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$.

$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *simétrico* si $\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$, en cuyo caso $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$. Si $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$, entonces $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *autoadjunto*.

Ejemplo 1.1.10. El operador *Shift*:

$$\begin{aligned} S : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) \end{aligned}$$

El adjunto de S está dado por:

$$\begin{aligned} S^* : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n-1) \end{aligned}$$

En efecto, para todo ψ y φ en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
\langle S\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \langle \psi(n+1), \varphi(n)\rangle && \text{definición de } S \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\psi(n+1)}\varphi(n) && \text{definición de } \langle , \rangle \text{ en } \ell^2(\mathbb{Z}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\psi(n)}\varphi(n-1) && \text{reindexación de } n+1 \text{ por } n \text{ en } \mathbb{Z} \\
&= \langle \psi(n), \varphi(n-1)\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \text{ en } \ell^2(\mathbb{Z}) \\
&= \langle \psi(n), S^*\psi(n)\rangle && \text{definición de } S^*
\end{aligned}$$

Un razonamiento exactamente análogo al anterior permite concluir que:

$$\langle S^*\psi(n), \varphi(n)\rangle = \langle \psi(n), S\psi(n)$$

es decir que el adjunto de S^* es el operador S.

El siguiente teorema presenta propiedades de interés de los operadores autoadjuntos.

Teorema 1.1.11. *Sea $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotado y autoadjunto, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Entonces:*

(i) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Vectores propios asociados a valores propios distintos de A son ortogonales.

(iii) El espectro residual de A es vacío: $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Demostración.

(i) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$:

Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Se va a demostrar que si $\beta \neq 0$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y por tanto $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (definición 1.1.1). Considere $x \in \mathcal{H}$ ($x \neq 0$) y sea $A_\lambda = A - \lambda I$. Dado que $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, ya que A es autoadjunto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \Rightarrow \quad & \overline{\langle A_\lambda x, x\rangle} = \langle Ax, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle \\
\Rightarrow \quad & \overline{\langle A_\lambda x, x\rangle} - \langle A_\lambda x, x\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle \\
\Rightarrow \quad & \overline{\langle A_\lambda x, x\rangle} - \langle A_\lambda x, x\rangle = 2i\beta\|x\|^2
\end{aligned}$$

Observe que $\overline{\langle A_\lambda x, x\rangle} - \langle A_\lambda x, x\rangle = -2Im\langle A_\lambda x, x\rangle$. De esta última igualdad y del desarrollo anterior se sigue que $2i\beta\|x\|^2 = -2Im\langle A_\lambda x, x\rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned}
|\beta|\|x\|^2| = |Im\langle A_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle A_\lambda x, x\rangle| \Rightarrow \quad & |\beta|\|x\|^2| \leq \|A_\lambda x\|\|x\| && \text{Cauchy-Schwarz} \\
\Rightarrow \quad & |\beta|\|x\| \leq \|A_\lambda x\| && \text{pues } \|x\| \neq 0
\end{aligned}$$

Ahora, para todo operador autoadjunto A en el espacio $\mathcal{H}$ se tiene el siguiente resultado: $\lambda \in \rho(A)$ si y solamente si existe $c > 0$ tal que (*Kreyszig, 1978 theorem 9.1-2, p.461*):

$$c\|x\| \leq \|A_\lambda x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Con base en este resultado, del desarrollo anterior se sigue que $\lambda \in \rho(A)$ cuando $\beta \neq 0$. Se concluye que si $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$ entonces $\beta = 0$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Vectores propios asociados a valores propios distintos de A son ortogonales:

Suponga que λ y $\mu \in \sigma_p(A)$ con $\lambda \neq \mu$. Esto es $Av = \lambda v$ y $Au = \mu u$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda\langle v, u\rangle = \langle \lambda v, u\rangle &= \langle Av, u\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \text{ y } Av = \lambda v \\
&= \langle v, Au\rangle && A \text{ es autoadjunto} \\
&= \langle v, \mu u\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \text{ y } Au = \mu u \\
&= \overline{\mu}\langle v, u\rangle = \mu\langle v, u\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \text{ y } \mu = \overline{\mu}
\end{aligned}$$

es decir que $\lambda\langle v, u\rangle = \mu\langle v, u\rangle$ y por lo tanto $\langle v, u\rangle = 0$ pues $\lambda \neq \mu$. Se concluye que v y u son ortogonales.

(iii) El espectro residual de A es vacío: $\sigma_r(A) = \emptyset$:

Suponga que $\lambda \in \sigma_r(A)$, es decir, que el operador A_λ existe pero $\mathcal{D}(A_\lambda^{-1})$ no es denso en $\mathcal{H}$. Esto implica que $\overline{\mathcal{D}(A_\lambda^{-1})} \subsetneq \mathcal{H}$ y por lo tanto existe $y \neq 0$ que pertenece al complemento ortogonal de $\overline{\mathcal{D}(A_\lambda^{-1})}$. Entonces para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x, y\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle x, A_\lambda y\rangle = 0 && \text{pues } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } A \text{ es autoadjunto} \\
&\Rightarrow \quad \langle A_\lambda y, A_\lambda y\rangle = 0 && \text{tomando } x = A_\lambda y \\
&\Rightarrow \quad \|A_\lambda y\| = 0 \\
&\Rightarrow \quad Ay = \lambda y
\end{aligned}$$

Pero la última igualdad en el desarrollo anterior implica que $\lambda \in \sigma_p(A)$, lo cual contradice la hipótesis de que $\lambda \in \sigma_r(A)$. De esta contradicción se concluye que $\sigma_r(A) = \emptyset$.

□

Caso de estudio: el operador laplaciano discreto

El operador laplaciano es de utilidad para modelar fenómenos como la conducción de calor o el electromagnetismo. Su definición en el espacio $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta : \mathcal{D}(\Delta) \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) \\
\Psi &\mapsto -\frac{\partial^2}{\partial q^2}\Psi
\end{aligned} \tag{1-2}$$

En el segundo capítulo del documento se muestra que este operador es la base para la formulación de los operadores de Schrödinger. Para este trabajo es de interés la versión discreta de Δ, cuya definición y propiedades se estudian en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.12. El operador laplaciano discreto (*Cycon et al., 1987 9.1, p.165*):

$$\begin{aligned}
\Delta_d : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\
\psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1)
\end{aligned} \tag{1-3}$$

tiene las siguientes propiedades:

(i) Δ_d es acotado.

(ii) Δ_d es autoadjunto.

(iii) $\sigma_r(\Delta_d) = \emptyset$.

(iv) $\sigma(\Delta_d) = [-2, 2]$.

Demostración.

(i) Δ_d es acotado:

De acuerdo con el ejemplo 1.1.10, el operador Δ_d puede escribirse en términos de los operadores S y S^* de la siguiente manera:

$$\Delta_d(\psi(n)) = \psi(n-1) + \psi(n+1) = S^*\psi(n) + S\psi(n) = (S + S^*)\psi(n) \tag{1-4}$$

Donde:

$$\|S\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|S\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n+1)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = 1 \tag{1-5}$$

Igualmente:

$$\|S^*\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|S^*\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n-1)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = 1 \tag{1-6}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\Delta_d\| &= \|S + S^{-1}\| && \text{ecuación (1-4)} \\ &\leq \|S\| + \|S^{-1}\| && \text{desigualdad triangular} \\ &= 2 && \text{ecuaciones (1-5) y (1-6)} \end{aligned}$$

luego Δ_d es acotado.

(ii) Δ_d es autoadjunto:

Para todo ψ y φ en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_d\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \langle (S + S^*)\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{ecuación (1-4)} \\ &= \langle S\psi(n), \varphi(n)\rangle + \langle S^*\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \\ &= \langle \psi(n), S^*\varphi(n)\rangle + \langle \psi(n), S\varphi(n)\rangle && \text{ejemplo 1.1.10} \\ &= \langle \psi(n), (S + S^*)\varphi(n) && \text{definición de } \langle , \rangle \\ &= \langle \psi(n), \Delta_d\varphi(n)\rangle && \text{ecuación (1-4)} \end{aligned}$$

Se concluye que Δ_d es autoadjunto.

(iii) $\sigma_r(\Delta_d) = \emptyset$:

Según el literal *(iii)* del teorema 1.1.11, el espectro residual de los operadores autoadjuntos es vacío. Como Δ_d es autoadjunto, entonces $\sigma_r(\Delta_d) = \emptyset$. En el tercer capítulo del trabajo se demostrará que, además, $\sigma_p(\Delta_d) = \emptyset$.

(iv) $\sigma(\Delta_d) = [-2, 2]$:

De acuerdo con la representación de $\psi(n)$ en serie discreta de Fourier (Zhecheva, 2008):

$$\mathcal{F}(\{\psi(n)\})(\kappa) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)e^{-i\kappa n}, \quad \forall \psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\{\Delta_d\psi(n)\})(\kappa) &= \mathcal{F}(\{\psi(n-1) + \psi(n+1)\})(\kappa) && \text{definición de } \Delta_d \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n-1)e^{-i\kappa n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n+1)e^{-i\kappa n} && \text{definición de } \mathcal{F} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)e^{-i\kappa(n+1)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)e^{-i\kappa(n-1)} && \text{reindexación de } n \\
&= (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n)e^{-i\kappa n})(e^{-i\kappa} + e^{i\kappa}) \\
&= \mathcal{F}(\{\psi(n)\})(\kappa) \cdot (2\cos(\kappa)) && \text{definición de } \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que:

$$(\Delta_d - \lambda I)\psi(n) = (2\cos(\kappa) - \lambda)\psi(n) \quad \Rightarrow \quad (\Delta_d - \lambda I)^{-1}\psi(n) = \frac{1}{(2\cos(\kappa) - \lambda)}\psi(n)$$

Es decir que el operador $(\Delta_d - \lambda I)^{-1}$ existe y está definido para $\psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ siempre que $2\cos(\kappa) \neq \lambda$. Esto equivale a que $\lambda \in \rho(\Delta_d)$ si y solo si $\lambda \notin [-2, 2]$. Se concluye que $\sigma(\Delta_d) = [-2, 2]$.

□

1.2. Propiedades espectrales de operadores acotados autoadjuntos

En la presente sección se reseñan algunos resultados clásicos de análisis funcional que sirven de contexto para los capítulos posteriores del trabajo. Un tratamiento en detalle de los teoremas expuestos puede encontrarse en la bibliografía referida.

Teorema 1.2.1. *(**Cálculo funcional continuo.** Reed y Simon, 1980 theorem VII.1, p.222) Sea A un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe una única función $\phi : C(\sigma(A)) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ con las siguientes propiedades:*

(i) *ϕ es un homomorfismo:*

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g), \quad \phi(\lambda f) = \lambda\phi(f), \quad \phi(1) = I, \quad \phi(\overline{f}) = \phi(f)^*$$

(ii) *ϕ es continua: $\|\phi(f)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} \leq C\|f\|_\infty$.*

(iii) *Sea f la función $f(x) = x$. Entonces $\phi(f) = A$.*

(iv) *Si $A\psi = \lambda\psi$ entonces $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$.*

(v) $\sigma(\phi(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ *(teorema del mapeo espectral).*

(vi) *Si $f \geq 0$ entonces $\phi(f) \geq 0$.*

(vii) $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$.

La función ϕ en el teorema 1.2.1 permite definir funciones sobre operadores autoadjuntos. Lo anterior es la base para la formulación de las medidas espectrales, como se muestra enseguida.

Teorema 1.2.2. *(**Riesz-Markov.** Reed y Simon, 1980 theorem IV.14, p.107) Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Para todo funcional lineal positivo acotado l en el espacio $C(X)$, existe una única medida de Borel μ definida en X tal que:*

$$l(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C(X)$$

De acuerdo con el teorema 1.1.3, si A es un operador acotado y autoadjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces su espectro $\sigma(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Considere el funcional:

$$\begin{aligned} L : C(\sigma(A)) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \langle \psi, f(A)\psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Si $f \in C(\sigma(A))$ es tal que $f \geq 0$, entonces $\langle \psi, f(A)\psi \rangle \geq 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Adicionalmente:

$$\begin{aligned} |L(f)|^2 &= |\langle \psi, f(A)\psi \rangle|^2 \\ &\leq \|\psi\|^2 \|f(A)\|^2 \qquad \text{desigualdad de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|\psi\|^2 \|f\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Luego L es un funcional lineal positivo y acotado en $C(\sigma(A))$. Por el teorema de Riesz-Markov (teorema 1.2.2), existe una única medida μ_ψ tal que:

$$L(f) = \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f d\mu_\psi \tag{1-7}$$

Definición 1.2.3. Sea A un operador acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La medida μ_ψ (ecuación 1-7) se denomina *medida espectral asociada al vector $\psi \in \mathcal{H}$*. Como se observa, la medida μ_ψ tiene soporte en $\sigma(A)$.

El objetivo ahora es presentar una categorización estándar de las medidas espectrales. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ y considere el conjunto: $P = \{x \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$, denominado el conjunto de *puntos puros de la medida μ*. Se define la medida μ_{pp} de la siguiente manera:

$$\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in P \cap X} \mu(\{x\}) = \mu(P \cap X), \quad \forall X \subseteq \mathbb{R} \text{ medible} \tag{1-8}$$

Sea μ_{cont} la medida de Borel en $\mathbb{R}$: $\mu_{cont} = \mu - \mu_{pp}$. De acuerdo con la ecuación (1-8):

$$\mu_{cont}(\{p\}) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

En resumen, una medida de Borel μ en $\mathbb{R}$ se descompone en las medidas μ_{pp} y μ_{cont}:

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{cont} \tag{1-9}$$

Definición 1.2.4. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ y ν la medida de Lebesgue (definición A.0.10). La medida μ es:

- *Absolutamente continua con respecto a* ν: si $\nu(X) = 0$ implica que $\mu(X) = 0$.
- *Singular con respecto a* ν: si $\nu(X) = 0$ implica que $\mu(\mathbb{R} \setminus X) = 0$.

El siguiente teorema brinda una descomposición única de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, con lo cual es posible categorizar las medidas espectrales μ_ψ asociadas a cada $\psi \in \mathcal{H}$.

Teorema 1.2.5. *(**Descomposición de Lebesgue.** Reed y Simon, 1980 theorem I.14, p.22). Sea μ una medida de Borel. Entonces $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ de forma única, donde μ_{ac} es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y μ_{sing} es singular con respecto a la medida de Lebesgue.*

Del teorema 1.2.5 y de la ecuación (1-9) se concluye que cualquier medida de Borel μ en $\mathbb{R}$ tiene una descomposición canónica:

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing} \tag{1-10}$$

Proposición 1.2.6. Las medidas μ_{pp}, μ_{ac} y μ_{sing} son mutuamente singulares.

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ medible y suponga que $\mu_{pp}(X) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mu_{pp}(X) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu_{pp}(\mathbb{R} \setminus X) = \mu(X) \\
&\Rightarrow \quad \mu_{cont}(\mathbb{R} \setminus X) = 0 && \text{ecuación (1-9)} \\
&\Rightarrow \quad \mu_{ac}(\mathbb{R} \setminus X) = \mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus X) = 0 && \text{ecuación (1-10)}
\end{aligned}$$

luego la medida μ_{pp} es singular con respecto a μ_{ac} y a μ_{sing}. Ahora suponga que $\mu_{ac} = 0$:

$$\begin{aligned}
\mu_{ac}(X) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu_{ac}(\mathbb{R} \setminus X) = \mu(X) \\
&\Rightarrow \quad \mu_{pp}(\mathbb{R} \setminus X) = \mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus X) = 0 && \text{ecuación (1-10) y teorema 1.2.5}
\end{aligned}$$

Se concluye que μ_{ac} es singular con respecto a μ_{sing}. Un razonamiento análogo al recién presentado, reemplazando μ_{ac} por μ_{sing} permite concluir que μ_{sing} es singular con respecto a μ_{pp}. Por último, μ_{ac} es singular con respecto a μ_{sing} por el teorema 1.2.5. $\square$

Definición 1.2.7. Sea A un operador acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En virtud de la definición de medida espectral (definición 1.2.3) y de la proposición 1.2.6, se establecen los siguientes subespacios de $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{pp} &= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ es puramente puntual, es decir } \mu_\psi = \mu_{pp}\} \\
\mathcal{H}_{ac} &= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ es absolutamente continua, es decir } \mu_\psi = \mu_{ac}\} \\
\mathcal{H}_{sing} &= \{\psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi \text{ es singular, es decir } \mu_\psi = \mu_{sing}\}
\end{aligned}$$

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de la proposición 1.2.6 y la definición 1.2.7.

Teorema 1.2.8. *(Reed y Simon, 1980 theorem VII.4, p.230). Sea A un operador acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces:*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing} \tag{1-11}$$

Adicionalmente, cada uno de estos subespacios es invariante bajo A.

El teorema 1.2.8 induce la siguiente clasificación del espectro del operador autoadjunto A en el espacio $\mathcal{H}$. Esta clasificación es complementaria a la definición 1.1.1.

Definición 1.2.9. Sea A un operador acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se definen los conjuntos:

- *Espectro puntual*: $\sigma_{pp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ es valor propio de } A\}$.
- *Espectro absolutamente continuo*: $\sigma_{ac} = \{A\big|\mathcal{H}_{ac}\}$.
- *Espectro singular continuo*: $\sigma_{sing} = \{A\big|\mathcal{H}_{sing}\}$.

Por lo tanto: $\sigma(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)$.

Si $\sigma(A) = \sigma_{pp}(A)$, se afirma que A tiene espectro *puramente puntual*. De igual manera, si $\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)$, se afirma que A tiene espectro *puramente continuo*. Los elementos expuestos en esta sección son de importancia para la interpretación física del espectro de los operadores de Schrödinger, tema que se desarrolla en el capítulo 2 de este documento.

1.3. Sistemas dinámicos y ergodicidad

En esta sección se resumen los conceptos de teoría ergódica que permiten definir los operadores de Schrödinger ergódicos. La sección se basa en Viana y Oliveira (2016). Un sistema dinámico es la formalización matemática de la noción de un proceso determinístico en ciencias aplicadas. La característica esencial de un proceso determinístico es que los estados futuros de un sistema (físico, social, etc.) están completamente definidos por el conocimiento del estado inicial del sistema y del conjunto de reglas que rigen su evolución.

Definición 1.3.1. Un sistema dinámico es una tripla $\{\Omega, I, T^t\}$ donde Ω es el conjunto de puntos correspondiente a los posibles estados del sistema, denominado *espacio de estados*. I indica si el sistema es discreto ($I = \mathbb{Z}$) o continuo ($I = \mathbb{R}$) y $T^t : \Omega \to \Omega$ es la *ley de evolución del sistema* y satisface las dos siguientes condiciones:

(i) $T^0 = Id$.

(ii) $T^{t+s} = T^t \circ T^s$ para todo $t, s \in I$.

Este trabajo se enfoca en el estudio de sistemas dinámicos discretos. A partir de este momento se da por sentado que $I = \mathbb{Z}$ en la definición 1.3.1 y un sistema dinámico se refiere únicamente como $\{\Omega, T\}$, donde Ω es el espacio de estados y la ley de evolución $T : \Omega \to \Omega$ es invertible.

Definición 1.3.2. Sea $\{\Omega, T\}$ un sistema dinámico y $\omega \in \Omega$.

- La *órbita de* ω *bajo* T es el conjunto $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$.
- El sistema $\{\Omega, T\}$ es *transitivo* si existe $\alpha \in \Omega$ tal que $\overline{\{T^n\alpha\}}_{n\geq 0} = \Omega$. Es decir, la órbita de α es un subconjunto denso de Ω.
- El sistema $\{\Omega, T\}$ es *minimal* si para todo $\omega \in \Omega$: $\overline{\{T^n\omega\}}_{n\geq 0} = \Omega$.

Una categoría de sistemas dinámicos de interés en ciencias aplicadas es la de aquellos que tienen asociado un atributo que permanece invariante en el tiempo. Este es el caso de la energía en un sistema mecánico conservativo o el dinero en una economía cerrada.

Definición 1.3.3. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida (definición A.0.8) y $T : \Omega \to \Omega$.

- T es *medible* si $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$, para todo $A \in \mathcal{B}$.
- T *preserva la medida* μ, o equivalentemente, la medida μ es *invariante bajo* T, si la transformación T es medible y además $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.3.4. *Shift en el toro* $\mathbb{T}^d$. Considere el espacio:

$$\mathbb{T}^d = \{[x] = [(x_1, \ldots, x_d)] \mid \quad (x_1, \ldots, x_d) \sim (y_1, \ldots, y_d) \iff (x_1 - y_1, \ldots, x_d - y_d) \in \mathbb{Z}^d\}$$

y el espacio de medida $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \mu)$, donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{T}^d$ y μ la medida de Lebesgue (definición A.0.10). La transformación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^d &\to \mathbb{T}^d \\ [x] &\mapsto [x + \alpha], \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{1-12}$$

preserva medida, puesto que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones (*Viana y Oliveira, 2016 example 1.2.5, p.8*).

Ejemplo 1.3.5. *Skew Shift en el toro* $\mathbb{T}^2$. Considere el espacio:

$$\mathbb{T}^2 = \{[x] = [(x_1, x_2)] \mid \quad (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

y el espacio de medida $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \mu)$ del el ejemplo 1.3.4, para $d = 2$. La transformación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ [(x_1, x_2)] &\mapsto [(x_1 + 2\alpha, x_1 + x_2)], \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1-13}$$

preserva medida (*Moreira, 2020 example 1.3.11, p.5*).

Algunos elementos de teoría ergódica

El término ergódico está compuesto por las palabras griegas *ergon* (trabajo) y *odos* (trayectoria), y fue acotado por el físico austriaco Ludwig Boltzmann en el siglo XIX. De acuerdo con Viana y Oliveira (2016), la teoría ergódica se originó en 1838, cuando el matemático francés Joseph Liouville observó que un sistema mecánico conservativo admitía una medida de volumen invariante bajo transformaciones en el espacio de configuraciones del sistema.

La teoría ergódica estudia el comportamiento de un sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ con respecto a medidas definidas en Ω que son invariantes bajo la transformación T. Más en abstracto, esta teoría se asocia con el estudio cualitativo de la acción de grupos sobre espacios de medida. A continuación se presentan dos definiciones, ambas equivalentes, de transformación ergódica.

Definición 1.3.6. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Una transformación $T : \Omega \to \Omega$ que preserva medida es $\mu-$*ergódica*, o equivalentemente, la medida μ es $T-$*ergódica*, o el sistema $\{T, \mu\}$ es *ergódico*, si para todo $A \subseteq \Omega$ medible:

$$T^{-1}(A) = A \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \text{ ó } \mu(A) = 1$$

Definición 1.3.7. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Una transformación $T : \Omega \to \Omega$ que preserva medida es $\mu-$*ergódica* si dados dos conjuntos medibles con medida positiva U y V existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Una demostración de la equivalencia de las definiciones 1.3.6 y 1.3.7 se encuentra en Catsigeras (*2013 teorema 1.6.3, p.18*). El siguiente teorema brinda una caracterización útil de las transformaciones ergódicas.

Teorema 1.3.8. *(Walters, 1982 theorem 1.6, p.28) Sea* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espacio de probabilidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La transformación $T : \Omega \to \Omega$ *es* $\mu-$*ergódica.*

(ii) si $f \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$, donde:

$$\mathscr{L}^2(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \ f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty\}$$

es tal que $f \circ T = f$ en $\mu-$casi todas partes, entonces f es constante en $\mu-$casi todas partes (definición A.0.16).

A continuación se presentan dos ejemplos de transformaciones ergódicas. Estos ejemplos se usarán en el capítulo 5 para ilustrar las aplicaciones de los principales teoremas del trabajo. Los detalles sobre la demostración de estos ejemplos puede consultarse en la bibliografía citada.

Ejemplo 1.3.9. (*Viana y Oliveira, 2016 proposition 4.2.2, p.101*) La transformación $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ definida por $T(x) = x + \alpha$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ (ejemplo 1.3.4) es ergódica si y solamente si el conjunto $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ es independiente sobre los racionales, esto es:

$$k_0 + k_1\alpha_1 + \ldots + k_d\alpha_d = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = k_1 = \ldots = k_d = 0$$

Ejemplo 1.3.10. (*Moreira, 2020 example 6.3, p.32*) La transformación $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2\alpha, x_1 + x_2)$ (ejemplo 1.3.5) es ergódica si y solamente si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Capítulo 2

Operadores de Schrödinger ergódicos

En el presente capítulo se expone el marco de análisis general de la teoría de operadores de Schrödinger ergódicos. Esta parte del trabajo se basa en Simon (2000) y en Damanik (2017).

El capítulo se divide en dos secciones. En la primera, se definen los operadores de Schrödinger, se comenta la motivación física para su estudio y se presentan resultados básicos de referencia. En la segunda sección se exponen, a modo de revisión de literatura, los principales antecedentes de investigación relacionados con los objetivos y la metodología del trabajo.

2.1. Historia e importancia de los operadores de Schrödinger

Considere un sistema compuesto por una partícula q en un espacio $n-$dimensional. En mecánica clásica, el sistema es descrito por los vectores posición $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ y momento $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de la partícula. Es decir, el vector $\varphi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ contiene toda la información del sistema en un instante dado. Si el sistema es conservativo, lo cual significa que la energía es constante a lo largo del tiempo, entonces la función escalar:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto (E_c + V)\varphi \end{aligned} \tag{2-1}$$

describe la energía total del sistema, donde E_c y V representan la energía cinética y potencial, respectivamente. La función H en la ecuación (2-1) se denomina *función hamiltoniana*.

En el contexto de la mecánica cuántica, esto es, partículas de escala atómica o molecular, el sistema compuesto por una partícula en el espacio $n-$dimensional es descrito por una función $\Psi \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (definición 1.1.6) denominada *estado* o *función de onda*. La función Ψ guarda toda la información sobre las propiedades físicas del sistema. El principio de conservación de

energía en este sistema es representado por el operador hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) \\ \Psi &\mapsto (H_o + V)\Psi \end{aligned} \tag{2-2}$$

donde H_0 es la energía cinética, dada por el siguiente operador en $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$, en el que $\hbar$ es la constante de Planck simplificada, m la masa de la partícula y Δ el lapaciano (ecuación 1-2):

$$H_0\Psi = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Psi \tag{2-3}$$

y V representa la energía potencial y está dada por:

$$V\Psi = V \cdot \Psi, \quad \text{donde:} \quad V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2-4}$$

La forma de la función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está ligada a las características físicas del sistema estudiado. Aunque en principio no se imponen restricciones sobre esta función (podría ser no acotada, discontinua, etc.), este tema será discutido más adelante.

Definición 2.1.1. Un *operador de Schrödinger* es un operador:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) \\ \Psi &\mapsto (\Delta + V)\Psi \end{aligned} \tag{2-5}$$

donde Δ es el laplaciano en $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ y $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Un operador de Schrödinger es el hamiltoniano que describe la dinámica de un sistema conservativo de partículas a escala cuántica y en ausencia de fuerzas relativistas. La teoría de operadores de Schrödinger consiste en el estudio de las propiedades del operador H (ecuación 2-5) en función de las características del potencial V, tales como la autoadjuntez, la estructura de su espectro o su utilidad en otras ramas como la geometría o el análisis complejo.

La teoría de operadores de Schrödinger fue ampliamente desarrollada a lo largo del siglo XX. La primera etapa de interés fue la comprendida entre 1930 y 1950. En este lapso la investigación giró en torno a las condiciones para que los operadores fueran autoadjuntos, las propiedades de operadores periódicos, entre otros. La figura más prominente fue el japonés Tosio Kato, reconocido como el padre de la teoría moderna de Operadores de Schrödinger.

El segundo periodo en el que se experimentaron avances significativos en esta teoría fue la década de 1980, cuando el análisis se centró en los operadores cuasiperiódicos y con función potencial aleatoria. Estos modelos se comentan en la siguiente sección de este capítulo. En esta etapa sobresalen autores como Leonid Pastur y Alexander Gordon.

Actualmente la teoría sigue en desarrollo, puesto que muchos problemas aún se encuentran abiertos. Algunos de estos problemas tienen que ver con las propiedades espectrales de operadores de Schrödinger en dimensión superior y con aplicaciones a distintos problemas de la física del estado sólido. En este campo trabajan autores como Svetlana Jitomirskaya, Barry Simon o el ganador de la medalla Fields Artur Avila.

Figura 2-1.: Inscripción de la ecuación de Schrödinger en la tumba de los esposos Erwin y Annemarie Schrödinger en Tirol, Austria. Imagen tomada de Renn (2013).

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias brinda las herramientas para analizar en detalle los operadores de Schrödinger asociados a sistemas unidimensionales (Simon, 2000). Esto justifica la siguiente definición.

Definición 2.1.2. Un *operador de Schrödinger unidimensional* es un operador:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) \\ \Psi &\mapsto (\Delta + V)\Psi \end{aligned} \tag{2-6}$$

donde Δ es el laplaciano en $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ y $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Observación 2.1.3. Sea λ la suma de la energía potencial y cinética en el sistema unidimensional descrito por el hamiltoniano H (ecuación 2-6). Entonces:

$$H\Psi = \lambda\Psi \quad \Rightarrow \quad (H - \lambda I)\Psi = 0 \tag{2-7}$$

Si λ pertenece al resolvente de H (definición 1.1.1), el operador $(H - \lambda I)^{-1}$ existe y por lo tanto la única solución de (2-7) es la trivial $\Psi = 0$. En consecuencia, los posibles niveles de energía de un sistema de partículas para $\Psi \neq 0$ están dados por $\sigma(H)$, el espectro de H.

La observación 2.1.3 evidencia que la relación entre la teoría espectral y la teoría de operadores de Schrödinger es orgánica. En lo que resta de esta sección se profundiza en el vínculo entre estas dos teorías.

El hamiltoniano H puede formularse en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$. Esto implica reemplazar Δ por el laplaciano discreto Δ_d (ecuación 1-3) y definir la función potencial $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Definición 2.1.4. Un *operador de Schrödinger unidimensional discreto* es un operador:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V)\psi \end{aligned} \tag{2-8}$$

donde Δ_d es el laplaciano discreto en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

La motivación para este planteamiento es que los operadores de Schrödinger discretos son autoadjuntos, como se demuestra a continuación. Esto permite emplear los elementos de teoría espectral estudiados en el capítulo 1 para investigar las propiedades de dichos operadores.

Proposición 2.1.5. El operador $H = \Delta_d + V$ (ecuación 2-8) es autoadjunto.

Demostración. Sean $\psi(n)$ y $\varphi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle H\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \langle (\Delta_d + V)\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{definición de } H \\ &= \langle \Delta_d\psi(n), \varphi(n)\rangle + \langle V(n)\cdot\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{propiedades de } \langle , \rangle \\ &= \langle \psi(n), \Delta_d\varphi(n)\rangle + \langle V(n)\cdot\psi(n), \varphi(n)\rangle && \Delta_d \text{ es autoadjunto} \end{aligned} \tag{2-9}$$

De otra parte, observe que:

$$\begin{aligned} \langle V(n)\cdot\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{V(n)\psi(n)}\varphi(n) && \text{definición de } \langle , \rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\psi(n)V(n)}\varphi(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\psi(n)}V(n)\varphi(n) && \text{pues } V(n) \in \mathbb{R} \\ &= \langle \psi(n), V(n)\cdot\varphi(n)\rangle && \text{definición de } \langle , \rangle \end{aligned} \tag{2-10}$$

Reemplazando la ecuación (2-10) en la última igualdad de la ecuación (2-9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle H\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \langle \psi(n), \Delta_d\varphi(n)\rangle + \langle \psi(n), V(n)\varphi(n)\rangle \\ &= \langle \psi(n), (\Delta_d + V)\varphi(n) && \text{propiedades de } \langle , \rangle \\ &= \langle \psi(n), H\varphi(n)\rangle && \text{definición de } H \end{aligned}$$

Se concluye que H es autoadjunto. □

Corolario 2.1.6. Sea $H = \Delta_d + V$ un operador de Schrödinger unidimensional discreto. Si la función potencial V es acotada, entonces H es un operador acotado y autoadjunto.

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.1.5, el operador H es autoadjunto. Suponga que V es acotada. Entonces existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|V(n)| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En la proposición 1.1.12 se demostró que $\|\Delta_d\| \leq 2$. Por lo tanto:

$$\|H\| = \|\Delta_d + V\| \leq \|\Delta_d\| + \|V\| \leq 2 + K$$

Se concluye que H es acotado y autoadjunto. □

Un comentario sobre la física de los tipos espectrales

En física cuántica es de interés conocer el comportamiento en el largo plazo de una partícula en determinado sistema. Esto implica distinguir dos tipos de partículas: las que permanecen en cierta región del espacio frente a las que no. Las funciones de onda de estos dos tipos de partículas se denominan *estados ligados* y *estados dispersos*, respectivamente. La teoría espectral estudiada en el capítulo anterior es el instrumento teórico para esta distinción.

Sea $H = \Delta_d + V$ un operador de Schrödinger unidimensional discreto. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo asociada a este operador es:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{con condición inicial:} \quad \psi(0) = \psi_0$$

Esta ecuación describe la evolución temporal del sistema estudiado y su solución es:

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi_0$$

Anteriormente se demostró que el operador H es acotado y autoadjunto. Esto implica que el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ puede descomponerse como la suma directa (teorema 1.2.8):

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z})_{pp} \oplus \ell^2(\mathbb{Z})_{ac} \oplus \ell^2(\mathbb{Z})_{sc}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\ell^2(\mathbb{Z})_{pp} &= \{\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \mu_\psi \text{ es puramente puntual, es decir } \mu_\psi = \mu_{pp}\} \\
\ell^2(\mathbb{Z})_{ac} &= \{\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \mu_\psi \text{ es absolutamente continua, es decir } \mu_\psi = \mu_{ac}\} \\
\ell^2(\mathbb{Z})_{sing} &= \{\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \mu_\psi \text{ es singular, es decir } \mu_\psi = \mu_{sing}\}
\end{aligned}$$

y μ_ψ es la medida espectral asociada a ψ (definición 1.2.3). En consecuencia, para la función de onda $\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de una partícula del sistema estudiado, se tienen tres casos:

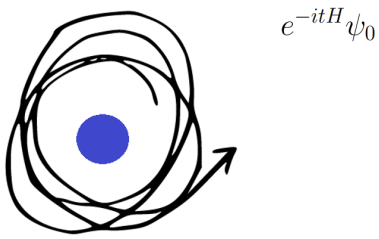
(i) $\underline{\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{pp}}$: la partícula permanece localizada en una región compacta del espacio. En este caso, ψ_0 es un estado ligado (figura **2-2**, panel a).

(ii) $\underline{\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{ac}}$: la partícula tiende a ajelarse de su estado inicial conforme el tiempo t aumenta. En este caso, ψ_0 es un estado disperso (figura **2-2**, panel b).

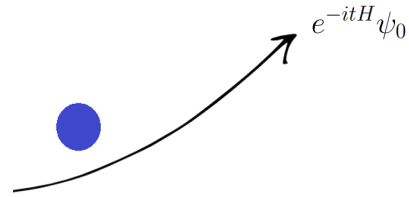
(iii) $\underline{\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{sc}}$: en este caso, para valores del tiempo t arbitrariamente grandes, la función de onda ψ_0 se comporta como un estado disperso (figura **2-2**, panel c).

Los detalles técnicos que justifican la anterior clasificación están fuera del alcance este trabajo. Una exposición puede encontrarse en Kohlman (*2018 sec.5.2, p.59*).

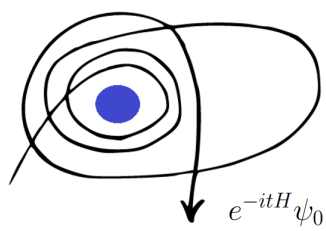
Ejemplo 2.1.7. *Hamiltoniano libre.* $H = \Delta_d + V$, con $V(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Este operador describe una partícula en el espacio en ausencia de fuerzas externas.



(a) Estados ligados: $\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{pp}$.



(b) Estados dispersos: $\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{ac}$.



(c) Estados dispersos: $\psi_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})_{sc}$.

Figura 2-2.: Dinámica de partículas en sistemas cuánticos de acuerdo con la clasificación de la función de onda ψ_0 en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ (Kohlman, 2018).

Ejemplo 2.1.8. *Operador de Schrödinger con potencial periódico.* $H = \Delta_d + V$, tal que $V(n+c) = V(n)$ para un $c > 0$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$. Estos operadores describen la dinámica de partículas en materiales cristalinos: aquellos cuya estructura atómica es regular.

Ejemplo 2.1.9. *Oscilador armónico cuántico.* $H = \Delta_d + V$, con $V(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

El espectro del hamiltoniano libre y de los operadores con potencial periódico es puramente continuo, lo que se demostrará en el capítulo 3 del trabajo. Por su parte, el espectro del oscilador armónico es puramente puntual (Kirsch, 2007).

Operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales discretos

Sea $\{\Omega, T\}$ un sistema dinámico y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. La órbita de cada ω en el espacio de estados Ω, es decir la sucesión $\{T^n\omega\}_{n\in\mathbb{Z}}$, induce la definición de una función potencial:

$$\begin{aligned} V_\omega : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(T^n\omega) \end{aligned} \tag{2-11}$$

En consecuencia, cada ω en el espacio Ω está asociado a un operador de Schrödinger:

$$\begin{aligned} H_\omega : \mathcal{D}(H_\omega) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V_\omega)\psi \end{aligned} \tag{2-12}$$

El conjunto $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ donde cada H_ω es un operador de la forma (2-12), se denomina *familia de operadores de Schrödinger con potencial definido dinámicamente.*

Denote por $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{H : \mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid H \text{ es autoadjunto}\}$$

La siguiente definición permite enlazar la teoría ergódica con los operadores de Schrödinger.

Definición 2.1.10. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y considere:

$$\begin{aligned} A : \Omega &\to \mathcal{S}(\mathcal{H}) \\ \omega &\mapsto H_\omega \end{aligned}$$

Es decir que A le asigna a cada $\omega \in \Omega$ un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. El operador H_ω es un *operador ergódico* si existe una familia de transformaciones ergódicas $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ en Ω y una familia de operadores unitarios $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{H}$ tal que:

$$H_{T_i(\omega)} = U_i^* H_\omega U_i$$

donde U_i^* es el operador adjunto de U_i (definición 1.1.9).

Proposición 2.1.11. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $\{\Omega, T\}$ un sistema dinámico donde T es $\mu-$ergódica en Ω, y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces el operador H_ω (ecuación 2-12) es ergódico.

Demostración. Considere la transformación:

$$\begin{aligned} A : \Omega &\to \mathcal{S}(\mathcal{H}) \\ \omega &\mapsto H_\omega = \Delta_d + V_\omega \end{aligned}$$

Como por hipótesis T es $\mu-$ergódica en Ω, entonces $\{T^t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ es una familia de transformaciones ergódicas en Ω. Para demostrar que H_ω es un operador ergódico, es necesario encontrar una familia de operadores unitarios $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ tal que:

$$H_{T^t(\omega)} = U_t^* H_\omega U_t \tag{2-13}$$

Para cada $t \in \mathbb{Z}$, considere el operador traslación en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} U_t : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+t) \end{aligned}$$

Observe que el operador U_t es unitario:

$$\|U_t\| = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\|U_t\psi(n)\|}{\|\psi(n)\|} = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n+t)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = 1$$

luego $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ es una familia de operadores unitarios en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Sumado a esto, de acuerdo con la proposición 1.1.10:

$$U_t^* = U_{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Sea $\psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces:

$$\begin{aligned} H_{T^t(\omega)}\psi(n) = (\Delta_d + V_{T^t\omega})\psi(n) &= \Delta_d\psi(n) + V_{T^t\omega}\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n[T^t\omega])\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{2-14}$$

De otra parte:

$$\begin{aligned} U_{-t}H_\omega U_t\psi(n) = U_{-t}H_\omega\psi(n+t) &= U_{-t}[(\Delta_d + V_\omega)\psi(n+t)] \\ &= U_{-t}[\Delta_d\psi(n+t) + V_\omega\psi(n+t)] \\ &= U_{-t}(\psi(n+t+1) + \psi(n+t-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n+t)) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{2-15}$$

De las ecuaciones (2-14) y (2-15):

$$H_{T^t(\omega)}\psi(n) = U_t^* H_\omega U_t\psi(n), \quad \forall\psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Se concluye que H_ω es un operador ergódico. El conjunto $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ se denomina *familia de operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales discretos*. En la siguiente sección se presentan ejemplos de estas familias de operadores □

Los operadores de Schrödinger ergódicos implican un cambio de enfoque: el análisis no se centra en las propiedades espectrales de un solo operador, sino de toda una familia de operadores. De este modo, dado un sistema $\{\Omega, T\}$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, el objetivo es estudiar cómo las órbitas $\{T^n\omega\}_{n\in\mathbb{Z}}$ determinan el espectro del operador H_ω, para $\omega \in \Omega$. En la siguiente sección se reseñan algunos teoremas clásicos en este dominio.

2.2. Investigaciones anteriores relacionadas

La teoría espectral de operadores de Schrödinger ergódicos tiene dos objetivos: por un lado, determinar los tipos espectrales y la forma del espectro del operador H_ω (ecuación 2-12), y por otro, describir la dinámica de los sistemas físicos asociados a H_ω. El interés de la teoría recae en las propiedades que se satisfacen para casi todos los elementos de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, es decir para el operador H_ω donde ω es un elemento genérico de Ω.

En esta sección se comentan las propiedades espectrales de dos familias de operadores de Schrödinger. La primera consiste en los operadores cuya función potencial es una variable aleatoria (modelo de Anderson). La segunda, es la de los operadores de Schrödinger cuasi-periódicos, los cuales están relacionados con los objetivos del trabajo.

Modelo de Anderson unidimensional

Este modelo se refiere a la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ donde para cada $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$, se tiene que $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). El modelo de Anderson describe la dinámica de los electrones en sólidos amorfos: aquellos cuya estructura atómica es desordenada, como es el caso de los materiales vidriosos (*glassy materials*).

El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ se define de la siguiente manera: $\Omega = I^{\mathbb{Z}}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es compacto, la $\sigma-$álgebra es la de Borel en Ω y la medida es $\mu = \rho^{\mathbb{Z}}$, donde ρ es una medida de probabilidad de Borel en el compacto I. Por su parte, la transformación $T : \Omega \to \Omega$ está dada por: $T(\omega(n)) = \omega(n+1)$ y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por: $f(\omega(n)) = \omega(0)$. En este contexto: $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{f(T^n\omega)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Además, el operador $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$ es ergódico (Zhecheva, 2008).

Teorema 2.2.1. *(**Localización de Anderson**. Damanik, 2017, p.27) El operador H_ω tiene espectro puramente puntual para $\mu-$casi todo ω en Ω.*

De acuerdo con el teorema 2.2.1, el espectro puramente puntual es una propiedad genérica de los operadores de Schrödinger con potencial aleatorio. El teorema de Pastur complementa el postulado anterior, ya que permite caracterizar el espectro de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Teorema 2.2.2. *(**Pastur**. Kirsch, 2007 theorem 4.3, p.25) Sea $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ una familia de operadores ergódicos autoadjuntos. Entonces existe un conjunto cerrado $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ tal que:*

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma, \quad \textit{para } \mu-\textit{casi todo } \omega \in \Omega.$$

En consecuencia, el teorema de Pastur implica que el espectro de $H_\omega \in \{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es determinístico e independiente de ω, aún cuando para cada H_ω, $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias.

Operadores cuasiperiódicos

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{T}^d$. Una traslación $T\omega = \omega + \alpha$ en $\mathbb{T}^d$ es *minimal* si el conjunto $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ es independiente sobre los racionales (ejemplo 1.3.9). Un *potencial cuasiperiódico* es una función:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(T^n\omega) = f(\omega + n\alpha) \end{aligned} \tag{2-16}$$

donde $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ es continua y T es minimal en $\mathbb{T}^d$ (Damanik 2017, p.38). El operador de Schrödinger $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$ es *cuasiperiódico* si V_ω es un potencial cuasiperiódico.

El espectro de un operador cuasiperiódico H_ω puede ser de distintos tipos (puntual, absolutamente continuo o singular continuo) dependiendo de las propiedades de la función $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ (*Jitomirskaya, 2007, p.627*). En consecuencia, los tipos espectrales de los operadores de Schrödinger cuasiperiódicos no están unívocamente determinados para una función continua $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ arbitraria. A pesar de esto, sí es posible determinar el tipo espectral de un operador cuasiperiódico H_ω para un $\omega \in \Omega$ genérico, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *(Avila y Damanik, 2005 theorem 1, p.1) Sea $T\omega = \omega + \alpha$ una traslación minimal en $\mathbb{T}^d$. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{F}_s$ de $C(\mathbb{T}^d)$ tal que el operador:*

$$H_\omega = \Delta_d + V_\omega = \Delta_d + f(\omega + n\alpha)$$

no tiene espectro absolutamente continuo ($\sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset$) para todo $f \in \mathcal{F}_s$ y $\omega \in \Omega$.

En otras palabras, el teorema 2.2.3 afirma que la ausencia de espectro absolutamente continuo es una propiedad genérica de los operadores de Schrödinger cuasiperiódicos.

En la figura **2-3** se resumen los ejemplos de operadores de Schrödinger presentados a lo largo de este capítulo. Esta figura ofrece un panorama de los tipos espectrales de distintas familias de operadores de Schrödinger de acuerdo con las caracerísticas de la función potencial.

El objetivo de este trabajo es determinar condiciones suficientes para que el espectro de un operador de Schrödinger H_ω sea puramente continuo ($\sigma_{pp}(H_\omega) = \emptyset$), donde $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de operadores de Schrödinger ergódicos. Este objetivo es similar al de la investigación de Avila y Damanik (teorema 2.2.3), puesto que en ambos trabajos se busca descartar la presencia de cierto tipo espectral en un operador de Schrödinger genérico.

Metodológicamente, en este trabajo se procede de la siguiente manera: en primer lugar, se definen las propiedades de repetición topológica y métrica. Estas propiedades identifican a aquellos elementos ω en el sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ cuya órbita positiva $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ satisface cierta condición de regularidad, la cual se define formalmente y se estudia en el capítulo 4. Posteriormente, se demuestra que si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua genérica y $\omega \in \Omega$ satisface la propiedad de repetición mencionada, entonces el operador $H_\omega = \Delta_d + V_\omega = \Delta_d + f(T^n\omega)$ no tiene valores propios.

A pesar de que los objetivos de este trabajo y del de Avila y Damanik son semejantes, las metodologías son distintas. Los autores mencionados demuestran el teorema 2.2.3 aproximando la función potencial $f(T^n\omega)$ por una sucesión de funciones discontinuas y usando herramientas del análisis armónico. En contraste, en este trabajo se demuestra el resultado reseñado en el párrafo anterior para una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua genérica sin usar aproximaciones. Para tal fin, la principal herramienta usada es el lema de Gordon, proposición

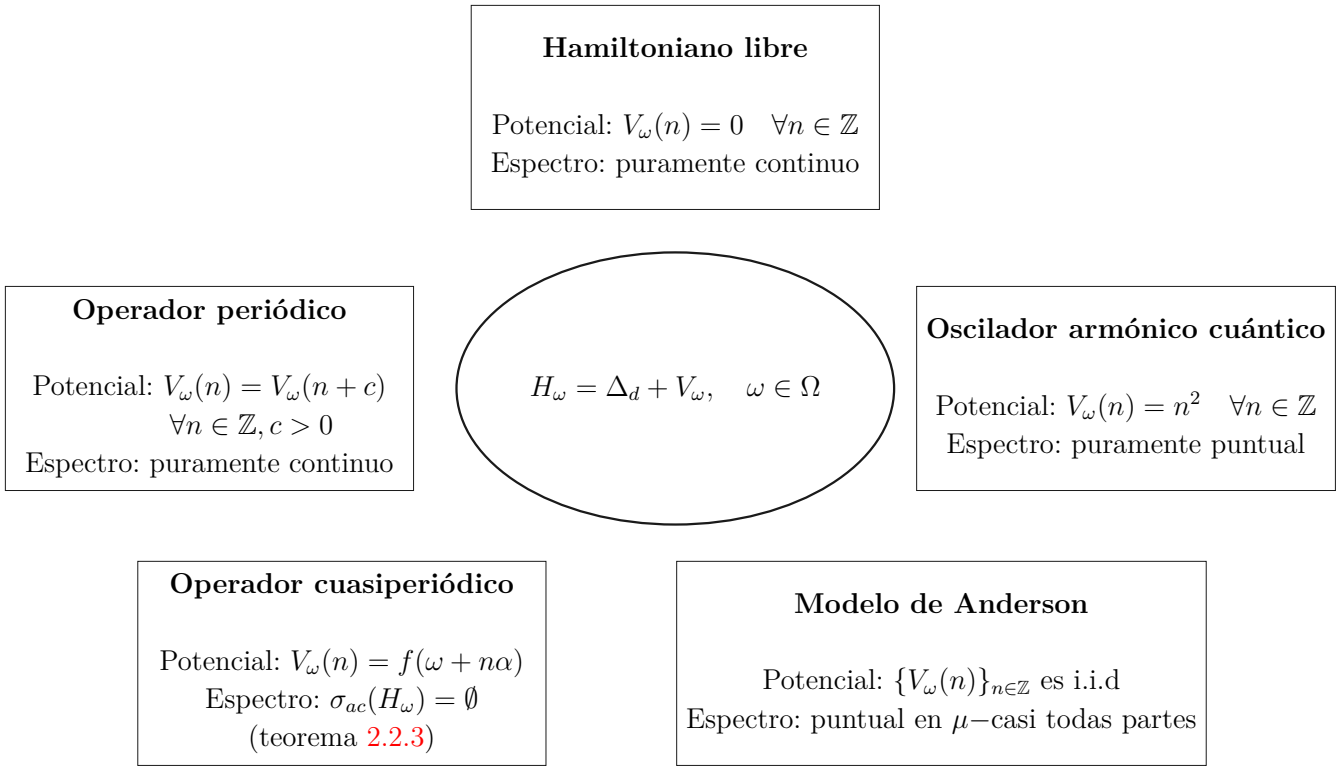


Figura 2-3.: Mapa de tipos espectrales en distintas familias de operadores de Schrödinger.

que permite descartar la existencia de valores propios de cierta clase de operadores de de Schrödinger usando propiedades elementales de dichos operadores.

Lo mencionado en el párrafo anterior es una ventaja del enfoque de este trabajo con respecto al de Avila y Damanik. En efecto, al no recurrir a conceptos y herramientas de otros dominios de las matemáticas (como las funciones subarmónicas, los exponentes de Lyapunov, entre otros), se propicia una exposición accesible y autocontenida de los teoremas expuestos.

Capítulo 3

El lema de Gordon

En este capítulo se estudia el lema de Gordon, que es un resultado fundacional de la teoría espectral de operadores de Schrödinger unidimensionales. La importancia de este postulado es que permite, dadas ciertas características de la función potencial $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, descartar la existencia de valores propios del operador de Schrödinger discreto:

$$\begin{aligned} H : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) \end{aligned} \tag{3-1}$$

El capítulo se basa en Simon (1982) y se divide en dos secciones. En la primera, se define la función potencial de Gordon y se estudia la representación matricial de operadores. En la segunda, se enuncia formalmente y se demuestra el lema de Gordon.

3.1. Características de la función potencial de Gordon

El lema de Gordon sostiene que el operador (3-1) no tiene valores propios si $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es un potencial de Gordon.

Definición 3.1.1. La función acotada $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es un *potencial de Gordon* si existe una sucesión de funciones periódicas $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ donde para cada $m \in \mathbb{Z}_+ : V_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y $V_m(n) = V_m(n + T_m)$ y $T_m \to \infty$, que satisface las dos siguientes condiciones:

(i) $\sup_{n,m} |V_m(n)| < \infty$.

(ii) $\sup_{|n|\leq 2T_m} |V_m(n) - V(n)| \leq Cm^{-T_m}$, para un $C > 0$.

En otras palabras, un potencial de Gordon es una función $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que puede ser aproximada por una sucesión de funciones periódicas $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ en el intervalo dado por $|n| \leq 2T_m$.

Teorema 3.1.2. *La función acotada $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es un potencial de Gordon si y solamente si existe una sucesión de enteros positivos $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ tal que $q_m \to \infty$ y para algún $C > 0$:*

$$\max_{1\leq n\leq q_m} |V(n) - V(n + q_m)| \leq Cm^{-q_m} \quad y \quad \max_{1\leq n\leq q_m} |V(n) - V(n - q_m)| \leq Cm^{-q_m}$$

Demostración. "$\Rightarrow$" Suponga que $V(n)$ es potencial de Gordon. Por desigualdad triangular y usando el hecho de que V_m es una función periódica con periodo T_m:

$$\begin{aligned}\max_{1\le n\le T_m} |V(n)-V(n\pm T_m)| &= \max_{1\le n\le T_m} |V(n)-V_m(n)+V_m(n\pm T_m)-V(n\pm T_m)| \\ &\le \sup_{1\le n\le T_m} |V_m(n\pm T_m)-V(n\pm T_m)| + \sup_{1\le n\le T_m} |V_m(n)-V(n)| \\ &\le 2Cm^{-T_m}\end{aligned}$$

Tomando $q_m = T_m$ y $\hat{C} = 2C$, se concluye que

$$\max_{1\le n\le q_m} |V(n)-V(n\pm q_m)| \le \hat{C}m^{-qm}$$

Donde $\lim_{m\to\infty} q_m = \infty$, con lo cual se obtiene el resultado.

"$\Leftarrow$" Suponga que existe $C>0$ tal que $\max_{1\le n\le q_m} |V(n)-V(n\pm q_m)| \le Cm^{-q_m}$ para una sucesión de enteros positivos $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ tal que $q_m\to\infty$. Queremos construir, para cada $m\in\mathbb{Z}$, una función periódica $V_m:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ con periodo T_m, tal que $\sup_{n,m}|V_m(n)|<\infty$ y $\sup_{|n|\le 2T_m}|V_m(n)-V(n)|\le Cm^{-T_m}$.

Sea $m\in\mathbb{Z}$. Por hipótesis para cada $n\in\{1,\dots,q_m\}$ existen $r_1(m)$ y $r_2(m)$ tales que:

$$\begin{aligned} V(n-q_m)+r_1(m) &= V(n), & |r_1(m)| &\le Cm^{-q_m} \quad \text{y} \\ V(n)+r_2(m) &= V(n+q_m), & |r_2(m)| &\le Cm^{-q_m}\end{aligned}$$

Inicialmente considere la función $V_m:\{1-q_m,\dots,2q_m\}\to\mathbb{R}$ definida como:

$$V_m(n) = \begin{cases} V(n)+r_1(m) & \text{si } 1-q_m\le n\le 0 \\ V(n) & \text{si } 1\le n\le q_m \\ V(n)-r_2(m) & \text{si } q_m+1\le n\le 2q_m\end{cases}$$

Para todo $n\in\{1,\dots,q_m\}$, la función V_m es periódica. En efecto:

$$\begin{aligned} V_m(n+q_m) &= V(n+q_m)-r_2(m) && \text{definición de } V_m(n) \text{ pues } q_m+1\le n+q_m\le 2q_m \\ &= V(n) && \text{por hipótesis} \\ &= V_m(n) && \text{definición de } V_m(n)\end{aligned}$$

Igualmente:

$$\begin{aligned} V_m(n-q_m) &= V(n-q_m)+r_1(m) && \text{definición de } V_m(n) \text{ pues } 1-q_m\le n-q_m\le 0 \\ &= V(n) && \text{por hipótesis} \\ &= V_m(n) && \text{definición de } V_m(n)\end{aligned}$$

Por lo tanto V_m es periódica, con periodo igual a q_m. La definición de la función V_m se extiende a todo $\mathbb{Z}$ estableciendo, para cada $j\in\mathbb{Z}: V_m(j)=V_m(n)$, donde $n\in\{1,\dots q_m\}$ y $j\equiv_{q_m} n$, con lo cual $V_m:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ es una función periódica con periodo q_m.

Como la función $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es acotada, existe K tal que $V(n) \leq K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $r(m) = \text{máx}\{r_1(m), r_2(m)\}$, observe que para todo n y $m \in \mathbb{Z}$:

$$|V_m(n)| \leq |V(n)| + |r(m)| \leq K + Cm^{-q_m} < \infty$$

luego $\sup_{n,m} |V_m(n)| < \infty$. Por último:

$$|V_m(n) - V(n)| \leq |r(m)| \leq Cm^{-q_m} \Rightarrow \sup_{|n| \leq 2q_m} |V_m(n) - V(n)| \leq Cm^{-q_m}$$

Haciendo $q_m = T_m$, se concluye que la sucesión de funciones $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ satisface las condiciones de la definición 3.1.1 y por lo tanto $V(n)$ es un potencial de Gordon. □

Ejemplo 3.1.3. Si $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es una función periódica acotada, entonces V es un potencial de Gordon: considere la sucesión de funciones periódicas $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ donde $V_m(n) = V(n)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $\sup_{|n| \leq 2T_m} |V_m(n) - V(n)| = 0$, y por lo tanto la función V satisface trivialmente la definición 3.1.1.

Ejemplo 3.1.4. Considere $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por: $V(n) = \sin(an) + \sin(bn)$. Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces la función V es periódica. Si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, entonces la función V no es periódica (*Brom, 1977, p.67*) pero satisface la definición de potencial de Gordon. La sucesión de funciones $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ que aproxima a V está dada por: $V_m(n) = \sin(a_m n) + \sin(n)$, donde $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de números racionales tal que $a_m \to a$. La figura **3-1** ilustra la función V para los parámetros $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$.

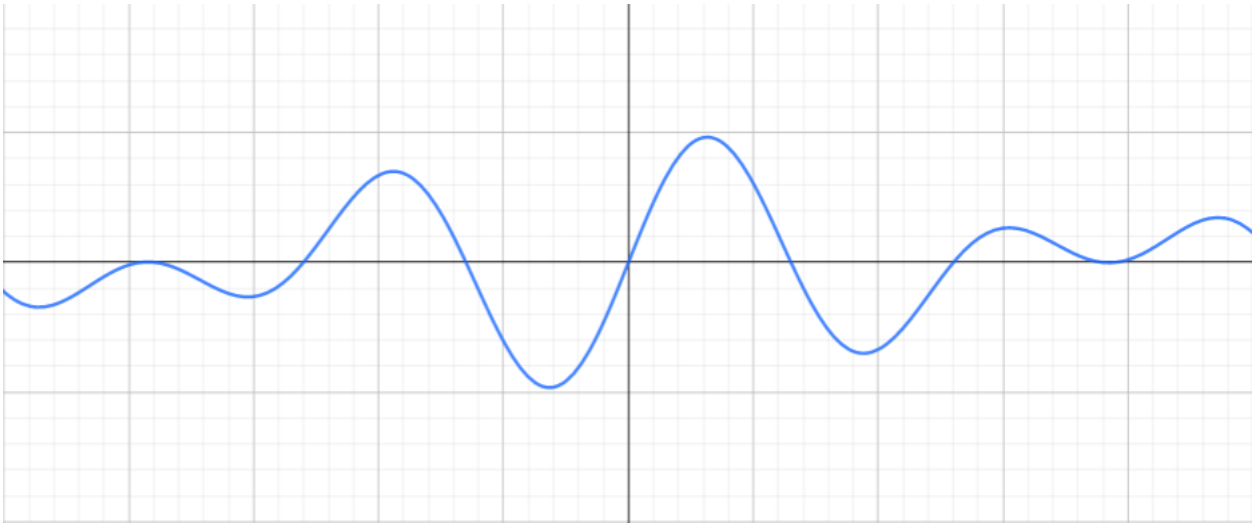


Figura 3-1.: La función $V(n) = \sin(\sqrt{2}n) + \sin(n)$ es un potencial de Gordon.

Los ejemplos 3.1.3 y 3.1.4 evidencian que la definición de potencial de Gordon es una generalización del concepto de función periódica, para el intervalo determinado por $|n| \leq 2T_m$.

Representación matricial de operadores

Sea $V(n)$ un potencial de Gordon y $\Psi(n)$ el vector columna $(\psi(n), \psi(n+1))$, donde $\psi(n)$ es una solución de la ecuación:

$$\psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) = E\psi(n) \tag{3-2}$$

Es decir, $E \in \mathbb{C}$ es un valor propio de H (ecuación 3-1) con una condición inicial $\Psi(0)$ dada. Para $n > 0$, la ecuación (3-2) puede escribirse matricialmente:

$$\Psi(n) = A(n) \cdots A(1)\Psi(0), \quad \text{donde} \quad A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V(n) \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

Análogamente, sea $\Psi_m(n) = (\psi_m(n), \psi_m(n+1))$ y considere la ecuación:

$$\psi_m(n-1) + \psi_m(n+1) + V_m(n)\psi_m(n) = E\psi_m(n)$$

con condición inicial $\Psi_m(0) = \Psi(0)$. Entonces:

$$\Psi_m(n) = A_m(n) \cdots A_m(1)\Psi(0), \quad \text{con} \quad A_m(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_m(n) \end{pmatrix} \tag{3-4}$$

En los dos siguientes lemas se estudian las propiedades de las matrices $A_m(n)$ y $A(n)$.

Lema 3.1.5. Sean $A(n)$ y $A_m(n)$ de acuerdo con las ecuaciones (3-3) y (3-4). Entonces:

$$\|A_m(n) \cdots A_m(1) - A(n) \cdots A(1)\| \leq n \cdot [\sup_{m,j} \|A_m(j)\|]^{n-1} \cdot [\sup_{1 \leq j \leq n} \|A_m(j) - A(j)\|]$$

Demostración. La matriz $A_m(n) \cdots A_m(1) - A(n) \cdots A(1)$ puede escribirse como una suma telescópica:

$$\begin{aligned}
&A_m(n) \cdots A_m(1) - A(n) \cdots A(1) \\
&= [A_m(n) - A(n)] \cdot [A_m(n-1) \cdots A_m(1)] \\
&+ [A(n)] \cdot [A_m(n-1) - A(n-1)] \cdot [A_m(n-2) \cdots A_m(1)] + \cdots \\
&+ [A(n) \cdots A(n-j+1)] \cdot [A_m(n-j) - A(n-j)] \cdot [A_m(n-j-1) \cdots A_m(1)] + \cdots \\
&+ [A(n) \cdots A(2)] \cdot [A_m(1) - A(1)]
\end{aligned} \tag{3-5}$$

Dado que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$, la norma de cada sumando del lado derecho de la ecuación (3-5) puede acotarse de la siguiente manera, para todo $0 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned}
&\|[A(n) \cdots A(n-j+1)] \cdot [A_m(n-j) - A(n-j)] \cdot [A_m(n-j-1) \cdots A_m(1)]\| \\
&\leq \|[A(n) \cdots A(n-j+1)]\| \cdot \|[A_m(n-j) - A(n-j)\| \cdot \|[A_m(n-j-1) \cdots A_m(1)]\| \\
&= \|[A(n) \cdots A(n-j+1)]\| \cdot \|[A_m(n-j-1) \cdots A_m(1)]\| \|[A_m(n-j) - A(n-j)]\| \\
&\leq [\sup_{m,j} \|A_m(j)\|]^{n-1} \cdot [\sup_{1 \leq j \leq n} \|A_m(j) - A(j)\|]
\end{aligned} \tag{3-6}$$

En la ecuación anterior:

$$\sup_{m,j}\|A_m(j)\| = \sup_{1\leq j\leq n}\{\|A_m(j)\|, \|A(j)\|\}$$

De las ecuaciones (3-5) y (3-6) se obtiene:

$$\|A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)\| \leq n[\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1}[\sup_{1\leq j\leq n}\|A_m(j) - A(j)\|]$$

□

Lema 3.1.6. Sea x un vector tal que $\|x\| = 1$ y B una matriz 2×2 invertible. Entonces

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|B^a x\| \geq \frac{1}{2}$$

En particular, para $\Psi_m(n) = A_m(n)\cdots A_m(1)\Psi(0)$:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|\Psi_m(aT_m)\| \geq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$$

Demostración. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que si $q(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$ es el polinomio característico de una transformación lineal T en un espacio vectorial V de dimensión n, entonces $q(A) = 0$, donde A es la matriz cuadrada $n\times n$ asociada al operador T (Axler, 2015. *theorem 8.37*). Por lo tanto, si $q(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico asociado a la matriz $B_{2\times 2}$, entonces:

$$a_2B^2 + a_1B + a_0 = 0 \tag{3-7}$$

Para demostrar la proposición voy a considerar tres casos. Primero $|a_2| = \max_{0\leq i\leq 2}|a_i|$. Al multiplicar por derecha la ecuación (3-7) por el término $\frac{1}{a_2}B^{-2}x$, y haciendo $c_1 = \frac{a_1}{a_2}$ y $c_0 = \frac{a_0}{a_2}$, se obtiene:

$$x + c_1B^{-1}x + c_0B^{-2}x = 0$$

donde $|c_1|, |c_0| \leq 1$. Tomando la norma de la anterior expresión:

$$\begin{aligned}\|x\| = \|c_1B^{-1}x + c_0B^{-2}x\| \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq |c_1|\cdot\|B^{-1}x\| + |c_0|\cdot\|B^{-2}x\| \\ &\Rightarrow \quad \max\{\|B^{-1}x\|, \|B^{-2}x\|\} \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

El segundo caso es $|a_1| = \max_{0\leq i\leq 2}|a_i|$. Multiplicando la ecuación (3-7) por $\frac{1}{a_1}B^{-1}x$:

$$d_2Bx + x + d_0B^{-1}x = 0$$

donde $|d_2| = \frac{a_2}{a_1} \leq 1$ y $|d_0| = \frac{a_0}{a_1} \leq 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|x\| = \|d_2Bx + d_0B^{-1}x\| \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq |d_2|\cdot\|Bx\| + |d_0|\cdot\|B^{-1}x\| \\ &\Rightarrow \quad \max\{\|Bx\|, \|B^{-1}x\|\} \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

El tercer caso es $|a_0| = \text{máx}_{0\leq i\leq 2}|a_i|$. Un razonamiento análogo al recién presentado, multiplicando ahora la ecuación (3-7) por $\frac{1}{a_0}x$ permite afirmar que:

$$\text{máx}\{\|B^2x\|, \|Bx\|\} \geq \frac{1}{2}$$

Se concluye que una matriz B invertible 2×2 satisface la desigualdad:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|B^a x\| \geq \frac{1}{2} \tag{3-8}$$

Ahora, sea $B_m(n) = A_m(n)\cdots A_m(1) = \Pi_{j=1}^{n} A_m(j)$. Note que $A_m(n) = A_m(n+T_m)$, pues $V_m(n) = V_m(n+T_m)$. Entonces:

$$\begin{aligned} B_m^a(T_m) = (\Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j))^a &= \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j)\cdots \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j) \\ &= \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j)\cdot \Pi_{j=T_m+1}^{2T_m} A_m(j)\cdots \Pi_{j=(a-1)(T_m+1)}^{aT_m} A_m(j) \\ &= \Pi_{j=1}^{aT_m} A_m(j) \\ &= B_m(aT_m) \end{aligned}$$

Reemplazando x y B por $\frac{\Psi(0)}{\|\Psi(0)\|}$ y $B_m(T_m)$, respectivamente, en la ecuación (3-8):

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|B_m^a(T_m)\Psi(0)\| = \max_{a=\pm 1,\pm 2}\|B_m(aT_m)\Psi(0)\| \geq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$$

□

3.2. Demostración del lema

Lema 3.2.1. (***Gordon.*** *Simon, 1982 theorem 7.2, p.476*). Sea $V:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ un potencial de Gordon (definición 3.1.1). Para $E\in\mathbb{C}$, si ψ es una solución de la ecuación:

$$\psi(n+1)+\psi(n-1)+V(n)\psi(n) = E\cdot\psi(n) \tag{3-9}$$

Entonces:

$$\limsup_{|n|\to\infty}\frac{\psi(n+1)^2+\psi(n)^2}{\psi(1)^2+\psi(0)^2} \geq \frac{1}{4} \tag{3-10}$$

Es decir que $\lim_{|n|\to\infty}\psi(n) > 0$ y por lo tanto: $\|\psi(n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\psi(n)|^2 = \infty$.

Se concluye que $\psi(n)$ no pertenece al espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ y por consiguiente que el operador (3-1) no tiene vectores propios, o equivalentemente, que su espectro puntual es vacío.

Demostración. Observe que:

$$\begin{aligned} \|\Psi_m(n)-\Psi(n)\| &= \|[A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)]\cdot\Psi(0)\| \\ &\leq \|(A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1))\|\cdot\|\Psi(0)\| \\ &\leq n\cdot[\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1}\cdot[\sup_{1\leq j\leq n}\|A_m(j)-A(j)\|]\cdot\|\Psi(0)\| \end{aligned} \tag{3-11}$$

donde la última desigualdad se justifica en el lema 3.1.5. De otra parte:

$$A_m(j) - A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V(n) - V_m(n) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A_m(j) - A(j)\| \leq |V(n) - V_m(n)|$$

Como $V(n)$ es un potencial de Gordon:

$$\sup_{|n|\leq 2T_m} |V_m(n) - V(n)| \leq Cm^{-T_m} \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{|n|\leq 2T_m} \|A_m(j) - A(j)\| = 0 \tag{3-12}$$

De las ecuaciones (3-11) y (3-12) se obtiene:

$$\sup_{|n|\leq 2T_m} \|\Psi_m(n) - \Psi(n)\| \to 0, \quad \text{cuando } m \to \infty$$

luego en particular:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2} \|\Psi(aT_m) - \Psi_m(aT_m)\| \to 0, \quad \text{cuando } m \to \infty$$

Como $\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|\Psi_m(aT_m)\| \geq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$ (lema 3.1.6), de la ecuación anterior se sigue que:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2} \|\Psi(aT_m)\| \geq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\| \tag{3-13}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\limsup_{|n|\to\infty}\|\Psi(n)\| \geq \max_{a=\pm 1,\pm 2}\|\Psi(aT_m)\| \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{|n|\to\infty}\|\Psi(n)\| \geq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\| && \text{por la ecuación (3-13)} \\
&\Rightarrow \quad \limsup_{|n|\to\infty}\|\Psi(n)\|^2 \geq \frac{1}{4}\|\Psi(0)\|^2 && \text{elevando al cuadrado} \\
&\Rightarrow \quad \limsup_{|n|\to\infty}\frac{\|\Psi(n)\|^2}{\|\Psi(0)\|^2} \geq \frac{1}{4} && \text{pues } \|\Psi(0)\| > 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\psi(n+1)^2 + \psi(n)^2}{\psi(1)^2 + \psi(0)^2} \geq \frac{1}{4} && \text{definición de } \|\Psi(n)\|
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\limsup_{|n|\to\infty} \frac{\psi(n+1)^2 + \psi(n)^2}{\psi(1)^2 + \psi(0)^2} \geq \frac{1}{4} \tag{3-14}$$

La importancia de la anterior desigualdad reside en que si $\psi(n)$ perteneciera a $\ell^2(\mathbb{Z})$, entonces:

$$\|\psi(n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{|n|\to\infty} \psi(n) = 0$$

pero esto último contradice la ecuación (3-14). Se concluye que $\psi(n) \notin \ell^2(\mathbb{Z})$. Como la selección de $E \in \mathbb{C}$ en el enunciado del lema de Gordon fue arbitaria, se sigue que el operador:

$$H(\psi(n)) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n)$$

no tiene valores propios, es decir, su espectro puntual es vacío. $\square$

Observación 3.2.2. El lema de Gordon se refiere a operadores de Schrödinger discretos (ecuación 3-1). Damanik y Stolz (2000) generalizan el resultado para el operador continuo:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}) \\ \varphi(x) &\mapsto -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x)\end{aligned}$$

con $V(x) \in \mathscr{L}^1_{loc}$. Los autores usan elementos de teoría de integración que están más allá del alcance del presente trabajo. Una demostración puede encontrarse en la bibliografía citada.

Observación 3.2.3. Si $V(n)$ es un potencial de Gordon entonces, para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda V(n)$ también lo es: si $\operatorname{máx}_{1\leq n\leq q_m} |V(n) - V(n \pm q_m)| \leq Cm^{-q_m}$ con $q_m \to \infty$ (teorema 3.1.2):

$$\begin{aligned}\operatorname*{máx}_{1\leq n\leq q_m} |\lambda V(n) - \lambda V(n \pm q_m)| &= |\lambda| \operatorname*{máx}_{1\leq n\leq q_m} |V(n) - V(n \pm q_m)| \\ &\leq |\lambda| C m^{-q_m} = \hat{C} m^{-q_m}\end{aligned}$$

donde $\hat{C} = |\lambda|C$. Esto implica que el enunciado del lema de Gordon es cierto aún si se perturba la función $V(n)$.

Ejemplo 3.2.4. Los operadores de Schrödinger periódicos (ejemplo 2.1.8) no tienen valores propios.

Demostración. Sea $H = \Delta_d + V$ un operador de Schrödinger periódico: para un $c > 0$ se tiene que $V(n) = V(n + c)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso, la función V es un potencial de Gordon (ejemplo 3.1.3). Se concluye, por el teorema 3.2.1, que el operador $H = \Delta_d + V$ no tiene valores propios. □

Corolario 3.2.5. El hamiltoniano libre Δ_d (ejemplo 2.1.7) no tiene valores propios.

Demostración. Es un caso particular del ejemplo 3.2.4 para $c = 1$ y $V(n) = 0$. □

En el capítulo 5 se discuten ejemplos más generales de operadores de Schrödinger cuyo potencial es de Gordon.

Capítulo 4

Espectro continuo de los operadores de Schrödinger ergódicos

En este capítulo se estudian las condiciones bajo las cuales el espectro puramente continuo es una propiedad genérica de la familia de operadores de Schrödinger $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ dada por:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n), \quad \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{4-1}$$

donde T es un homeomorfismo en el espacio compacto Ω y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es continua. Para este objetivo nos basamos en la investigación de Boshernitzan y Damanik (BD, 2008).

El capítulo se divide en tres secciones. En la primera, se definen el concepto de propiedad de repetición. En la segunda, se estudian las condiciones suficientes para que el espectro continuo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ sea genérico desde el punto de vista topológico. En la tercera, se discuten las condiciones para que el espectro continuo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ sea genérico desde el punto de vista de la teoría de la medida.

4.1. Las propiedades de repetición

Definición 4.1.1. (*BD 2008 definition 1, p.649*). Sea (Ω, d) un espacio métrico compacto. La sucesión $\{\omega_n\}_{n\geq 0} \subseteq \Omega$ satisface *la propiedad de repetición* (*PR*) si para todo $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathbb{Z}_+$ existe un $q \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d(\omega_n, \omega_{n+q}) < \varepsilon$ para todo $n \in \{0, 1, \ldots, rq\}$.

La figura **4-1** ilustra la definición 4.1.1 dado un $\varepsilon > 0$ y el parámetro $r = 4$, para los puntos ω_1, ω_2 y ω_{q-1} de la sucesión $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$. En el siguiente lema se demuestra que la definición 4.1.1 no depende de la métrica definida sobre el espacio compacto Ω.

Lema 4.1.2. Sean (Ω, d_1) y (Ω, d_2) espacios métricos compactos y suponga que $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface *PR* en (Ω, d_1). Entonces $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface *PR* en (Ω, d_2).

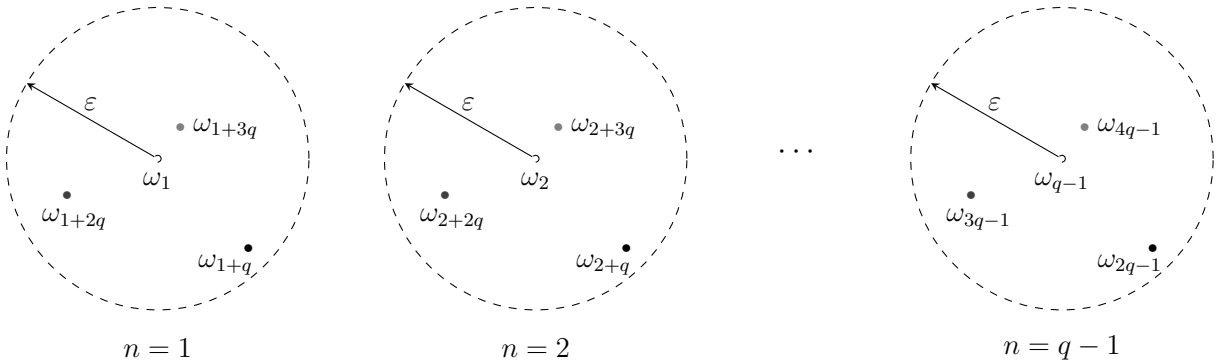


Figura 4-1.: Representación gráfica de la propiedad *PR*.

Demostración. Suponga que $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface *PR* en (Ω, d_1). En la definición 4.1.1, considere $\varepsilon = \frac{1}{k}$ y $r = k$ para $k \in \mathbb{Z}_+$, y sea $B_{d_1}(\omega_i, \frac{1}{k})$ la bola abierta con centro en ω_i y radio $\frac{1}{k}$ en el espacio (Ω, d_1). Observe que:

$$\bigcup_{i=0}^{kq} B_{d_1}(\omega_i, \frac{1}{k}) \cup A$$

es un recubrimiento finito de Ω en el espacio (Ω, d_1), donde A es un abierto en (Ω, d_1) que cubre a $\Omega \setminus \{\omega_0, \ldots, w_{kq}\}$. De igual forma:

$$\bigcup_{i=0}^{\overline{k}\overline{q}} B_{d_2}(\omega_i, \frac{1}{\overline{k}}) \cup B$$

es un recubrimiento finito de Ω en el espacio (Ω, d_2), donde $B_{d_2}(\omega_i, \frac{1}{\overline{k}})$ es la bola abierta con centro en ω_i y radio $\frac{1}{\overline{k}}$ y B es un abierto que cubre a $\Omega \setminus \{\omega_0, \ldots, w_{\overline{k}\overline{q}}\}$ en el espacio (Ω, d_2).

Dado $\overline{k} \in \mathbb{Z}_+$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{1}{\overline{k}}$. Puesto que B_{d_1} y B_{d_2} son bolas abiertas en (Ω, d_1) y en (Ω, d_2) respectivamente, para cada $x \in \Omega$ se tiene que, o bien $B_{d_1}(x, \frac{1}{k}) \subset B_{d_2}(x, \frac{1}{\overline{k}})$ o bien $B_{d_2}(x, \frac{1}{\overline{k}}) \subset B_{d_1}(x, \frac{1}{k})$.

Suponga inicalmente que $B_{d_1}(x, \frac{1}{k}) \subset B_{d_2}(x, \frac{1}{\overline{k}})$ y considere $x = \omega_n$, para $n \in \{0, \ldots, kq\}$. Por hipótesis $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface *PR* en (Ω, d_1), lo cual significa que $\omega_{n+q} \in B_{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k})$ para todo $n \in \{0, \ldots, kq\}$. En consecuencia:

$$\omega_{n+q} \in B_{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k}) \subset B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{\overline{k}}) \quad \Rightarrow \quad \omega_{n+q} \in B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{\overline{k}}), \quad \forall n \in \{0, \ldots, kq\}$$

Esto permite concluir, tomando $\overline{q} = q$, que $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface *PR* en (Ω, d_2).

Ahora suponga que $B_{d_2}(x, \frac{1}{\overline{k}}) \subset B_{d_1}(x, \frac{1}{k})$. Esto implica en particular, para $x = \omega_n$ con $n \in \{0, \ldots, kq\}$, que si $d_1(\omega_n, y) < \frac{1}{k}$ entonces $d_2(\omega_n, y) < \frac{1}{\overline{k}}$. Por hipótesis $\{\omega\}_{n\geq 0}$ satisface

PR, luego $d_1(\omega_n, \omega_{n+q}) < \frac{1}{k}$ para $n \in \{0, \ldots, kq\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{k}) \subset B_{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k}) \quad &\Rightarrow \quad d_2(\omega_n, \omega_{n+q}) < d_1(\omega_n, \omega_{n+q}) < \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \quad d_2(\omega_n, \omega_{n+q}) < \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \{0, \ldots, kq\} \end{aligned}$$

Es decir que $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface PR en el espacio compacto (Ω, d_2).

En resumen: si $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ satisface PR en (Ω, d_1), entonces $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ también satisface PR en (Ω, d_2). Se concluye que PR es independiente de la métrica definida en Ω. □

Ejemplo 4.1.3. Toda sucesión periódica $\{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq \Omega$ con periodo q satisface PR. En efecto, $d(x_n, x_{n+rq}) = 0 < \varepsilon$ para todo n y r en $\mathbb{Z}_+$ y $\varepsilon > 0$.

Ejemplo 4.1.4. En $\Omega = \mathbb{S}^1$, la sucesión $\{e^{2\pi i(n+\alpha)}\}_{n\geq 0}$ satisface PR. Este ejemplo puede divirse en dos casos. El primero es $\alpha \in \mathbb{Q}$, en cuyo caso la sucesión es periódica (ejemplo 4.1.3). El segundo es $\alpha \notin \mathbb{Q}$, y se estudia en el siguiente capítulo del trabajo.

La propiedad de repetición y el sistema dinámico $\{\Omega, T\}$

Definición 4.1.5. Sea $\{\Omega, T\}$ un sistema dinámico. Se denomina $PRP(T)$ al conjunto de puntos de Ω tal que $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ satisface PR.

$$PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall \varepsilon > 0, r \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists q \in \mathbb{Z}_+ : d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \varepsilon, \text{ para } 0 \leq n \leq rq\} \tag{4-2}$$

Estableciendo $\varepsilon(k) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto $PRP(T)$ puede expresarse como:

$$PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists q \in \mathbb{Z}_+ : d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k} \text{ , para } 0 \leq n \leq kq\} \tag{4-3}$$

Lema 4.1.6. Para $\omega \in PRP(T)$. Dados k y $r \in \mathbb{Z}_+$, sea q_k tal que $d(T^n\omega, T^{n+q_k}\omega) < \frac{1}{k}$, donde $0 \leq n \leq rq_k$. Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$$

Demostración. Sea $\omega \in PRP(T)$. Razonando por contradicción, suponga que existe $L \in \mathbb{Z}_+$ tal que $q_k < L$ para todo entero positivo k. Esto implica (definición 4.1.5) que existe $K \in \mathbb{Z}_+$ tal que para un $n \in \{0, \ldots, KL\}$:

$$d(T^n\omega, T^{n+L}\omega) \geq \frac{1}{K}$$

puesto que, de lo contrario, $q_K = L$ y no se cumpliría que $q_k < L$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. De otra parte, como $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ satisface PR, entonces para cada k existe $q_k \in \{0, 1, \ldots L-1\}$ tal que

$d(T^n\omega, T^{n+q_k}\omega) < \frac{1}{k}$, donde $0 \leq n \leq kq_k$.

Sea $\varepsilon_0 = \text{mín}_{q_k} d(T^n\omega, T^{n+q_k}\omega)$ y $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \text{mín}\{\frac{1}{K}, \varepsilon_0\}$. Por lo tanto, como $\omega \in PRP(T)$, debe existir un $q_m \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^n\omega, T^{n+q_m}\omega) < \frac{1}{m}$ para todo $0 \leq n \leq mq_m$.

Sin embargo, como $\frac{1}{m} < \varepsilon_0$, entonces $q_m \notin \{0, 1, \ldots L-1\}$. Se sigue que $q_m \geq L$, pero esto contradice la hipótesis de que $q_k < L$ para todo k. Se concluye que $\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$. □

En las dos siguientes proposiciones se exponen atributos de interés del conjunto $PRP(T)$.

Lema 4.1.7. *$PRP(T)$ es un conjunto G_δ en Ω.*

Demostración. Sean k y q enteros positivos y considere:

$$A_k(q) = \{\omega \in \Omega \mid \operatorname*{máx}_{0\leq n\leq kq} d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}\}$$

Cada $A_k(q)$ es un subconjunto abierto de Ω. En efecto, considere la función f:

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \Omega \times \Omega \\ \omega &\mapsto (T^n\omega, T^{n+q}\omega) \end{aligned}$$

Observe que f es continua puesto que por hipótesis $T : \Omega \to \Omega$ es un homeomorfismo. De otra parte, toda métrica $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ es una función continua, y por lo tanto la función $d \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ es continua, puesto es la composición de funciones continuas. Se sigue que:

$$d \circ f(A_k(q)) = [0, \frac{1}{k})$$

donde $[0, \frac{1}{k})$ es abierto en $\mathbb{R}^+$. Al ser la preimgen de un abierto bajo una función continua, se concluye que $A_k(q)$ es un abierto en Ω. Ahora voy a mostrar la siguiente igualdad:

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{q\geq m} A_k(q) = PRP(T) \tag{4-4}$$

Sea $\omega \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{q\geq m} A_k(q)$, entonces para todo k y m en $\mathbb{Z}$ existe un $q \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}$, para todo $n \in \{0, \ldots, kq\}$. Esto implica de acuerdo con la definición 4.1.5 que $\omega \in PRP(T)$, es decir:

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{q\geq m} A_k(q) \subseteq PRP(T)$$

Igualmente, si $\omega \in PRP(T)$ entonces para $k \in \mathbb{Z}_+$ existe un q tal que $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}$, luego ω pertenece a $A_k(q)$ para todo entero positivo k y por lo tanto:

$$\omega \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{q\geq m} A_k(q)$$

luego $PRP(T)$ es la intersección contable de abiertos y por tanto es un conjunto G_δ. □

Lema 4.1.8. $PRP(T)$ es un conjunto $T-$ invariante, es decir $T(PRP(T)) \subseteq PRP(T)$.

Demostración. Suponga que $\omega \in PRP(T)$. Demostremos que $T\omega \in PRP(T)$, en otras palabras, que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ existe q tal que $d(T^n(T\omega), T^{n+q}(T\omega)) < \frac{1}{k}$, para $0 \leq n \leq kq$.

Por hipótesis $\omega \in PRP(T)$, entonces existe un $q \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k+1}$, para $0 \leq n \leq (k+1)q$. Esto implica en particular que, para $0 \leq n \leq kq$:

$$d(T^{n+1}\omega, T^{n+1+q}\omega) < \frac{1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad d(T^n(T\omega), T^{n+q}(T\omega)) < \frac{1}{k}$$

Como resultado, $\{T^n(T\omega)\}_{n\geq 0}$ satisface la propiedad de repetición, luego $T\omega \in PRP(T)$. □

Corolario 4.1.9. Suponga que $\omega \in PRP(T)$. Entonces $\{T^n\omega\}_{n\geq 0} \subseteq PRP(T)$

Demostración. Por inducción en n:
Caso base: si ω pertenece a *PRP(T)*, entonces $T\omega$ pertenece a *PRP(T)*, por el lema 4.1.8.
Paso inductivo: suponga que $T^n\omega \in PRP(T)$. Observe que $T^{n+1}\omega = T(T^n\omega)$. Entonces, por el lema 4.1.8, $T^n\omega \in PRP(T)$ implica que $T^{n+1}\omega \in PRP(T)$. □

Acerca del tamaño del conjunto *PRP(T)* en el espacio Ω

Para cerrar esta sección se definen las propiedades de repetición topológica, métrica y global, evidenciando que estas son condiciones suficientes para que $PRP(T)$ sea genérico en Ω.

Definición 4.1.10. (*BD, 2008 p.650*). El sistema $\{\Omega, T\}$ satisface la propiedad de:

(i) *Repetición topológica (TRP)* si $PRP(T)$ es denso en Ω.

(ii) *Repetición métrica (MRP)* si $\mu(PRP(T)) > 0$, donde $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida.

(iii) *Repetición global (GRP)* si $PRP(T) = \Omega$.

Lema 4.1.11. Si $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*, entonces el conjunto $PRP(T)$ es residual en Ω.

Demostración. El conjunto $PRP(T)$ es G_δ (lema 4.1.7). Si se satisface *TRP*, entonces $PRP(T)$ es denso, en cuyo caso el conjunto $PRP(T)$ es residual en Ω, pues es denso y G_δ. □

Lema 4.1.12. Si $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP* y la transformación T es $\mu-$ergódica (definición 1.3.6), entonces el conjunto *PRP(T)* es de medida completa en Ω.

Demostración. Para simplificar la notación, sea $PRP(T) = A$. Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*: $\mu(A) > 0$. Vamos a demostrar que $\mu(A) = 1$. Definamos:

$$B = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}A$$

entonces $T^{-1}B = \bigcup_{n\geq 1} T^{-n}A$ y por lo tanto $T^{-1}B \subseteq B$. Esto último implica que $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = 1$ pues por hipótesis la transformación T es $\mu-$ergódica. Dado que $A \subseteq B$ por la definición de B y $\mu(A) > 0$ por hipótesis, se sigue que $\mu(B) > 0$ y por lo tanto $\mu(B) = 1$.

De otra parte, como la transformación T es $\mu-$ergódica, en particular preserva medida: $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ y por lo tanto $\mu(T^{-1}(B)) = 1$. Observe que:

$$1 = \mu(T^{-1}(B)) = \mu(A) + \mu(T^{-1}(B) \setminus A)$$

y también:

$$1 = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

De estas dos ecuaciones se sigue que $\mu(B \setminus A) = \mu(T^{-1}(B) \setminus A)$.

Ahora suponga que $\mu(B \setminus A) > 0$. Observe que $T^{-1}(B \setminus A) \subseteq B \setminus A$, en efecto:

$$\begin{aligned} x \in T^{-1}(B \setminus A) \Rightarrow T(x) \in B \setminus A &\Rightarrow T(x) \in B \text{ y } T(x) \notin A \\ &\Rightarrow x \notin A && \text{lema 4.1.8} \\ &\Rightarrow x \in B \setminus A && \text{pues } T^{-1}B \subseteq B \end{aligned}$$

Por la ergodicidad de T, esto implica que $\mu(B \setminus A) = 1$, lo que equivale a que $\mu(A) = 0$, pero esto es una contradicción puesto que por hipótesis $\mu(A) > 0$. De esta contradicción se concluye que $\mu(B \setminus A) = 0$ y por lo tanto $\mu(A) = 1$. □

Tanto la propiedad *TRP* como la propiedad *MRP* son condiciones suficientes para que el espectro puramente continuo sea una propiedad genérica de la familia de operadores de Schrödinger $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1). Este argumento se desarrolla en las dos siguientes secciones.

4.2. El espectro continuo es genérico: enfoque topológico

En esta sección se estudian las condiciones suficientes para que el espectro continuo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1) sea genérico desde el punto de vista topológico. La estrategia es construir un subconjunto residual de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ para el cual el potencial $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$ es un potencial de Gordon (definición 3.1.1). Lo anterior implica, por el lema de Gordon (lema 3.2.1), que el operador:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n), \quad \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{4-5}$$

no tiene valores propios y por lo tanto su espectro es puramente continuo.

De acuerdo con BD (2008), las condiciones: ***(1)*** que el sistema $\{\Omega, T\}$ sea minimal (definición 1.3.2), y ***(2)*** que $\{\Omega, T\}$ satisfaga la propiedad *TRP* (definición 4.1.10), son suficientes para que $f(T^n\omega)$ sea un potencial de Gordon. El siguiente teorema formaliza esta afirmación.

Teorema 4.2.1. *(BD, 2008 theorem 1, p.650). Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ es minimal y satisface TRP. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un subconjunto residual Ω_f de Ω con la propiedad de que $f(T^n\omega)$ es un potencial de Gordon, para todo $\omega \in \Omega_f$.*

El principal valor agregado de este trabajo es que generalizamos el teorema 4.2.1 en dos direcciones: primero, demostramos el resultado del teorema citado asumiendo únicamente que $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω para un $\alpha \in PRP(T)$. Segundo, demostramos el resultado en cuestión suponiendo solamente que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*. Lo anterior se presenta, respectivamente, en los teoremas 4.2.3 y 4.2.5, los cuales son de autoría propia. De cara a este objetivo, inicialmente se prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2. Suponga que para un $\alpha \in PRP(T)$, el conjunto $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω. Entonces:

(i) El sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*.

(ii) Dado $q \in \mathbb{Z}$, el conjunto $\{T^{q+j}\alpha\}_{j\geq 0}$ es denso en Ω.

Demostración.
(i) sea $\alpha \in PRP(T)$. Por el corolario 4.1.9, $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0} \subseteq PRP(T)$. Por lo tanto, si $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω, entonces *PRP(T)* contiene a un subconjunto denso de Ω, y en consecuencia *PRP(T)* es denso en Ω.

(ii) Sea $\omega \in \Omega$. Definamos el conjunto: $A = \{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{q-1}\alpha\}$. Como A es finito, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B_{\delta_0}(\omega)$, es decir la bola abierta con centro en ω y radio δ_0 es disjunta con A:

$$B_{\delta_0}(\omega) \cap A = \emptyset$$

Dado que por hipótesis el conjunto $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω, entonces existe un $j \geq 0$ tal que $T^j\alpha \in B_{\delta_0}(\omega)$ y por lo tanto:

$$\{T^n\alpha\}_{n\geq 0} \cap B_{\delta_0}(\omega) \neq \emptyset$$

Como $B_{\delta_0}(\omega) \cap A = \emptyset$ y $T^j\alpha \in B_{\delta_0}(\omega)$, entonces $j \geq q$. Se concluye que $\{T^{q+j}\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω. □

En el siguiente teorema se demuestra que es posible reemplazar las hipótesis del teorema 4.2.1, a saber, que el sistema $\{\Omega, T\}$ es minimal y satisface *TRP*, por la hipótesis menos restrictiva de que el conjunto $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω, para un $\alpha \in PRP(T)$.

Teorema 4.2.3. *Suponga que $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω para $\alpha \in PRP(T)$. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un subconjunto residual Ω_f de Ω con la propiedad de que $f(T^n\omega)$ es un potencial de Gordon, para todo $\omega \in \Omega_f$.*

Demostración. Se demostrará que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon para toda f en $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ residual y ω en $\Omega_f \subseteq \Omega$ residual. La función $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon si existe una sucesión de enteros positivos $q_m \to \infty$ y un $C > 0$ tal que (teorema 3.1.2):

$$\begin{aligned} \max_{1\leq n\leq q_m} |f(T^n\omega) - f(T^{n+q_m}\omega)| &\leq Cm^{-q_m} \quad \text{y que:} \\ \max_{1\leq n\leq q_m} |f(T^n\omega) - f(T^{n-q_m}\omega)| &\leq Cm^{-q_m} \end{aligned} \tag{4-6}$$

La demostración se divide en tres pasos. Primero, se construye un subconjunto residual $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$. Segundo, para cada $f \in \mathcal{F}$ se construye un subconjunto residual Ω_f de Ω. Finalmente, se muestra que para todo $f \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega_f$ la función $f(T^n\omega)$ satisface las dos desigualdades de la ecuación (4-6) y por lo tanto es potencial de Gordon.

(1) Construcción de $\mathcal{F}$ residual en $C(\Omega)$:
Sea $\alpha \in PRP(T)$, es decir que $\{T^j\alpha\}_{j\geq 0}$ satisface PR, y por lo tanto para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existe un q_k tal que:

$$d(T^j\alpha, T^{j+q_k}\alpha) < \frac{1}{k}, \quad \text{para } 0 \leq j \leq 3q_k$$

donde $\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$ (lema 4.1.6).

Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ sea $B_k = B_k(\alpha, r(k))$ una bola abierta con centro en α y radio $r(k)$. Como T^j es un homeomorfismo en Ω entonces $\{T^j(B_k)\}_{j=1}^{4q_k}$ es una sucesión de abiertos en Ω. La unión de elementos de esta secuencia la representamos como:

$$\bigcup_{j=1}^{q_k} T^j(B_k) \cup T^{q_k+j}(B_k) \cup T^{2q_k+j}(B_k) \cup T^{3q_k+j}(B_k) = \bigcup_{j=1}^{q_k}\bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k)$$

El radio $r(k)$ de la bola abierta B_k con centro en α se considera lo suficientemente pequeño para que se cumplan las dos siguientes condiciones:

(a) $\overline{T^i(B_k)} \cap \overline{T^j(B_k)} = \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, 4q_k\} \quad \text{con } i \neq j.$

(b) Para cada $1 \leq j \leq q_k$ tenemos que $\bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k)$ está dentro de una bola de radio $\frac{4}{k}$.

Imponer la condición **(a)** es posible pues por hipótesis T es un homeomorfismo en Ω y además se tiene una cantidad finita de iterados de T. Respecto a la condición **(b)** observe que, como $\{T^j\alpha\}_{j\geq 0}$ satisface PR entonces para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que (figura **4-2**):

$$\begin{aligned} d(T^j\alpha, T^{j+q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \\ d(T^{j+q_k}\alpha, T^{j+2q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \qquad \Rightarrow \qquad d(T^j\alpha, T^{j+lq_k}\alpha) < \frac{3}{k} \quad \text{para } 0 \leq l \leq 3 \\ d(T^{j+2q_k}\alpha, T^{j+3q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \end{aligned}$$

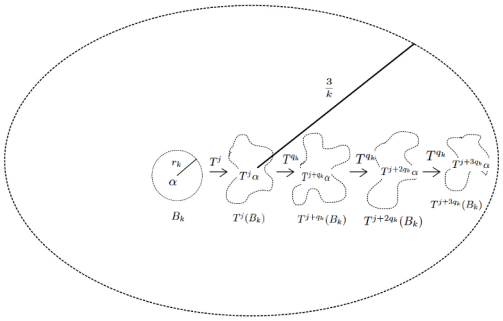


Figura 4-2.: Ilustración de las condiciones **(a)** y **(b)**.

La utilidad de las condiciones **(a)** y **(b)** es que garantizan que el conjunto $\mathcal{F}$ que se construye a continuación es residual en $C(\Omega)$. Inicialmente, considere el conjunto:

$$\mathcal{C}_k = \{g \in C(\Omega) \mid g \text{ es constante en } \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \text{ para cada } j : 1 \leq j \leq q_k\}$$

Se define el conjunto $\mathcal{F}_k$ como las vecindades abiertas de radio k^{-q_k} en torno a $g \in \mathcal{C}_k$:

$$\mathcal{F}_k = \{f \in C(\Omega) \mid |f - g| = \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)| < k^{-q_k}, \quad \text{para} \quad g \in \mathcal{C}_k\} \tag{4-7}$$

Ahora, para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ sea:

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \bigcup_{k\geq m} \mathcal{F}_k$$

El conjunto $\hat{\mathcal{F}}_m$ es abierto, puesto que es la unión contable de conjuntos abiertos en $C(\Omega)$. Adicionalmente, $\hat{\mathcal{F}}_m$ es denso en $C(\Omega)$. En efecto, sea $h \in C(\Omega)$ y construyamos una $g \in \hat{\mathcal{F}}_m$ arbitrariamente cercana a h. Como Ω es compacto, entonces h es uniformemente continua. Sean $x, y \in \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k)$. De acuerdo con la condición **(b)**: $d(x, y) < 4/k$. Esto implica, por la continuidad uniforme de h, que $|h(x) - h(y)| \to 0$ para $k \in \mathbb{Z}$ arbitrariamente grande. Para un $\hat{x} \in \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k)$ dado, defina la función:

$$g(x) = \begin{cases} h(\hat{x}) & \text{si} \quad x \in \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \\ h(x) & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \end{cases} \tag{4-8}$$

Se sigue que $g \in \mathcal{C}_k$ y $h \in \hat{\mathcal{F}}_m$ para todo $m \geq 1$, luego $\hat{\mathcal{F}}_m$ es denso en $C(\Omega)$. Podemos concluir que para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto $\hat{\mathcal{F}}_m$ es abierto y denso en $C(\Omega)$. Por tanto:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{m\geq 1} \hat{\mathcal{F}}_m = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq m} \mathcal{F}_k$$

es residual en $C(\Omega)$ pues es la intersección contable de conjuntos abiertos y densos.

(2) Construcción de Ω_f residual en Ω:

Sea $f \in \mathcal{F}$. Por la definición del conjunto $\mathcal{F}$ en el paso anterior de esta demostración, existe una sucesión de enteros positivos k_l, con $\lim_{l\to\infty} k_l = \infty$, tal que f pertenece a cada $\hat{\mathcal{F}}_{k_l}$ (ecuación 4-7). Además, para cada k_l existe un q_{k_l} tal que:

$$d(T^j\alpha, T^{j+q_{k_l}}\alpha) < \frac{1}{k_l}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k_l \cdot q_{k_l}$$

donde $\lim_{l\to\infty} q_{k_l} = \infty$, por el lema 4.1.6.

De acuerdo con la proposición 4.2.2 el conjunto $\{T^{q+j}\alpha\}_{j\geq 1}$ es denso en Ω para todo $q \in \mathbb{Z}$, luego en particular $\{T^{q_{k_l}+j}\alpha\}_{j\geq 1}$ es denso en Ω para cada q_{k_l}. La unión de elementos de esta última sucesión se representa, para cada $m \geq 1$, como:

$$\bigcup_{l\geq m}\bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(\alpha), \quad \text{donde:} \quad \bigcup_{l\geq m}\bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(\alpha) \subseteq \bigcup_{l\geq m}\bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(B_{k_l})$$

La contenencia en la ecuación anterior se justifica en que $\alpha \in B_{k_l}$, donde B_{k_l} es una bola abierta, en concordancia con el paso *(1)* de la demostración. Entonces el conjunto:

$$\Omega_{f,m} = \bigcup_{l\geq m}\bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(B_{k_l})$$

es denso en Ω pues contiene a $\{T^{q_{k_l}+j}\alpha\}_{j\geq 1}$, que es denso en Ω. Se concluye que:

$$\Omega_f = \bigcap_{m\geq 1} \Omega_{f,m} = \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{l\geq m}\bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{k_l})$$

es la intersección contable de abiertos densos, y por lo tanto residual en Ω.

(3) Mostremos que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon, para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $\omega \in \Omega_f$:
Sea $f \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega_f$. Esto significa que para una subsucesión $k_l \to \infty$:

$$\omega \in \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{k_l})$$

Por lo tanto, para cada k_l existe un $\hat{j}$ $(1 \leq \hat{j} \leq q_{k_l})$ tal que $\omega \in T^{\hat{j}+q_{k_l}}(B_{k_l})$. Esto implica que para cada j, con $1 \leq j \leq q_{k_l}$:

$$T^j\omega \in T^{\hat{j}+j+q_{k_l}}(B_{k_l}), \quad T^{j+q_{k_l}}\omega \in T^{\hat{j}+j+2q_{k_l}}(B_{k_l}) \quad \text{y} \quad T^{j-q_{k_l}}\omega \in T^{\hat{j}+j}(B_{k_l})$$

Sea $\bar{j} = \hat{j} + j$. Entonces:

$$T^j\omega, \quad T^{j+q_{k_l}}\omega \quad \text{y} \quad T^{j-q_{k_l}}\omega \quad \in \bigcup_{1\leq\bar{j}\leq q_{k_l}}\bigcup_{l=0}^{3} T^{\bar{j}+lq_{k_l}}(B_{k_l}), \quad \forall j: \quad 1 \leq j \leq q_{k_l}$$

Considere una función $g \in \mathcal{C}_{k_l}$. Esto significa, por la definición del conjunto $\mathcal{C}_{k_l}$ en el paso anterior de esta demostración, que g es constante en $\bigcup_{1\leq \bar{j}\leq q_{k_l}} \bigcup_{l=0}^{3} T^{\bar{j}+lq_{k_l}}(B_{k_l})$. En particular:

$$g(T^j\omega) = g(T^{j+q_{k_l}}\omega) \quad \text{y} \quad g(T^j\omega) = g(T^{j-q_{k_l}}\omega)$$

Por lo tanto, si $f \in \mathcal{F}$ entonces:

$$\begin{aligned}
|f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| &= |f(T^j\omega) - g(T^j\omega) + g(T^{j+q_{k_l}}\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| && \text{pues } g(T^j\omega) = g(T^{j+q_{k_l}}\omega) \\
&\leq |f(T^j\omega) - g(T^j\omega)| + |f(T^{j+q_{k_l}}\omega) - g(T^{j+q_{k_l}}\omega)| && \text{desigualdad triangular} \\
&< k_l^{-q_{k_l}} + k_l^{-q_{k_l}} = 2k_l^{-q_{k_l}} && \text{pues } f \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

de igual manera:

$$\begin{aligned}
|f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| &= |f(T^j\omega) - g(T^j\omega) + g(T^{j-q_{k_l}}\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| && \text{pues } g(T^j\omega) = g(T^{j-q_{k_l}}\omega) \\
&\leq |f(T^j\omega) - g(T^j\omega)| + |f(T^{j-q_{k_l}}\omega) - g(T^{j-q_{k_l}}\omega)| && \text{desigualdad triangular} \\
&< k_l^{-q_{k_l}} + k_l^{-q_{k_l}} = 2k_l^{-q_{k_l}} && \text{pues } f \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$|f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| < 2k_l^{-q_{k_l}} \quad \text{y} \quad |f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| < 2k_l^{-q_{k_l}}$$

La desigualdad anterior se satisface para cada $j \in \{1, \ldots, q_{k_l}\}$. Lo cual permite concluir que:

$$\max_{1\leq j\leq q_{k_l}} |f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| < 2k_l^{-q_{k_l}} \quad \text{y} \quad \max_{1\leq j\leq q_{k_l}} |f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| < 2k_l^{-q_{k_l}}$$

Haciendo $C = 2$ en la ecuación (4-6) se concluye que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon. □

Corolario 4.2.4. Suponga que $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω, para $\alpha \in PRP(T)$. Entonces el espectro puramente continuo es una propiedad genérica, desde el punto de vista topológico, de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1).

Demostración. Si $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ es denso en Ω, para $\alpha \in PRP(T)$ entonces $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon para $f \in \mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ residual y $\omega \in \Omega_f \subseteq \Omega$ residual (teorema 4.2.3). En consecuencia, por el lema de Gordon (teorema 3.2.1), el operador:

$$\begin{aligned}
H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\
\psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n), \quad \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

no tiene valores propios. Se concluye que el espectro puramente continuo es una propiedad genérica de los operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales discretos. □

El siguiente teorema es la segunda generalización del teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.5. *Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface TRP. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un subconjunto residual Ω_f de Ω con la propiedad de que $f(T^n\omega)$ es un potencial de Gordon, para todo $\omega \in \Omega_f$.*

Demostración. Nos centramos en la construcción del conjunto Ω_f residual en Ω, ya que el resto de la demostración es análoga a la del teorema 4.2.3.

Suponga que $f \in \mathcal{F}$. Esto implica que para una subsucesión de enteros positivos $k_l \to \infty$, f pertenece a cada conjunto $\mathcal{F}_{k_l}$ (ecuación 4-7). Por otra parte, dado que por hipótesis el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface la propiedad *TRP*, tenemos que Ω puede ser cubierto de la siguiente forma:

$$\Omega \subseteq \bigcup_{\omega \in PRP(T)} B_{\varepsilon_\omega}\omega$$

donde B_{ε_ω} son bolas abiertas de radio $\varepsilon_\omega > 0$ alrededor de $\omega \in PRP(T)$. Para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ definamos el conjunto:

$$\Omega_{f,m} = \bigcup_{\omega \in PRP(T)} \bigcup_{l \geq m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{r(k_l)}(\omega))$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto $\Omega_{f,m}$ es abierto ya que es la unión de conjuntos abiertos. Adicionalmente, $\Omega_{f,m}$ es denso en Ω, ya que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP* y T es un homeomorfismo. En consecuencia:

$$\Omega_f = \bigcap_{m \geq 1} \Omega_{f,m} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{\omega \in PRP(T)} \bigcup_{l \geq m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{r(k_l)}(\omega))$$

es un conjunto residual en Ω pues es la intersección de abiertos densos.

Finalmente, para cada $f \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega_{f,m}$, la función $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon. El argumento es el mismo presentado en el tercer paso de la demostración del teorema 4.2.3. □

Corolario 4.2.6. Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*. Entonces el espectro puramente continuo es una propiedad genérica, desde el punto de vista topológico, de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ (ecuación 4-1).

Demostración. La demostración es análoga a la del corolario 4.2.4. Si el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*, entonces $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon para $f \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega_f$, donde $\mathcal{F}$ y Ω_f son residuales en $C(\Omega)$ y en Ω, respectivamente (teorema 4.2.5). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n), \quad \omega \in \Omega \end{aligned}$$

no tiene valores propios. Se concluye que el espectro puramente continuo es una propiedad genérica de los operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales discretos. □

4.3. El espectro continuo es genérico: enfoque de la teoría de la medida

En esta sección se demuestra que la propiedad *MRP* (definición 4.1.10) es condición suficiente para que el espectro continuo de la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1) sea genérico desde el punto de vista de la teoría de la medida. En adelante $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, donde Ω es compacto, $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel, μ es la medida de Lebesgue y $T : \Omega \to \Omega$ es una transformación $\mu-$ergódica (definición 1.3.6).

En el siguiente lema se construye una sucesión $\{\mathcal{K}_i\}_{i\geq 1} \subseteq \Omega$, donde cada $\mathcal{K}_i$ puede escribirse como la unión disjunta de subconjuntos compactos de Ω y además: $\mu(\mathcal{K}_i) \to \mu(\Omega) = 1$. Este resultado es esencial para la demostración del teorema que se presenta posteriormente, el cual formaliza la afirmación planteada en el párrafo anterior.

Lema 4.3.1. Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*. Entonces existe una sucesión $\{\mathcal{K}_i\}_{i\geq 1}$ de Ω tal que:

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\mathcal{K}_i) = 1$$

donde cada $\mathcal{K}_i$ es la unión de subconjuntos compactos de Ω.

Demostración. La demostración se divide en dos pasos: primero se construye una sucesión $\{n_i\}_{i\geq 1}$ en $\mathbb{Z}_+$ y una sucesión de abiertos $\{\Omega_i\}_{i\geq 1}$ en Ω, con la propiedad de que $n_i \to \infty$ y $\mu(\Omega_i) \to 1$. Luego se construye $\{\mathcal{K}_i\}_{i\geq 1}$.

(1) Construcción de $\{n_i\}_{i\geq 1}$ en $\mathbb{Z}_+$ y $\{\Omega_i\}_{i\geq 1}$ en Ω:
Por hipótesis el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*, por lo tanto $\mu(PRP(T)) = 1$ (lema 4.1.12). De acuerdo con la definición 4.1.5, el conjunto $PRP(T)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall \varepsilon > 0, r \in \mathbb{Z}_+ : \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que : } & \text{ si } k_1 \equiv_n k_2, \text{ con } k_1, k_2 \in [1, rn] \\ & \text{entonces } d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Donde $k_1 \equiv_n k_2$ si y solamente si $k_2 - k_1 = an$, para un $a \in \mathbb{Z}$, luego $d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) = d(T^{k_1}\omega, T^{k_1+an}\omega)$. Tomando $r = i$ y estableciendo $\varepsilon = 2^{-i}$ para $i \in \mathbb{Z}$ en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{Z}_+ : \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que : } & \text{ si } k_1 \equiv_n k_2, \text{ con } k_1, k_2 \in [1, in] \\ & \text{entonces } d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) < 2^{-i}\} \end{aligned}$$

Con base en esta reescritura del conjunto $PRP(T)$ se definen las sucesiones $\{n_i\}_{i\geq 1}$ en $\mathbb{Z}_+$ y $\{\Omega_i\}_{i\geq 1}$ en Ω de acuerdo con lo siguiente:

Considere un entero positivo n_1 lo suficientemente grande para que el conjunto:

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in [1, n_1] \text{ tal que : } & \text{ si } k_1 \equiv_n k_2, \text{ con } k_1, k_2 \in [1, n] \\ & \text{entonces } d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) < 2^{-1}\} \end{aligned}$$

sea de medida $\mu(\Omega_1) > 1 - 2^{-1}$. Ahora, para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ se define el conjunto abierto:

$$\Omega_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in (n_{i-1}, n_i] \text{ tal que : si } k_1 \equiv_n k_2, \text{ con } k_1, k_2 \in [1, in] \text{ entonces } d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) < 2^{-i}\} \tag{4-9}$$

Donde $n_i > n_{i-1}$ es tal que $\mu(\Omega_i) > 1 - 2^{-i}$.

Observe que la definición de Ω_i se corresponde con la definición del conjunto *PRP(T)*, pero con la restricción de que el n tal que $d(T^{k_1}\omega, T^{k_2}\omega) < 2^{-i}$ para $k_1 \equiv_n k_2$ debe pertenecer al intervalo $(n_{i-1}, n_i]$, donde n_i se selecciona de tal forma que $\mu(\Omega_i) > 1 - 2^{-i}$. Esto último es posible ya que como se mencionó anteriormente $\mu(PRP(T)) = 1$.

El anterior planteamiento determina una sucesión $\{n_i\}_{i\geq 1}$ en $\mathbb{Z}_+$, con $n_i \to \infty$ (como consecuencia del lema 4.1.6) y una sucesión $\{\Omega_i\}_{i\geq 1}$ de abiertos en Ω tal que $\mu(\Omega_i) \to 1$.

(2) Construcción de $\{\mathcal{K}_i\}_{i\geq 1}$ en Ω:
El objetivo es segmentar cada Ω_i en subconjuntos compactos disjuntos. De acuerdo con el lema de Rohlin-Halmos (lema A.0.17), para cada $m_i = (in_i)^2$ en $\mathbb{Z}_+$ existe un $O_i \subseteq \Omega$ que satisface las dos siguientes condiciones:

- $\{T^j O_i\}_{j=1}^{m_i}$ es una sucesión de subconjuntos disjuntos de Ω.
- $\mu(\bigcup_{j=1}^{m_i} T^j O_i) > 1 - 2^{-n_i - 1}$.

Considere una partición de O_i en subconjuntos $S_{i,l}$, donde $1 \leq l \leq s_i$ para determinado s_i, es decir $O_i = \bigcup_{l=1}^{s_i} S_{i,l}$. En virtud de que T^u es un homeomorfismo en Ω para cada $1 \leq u \leq m_i$, el radio de cada conjunto $S_{i,l}$ se toma lo suficientemente pequeño para que el conjunto $T^u S_{i,l}$ se encuentre contenido en una bola de radio $\frac{1}{2n_i}$:

$$d(x, y) < \frac{1}{n_i}, \quad \forall x, y \in T^u S_{i,l} \quad (1 \leq l \leq s_i) \tag{4-10}$$

Según el lema A.0.11, para cada $S_{i,l}$ es posible tomar un $K_{i,l} \subseteq S_{i,l}$ compacto tal que:

$$\mu(K_{i,l}) > \mu(S_{i,l})(1 - 2^{-n_i - 1})$$

y por lo tanto:

$$\mu(\bigcup_{l=1}^{s_i} K_{i,l}) > \mu(\bigcup_{l=1}^{s_i} S_{i,l})(1 - 2^{-n_i - 1})$$

donde $\bigcup_{u,l} T^u(K_{i,l})$ es una abreviación de $\bigcup_{u=1}^{m_i} \bigcup_{l=1}^{s_i} T^u(K_{i,l})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\mu(\bigcup_{l=1}^{s_i} K_{i,l}) > \mu(O_i)(1 - 2^{-n_i - 1}) && \text{pues } O_i = \bigcup_{l=1}^{s_i} S_{i,l} \\
\Rightarrow \quad &\mu(\bigcup_{u,l} T^u(K_{i,l})) > \mu(\bigcup_{u,l} T^u(S_{i,l}))(1 - 2^{-n_i - 1}) && \text{pues } T \text{ preserva la medida } \mu \\
\Rightarrow \quad &\mu(\bigcup_{u,l} T^u(K_{i,l})) > (1 - 2^{-n_i - 1})^2 > 1 - 2^{-n_i}
\end{aligned}$$

En resumen:

(i) $\{T^u K_{i,l}\}$ es una sucesión de compactos disjuntos en Ω, para $0 \leq u \leq m_i$ y $1 \leq l \leq s_1$.

(ii) $\mu(\bigcup_{u,l} T^u(K_{i,l})) > 1 - 2^{-n_i}$.

Vamos a identificar los $\omega \in \Omega$ que pertenecen a la intersección de Ω_i (ecuación 4-9) con $T^u K_{i,l}$, para algún $0 \leq u \leq m_i$. Estos elementos van a agruparse en una colección $\mathcal{K}_i$ que se construye de acuerdo con el siguiente procedimiento, para cada $l \in \{1, \ldots, s_i\}$.

Pasos para la construcción de $\mathcal{K}_i$:

1. Empezando en $u = 0$ y lo ponemos a andar, se plantea la pregunta si $T^u K_{i,l} \cap \Omega_i = \emptyset$.

2. Si $T^u K_{i,l} \cap \Omega_i = \emptyset$, la pregunta se traslada a $u + 1$. Si $T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset$, entonces se agrega a la colección $\mathcal{K}_i$ el conjunto $T^u K_{i,l}$ y también la sucesión $\{T^{u+h} K_{i,l}\}_{0 \leq h \leq in}$. Observe que, por la definición de Ω_i (ecuación 4-9):

$$T^u \omega \in \Omega_i \quad \Rightarrow \quad \exists\, n = n(\omega, u) \in (n_{i-1}, n_i] : \quad \text{si} \quad k_1 \equiv_n k_2, \quad \text{con} \quad k_1, k_2 \in [1, in] \\ \text{entonces } d(T^{u+k_1}\omega, T^{u+k_2}\omega) < 2^{-i}$$

   Es decir que $n_{i-1} < n(u, \omega) \leq n_i$.

3. Los pasos 1. y 2. se repiten para todos los $T^u K_{i,l}$ tal que $u \geq 0$ y además $n(u, \omega) \in \{n_{i-1} + 1, \ldots, n_i\}$.

Se sigue que $\mathcal{K}_i$ está compuesto por bloques de la siguiente forma, para cada $T^u K_{i,l}$ tal que $T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset$, donde $n(u, \omega) \in \{n_{i-1} + 1, \ldots, n_i\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, s_i\}$:

$$\begin{array}{cccc} T^{u+1} K_{i,l} & T^{(u+1)+n} K_{i,l} & \cdots & T^{(u+1)+(i-1)n} K_{i,l} \\ T^{u+2} K_{i,l} & T^{(u+2)+n} K_{i,l} & \cdots & T^{(u+2)+(i-1)n} K_{i,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{u+n} K_{i,l} & T^{u+2n} K_{i,l} & \cdots & T^{u+in} K_{i,l} \end{array} \tag{4-11}$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{K}_i = \bigcup_{u : T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} T^u K_{i,l} \cup \bigcup_{h=1}^{in} T^{u+h} K_{i,l}$$

Estableciendo $\mathcal{A}_i = \bigcup_{u : T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} T^u K_{i,l}$, se tiene que:

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{A}_i \cup \bigcup_{h=1}^{in} T^{u+h} K_{i,l}$$

Vamos a presentar un estimativo de la medida μ del conjunto $\mathcal{A}_i$. Observe que el espacio Ω puede escribirse como (ver figura **4-3**):

$$\Omega = \mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_i^c, \quad \text{donde:} \quad \mathcal{A}_i^c = (\mathcal{A}_i^c \cap \bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}) \cup (\mathcal{A}_i^c \cap \Omega_i) \cap (\Omega_i^c \cap (\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l})^c)$$

Dado que $\mu(\Omega) = 1$, se tiene que:

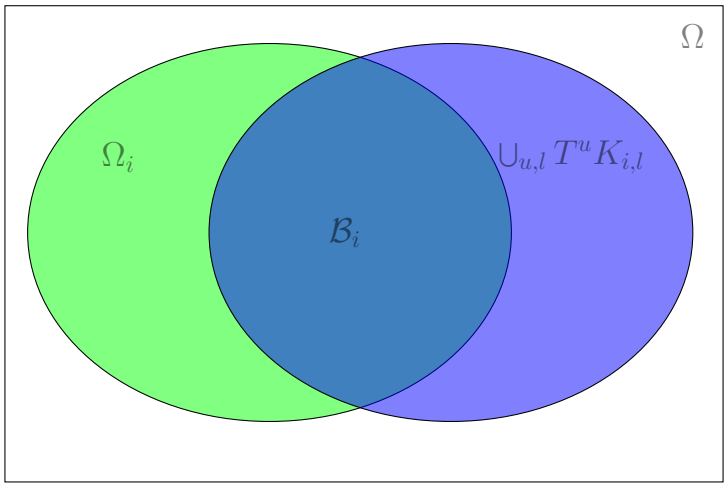


Figura 4-3.: El conjunto $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ se encuentra en la intersección de los conjuntos Ω_i y $\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}$: parte del conjunto $\mathcal{A}_i$ se encuentra en $\Omega_i \cap \bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}$.

$$1 = \mu(\mathcal{A}_i) + \mu(\mathcal{A}_i^c \cap \bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}) + \mu(\mathcal{A}_i^c \cap \Omega_i) + \mu(\Omega_i^c \cap (\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l})^c) \tag{4-12}$$

Vamos a acotar superiormente los sumandos del lado derecho de la ecuación (4-12). Recuerde que $\mu(\Omega_i) > 1 - 2^{-i}$ y $\mu(\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}) > 1 - 2^{-n_i}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i^c \cap \bigcup_{u,l} T^u K_{i,l} \subset \Omega_i^c \quad &\Rightarrow \quad \mu(\mathcal{A}_i^c \cap \bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}) < 2^{-i} && \text{pues } \mu(\Omega_i^c) < 2^{-i} \\
\mathcal{A}_i^c \cap \Omega_i \subset [\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l}]^c \quad &\Rightarrow \quad \mu(\mathcal{A}_i^c \cap \Omega_i) < 2^{-n_i} && \text{pues } \mu((\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l})^c) < 2^{-n_i} \\
\Omega_i^c \cap (\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l})^c \subset \Omega_i^c \quad &\Rightarrow \quad \mu(\Omega_i^c \cap (\bigcup_{u,l} T^u K_{i,l})^c) < 2^{-i} && \text{pues } \mu(\Omega_i^c) < 2^{-i}
\end{aligned}$$

Reemplazando las anteriores desigualdades en la ecuación (4-12):

$$\mu(\mathcal{A}_i) > 1 - 2^{-n_i} - 2 \cdot 2^{-i} \quad \Rightarrow \quad \mu(\mathcal{K}_i) > 1 - 2^{-n_i} - 2^{-i} - \frac{n_i}{m_i} \tag{4-13}$$

Se concluye que $\mu(\mathcal{K}_i) \to 1$ Como se quería. □

Teorema 4.3.2. *(BD, 2008 theorem 2, p.650). Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface MRP. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{F}$ de $C(\Omega)$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un subconjunto Ω_f de medida completa en Ω con la propiedad de que $f(T^n\omega)$ es un potencial de Gordon, para todo $\omega \in \Omega_f$.*

Demostración. Se probará que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon para f en $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ residual y ω en $\Omega_f \subseteq \Omega$ de medida completa.

(1) Construcción de $\mathcal{F}$ residual en $C(\Omega)$:
Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*. En consistencia con el lema 4.3.1, para $T^u K_{i,l}$ tal que $T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset$, defina:

$$C_{i,m} = \bigcup_{q=0}^{i-1} T^{u+qn} K_{i,l} \quad \text{y} \quad \tilde{C}_{i,m} = \bigcup_{q=1}^{i-2} T^{u+qn} K_{i,l}$$

Es decir, cada una de las n filas de la ecuación (4-11) es un conjunto $C_{i,m}$ y por tanto:

$$\mathcal{K}_i = \bigcup_{u:T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} C_{i,m} = \bigcup_{u:T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} \bigcup_{q=0}^{i-1} T^{u+qn} K_{i,l}$$

De forma análoga se define el conjunto $\tilde{\mathcal{K}}_i$ como:

$$\tilde{\mathcal{K}}_i = \bigcup_{u:T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} \tilde{C}_{i,m} = \bigcup_{u:T^u K_{i,l} \cap \Omega_i \neq \emptyset} \bigcup_{q=1}^{i-2} T^{u+qn} K_{i,l}$$

El conjunto $\tilde{\mathcal{K}}_i$ es de interés en el tercer paso de la demostración para garantizar que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon.

Por la ecuación (4-10): $d(x,y) < \frac{1}{n_i}$ para todo $x, y \in T^u K_{i,l}$. Adicionalmente, por la definición del conjunto Ω_i (ecuación 4-9): $d(T^u\omega, T^{u+ln}\omega) < 2^{-i}$ para todo $\omega \in \Omega_i$. Por lo tanto:

$$\forall x, y \in C_{i,m}: \quad d(x,y) < \frac{1}{n_i} + 2^{-i} \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} d(x,y) = 0 \quad (\text{pues: } n_i \to \infty \text{ por el lema } 4.1.6) \tag{4-14}$$

En adelante, la demostración es análoga a la del teorema 4.2.3. Primero considere:

$$F_i = \{g \in C(\Omega) \mid g \text{ es constante en cada conjunto } C_{i,m}\}$$

Se define $\mathcal{F}_i$ como las vecindades abiertas de radio i^{-n_i} en torno a $g \in F_i$:

$$\mathcal{F}_i = \{f \in C(\Omega) \mid |f - g| = \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)| < i^{-n_i}, \quad \text{para } g \in F_i\} \tag{4-15}$$

Para $m \in \mathbb{Z}_+$ sea:

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \bigcup_{i \geq m} \mathcal{F}_i$$

El conjunto $\hat{\mathcal{F}}_m$ es abierto y denso. La demostración de esto último es exactamente igual a la demostración del teorema 4.2.3, por lo tanto se omite. Como $\hat{\mathcal{F}}_m$ es abierto y denso para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, entonces el conjunto:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{m\geq 1} \hat{\mathcal{F}}_m = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{i\geq m} \mathcal{F}_i$$

es residual en $C(\Omega)$ al ser la intersección contable abiertos y densos.

(2) Construcción de Ω_f de medida completa en Ω:
Sea $f \in \mathcal{F}$. Entonces existe una sucesión $i_k \to \infty$ en $\mathbb{Z}_+$ tal que $f \in \mathcal{F}_{i_k}$, para cada i_k. De acuerdo con la ecuación (4-13):

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\mathcal{K}_{i_k}) = 1, \quad \text{donde } \mathcal{K}_{i_k} = \bigcup_{u:T^u K_{i_k,l}\cap\Omega_{i_k} i\neq\emptyset} C_{i_k,m}$$

Esto permite afirmar que: $\lim_{k\to\infty} \mu(\tilde{\mathcal{K}}_{i_k}) \to 1$ y por tanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{\mathcal{K}}_{i_k}) = \infty$$

Además, los $\tilde{C}_{i_k,m}$ que componen el conjunto $\tilde{\mathcal{K}}_{i_k}$ son disjuntos (lema 4.3.1), luego $\tilde{\mathcal{K}}_{i_k}$ es la unión de disjuntos. Concluimos por el lema de Borel-Cantelli (corolario A.0.19), que:

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \tilde{\mathcal{K}}_{i_k}) = 1 \tag{4-16}$$

De esta forma, para cada $f \in \mathcal{F}$ se define:

$$\Omega_f = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \tilde{\mathcal{K}}_{i_k} \quad \Rightarrow \quad \mu(\Omega_f) = 1$$

luego Ω_f es de medida completa en Ω.

(3) Mostremos que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon, para toda $f \in C(\Omega)$ y todo $\omega \in \Omega_f$:
Sea $f \in \mathcal{F}$ y $\omega \in \Omega_f$. Esto implica que:

$$\max_{1\leq j\leq n_{\bar{i}_k}} |f(T^j\omega) - f(T^{j+n}\omega)| < 2\bar{i}_k^{-n_{\bar{i}_k}} \quad \text{y} \quad \max_{1\leq j\leq n_{\bar{i}_k}} |f(T^j\omega) - f(T^{j-n}\omega)| < 2\bar{i}_k^{-n_{\bar{i}_k}}$$

La demostración de las dos desigualdades anteriores es igual a la demostración del paso *(3)* en el teorema 4.2.3, razón por la cual se omite. Haciendo $C = 2$ en la ecuación (4-6) se concluye que $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon. □

Observación 4.3.3. En la demostración del teorema 4.3.2 es posible asumir sin pérdida de generalidad que el sistema $\{\Omega, T\}$ es aperiódico, es decir:

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid T^m\omega = \omega, \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z}_+\}) = 0$$

La justificación es la siguiente: sea $\omega \in \Omega$ tal que para un $m \in \mathbb{Z}_+$: $T^m\omega = \omega$. Entonces:

$$A = \bigcup_{n=1}^{m} T^n\omega \quad \Rightarrow \quad T^{-1}A = \bigcup_{n=0}^{m-1} T^n\omega = \bigcup_{n=1}^{m} T^n\omega = A$$

Como T es $\mu-$ergódica: $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. Si $\mu(A) = 0$ entonces el sistema $\{\Omega, T\}$ es aperiódico. Si $\mu(A) = 1$ entonces:

$$V_\omega(n) = f(T^n\omega) = f(T^{n+m}\omega) = V_\omega(n+m), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Es decir que la función potencial V_ω es periódica para casi todo $\omega \in \Omega$ y en consecuencia, $H_\omega = \Delta_d + V_\omega$ es un operador de Schrödinger periódico, para casi todo $\omega \in \Omega$. Esto permite concluir que el espectro de H_ω es puramente continuo (ejemplo 3.2.4).

Corolario 4.3.4. Suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*. Entonces el espectro puramente continuo es una propiedad genérica, desde el punto de vista de la teoría de la medida, de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1).

Demostración. Si el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP* entonces $f(T^n\omega)$ es potencial de Gordon para toda $f \in \mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ residual y casi todo $\omega \in \Omega$ (teorema 4.3.2). Por lo tanto el lema de Gordon (teorema 3.2.1) implica que el operador:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n), \quad \omega \in \Omega \end{aligned}$$

no tiene valores propios. Se concluye que el espectro puramente continuo es una propiedad genérica de los operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales discretos. □

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, con $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel. La medida μ es *estrictamente positiva* si para todo $B \in \mathcal{B}$ con $B \neq \emptyset$, $\mu(B) > 0$.

Observación 4.3.5. Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y μ es una medida estrictamente positiva. Si el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP* y la transformación T es $\mu-$ergódica, entonces el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*. En efecto: suponga que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP* y que T es $\mu-$ergódica. Esto implica, por el lema 4.1.12, que:

$$\mu(PRP(T)) = 1 \tag{4-17}$$

Razonando por contradicción, suponga que $\{\Omega, T\}$ no satisface *TRP*, es decir que el conjunto $PRP(T)$ no es denso en Ω. Esto significa que existe un abierto no vacío $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap PRP(T) = \emptyset$. Como μ es estrictamente positiva, entonces $\mu(A) > 0$. Por lo tanto:

$$\mu(A) + \mu(PRP(T)) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \mu(PRP(T)) \leq 1 - \mu(A) \quad \Rightarrow \quad \mu(PRP(T)) < 1$$

Pero esto último contradice la ecuación (4-17). Se concluye que $\{\Omega, T\}$ satisface *TRP*.

Corolario 4.3.6. Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ donde Ω es compacto, $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y μ es estrictamente positiva. Si el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*, entonces el espectro puramente continuo es una propiedad genérica, desde el punto de vista topológico, de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1).

Demostración. Como el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*, entonces satisface *TRP* (observación 4.3.5). Esto implica, por el corolario 4.1.11, que el espectro puramente continuo es una propiedad genérica, desde el punto de vista topológico, de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1). $\square$

Capítulo 5

Aplicaciones-Ejemplos

En este capítulo se presentan ejemplos de aplicación de los teoremas 4.2.3 y 4.3.2, según los cuales el espectro continuo de la familia de operadores de Schrödinger discretos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (ecuación 4-1) es genérico. Se consideran los dos siguientes sistemas dinámicos:

(i) *Shift* ergódico en el toro $\mathbb{T}^d$ (ejemplo 1.3.9):

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^d &\to \mathbb{T}^d \\ \omega &\mapsto \omega + \alpha \end{aligned} \tag{5-1}$$

(ii) *Skew Shift* ergódico en el toro $\mathbb{T}^2$ (ejemplo 1.3.10):

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \tag{5-2}$$

El capítulo se divide en dos secciones. En la primera, se estudian los tipos espectrales de la familia $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ definida por el sistema (5-1). En la segunda, se hace un estudio análogo para la familia de operadores definida por el sistema (5-2).

5.1. *Shift* ergódico en el toro $\mathbb{T}^d$

El siguiente teorema permite aplicar el teorema (4.2.3) a una clase particular de sistemas dinámicos.

Teorema 5.1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad con Ω compacto, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de Borel y μ la medida de Lebesgue. Suponga que la transformación $T : \Omega \to \Omega$ es $\mu-$ergódica y satisface las dos siguiente condiciones:*

(i) *T es minimal: $\overline{\{T^n\omega\}}_{n\geq 0} = \Omega$ para todo $\omega \in \Omega$.*

(ii) *T es una isometría: $d(x, y) = d(Tx, Ty)$ para todo $x, y \in \Omega$.*

Entonces el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface MRP (definición 4.1.10). En consecuencia, el operador:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{5-3}$$

tiene espectro puramente continuo para todo ω en un subconjunto de medida completa de Ω y para $f \in \mathcal{F}$ subconjunto residual de $C(\Omega)$.

Demostración. Sea $\omega \in \Omega$. El objetivo es demostrar que ω pertence al conjunto *PRP(T)* (definición 4.1.5), es decir, que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ existe un $q_k \in \mathbb{Z}_+$ con la propiedad de que $d(T^n\omega, T^{n+q_k}\omega) < \frac{1}{k}$, para todo $n \in \{0, \ldots, kq_k\}$.

Por hipótesis T es minimal, luego para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existe un $\hat{q}_k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d(\omega, T^{\hat{q}_k}\omega) < \frac{1}{k}$ para todo $n \in \{0, \ldots, k\hat{q}_k\}$. Como T es isometría: $d(\omega, T^{q_k}\omega) = d(T^n\omega, T^{n+q_k}\omega)$. Por lo tanto:

$$d(\omega, T^{\hat{q}_k}\omega) < \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad d(T^n\omega, T^{n+\hat{q}_k}\omega) = d(\omega, T^{\hat{q}_k}\omega) < \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \{0, \ldots, k\hat{q}_k\}$$

Haciendo $q_k = \hat{q}_k$ se tiene que $\omega \in PRP(T)$. Se concluye que $\Omega = PRP(T)$ y por lo tanto $\mu(PRP(T)) = \mu(\Omega) = 1$, lo cual equivale a que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface *MRP*. Esto implica que el espectro del operador (5-3) es puramente continuo para casi todo $\omega \in \Omega$ (teorema 4.3.2). □

En el siguiente teorema se considera el espacio de medida $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \mu)$ donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y μ la medida de Lebesgue.

Teorema 5.1.2. *(BD, 2008 theorem 3, p.651).Considere el sistema dinámico $\{\mathbb{T}^d, T\}$, donde $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ es el Shift ergódico (ecuación 5-1). Entonces $\{\mathbb{T}^d, T\}$ satisface la propiedad MRP y en consecuencia, para una función $f \in C(\mathbb{T}^d)$ genérica, el operador:*

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(\omega + n\alpha)\psi(n) \end{aligned} \tag{5-4}$$

tiene espectro puramente continuo para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^d$.

Demostración. Como la transformación $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ es ergódica, entonces T es minimal en $\mathbb{T}^d$ (definición 1.3.7). Además T es una isometría, puesto que para ω_1 y ω_2 en $\mathbb{T}^d$:

$$d(T\omega_1, T\omega_2) = d(\omega_1 + \alpha, \omega_2 + \alpha) = |\omega_1 + \alpha - \omega_2 - \alpha| = |\omega_1 - \omega_2| = d(\omega_1, \omega_2)$$

En vista de que T es minimal y es una isometría en $\mathbb{T}^d$, el teorema 5.1.1 permite concluir que que el espectro del operador (5-4) es continuo para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^d$. □

5.2. *Skew Shift* en el toro $\mathbb{T}^2$

Considere el espacio de medida $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \mu)$, donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}^2$. En esta sección se estudian las propiedades del sistema dinámico $\{\mathbb{T}^2, T\}$, donde T es el operador *Skew Shift* (ecuación 5-2) y sus implicaciones sobre el espectro de la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\mathbb{T}^2}$ definida por:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f((\omega_1 + 2n\alpha, \omega_2 + 2n\omega_1 + n(n-1)\alpha))\psi(n) \end{aligned} \tag{5-5}$$

Definición 5.2.1. Sea $\alpha \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se define la constante $c(\alpha)$ como:

$$c(\alpha) = \liminf_{q\to\infty} q\langle \alpha q\rangle \quad \text{donde:} \quad \langle \alpha q\rangle = \operatorname{dist}_{\mathbb{T}}(\alpha q, 0) = \min\{|\alpha q - p| : p \in \mathbb{Z}\}$$

Se dice que $\alpha \in \mathbb{T}$ es *mal aproximable* si $c(\alpha) > 0$. Por lo tanto, $\alpha \in \mathbb{T}$ no es mal aproximable si existe una subsucesión $\{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ tal que $\lim_{q_k\to\infty} q_k\langle \alpha q_k\rangle = 0$.

Observación 5.2.2. El conjunto de números mal aproximables tiene medida de Lebesgue igual a cero en $\mathbb{T}$. En consecuencia, el conjunto de números que no son mal aproximables es de medida completa en $\mathbb{T}$ (Khinchin, *1964 theorem 29, p.60*).

Teorema 5.2.3. *(BD, 2008 theorem 4, p.651). Considere el sistema dinámico $\{\mathbb{T}^2, T\}$, donde $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es el operador Skew Shift: $T(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2)$, con $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *α no es mal aproximable.*

(ii) *$\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface GRP.*

(iii) *$\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface MRP.*

(iv) *$\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface TRP.*

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Suponga que α no es mal aproximable. Vamos a demostrar que $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface *GRP*, es decir que $\mathbb{T}^2 = PRP(T)$. Como α no es mal aproximable, entonces existe una sucesión $\{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, con $\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} q_k\langle \alpha q_k\rangle = 0$$

Sea $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{T}^2$ y considere $k \in \mathbb{Z}_+$. Para demostrar que $\omega \in PRP(T)$, vamos a construir una sucesión $\hat{q}_k$ tal que:

$$d(T^{n+\hat{q}_k}\omega, T^n\omega) < \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } n \text{ tal que:} \quad 0 \le n \le \hat{q}_k \tag{5-6}$$

De acuerdo con la definición de T en $\mathbb{T}^2$:

$$T^{n+\hat{q}_k}\omega - T^n\omega = (2\hat{q}_k\alpha, 2\hat{q}_k\omega_1 + \hat{q}_k^2\alpha + 2n\hat{q}_k\alpha - \hat{q}_k\alpha) \tag{5-7}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, sea $\hat{q}_k = m_k q_k$, donde $m_k \in \{1, \ldots, k+1\}$. Es decir que:

$$T^{n+\hat{q}_k}\omega - T^n\omega = (2m_k q_k\alpha, 2m_k q_k\omega_1 + (m_k q_k)^2\alpha + 2nm_k q_k\alpha - m_k q_k\alpha)$$

Dado que por hipótesis α es mal aproximable, entonces $\langle 2m_k q_k\alpha\rangle \to 0$, $\langle (m_k q_k)^2\alpha\rangle \to 0$, $\langle m_k q_k\alpha\rangle \to 0$, $\langle 2nm_k q_k\alpha\rangle \to 0$. Resta ver que $2m_k q_k\omega_1 \to 0$. Para esto, el m_k se selecciona del conjunto $\{1, \ldots, k+1\}$ de tal forma que $\langle m_k(2q_k\omega_1)\rangle < \varepsilon$. Se sigue que $T^{n+\hat{q}_k}\omega - T^n\omega \to 0$ y en consecuencia $d(T^{n+\hat{q}_k}\omega, T^n\omega) \to 0$ para todo n tal que $0 \leq n \leq \hat{q}_k$. Se concluye que $\omega \in PRP(T)$. Como la selección de ω fue arbitraria, se concluye que $\mathbb{T}^2 = PRP(T)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Suponga que el sistema dinámico $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface *GRP*, es decir $PRP(T) = \mathbb{T}^2$. Esto implica que $\mu(PRP(T)) = \mu(\mathbb{T}^2) = 1 > 0$, luego $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface *MRP*.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
Suponga que $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface *MRP*. Como T es $\mu-$ergódica en $\mathbb{T}^2$ (ejemplo 1.3.10) y la medida de Lebesgue (definición A.0.10) es estrictamente positiva, entonces la observación 4.3.5 implica que el sistema $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface TRP.

$(iv) \Rightarrow (i)$
Suponga que $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface *TRP*. Entonces el conjunto $PRP(T)$ es denso en $\mathbb{T}^2$. En particular, existe $\omega \in \mathbb{T}^2$ tal que $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ satisface *PR*. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un q_k tal que $d(T^{n+q_k}\omega, T^n\omega) < \varepsilon$. De acuerdo con la ecuación (5-7), esto implica que:

$$\langle 2q_k\omega_1 + q_k^2\alpha + 2nq_k\alpha - q_k\alpha\rangle < \varepsilon \quad \text{para } n \text{ tal que:} \quad 0 \leq n \leq q_k \tag{5-8}$$

luego para $n = 0$: $\langle 2q_k\omega_1 + q_k^2\alpha - q_k\alpha\rangle < \varepsilon$. En otras palabras, lo anterior significa que $2q_k\omega_1 + q_k^2\alpha - q_k\alpha \in \mathbb{T}$ se encuentra a una distancia menor a ε de 0. Entonces, para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño se tiene que $\langle 2nq_k\alpha\rangle = n\langle 2q_k\alpha\rangle$ para todo n: $0 \leq n \leq q_k$. Haciendo $n = q_k$, se concluye que $q_k\langle q_k\alpha\rangle < \varepsilon$, lo que por definición significa que α no es mal aproximable. □

Corolario 5.2.4. Sea $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ el operador definido por $T(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2)$. Entonces para casi todo $\alpha \in \mathbb{T}$, para casi todo $\omega \in \mathbb{T}$ y para una función $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ continua genérica, el operador:

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f((\omega_1 + 2n\alpha, \omega_2 + 2n\omega_1 + n(n-1)\alpha))\psi(n) \end{aligned} \tag{5-9}$$

tiene espectro puramente continuo.

Demostración. El conjunto de números que no son mal aproximables es de medida completa en $\mathbb{T}$ (observación 5.2.2). Por lo tanto el teorema 5.2.3 implica que para casi todo $\alpha \in \mathbb{T}$ el sistema $\{\mathbb{T}^2, T\}$ satisface la propiedad *MRP*. Esto a su vez implica, por el teorema 4.3.2, que el espectro del operador H_ω (ecuación 5-9) es continuo para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^2$. □

La figura **5-1** resume esquemáticamente los teoremas estudiados en el trabajo. En esta figura se presenta la relación entre las propiedades de repetición (*TRP* y *MRP*) y sus implicaciones sobre el espectro genérico de los operadores de Schrödinger unidimensionales ergódicos, donde $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y T un homeomorfismo en el espacio compacto Ω.

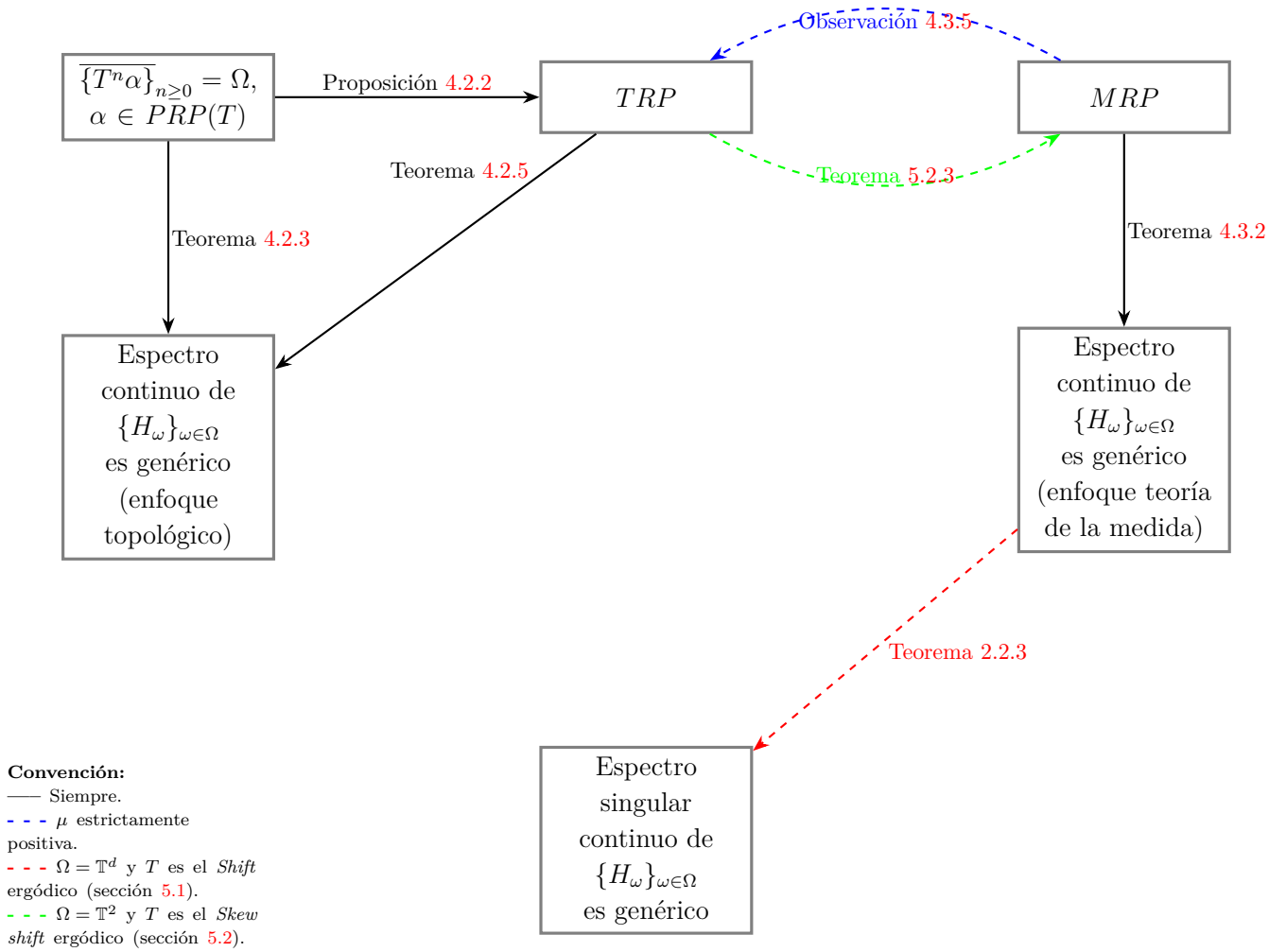


Figura 5-1.: Relación entre las propiedades del sistema $\{\Omega, T\}$ y el espectro de la familia de operadores de Schrödinger ergódicos unidimensionales $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Capítulo 6

Conclusiones y discusión

La teoría de operadores de Schrödinger es uno de los pilares de la física matemática moderna, pues constituye el marco de análisis de los sistemas conservativos de partículas a escala cuántica. El estudio de estos operadores requiere la conjunción de distintas ramas de las matemáticas, entre ellas la teoría de operadores autoadjuntos y la teoría de la medida. Es de resaltar que estos dos dominios se conectan a través del teorema de Riesz-Markov. Como consecuencia de este teorema, cada elemento de un espacio de Hilbert se relaciona de manera únivoca con medidas de Borel definidas sobre dicho espacio, lo cual provee un conjunto robusto de herramientas para la caracterización de los operadores de Schrödinger.

En este trabajo nos centramos en analizar las propiedades de los operadores de Schrödinger a través del prisma de la teoría espectral y de los sistemas dinámicos. Específicamente, demostramos teoremas que permiten determinar los tipos espectrales observados en un elemento genérico de una familia de operadores de Schrödinger ergódicos.

La herramienta primordial para el trabajo fue el lema de Gordon (capítulo 3). Este postulado afirma que si la función potencial de un operador de Schrödinger es un potencial de Gordon (definición 3.1.1), entonces su espectro puntual es vacío. Un potencial de Gordon es una generalización del concepto de función periódica, puesto que describe una función que puede ser aproximada por una sucesión de funciones periódicas. Un valor agregado del presente trabajo es que se expone una demostración paso a paso y autocontenida del Lema de Gordon (lema 3.2.1). Hasta donde es de nuestro conocimiento, en la literatura no se encuentra una demostración de dicha proposición al nivel de detalle de la presentada en este trabajo.

Las propiedades de repetición (definición 4.1.10) también fueron importantes para demostrar los principales teoremas del trabajo. Estas propiedades son a los sistemas dinámicos lo que la definición de potencial de Gordon es a las funciones reales, en tanto a que identifican aquellas órbitas en un sistema dinámico que pueden ser aproximadas por órbitas periódicas.

Las propiedades de repetición nos permitieron usar el el lema de Gordon como instrumento para el estudio del espectro genérico de los operadores de Schrödinger ergódicos.

El principal aporte de este trabajo es que pudimos generalizar el teorema central de la investigación de Boshernitzan y Damanik (2008). Estos autores demuestran que el espectro continuo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es genérico desde el punto de vista topológico usando dos hipótesis: que el sistema $\{\Omega, T\}$ es minimal y satisface *TRP*. La generalización de este resultado la logramos a partir del estudio detallado de la propiedad de repetición topológica y de sus implicaciones sobre la estructura de un sistema dinámico. Lo anterior nos condujo a proponer una demostración del teorema principal de la investigación de los autores citados usando un hipótesis menos restrictiva: que $\{\Omega, T\}$ solo tiene una órbita densa, para un elemento perteneciente al conjunto $PRP(T)$.

También demostramos que el espectro continuo de los operadores de Schrödinger ergódicos es genérico partiendo únicamente de la hipótesis de que el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface la propiedad TRP (teorema 4.2.5). Los detalles de la demostración de este teorema evidencian el alcance y el poder explicativo de conceptos como la compacidad del espacio de estados Ω y la continuidad de la función potencial $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

La hipótesis de ergodicidad del sistema $\{\Omega, T\}$ no fue utilizada recurrentemente a lo largo del trabajo. No obstante, esta condición fue fundamental para demostrar que si la medida del conjunto $PRP(T)$ es positiva, entonces este conjunto necesariamente es de medida completa. Esto último fue, a su vez, la esencia de la demostración de que la propiedad *MRP* implica que el espectro continuo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es genérico desde el punto de vista de la teoría de la medida (teorema 4.3.2).

Un caso particular de los teoremas estudiados en el trabajo es que los operadores de Schrödinger con función potencial periódica tienen espectro continuo. Como señalan Boshernitzan y Damanik (2008), esto refuerza la filosofía de que el fenómeno de dispersión (esto es, el espectro continuo de los operadores de Schrödinger) se manifiesta en medios físicos cuya estructura atómica es ordenada y repetitiva. No obstante, los resultados de los teoremas del trabajo generalizan esta noción, puesto que demuestran que es suficiente que la estructura del medio físico se aproxime a una estructura periódica para que se presente el fenómeno de dispersión.

Consideramos que los resultados del trabajo fueron satisfactorios y respondieron a los objetivos del proyecto. No obstante, hubiéramos querido explorar uno o dos ejemplos adicionales de sistemas dinámicos en los que se discutiera la relación entre las propiedades *MRP* y *TRP* y sus implicaciones en problemas de carácter físico. Esto no fue posible por restricciones de tiempo.

Para cerrar, reseñamos muy brevemente algunas direcciones en las cuales es posible generalizar los resultados estudiados en este trabajo.

(i) Dinámica de sistemas en dimensión superior: operadores de Schrödinger en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Una generalización natural del trabajo consiste en el planteamiento de operadores de Schrödinger cuasiperiódicos en dimensión superior. Estos son operadores de la forma:

$$\begin{aligned} H : \ell^2(\mathbb{Z}^d) &\to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ \psi(n) &\mapsto \sum_{|m-n|=1} \psi(m) + f(T^n x)\psi(n) \end{aligned} \tag{6-1}$$

donde $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ y $T^n x = (x_1 + n_1\alpha_1, \ldots, x_d + n_d\alpha_d)$, para $\alpha \in (\mathbb{T}\backslash\mathbb{Q})^d$. Este problema ha sido abarcado en una reciente investigación de Fan y Han (2018), quienes concluyen que el teorema 5.1.2 se extiende para operadores de Schrödinger en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ (*ibíd., 2018 theorem 1.1, p.3*). Incluso, los autores demuestran que el espectro continuo del operador H (ecuación 6-1) es genérico para una función potencial $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ medible genérica.

(ii) Las propiedades de repetición y la entropía en sistemas dinámicos.

Las propiedades de repetición definen una estructura sobre el sistema dinámico $\{\Omega, T\}$, por lo que es de interés estudiar la relación entre estas propiedades y otros atributos del sistema, tales como la entropía. Este tema fue investigado por Huang et al. (2010), quienes afirman que, en general, si un sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ tiene entropía positiva entonces un operador genérico $H_\omega \in \{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ tiene espectro puntual (es decir que su espectro no es puramente continuo).

Complementariamente, los autores demuestran que si el sistema $\{\Omega, T\}$ satisface la propiedad *GRP* (definición 4.1.10), entonces su entropía topológica es cero (*ibíd., 2018 theorem 1, p.2*). Sin embargo, es posible construir ejemplos de sistemas dinámicos que satisfacen la propiedad *TRP* y tienen entropía positiva (*ibíd., 2018 theorem 2, p.2*). Este resultado evidencia que las propiedades de repetición pueden vincularse al estudio de otras características de los sistemas dinámicos, más allá de los tipos espectrales de los operadores de Schrödinger asociados.

(iii) Hacia una caracterización del espectro genérico en términos de la estructura de $\{\Omega, T\}$.

En este trabajo se estudió la incidencia de las propiedades de repetición del sistema dinámico $\{\Omega, T\}$ sobre el espectro genérico de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Esto induce la formulación de la pregunta: si la familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ tiene espectro continuo genérico, ¿esto qué implicaciones tiene sobre la estructura del sistema dinámico $\{\Omega, T\}$? Esta cuestión se enmarca en el dominio de los problemas inversos en teoría espectral y aún sigue abierta.

Apéndice A

Propiedades genéricas en topología y en teoría de la medida

En este anexo se estudia el significado de las propiedades genéricas: aquellas que se satisfacen para "casi todos" los elemento de un conjunto. Esta noción varía en función del enfoque desde el cual se estudie el conjunto de interés. Los puntos de vista contemplados en este trabajo son el topológico y el de la teoría de la medida. Este apartado se basa en Oxtoby (1980) y tiene el objetivo de presentar teoremas que brindan un criterio para la construcción de conjuntos genéricos.

Propiedades genéricas en topología

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es *denso en ninguna parte* si el interior de $\overline{A}$ es vacío (es decir $\overline{A}^\circ = \emptyset$) lo que intuitivamente se refiere a que A es un conjunto que está diseminado o que tiene "muchos huecos". Por ejemplo, si a es un número real, entonces el conjunto $\{a\}$ es denso en ninguna parte, pues $\overline{\{a\}} = \{a\}$ y $\{a\}^\circ = \emptyset$. Un subconjunto de X es de *primera categoría* si es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte.

Ejemplo A.0.1. Los números racionales son un conjunto de primera categoría: $\mathbb{Q} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}\{a\}$.

Se afirma que X es un *espacio de Baire* si el complemento de todo conjunto de primera categoría es denso en X. En seguida se presenta la definición de conjunto residual, la cual responde a la noción de conjunto genérico desde el punto de vista topológico.

Definición A.0.2. Sea X un espacio de Baire. Un subconjunto E de X es residual si es el complemento de un conjunto de primera categoría.

Se denomina *conjunto* G_δ a la intersección contable de conjuntos abiertos. El siguiente lema caracteriza los conjuntos residuales en un espacio topológico en términos de conjuntos G_δ densos. Este resultado es útil para demostrar que determinado conjunto es residual.

Lema A.0.3. (*Oxtoby, 1980 theorem 9.2, p.41*). Sea X un espacio de Baire. $E \subseteq X$ es residual si y solamente si E contiene a un conjunto G_δ que es denso en X.

Demostración. "$\Rightarrow$" Suponga que $E \subseteq X$ es residual. Queremos demostrar que existe un $B \subseteq E$ tal que B es G_δ y denso en X. Dado que E es residual, entonces $E^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, donde cada A_n es un conjunto denso en ninguna parte (definición A.0.2). Defina el conjunto:

$$B = \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}^c$$

Se afirma que B es G_δ, puesto que $\overline{A_n}^c$ es abierto para cada $n \geq 1$, y por lo tanto B es la intersección contable de conjuntos abiertos. Observe que, por las leyes de De Morgan:

$$B = \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}^c \quad \Rightarrow \quad B^c = \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n}$$

Como $\overline{A_n}$ es denso en ninguna parte, para cada $n \geq 1$, entonces B^c es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte, y por lo tanto $B = (B^c)^c$ es un conjunto denso en X. Por último, note que $B \subseteq E$ puesto que:

$$E^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n} = B^c \quad \Rightarrow \quad E^c \subseteq B^c \quad \Rightarrow \quad B \subseteq E$$

Se concluye que E contiene a un conjunto G_δ y denso en X.

"$\Leftarrow$" Sea $B \subseteq E$ tal que B es un conjunto G_δ y denso en X. El objetivo es demostrar que E es residual en X. Como B es G_δ, entonces:

$$B = \bigcap_{n\geq 1} G_n$$

donde cada G_n es un abierto. Dado que B es denso y $B \subseteq G_n$ para cada $n \geq 1$, entonces G_n es denso en X, para cada $n \geq 1$.

Ahora, observe que $B^c = \bigcup_{n\geq 1} G_n^c$ es un conjunto de primera categoría: como G_n es denso entonces $(\overline{G_n^c})^\circ = \emptyset$. Es decir que cada G_n^c es denso en ninguna parte, luego B^c es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte y por tanto un conjunto de primera categoría. Esto implica que $B = (B^c)^c$ es residual en X por la definición A.0.2. Se concluye que E también es un conjunto residual en X pues por hipótesis $B \subseteq E$. $\square$

El teorema de categorías de Baire afirma que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire. Esto permite usar el lema A.0.3 como criterio para la construcción de subconjuntos residuales en espacios métricos completos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.0.4. Los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son un conjunto residual en $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{Q}$ es un conjunto de primera categoría (ejemplo A.0.1), entonces $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$ es un conjunto residual, de acuerdo con la definición A.0.2.

Ejemplo A.0.5. (*Ibíd., theorem 2.3, p.7*) El conjunto de los números de Liouville ($\mathbb{L}$):

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}, \quad \text{para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q > 1\}$$

El conjunto $\mathbb{L}$ consiste en los irracionales de mejor aproximación por un número racional. Estos números constituyen un conjunto residual en $\mathbb{R}$ puesto que:

$$\mathbb{L} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n \geq 1} G_n$$

Donde:

$$G_n = \bigcup_{q \geq 2} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n})$$

G_n es la unión de abiertos. Además $\mathbb{Q} \subset G_n$, luego G_n es denso en $\mathbb{R}$. Se sigue que $\bigcap_{n \geq 1} G_n$ es un conjunto G_δ denso. Del lema A.0.3 se concluye que este último conjunto es residual, y por lo tanto $\mathbb{L}$ también lo es, al ser la intersección de dos conjuntos residuales.

Observación A.0.6. Todo número de Liouville es trascendente, mientras que números irracionales como $\sqrt{2}$ o π no son de Liouville. Una discusión detallada sobre este conjunto de números se encuentra en Oxtoby (1980).

Los conjuntos residuales son "grandes" en el sentido de que la intersección contable de una sucesión de conjuntos residuales es un conjunto denso. Los conjuntos de primera categoría son "pequeños", puesto que la unión contable de conjuntos de primera categoría es también un conjunto de primera categoría. Esto motiva la siguiente definición.

Definición A.0.7. Una propiedad es *genérica desde el punto de vista topológico* si los elementos que la satisfacen forman un subconjunto residual dentro del conjunto de interés.

Por ejemplo, el postulado: "*El espectro continuo de los operadores de Schrödinger ergódicos discretos es genérico*" significa que los H_ω con espectro puramente continuo son un subconjunto residual de $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$.

Propiedades genéricas en teoría de la medida

En este apartado se reseñan las definiciones básicas y algunos teoremas de teoría de la medida que sirven de respaldo para los principales teoremas estudiados en el trabajo. Dado un conjunto Ω, una $\sigma-$*álgebra* es una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$ de Ω, llamados *medibles*, que satisface las siguientes tres propiedades.

(i) $\Omega \in \mathcal{B}$

(ii) $A \in \Omega \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$

La dupla $(\Omega, \mathcal{B})$ se denomina *espacio medible*. Para los objetivos del trabajo se considera a Ω como un espacio topológico. La $\sigma-$álgebra generada por la familia de abiertos de Ω se conoce como la *$\sigma-$álgebra de Borel*. Una *medida* es una función $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ para una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medibles disjuntos dos a dos.

Definición A.0.8. La tripla $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, es decir, un conjunto Ω, una $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ y una medida μ, es un *espacio de medida*. Si $\mu(\Omega) = 1$, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ es un *espacio de probabilidad*.

Observación A.0.9. Un espacio de medida finita puede normalizarse como un espacio de probablidad definiendo la medida $\nu(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(\Omega)}$ para todo $E \subseteq \Omega$ medible.

Definición A.0.10. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Dado un intervalo I (abierto, semiabierto o cerrado) comprendido entre a y b en $\mathbb{R}$, la medida de I está dada por $m(I) = (b - a)$. Para $E \in \mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de Borel, se define la *medida de Lebesgue* como:

$$m(E) = \text{ínf}\{\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \mid E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\}$$

Lema A.0.11. (*Axler, 2020 theorem 2.65, p.48*) Sea S un subconjunto medible del espacio $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue y $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces existe un compacto $K \subseteq S$ medible tal que para todo $\varepsilon > 0$:

$$\mu(K) > \mu(S)(1 - \varepsilon)$$

Definición A.0.12. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. $A \in \mathcal{B}$ es de *medida completa* si $\mu(A) = \mu(\Omega)$, o equivalentemente, si $\mu(A^c) = 0$.

Ejemplo A.0.13. Considere el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel y μ es la medida de Lebesgue. Entonces $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un conjunto de medida completa, puesto que la medida del conjunto $\mathbb{Q}$ es igual a cero.

Ejemplo A.0.14. La medida de Lebesgue del conjunto de números de Liouville (ejemplo A.0.5) es igual a cero (Oxtoby, 1980).

Ejemplo A.0.15. Los números diofánticos ($\mathbb{D}$). Este conjunto se define como el complemento de $\mathbb{L}$ en los irracionales, es decir, aquellos números irracionales que no pueden aproximarse por un número racional. Dado que $\mathbb{L}$ es residual (ejemplo A.0.5), $\mathbb{D}$ es de primera categoría (definición A.0.2). Por otra parte, en el ejemplo A.0.14 se mencionó que $\mathbb{L}$ tiene medida nula. Como $\mathbb{R} = \mathbb{D} \cup \mathbb{L} \cup \mathbb{Q}$ y la medida de $\mathbb{Q}$ es nula, se sigue que $\mathbb{D}$ es un conjunto de medida completa en $\mathbb{R}$.

Tabla A-1.: Subconjuntos genéricos de $\mathbb{R}$ en topología y en teoría de la medida.

		Teoría de la medida	
		Medida completa	*Medida nula*
Topología	*Residual*	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\mathbb{L}$
	Primera categoría	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$

Fuente: elaboración propia con base en Oxtoby (1980).

Definición A.0.16. Una propiedad es *genérica desde el punto de vista de la teoría de la medida* si los elementos que satisfacen dicha propiedad constituyen un subconjunto de medida completa dentro del conjunto de interés. En este caso, se afirma que la propiedad se cumple en *casi todas partes*.

Desde este enfoque, la afirmación: "*El espectro continuo de los operadores de Schrödinger ergódicos discretos es genérico*" significa que los H_ω con espectro puramente continuo son un subconjunto de medida completa de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

En resumen: desde el punto de vista topológico los conjuntos genéricos o "grandes" son los residuales, cuyo concepto dual (los conjuntos "pequeños") es el de conjunto de primera categoría. En teoría de la medida, los conjuntos genéricos son los de medida completa y el concepto dual es el de conjunto de medida nula.

Para finalizar este anexo, se exponen dos resultados clásicos de la teoría de la medida que permiten la construcción de subconjuntos de medida completa en un espacio $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. La demostración de estas proposiciones puede encontarse en la bibliografía citada.

Lema A.0.17. (***Rohlin-Halmos***. *Cornfeld, 1982 theorem 1, p.242)*. Sea T un automorfismo aperiódico en el espacio de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, es decir:

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid T^n\omega = \omega, \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}_+\}) = 0$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $m \in \mathbb{Z}$ existe un $O \in \mathcal{B}$ tal que:

(i) Los conjuntos $O, TO, \ldots, T^mO$ son disjuntos.

(ii) $\mu(\bigcup_{j=1}^m T^jO) > 1 - \varepsilon$

Lema A.0.18. (***Borel-Cantelli***. *Spitzer, 1976 P3, p.317)*. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\{E_n\}_{n\geq 1}$ cualquier sucesión de eventos (conjuntos medibles de $\mathcal{B}$).

(a) Si $\quad \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) < \infty \quad$ entonces $\quad \mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k) = 0.$

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$ y existe un $C > 0$ tal que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k,m}^{n} \mu(E_k \cap E_m) \leq C(\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k))^2$$

entonces:

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k) \geq \frac{1}{C}$$

En particular, si $C = 1$:

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k) = 1$$

Corolario A.0.19. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de medibles disjuntos en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Entonces:

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k) = 1$$

Demostración. Como los medibles $\{E_n\}_{n\geq 1}$ son disjuntos, entonces: $E_k \cap E_m = \emptyset$ para todo $k \neq m$. Tomando $C = 1$ en la parte (b) del lema de Borel-Cantelli (A.0.18), se obtiene que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k,m}^{n} \mu(E_k \cap E_m) = 0 \leq (\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k))^2$$

lo que permite concluir que:

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k) = 1$$

□

Bibliografía

Avila, A. and Damanik, D. (2005). Generic singular spectrum for ergodic schrödinger operators. *Duke Mathematical Journal*, 130:393–400.

Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Springer-Verlag, New York.

Axler, S. (2020). *Measure, Integration Real Analysis*. Springer-Verlag, New York.

Boshernitzan, M. and Damanik, D. (2008). Generic continuous spectrum for ergodic schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 283:647–662.

Brom, J. (1977). The theory of almost periodic functions in constructive mathematics. *Pacific Journal of Mathematics*, 70:67–81.

Catsigeras, E. (2013). *Teoría Ergódica. De los Atractores Topológicos y Estadísticos*. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, Venezuela.

Cornfeld, I., Fomin, S., and Sinái, Y. (1982). *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York.

Cycon, H., Froese, R., Kirsch, W., and Simon, B. (1987). *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Springer-Verlag, Germany.

Damanik, D. (2017). Schrödinger operators with dynamically defined potentials. *Electronic Journal of Differential Equations*, 37:1681–1764.

Damanik, D. and Stolz, G. (2000). A generalization of gordon's theorem and applications to quasiperiodic schrödinger operators. *Electronic Journal of Differential Equations*, 55:1–8.

Fan, Y. and Han, R. (2018). Generic continuous spectrum for multi-dimensional quasiperiodic schrödinger operators with rough potentials. *Journal of Spectral Theory*, 8:1635–1645.

Huang, W., Xu, L., and Yi, Y. (2010). Entropy of dynamical systems with repetition property. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 23:683–693.

Jitomirskaya, S. (2007). Ergodic schrödinger operators (on one foot). *Proceeings of Symposia in Pure Mathematical*, 76:613–647.

Khinchin, A. Y. (1964). *Continued Fractions*. The University of Chicago Press, Chicago.

Kirsch, W. (2007). *An Invitation to Random Schrödinger Operators*. Institut für Mathematik Ruhr-Universität Bochum, Bochum.

Kohlman, M. (2018). *Schrödinger Operators and their Spectra*. Georg-August-Universität, Göttingen.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, Canada.

Lenz, D. (2002). Singular spectrum of lebesgue measure zero for one-dimensional quasicrystals. *Communications in Mathematical Physics*, 227:119–120.

Moreira, J. (2020). *Ergodic Theory*. University of Warwick, United Kingdom.

Oxtoby, J. (1980). *Measure and Category. A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces*. Springer-Verlag, New York.

Reed, M. and Simon, B. (1980). *Methods of modern mathematical physics*. Academic Press, Inc., San Diego.

Renn, J. (2013). *Schrödinger and the Genesis of Wave Mechanics*. Max Planck Institute for the History of Science, Berlin.

Simon, B. (1982). Almost periodic schrödinger operators: A review. *Advances in Applied Mathematics*, 3:463–490.

Simon, B. (2000). Schrödinger operators in the twentieth century. *Journal of Mathematical Physics*, 41:3523–3555.

Spitzer, F. (1976). *Principles of Random Walk*. Springer-Verlag, New York.

Viana, M. and Oliveira, K. (2016). *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Walters, P. (1982). *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York.

Zhecheva, I. (2008). *Ergodic Properties of Random Schrödinger Operators*. Williams College, Massachusetts.