

Desigualdades rango lineales en 5 variables

LUIS ANDRÉS CAMPOS MALDONADO
MATEMÁTICO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
DICIEMBRE DE 2013

Desigualdades rango lineales en 5 variables

LUIS ANDRÉS CAMPOS MALDONADO
MATEMÁTICO.

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

DIRECTOR
HUMBERTO SARRIA ZAPATA, PH.D
PROFESOR ASOCIADO, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
DICIEMBRE DE 2013

Título en español

Desigualdades rango lineales en 5 variables

Title in English

Linear rank inequalities on five variables

Resumen: En este trabajo se hace un estudio de las desigualdades rango lineales, encontradas por R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger, las cuales involucran 5 variables, éstas, junto a las desigualdades polimatroides y de *Ingleton* verifican que, las funciones rango lineales en 5 variables determinan un cono convexo poliédrico. Además, se estudia la caracterización de estas funciones involucrando hasta 4 variables, donde solo las desigualdades polimatroides y de *Ingleton*, logran caracterizarlas. Se estudia también algunas relaciones entre las desigualdades de la información tipo Shannon y las funciones polimatroides, a su vez las relaciones de las funciones entrópicas, funciones polimatroides y las funciones rango lineal. Este trabajo se basa en [2],[4],[5] y [12].

Abstract: This paper makes a study on linear rank inequalities, found by R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger, involve five variables, these, together with the Shannon-type and *Ingleton* inequalities verified that, linear rank functions on five variables determine a polyhedral convex cone. We also present a study of the characterization of these functions involving up to 4 variables, where only the polymatroid and Ingleton inequalities, achieve characterize. Also it is studied some relationships between the Shannon-type information inequalities and polymatroid functions, moreover relationships between entropic functions, polymatroid functions and linear rank functions. This paper is based on [2],[4],[5] and [12].

Palabras claves: Medidas de información, entropía, funciones entrópicas, funciones polimatroides, funciones rango lineales, desigualdades tipo Shannon, desigualdad de Ingleton, desigualdades rango lineales.

Keywords: Information measures, entropy, entropic functions, polymatroid functions, linear rank functions, Shannon type inequalities, Ingleton inequality, linear rank inequalities.

Dedicado a

Mis padres, Elizabeth Maldonado y Luis Alfonso Campos; y a Claudia Perdomo, mis motores de vida, mis personas incondicionales. Los amo.

Agradecimientos

Al profesor Humberto Sarria Zapata, por darme la oportunidad de trabajar a su lado y de guiarme a través de este trabajo, sin olvidar su motivación constante en no desfallecer, así como en la búsqueda de los conocimientos propios de ésta hermosa disciplina.

Índice general

Introducción	III
1. Medidas de la información	1
1.1. Medidas de la información de Shannon	1
1.2. Desigualdades de la información	6
1.3. Funciones Polimatroides	8
1.4. Funciones entrópicas	9
1.5. Elementos de convexidad	11
1.6. Marco geométrico	12
2. Desiguales tipo no-Shannon	14
2.1. Caracterizaciones de $\overline{\Gamma}_1^*, \overline{\Gamma}_2^*, \overline{\Gamma}_3^*$	14
2.2. Desigualdades tipo no Shannon	18
3. Funciones rango lineales: Caso 1,2 y 3 variables	22
3.1. Funciones rango lineales	22
3.2. Caso n=1	23
3.3. Caso n=2	24
3.4. Caso n=3	25
4. La desigualdad de Ingleton y las funciones rango lineales caso $n = 4$	27
4.1. La desigualdad de Ingleton y sus consecuencias	27
4.2. Funciones rango lineales, caso n=4	31

5. Funciones rango lineales caso $n=5$	33
5.1. Nuevas desigualdades rango lineales caso $n=5$	34
5.2. Pruebas auxiliares y generalizaciones	37
5.3. Completitud	52
5.4. Metodología; buscando rayos extremos que sean funciones rango lineales	54
Conclusiones	58
Trabajo futuro	59
Apéndice A: Generadores de $\Gamma_5 \cap \mathcal{I}_5 \cap \mathcal{DFZ}_5$	60
Apéndice B: Los conjuntos de vectores	66
Bibliografía	83

Introducción

El hecho de que toda desigualdad polimatroide, sea una desigualdad rango lineal, crea una duda natural. ¿Qué desigualdades rango lineales son desigualdades polimatroides? La respuesta dependerá del número de variables que estén involucradas. Hasta tres variables, se verifica que ambos conjuntos de desigualdades son equivalentes, pero en cuatro variables A.W. Ingleton [14], encuentra una desigualdad rango lineal que no es una desigualdad de la información, y, por lo tanto, no es una desigualdad polimatroide.

A pesar de que las desigualdades polimatroides son insuficientes para caracterizar las rango lineales, esta región en cuatro variables sigue siendo poliédrica [2]. Para cinco variables, no solo son suficientes las desigualdades polimatroides, junto a las desigualdades Ingleton, para determinar todas las desigualdades rango lineales. En este trabajo, se presenta un estudio de las 24 (1700 contando permutaciones) desigualdades rango lineales encontradas por R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger [12], las cuales, junto a las desigualdades polimatroides y de Ingleton muestran que ésta región determina un cono convexo poliédrico.

Adicionalmente, se desarrollan algunas relaciones entre las funciones polimatroides y las funciones entrópicas; a su vez se estudia también las relaciones entre las funciones entrópicas, funciones polimatroides y las funciones rango lineal.

En el Capítulo 1, se presentan algunas nociones básicas de la Teoría de la Información, tales como: medidas de la información, desigualdades de la información, las funciones polimatroides y las funciones entrópicas. Se presentan además algunos elementos de análisis convexo. En el Capítulo 2, se presentan las caracterizaciones de las funciones entrópicas hasta tres variables, y se muestra la existencia de desigualdades tipo no-Shannon.

En el Capítulo 3, se introducen las funciones rango lineales y se inspecciona su caracterización hasta tres variables. En el Capítulo 4, se discute la desigualdad de Ingleton y la caracterización de las funciones rango lineales en 4 variables. En el Capítulo 5, se presentan las demostraciones de las nuevas desigualdades rango lineales en 5 variables, y se muestra la caracterización de las funciones rango lineales en 5 variables.

CAPÍTULO 1

Medidas de la información

Claude E. Shannon, en su artículo ‘*A Mathematical theory of communication*’ [3] (1948), estableció los fundamentos de la Teoría de la información. El objetivo fue determinar la longitud mínima de un código para representar un mensaje de manera óptima. Shannon se fundamenta en la idea de que los caracteres enviados en un mensaje no se distribuyen de manera uniforme, por lo tanto, para codificar los mensajes de una fuente, se busca utilizar menor cantidad de bits para los caracteres más probables (presencia del carácter) y mayor cantidad de bits para los menos probables, de tal forma que el promedio de bits utilizados para codificar los mensajes se disminuya.

En este capítulo presentaremos las medidas de la información propuestas por Shannon: la entropía, la entropía condicional, la información mutua y la información mutua condicional, así como sus propiedades. Introducimos las funciones polimatroides y las funciones entrópicas, así como algunos elementos del análisis convexo.

La base de este Capítulo está en los trabajos presentados por Raymond W. Yeung en [4] y J. Andres Montoya en el curso impartido de Teoría de la información, en la Universidad Nacional de Colombia (2013-I) [5]. Los elementos de análisis convexo se basan en [7] y [8].

1.1. Medidas de la información de Shannon

Sea X una variable aleatoria que toma valores en un alfabeto \mathcal{X} , enumerable. La distribución de probabilidad de X se denota por $\{p_X(x), x \in \mathcal{X}\}$, donde $p_X(x) := Pr\{X = x\}$. Cuando no se presente ambigüedad, $p_X(x)$ será abreviado como $p(x)$. El soporte de X , denotado por \mathcal{S}_X , es precisamente el conjunto de todos los $x \in \mathcal{X}$ tales que $p(x) > 0$.

Definición 1. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias, con alfabetos $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ respectivamente, la distribución de probabilidad conjunta es

$$\{p(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}\}, \text{ con } p(x, y, z) = Pr(X = x, Y = y, Z = z).$$

Definimos

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &:= \sum_z p(x, y, z), \\
 p(x) &:= \sum_{y, z} p(x, y, z), \\
 p(x|y) &:= \frac{p(x, y)}{p(y)}; \text{ si } p(y) \neq 0, \\
 p(x, y|z) &:= \frac{p(x, y, z)}{p(z)}; \text{ si } p(z) \neq 0, \\
 p(x|y, z) &:= \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)}; \text{ si } p(y, z) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Definición 2. La entropía $H(X)$ de una variable aleatoria X que toma valores en un alfabeto \mathcal{X} , es definida por

$$H(X) := - \sum_{x \in S_X} p(x) \log p(x). \quad (1.1)$$

Nota 1. En adelante por comodidad, notaremos $H(X)$ simplemente por:

$$H(X) := - \sum_x p(x) \log p(x). \quad (1.2)$$

Resaltamos que en todas las definiciones de medidas de la información, supondremos que la suma se toma sobre el soporte correspondiente, ya que $p(x) \log p(x)$ en (1.1) no está definido si $p(x) = 0$. La base del logaritmo en (1.1) puede ser cualquier número real mayor que 1.

Ejemplo 1. Consideremos el experimento de lanzar una moneda legal hasta que ésta caiga en sello. Sea X la variable aleatoria, que representa el número de lanzamientos necesarios para que la moneda caiga en sello, así X toma valores sobre el alfabeto $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots\}$ y la distribución de probabilidad de X es $\{p(n) := \Pr\{X = n\} = \frac{1}{2^n} : n \in \mathcal{X}\}$. Calculando la entropía de X en base 2, tenemos:

$$H(X) = - \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \log_2 p(n) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log_2 \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Definición 3. La entropía conjunta $H(X, Y)$ de un par de variables aleatorias X y Y está definida por

$$H(X, Y) = - \sum_{x, y} p(x, y) \log p(x, y). \quad (1.3)$$

Definición 4. Para un par de variables aleatorias X y Y , la entropía condicional de Y dado X se define como

$$H(Y|X) = - \sum_{x, y} p(x, y) \log p(y|x). \quad (1.4)$$

(1.4) la podemos reescribir como

$$H(Y|X) = \sum_x \left[- \sum_y p(y|x) \log p(y|x) \right]. \quad (1.5)$$

En (1.5), la suma interna es la entropía de Y dado $X = x$. Por lo tanto, (1.4) puede escribirse como

$$H(Y|X) = \sum_x H(Y|X = x). \quad (1.6)$$

Similarmente se define

$$H(Y|X, Z) = \sum_z p(z)H(Y|X, Z = z), \quad (1.7)$$

donde

$$H(Y|X, Z = z) = - \sum_{x,y} p(x, y|z) \log p(y|x, z). \quad (1.8)$$

Definición 5. Para las variables aleatorias X y Y , la información mutua entre X y Y está definida por

$$I(X; Y) := \sum_{x,y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}. \quad (1.9)$$

Definición 6. Para las variables aleatorias X, Y y Z , la información mutua entre X y Y dado Z está definida por

$$I(X; Y|Z) := \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y|z)}{p(x|z)p(y|z)}. \quad (1.10)$$

Proposición 1.

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y) \quad (1.11)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \\ &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log (p(y)p(x|y)) \\ &= - \sum_{x,y} p(x, y) (\log p(y) + \log p(x|y)) \\ &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x|y) \\ &= - \sum_y \left(\sum_x p(x, y) \right) \log p(y) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x|y) \\ &= - \sum_y p(y) \log p(y) - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x|y) \\ &= H(Y) + H(X|Y). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (1.12)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 & H(X) - H(X|Y) \\
 &= - \sum_x p(x) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \\
 &= - \sum_x \sum_y p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(y)} \\
 &= \sum_{x,y} p(x,y) \left(\log \frac{p(x,y)}{p(y)} - \log p(x) \right) \\
 &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
 &= I(X; Y).
 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z) \quad (1.13)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 & H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\
 &= - \sum_{x,z} p(x,z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log p(x|y,z) \\
 &= - \sum_{x,z} p(x,z) \log \frac{p(x,z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} \\
 &= - \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} \\
 &= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \left(\log \frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} - \log \frac{p(x,z)}{p(z)} \right) \\
 &= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \left(\log \frac{p(x,y,z)p(z)}{p(x,z)p(y,z)} \right) \\
 &= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \left(\log \frac{\frac{p(x,y,z)}{p(z)}}{\frac{p(x,z)p(y,z)}{p(z)p(z)}} \right) \\
 &= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} \\
 &= I(X; Y|Z).
 \end{aligned}$$

□

Las tres proposiciones anteriores dejan de manifiesto que todas las medidas de la información de Shannon, se pueden escribir como combinación lineal de entropías y entropías conjuntas, hecho que será de gran importancia más adelante.

Ahora, veamos que todas las medidas de la información de Shannon son no negativas.

Lema 1. Sean X, Y y Z variables aleatorias arbitrarias. Entonces, se satisface la desigualdad:

$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Z). \quad (1.14)$$

Demostración. Para la demostración de este lema se usará que:

$$\log \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(x_i), \text{ con } \alpha_i > 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

el cual se sigue de la convexidad de la función logaritmo con base mayor que 1. Entonces

$$\begin{aligned} H(X|Z) - H(X|Y, Z) &= - \sum_{x,z} p(x, z) \log p(x|z) + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log p(x|y, z) \\ &= - \sum_{x,z} p(x, z) \log \frac{p(x, z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, z)}{p(z)} + \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \left(\log \frac{p(x, z)}{p(z)} - \log \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} \right) \\ &= - \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \left(\frac{p(x, z)p(y, z)}{p(x, y, z)p(z)} \right) \\ &\geq - \log \left(\sum_{x,y,z} p(x, y, z) \frac{p(x, z)p(y, z)}{p(x, y, z)p(z)} \right) \\ &= - \log \left(\sum_{x,z} \frac{p(x, z)}{p(z)} \left(\sum_z p(y, z) \right) \right) \\ &= - \log \left(\sum_{x,z} \frac{p(x, z)}{p(z)} p(z) \right) \\ &= - \log(1) = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 1. Sean X, Y y Z variables aleatorias arbitrarias, entonces

$$I(X; Y|Z) \geq 0.$$

Demostración. De (1.13) y del lema anterior se sigue el resultado.

□

Corolario 1. Todas las medidas de la información de Shannon son no negativas.

Demostración. Sea Φ una variable aleatoria degenerada, es decir Φ toma un valor constante con probabilidad 1. Consideremos además la información mutua de X y Y dado Z , $I(X; Y|Z)$, entonces:

1. Si $X = Y$ y $Z = \Phi$, entonces $I(X; Y|Z) = H(X) \geq 0$.
2. Si $X = Y$, entonces $I(X; Y|Z) = H(X|Z) \geq 0$.
3. Si $Z = \Phi$, entonces $I(X; Y|Z) = I(X; Y) \geq 0$.

□

1.2. Desigualdades de la información

Una expresión de información f , es una combinación lineal de medidas de información de Shannon involucrando un número finito de variables aleatorias. Por ejemplo,

$$H(X, Y) + 2I(X; Y) - I(X; Y|Z)$$

es una expresión de información. Una desigualdad de información tiene la forma

$$f \geq c,$$

donde la constante c es usualmente cero. Consideraremos desigualdades no-estrictas porque éstas son usualmente la forma que toman las desigualdades en la Teoría de la información. Similarmente una identidad de la información tiene la forma

$$f = c.$$

Definición 7. Una identidad o desigualdad de la información, se dice que siempre se cumple, si ésta vale para cualquier distribución conjunta de las variables aleatorias involucradas. En caso contrario, diremos que no siempre se cumple.

Ejemplo 2. La desigualdad de la información $I(X; Y) \geq 0$ siempre se cumple, ya que vale para cualquier distribución conjunta $p(x, y)$. Pero la desigualdad $I(X; Y) \leq 0$ no siempre se cumple, ella es equivalente a $I(X; Y) = 0$, la cual no se cumple si X y Y no son independientes.

Para nuestros próximos propósitos se hace pertinente utilizar la siguiente notación.

Notación 1.

1. El conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, con n entero positivo lo notaremos como $[n]$.
2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias e $I \subseteq [n]$, usaremos $X_I = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ para denotar la distribución de probabilidad conjunta, donde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. Adicionalmente, utilizaremos $H(X_I)$ para denotar la cantidad $H(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$.

Verificamos en la sección anterior que cualquier medida de la información de Shannon, se puede escribir como combinación lineal de entropías y entropías conjuntas. Por lo tanto, no solo definiremos las desigualdades de la información que siempre se cumplen mediante la entropía conjunta, sino que además podemos verificar las desigualdades de la Teoría de la información examinando las desigualdades satisfechas por las entropías conjuntas.

Definición 8. Sean I_1, \dots, I_k subconjuntos de $[n]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $1 \leq i \leq k$ y X_1, \dots, X_n variables aleatorias. Una desigualdad de la forma

$$\alpha_1 H(X_{I_1}) + \dots + \alpha_k H(X_{I_k}) \geq 0,$$

es llamada una desigualdad de la información, si ésta siempre se cumple.

Observación 1. En la definición anterior asumimos que $H(X_\emptyset) = 0$.

Ejemplo 3. Consideremos $n = 2$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, $I_3 = \emptyset$, $I_4 = \{1, 2\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $\alpha_4 = -1$, entonces la desigualdad

$$H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \geq 0.$$

es una desigualdad de la información, ya que siempre se cumple que $H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) = I(X_1, X_2)$ y $I(X_1, X_2) \geq 0$

Definición 9. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias. Las siguientes desigualdades se denominan desigualdades básicas,

$$H(X_I) \geq 0, \quad I \subseteq [n], \quad (1.15)$$

$$H(X_{I_1}|X_{I_2}) \geq 0, \quad I_1, I_2 \subseteq [n] \text{ con } I_1 \neq I_2, \quad (1.16)$$

$$I(X_{I_1}; X_{I_2}) \geq 0, \quad I_1, I_2 \subseteq [n] \text{ con } I_1 \neq I_2, \quad (1.17)$$

$$I(X_{I_1}; X_{I_2}|X_{I_3}) \geq 0, \quad I_1, I_2, I_3 \subseteq [n] \text{ con } I_1 \neq I_2 \neq I_3. \quad (1.18)$$

Definición 10. Una desigualdad de la información que siempre se cumple y es implicada por las desigualdades básicas se denomina una desigualdad tipo Shannon.

Definición 11. Una desigualdad de la información que siempre se cumple y NO es implicada por las desigualdades básicas se denomina una desigualdad tipo no Shannon.

Proposición 4. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias, entonces el conjunto de las desigualdades básicas es implicado por el conjunto de desigualdades:

1. $H(X_i|X_{[n]-\{i\}}) \geq 0, \quad i \in [n],$
2. $I(X_i; X_j|X_K) \geq 0, \text{ donde } i \neq j \text{ y } K \subset [n] \setminus \{i, j\}.$

Estas desigualdades se denominan desigualdades elementales. El conjunto de las desigualdades elementales es minimal, en el sentido de que ninguna desigualdad puede ser implicada por las demás.

Demostración. Véase [4], Capítulo 13. □

Se puede verificar que el número de total de las desigualdades elementales que involucra n variables aleatorias, viene dado por la expresión:

$$m = n + \binom{n}{2} 2^{n-2}.$$

Ejemplo 4. Tomando $n = 2$, tenemos que las desigualdades elementales son en este caso:

1. $H(X_1, X_2) - H(X_2) \geq 0.$
2. $H(X_1, X_2) - H(X_1) \geq 0.$
3. $H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \geq 0.$

De la **Proposición 4**, podemos redefinir el concepto de desigualdad de la información tipo Shannon de la siguiente manera.

Definición 12. Una desigualdad de la información es tipo Shannon, si ésta puede escribirse como una combinación lineal no-negativa de desigualdades elementales y siempre se cumple.

1.3. Funciones Polimatroides

Definición 13. Una función $f : \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función polimatroide si, y sólo si, se satisfacen las siguientes desigualdades

1. Dados $I \subseteq J \subseteq [n]$, entonces $f(I) \leq f(J)$.
2. Dados $I, J \subseteq [n]$, entonces $f(I) + f(J) \geq f(I \cup J) + f(I \cap J)$.

Ejemplo 5. Sean A_1, \dots, A_n una colección de conjuntos finitos, y definamos

$$f : \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$I \rightarrow \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|.$$

Verifiquemos que f es un polimatroide.

1. Sean $I \subseteq J \subseteq [n]$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$, por lo tanto $f(I) \leq f(J)$.
2. Sean $I, J \subseteq [n]$, entonces

$$f(I) + f(J) = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| + \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right|$$

y

$$\begin{aligned} f(I \cup J) + f(I \cap J) &= \left| \bigcup_{i \in I \cup J} A_i \right| + \left| \bigcup_{i \in I \cap J} A_i \right| \\ &= \left| \bigcup_{i \in I} A_i \cup \bigcup_{j \in J} A_j \right| + \left| \bigcup_{k \in I \cap J} A_k \right| \\ &= \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| + \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| - \left| \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} A_j \right| + \left| \bigcup_{k \in I \cap J} A_k \right| \end{aligned}$$

Además,

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq \left| \bigcup_{k \in I \cap J} A_k \right|,$$

y por el principio del tercio excluido

$$\left| \bigcup_{l \in I \cup J} A_l \right| + \left| \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} A_j \right| = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| + \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right|.$$

De lo anterior

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| + \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq \left| \bigcup_{l \in I \cup J} A_l \right| + \left| \bigcup_{k \in I \cap J} A_k \right|.$$

En conclusión

$$f(I) + f(J) \geq f(I \cup J) + f(I \cap J).$$

Definición 14. El conjunto de polimatroides de orden n es

$$\Gamma_n = \{f : \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid f \text{ es polimatroide}\}.$$

1.4. Funciones entrópicas

Definición 15. Sean, X_1, \dots, X_n , n variables aleatorias. El vector entrópico determinado por la tupla $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$, es la función $h_{\vec{X}} : \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$h_{\vec{X}}(I) = H(X_I).$$

Observación 2. La función $h_{\vec{X}}$ de la definición anterior, la llamaremos función entrópica asociada a la tupla $\vec{X} = X_1, \dots, X_n$ de variables aleatorias.

Observación 3. En adelante, cuando hablemos de un vector entrópico h de orden n , nos referimos a que existe una tupla de n variables aleatorias $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ tales que $h = h_{\vec{X}}$.

Observación 4. Como $|\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}| = 2^n - 1$, podemos identificar al conjunto $\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ con el conjunto $[2^n - 1]$. Así, una función entrópica de orden n (determinada por la n -tupla de variables aleatorias), o una función polimatroide de orden n se pueden pensar como si fuera un elemento de $\mathbb{R}^{2^n - 1}$.

Definición 16. El conjunto de vectores entrópicos de orden n es el conjunto

$$\Gamma_n^* = \{v \in \mathbb{R}^{2^n - 1} : v \text{ es un vector entrópico}\}.$$

Ejemplo 6. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes tomando valores en $\{0, 1\}$, con distribuciones de probabilidades: $Pr\{X_1 = 0\} = 2p$, $Pr\{X_1 = 1\} = 1 - 2p$, donde $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, $Pr\{X_2 = 0\} = Pr\{X_2 = 1\} = \frac{1}{2}$, y sean $X_3 = X_1 \cdot X_2$ y $X_4 = (1 - X_1)(1 - X_2)$. Así, si todas las entropías se toman en base e , se tiene que:

$$\begin{aligned} H(X_1) &= -2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_2) &= \ln 2, \\ H(X_3) &= \ln 2 - \left(\frac{1}{2} + p\right) \ln(1 + 2p) - \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln(1 - 2p), \\ H(X_4) &= -(1 - p) \ln(1 - p) - p \ln(p), \\ H(X_1, X_2) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_1, X_3) &= -2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p) + (1 - 2p) \ln 2, \\ H(X_1, X_4) &= -2p \ln p - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_2, X_3) &= \ln 2 - p \ln p - p \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln(1 - 2p), \\ H(X_2, X_4) &= \ln 2 - p \ln p - p \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln(1 - 2p), \\ H(X_3, X_4) &= \ln 2 - p \ln p - p \ln 2 - \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln(1 - 2p), \\ H(X_1, X_2, X_3) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_1, X_2, X_4) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_1, X_3, X_4) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_2, X_3, X_4) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p), \\ H(X_1, X_2, X_3, X_4) &= \ln 2 - 2p \ln(2p) - (1 - 2p) \ln(1 - 2p). \end{aligned}$$

Luego el vector entrópico generado por la tupla de variables aleatorias $\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ es $h_{\vec{X}}(I)$ con $I \in \mathcal{P}([4]) \setminus \{\emptyset\}$.

El conjunto de vectores entrópicos Γ_n^* , satisface las siguientes propiedades:

1. Γ_n^* contiene el origen: El origen ($0 \in \mathbb{R}^{2^n-1}$) corresponde a la función entrópica de n variables aleatorias degeneradas que toman valores constantes.
2. Γ_n^* está en el octante no negativo de \mathbb{R}^{2^n-1} : Las coordenadas de un vector entrópico, corresponden a entropías mutuas que son no negativas.

Lema 2. Si h y h' pertenecen a Γ_n^* , entonces $h + h' \in \Gamma_n^*$.

Demostración. Sean h y h' vectores entrópicos, entonces existen tuplas de variables aleatorias $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ y $\vec{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ tales que $h = h_{\vec{X}}$ y $h' = h_{\vec{Y}}$. Sean (X_1, \dots, X_n) y (Y_1, \dots, Y_n) independientes; definimos las variables aleatorias Z_1, \dots, Z_n por $Z_i = (X_i, Y_i)$ para todo $i \in [n]$.

Entonces, para todo $I \subseteq [n]$,

$$H(Z_I) = H(X_I) + H(Y_I) = h_{\vec{X}}(I) + h_{\vec{Y}}(I).$$

Por lo tanto, $h + h'$ es un vector entrópico. □

Corolario 2. Si $h \in \Gamma_n^*$, entonces $kh \in \Gamma_n^*$ para todo k entero positivo.

Demostración. Es suficiente escribir

$$kh = \underbrace{h + \dots + h}_k,$$

y aplicar el **Lema 2**. □

Teorema 2. Para todo $n \geq 1$ entero positivo,

$$\Gamma_n^* \subseteq \Gamma_n.$$

Demostración. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias y sea $h_{\vec{X}}$ la función entrópica asociada, basta probar que

$$h_{\vec{X}}(I \cup K) + h_{\vec{X}}(J \cup K) \geq h_{\vec{X}}(K) + h_{\vec{X}}(I \cup J \cup K).$$

para todo $I, J, K \subseteq [n]$ ([6]).

Como

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(X_I; X_J | X_K) \\ &= H(X_{I \cup K}) + H(X_{J \cup K}) - H(X_K) - H(X_{I \cup J \cup K}). \end{aligned}$$

Entonces toda función entrópica es un polimatroide, así $\Gamma_n^* \subseteq \Gamma_n$. □

Definición 17. La clausura de Γ_n^* , $\overline{\Gamma_n^*}$, se denominará la región entrópica de orden n . Los elementos de $\overline{\Gamma_n^*}$ serán denominados vectores cuasi-entrópicos.

Observación 5. Para cada natural $n \geq 1$, tenemos una región entrópica, $\overline{\Gamma_n^*}$ la región entrópica de orden n es un subconjunto de \mathbb{R}^{2^n-1} .

Corolario 3. Para todo $n \geq 1$, $\overline{\Gamma_n^*} \subseteq \Gamma_n$.

Demostración. Como Γ_n está definido por desigualdades no estrictas, Γ_n es cerrado. □

1.5. Elementos de convexidad

Debido a que todos los conjuntos definidos en las secciones anteriores pueden ser consideradas como subconjuntos de $\mathbb{R}^{2^n - 1}$, algunos de los conceptos manejados en el análisis convexo son de gran utilidad para buscar y en muchos casos lograr caracterizar dichos conjuntos. Introduciremos el concepto de cono polar, el cual será considerado como el conjunto de vectores que codifican desigualdades satisfechas por sus conjuntos asociados. Además de presentar algunos teoremas que permiten presentar un poliedro, no sólo como un conjunto de puntos que satisfacen ciertas desigualdades lineales finitas, sino verlo como la envolvente cónica de sus rayos extremos.

Definición 18. Sean $\{x_1, \dots, x_m\}$ puntos de \mathbb{R}^d . Un punto

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \text{ donde } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \text{ y } \alpha_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m$$

se denomina una combinación convexa de x_1, \dots, x_m . Dados un par de puntos $a, b \in \mathbb{R}^d$, el conjunto

$$[a, b] = \{\alpha a + (1 - \alpha)b : 0 \leq \alpha \leq 1\},$$

de todas la combinaciones convexas de a y b se llama el segmento de línea con puntos finales en a y en b .

Definición 19. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se denomina convexo si, y sólo si, para cualquier dos puntos a, b en A , se verifica que $[a, b] \subseteq A$.

Definición 20. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, se denomina un cono, si $0 \in A$ y $\lambda x \in A$, para todo $x \in A$ y $\lambda \geq 0$.

Definición 21. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, se denomina un cono convexo si $x + y \in A$, $\lambda x \in A$, para todo $x, y \in A$ y $\lambda \geq 0$.

Teorema 3. $\overline{\Gamma_n^*}$ es un cono convexo.

Demostración. Véase [4], página 306. □

Definición 22. La envolvente cónica de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, denotada como $\text{cone}(A)$, es el menor cono convexo que contiene el conjunto A .

Proposición 5. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^d$, se tiene que:

$$\text{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Demostración. Véase [8], página 28. □

Definición 23. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ no vacío, el cono polar de A es el conjunto:

$$A^\circ = \{v \in \mathbb{R}^d : v \cdot a \geq 0 \text{ para todo } a \in A\}.$$

Proposición 6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces:

1. A° es un cono convexo cerrado.

2. $(A^\circ)^\circ = \overline{A}$.

Demostración. Véase [7], página 39. □

Definición 24. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, es un cono convexo poliédrico si, y sólo si, A es la intersección de finitos semi-espacios que contienen a 0.

Observación 6. Si A es un cono convexo poliédrico, entonces A es el conjunto de soluciones de algún sistema de desigualdades lineales homogéneas.

Definición 25. Sea A un cono convexo, un punto $a \in A$ es un punto extremo, si a no puede expresarse como una combinación convexa $\alpha b + (1 - \alpha)c$, tal que $b \in A$, $c \in A$ y $0 < \alpha < 1$, excepto en caso que $a = b = c$. Si a es un punto extremo entonces, $\text{cone}(a)$ es un rayo extremo.

Teorema 4. El cono polar de un cono convexo poliédrico es poliédrico.

Demostración. Véase [7], página 51. □

Teorema 5. Todo elemento de un cono convexo poliédrico puede expresarse como la envolvente cónica de sus rayos extremos.

Demostración. Véase [8], página 30. □

1.6. Marco geométrico

Para cada natural $n \geq 1$ y después de enumerar el conjunto $\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$, podemos identificar cada elemento $\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ con un vector canónico de $\mathbb{R}^{2^n - 1}$. Por lo tanto, dado $I \subseteq [n]$, lo identificaremos con un vector canónico denotado por el símbolo e_I . Así de la **Proposición 4** podemos dar la siguiente definición.

Definición 26. El conjunto de desigualdades tipo Shannon de orden n , es el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{e_{[n]} - e_{[n] \setminus \{i\}} : i \in [n]\} \cup \{e_{i \cup K} + e_{i \cup K} - e_{i \cup j \cup K} - e_K : i \neq j \text{ y } K \subseteq [n] \setminus \{i, j\}\}.$$

Observación 7.

a. $(\overline{\Gamma_n^*})^\circ$, contiene todos los vectores de $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}}$ que codifican desigualdades lineales satisfechas por la entropía.

b. $\overline{\Gamma_n^*} \subseteq \Gamma_n$ y, por lo tanto $\Gamma_n^\circ \subseteq (\overline{\Gamma_n^*})^\circ$.

Proposición 7. El conjunto de las desigualdades básicas y el conjunto de las desigualdades satisfechas por los polimatroides son equivalentes.

Demostración. Sea $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ variables aleatorias y $h_{\vec{X}}$ su función entrópica asociada, supongamos además que $h_{\vec{X}}$ satisface las desigualdades polimatroides, entonces

1. $H(X_i|X_{[n]\setminus\{i\}}) \geq 0$, para todo $i \in [n]$.

Sea $i \in [n]$, como $h_{\vec{X}}$ satisface las desigualdades polimatroides, se sigue que

$$h_{\vec{X}}([n] \setminus \{i\}) \leq h_{\vec{X}}([n]),$$

por lo tanto $H(X_i|X_{[n]-\{i\}}) \geq 0$.

2. $I(X_i; X_j|X_K) \geq 0$, donde $i, j \neq j$ y $K \subseteq [n] - \{i, j\}$.

Consideremos $i \neq j$ y $K \subseteq [n] \setminus \{i, j\}$. Debido a que $h_{\vec{X}}$ satisface las desigualdades polimatroides, entonces

$$h_{\vec{X}}(\{i\} \cup K) + h_{\vec{X}}(\{j\} \cup K) \geq h_{\vec{X}}(\{i, j\} \cup K) + h_{\vec{X}}(K),$$

así, $I(X_i; X_j|X_K) \geq 0$.

Finalmente, es evidente que las desigualdades básicas implican las polimatroides. □

Basados en la proposición anterior, presentamos la siguiente definición.

Definición 27. *El cono convexo poliédrico Γ_n , de las funciones polimatroides de orden n , es el conjunto funciones f de $\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ en \mathbb{R}^+ , tales que f satisface todas las desigualdades tipo Shannon.*

Lema 3. *Para todo $n \geq 1$, $\Gamma_n^\circ = \text{cone}(\mathcal{S}_n)$.*

Ejemplo 7. Γ_2 , el cono de las de las funciones polimatroides de orden 2, está completamente definido por las desigualdades

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &\leq f(\{1, 2\}), \\ f(\{2\}) &\leq f(\{1, 2\}), \\ f(\{1, 2\}) &\leq f(\{1\}) + f(\{2\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\Gamma_2)^\circ = \text{cone}((-1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, -1))$, además

$$\Gamma_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([2]) \setminus \{\emptyset\}} : v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 \text{ y } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \right\}$$

Donde $\rho_1 = (0, 1, 1)$, $\rho_2 = (1, 0, 1)$ y $\rho_3 = (1, 1, 1)$, son los rayos extremos de Γ_2 .

Desiguales tipo no-Shannon

En el capítulo anterior introdujimos las regiones Γ_n , Γ_n^* y $\overline{\Gamma_n^*}$; si lográramos verificar que para todo $n \geq 1$, $\overline{\Gamma_n^*} = \Gamma_n$, entonces todas las desigualdades válidas para la entropía serían implicadas por las desigualdades tipo Shannon, y por lo tanto, estarían completamente caracterizadas.

En este capítulo mostraremos que:

1. $\overline{\Gamma_n^*} = \Gamma_n$, para $n = 1, 2, 3$.
2. $\overline{\Gamma_n^*} \neq \Gamma_n$, para $n = 4$.

Y por lo tanto existen desigualdades tipo no-Shannon en 4 variables. En [9], el autor verifica que para $n \geq 4$, $\overline{\Gamma_n^*}$ no es poliédrico, y por lo tanto, una caracterización finita de $(\overline{\Gamma_n^*})^\circ$, vía desigualdades lineales de la información es imposible.

Los resultados de este capítulo están fundamentados en [4], [5], [11].

2.1. Caracterizaciones de $\overline{\Gamma_1^*}, \overline{\Gamma_2^*}, \overline{\Gamma_3^*}$

Teorema 6. $\Gamma_1^* = \mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea $f \in \Gamma_1^*$, entonces existe X_1 variable aleatoria tal que $f = h_{X_1} = H(X_1) \geq 0$, con lo cual $f \in \mathbb{R}^+$.

Sea α un número real estrictamente positivo y consideremos \tilde{X} una variable aleatoria con una distribución uniforme que toma dos valores con probabilidad igual a $\frac{1}{2}$. Tomando la entropía con base $\sqrt[3]{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} H(\tilde{X}) &= -\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= -\log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} \right) = \alpha. \end{aligned}$$

Para el caso $\alpha = 0$, basta tomar una variable aleatoria que tome un valor constante con probabilidad 1.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^+ = \Gamma_1^*$. □

Corolario 4. $\overline{\Gamma_1^*} = \Gamma_1 = (\overline{\Gamma_1^*})^\circ = (\Gamma_1^*)^\circ = \mathbb{R}^+$

Demostración.

1. $\overline{\Gamma_1^*} = \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+$.
2. Como $\Gamma_1^* \subseteq \Gamma_1$ y $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^+$ entonces $\Gamma_1 = \mathbb{R}^+$.
3. $(\overline{\Gamma_1^*})^\circ = \{v \in \mathbb{R} : \text{para todo } x \in \overline{\Gamma_1^*}, x \cdot v \geq 0\}$
 $= \{v \in \mathbb{R} : \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+, x \cdot v \geq 0\}$
 $= \mathbb{R}^+$.
4. Las demás igualdades se siguen de las propiedades del cono convexo polar. □

Teorema 7. $\Gamma_2^* = \Gamma_2$.

Demostración. Por el **Teorema 2**, resta verificar que $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2^*$. Sea $(a, b, c) \in \Gamma_2$, si definimos

$$\begin{aligned}\alpha &= c - b, \\ \beta &= c - a, \\ \gamma &= a + b - c,\end{aligned}$$

entonces de las desigualdades polimatroides $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.

Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias tales que

$$H(X_1) = \alpha, \quad H(X_2) = \beta, \quad H(X_3) = \gamma.$$

Si suponemos que X_1, X_2, X_3 son independientes, podemos definir las variables aleatorias adicionales Y_1 y Y_2 de la forma

$$Y_1 = (X_1, X_3), \quad Y_2 = (X_2, X_3).$$

Entonces, tomando $\vec{Y} = \{Y_1, Y_2\}$

$$\begin{aligned}h_{\vec{Y}}(\{1\}) &= H(Y_1) = H(X_1, X_3) = \alpha + \beta = a. \\ h_{\vec{Y}}(\{2\}) &= H(Y_2) = H(X_2, X_3) = \beta + \gamma = b. \\ h_{\vec{Y}}(\{1, 2\}) &= H(Y_1, Y_2) = H(X_1, X_2, X_3) = \alpha + \beta + \gamma = c.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(a, b, c) \in \Gamma_2^*$, y $\Gamma_2^* = \Gamma_2$. □

Corolario 5. $\overline{\Gamma_2^*} = \Gamma_2$ y $(\overline{\Gamma_2^*})^\circ = \text{cone}(\mathcal{S}_2)$.

Demostración. Como Γ_2 es cerrado, se sigue que $\overline{\Gamma_2^*} = \Gamma_2$. □

Ahora veamos que el **Teorema 7**, no puede ser generalizado al caso $n = 3$.

Teorema 8. $\Gamma_3^* \neq \Gamma_3$.

Demostración. Veamos que existe $\mathbf{b} \in \Gamma_3$ tal que $\mathbf{b} \notin \Gamma_3^*$.

Consideremos el punto $\mathbf{a} = (a, a, a, 2a, 2a, 2a, 2a)$ con $a \geq 0$, es claro que $\mathbf{a} \in \Gamma_3$. Supongamos que existen variables aleatorias X_1, X_2, X_3 , tales que:

1. $H(X_1) = H(X_2) = H(X_3) = a$.
2. $H(X_i, X_j) = 2a$, para $i \neq j$.
3. $H(X_1, X_2, X_3) = 2a$.

Como $H(X_i|X_j, X_k) = 0$ y $I(X_i; X_j) = 0$ para $1 \leq i < j < k \leq 3$, entonces cada variable aleatoria es una función de las otras dos, y las tres variables aleatorias son dos a dos independientes.

Sea \mathcal{S}_{X_i} los soportes de X_i , $i = 1, 2, 3$. Para cualquier $x_1 \in \mathcal{S}_{X_1}$ y $x_2 \in \mathcal{S}_{X_2}$, puesto que X_1 y X_2 son independientes tenemos que

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2) > 0.$$

Siendo X_3 función de X_1 y X_2 , existe un único $x_3 \in \mathcal{S}_{X_3}$ tal que

$$p(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2) > 0. \quad (2.1)$$

Como X_2 es función de X_1 y X_3 , y X_1 y X_3 son independientes, entonces

$$p(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_3) = p(x_1)p(x_3). \quad (2.2)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.2), tenemos que

$$p(x_2) = p(x_3). \quad (2.3)$$

Tomemos cualquier $x'_2 \in \mathcal{S}_{X_2}$ tal que $x_2 \neq x'_2$. Puesto que X_2 y X_3 son independientes, tenemos

$$p(x'_2, x_3) = p(x'_2)p(x_3) > 0.$$

Del hecho de que X_1 es una función de X_2 y X_3 , existe un único $x'_1 \in \mathcal{S}_{X_1}$ tal que

$$p(x'_1, x'_2, x_3) = p(x'_2, x_3) = p(x'_2)p(x_3) > 0.$$

Ahora, como X_2 es una función de X_1 y X_3 , y X_1 y X_3 son independientes, podemos escribir

$$p(x'_1, x'_2, x_3) = p(x'_1, x_3) = p(x'_1)p(x_3). \quad (2.4)$$

Similarmente, siendo X_3 una función de X_1 y X_2 , y como X_1 y X_2 son independientes, entonces

$$p(x'_1, x'_2, x_3) = p(x'_1, x'_2) = p(x'_1)p(x'_2). \quad (2.5)$$

De las igualdades (2.4) y (2.5), tenemos

$$p(x'_2) = p(x_3),$$

y de (2.3), concluimos que

$$p(x'_2) = p(x_2).$$

Por lo tanto X_2 debe tener una distribución uniforme en su soporte. Lo mismo puede verificarse para X_1 y X_3 .

Como $H(X_1) = H(X_2) = H(X_3) = a$, se sigue que el vector $\mathbf{a} = (a, a, a, 2a, 2a, 2a, 2a)$ es entrópico si $a = \log M$, donde M es el cardinal de los soportes de X_1, X_2 y X_3 . Basta tomar $a \neq \log M$ con M entero positivo para que $(a, a, a, 2a, 2a, 2a, 2a) \notin \Gamma_3^*$.

□

Teorema 9. $\overline{\Gamma}_3^* = \Gamma_3$.

Demostración. Sea $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_{12}, h_3, h_{13}, h_{23}, h_{123}) \in \Gamma_3$ y definamos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= h_{123} - h_{23}, & \Delta_2 &= h_{123} - h_{13}, & \Delta_3 &= h_{123} - h_{12}, \\ \Delta_4 &= h_{13} + h_{23} - h_3 - h_{123}, & \Delta_5 &= h_{12} + h_{23} - h_2 - h_{123}, \\ \Delta_6 &= h_{12} + h_{13} - h_1 - h_{123}, & \Delta_7 &= h_1 + h_2 + h_3 + h_{123} - h_{12} - h_{13} - h_{23}. \end{aligned}$$

Como \mathbf{h} es polimatroide, $\Delta_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 6$, pero Δ_7 puede ser negativo.

1. $\Delta_7 \geq 0$: Elijamos $X_1, X_2, X_3, X_{12}, X_{13}, X_{23}, X_{123}$ variables aleatorias independientes entre sí y tales que

$$H(X_I) = \Delta_I, \text{ para } I \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

Dadas las 7 variables aleatorias anteriores, definamos las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (X_1, X_{12}, X_{13}, X_{123}), \\ Y_2 &= (X_2, X_{12}, X_{23}, X_{123}), \\ Y_3 &= (X_3, X_{13}, X_{23}, X_{123}). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $h_{\vec{Y}} = \mathbf{h}$, si $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$.

2. $\Delta_7 < 0$: Definamos las regiones $\Psi_3 = \{Cu|u \in \Gamma_3\}$ y $\Psi_3^* = \{Cu|u \in \Gamma_3^*\}$, donde

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto, $\Gamma_3 \subseteq \overline{\Gamma}_3^*$, si, y sólo si, $\Psi_3 \subseteq \overline{\Psi}_3^*$.

Sea $\Delta = \Upsilon + \Theta$, donde

$$\Upsilon = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12} + \Delta_{123}, \Delta_{13} + \Delta_{123}, \Delta_{23} + \Delta_{123}, 0)$$

y

$$\Theta = (0, 0, 0, -\Delta_{123}, -\Delta_{123}, -\Delta_{123}, \Delta_{123}).$$

Debido a que $-\Delta_{123} > 0$, entonces $\Theta \in \overline{\Psi}_3^*$, como $\Delta_J + \Delta_{123} \geq 0$, para $J \in \{12, 13, 23\}$, Υ está en Ψ_3^* . Sea $\epsilon > 0$ y $\Theta' \in \Psi_3^*$ tales que

$$\|\Theta - \Theta'\| < \epsilon,$$

donde $\|\Theta - \Theta'\|$ denota la distancia euclidiana entre Θ y Θ' , y sea

$$\Delta' = \Upsilon + \Theta'.$$

Puesto que Υ y Θ' están en Ψ_3^* , entonces Δ' está también en Ψ_3^* , y

$$\|\Delta - \Delta'\| = \|\Upsilon + \Theta - \Upsilon - \Theta'\| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\Delta \in \overline{\Psi}_3^*$. En conclusión $\Psi_3 \subseteq \overline{\Psi}_3^*$.

Por todo lo anterior, y del **Corolario 3**, $\Gamma_3 = \overline{\Gamma_3^*}$. □

2.2. Desigualdades tipo no Shannon

En esta sección se mostrará que para el caso $n = 4$, $\Gamma_4 \neq \overline{\Gamma_4^*}$, gracias a la existencia de desigualdades tipo no Shannon.

La primera desigualdad tipo no Shannon fue descubierta por Z. Zhang y R. Yeung [10], pero aquí, preferimos presentar la demostración dada por R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger en [11] de mencionada desigualdad.

Lema 4. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 variable aleatorias con distribución conjunta. Entonces, existe otra variable aleatoria Y , conjuntamente distribuida con X_1, X_2, X_3, X_4 , con las siguientes propiedades.

C1. La distribución marginal de (X_1, X_2, X_3) y (X_1, X_2, Y) son las mismas, con Y reemplazando a X_3 .

C2. $I(X_3, X_4; Y | X_1, X_2) = 0$.

En este caso se dice que Y es una X_4 -Copia de X_3 sobre (X_1, X_2) .

Demostración. Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 variables aleatorias, con alfabetos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ respectivamente. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 elementos arbitrarios de $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ y \mathcal{X}_4 respectivamente, con probabilidad $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Sea Y una nueva variable y sea y un elemento cualquiera de su alfabeto, el cual es \mathcal{X}_3 . Definamos la distribución de probabilidad conjunta de X_1, X_2, X_3, X_4, Y por

$$p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = \frac{p(x_1, x_2, x_3, x_4) \sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4)}{\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

Es claro que la distribución es no negativa. Además sumando sobre los y obtenemos

$$\sum_y p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = \frac{p(x_1, x_2, x_3, x_4) \sum_{y, x_4} p(x_1, x_2, y, x_4)}{\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

así, p' es una extensión de p , lo cual implica que la suma de todas las probabilidades de p' es 1. Similarmente, la distribución marginal de (X_1, X_2, Y) esta dada por

$$\sum_{x_3, x_4} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = \frac{\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4) \sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4)}{\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4)$$

mientras que la distribución marginal de (X_1, X_2, X_3) está dada por $\sum_{x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4)$, con lo cual *C1* queda demostrado.

Si re escribimos *C2* en términos de entropías, se obtiene

$$H(X_1, X_2, X_3, X_4) + H(X_1, X_2, Y) - H(X_1, X_2) - H(X_1, X_2, X_3, X_4, Y) = 0,$$

pero $H(X_1, X_2, X_3) = H(X_1, X_2, Y)$ por *C1*. Así, resta mostrar que

$$H(X_1, X_2, X_3, X_4, Y) = H(X_1, X_2, X_3, X_4) + H(X_1, X_2, X_3) - H(X_1, X_2).$$

Como

$$\begin{aligned}
 H(X_1, X_2, X_3, X_4, Y) &= - \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log p(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &\quad - \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log \left(\sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4) \right) \\
 &\quad - \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} -p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log \left(\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, y, x_4) \right).
 \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log p(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4) \log p(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= H(X_1, X_2, X_3, X_4)
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log \left(\sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4) \right) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2, y} \left(\sum_{x_3, x_4} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \right) \log \left(\sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4) \right) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2, y} \left(\sum_{x_4} p(x_1, x_2, x_4, y) \right) \log \left(\sum_{x_4} p(x_1, x_2, y, x_4) \right) \\
 &= H(X_1, X_2, X_3),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \log \left(\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4) \right) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2} \left(\sum_{x_3, x_4, y} p'(x_1, x_2, x_3, x_4, y) \right) \log \left(\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4) \right) \\
 &= - \sum_{x_1, x_2} \left(\sum_{x_4, y} p(x_1, x_2, x_4, y) \right) \log \left(\sum_{x_3, x_4} p(x_1, x_2, x_3, x_4) \right) \\
 &= H(X_1, X_2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H(X_1, X_2, X_3, X_4, Y) = H(X_1, X_2, X_3, X_4) + H(X_1, X_2, X_3) - H(X_1, X_2).$$

□

Teorema 10. (*Desigualdad de Zhang-Yeung*) Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 variables aleatorias arbitrarias. Entonces,

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) &\leq 2I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_3|X_2) + I(X_2; X_3|X_1) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Demostración. Expandiendo las entropías mutuas y cancelando términos se obtiene la siguiente identidad para 5 variables.

$$\begin{aligned} &I(X_1; X_2) \\ &+ I(X_3; Y|X_1) \quad (S) \\ &+ I(X_3; X_4|Y) \quad (S) \\ &+ I(X_1, X_2; Y|X_3, X_4) \quad (S) \\ &+ I(X_4; Y|X_2) \quad (S) \\ &+ I(X_1; X_2|Y, X_4) \quad (S) \\ &+ I(X_4; Y|X_1) \quad (S) \\ &+ I(X_3; Y|X_2) \quad (S) \\ &+ I(X_1; X_2|X_3, Y) \quad (S) \\ &+ I(X_3; Y|X_1, X_2, X_4) \quad (S) \\ &+ I(X_4; Y|X_1, X_2, X_4) \quad (S) \\ &= 2I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_3|X_2) + I(X_2; X_3|X_1) \\ &+ I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4) \\ &+ 2I(X_3, X_4; Y|X_1, X_2) \quad (C2) \\ &+ I(X_1; X_2|Y) - I(X_1; X_2|X_3) \quad (C1) \\ &+ I(X_1; Y|X_2) - I(X_1; X_3|X_2) \quad (C1) \\ &+ I(X_1; Y|X_2) - I(X_1; X_3|X_2) \quad (C1) \end{aligned}$$

Cada uno de los términos marcados con (S) es una información mutua condicional y son, por lo tanto, no negativas. Así, si los términos marcados con (S) son borrados y el “=” es reemplazado por el “≤”, se obtiene una desigualdad tipo Shannon en 5 variables. Por el **Lema 4**, podemos escoger Y como una $X_4 - copia$ de X_3 sobre (X_1, X_2) , entonces el término marcado con (C2) es cero por la condición C2, además cada uno de los términos marcados con (C1) son cero de la condición C1. De donde se obtiene la desigualdad (2.6). □

Teorema 11. $\overline{\Gamma}_4^* \neq \Gamma_4$.

Demostración. Para cualquier $a > 0$, consideremos el punto $\tilde{h}(a)$ en $\mathbb{R}^{\mathcal{P}(\{4\}) \setminus \{\emptyset\}}$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(a) &= \tilde{h}_2(a) = \tilde{h}_3(a) = \tilde{h}_4(a) = 2a, \\ \tilde{h}_{12}(a) &= \tilde{h}_{13}(a) = \tilde{h}_{14}(a) = 3a, \\ \tilde{h}_{23}(a) &= \tilde{h}_{24}(a) = 3a, \quad \tilde{h}_{34}(a) = 4a, \\ \tilde{h}_{123}(a) &= \tilde{h}_{124}(a) = \tilde{h}_{134}(a) = \tilde{h}_{234}(a) = \tilde{h}_{1234}(a) = 4a. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $\tilde{h}(a) \in \Gamma_4$. Veamos que $\tilde{h}(a) \notin \overline{\Gamma}_4^*$. Supongamos que $\tilde{h}(a) \in \overline{\Gamma}_4^*$, consideremos el vector que codifica la *desigualdad de Zhang-Yeung*

e_{ZY} , donde

$$e_{ZY} = -2e_1 - 2e_2 + 3e_{12} - e_3 + 3e_{13} + 3e_{23} - 4e_{123} + e_{14} + e_{24} - e_{124} - e_{34},$$

así $e_{ZY} \in (\overline{\Gamma_4^*})^\circ$, como $\tilde{h}(a) \in \overline{\Gamma_4^*}$, entonces

$$e_{ZY} \cdot \tilde{h}(a) \geq 0.$$

Vía un cálculo directo se puede mostrar que $e_{ZY} \cdot \tilde{h}(a) = -a$, lo cual es una contradicción. Entonces $\tilde{h}(a) \notin \overline{\Gamma_4^*}$, y así $\overline{\Gamma_4^*} \neq \Gamma_4$. □

Corolario 6. *La desigualdad (2.6) es una desigualdad tipo no Shannon.*

La desigualdad (2.6) sigue siendo válida cuando los índices 1,2,3 y 4 se permutan. Puesto que (2.6) es simétrica en X_1 y X_2 , $\frac{4!}{2!} = 12$ distintas versiones de la *desigualdad de Zhang-Yeung* se obtienen por la permutación de los índices, y las doce desigualdades son satisfechas por cualquier función de entropía.

CAPÍTULO 3

Funciones rango lineales: Caso 1,2 y 3 variables

En este capítulo definiremos las funciones rango lineales de grado n ; por supuesto estas funciones tienen asociadas desigualdades lineales las cuales siempre serán satisfechas por dichas funciones. Presentaremos así mismo, una vista detallada de su relación con las regiones Γ_n , Γ_n^* y $\overline{\Gamma_n^*}$ para los casos $n = 1, 2, 3$. Mostraremos que toda función rango lineal es una función entrópica, y, por lo tanto, una función polimatroide. Veremos además que las funciones desigualdades rango lineales quedan completamente caracterizadas por las desigualdades polimatroides (correspondientemente por las desigualdades elementales).

Los resultados de este capítulo están basados en los trabajos presentados en [2] y en [5].

3.1. Funciones rango lineales

Definición 28. (*Función rango lineal*) Sean, $n \geq 0$ y $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una colección de conjuntos finitos de vectores sobre un espacio vectorial \mathbb{F}^k , donde \mathbb{F} es un campo finito, o, \mathbb{R} . Sea h_A una función definida por

$$h_A : \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ I \longrightarrow h_A(I) = \dim \left\langle \bigcup_{i \in I} A_i \right\rangle.$$

Diremos que $h \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}}$ es una función rango lineal si, y sólo si, existe A como antes y tal que $h = h_A$.

Observación 8. Al igual que en los casos de las funciones entrópicas y las funciones polimatroides, podemos identificar las funciones rango lineales con vectores en $\mathbb{R}^{2^n - 1}$.

Ejemplo 8. Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}^2$, vectores no colineales, $A = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$ y $h_A : \mathbb{R}^{\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, entonces $h = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$ es una función rango lineal ya que:

$$h_A(\{1\}) = h_A(\{2\}) = h_A(\{3\}) = 1, \\ h_A(\{1, 2\}) = h_A(\{1, 3\}) = h_A(\{2, 3\}) = h_A(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

Definición 29. Dado n entero positivo, utilizaremos \mathcal{L}_n para denotar al cono convexo más pequeño en $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}}$ que contiene todas las funciones rango lineales.

Observación 9. De la **Proposición 5** vemos que:

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \text{ es una función rango lineal}, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Teorema 12. $\mathcal{L}_n \subseteq \overline{\Gamma}_n^*$, para todo n entero positivo.

Demostración. Es suficiente verificar que, si h es una función rango lineal, entonces $h \in \Gamma_n^*$.

Sea $A = \{\{v_1^1, \dots, v_{i_1}^1\}, \dots, \{v_1^n, \dots, v_{i_n}^n\}\}$ y $h = h_A$. Dado $k \leq n$, tomemos X_k una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre $\langle \{v_1^k, \dots, v_{i_k}^k\} \rangle$. Note que escoger un elemento de $\langle \{v_1^k, \dots, v_{i_k}^k\} \rangle$ de acuerdo a X_k corresponde a elegir uniformemente al azar una tupla $c_1^k, \dots, c_{i_k}^k \in \mathbb{F}$. Tomemos

$I = \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq [n]$. Escoger un elemento de $C = \left\langle \bigcup_{r=1}^l \{v_1^{j_r}, \dots, v_{i_{j_r}}^{j_r}\} \right\rangle$ de acuerdo a la tupla X_I corresponde a escoger uniformemente al azar la tupla $\left((c_1^{j_1}, \dots, c_{i_{j_1}}^{j_1}), \dots, (c_1^{j_l}, \dots, c_{i_{j_l}}^{j_l}) \right)$ de elementos de \mathbb{F} y formar la combinación lineal correspondiente.

Sea M la matriz cuyas filas son los vectores de la lista $v_1^{j_1}, \dots, v_{i_{j_1}}^{j_1}, v_1^{j_2}, \dots, v_{i_{j_2}}^{j_2}, \dots, v_1^{j_l}, \dots, v_{i_{j_l}}^{j_l}$. Note que dado $v \in C$,

$$Pr[X_I = v] = \frac{\dim(\ker(M))}{|\mathbb{F}|^N},$$

con N el número de vectores de la lista. La ecuación anterior indica que X_I es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre C , por lo tanto,

$$\begin{aligned} h_{\overline{X}}(I) &= H(X_I) = \log |C| = \log |\mathbb{F}|^{\dim(C)} \\ &= \dim(C) \log |\mathbb{F}| = h_A(I) \log |\mathbb{F}|. \end{aligned}$$

Así que $h_A = \frac{1}{\log |\mathbb{F}|} h_{\overline{X}}$, con lo cual $h \in \Gamma_n^*$. □

Corolario 7. Para todo $n \geq 1$ natural, tenemos:

1. $\mathcal{L}_n \subseteq \overline{\Gamma}_n^* \subseteq \Gamma_n$.
2. $\Gamma_n^\circ \subseteq (\overline{\Gamma}_n^*)^\circ \subseteq (\mathcal{L}_n)^\circ$.

Demostración. Es inmediato del Teorema anterior, y las propiedades del cono convexo polar. □

3.2. Caso $n=1$

Teorema 13. $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ y consideremos $A = \{\{u\}\}$ donde u es un vector no nulo en un espacio 1-dimensional, entonces $h_A = 1$, como $\alpha = \alpha \cdot 1$, se sigue que $\alpha \in \mathcal{L}_1$. Ahora, si $\alpha = 0$ basta tomar el subespacio 0.

Tomemos $\beta \in \mathcal{L}_1$, así, existen funciones rango lineales f_1, f_2, \dots, f_m y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, con $\lambda_i \geq 0$ tales que $\beta = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$, como los f_i son positivos, entonces $\beta \geq 0$. □

Corolario 8. $\mathcal{L}_1 = \overline{\Gamma_1^*} = \Gamma_1 = (\mathcal{L}_1)^\circ = (\overline{\Gamma_1^*})^\circ = \Gamma_1^\circ = \mathbb{R}^+$.

Demostración. Se sigue del **Corolario 4**, junto al Teorema anterior. □

3.3. Caso n=2

Ya verificamos que Γ_2 , el cono convexo poliédrico de las de las funciones polimatroides de orden 2, está completamente definido por las desigualdades

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &\leq f(\{1, 2\}), \\ f(\{2\}) &\leq f(\{1, 2\}), \\ f(\{1, 2\}) &\leq f(\{1\}) + f(\{2\}). \end{aligned}$$

De aquí, es claro que $(\Gamma_2)^\circ = \text{cone}((-1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, -1))$.

Teorema 14. $\mathcal{L}_2 = \Gamma_2$.

Demostración. Del **Teorema 12**, $\mathcal{L}_2 \subseteq \Gamma_2$.

Veamos que $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{L}_2$. Sea $\mu \in \Gamma_2$, vía el software libre [1], los rayos extremos de Γ_2 son $\rho_1 = (0, 1, 1)$, $\rho_2 = (1, 0, 1)$ y $\rho_3 = (1, 1, 1)$, por lo tanto

$$\Gamma_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}(\{2\}) \setminus \{\emptyset\}} : \text{existen } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \text{ y } v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 \right\}.$$

Es suficiente encontrar tres colecciones de conjuntos finitos de vectores A_1, A_2, A_3 , tales que $h_{A_i} = \rho_i$, para $i = 1, 2, 3$. (Debido a que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que $\mu = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3$). Tomemos $A_1 = \{\{0\}, \{v_1\}\}$, $A_2 = \{\{v_1\}, \{0\}\}$ y $A_3 = \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$ donde v_1 y v_2 son dos vectores en un espacio 2-dimensional colineales y $\{0\}$ es el subespacio nulo. Con lo cual $\mu \in \mathcal{L}_2$. Por lo tanto $\mathcal{L}_2 = \Gamma_2$. □

Corolario 9. $(\mathcal{L}_2)^\circ = \Gamma_2^\circ = \text{cone}((-1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, -1))$.

Demostración. Se sigue de las propiedades del cono convexo polar. □

En conclusión, para $n = 2$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{L}_2 = \Gamma_2 = \overline{\Gamma_2^*} = \Gamma_2^*. \qquad \mathcal{L}_2^\circ = \Gamma_2^\circ = (\overline{\Gamma_2^*})^\circ.$$

3.4. Caso n=3

Γ_3 , está determinado por las desigualdades

$$\begin{aligned}
 f(\{1,2\}) &\leq f(\{1,2,3\}), \\
 f(\{1,3\}) &\leq f(\{1,2,3\}), \\
 f(\{2,3\}) &\leq f(\{1,2,3\}), \\
 f(\{1,2\}) &\leq f(\{1\}) + f(\{2\}), \\
 f(\{1,3\}) &\leq f(\{1\}) + f(\{3\}), \\
 f(\{2,3\}) &\leq f(\{2\}) + f(\{3\}), \\
 f(\{1,2\}) + f(\{1,3\}) &\geq f(\{1,2,3\}) + f(\{1\}), \\
 f(\{1,2\}) + f(\{2,3\}) &\geq f(\{1,2,3\}) + f(\{2\}), \\
 f(\{2,3\}) + f(\{1,3\}) &\geq f(\{1,2,3\}) + f(\{3\}).
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3^\circ = \text{cone} &((0,0,0,-1,0,0,1), (0,0,0,0,-1,0,1), (0,0,0,0,0,-1,1), (1,1,0,-1,0,0,0), \\
 &(1,0,1,0,-1,0,0), (0,1,1,0,0,-1,0), (-1,0,0,1,1,0,-1), (0,-1,0,1,0,1,-1) \\
 &(0,0,-1,0,1,1,-1)).
 \end{aligned}$$

Teorema 15. $\mathcal{L}_3 = \Gamma_3$.

Demostración. Del **Teorema 12**, $\mathcal{L}_3 \subseteq \Gamma_3$.

Con ayuda del software libre [1], vemos que los ρ_i , $i = 1, 2, \dots, 8$. (Cuadro 3.1), son los rayos extremos de Γ_3 , por lo tanto:

$$\Gamma_3 = \left\{ v \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}(\{3\}) \setminus \{\emptyset\}} : \text{existen } \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 8 \text{ y } v = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \rho_i \right\}.$$

Sea $\mu \in \Gamma_3$, luego existen $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 8$, tales que $\mu = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \rho_i$; sólo resta encontrar 8 colecciones de conjuntos finitos de vectores A_1, A_2, \dots, A_8 , tales que $h_{A_i} = \rho_i$, para $i = 1, 2, \dots, 8$. Los A_i se presentan en el Cuadro 3.2. Donde v_1, v_2, v_3 son tres vectores dos a dos linealmente

	Vectores generados de Γ_3
ρ_1	(1,0,0,1,1,0,1)
ρ_2	(0,1,0,1,0,1,1)
ρ_3	(0,0,1,0,1,1,1)
ρ_4	(1,1,0,1,1,1,1)
ρ_5	(1,0,1,1,1,1,1)
ρ_6	(0,1,1,1,1,1,1)
ρ_7	(1,1,1,1,1,1,1)
ρ_8	(1,1,1,2,2,2,2)

Cuadro 3.1: Generadores de Γ_3

	Colección de conjuntos	h_{A_i}
A_1	$\{v_1\}, \{0\}, \{0\}$	(1,0,0,1,1,0,1)
A_2	$\{0\}, \{v_1\}, \{0\}$	(0,1,0,1,0,1,1)
A_3	$\{0\}, \{0\}, \{v_1\}$	(0,0,1,0,1,1,1)
A_4	$\{v_1\}, \{v_1\}, \{0\}$	(1,1,0,1,1,1,1)
A_5	$\{v_1\}, \{0\}, \{v_1\}$	(1,0,1,1,1,1,1)
A_6	$\{0\}, \{v_1\}, \{v_1\}$	(0,1,1,1,1,1,1)
A_7	$\{v_1\}, \{v_1\}, \{v_1\}$	(1,1,1,1,1,1,1)
A_8	$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$	(1,1,1,2,2,2,2)

Cuadro 3.2:

independiente en un espacio 2-dimensional y $\{0\}$ es el subespacio nulo.

En conclusión, $\mathcal{L}_3 = \Gamma_3$.

□

Corolario 10. $(\mathcal{L}_3)^\circ = \Gamma_3^\circ = (\overline{\Gamma_3^*})^\circ = \text{cone}(\mathcal{S}_3)$.

Demostración. Inmediato de las propiedades del cono convexo polar.

□

La desigualdad de Ingleton y las funciones rango lineales caso $n = 4$

Puede ser natural pensar que las funciones rango lineales quedan completamente caracterizadas por las funciones polimatroides. Sin embargo, en 1971 A.W. Ingleton en su artículo ‘*Representation of matroids*’ [14], establece una condición necesaria para que una matroide sea representable. Ingleton demuestra que si $M = (S, r)$ es una matroide representable, entonces para cualquier A, B, C, D subconjunto de S se tiene que

$$\begin{aligned} r(A) + r(B) + r(C \cup D) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup D) \\ \leq r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup D) + r(B \cup C) + r(B \cup D). \end{aligned}$$

En este capítulo mostraremos que debido a la desigualdad de Ingleton, las funciones rango lineales no quedan completamente caracterizadas por las funciones polimatroides; sin embargo, esta desigualdad (y sus posibles combinaciones) junto con las desigualdades polimatroides caracterizan las desigualdades rango lineales para $n = 4$.

Los resultados de este capítulo están basados nuevamente en [2] y en [5].

4.1. La desigualdad de Ingleton y sus consecuencias

Para demostrar la desigualdad de Ingleton, vamos a hacer uso del siguiente lema, valido para cualquier espacio vectorial V de dimensión finita. El cual es tomado de [16].

Lema 5. *Sea V_1, V_2, V_3 y V_4 subespacios de un espacio vectorial V , entonces:*

1. $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \geq \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_1 + V_3) - \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_3)$.
2. $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \geq \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_4) - \dim(V_1 \cap V_2)$.
3. $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \geq \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) + \dim(V_4) - \dim(V_1 + V_3) - \dim(V_2 + V_3) - \dim(V_1 + V_4) - \dim(V_2 + V_4) + \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_4)$.

$$4. \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_4) + \dim(V_3 + V_4) \leq \\ \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 + V_3) + \dim(V_1 + V_4) + \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_2 + V_4).$$

Demostración. Recordemos que para cualquier dos subespacios U, W se tiene que $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

1. Como $(V_1 \cap V_2) + V_3 \subseteq (V_1 + V_3) \cap (V_2 + V_3)$, se sigue que

$$\dim((V_1 \cap V_2) + V_3) \leq \dim((V_1 + V_3) \cap (V_2 + V_3))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - \dim((V_1 \cap V_2) + V_3) \\ &\geq \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - [\dim((V_1 + V_3) \cap (V_2 + V_3))] \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - [\dim(V_1 + V_3) + \dim(V_2 + V_3) - \dim(V_1 + V_2 + V_3)] \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_1 + V_3) - \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_3). \end{aligned}$$

2. Es claro que $(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + (V_1 \cap V_2 \cap V_4) \subseteq (V_1 \cap V_2)$, con lo cual

$$\dim[(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + (V_1 \cap V_2 \cap V_4)] \leq \dim(V_1 \cap V_2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) &= \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_4) - \dim[(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + (V_1 \cap V_2 \cap V_4)] \\ &\geq \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_4) - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

3. De 1. y 2. tenemos:

$$\begin{aligned} \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) &\geq \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_4) - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &\geq \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_1 + V_3) - \dim(V_2 + V_3) \\ &\quad + \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_4) - \dim(V_1 + V_4) \\ &\quad - \dim(V_2 + V_4) + \dim(V_1 + V_2 + V_4) - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_3) + \dim(V_4) - \dim(V_1 + V_3) \\ &\quad - \dim(V_2 + V_3) - \dim(V_1 + V_4) - \dim(V_2 + V_4) \\ &\quad + \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_4). \end{aligned}$$

4. De 3. sigue que

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_4) &\leq \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &\quad - \dim(V_3) - \dim(V_4) + \dim(V_1 + V_3) + \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_4) + \dim(V_2 + V_4). \end{aligned}$$

Adicionando a ambos lados de la anterior desigualdad la cantidad $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3 + V_4)$, obtenemos 4, pues:

$$\begin{aligned} &\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3 + V_4) + \dim(V_1 + V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_2 + V_4) \\ &\leq \dim(V_3 \cap V_4) - \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_3) - \dim(V_4) \\ &\quad + \dim(V_1 + V_3) + \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_1 + V_4) + \dim(V_2 + V_4) + \dim(V_3 + V_4) \\ &= \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 + V_3) + \dim(V_1 + V_4) + \dim(V_2 + V_3) + \dim(V_2 + V_4). \end{aligned}$$

□

Estamos preparados para demostrar

Teorema 16. (desigualdad de Ingleton) Sea $M = (S, r)$ una matroide representable y sean X_1, X_2, X_3 y X_4 subconjuntos del soporte S entonces,

$$r(X_1) + r(X_2) + r(X_3 \cup X_4) + r(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + r(X_1 \cup X_2 \cup X_4) \\ \leq r(X_1 \cup X_2) + r(X_1 \cup X_3) + r(X_1 \cup X_4) + r(X_2 \cup X_4) + r(X_2 \cup X_4).$$

Demostración. Como M es representable existe una matriz $A = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, tal que $M \cong M[A]$. Sean $X, Y \subseteq S$ y definamos $U = \langle \{v_i : i \in X\} \rangle$ y $W = \langle \{v_j : j \in Y\} \rangle$, entonces $r(X \cup Y) = \dim(\{v_i : i \in X\} \cup \{v_j : j \in Y\})$.

Si definimos $V_i = \{v_r : r \in X_i\}$, con $V_i \subseteq S$ para $i = 1, 2, 3, 4$, de la anterior igual y del numeral 4 del **Lema 5**, concluimos que:

$$r(X_1) + r(X_2) + r(X_3 \cup X_4) + r(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + r(X_1 \cup X_2 \cup X_4) \\ \leq r(X_1 \cup X_2) + r(X_1 \cup X_3) + r(X_1 \cup X_4) + r(X_2 \cup X_4) + r(X_2 \cup X_4).$$

Como se quería demostrar.

□

Corolario 11. Si $g \in \mathcal{L}_4$, entonces g satisface la desigualdad de Ingleton.

El siguiente teorema deja en evidencia que las funciones polimatroides no caracterizan las funciones rango lineales, para el caso $n = 4$.

Teorema 17. La desigualdad de Ingleton NO es una desigualdad de la información.

Demostración. Basta con encontrar una cuádrupla de variables aleatorias que no satisfagan la desigualdad de Ingleton.

Sean X_3 y X_4 dos variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas sobre $\{0, 1\}$, consideremos además las variables aleatorias $X_1 = X_3(1 - X_4)$ y $X_2 = X_4(1 - X_3)$. Entonces las distribuciones de probabilidad y probabilidad conjunta son:

x	0	1
$Pr(X_1 = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

x	0	1
$Pr(X_2 = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_1 = x, X_2 = y)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_1 = x, X_3 = y)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_1 = x, X_4 = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_2 = x, X_3 = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_2 = x, X_4 = y)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

(x, y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$Pr(X_3 = x, X_4 = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(x, y)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
$Pr(X_1 = x, X_2 = y, X_3 = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0

(x, y)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
$Pr(X_1 = x, X_2 = y, X_4 = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0

Ahora, sea $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, entonces:

$$\begin{aligned}
 h_{\vec{X}}(\{1\}) &= H(X_1) = -\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4} \right), \\
 h_{\vec{X}}(\{2\}) &= H(X_2) = -\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4} \right), \\
 h_{\vec{X}}(\{1, 2\}) &= H(X_1, X_2) = -\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\
 h_{\vec{X}}(\{1, 3\}) &= H(X_1, X_3) = -\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\
 h_{\vec{X}}(\{1, 4\}) &= H(X_1, X_4) = -\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\
 h_{\vec{X}}(\{2, 3\}) &= H(X_2, X_3) = -\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\
 h_{\vec{X}}(\{2, 4\}) &= H(X_2, X_4) = -\frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2}{4} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\
 h_{\vec{X}}(\{3, 4\}) &= H(X_3, X_4) = -\log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = 2, \\
 h_{\vec{X}}(\{1, 2, 3\}) &= H(X_1, X_2, X_3) = -\log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = 2, \\
 h_{\vec{X}}(\{1, 2, 4\}) &= H(X_1, X_2, X_4) = -\log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = 2.
 \end{aligned}$$

De los anteriores valores tenemos que el lado derecho de la *desigualdad de Ingleton* es igual a $\frac{15}{2}$, mientras que el lado izquierdo es igual a $2H(X_1) + 6$, como $H(X_1) > \frac{3}{4}$, tenemos que la *desigualdad de Ingleton* no es satisfecha por un vector entrópico, por lo tanto la *desigualdad de Ingleton*, no es una desigualdad de la información. □

Corolario 12. $\Gamma_4 \neq \mathcal{L}_4$.

Demostración. Basta considerar el vector:

$$\mathbf{a} = (2a, 2a, 2a, 2a, 3a, 3a, 3a, 3a, 3a, 4a, 4a, 4a, 4a, 4a, 4a),$$

con $a > 0$, y verificar que no satisface la *desigualdad de Ingleton*. □

4.2. Funciones rango lineales, caso n=4

A pesar de que la *desigualdad de Ingleton*, muestra de las funciones rango lineales no quedan caracterizadas por las funciones polimatroides para $n = 4$, es precisamente la *desigualdad de Ingleton* (y sus posibles combinaciones) junto con las desigualdades de Shannon quienes caracterizan las desigualdades rango lineales.

Definición 30. $\mathcal{I}_4 := \{v \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([4]) \setminus \{\emptyset\}} : v \text{ satisface todas las desigualdades de Ingleton}\}$

Teorema 18. $\mathcal{L}_4 = \Gamma_4 \cap \mathcal{I}_4$.

Demostración. Del **Teorema 12** vemos que $\mathcal{L}_4 \subseteq \Gamma_4 \cap \mathcal{I}_4$.

$\Gamma_4 \cap \mathcal{I}_4$ determina un cono convexo poliédrico, vía el software libre [1], este cono es generado por los 35 puntos en el Cuadro 4.1.

Para probar el teorema, resta ver que para cada generador ρ_i , existe una cuádrupla A, B, C, D de conjuntos finitos de vectores tal que ρ_i sea una función rango lineal.

Representación de los generadores de $\Gamma_4 \cap \mathcal{I}_4$

Conjunto	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9	ρ_{10}
A	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
B	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$
C	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$
D	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$

Representación de los generadores de $\Gamma_4 \cap \mathcal{J}_4$

Conjunto	ρ_{11}	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}	ρ_{15}	ρ_{16}	ρ_{17}	ρ_{18}	ρ_{19}	ρ_{20}
A	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$
B	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{v_2\}$
C	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_3\}$	$\{0\}$	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{v_3\}$
D	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{v_1\}$	$\{0\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3\}$

Representación de los generadores de $\Gamma_4 \cap \mathcal{J}_4$

Conjunto	ρ_{21}	ρ_{22}	ρ_{23}	ρ_{24}	ρ_{25}	ρ_{26}	ρ_{27}	ρ_{28}	ρ_{29}
A	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{w_1\}$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_1\}$
B	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{v_1\}$	$\{v_2\}$	$\{w_2\}$	$\{v_2\}$	$\{v_1, v_2\}$
C	$\{v_3\}$	$\{v_2\}$	$\{v_3\}$	$\{v_1\}$	$\{v_2\}$	$\{v_3\}$	$\{w_3\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3\}$
D	$\{v_2\}$	$\{v_3\}$	$\{v_1\}$	$\{v_3\}$	$\{v_3\}$	$\{v_4\}$	$\{w_4\}$	$\{v_4\}$	$\{v_4\}$

Representación de los generadores de $\Gamma_4 \cap \mathcal{J}_4$

Conjunto	ρ_{30}	ρ_{31}	ρ_{32}	ρ_{33}	ρ_{34}	ρ_{35}
A	$\{v_1\}$	$\{v_1\}$	$\{w_1, w_2\}$	$\{w_1\}$	$\{w_1\}$	$\{w_1\}$
B	$\{v_2\}$	$\{v_2\}$	$\{w_3\}$	$\{w_2, w_3\}$	$\{w_2\}$	$\{w_2\}$
C	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_3\}$	$\{w_4\}$	$\{w_4\}$	$\{w_3, w_4\}$	$\{w_3\}$
D	$\{v_4\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\{w_5\}$	$\{w_5\}$	$\{w_5\}$	$\{w_4, w_5\}$

ρ_1	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{19}	(0,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_2	(1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{20}	(1,1,1,1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2)
ρ_3	(1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{21}	(1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2)
ρ_4	(1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{22}	(1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2)
ρ_5	(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{23}	(1,1,1,1,2,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_6	(1,1,0,0,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1)	ρ_{24}	(1,1,1,1,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_7	(1,0,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1)	ρ_{25}	(1,1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2)
ρ_8	(1,0,0,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{26}	(1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_9	(0,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{27}	(1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3)
ρ_{10}	(0,1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{28}	(2,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_{11}	(0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	ρ_{29}	(1,2,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_{12}	(1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,1)	ρ_{30}	(1,1,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_{13}	(0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,1,1)	ρ_{31}	(1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)
ρ_{14}	(0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,1)	ρ_{32}	(2,1,1,1,3,3,3,2,2,2,3,3,3,3,3)
ρ_{15}	(0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1,1)	ρ_{33}	(1,2,1,1,3,2,2,3,3,2,3,3,3,3,3)
ρ_{16}	(1,1,1,0,2,2,1,2,1,1,2,2,2,2,2)	ρ_{34}	(1,1,2,1,2,3,2,3,2,3,3,3,3,3,3)
ρ_{17}	(1,1,0,1,2,1,2,1,2,1,2,2,2,2,2)	ρ_{35}	(1,1,1,2,2,2,3,2,3,3,3,3,3,3,3)
ρ_{18}	(1,0,1,1,1,2,2,1,1,2,2,2,2,2,2)		

Cuadro 4.1: Generadores de $\Gamma_4 \cap \mathcal{I}_4$

Es fácil verificar que las cuádruplas mencionadas anteriormente cumplen lo exigido. Donde v_1, v_2, v_3, v_4 , son cuatro vectores dos a dos independientes en un espacio 2-dimensional; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 , son cinco vectores en un espacio 3-dimensional tal que cualquier 3 de ellos son independientes. Por $\{0\}$ denotamos el subespacio 0-dimensional.

□

Funciones rango lineales caso n=5

En los capítulos anteriores se caracterizaron las funciones rango lineales hasta el caso $n = 4$. En este capítulo se dará una lista de 24 desigualdades que, junto con las desigualdades de Shannon e Ingleton, generan todas las desigualdades rango lineales para $n = 5$. El capítulo se basa completamente en el trabajo de R. Dougherty, C. Freiling y K. Zeger, presentado en [12] (muchas de las descripciones, son traducciones literales).

Teniendo en cuenta la estrecha relación entre las funciones rango lineales y la Teoría de la Información de Shannon, optaremos por utilizar la notación de esta última. Usaremos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} H(X_1|X_2) &= H(X_1, X_2) - H(X_2), \\ I(X_1; X_2) &= H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2), \\ I(X_1; X_2|X_3) &= H(X_1, X_3) + H(X_2, X_3) - H(X_1, X_2, X_3) - H(X_3). \end{aligned}$$

Tenemos dos interpretaciones para estas ecuaciones.

1. Cuando X_1, X_2, X_3 son variables aleatorias; $H(X_1)$ es la entropía de X_1 ; $H(X_1|X_2)$ es la entropía de X_1 dado X_2 ; $I(X_1; X_2)$ es la información mutua de X_1 y X_2 ; y $I(X_1; X_2|X_3)$ es la información mutua de X_1 y X_2 dado X_3 .
2. Cuando X_1, X_2, X_3 son subespacios de un espacio vectorial finito dimensional; $H(X_1)$ es la dimensión del espacio X_1 ; X_1, X_2 denota el espacio generado por X_1 y X_2 , (como X_1 y X_2 son subespacios, este corresponde a $X_1 + X_2$) y $H(X_1, X_2)$ es la dimensión de X_1, X_2 ; $H(X_1|X_2)$ es la dimensión del espacio $(X_1 + X_2)/X_2$ (subespacio cociente); $I(X_1; X_2)$ es la dimensión del espacio $X_1 \cap X_2$; y $I(X_1; X_2|X_3)$ es la dimensión del espacio $[(X_1 + X_3) \cap (X_2 + X_3)]/X_3$.

En una u otra interpretación las ecuaciones anteriores son válidas.

5.1. Nuevas desigualdades rango lineales caso n=5

Definición 31. *La variable aleatoria Z , es una información común de las variables aleatorias X_1 y X_2 , si*

$$\begin{aligned} H(Z|X_1) &= 0 \\ H(Z|X_2) &= 0 \\ H(Z) &= I(X_1; X_2) \end{aligned}$$

Observación 10. *En general dos variables aleatorias X_1 y X_2 , pueden no tener información común.*

Observación 11. *Si X_1 y X_2 , son subespacios de un espacio vectorial finito, entonces la información común siempre existe. Basta considerar $Z = X_1 \cap X_2$, el cual cumple con las condiciones exigidas.*

Usando la existencia de información común, vamos a verificar que la siguiente lista de 24 desigualdades, son, en efecto, desigualdades rango lineales para $n = 5$.

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \quad (5.1)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_2; X_5) \quad (5.2)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_2; X_5|X_3) + I(X_1; X_4|X_3, X_5) \quad (5.3)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) + I(X_2; X_4|X_3) + I(X_1; X_5|X_3, X_4) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4|X_3) + I(X_1; X_5|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_3, X_5) + I(X_2; X_3|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4|X_5) + I(X_4; X_5|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_3, X_4) + I(X_1; X_3|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_5|X_3) + I(X_2; X_4) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_3, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_2|X_5) \\ &\quad + I(X_3; X_4) + I(X_3, X_4; X_5) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_2|X_5) \\ &\quad + I(X_4; X_5) + I(X_2; X_4, X_5|X_3) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2) &\leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4) + I(X_1; X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_5) + I(X_1; X_3|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1; X_3, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_2; X_5|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_3, X_5) + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_5|X_4) + I(X_1; X_2|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1; X_3|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_5|X_4) + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_1; X_2|X_3, X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_3, X_4) + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_2, X_3; X_4|X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_3|X_4, X_5) + I(X_1; X_5) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; X_3, X_4) &\leq I(X_1, X_2; X_4) + I(X_1; X_4|X_2, X_3) + I(X_2; X_4|X_1, X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_5) + I(X_2; X_3|X_1, X_5) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_4, X_5) + I(X_3; X_5|X_4) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3) &\leq I(X_2; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_3|X_4) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_5) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3) &\leq I(X_2; X_4) + 2I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_2|X_5) \\ &\quad + I(X_4; X_5) + I(X_2; X_5|X_3, X_4) + I(X_3; X_4|X_2, X_5) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3) &\leq I(X_2; X_3) + I(X_2; X_4) + I(X_1; X_3|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_5) + I(X_1; X_5|X_2) + I(X_3; X_4|X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3) &\leq I(X_2; X_4) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) \\ &\quad + I(X_3; X_5) + I(X_1; X_2|X_3, X_5) + I(X_2; X_3|X_4, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_1; X_4|X_5) + 2I(X_2; X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_3|X_4, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2) + I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_4) + 2I(X_1; X_3|X_5) + I(X_2; X_5) \\ &\quad + I(X_4; X_5) + I(X_1; X_2|X_3, X_4) \\ &\quad + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_3, X_4) + I(X_2; X_3, X_4) &\leq I(X_2; X_4) + I(X_2; X_3|X_5) + I(X_3; X_5|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_5) + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1, X_2; X_4|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_2, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Cada una de estas desigualdades es demostrable de las desigualdades tipo Shannon, si asumimos que cada información mutua en el lado izquierdo de la desigualdad, es realizada por una información común (como la información común siempre existe en el caso de las funciones rango lineales, las desigualdades son todas, desigualdades rango lineales).

Por ejemplo, las desigualdades (5.1)-(5.10) se verifican, si asumimos que existe una variable aleatoria Z tal que:

$$\begin{aligned} H(Z|X_1) &= H(Z|X_2) = 0, \\ H(Z) &= I(X_1; X_2). \end{aligned}$$

La desigualdad (5.23) se verifica, si existen variables aleatorias Z y Y tales que:

$$\begin{aligned} H(Z|X_1) &= H(Z|X_2) = 0, & H(Y|X_1) &= H(Y|X_2, X_3) = 0, \\ H(Z) &= I(X_1; X_2), & H(Y) &= I(X_1; X_2, X_3). \end{aligned}$$

Estas afirmaciones pueden ser verificadas usando el programa de desigualdades de la información **Xitip** [13]. En efecto, todas se hacen desigualdades tipo Shannon, si reemplazamos el lado izquierdo por informaciones mutuas con términos $H(Z)$ o $H(Y)$ y adicionamos términos adecuados como $kH(Z|X_1) + kH(Z|X_2)$, para un coeficiente suficientemente grande k ($k = 5$ es suficiente para

todas esas desigualdades). Por ejemplo, la desigualdad,

$$H(Z) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) + 5H(Z|X_1) + 5H(Z|X_2),$$

es una desigualdad tipo Shannon; si Z es la información común de X_1 y X_2 , obtenemos (5.1). Otra vez la verificación que estas desigualdades son tipo Shannon, se puede realizar utilizando **Xitip**, o se pueden trabajar de forma explícita.

Las anteriores desigualdades pueden ser escritas en formas equivalentes.

Moviendo el primer término de la derecha a la izquierda.

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2|X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_2; X_5|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2; X_3|X_4) &\leq I(X_1; X_4|X_2, X_3) + I(X_2; X_4|X_1, X_3) + I(X_1; X_3|X_2, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_3|X_1, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) + I(X_3; X_5|X_4) \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_3, X_4) + I(X_2; X_3|X_4) &\leq I(X_2; X_3|X_5) + I(X_3; X_5|X_4) + I(X_1; X_5) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1, X_2; X_4|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_2, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.24a)$$

Adicionando términos a ambos lados y combinándolos en el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_3) + I(X_2; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_2; X_4|X_5) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \end{aligned} \quad (5.18b)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_3) + I(X_2; X_4) + 2I(X_1; X_3|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_2|X_5) + I(X_4; X_5) + I(X_2; X_5|X_3, X_4) + I(X_3; X_4|X_2, X_5) \end{aligned} \quad (5.19b)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_3) + I(X_2; X_3) + I(X_2; X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_2|X_5) + I(X_1; X_5|X_2) + I(X_3; X_4|X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \end{aligned} \quad (5.20b)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_3) + I(X_2; X_4) + I(X_1; X_3|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_3; X_5) + I(X_1; X_2|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_3|X_4, X_5) + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \end{aligned} \quad (5.21b)$$

$$\begin{aligned} 3I(X_1; X_2, X_3) &\leq 2I(X_1; X_3|X_2) + 2I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_1; X_4|X_5) + 2I(X_2; X_4) + I(X_2; X_3|X_4, X_5) \\ &\quad + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.22b)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_4) + 2I(X_1; X_3|X_5) + I(X_2; X_5) \\ &\quad + I(X_4; X_5) + I(X_1; X_2|X_3, X_4) + 2I(X_2; X_4|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.23b)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1, X_2; X_3, X_4) &\leq I(X_2; X_3, X_4|X_1) + I(X_1; X_3, X_4|X_2) + I(X_2; X_4) + I(X_2; X_3|X_5) \\ &\quad + I(X_3; X_5|X_4) + I(X_1; X_5) + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1, X_2; X_4|X_3) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_2, X_5) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \end{aligned} \quad (5.24b)$$

De manera no tan obvia.

$$I(X_1; X_3) \leq I(X_1; X_3|X_2) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \quad (5.1c)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2|X_3) &\leq I(X_1; X_5|X_3) + I(X_1; X_3|X_2, X_4) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \end{aligned} \quad (5.11c)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2|X_3) &\leq I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_5|X_3) + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_2, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.13c)$$

$$\begin{aligned} I(X_2; X_3|X_4) &\leq I(X_2; X_3|X_1, X_4) + I(X_1; X_4|X_2, X_3) + I(X_2; X_5|X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \end{aligned} \quad (5.15c)$$

$$\begin{aligned} I(X_2; X_3) &\leq I(X_2; X_4) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_3; X_4|X_1) \\ &\quad + I(X_2; X_5|X_1) + I(X_2; X_3|X_4, X_5) + I(X_4; X_5|X_2, X_3) \end{aligned} \quad (5.19c)$$

$$\begin{aligned} I(X_3; X_4|X_5) &\leq I(X_1; X_4|X_5) + I(X_3; X_4|X_1) + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \\ &\quad + I(X_2; X_3, X_5|X_1) + I(X_3; X_5|X_2, X_5) \end{aligned} \quad (5.21c)$$

$$\begin{aligned} 2I(X_1; X_3|X_4) &\leq I(X_1; X_4|X_3) + I(X_3; X_4|X_1) + I(X_1; X_3|X_2) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_2) + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_1; X_4|X_5) \\ &\quad + 2I(X_2; X_5) + I(X_2; X_3|X_4, X_5) + I(X_3; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.22c)$$

$$\begin{aligned} I(X_2; X_4|X_5) &\leq I(X_2; X_4|X_1) + I(X_1; X_3|X_5) + I(X_3; X_5|X_1) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_1, X_3) + I(X_4; X_5|X_2, X_3) + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \\ &\quad + I(X_2; X_4|X_3, X_5) \end{aligned} \quad (5.23c)$$

$$\begin{aligned} I(X_1; X_5|X_4) &\leq I(X_2; X_4) + I(X_3; X_5|X_2) + I(X_4; X_5|X_3) + I(X_1; X_2|X_3, X_4) \\ &\quad + I(X_1; X_4|X_2, X_3) + I(X_1; X_4|X_2, X_5) + I(X_1; X_5|X_2, X_4) \end{aligned} \quad (5.24c)$$

Obsérvese que, para esas formas equivalentes, no se busca que la desigualdad se verifique de la existencia de informaciones comunes en el lado izquierdo de los términos. Por ejemplo la desigualdad (5.19c) no se sigue de las desigualdades tipo Shannon y de la existencia de una información común para X_2 y X_3 . Resulta que, la desigualdad (5.24b) puede ser verificada de la existencia de una información común para (X_1, X_2) y (X_3, X_4) , las desigualdades (5.19b), (5.21b), (5.22b) y (5.23b) son demostrables de la existencia de una información común de X_1 y (X_2, X_3) , pero las desigualdades (5.18b) y (5.20b) no lo son; en efecto, no solo una información común, junto con las desigualdades tipo Shannon son suficientes para demostrar (5.18) o (5.20).

5.2. Pruebas auxiliares y generalizaciones

Vamos a proporcionar algunas técnicas auxiliares, para probar las desigualdades de la sección anterior. Esto dará lugar a generalizaciones naturales.

Lema 6. *La desigualdad*

$$H(Z|R) + I(R; S|T) \geq I(Z; S|T)$$

es una desigualdad tipo Shannon.

Demostración. Como $I(Z; T|R) = H(Z|R) - H(Z|T, R)$, tenemos que $H(Z|R) \geq H(Z|T, R) + I(Z; T|R)$.

Además, $H(Z|R, T) - I(S; Z|R, T) = H(Z|S, R, T) \geq 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} H(Z|R) + H(S|Z, T) &\geq H(Z|R, T) + H(S|Z, T) \\ &\geq I(S; Z|R, T) + H(S|Z, T) \\ &\geq I(S; Z|R, T) + H(S|R, Z, T) \\ &= H(S|R, T). \end{aligned}$$

Es decir $H(Z|R) - H(S|R, T) \geq -H(S|Z, T)$. Adicionando a ambos lados de la desigualdad la expresión $H(S|T)$ se sigue el resultado. \square

Corolario 13. Si $H(Z|R) = 0$, entonces $I(R; S|T) \geq I(Z; S|T)$.

Demostración desigualdad (5.1). Sea Z la información común de X_1 y X_2 , luego $H(Z|X_1) = H(Z|X_2) = 0$ y $H(Z) = I(X_1; X_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} &I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \\ &\geq I(Z; X_2|X_3) + I(Z; X_2|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \quad [H(Z|X_1) = 0 \text{ y Corolario 13}] \\ &\geq I(Z; Z|X_3) + I(Z; Z|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \quad [H(Z|X_2) = 0 \text{ y Corolario 13}] \\ &= H(Z|X_3) + H(Z|X_4) + I(X_3; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \\ &\geq I(Z; X_4|X_5) + H(Z|X_4) + I(Z; X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\ &\geq I(Z; Z|X_5) + I(Z; X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\ &= H(Z|X_5) + I(Z; X_5) \\ &= H(Z) \\ &= I(X_1; X_2). \end{aligned}$$

\square

Demostración desigualdad (5.2). Sea Z la información común de X_1 y X_2 , luego $H(Z|X_1) = H(Z|X_2) = 0$ y $H(Z) = I(X_1; X_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} &I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_2; X_5) \\ &\geq I(Z; Z|X_3) + I(Z; X_3|X_4) + I(Z; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \quad [\text{Corolario 13, 5 veces}] \\ &= H(Z|X_3) + I(Z; X_3|X_4) + I(Z; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \\ &\geq I(Z; Z|X_4) + I(Z; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\ &= H(Z|X_4) + I(Z; X_4|X_5) + I(Z; X_5) \\ &\geq I(Z; Z|X_5) + I(Z; X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\ &= H(Z|X_5) + I(Z; X_5) \\ &= H(Z) \\ &= I(X_1; X_2). \end{aligned}$$

En conclusión

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_1; X_4|X_5) + I(X_2; X_5).$$

\square

El mismo patrón permite probar desigualdades más generales: Si X_0 y Y_0 tienen información común ($H(Z|X_0) = H(Z|Y_0) = 0$ y $I(X_0; Y_0) = H(Z)$), entonces:

$$\begin{aligned} I(X_0; Y_0) &\leq I(X_0; Y_0|Y_1) \\ &\quad + I(X_0; Y_1|Y_2) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + I(X_0; Y_{n-1}|Y_n) \\ &\quad + I(Y_0; Y_n) \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} I(X_0; Y_0) &\leq 2^{n-1}I(X_0; Y_0|X_1) + 2^{n-1}I(X_0; Y_0|Y_1) \\ &\quad + 2^{n-2}I(X_1; Y_1|X_2) + 2^{n-2}I(X_1; Y_1|Y_2) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + I(X_{n-1}; Y_{n-1}|X_n) + I(X_{n-1}; Y_{n-1}|Y_n) \\ &\quad + I(X_n; Y_n) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Estas desigualdades pueden ser generalizadas; por ejemplo, en el lado derecho de (5.25) cualquier número de X_0 's puede ser reemplazado por Y_0 's y/o viceversa.

En efecto:

Teorema 19. *Supongamos que tenemos un árbol binario finito, donde la raíz es etiquetada con un término de la información de la forma $I(x; y)$, y cualquier otro nodo es etiquetado con un término de la forma $I(x; y|z)$. Estos términos pueden involucrar cualquier variable. Destacamos dos variables llamadas X_1, X_2 y combinaciones de ellas. Supongamos que en cada nodo del árbol, si su etiqueta es $I(x; y|z)$ (permitiendo que z , sea vacío en la raíz), se tiene que:*

(a) x es X_1 o X_2 y no hay hijo izquierdo, o

(b) existe un hijo izquierdo y este es etiquetado $I(r; s|x)$ para algunos r y s ;

y

(a') y es X_1 o X_2 y no hay hijo derecho, o

(b') existe un hijo derecho y este es etiquetado $I(r'; s'|y)$ para algunos r' y s' .

Entonces,

$$I(X_1; X_2) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en el árbol.} \tag{5.27}$$

Es una desigualdad lineal de rango (en efecto, siempre que X_1 y X_2 tengan una información común).

Demostración. Sea Z una nueva variable. Para la prueba, utilizaremos inducción en el árbol (de las hojas hacia la raíz), verificando que, para cada nodo n , si T_n es el subárbol con raíz en n , y el nodo etiquetado en n es $I(r; s|t)$, entonces tenemos como desigualdad tipo Shannon,

$$H(Z|t) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + j_n H(Z|X_1) + k_n H(Z|X_2) \tag{5.28}$$

para algunos $j_n, k_n \geq 0$.

Caso base: $I(r; s|t)$ es una hoja. Como $I(r; s|t)$ no tiene hijos, se sigue que $r = X_1$ o X_2 y $s = X_1$ o X_2 , sin pérdida de generalidad supongamos que $r = X_1$ y $s = X_2$, entonces,

$$\begin{aligned} & I(X_1; X_2|t) + H(Z|X_1) + H(Z|X_2) \\ & \geq I(Z; X_2|t) + H(Z|X_2) && \text{[Lema 6]} \\ & \geq I(Z; Z|t) && \text{[Lema 6]} \\ & = H(Z|t). \end{aligned}$$

Así,

$$H(Z|t) \leq I(X_1; X_2|t) + H(Z|X_1) + H(Z|X_2).$$

Paso inductivo: Supongamos que para el subárbol T_n , con raíz en n y etiqueta $I(r; s|t)$, vale que

$$H(Z|t) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + j_n H(Z|X_1) + k_n H(Z|X_2)$$

es una desigualdad tipo Shannon, pretendemos que una desigualdad similar sea cierta para el padre del nodo n .

Sea m el nodo correspondiente al padre de n , y T_m el subárbol con raíz en m , así, se deben analizar dos opciones.

- i. $I(r; s|t)$ no tiene hermano: Podemos suponer que el nodo n es el hijo izquierdo del nodo m , por lo tanto, el nodo m debe estar etiquetado en la forma $I(t; X_1|l)$. Veamos que

$$H(Z|l) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + j'_n H(Z|X_1) + k'_n H(Z|X_2)$$

es una desigualdad tipo Shannon, para algunos j'_n, k'_n enteros no negativos.

Como,

$$\begin{aligned} & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m = \\ & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + I(t; X_1|l), \end{aligned}$$

además, tomando $j'_n = j_n + 1$ y $k'_n = k_n$, tenemos que,

$$\begin{aligned} & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + j'_n H(Z|X_1) + k'_n H(Z|X_2) \\ & \geq H(Z|t) + I(t; X_1|l) + H(Z|X_1) && \text{[Hipótesis de Inducción]} \\ & \geq I(Z; X_1|l) + H(Z|X_1) && \text{[Lema 6]} \\ & \geq I(Z; Z|l) && \text{[Lema 6]} \\ & = H(Z|l) \end{aligned}$$

- ii. $I(r; s|t)$ tiene hermano: Consideremos al hermano del nodo n , en un nodo n' y cuya etiqueta sea $I(r'; s'|t')$. En el nodo m se encuentra el padre de los nodos n y n' , con etiqueta $I(t; t'|l)$. Además, consideremos el subárbol con raíz en m , T_m .

La hipótesis de inducción nos dice ahora que, las desigualdades:

$$\begin{aligned} & H(Z|t) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + j_n H(Z|X_1) + k_n H(Z|X_2) \\ & H(Z|t') \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_{n'} + j'_n H(Z|X_1) + k'_n H(Z|X_2) \end{aligned}$$

son desigualdades tipo Shannon, para algunos j_n, k_n, j'_n, k'_n , enteros no negativos.

Por lo tanto, debemos verificar que,

$$H(Z|l) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + J_m H(Z|X_1) + K_m H(Z|X_2)$$

en una desigualdad tipo Shannon, para algunos J_m, K_m enteros no negativos. Consideremos $J_n = j_n + j'_n$ y $K_n = k_n + k'_n$, entonces,

$$\begin{aligned}
 & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + J_m H(Z|X_1) + K_m H(Z|X_2) \\
 & \geq H(Z|t) + H(Z|t') + I(t; t'|l) && \text{[Hipótesis de Inducción]} \\
 & \geq I(Z; t'|l) + H(Z|t') && \text{[Lema 6]} \\
 & \geq I(Z; Z|l) && \text{[Lema 6]} \\
 & = H(Z|l)
 \end{aligned}$$

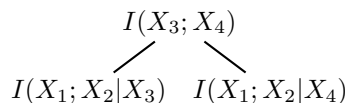
De todo lo anterior, se sigue (5.28). Adicionalmente, si Z es la información común de X_1 y X_2 , y, el nodo n es la raíz del árbol, de (5.28), concluimos que,

$$I(X_1; X_2) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en el árbol,}$$

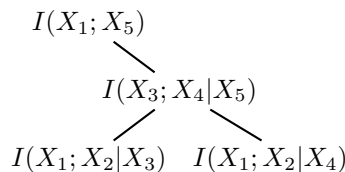
es una desigualdad rango lineal. □

Ahora, podemos obtener la *desigualdad de Ingleton*, las desigualdades (5.1) y (5.2) del **Teorema 19**, aplicándolo a los siguientes árboles.

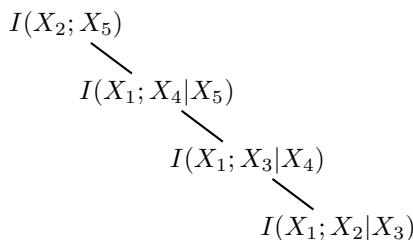
Ingleton



(5.1):



(5.2):



Un árbol “lineal” como el último nos permite verificar la desigualdad (5.25), mientras que un árbol binario completo de altura n nos proporciona (5.26). A continuación, presentamos otra versión del **Teorema 19**

Teorema 20. Sea $I(x_1; y_1|w_1), I(x_2; y_2|w_2), \dots, I(x_m; y_m|w_m)$ una lista de términos de la información donde cada x_i, y_i, w_i es elegido de la lista $X_1, X_2, r_1, r_2, \dots, r_k$ con excepción de w_1 , que es vacío (e.d, el primer término de la información es $I(x_1; y_1)$). Supongamos que cada variable r_j , es

usada exactamente dos veces, una como w_i y otra como x_i o y_i ; mientras que las variables X_1 y X_2 pueden ser usadas tantas veces como se desee, siendo x_i o y_i , pero no se usan como w_i . Entonces,

$$I(X_1; X_2) \leq \sum_{i=1}^m I(x_i; y_i | w_i)$$

es una desigualdad rango lineal (en efecto, esto es verdadero cuando X_1 y X_2 tienen una información común).

Demostración. Se buscará construir un árbol para aplicar el **Teorema 19**. Cada nodo será etiquetado con un término de la forma $I(x_i; y_i | w_i)$. La raíz es etiquetada como $I(x_1; y_1)$. Si tenemos un nodo etiquetado por el término $I(x_i; y_i | w_i)$, donde x_i no es X_1 o X_2 , creamos un hijo izquierdo para este nodo y lo etiquetamos en la forma $I(x_j; y_j | w_j)$, para el único j tal que $w_j = x_i$. Similarmente, si y_i no es X_1 o X_2 , creamos un hijo derecho para este nodo y lo etiquetamos en la forma $I(x_j; y_j | w_j)$, para el único j tal que $w_j = y_i$. Es fácil ver que ningún término $I(x_i; y_i | w_i)$ aparecerá más de una vez en esta construcción. Por lo tanto, la construcción está terminada, y la suma de las etiquetadas utilizadas es menor o igual a la $\sum_{i=1}^m I(x_i; y_i | w_i)$ (no importa si algunos de los términos $I(x_j; y_j | w_j)$ no son usados como etiquetas). Ahora, del **Teorema 19** obtenemos lo deseado. \square

El **Teorema 20** da la *desigualdad de Ingleton* y las desigualdades (5.1) y (5.2) de manera directa. Este teorema también ofrece una prueba sencilla de otras desigualdades de la lista de la sección anterior, una vez éstas se escriben en una forma equivalente utilizando ecuaciones del tipo $I(X_1; X_2 | X_3) = I(X_1; X_2, X_3 | X_3)$:

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2 | X_4) + I(X_2; X_3, X_5 | X_3) + I(X_1; X_4 | X_3, X_5) \quad (5.3d)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2 | X_4, X_5) + I(X_2; X_3, X_4 | X_3) + I(X_1; X_4, X_5 | X_3, X_4) \quad (5.4d)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4 | X_3) + I(X_1; X_4, X_5 | X_4) + I(X_1; X_2 | X_3, X_5) + I(X_2; X_3, X_5 | X_4, X_5) \quad (5.5d)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3 | X_4) + I(X_1; X_3, X_5 | X_3) + I(X_2; X_4) + I(X_2; X_4, X_5 | X_3, X_5) + I(X_1; X_2 | X_4, X_5) \quad (5.7d)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4) + I(X_1; X_3, X_5) + I(X_1; X_2, X_4 | X_4, X_5) + I(X_2, X_3; X_4, X_5 | X_3, X_5) \quad (5.11d)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2, X_4 | X_4) + I(X_1; X_4 | X_5) + I(X_2, X_3; X_5 | X_3) + I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_5) + I(X_2, X_3; X_2, X_5 | X_2, X_4) \quad (5.12d)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_2, X_4 | X_4) + I(X_1; X_3, X_5) + I(X_2, X_5; X_4 | X_3, X_5) + I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_5) + I(X_3; X_2, X_5 | X_2, X_4) \quad (5.13d)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2, X_4; X_4, X_5 | X_4) + I(X_1; X_2, X_3 | X_3, X_5) + I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4) + I(X_1; X_3, X_5 | X_4, X_5) \quad (5.14d)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2, X_4; X_5 | X_4) + I(X_1; X_3, X_5 | X_5) + I(X_1; X_2, X_3 | X_3, X_4) + I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4) + I(X_2, X_3; X_3, X_4 | X_3, X_5) \quad (5.15d)$$

$$\begin{aligned}
 I(X_1; X_2, X_3) &\leq I(X_1; X_2, X_3 | X_3, X_4) + I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4) \\
 &\quad + I(X_2, X_3; X_4, X_5 | X_5) + I(X_2, X_4; X_3, X_4 | X_4, X_5) \\
 &\quad + I(X_1; X_5)
 \end{aligned} \tag{5.16d}$$

$$\begin{aligned}
 I(X_1, X_2; X_3, X_4) &\leq I(X_1, X_2; X_4) + I(X_1, X_2; X_3, X_4 | X_2, X_3) \\
 &\quad + I(X_1, X_2; X_3, X_4 | X_1, X_3) + I(X_1, X_2; X_2, X_3 | X_2, X_5) \\
 &\quad + I(X_1, X_2; X_1, X_3 | X_1, X_5) + I(X_1, X_5; X_2, X_5 | X_4, X_5) \\
 &\quad + I(X_3, X_5; X_4, X_5 | X_4)
 \end{aligned} \tag{5.17d}$$

Demostración desigualdad (5.3d). Consideremos la lista de términos de información: $I(X_1; X_3)$, $I(X_1; X_2 | X_4)$, $I(X_2; X_3, X_5 | X_3)$, $I(X_1; X_4 | X_3, X_5)$, entonces del **Teorema 20** concluimos que

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_3) + I(X_1; X_2 | X_4) + I(X_2; X_3, X_5 | X_3) + I(X_1; X_4 | X_3, X_5).$$

□

Demostración desigualdad (5.4d). Se sigue de la lista de términos de la información, $I(X_1; X_3)$, $I(X_1; X_2 | X_4, X_5)$, $I(X_2; X_3, X_4 | X_3)$, $I(X_1; X_4, X_5 | X_3, X_4)$, y del **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.5d). Se sigue de la lista de términos de la información, $I(X_1; X_3)$, $I(X_2; X_4 | X_3)$, $I(X_1; X_4, X_5 | X_4)$, $I(X_1; X_2 | X_3, X_5)$, $I(X_2; X_3, X_5 | X_4, X_5)$, y del **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.7d). Se sigue de la lista de términos de la información $I(X_1; X_3 | X_4)$, $I(X_1; X_3, X_5 | X_3)$, $I(X_2; X_4)$, $I(X_2; X_4, X_5 | X_3, X_5)$, $I(X_1; X_2 | X_4, X_5)$ y del **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.11d). Se sigue de la lista de términos de información $I(X_1; X_3, X_5)$, $I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4)$, $I(X_1; X_2, X_4 | X_4, X_5)$, $I(X_2, X_3; X_4, X_5 | X_3, X_5)$, y del **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.12d). Se sigue de la lista de términos de información $I(X_1; X_3)$, $I(X_1; X_2, X_4 | X_4)$, $I(X_1; X_4 | X_5)$, $I(X_2, X_3; X_5 | X_3)$, $I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_5)$, $I(X_2, X_3; X_2, X_5 | X_2, X_4)$ y del **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.13d). Se sigue de la lista de términos de información $I(X_1; X_3, X_5)$, $I(X_1; X_2, X_4 | X_4)$, $I(X_2, X_3; X_4 | X_3, X_5)$, $I(X_1; X_2, X_3 | X_4, X_5)$, $I(X_3; X_2, X_5 | X_2, X_5)$, y aplicando el **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.14d). Se sigue de la lista de términos de información $I(X_1; X_4)$, $I(X_2, X_4; X_4, X_5 | X_4)$, $I(X_1; X_2, X_3 | X_3, X_5)$, $I(X_1; X_2, X_3 | X_2, X_4)$, $I(X_1; X_3, X_5 | X_4, X_5)$, junto con el **Teorema 20**.

□

Demostración desigualdad (5.15d). Se sigue de la lista de términos $I(X_1; X_4)$, $I(X_2, X_4; X_5|X_4)$, $I(X_1; X_3, X_5|X_5)$, $I(X_1; X_2, X_3|X_3, X_4)$, $I(X_1; X_2, X_3|X_2, X_4)$, $I(X_2, X_3; X_3, X_4|X_3, X_5)$, junto con el **Teorema 20**. □

Demostración desigualdad (5.16d). Se sigue de la lista de términos de información $I(X_1; X_5)$, $I(X_1; X_2, X_3|X_3, X_4)$, $I(X_1; X_2, X_3|X_2, X_4)$, $I(X_2, X_3; X_4, X_5|X_5)$, $I(X_2, X_4; X_3, X_4|X_4, X_5)$, y del **Teorema 20**. □

Demostración desigualdad (5.17d). Se sigue de la lista $I(X_1, X_2; X_4)$, $I(X_1, X_2; X_3, X_4|X_2, X_3)$, $I(X_1, X_2; X_3, X_4|X_1, X_3)$, $I(X_1, X_2; X_2, X_3|X_2, X_5)$, $I(X_1, X_2; X_1, X_3|X_1, X_5)$, $I(X_1, X_5; X_2, X_5|X_4, X_5)$, $I(X_3, X_4; X_4, X_5|X_4)$, de términos de información, y el **Teorema 20**. □

Ahora, generalizamos el **Teorema 19** a fin de producir desigualdades adicionales. Una generalización sencilla, pero aparentemente inútil, es reemplazar el árbol binario por un bosque binario (e.d. una unión finita y disyunta de árboles binarios). Entonces, las hipótesis del **Teorema 19** se pueden expresarse como antes (con la raíz reemplazada por cada raíz) y la conclusión es la misma, excepto que la desigualdad se convierte en

$$mI(X_1; X_2) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en los árboles}, \quad (5.29)$$

donde m es el número de árboles (equivalentemente el número de nodos raíces). Esta modificación sola es inútil, porque la desigualdad resultante es justamente una suma de desigualdades obtenidas gracias al **Teorema 19**, una por cada árbol. Pero será útil cuando la combinemos con otra modificación.

Lema 7. *La desigualdad*

$$H(Z|R) + I(R; S|T) \geq I(Z; S|T) + H(Z|R, S, T),$$

es una desigualdad tipo Shannon.

Demostración. Como

1. $H(Z|R) \geq H(Z|R, T)$ y $H(S|Z, T) \geq H(S|R, Z, T)$
2. $H(Z|R, S, T) + I(S; Z|R, T) + H(S|Z, T) = H(Z|R, T) + H(S|Z, T)$

Entonces,

$$\begin{aligned} H(Z|R) + H(S|Z, T) &\geq H(Z|R, T) + H(S|Z, T) \\ &= H(Z|R, S, T) + I(S; Z|R, T) + H(S|Z, T) \\ &\geq H(Z|R, S, T) + I(S; Z|R, T) + H(S|R, Z, T) \\ &= H(Z|R, S, T) + H(S|R, T). \end{aligned}$$

De donde $H(Z|R) - H(S|R, T) \geq H(Z|R, S, T) - H(S|Z, T)$ y adicionando a ambos lados la expresión $H(S|T)$ obtenemos el resultado. □

Utilizando este lema dos veces y notando que, $I(Z; Z|T) = H(Z|T)$ y $H(Z|Z, S, T) = 0$, obtenemos

$$H(Z|R) + H(Z|S) + I(R; S|T) \geq H(Z|T) + H(Z|R, S, T). \quad (5.30)$$

Y en caso que T sea la variable nula,

$$H(Z|R) + H(Z|S) + I(R; S) \geq H(Z) + H(Z|R, S). \quad (5.31)$$

Esto nos proporciona opciones adicionales, en la prueba de las desigualdades de la sección anterior, como queda en evidencia a continuación.

Demostración desigualdad (5.8). Sea Z la información común de X_1 y X_2 , entonces

$$\begin{aligned} & I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_2|X_5) + I(X_3; X_4) + I(X_3, X_4; X_5) \\ & \geq I(Z; Z|X_3) + I(Z; Z|X_4) + I(Z; Z|X_5) + I(X_3; X_4) + I(X_3, X_4; X_5) \quad [\text{Del Corolario 13}] \\ & = H(Z|X_3) + H(Z|X_4) + H(Z|X_5) + I(X_3; X_4) + I(X_3, X_4; X_5) \\ & \geq H(Z) + H(Z|X_3, X_4) + H(Z|X_5) + I(X_3, X_4; X_5) \quad [\text{De 5.31}] \\ & \geq H(Z) + H(Z) + H(Z|X_3, X_4, X_5) \quad [\text{De 5.31}] \\ & \geq 2H(Z) \\ & = 2I(X_1; X_2). \end{aligned}$$

□

Esta prueba automáticamente se generaliza para obtener: Si X_1 y X_2 , tienen información común, entonces:

$$\begin{aligned} (n-1)I(X_1; X_2) & \leq I(X_1; X_2|C_1) + I(X_1; X_2|C_2) + \cdots + I(X_1; X_2|C_n) \\ & \quad + [I(C_1; C_2) + I(C_1, C_2; C_3) + \cdots + I(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}; C_n)]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

La expresión en paréntesis es igual a:

$$H(C_1) + H(C_2) + \cdots + H(C_n) - H(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Se puede utilizar el **Lema 7**, para producir una extensión del **Teorema 19** en la que una opción adicional está disponible: en lugar de tener un hijo izquierdo, un nodo puede tener un puntero apuntando a la izquierda a algún otro nodo en cualquier parte del árbol o bosque, y de manera similar en el lado derecho.

Teorema 21. *Supongamos que tenemos un bosque finito donde cada nodo es etiquetado con un término de la forma $I(x; y|z)$, donde z es vacío en cada nodo raíz (e.d, las raíces etiquetadas son de la forma $I(x; y)$). Estos términos pueden involucrar cualquier variable. Destacamos dos variables o combinación de ellas, llamadas X_1 y X_2 . Supongamos que, para cada nodo en el bosque, si su etiqueta es $I(x; y|z)$ (con z posiblemente vacío), entonces,*

- (a) x es X_1 o X_2 y no hay hijo izquierdo, o
- (b) existe un hijo izquierdo y éste es etiquetado como, $I(r; s|x)$ para algunos r y s , o
- (c) existe un puntero izquierdo en éste nodo apuntando a algún otro nodo, cuya etiqueta es $I(r'; s'|t')$ donde $x = (r', s', t')$;

y

(a') y es X_1 o X_2 y no hay hijo derecho, o

(b') existe un hijo derecho y éste es etiquetado $I(r'; s'|y)$ para algunos r' y s' , o

(c') existe un puntero derecho en éste nodo apuntando a algún otro nodo, cuya etiqueta es $I(r'; s'|t')$ donde $y = (r', s', t')$;

Supongamos, además, que ningún nodo es el destino de más de un puntero. Sea m el número de árboles en el bosque (equivalentemente, el número de nodos raíces). Entonces,

$$mI(X_1; X_2) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en los árboles}, \quad (5.33)$$

es una desigualdad rango lineal (en efecto, esto es verdadero cuando X_1 y X_2 tienen una información común).

Demostración. Como en el **Teorema 19**, sea Z una nueva variable. Para cualquier puntero izquierdo o derecho, si $I(r; s|t)$ es la etiqueta en el destino del puntero, decimos que *el término asociado con el puntero* es $H(Z|r, s, t)$. Probaremos por inducción sobre el bosque (desde las hojas hacia las raíces) que, para cada nodo n , si T_n es el subárbol con raíz en n , y la etiqueta en el nodo n es $I(r; s|t)$, entonces tenemos como desigualdad tipo Shannon

$$H(Z|t) \leq \text{suma de los nodos etiquetados en } T_n + \text{Out}_n - \text{In}_n + j_n H(Z|A) + k_n H(Z|B) \quad (5.34)$$

para algunos enteros positivos j_n, k_n , donde, Out_n es la suma de los *términos asociados* con punteros de nodos desde T_n , y, In_n es la suma de *términos asociados* con punteros a nodos en T_n (Un puntero cuyo origen y destino están ambos en T_n contribuye a ambas sumas, pero estas contribuciones se anulan mutuamente).

Caso base: $I(r; s|t)$ es una hoja. Como $I(r; s|t)$ no tiene hijos, se sigue que $r = X_1$ o X_2 y $s = X_1$ o X_2 , sin pérdida de generalidad supongamos que $r = X_1$ y $s = X_2$, entonces, se tienen dos opciones

- Al nodo n , no le llega puntero: $\text{Out}_n = \text{In}_n = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2|t) + H(Z|X_1) + H(Z|X_2) & \\ \geq I(Z; X_2|t) + H(Z|X_2) & \quad \text{[Lema 6]} \\ \geq I(Z; Z|t) & \quad \text{[Lema 6]} \\ = H(Z|t). & \end{aligned}$$

- Al nodo n , le llega un puntero: $\text{Out}_n = 0$ e $\text{In}_n = H(Z|X_1, X_2, t)$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} I(X_1; X_2|t) - H(Z|X_1, X_2, t) + H(Z|X_1) + H(Z|X_2) & \\ \geq H(Z|t) + H(Z|X_1, X_2, t) - H(Z|X_1, X_2, t) & \quad \text{[De (5.30)]} \\ = H(Z|t). & \end{aligned}$$

En cualquier caso, se sigue que,

$$H(Z|t) \leq I(X_1; X_2|t) + \text{Out}_n - \text{In}_n + H(Z|X_1) + H(Z|X_2).$$

Paso inductivo: Supongamos que para el subárbol T_n , con raíz en n y etiqueta $I(r; s|t)$, vale que

$$H(Z|t) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + \text{Out}_n - \text{In}_n + j_n H(Z|X_1) + k_n H(Z|X_2)$$

es una desigualdad tipo Shannon, para algunos j_n, k_n , enteros positivos. Pretendemos que una desigualdad similar sea cierta para el padre del nodo n .

Sea m el nodo correspondiente al padre de n , y T_m el subárbol con raíz en m ; se deben analizar dos casos.

- i. $I(r; s|t)$ no tiene hermano. Podemos suponer que el nodo n es el hijo izquierdo del nodo m , por lo tanto el nodo m debe estar etiquetado en la forma $I(t; c|l)$. Veamos que,

$$H(Z|l) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2)$$

es una desigualdad tipo Shannon, para algunos j_m, k_m enteros no negativos.

Dado que $I(r; s|t)$ no tiene hermano, se hace necesario contemplar las siguientes dos opciones para el nodo m .

- a. El nodo m no tiene puntero derecho.

Como el nodo n no tiene hermano y el nodo m no tiene puntero derecho, $c = X_1$ o X_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = X_1$. Como en el *caso base*, es necesario considerar dos situaciones:

- Al nodo m , no le llega puntero. Tomemos $j_m = j_n + 1$, $k_m = k_n$, entonces,

$$\begin{aligned} & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\ & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\ & \geq H(Z|t) + I(t; X_1|l) + H(Z|X_1) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\ & \geq I(Z; t|l) + H(Z|t) \quad \text{[Lema 6]} \\ & \geq I(Z; Z|l) \quad \text{[Lema 6]} \\ & = H(Z|l) \end{aligned}$$

- Al nodo m , le llega un puntero. Tomemos $j_m = j_n + 1$, $k_m = k_n$, entonces,

$$\begin{aligned} & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\ & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\ & \geq H(Z|t) + H(Z|X_1) - H(Z|t, X_1, l) + I(t; X_1|l) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\ & \geq H(Z|l) + H(Z|t, X_1, l) - H(Z|t, X_1) \quad \text{[De (5.30)]} \\ & = H(Z|l). \end{aligned}$$

- b. El nodo m tiene puntero derecho.

Como $I(t; c|l)$ tiene puntero derecho, en Out_m un sumando es precisamente $H(Z|c)$; se hace necesario al igual que antes, considerar los siguientes casos.

- Al nodo m , no le llega puntero. Tomemos $j_m = j_n$, $k_m = k_n$, entonces,

$$\begin{aligned} & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\ & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\ & \geq H(Z|t) + I(t; c|l) + H(Z|c) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\ & \geq I(Z; c|l) + H(Z|c) \quad \text{[Lema 6]} \\ & \geq I(Z; Z|l) \quad \text{[Lema 6]} \\ & = H(Z|l) \end{aligned}$$

- Al nodo m , le llega un puntero. Tomemos $j_m = j_n$, $k_m = k_n$, entonces,

$$\begin{aligned}
 & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\
 & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\
 & \geq H(Z|t) + I(t; c|l) + H(Z|c) - H(Z|t, c, l) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\
 & \geq H(Z|l) + H(Z|t, c, l) - H(Z|t, c, l) \quad \text{[De (5.30)]} \\
 & = H(Z|l).
 \end{aligned}$$

En cualquier caso, vale que,

$$H(Z|l) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2)$$

es una desigualdad tipo Shannon.

- II. $I(r; s|t)$ tiene hermano. Consideremos al hermano del nodo n , en un nodo n' y cuya etiqueta sea $I(r'; s'|t')$. En el nodo m se encuentra el padre de los nodos n y n' , con etiqueta $I(t; t'|l)$. Además, consideremos el subárbol con raíz en m , T_m . La hipótesis de inducción nos dice ahora que, las desigualdades,

$$\begin{aligned}
 H(Z|t) & \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_n + \text{Out}_n - \text{In}_n + j_n H(Z|X_1) \\
 & \quad + k_n H(Z|X_2), \\
 H(Z|t') & \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_{n'} + \text{Out}_{n'} - \text{In}_{n'} + j_{n'} H(Z|X_1) \\
 & \quad + k_{n'} H(Z|X_2),
 \end{aligned}$$

son tipo Shannon, para algunos $j_n, k_n, j_{n'}, k_{n'}$, enteros no negativos. Por lo tanto, debemos verificar que,

$$H(Z|l) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2)$$

en una desigualdad tipo Shannon, para algunos j_m, k_m enteros no negativos.

Es necesario analizar las siguientes dos situaciones:

- Al nodo m , no le llega puntero. Tomemos $j_m = j_n + j_{n'}$, $k_m = k_n + k_{n'}$, entonces,

$$\begin{aligned}
 & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\
 & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\
 & \geq H(Z|t) + H(Z|t') + I(t; t'|l) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\
 & \geq I(Z; t|l) + H(Z|t) \quad \text{[Lema 6]} \\
 & \geq I(Z; Z|l) \quad \text{[Lema 6]} \\
 & = H(Z|l)
 \end{aligned}$$

- Al nodo m , le llega un puntero. Tomemos $j_m = j_n + j_{n'}$, $k_m = k_n + k_{n'}$, entonces,

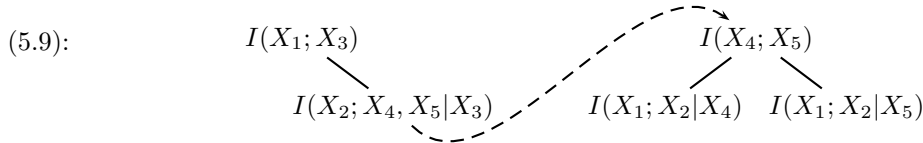
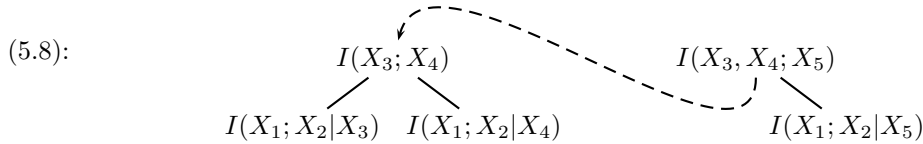
$$\begin{aligned}
 & \text{suma de todos los nodos etiquetados en } T_m \\
 & + \text{Out}_m - \text{In}_m + j_m H(Z|X_1) + k_m H(Z|X_2) \\
 & \geq H(Z|t) + H(Z|t') + I(t; t'|l) - H(Z|t, t', l) \quad \text{[Hipótesis de Inducción]} \\
 & \geq H(Z|l) + H(Z|t, t', l) - H(Z|t, t', l) \quad \text{[De (5.30)]} \\
 & = H(Z|l)
 \end{aligned}$$

Como (5.34) ya fue verificada, la aplicamos a todos los nodos raíces, además de sumar todas las desigualdades resultantes para obtener:

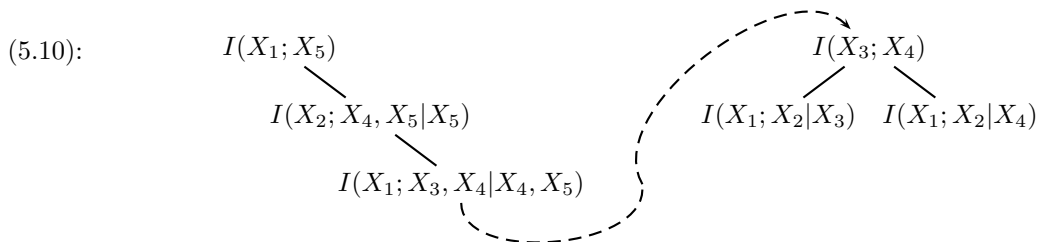
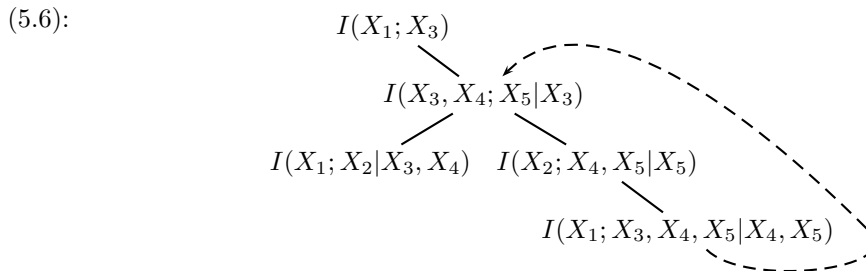
$$mH(Z) \leq \text{suma de todos los nodos etiquetados en los árboles} + jH(Z|X_1) + kH(Z|X_2) \quad (5.35)$$

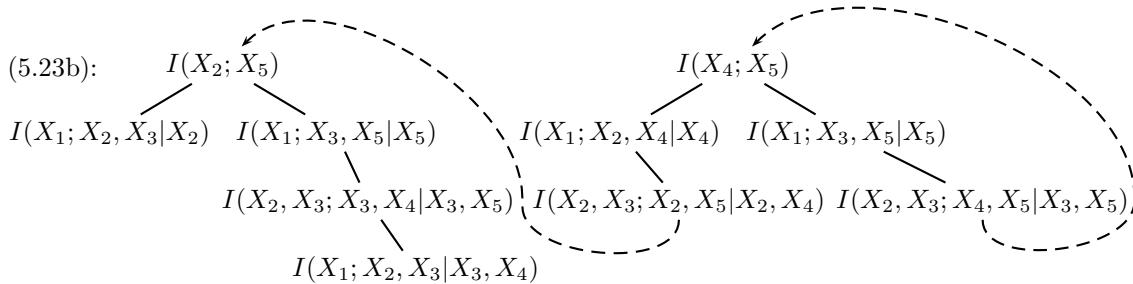
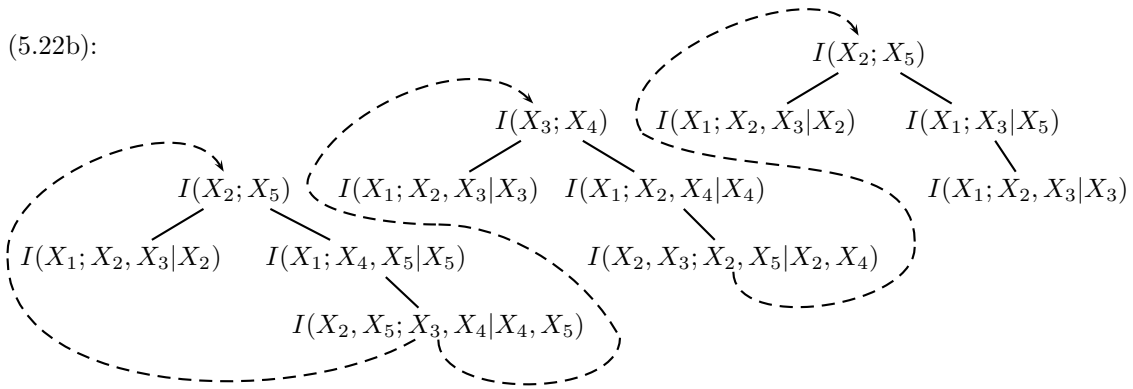
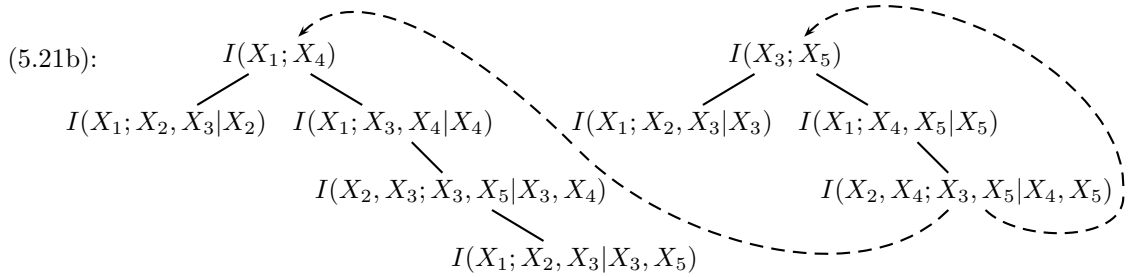
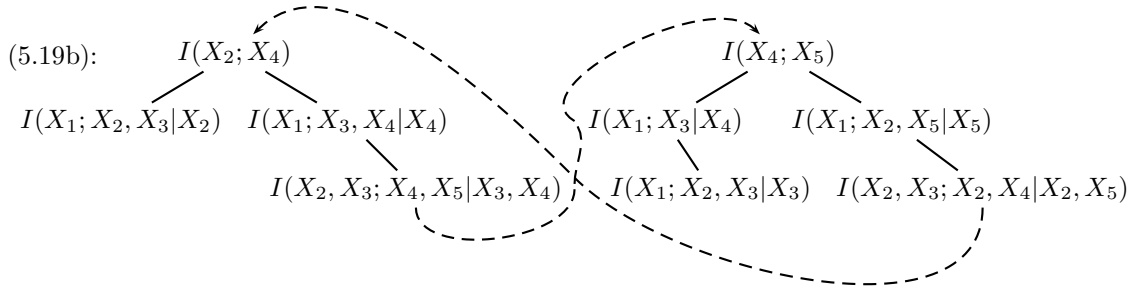
para algunos j, k , enteros positivos; las sumas de punteros se anulan porque cada puntero contribuye a una suma en Out y a una suma en In. Aplicando (5.35) cuando Z es la información común de X_1 y X_2 obtenemos el resultado deseado. □

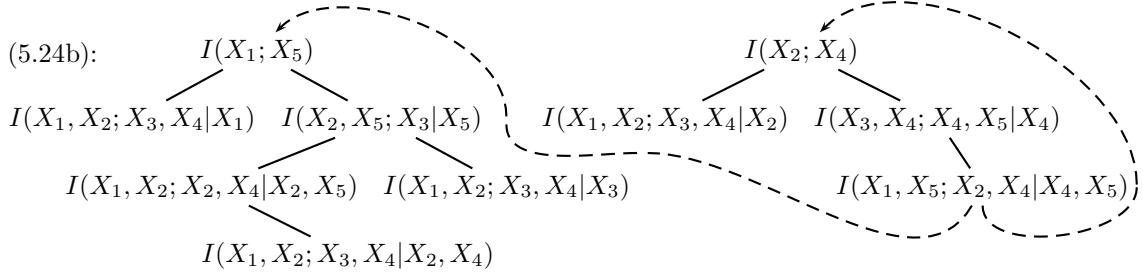
El **Teorema 21** puede ser utilizado para demostrar las desigualdades (5.8) y (5.9), mediante los siguientes diagramas (los punteros se representan como curvas discontinuas).



Y mediante el uso de formas equivalentes, como se hizo en las desigualdades (5.3d)-(5.17d), es posible utilizar el **Teorema 21** para demostrar las desigualdades (5.6), (5.10), (5.19b) y (5.20b) - (5.23b) a través de los siguientes diagramas:







Finalmente, presentaremos dos pruebas explícitas, de las desigualdades que resta por demostrar.

Demostración desigualdad (5.18). Sea Z la información común de X_1 y X_2 , y Y la información común de X_1 y X_3 . $H(Y, Z|X_1) = 0$ pues,

$$0 \leq I(Y; Z|X_1) = H(X_1, Y) + H(Z, X_1) - H(X_1, Y, Z) - H(X_1) = -[H(Y, Z, X_1) - H(X_1)] \leq 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & I(X_2; X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_1; X_3|X_4) + I(X_2; X_4|X_5) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_1; X_5) \\
 & \geq I(Z; Y) + I(Y, Z; Z|X_4) + I(Y, Z; Y|X_4) + I(Z; X_4|X_5) \\
 & + I(Y; X_4|X_5) + I(Y, Z; X_5) \quad [H(Y, Z|X_1) = 0 \text{ y Corolario 13}] \\
 & = I(Z; Y) + H(Z|X_4) + H(Y|X_4) + I(Z; X_4|X_5) + I(Y; X_4|X_5) + I(Y, Z; X_5) \\
 & \geq I(Z; Y) + I(Y, Z; X_5) + H(Y|X_4) + I(Y; X_4|X_5) + I(Z; Z|X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\
 & \geq I(Z; Y) + I(Z, Z|X_5) + I(Y, Z; X_5) + I(Y; Y|X_5) \quad [\text{Lema 6}] \\
 & = I(Z; Y) + H(Z|X_5) + H(Y|X_5) + I(Y, Z; X_5) \\
 & \geq I(Z; Y) + I(Y, Z; X_5) + H(Y, Z|X_5) \\
 & = I(Z; Y) + H(Y, Z) \\
 & = H(Z) + H(Y) \\
 & = I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3).
 \end{aligned}$$

□

Demostración desigualdad (5.20). Sea Z la información común de X_1 y X_2 , y Y la información común de X_1 y X_3 ; vemos que $H(Y, Z|X_1) = 0$ y $H(X_3, Y|X_3) = H(X_3|X_3, Y) = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & I(X_2; X_3) + I(X_2; X_4) + I(X_1; X_3|X_4) \\
 & + I(X_1; X_2|X_5) + I(X_1; X_5|X_2) + I(X_3; X_4|X_5) + I(X_2; X_5|X_3, X_4) \\
 & \geq I(X_2; Y) + I(Z; X_4) + I(Y, Z; X_3, Y|X_4) \\
 & + I(Z; Z|X_5) + I(Y; X_5|X_2) + I(Y; X_4|X_5) + I(Z; X_5|X_3, X_4) \quad [\text{Corolario 13}] \\
 & = I(X_2; Y) + I(Z; X_4) + I(Y, Z; X_3, Y|X_4) \\
 & + I(Z; Z|X_5) + I(Y; X_5|X_2) + I(Y; X_4|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4) \\
 & = I(X_2, X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Y, Z; X_3, Y|X_4) \\
 & + I(Z; Z|X_5) + I(Y; X_4|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq I(X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Y, Z; X_3, Y|X_4) + I(Z; Z|X_5) + I(Y; X_4|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4) \\
 &= I(X_4, X_5; |Y) + I(Z; X_4) + I(Y, Z; X_3, Y|X_4) + I(Z; Z|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Z; X_3, Y|X_4) + I(Y; X_3, Y|X_4, Z) \\
 &\quad + I(Z; Z|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Z; X_3, Y|X_4) + H(Y|X_4, Z) + H(Z|X_5) + I(Z; X_5|X_3, Y, X_4) \\
 &\geq I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Z; X_3, X_5, Y|X_4) + H(Y|X_4, Z) + H(Z|X_5) \\
 &\geq I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4) + I(Z; X_5, Y|X_4) + H(Y|X_4, Z) + H(Z|X_5) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4, X_5, Y) + H(Y|X_4, Z) + H(Z|X_5) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4, X_5) + I(Z; Y|X_4, X_5) + H(Y|X_4, Z) + H(Z|X_5) \\
 &\geq I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4, X_5) + I(Z; Y|X_4, X_5) + H(Y|X_4, X_5, Z) + H(Z|X_4, X_5) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + I(Z; X_4, X_5) + H(Y|X_4, X_5) + H(Z|X_4, X_5) \\
 &= I(X_4, X_5; Y) + H(Z) + H(Y|X_4, X_5) \\
 &= H(Z) + H(Y) \\
 &= I(X_1; X_2) + I(X_1; X_3).
 \end{aligned}$$

□

5.3. Completitud

Una lista completa y no redundante de las desigualdades rango lineales en 5 variables consiste de:

a. Las desigualdades elementales:

$$\begin{aligned}
 H(X_i|X_{[5]-\{i\}}) &\geq 0, i \in [5], \\
 I(X_i; X_j|X_K) &\geq 0, \text{ donde } i \neq j \text{ y } K \subset [5] \setminus \{i, j\}.
 \end{aligned}$$

b. Las siguientes casos de la *desigualdad de Ingleton*:

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4) + I(X_3; X_5) \quad (5.36)$$

$$I(X_1; X_2) \leq I(X_1; X_2|X_3) + I(X_1; X_2|X_4, X_5) + I(X_3; X_4, X_5) \quad (5.37)$$

$$I(X_1; X_2, X_3) \leq I(X_1; X_2, X_3|X_4) + I(X_1; X_2, X_3|X_5) + I(X_4; X_5) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
 I(X_1, X_2; X_1, X_3) &\leq I(X_1, X_2; X_1, X_3|X_1, X_4) + I(X_1, X_2; X_1, X_3|X_1, X_5) \\
 &\quad + I(X_1, X_4; X_1, X_5)
 \end{aligned} \quad (5.39)$$

y las obtenidas de éstas, por permutación de las variables X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 (en [15], se da una prueba de que éstas desigualdades implican todos los casos de la *desigualdad de Ingleton*).

c. Las desigualdades (5.1) - (5.24) y sus formas permutando variables.

Para verificar la completitud de la lista, consideremos el espacio $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([5]) \setminus \{\emptyset\}}$ (el cual se puede identificar con \mathbb{R}^{31}), con coordenadas etiquetadas en la forma:

$$\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \dots, \{1,2,3,4,5\}.$$

Una vez escribimos las listas de desigualdades, en términos de la entropía básica (no olvide que $H(X_I)$, $I \subseteq [5]$ tiene dos interpretaciones)

$$H(X_1), H(X_2), H(X_1, X_2), H(X_3), H(X_1, X_3), H(X_2, X_3), \dots, H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), \quad (5.40)$$

cada desigualdad define un semi-espacio de $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([5]) \setminus \{\emptyset\}}$; la intersección de todas las desigualdades define un cono convexo poliédrico, que puede ser descrito como la envolvente cónica de sus rayos extremos. Si todos los rayos extremos contienen puntos que son funciones rango lineales, entonces no pueden existir desigualdades rango lineales, adicionales, que reduzcan más el cono convexo poliédrico, y la lista estará completa.

Existen 7943 rayos extremos en \mathbb{R}^{31} , los cuales están determinados por las tres listas de desigualdades (1905 desigualdades). Si consideramos que dos rayos son esencialmente el mismo cuando uno puede ser obtenido del otro mediante la permutación de las cinco variables, entonces existen 162 rayos extremos diferentes. Cada vector (que genera el rayo extremo), es una función rango lineal sobre el cuerpo de los reales; en efecto, salvo un múltiplo escalar, esta representación puede ser hecha utilizando vectores con entradas enteras, las cuales representan el vector sobre cualquier cuerpo (finito o infinito). Por ejemplo, consideremos el rayo extremo dado por el vector

$$1121223 \quad 12232333 \quad 23332333 \quad 23332333$$

al cual podemos asociarle la colección de conjuntos de vectores $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, donde,

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Claramente h_X es igual al vector anterior.

Los Valores $H(X_I)$ con $I \subseteq [5]$, son fácilmente calculables sobre el cuerpo de los reales (por ejemplo como el rango de las matrices asociadas). Para verificar que la misma dimensión puede ser obtenido sobre cualquier cuerpo, sólo hay que observar, que en cada caso donde el rango de la matriz sea k , existe una submatriz $k \times k$ cuyo determinante es ± 1 , así, las k filas seleccionadas seguirán siendo independientes, incluso después de haber sido reducidas módulo cualquier primo.

Todos los vectores resultan ser representables de la misma manera, excepto, algunos de ellos, los cuales se deben multiplicar por un escalar. Por ejemplo, si se considera el vector

$$0111122 \quad 11222222 \quad 11222222 \quad 22222222,$$

podemos tomar los conjuntos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\{0\}\} \\ X_2 &= \{(1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 2)\} \end{aligned}$$

los cuales verifican que el anterior vector, es una función rango lineal, sobre el cuerpo de los reales; pero los anteriores conjuntos no funcionan sobre el cuerpo de dos elementos.

En cambio, si consideramos el vector,

$$0222244 \quad 22444444 \quad 22444444 \quad 44444444,$$

el cual es dos veces el vector anterior, y por lo tanto determina el mismo rayo, podemos obtener la representación adecuada:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\{0\}\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

la cual hace que el vector sea una función rango lineal sobre cualquier cuerpo. La misma duplicación es necesaria para 13 de los 162 rayos extremos. A el vector,

$$1121222 \quad 12222222 \quad 12222222 \quad 22222222,$$

es necesario triplicarlo, para verificar que es una función rango lineal sobre cualquier cuerpo.

Definición 32. El conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([5]) \setminus \{\emptyset\}}$, que satisfacen todas las desigualdades de Ingleton en 5 variables, será notado como \mathcal{I}_5 .

Definición 33. El conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([5]) \setminus \{\emptyset\}}$, que satisfacen las desigualdades (5.1)-(5.24) y sus formas permutando las 5 variables, será notado como \mathcal{DFZ}_5 .

Teorema 22. $\mathcal{L}_5 = \Gamma_5 \cap \mathcal{I}_5 \cap \mathcal{DFZ}_5$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{L}_5 \subseteq \Gamma_5 \cap \mathcal{I}_5 \cap \mathcal{DFZ}_5$. Resta verificar la otra contención.

$\Gamma_5 \cap \mathcal{I}_5 \cap \mathcal{DFZ}_5$, es un cono convexo poliédrico. Vía el software libre [1], éste conjunto es generado por la envolvente cónica de los puntos (junto con las permutaciones) dados en el **Apéndice A**; resta verificar que cada punto es una función rango lineal, los conjuntos de vectores que hacen que cada punto se haga una función rango lineal, se encuentran en el **Apéndice B**. □

5.4. Metodología; buscando rayos extremos que sean funciones rango lineales

La lista de las desigualdades rango lineales para 5 variables fue producida por el siguiente proceso iterativo.

Inicialmente se tenían las desigualdades tipo Shannon y las *desigualdades de Ingleton*. En cada etapa, se toma la lista actual de desigualdades y utilizando el software libre [1], se obtiene la correspondiente lista de rayos extremos. A continuación, se examina si los vectores que generan los rayos extremos son funciones rango lineales (sobre los reales; no se trata de obtener sobre cualquier cuerpo, hasta que el proceso iterativo terminara), cuando un vector, probablemente no era una función rango lineal, este condujo a una nueva desigualdad rango lineal, demostrable vía información común.

Si se presentan problemas para verificar si un vector es representable, o no, se procede a buscar en todos los caminos en los que una única información común se especifica (hacia el final, es necesario intentar con un par de informaciones comunes) para verificar si el programa, **Xitip**, puede demostrar que el vector elegido contradice las desigualdades tipo Shannon junto con la información común especificada. En caso afirmativo, esta verificación conduce a una nueva desigualdad rango lineal.

En [12], los autores comentan sobre el desarrollo de un software para determinar si un vector era

representable. El software utiliza combinatoria en vez de métodos de algebra lineal. Por ejemplo, la salida del software para el vector

$$1121223 \quad 12232333 \quad 23332333 \quad 23332333 \tag{5.41}$$

puede ser interpretada como: “ X_1 es generado por un vector; X_2 es generado por un vector que no está en X_1 ; X_3 es generado por un vector que no está en $X_1 + X_2$ [el espacio generado por X_1 y X_2]; X_4 es generado por un vector en $X_1 + X_2 + X_3$; y X_5 es generado por dos vectores, uno en $(X_1 + X_2) \cap (X_3 + X_4)$ y el otro en X_3 ”.

La construcción (en muchos casos solo el intento) del conjunto de vectores, se hace uno tras otro: Primero se construye X_1 (paso trivial), seguido se encuentra X_2 dado X_1 , entonces se busca X_3 dado X_1 y X_2 , y así sucesivamente. Dados X_1, X_2, X_3 y X_4 , el algoritmo determinará cuantos vectores son necesarios para el conjunto X_5 y seguido se intenta elegirlos en relación con los ya existentes. En cada paso se elegirá un vector nuevo. Si existe algún problema en suponer que un vector está en la suma de dos subespacios ya existentes, entonces tenemos que especificar que el vector está en la intersección de dos sumas de subespacios.

Una vez el primer vector es seleccionado, tomamos cociente a todos los espacios ya existente, por este vector, para obtener la nueva situación en la que el segundo vector debe ser seleccionado. Todo se hace contando dimensiones; supongamos que el primer vector que se elige, debe estar en el subespacio R , el cual es la suma de dos subespacios elegidos de X_1, X_2, X_3, X_4 (por ejemplo, $R = X_1 + X_2$). Para cada una de las otras sumas de subespacios T , si el nuevo vector está en T , entonces el cociente por el vector elegido reducirá la dimensión de T en 1; si el vector elegido no está en T , entonces el cociente no cambiará la dimensión de T . Puesto que el vector está en R , el vector estará en T si, y sólo si, $R \subseteq T$, pero para verificar que $R \subseteq T$, simplemente se debe mostrar que $dim(R + T) = dim(T)$ (donde $dim(T)$, es la dimensión de T). El caso cuando el vector es elegido, a partir de una intersección de dos sumas de subespacios, es más complicada. Mas adelante retomamos esta situación.

Consideremos el ejemplo (5.41). Supongamos que ya se han construido los conjuntos X_1, X_2, X_3 y X_4 , (sólo se usará la información de las dimensiones). La situación actual puede resumirse en

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{5.42}$$

La primera fila muestra las dimensiones de las sumas de los conjuntos X_1, X_2, X_3, X_4 , en el orden dado en (5.40), pero iniciando con el espacio nulo; esta es precisamente la primera parte de (5.41) con un 0 al inicio. Para cada una de esas sumas, la segunda fila da la cantidad por la cual adicionando el nuevo conjunto de vectores X_5 , será incrementada la dimensión de la suma.

Para este arreglo, vemos que, debido a que X_5 tiene dimensión 2 y sólo incrementa la dimensión de $X_1 + X_2$ en 1, un vector no nulo de X_5 debe estar en $X_1 + X_2$. Así, se inicia suponiendo que uno de los vectores de X_5 está en $R = X_1 + X_2$. Ahora se verifica, para todas las sumas de X_1, X_2, X_3, X_4 , si estas contienen al vector elegido; esta información se resume en la fila

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \tag{5.43}$$

donde, 1 significa que el vector elegido está en la correspondiente suma. Para obtener el resultado de tomar el cociente por el vector (el subespacio generado) elegido, restamos (5.43) de la primera fila de (5.42) (porque se ha utilizado un vector de cada uno de esos subespacios), y substrayendo los complementos de unos de (5.43) por la segunda fila de (5.42) (porque se tomo uno de los nuevos vectores para X_5 , fuera de cada subespacio indicado). Así, la situación después que el primer vector es elegido, está dada por

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Todos los 0 's en la segunda fila, significan que el conjunto X_5 , ha sido encontrado y por lo tanto (5.41) es una función rango lineal.

El algoritmo anterior no da muchas posibilidades para la elección del nuevo vector; éste elige una suma de subespacios, para tratar de añadir un vector, y, si se llega a una contradicción, se intenta con una intersección de dos sumas de subespacios. Si falla cualquiera de los pasos (debido a una contradicción, o porque el algoritmo no determina si $R \cap S \subseteq T$), el algoritmo se da por vencido.

El algoritmo anterior da una prueba positiva, para que los vectores sean funciones rango lineales, la prueba para verificar que ningún punto en el rayo extremo es un función rango lineal, se hace, especificando la existencia de una o dos informaciones comunes, y probando en todos los posibles caminos (tomando combinaciones de las variables). Por ejemplo, supongamos que algún punto $v = (v_S)_{S \subseteq [5]}$ (diferente al vector 0) en el rayo extremo (que él determina) es una función rango lineal, así existen conjuntos de vectores X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 y $\alpha > 0$ tal que $H(X_S) = \alpha v_S$, con $S \subseteq [5]$, por lo tanto se sigue que

$$v_{12345}H(S) = v_S H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \quad (5.45)$$

para todo $S \subseteq [5]$, además podemos suponer que Z es la información común de X_1 y X_2 , y, por lo tanto, las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} H(Z|X_1) &= H(X_1), \\ H(Z|X_2) &= H(X_2), \\ H(Z) &= H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Ahora, si de la desigualdades tipo Shannon (en 6 variables), más las igualdades en (5.45) y de las condiciones de Z para ser la información común de X_1 y X_2 , se logra verificar que, $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$, entonces el único vector que es función rango lineal en el rayo extremo es el vector 0.

Si $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$ (bajo las condiciones anteriores), obtenemos una nueva desigualdad rango lineal como sigue.

Supongamos que la desigualdad $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$, es implicada de las condiciones anteriores. Podemos expresar cada ecuación $P = Q$, como dos desigualdades, $P \leq Q$ y $Q \leq P$, así la desigualdad $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$, es implicada por una lista de desigualdades (desigualdades tipo Shannon, las igualdades en (5.45) y las condiciones de información común), por lo tanto ella puede ser escrita en la forma $\sum c_I I$, donde $c_I \geq 0$ e I varía sobre la lista de desigualdades que la implican. Si dividimos la lista de desigualdades en dos partes: una parte de las que provienen de (5.45) y la otra de las que no (e.d, las desigualdades tipo Shannon y las que provienen de la información común establecida). Sea I_n la desigualdad obtenida de $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$, restando las desigualdades que provienen de (5.45). Como el vector v , satisface con igualdad las desigualdades de (5.45) y no satisface que, $H(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq 0$ (en caso contrario, $v_{12345} = 0$), entonces v , no puede satisfacer I_n . Pero I_n , es una desigualdad rango lineal en la variables X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 , ya que ella es igual a la suma de $c_I I$, sobre todas las desigualdades que no vienen de (5.45), y todas son verdaderas cuando Z , es la información común de X_1 y X_2 . Como v , satisface todas las desigualdades rango lineales que teníamos previamente, I_n , debe ser una nueva desigualdad, que debe ser añadida a la lista.

Conclusiones

- Para lograr la caracterización de \mathcal{L}_n , se hace necesario estudiar cada n por separado.
- El hecho de que no toda desigualdad rango lineal, sea una desigualdad de la información, y, a pesar de que tengan una estrecha relación, evidencia que los conjuntos de desigualdades, deben ser considerados por separado.
- La existencia de información común en el caso de las funciones rango lineales, es una herramienta clave para obtener las nuevas desigualdades rango lineales, en cinco variables.

Trabajo futuro

- Continuar con el estudio de \mathcal{L}_n , el paso a seguir $n = 6$.
- Descubrir desigualdades rango lineales que no sean demostrables con la técnica de información común, o, demostrar que el método es completo, es decir, no existen desigualdades rango lineales que sean demostrables sin el uso de información común.

21. (1 1 2 1 2 2 2 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
22. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3)
23. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
24. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 1 2 2 3 2 3 2 3 2 2 2 3 3 3 3 3 3)
25. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3)
26. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3)
27. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3)
28. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3)
29. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
30. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
31. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 2 3 2 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
32. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
33. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3)
34. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
35. (1 1 2 2 3 3 3 2 3 2 3 3 3 3 2 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
36. (3 1 3 1 3 2 3 1 3 2 3 2 3 3 3 1 3 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3)
37. (3 1 3 1 3 2 3 1 3 2 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3)
38. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 4)
39. (1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)
40. (2 1 3 1 3 2 4 1 3 2 4 2 4 3 4 1 3 2 4 2 4 3 4 2 3 3 4 3 4 4 4)
41. (2 1 3 1 3 2 4 1 3 2 4 2 4 3 4 1 3 2 4 2 4 3 4 2 4 3 4 3 4 4 4)
42. (2 2 3 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 1 3 3 4 2 4 4 4 2 3 3 4 3 4 4 4)
43. (2 2 3 2 3 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 3 3 4 3 4 4 4)
44. (2 2 4 1 2 3 4 1 3 3 4 2 3 4 4 1 3 3 4 2 3 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4)
45. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 1 3 3 4 2 4 3 4 2 3 4 4 3 4 4 4)
46. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 1 3 3 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4)
47. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 1 3 3 4 2 4 4 4 2 4 4 4 2 4 4 4)
48. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 1 3 3 4 2 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4)
49. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 3 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)
50. (2 2 4 1 3 3 4 1 3 3 4 2 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)
51. (2 2 4 2 3 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 3 4 2 4 4 4 4 4 4 4)
52. (2 2 4 2 3 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4)

53. (2 2 4 2 3 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4)
54. (2 2 4 2 3 3 4 2 3 3 4 4 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
55. (2 2 4 2 4 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4)
56. (2 2 4 2 4 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4)
57. (2 2 4 2 4 3 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4)
58. (2 2 4 2 4 3 4 2 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 3 3 4 4 4 4 4 4)
59. (2 2 4 2 4 3 4 2 3 4 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
60. (2 2 4 2 4 3 4 2 3 4 4 3 4 4 4 2 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)
61. (2 2 4 2 4 4 4 1 2 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 3 4 4 3 4 4 4)
62. (2 2 4 2 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4)
63. (2 2 4 2 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4)
64. (2 2 4 2 4 4 4 2 3 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4)
65. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 1 2 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
66. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4)
67. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 1 3 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
68. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 2 3 3 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4)
69. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 2 3 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
70. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4)
71. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
72. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4 2 3 3 4 4 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
73. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4]
74. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4 2 4 4 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
75. (2 2 4 2 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 2 4 3 4 3 4 4 4 3 4 4 4 4 4 4 4)
76. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 4 3 4 4 5 2 3 3 4 3 4 4 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
77. (1 1 2 1 2 2 3 2 3 3 4 3 4 4 5 3 4 4 5 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
78. (1 1 2 2 3 3 3 2 3 3 4 4 5 5 5 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
79. (1 1 2 2 3 3 4 2 3 3 4 4 5 5 5 2 3 3 4 4 5 4 5 4 5 4 5 5 5 5 5)
80. (1 1 2 2 3 3 4 2 3 3 4 4 5 5 5 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
81. (1 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 4 5 4 5 2 3 4 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
82. (1 2 3 2 3 3 4 2 3 4 4 4 5 5 3 4 4 5 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
83. (1 2 3 2 3 3 4 2 3 4 5 4 5 5 5 2 3 4 4 4 5 5 4 4 5 5 5 5 5 5 5)
84. (1 2 3 2 3 3 4 2 3 4 5 4 5 5 5 2 3 4 4 4 4 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)

85. (1 2 3 2 3 3 4 2 3 4 5 4 5 5 5 3 4 5 5 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
86. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 4 4 4 5 5 2 3 4 4 4 4 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
87. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 4 4 4 4 5 5 3 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
88. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 4 4 4 4 5 5 3 4 4 5 4 5 5 5 4 4 5 5 5 5 5)
89. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 4 4 4 4 5 5 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
90. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 5 4 4 5 5 2 3 4 4 4 5 5 5 4 4 5 5 5 5 5)
91. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 5 4 5 4 5 2 3 4 5 4 4 5 5 4 4 5 5 5 5 5)
92. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 5 4 5 4 5 3 4 5 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
93. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 5 4 5 5 5 2 3 4 5 4 4 5 5 4 4 5 5 5 5 5)
94. (1 2 3 2 3 4 5 2 3 4 5 4 5 5 5 3 4 5 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
95. (1 2 3 2 3 4 5 3 4 5 5 4 5 5 5 3 4 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
96. (1 2 3 2 3 4 5 3 4 5 5 5 5 5 3 4 4 5 4 5 5 5 4 4 5 5 5 5 5 5)
97. (1 2 3 2 3 4 5 3 4 5 5 5 5 5 3 4 5 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
98. (2 2 3 2 3 4 4 2 3 4 4 4 4 4 5 5 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
99. (2 2 3 2 3 4 4 2 4 4 5 4 4 5 5 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
100. (2 2 3 2 3 4 4 2 4 4 5 4 5 5 5 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
101. (2 2 3 2 4 4 5 2 4 4 5 3 5 5 5 3 5 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
102. (2 2 3 2 4 4 5 2 4 4 5 4 5 4 5 3 4 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
103. (2 2 3 2 4 4 5 3 5 5 5 5 5 5 3 4 4 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5)
104. (2 2 3 2 4 4 5 3 5 5 5 5 5 5 3 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5)
105. (2 2 3 2 4 4 5 3 5 5 5 5 5 5 3 5 4 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
106. (2 2 4 2 4 4 4 3 5 4 5 4 5 5 5 3 5 4 5 4 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5)
107. (2 2 3 2 4 4 5 2 4 4 5 4 6 6 6 2 4 4 5 4 6 5 6 4 6 5 6 6 6 6)
108. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 5 4 5 5 6 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6)
109. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 5 5 6 2 4 4 5 4 6 5 6 4 5 6 6 6 6 6)
110. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 5 6 2 4 4 6 4 5 5 6 4 5 5 6 6 6 6)
111. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 5 6 2 4 4 6 4 5 6 6 4 5 5 6 5 6 6)
112. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 5 6 2 4 4 6 4 6 5 6 4 5 6 6 5 6 6)
113. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 6 6 2 4 4 6 4 6 5 6 4 5 5 6 5 6 6)
114. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 6 6 2 4 4 6 4 6 5 6 4 6 5 6 5 6 6)
115. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 6 6 2 4 4 6 4 6 6 6 4 5 5 6 5 6 6)
116. (2 2 4 2 4 4 6 2 4 4 6 4 6 6 6 4 6 5 6 5 6 6 6 5 6 6 6 6 6 6)

-
117. (2 2 4 2 4 4 6 4 6 6 6 6 6 6 4 6 5 6 5 6 6 6 5 6 6 6 6 6 6)
118. (3 2 4 2 4 4 5 2 4 4 5 4 5 6 6 2 5 4 6 4 6 6 6 4 6 6 6 6 6 6)
119. (3 2 4 2 4 4 5 2 5 4 6 4 6 6 6 2 5 4 6 4 5 5 6 4 6 6 6 6 6 6)
120. (3 2 4 2 5 4 6 2 5 4 5 4 6 6 6 2 5 4 5 4 6 6 6 4 6 6 6 6 6 6)
121. (3 2 4 2 5 4 6 2 5 4 6 4 6 6 6 2 5 4 6 4 6 5 6 4 5 5 6 5 6 6 6)
122. (3 2 5 2 5 4 6 2 5 4 6 4 5 6 6 2 5 4 5 4 6 6 6 4 6 5 6 5 6 6 6)
123. (3 3 5 2 4 4 6 2 4 5 6 4 5 6 6 2 5 5 6 4 6 6 6 4 5 6 6 5 6 6 6)
124. (3 3 5 2 4 5 6 2 4 5 6 4 5 6 6 2 5 5 6 4 6 6 6 4 5 5 6 5 6 6 6)
125. (3 3 5 3 5 5 6 2 4 4 6 5 6 6 6 2 5 5 6 5 6 6 6 4 5 5 6 5 6 6 6)
126. (3 3 6 2 5 5 6 1 4 4 6 3 6 6 6 4 5 5 6 6 6 6 5 6 6 6 6 6 6 6)
127. (3 3 6 2 5 5 6 2 5 5 6 3 6 6 6 1 4 4 6 3 6 5 6 3 6 5 6 4 6 6 6)
128. (3 3 6 2 5 5 6 2 5 5 6 4 6 6 6 1 4 4 6 3 6 5 6 3 5 6 6 4 6 6 6)
129. (3 3 6 2 5 5 6 2 5 5 6 4 6 6 6 1 4 4 6 3 6 6 6 3 6 5 6 4 6 6 6)
130. (3 3 6 3 6 5 6 2 5 4 6 4 6 6 6 2 5 4 6 5 6 6 6 4 5 5 6 6 6 6 6)
131. (3 3 6 3 6 6 6 2 4 4 6 4 6 6 6 2 5 5 6 5 6 6 6 4 6 5 6 5 6 6 6)
132. (3 3 6 3 6 6 6 2 4 4 6 5 6 6 6 2 5 5 6 5 6 6 6 4 6 6 6 5 6 6 6)
133. (3 3 6 3 6 6 6 3 6 5 6 5 6 6 6 3 6 5 6 5 6 6 6 4 6 6 6 6 6 6 6)
134. (1 2 3 3 4 5 5 3 4 5 5 6 7 7 7 4 5 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7)
135. (2 2 4 2 4 4 5 2 4 4 6 4 6 6 7 3 5 5 7 5 6 6 7 5 7 7 7 7 7 7 7)
136. (2 2 4 2 4 4 5 3 5 5 7 5 6 6 7 3 5 5 7 5 6 6 7 5 7 7 7 7 7 7 7)
137. (2 2 4 2 4 4 5 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 7 5 6 6 7 6 7 6 7 7 7 7 7)
138. (2 2 4 2 4 4 5 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 7 5 6 6 7 6 7 7 7 6 7 7 7)
139. (2 2 4 2 4 4 6 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 7 5 6 6 7 6 7 7 7 6 7 7 7)
140. (2 2 4 3 4 4 5 3 5 5 7 6 7 7 7 4 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7)
141. (2 2 4 3 5 5 6 3 5 5 6 5 7 7 7 3 5 5 6 5 7 6 7 5 7 6 7 7 7 7 7)
142. (2 2 4 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 6 7 3 5 5 7 5 7 6 7 6 7 6 7 6 7 7 7 7)
143. (2 2 4 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 6 5 6 6 7 6 7 6 7 7 7 7 7)
144. (2 2 4 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 7 6 7 6 7 6 7 6 7 6 7 7 7 7)
145. (2 2 4 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 7 7 4 6 6 7 7 7 7 7 5 6 6 7 7 7 7 7)
146. (2 3 4 3 5 5 6 3 5 5 6 6 7 7 7 3 5 6 6 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7)
147. (2 3 5 3 5 5 6 3 5 5 6 6 6 7 7 4 6 5 7 6 7 7 7 6 7 7 7 7 7 7 7)
148. (2 3 5 3 5 5 7 3 5 5 6 6 7 7 7 3 5 5 6 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7)

-
149. (2 3 5 3 5 5 7 3 5 5 7 5 6 7 7 3 5 6 7 5 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7)
150. (2 3 5 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 5 6 5 6 6 7 6 7 7 7 7 7 7 7)
151. (2 3 5 3 5 5 7 3 5 5 7 5 7 7 7 3 5 6 7 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7)
152. (2 3 5 3 5 5 7 3 5 5 7 6 7 7 7 3 5 6 6 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7)
153. (3 3 6 3 6 6 6 4 7 5 7 6 7 7 7 4 7 5 7 6 7 7 7 6 7 7 7 7 7 7 7)
154. (4 2 6 3 6 5 8 3 6 5 7 6 8 7 8 3 6 5 7 6 8 7 8 6 8 6 8 8 8 8 8)
155. (4 3 6 3 6 6 8 3 6 6 8 5 8 8 8 3 7 6 8 6 8 7 8 6 7 7 8 7 8 8 8)
156. (4 4 6 3 6 6 8 3 6 6 8 6 8 8 8 3 6 7 8 6 7 8 8 6 7 8 8 7 8 8 8)
157. (4 4 8 2 6 6 8 2 6 6 8 4 8 8 8 2 6 6 8 4 8 7 8 4 8 7 8 5 8 8 8)
158. (3 3 6 3 6 6 7 4 6 6 8 7 8 8 9 4 7 7 9 7 8 8 9 7 9 9 9 9 9 9 9)
159. (3 3 6 3 6 6 9 3 6 6 9 6 9 9 9 3 6 6 9 6 8 8 9 6 8 8 9 7 9 9 9)
160. (3 4 7 4 7 6 9 4 7 8 8 8 8 9 9 5 7 7 9 7 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9)
161. (4 4 7 3 7 7 10 3 7 7 10 6 10 10 10 3 7 7 10 6 8 8 10 6 9 9 10 8 10 10 10)
162. (3 4 7 4 7 8 11 4 7 8 9 8 9 10 11 5 8 8 11 8 11 11 11 9 9 11 11 11 11 11 11)

Apéndice B: Los conjuntos de vectores

Generador 1.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{0\}; \\X_2 &= \{0\}; \\X_3 &= \{0\}; \\X_4 &= \{0\}; \\X_5 &= \{1\};\end{aligned}$$

Generador 5.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{1\} \\X_2 &= \{1\} \\X_3 &= \{1\} \\X_4 &= \{1\} \\X_5 &= \{1\}\end{aligned}$$

Generador 2.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{0\} \\X_2 &= \{0\} \\X_3 &= \{0\} \\X_4 &= \{1\} \\X_5 &= \{1\}\end{aligned}$$

Generador 6.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{(0, 0)\} \\X_2 &= \{(0, 0)\} \\X_3 &= \{(1, 0)\} \\X_4 &= \{(0, 1)\} \\X_5 &= \{(1, 1)\}\end{aligned}$$

Generador 3.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{0\} \\X_2 &= \{0\} \\X_3 &= \{1\} \\X_4 &= \{1\} \\X_5 &= \{1\}\end{aligned}$$

Generador 7.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{(0, 0)\} \\X_2 &= \{(1, 0)\} \\X_3 &= \{(0, 1)\} \\X_4 &= \{(1, 1)\} \\X_5 &= \{(1, 1)\}\end{aligned}$$

Generador 4.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{0\} \\X_2 &= \{1\} \\X_3 &= \{1\} \\X_4 &= \{1\} \\X_5 &= \{1\}\end{aligned}$$

Generador 8. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned}X_1 &= \{(0, 0, 0, 0)\} \\X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\X_4 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\X_5 &= \{(1, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\}\end{aligned}$$

Generador 9.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0); (0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 10.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 11.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 12. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 13. (Se multiplica por 3)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 1, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 1); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 1, -1)\} \end{aligned}$$

Generador 14.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0); (0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 15. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 16.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0); (0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0); (0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 17.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 18.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 19.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 20.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 21.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 22.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 23. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 24.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 25. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 26. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 1, 0, 1); (1, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 27.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 28. (Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 29.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 30.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 31.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 32.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 33.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0); (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 34.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 1, 0, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 35.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0); (1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 36.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 37.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1); (0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 38.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 39.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 40.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 41.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 42.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 43.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 44.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 45.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 46.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 47.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 48.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 49.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 50.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 51.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 52.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 53.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 54.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 55.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 56.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 2)\} \end{aligned}$$

Generador 57.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 58.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 59.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1); (1, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 60.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 61.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 62.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 63.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 64.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 65.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 66.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 67.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 68.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 1); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 69.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 70.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 71.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1); (1, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 72.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 73.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 74.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 75.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 1); (1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 76.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 77.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 78.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 103.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 104.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 1); (0, 1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 105.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, -1); (0, 1, 2, 0, -1)\} \end{aligned}$$

Generador 106.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 107.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 108.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0) \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 109.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 110.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 111.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 1); (1, 1, 1, 1, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 112.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 1); (1, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 113.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 114.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 1, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 115.(Se multiplica por 2)

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_4 = & \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\
 & (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); \\
 & (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1); \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -1); \\
 & (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, -1); \\
 & (-1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1); \\
 & (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 116.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_4 = & \{(1, 0, 1, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(0, 0, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1, 0, 1); \\
 & (0, 0, 0, 0, 1, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 117.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_4 = & \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0); \\
 & (1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0); \\
 & (0, 0, 0, 0, 1, 0); (1, 1, 0, 0, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 118.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\
 X_4 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(1, 0, 1, 1, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 119.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\
 X_4 = & \{(0, 0, 1, 1, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(1, 2, 0, 0, -1, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 120.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\
 & (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\
 X_2 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_4 = & \{(0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 1, 0)\} \\
 X_5 = & \{(0, 0, 1, 1, 0, 0); (1, 1, 0, 0, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 121.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\
 & (0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \\
 X_2 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_3 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
 X_4 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_5 = & \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0)\}
 \end{aligned}$$

Generador 122.

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{(1, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0); \\
 & (0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\
 X_2 = & \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
 X_3 = & \{(0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
 X_4 = & \{(0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
 X_5 = & \{(0, 1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1)\}
 \end{aligned}$$

Generador 123.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 124.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 1, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1, 1, 0); (1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 125.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 126.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 2, 0, 0, 0); (0, -1, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 1, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 127.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 128.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 1, 0, 0, 1); (1, 1, 0, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 129.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0, 1, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 130.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1); (1, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 1, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 131.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 132.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 133.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 134.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 135.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 136.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 137.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 138.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 139.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 140.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 141.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 142.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 143.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 144.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1); \\ &\quad (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 145.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 146.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 147.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 148.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 149.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 150.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 151.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 152.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0); (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 153.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0); (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 154.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 155.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 156.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1); \\ &\quad (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 157.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_3 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 158.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 159.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_4 &= \{(1, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 1); (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 160.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Generador 161.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_2 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\ X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\ X_4 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ &\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\ X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0); \\ &\quad (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Generador 162.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\
X_2 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
X_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\} \\
X_4 &= \{(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\} \\
X_5 &= \{(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0); \\
&\quad (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0); \\
&\quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0); \\
&\quad (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)\}
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] ZOLOTYKH, NIKOLAI, skeleton,
<http://www.uic.unn.ru/~zny/skeleton/>
- [2] HAMMER, D., ROMASHCHENKO, A.E., SHEN, A. & VERESHCHAGIN, N.K. '*Inequalities for Shannon entropy and Kolmogorov complexity*'. Journal of Computer and Systems Sciences. **60** (2000), 442-464.
- [3] SHANNON, CLAUDE D. '*A mathematical theory of communication*'. Bell System Technical Journal. **27** (1948), 442-464.
- [4] YEUNG, RAYMOND W. '*A First Course in Information Theory*'. Springer: Berlín, 2002.
- [5] MONTOYA, J. ANDRES. '*Notas de clase: Teoría de la información*'. Universidad Nacional de Colombia (2013-I).
- [6] SARRIA, HUMBERTO. '*An introduction to network coding*'. Universidad Nacional de Colombia 2009.
- [7] TIEL, JAN V. '*Convex Analysis*'. John Wiley & Sons ltda: Northern Ireland, 1984.
- [8] ZIEGLER, GÜNTER, M. '*Lectures on Polytopes*'. Springer: New York, 1995.
- [9] MATUS, F. '*Infinitely many information inequalities*'. Proceeding ISIT. (2007), 41-44.
- [10] YEUNG, R. ZHANG, Z. '*On characterization of entropy function via information inequalities*'. IEEE **44** no. 4 (1998), 1440-1452.
- [11] DOUGHERTY, R., FREEILING, C. & ZEGER, K. '*Non-Shannon information inequalities in four random variables*'. arXiv 1104.3602. (2011).
- [12] DOUGHERTY, R., FREEILING, C. & ZEGER, K. '*Linear rank inequalities on five or more variables*'. arXiv 0910.0284v3. (2010).
- [13] PULIKKONATTU, R., PERRON, E. & DIGGAVI, S. Xitip (Information theoretic inequality prover),
<http://xitip.epfl.ch/>
- [14] INGLETON, A.W. '*Representation of matroids*'. Academic Press, 149-167.
- [15] CHAN, T., GRANT, A. '*The minimal set of Ingleton inequalities*'. arXiv 0802.2574. (2008).
- [16] http://en.wikipedia.org/wiki/Ingleton's_inequality
- [17] <http://zeger.us/linrank>