# El uso e interpretación de fracciones en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad, en estudiantes de básica primaria

**Derly Yohana Buitrago Vargas**

**Universidad Nacional de Colombia**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

**Manizales, Colombia**

**2018**

# El uso e interpretación de fracciones en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variacióny aleatoriedad, en estudiantes de básica primaria

**Derly Yohana Buitrago Vargas**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

**Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

**MS.c Jaider Albeiro Figueroa Flórez**

**Universidad Nacional de Colombia**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

**Manizales, Colombia**

**2018**

*Dedicatoria*

*A mi familia, en especial a mis hijos, porque son mi fórmula mágica para superar cada desafío diario, la razón para continuar la construcción de los caminos de mi vida.*

*"No hay nadie menos afortunado que el hombre a quien la adversidad olvida, pues no tiene la oportunidad de ponerse a prueba."*

*Séneca*

# Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de superar un reto más en la vida, por ser mi fiel compañero.

A mi familia, por el apoyo incondicional en cada una de las etapas de este proceso, por su comprensión y motivación en los momentos difíciles.

A mi asesor, Magíster Jaider Albeiro Figueroa Flórez, por su paciencia y colaboración, por animarme a culminar esta tarea.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, por contribuir en mi formación profesional y personal.

A los directivos de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de Neiva, por facilitarme los espacios requeridos para mi formación académica y por avalar la realización de esta propuesta.

A mis estudiantes, por su participación activa en este proyecto, por su disposición y colaboración.

A mis amigos, por sus palabras de fortaleza para terminar este proyecto.

# Resumen

Este trabajo de investigación se realizó con el propósito de utilizar las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados, en la solución de problemas en contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad a través de un trabajo de aula que contempló el diseño de talleres basados en problemas y la aplicación de estos en un grupo de estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de Neiva Huila.

En la metodología, se estableció que esta propuesta estaría enmarcada dentro del paradigma cualitativo de carácter descriptivo y se tomó como principal fuente de información la producción escrita de los estudiantes al resolver los instrumentos metodológicos: taller diagnóstico, de afianzamiento y taller final, y estableció los parámetros para el análisis de los resultados.

La relevancia de este proyecto se cimentó en la determinación de los avances y/o debilidades que presentaron los estudiantes al interpretar la fracción en conjuntos continuos y en conjuntos discretos, como cociente, operador, probabilidad, porcentaje y razón, durante la solución de los problemas propuestos. Además de ampliar notoriamente el rango de utilidad de las fracciones, se logró fortalecer una cantidad importante de conocimientos y procesos definidos por el ministerio de educación nacional para el grado quinto de primaria a través de los estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje.

***Palabras clave:*** **fracciones, interpretaciones de una fracción, representación de una fracción, problemas en contexto.**

# The use and interpretation of fractions in the solution of problems in the contexts of measurement, counting, variation and randomness in elementary school students


## Abstract

This research work was carried out with the purpose of using the interpretations of a fraction, its different representations and meanings, in the solution of problems in contexts of measurement, counting, variation and randomness through a classroom work that contemplated the design of workshops based on problems and the application of these in a group of fifth graders from The Claretiano Gustavo Torres Parra School in the city of Neiva, Huila.

In the methodology, it was established that this proposal would be framed within the descriptive qualitative approach and the students' written production was taken as the main source of information when solving the methodological instruments: diagnostic workshop, consolidation workshop and final workshop, and established the parameters for the analysis of the results.

The relevance of this project was based on the determination of the advances and / or weaknesses presented by the students when interpreting the fraction in continuous sets and in discrete sets, such as quotient, operator, probability, percentage and ratio, during the solution of the problems proposed. In addition to significantly expanding the range of usefulness of the fractions, it was possible to strengthen a significant amount of knowledge and processes defined by the National Ministry of Education for the fifth grade of primary school through Basic Competency Standards and Basic Learning Rights.


***Keywords:*** **fractions, interpretations of a fraction, representation of a fraction, problems in context.**

# Contenido

# Lista de figuras

# Lista de tablas

# Introducción

El trabajo diario dentro del aula de clase se fortalece con la reflexión continua del docente sobre su práctica pedagógica, la comprensión del contexto y sus características particulares, las necesidades de los estudiantes, las posibilidades y limitaciones al abordar la estructura curricular correspondiente al año escolar. Este trabajo de investigación surge de una preocupación específica en el grado quinto de primaria, por utilizar las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados, en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad.

Dado que el Ministerio de Educación Nacional por medio de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) establece los niveles de complejidad de conocimientos y procesos matemáticos correspondientes a este grado, es un reto cumplir con dichos parámetros; para ello, se propone y realiza un trabajo de aula que contempla el diseño y aplicación de talleres basados en problemas de medición, conteo, variación y aleatoriedad, que posibilitan usar las diferentes representaciones e interpretaciones de una fracción y posteriormente, analizar los avances y/o dificultades de los estudiantes en torno a ellas.

El trabajo se organiza en capítulos, el número uno contiene la descripción y planteamiento del problema, justificación y objetivos; el capítulo dos comprende el marco referencial que abarca antecedentes, teorías y conceptos en los que se apoya el proyecto; el capítulo tres corresponde a metodología: en este caso, el trabajo es de tipo cualitativo descriptivo se realiza con la participación de 37 estudiantes del curso 503 de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de Neiva-Huila, cuenta con tres instrumentos metodológicos: taller diagnóstico, taller de afianzamiento y taller final, y tiene como principal fuente de información la producción escrita de los alumnos durante la solución de los problemas. En la metodología del trabajo, también se establecen los criterios a analizar en cada una de las interpretaciones de las fracciones: fracción en conjunto continuo de área, fracción en conjunto discreto, fracción como cociente, fracción como operador, fracción como probabilidad, fracción como porcentaje y fracción como razón.

Seguido de la metodología, en el capítulo cuarto se analizan los resultados describiendo las principales fortalezas y debilidades presentadas por los estudiantes frente a la interpretación y representación de las fracciones en la solución de cada uno de los problemas. Finalmente, en el capítulo quinto se presentan las conclusiones del trabajo realizado y las recomendaciones sugeridas.

Los principales aportes de este trabajo se enmarcan en la ampliación del rango de utilidad de las fracciones en la solución de problemas en diferentes contextos, el aumento de las posibilidades de mantener y mejorar los resultados de las pruebas saber de grado quinto de la institución educativa y la optimización de tiempo dentro del calendario escolar.

# Capítulo 1

# Horizonte del trabajo

## 1.1 Descripción y planteamiento del problema

El Ministerio de Educación Nacional, establece dentro de sus lineamientos en el área de Matemáticas, un enfoque orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales de la sociedad (MEN, 1998).

El saber hacer, en matemáticas, tiene que ver con la habilidad de resolver problemas, de encontrar pruebas, de criticar argumentos, de usar el lenguaje matemático con cierta fluidez, de reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas; con ello, cobra gran importancia enfatizar más en el uso de las fracciones para solucionar situaciones problémicas en diferentes contextos, pues como lo afirma George Poyla, MEN, (1998):

> Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir un fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados (p. 52).

Por lo tanto, aprender a resolver problemas, y aceptar que con frecuencia hay más de una respuesta a una pregunta y más de una forma de tratarla, constituye una parte fundamental tanto en la educación como en el proceso de aprendizaje, lo que se convierte en significativo por diferentes razones:

- Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las cuestiones con detenimiento, hacer pruebas y equivocarse, en esa búsqueda a una posible solución del problema.
- Existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión por parte del alumnado.
- Es un tipo de conocimiento basado en la experiencia, siendo así más duradero y significativo para el estudiante que el conocimiento transmitido por el profesor o el libro.
- Los alumnos se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de aprendizaje y comprensión.
- Incide directamente en el llamado aspecto formativo, creando así estructuras mentales que trascienden a las propias matemáticas.
- La resolución de problemas es el núcleo central de las matemáticas, ya que hacer matemáticas no es otra cosa que resolver problemas.
- Hay que tener presente que el único camino que existe para resolver problemas es enfrentarse a los mismos (Fernández, 2005, p. 83).

Adicionalmente, el Ministerio de Educación Nacional también establece los Estándares Básicos de Competencias, los Derechos Básicos de Aprendizaje como puntos de referencia que luego evalúa con las pruebas Saber. En el caso específico de grado quinto de primaria, los resultados de las pruebas verifican que un estudiante tenga la capacidad de:

- Reconocer diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo.
- Dar significado y utilizar la fracción como operador.
- Modelar situaciones de dependencia cuando existen relaciones de proporcionalidad directa entre dos magnitudes.
- Estimar la probabilidad de un evento para resolver problemas en contexto de juego o eventos cotidianos. (definición niveles de desempeño pruebas saber matemáticas quinto 2015-2016).

- Reconocer relaciones de variación directa entre dos magnitudes, a mayor valor de una de las magnitudes, proporcionalmente mayor valor en la otra.
- Hacer pronósticos a partir de la lectura de información estadística y estimar la probabilidad con la que ocurren eventos simples.
- Multiplicar un número entero con una fracción para obtener otro número entero (ej.: 4 × 1/2= 2).
- Interpretar la medida de probabilidad con la que ocurre un evento. (tomado de resultados individuales pruebas saber 5 20017)

En el grupo de estudiantes de grado quinto de primaria seleccionados para desarrollar esta propuesta, se puede determinar como fortaleza la facilidad con que la mayoría de los niños relacionan las fracciones con el concepto de área o longitud y solucionan eficazmente problemas que involucraran esta interpretación. A la par, se logran detectar los siguientes hallazgos:

- dificultad en asociar las fracciones con conceptos como cociente, operador y porcentaje, y en mayor medida con los conceptos de probabilidad y razones de cambio.
- inseguridad al solucionar problemas que infieren relación de comportamiento entre dos sistemas o variables.
- uso de otras operaciones como división, resta o suma para solucionar problemas de fracciones.
- confusión con el significado del denominador y numerador de una fracción en su escritura.
- Falta de coherencia de la respuesta dada a un problema respecto a la intención de la pregunta.
- Ausencia de expresiones numéricas o aplicación de algoritmos posterior a la representación gráfica del problema.
- Dificultad para justificar simbólicamente los cálculos mentales que hacen para resolver los problemas.
- Entre otras. (ver resultados de taller diagnostico).

Por lo anterior, se puede considerar necesario plantear y desarrollar una propuesta de trabajo que posibilite al estudiante ampliar el rango de aplicaciones de los fraccionarios, en sus diversas representaciones e interpretaciones, para solucionar situaciones problemas en contextos matemáticos y de la vida cotidiana.

## 1.2 Justificación

Las recientes reformas a la educación básica han puesto un énfasis especial en el desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático; en que los estudiantes se desenvuelvan en ambientes que propicien el aprendizaje y la comunicación. Se han propuesto esquemas de trabajo que siguen una línea de progreso que parte de los conocimientos previos de los alumnos, de la resolución de problemas empleando herramientas personales, hasta llegar a los procedimientos expertos.

Por ello, en la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de Neiva -Huila se fomenta el trabajo por monitorías para facilitar la comunicación, retroalimentación, liderazgo y fortalecer el trabajo en equipo; se planea cuidadosamente los contenidos de cada asignatura para presentarlos al inicio de cada periodo escolar a los estudiantes y padres de familia de tal manera que se puedan fortalecer los saberes previos del estudiante frente a un conocimiento específico antes de realizar el trabajo de aula. Sin embargo, en el proceso enseñanza-aprendizaje cada tema presenta una problemática específica. Uno de los saberes más difíciles de tratar en el aula de clase es el referente a los números fraccionarios, tanto su comprensión y operabilidad como su aplicación en la solución de problemas.

Por lo tanto, se hace necesario plantear e implementar este proyecto para facilitar que el estudiante:

- Utilice e interprete los números fraccionarios, en sus distintas expresiones para resolver problemas en contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad.

- Reconozca variables, como en el caso de razones de cambio, y tome decisiones respecto a ellas.
- Cuente con múltiples estrategias de solución de problemas basadas en la técnica propuesta por Polya quien contempla que al abordar un problema se debe: entender el problema, configurar un plan, ejecutar dicho plan y mirar hacia atrás una vez se ha obtenido una respuesta.
- Desarrolle procesos metacognitivos como los propuestos por Riveros, Zanocco, Cnudde, Espinoza, Rojas y Baeza (2000), (citado por Inostroza, 2012): planificación, monitoreo o supervisión, evaluación y constatación de resultados y reflexión.
- Se involucre activamente en la búsqueda de un modelo matemático que interprete una situación, que vaya más allá de ejercitar una operación determinada de forma mecánica y repetitiva.

Por otra parte, la pertinencia de esta propuesta radica en su afinidad con las directrices emanadas por el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencias (2006), los Derechos Básicos De Aprendizaje (2016) y contribuye al mejoramiento de los resultados de las pruebas saber de los estudiantes de grado quinto.

En los estándares básicos de competencias se reconoce la necesidad de reorganizar los procesos de enseñanza para contribuir a la formación y desarrollo de competencias matemáticas, por lo que se plantea una serie competencias para el conjunto de grados 4 y 5 de primaria, dentro de las cuales se encuentran:

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.
- Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
- Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.

- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales (MEN, 2006, pp.82-83).

Este proyecto responde al conjunto de saberes propuesto en los derechos básicos de aprendizaje del grado quinto, específicamente a los siguientes:

- Escribe las fracciones como decimales y viceversa.
- Interpreta datos que involucran porcentajes.
- Multiplica o divide el numerador o el denominador de una fracción por un mismo número para hacerla equivalente a otra y comprende la equivalencia en diferentes contextos.
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa.
- Divide una fracción por un número natural.
- Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas.

Además, la ejecución de este trabajo es viable en la institución educativa Claretiano Gustavo Torres Parra gracias a la aceptación y disposición de los estudiantes, el respaldo y acompañamiento de las directivas y demás docentes del área, la colaboración y apoyo de los padres de familia.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

Utilizar las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados, en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Proponer e implementar un trabajo de aula que contemple el diseño y aplicación de talleres basados en problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad, que posibilite usar las diferentes representaciones de una fracción.
- Analizar los avances y/o dificultades de los estudiantes en torno al uso e interpretación de las fracciones, durante la aplicación de los instrumentos metodológicos.

# Capítulo 2

# Marco Referencial

## 2.1 Marco contextual

El presente trabajo se realizará en la institución educativa Claretiano, Gustavo Torres Parra del municipio de Neiva – Huila. A continuación, se hará una breve descripción de la ubicación de la institución, así como de la institución educativa y del grupo con el cual se llevará a cabo el presente plan. Información que está toomada del *Proyecto Educativo Institucional* (PEI, 2017).

El colegio Claretiano Gustavo Torres Parra, no cuenta con sede propia, sin embargo, está ofreciendo sus servicios educativos en el colegio INEM sede Principal que está ubicado en la Carrera 1N° 26 – 215 en el norte de la ciudad de Neiva.

El modelo pedagógico implementado, es humano participativo basado en la cibernética social, cerebro tríadico, las monitorías, los grupos significativos, aula dinámica y el gobierno alterno lo que permite estimular el liderazgo, el trabajo en equipo y la participación.

Este proyecto educativo ofrece una educación íntegra, autogestionaria y de liderazgo desde el grado de preescolar hasta el grado undécimo, permitiendo esto, ser la mejor institución educativa oficial de la capital huilense en pruebas Icfes Saber 11 2018, ocupando un nivel superior en los últimos cinco años. Su comunidad educativa es de estratificación social 2 y 3, donde la mayoría de los padres de familia son empleados de sectores oficiales y privados, teniendo niveles de escolaridad de bachilleres técnicos y profesionales, lo que fortalece una comunicación permanente con los docentes y un seguimiento de acompañamiento en el proceso educativo de sus hijos, obteniendo así un buen nivel de desarrollo en el mismo.

Los estudiantes con los cuales se va a realizar el trabajo corresponden al grado quinto, conformado por 38 estudiantes, 16 mujeres y 22 hombres, con edades promedio entre los 9 y 14 años.

## 2.2 Marco de antecedentes

Al hacer seguimiento a las investigaciones relacionadas con la propuesta se encontraron algunas que plantean objetivos, metodologías y conclusiones similares al propuesto en la investigación, en las que se buscaba utilizar las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados, en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad. A continuación se exponen algunos de los trabajos relativos al tema objeto de estudio.

### 2.2.1 Resolución de problemas con operaciones básicas de fraccionarios a partir de la implementación de objetos virtuales basados en páginas interactivas de uso libre

**Autora:** Johana Katherine Sánchez Eraso (2018).

**Objetivo:** Analizar el proceso de resolución de problemas en operaciones básicas que involucren fracciones a partir de la implementación de objetos virtuales de aprendizaje en grado quinto.

**Metodología**: Desarrollar un proceso investigativo fundamentado en el enfoque cualitativo, como un proceso que permite extraer descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, registros de todo tipo, Teniendo en cuenta una investigación de enfoque cualitativo, se considera el método de observación para efectuar una recolección efectiva de información, orientándose en los supuestos teóricos expuestos por Hernández, Fernández y Baptista (2006), quienes compilan diferentes argumentos para determinar que este método, permite no solo tener en cuenta la información verbalizada, sino que además requiere de que el investigador este inmerso en el proceso, pues es el responsable de observar los detalles importantes, que pueden incidir en la interpretación de resultados y que pueden estar reflejados en comportamientos, imágenes, entornos, actividades e interacciones, además de las declaraciones que los individuos objeto de estudio pueden expresar.

**Conclusiones:**

- El proceso de resolución de problemas en operaciones básicas con fracciones, implica el aprendizaje de una metodología que aborda tres dimensiones: los recursos, la heurística y el control, articuladas con la metacognición; para incluirlas acertadamente, los estudiantes deben apropiar, además de la teoría conceptual, lineamientos de planificación que van desde el reconocimiento de las variables, pasando a diseñar un procedimiento para la resolución y la adecuada ejecución del mismo.
- Los principales obstáculos epistemológicos identificados en la resolución de problemas, fueron: la experiencia anterior y el obstáculo verbal, los cuales representaron un limitante al momento de aplicar la planificación; inicialmente, se identificó dificultades en los estudiantes para expresar respuestas que incluyeran cálculos y la capacidad explicativa del porqué de las respuestas dadas. Fue en el proceso de la implementación de la unidad didáctica y el desarrollo de sus respectivas actividades que fueron superados gradualmente; a través del proceso metacognitivo en cada fase y la interacción posibilitada con los objetos virtuales de aprendizaje.

### 2.2.2 Relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones

**Autores:** Florencia Stelzer, María Laura Andrés, Lorena Canet-Juric, Isabel Introzzi y Sebastián Urquijo (2016).

**Objetivo**: Analizar las relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental de las fracciones durante su aprendizaje.

**Metodología:** Se efectuó una búsqueda bibliográfica en las bases de datos ERIC, PsycInfo, Scielo y Redalyc, con los siguientes términos en español y sus equivalentes en inglés: fracciones (fractions), conocimiento conceptual (conceptual knowledge), conocimiento procedimental (procedural knowledge) y niños (children), combinados de diferente forma con el operador booleano AND (Y).

**Conclusiones:** Los resultados de esta búsqueda permitieron hallar quince artículos empíricos que pueden clasificarse en cuatro grupos de investigaciones: las que indican una relación bidireccional, las que sugieren una relación unidireccional, las que muestran cierta independencia o restricciones en su vinculación y, por último, las que señalan que las relaciones varían según los sujetos. Esta falta de acuerdo podría explicarse por ciertas diferencias metodológicas de los estudios, por ejemplo, diferencias en el grado de consolidación del conocimiento de las fracciones de los participantes, el sentido conceptual o la habilidad procedimental estudiada, el tipo de enseñanza matemática recibida, etc. Por ello se sugiere que, para profundizar la comprensión de las relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones, estos aspectos metodológicos deben ser controlados.

### 2.2.3 Diseño y aplicación de una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje significativo de las fracciones en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa José Asunción Silva del municipio de Medellín

**Autor:** Jair Rafael Hoyos Duque (2015).

**Objetivo:** Buscar estrategias didácticas necesarias para la implementación y adquisición del concepto de fracciones que permita un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado cuarto de la básica primaria.

**Metodología:** La monografía de análisis de experiencias o estudios de caso en donde se realiza un estudio de investigación práctico y experimental, se realiza la descripción de los pasos para su desarrollo, se hace la comparación con otros estudios similares y se emiten posteriormente las conclusiones.

**Conclusiones:**

a) El pensamiento numérico y sistemas numéricos parece complejo, sin embargo, los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático al relacionarse con situaciones cotidianas, resulta muy interesante y comprensible para los estudiantes.
b) Las situaciones problema incentivan a la participación y el trabajo en grupo.
c) Se despierta mucha atención en una clase cuando se orienta a las estudiantes a buscar el conocimiento y sacar sus propias conclusiones.
d) Los avances evidenciados por los estudiantes en el tema de fracciones son gratificantes y significativos, se nota cuando en su diario vivir mencionan la relación del tema con eventos comunes como la distribución de las horas de clase (un cuarto de hora, media hora, un sexto de hora).
e) Generar preguntas a los estudiantes y situaciones problema en el aula los estimula para el desarrollo del pensamiento, incentiva a la investigación, los invita a descubrir nuevos conocimientos; en este punto se hace indispensable recordar el papel de docente como guía, orientador y facilitador del proceso de aprendizaje y no como poseedor del conocimiento siempre en busca del mejoramiento de la calidad educativa y la superación de sus estudiantes.

### 2.2.4 Dificultades y errores en las solución de problemas con números racionales

**Autor:** Raúl Octavio Morales Díaz (2014).

**Objetivo:** Reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica al enfrentarse a la resolución de problemas con los números racionales.

**Metodología:**

Este estudio obedece a un enfoque cualitativo con un alcance interpretativo que pretendió en primera instancia identificar los errores que se evidencian en la realización de talleres de resolución de problemas cuando se enfrentan con los números racionales.

El proceso de recolección de la información se planteó en cuatro momentos relacionados entre sí. Es de anotar que todos los talleres se estructuraron con cinco situaciones problema, desde los constructos teóricos del número racional planteados por Kieren (citado en Morales, 2014).

**Conclusiones:** Se reconoce que de acuerdo con Rico y teniendo en cuenta lo propuesto por Radatz (citados en Morales, 2014), se pueden clasificar los errores presentados en la resolución de problemas que requieren números racionales así:

- Algunos errores de los estudiantes pueden deberse a dificultades en el manejo del lenguaje matemático, esto se demuestra en las dificultades de comprensión de los problemas, la falta de comprensión semántica de las situaciones lleva generalmente a errores, debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje formal.
- Para el caso de las situaciones presentadas en donde había un manejo espacial, relacionado con formas geométricas o particiones dentro de una forma circular, el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos estudiantes.
- Algunos errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, en este aspecto se centraron gran parte de los errores de los estudiantes, debido a la complejidad que genera en los estudiantes los números racionales.

También se incluyen en este tipo de errores, la dificultad en el manejo de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Parece que el origen de estos errores, es necesario situarlo en la inexistencia de una ruptura en la idea de número que tiene el estudiante, pues traslada significados de los números naturales a los números racionales; por lo tanto resulta conveniente presentar situaciones en las que los números naturales se muestren ineficaces, para solucionar situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación; de este modo, los estudiantes asociarán los números naturales a los usos y características propias del contexto en el que aparecen y, en consecuencia, ampliarán su idea de número a otros contextos diferentes.

### 2.2.5 Enseñanza y aprendizaje de las fracciones en un contexto basado en la resolución de problemas

**Autor:** Irving Alfredo Valencia Zambrano ( 2013).

**Objetivo:** Elaborar e implementar actividades basadas en la resolución de problemas, para estudiantes de primer año de Educación Media General.

**Metodología:** El presente estudio estuvo enmarcado en el paradigma cualitativo; se desarrolló una investigación de campo del tipo Investigación-Acción Participativa, en un aula de clase con estudiantes de una institución oficial.

**Conclusiones:**

- Con la generación de estas actividades se consiguió, no sólo reorientar la praxis educativa del docente, sino también mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas vinculados al contenido matemático y con el contexto real.
- A medida que se desarrollaban las actividades y estrategias aplicadas en la investigación-acción, se observó que los estudiantes mejoraron en la interpretación y resolución de los problemas con fracciones basados en un contexto real. Esto se evidenció en los resultados presentados en las hojas de trabajo, los cuales fueron satisfactorios.

- Las categorías que emergieron del análisis de la acción, evidenciaron que, a través de la resolución de problemas contextualizados en la realidad, se promovió la participación y reflexión activa de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones.
- La investigación-acción permitió que el docente rectificara o reorientara las estrategias y actividades previstas en la investigación, mejorándolas para una mayor comprensión y participación por parte del estudiante.
- El docente investigador-participativo, presentó un papel importante, ya que para los estudiantes era necesario la orientación en el ámbito académico, personal y social, además la experiencia permitía que el docente interactuara con los estudiantes de una manera sencilla y factible.
- La matemática realista presentada en la investigación, permitió que los estudiantes se identificaran con algunos problemas, acercándolos a la realidad social y permitiendo trabajar contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, aportando así una mejor comprensión e interpretación de dichos problemas.
- Un aspecto importante, es que los estudiantes se integraron aún más, al trabajar en grupos, intercambiando integrantes y aportando ideas entre ellos para la resolución de los problemas.

### 2.2.6 La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta didáctica para el Colegio Los Alpes IED

**Autor:** César Augusto Ruiz Cruz (2013).

**Objetivo:** Presentar una Propuesta Didáctica, en Educación Básica, para la enseñanza de las fracciones, vistas desde dos puntos de vista, como relación parte-todo y como cociente.

**Metodología:** Se realiza una breve reseña histórica a través de varias culturas antiguas revisando el concepto de fracción, luego se hace un énfasis en el aspecto matemático del concepto de fracción y, finalmente se presenta una serie de guías que trabajan las fracciones desde la interpretación parte-todo y como cociente.

**Conclusiones:**

Luego del desarrollo de una serie de guías que trabajan las fracciones desde la interpretación parte-todo y como cociente, se observa que el nivel de interpretación y aplicación de los diferentes conceptos relacionados con las fracciones aportan al mejoramiento del nivel académico del colegio.

La Propuesta para el Colegio Los Alpes IED, en Bogotá, en grado sexto, en la jornada de la mañana apunta a mejorar los desempeños en el Área de Matemáticas en las "Pruebas Saber" en la Competencia Numérica, ya que según el informe de resultados obtenidos por el Colegio, el puntaje promedio es inferior al de los establecimientos educativos de Bogotá.

### 2.2.7 La resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias. Aspectos didácticos y cognitivos

**Autora:** María Paloma Varela Nieto (1994).

**Objetivo:** Estudiar la eficacia del proceso de entrenamiento de un grupo de estudiantes en una metodología investigativa de resolución de problemas.

**Metodología:**

La resolución de problemas de enunciado abierto. Metodología de trabajo en el aula aborda, a modo de "problema", la descripción de todo el proceso realizado con los estudiantes, enmarcado en una orientación constructivista del aprendizaje. Este proceso se ha llevado a cabo bajo dos supuestos de trabajo:

- La metodología de tipo investigativo propuesta a los alumnos va a conseguir una evolución positiva en su capacidad de resolver problemas.
- El entrenamiento realizado va a promover en los estudiantes una actitud positiva hacia el aprendizaje de las Ciencias en general y hacia la resolución de problemas en particular.

En la segunda parte, se aborda la evaluación de todo el proceso, planteada como una reflexión crítica sobre todos los momentos y factores que intervienen en el mismo.

**Conclusiones:**

En síntesis, los resultados son muy positivos y corroboran el planteamiento inicial de los investigadores en el sentido de afirmar que, una metodología como la propuesta va a tener un elevado nivel de eficacia con los estudiantes, promoviendo en ellos un cambio metodológico y actitudinal.

- Luego de las experiencias de entrenamiento con grupos de profesores en formación inicial y permanente, tanto españoles como ingleses y franceses (Garret et al.,1990 y Gil et al. 1988ª y 1991, citados por Varela, 1994). El tipo de entrenamiento seguido se basa en un programa de actividades donde inicialmente se plantean preguntas relevantes tales como:
    - ¿Qué entender por problema?
    - ¿Cómo enfocar a resolución de un verdadero problema?
    - ¿Qué es lo que en los enunciados habituales dificulta un tratamiento científico de la resolución de problemas y, en panicular, quita todo sentido a la formulación de hipótesis?
- En opinión de los investigadores, los grupos de profesores implicados han llegado a la conclusión de que los problemas hay que plantearlos como lo que son: situaciones que, inicialmente, no se saben resolver.

La posible solución hay que concebirla como un proceso de investigación y en este sentido, admiten la incoherencia de la utilización de los datos como punto de partida:

> Los diferentes grupos de profesores con experiencias y antecedentes muy diferentes, han señalado lo absurdo de partir de datos sin una comprensión profunda, previa, de la situación problemática estudiada. Esta crítica constituye, desde nuestro punto de vista, un paso esencial para desbloquear la enseñanza

habitual de los problemas y sus limitaciones (Gil et al., 1988[a], citado por Varela, 1994, p. 62).

- Una vez planteado el “problema” los profesores trabajan con el mismo modelo de resolución que se ha descrito para los estudiantes procediéndose a evaluar, al final del proceso, la valoración del mismo.
- En todos los casos los autores afirman que se han conseguido diferencias significativas a favor de este planteamiento investigativo, cuando se comparan con la metodología utilizada habitualmente en nuestras aulas.
- Todos los datos aportados validan el modelo utilizado desde una perspectiva empírica, y este hecho justifica, todas las aportaciones teóricas realizadas, que se han utilizado en la investigación.

### 2.2.8 Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto

**Autora:** María Elizabeth Hurtado Orduz (2012).

**Objetivo:** Desarrollar las capacidades de los niños para comprender textos, hacer estimaciones en situaciones que involucran las fracciones; proponer soluciones en diferentes contextos, resolver problemas y valorar e interpretar los resultados.

**Metodología:** Para el desarrollo de la propuesta didáctica para la enseñanza de fracciones, se consultó las propuestas que han diseñado y aplicado diferentes autores para la enseñanza de este mismo tema a niños; no obstante, la estrategia propuesta en este trabajo se basa especialmente en la resolución de problemas, teniendo en cuenta los cuatro pasos básicos que propone Polya: - Comprender el problema - Concebir un plan - Ejecutarlo - Examinar la solución.

Se aplicó una evaluación inicial diseñada con el propósito de indagar por los conocimientos de los niños sobre las fracciones. Los resultados se valoraron para identificar las dificultades que presentan los alumnos para comprender el significado de las fracciones y los procedimientos que utilizan cuando aplican las fracciones en la solución de problemas.

Los estudiantes realizaron las actividades propuestas, primero de manera individual y luego en grupos de tres estudiantes. Los procedimientos fueron valorados por los integrantes de cada grupo, para acordar la solución y enseguida socializarla al colectivo. Allí se interpretaron las propuestas de cada grupo, se hizo la valoración final de los resultados y se acordaron las conclusiones y los comentarios.

La evaluación final se diseñó para contrastar los logros de los alumnos con la estrategia aplicada y las dificultades de aprendizaje que persisten. La valoración de los procedimientos y resultados del instrumento de evaluación permiten explorar el desarrollo de los procesos metacognitivos de los alumnos con el aprendizaje de las fracciones, a tener en cuenta para propuestas futuras.

**Conclusiones:**

Es importante proponer actividades para valorar el estado del aprendizaje de los alumnos. Este diagnóstico permite diseñar actividades y revisar estrategias para superar dificultades de aprendizaje del tema que se desarrolla. Así mismo, en preciso hacer un seguimiento permanente a los logros alcanzados por estudiantes.

Durante la realización del trabajo se pudo observar que alrededor del 80% de los estudiantes lograron argumentar los procedimientos empleados en la solución de problemas. Además, esta metodología les permitió participar y ser protagonistas de su propio aprendizaje, ya que ellos tenían que leer, analizar, proponer y argumentar las soluciones a cada uno de los problemas que se le planteaba. Teniendo en cuenta estos avances, se puede asegurar que lograron dar significado a la fracción.

Se incrementó el número de estudiantes que acertaron en la solución de los problemas propuestos; en el estudio exploratorio se observó que alrededor del 17% de los estudiantes lograron responder correctamente; al aplicar talleres diseñados con base en solución de problemas, este porcentaje se incrementó aproximadamente al 80%. Se verifica entonces que los estudiantes responden mejor ante situaciones problémicas.

Con respecto a capacidad para comparar fracciones, se nota un avance significativo, puesto que en el estudio exploratorio solamente el 20% lo resolvió adecuadamente, siendo la gráfica el único instrumento para la solución; mientras, en la evaluación final se observa que el 86.7% lograron dar solución haciendo uso de la gráfica y del algoritmo.

Este incremento permite establecer que la propuesta ayuda a comprender el significado de fracción, así mismo genera retos mentales en los niños. No obstante, al igual que cualquier otra estrategia, no es efectiva para la totalidad de los estudiantes, pues se observa que cerca del 15% de ellos no alcanzan el nivel de comprensión esperado.

Teniendo los resultados de la evaluación final, prevalece una tendencia a realizar gráficas para dar solución a los problemas planteados; de esta manera, se infiere que existen deficiencias en el manejo de algoritmos.

La socialización de los resultados modificó positivamente el ambiente de aprendizaje, por cuanto los estudiantes pudieron expresar sus aportes y a la vez aclarar sus dudas.

## 2.3 Marco teórico

### 2.3.1 La teoría de situaciones didácticas

Dentro de esta disciplina (la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa), Guy Brousseau desarrolla la “Teoría de Situaciones”. Se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Guy Brousseau (1999, citado en Panizza, 2003) afirma que:

> La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo estos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos.
>
> La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores (p. 3).

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986, citado en Panizza, 2003) de esta manera:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dedificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (p. 3).

Paniza (2003) continúa exponiendo:

> Situaciones didácticas. Situaciones a-didácticas. Devolución
> El rol fundamental que esta teoría otorga a la "situación" en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la descripción que tomamos de Brousseau (1999):
>
> "Hemos llamado ´situación` a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición ´anterior` de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad

al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético"." La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Brousseau, en 1982, la definía de esta manera (citado por Galvez,1994).

"Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución."

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central -dentro de la organización de la enseñanza-, a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica), definida así por Brousseau (1986):

"El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego" (pp. 3-4).

### 2.3.2 El enfoque de resolución de problemas

En la enseñanza de la matemática, Isoda y Olfos (2009) desarrollan el enfoque de resolución de problemas a partir de:

> El problema de la clase. ¿Qué se entiende por problema?, ¿qué es un problema abierto? Tradicionalmente los textos de matemática han incluido ejercicios al final de cada unidad, para que los alumnos consoliden sus aprendizajes por medio de la práctica repetitiva y el encadenamiento de algunos comportamientos.
>
> En adición a los ejercicios, algunos textos incluyen problemas de aplicación, es decir, enunciados verbales referidos a situaciones vinculadas de manera casi directa a los procedimientos ejercitados. Tales problemas no ponen a los alumnos en una situación que derive en la construcción de un conocimiento nuevo para ellos, sino que los expone a una situación en la cual han de integrar los conceptos asociados a los procedimientos recién ejercitados.
>
> En el enfoque de enseñanza, donde el procedimiento que da origen a la ejercitación (algoritmo de la multiplicación, por ejemplo) deriva de la comprensión del concepto asociado (producto, por ejemplo como grupo de objetos que se repite cierta cantidad), el problema de aplicación es sólo un ejercicio.
>
> El verdadero problema es aquel que pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de procedimiento inmediato para su resolución. Por ende, un problema se define en cuanto a su relación con el sujeto que lo enfrenta y no en cuanto a sus propiedades intrínsecas. Un problema puede ser un ejercicio para un alumno de un curso superior y de hecho un enunciado que fue un problema para un alumno deja de serlo una vez que lo resuelve.

El problema por naturaleza es abierto. Para los matemáticos un problema está abierto si no se conoce su solución. Por ejemplo, la conjetura de la existencia de infinitos primos impares consecutivos es un problema abierto.

Los problemas abiertos son de especial interés para desarrollar en los alumnos una conducta de investigación y su pensamiento heurístico. Tienen un valor formativo, más que informativo en la formación matemática de los niños.

Un buen problema es accesible a la mayor parte de los alumnos, por ende son buenos aquellos problemas que admiten varios enfoques para su resolución, tanto intuitivos como formales, siendo apropiados para atender a la diversidad de los alumnos de un curso.

Un problema que no tiene solución única o que admite soluciones parciales es particularmente útil para trabajarlo en clases, en el aula donde los ritmos de aprendizaje son distintos. Es usual que los alumnos con mayor habilidad para resolver problemas en matemáticas experimenten la alegría de resolver un problema. Aquellos problemas que admiten distintos caminos y distintas soluciones dan la posibilidad que simultáneamente varios alumnos experimenten la alegría de resolver el problema con originalidad.

En virtud de estos criterios, la selección y el análisis de los problemas antes de su aplicación en el aula constituyen una tarea de relevancia pedagógica.

Los problemas encierran potenciales muy variados. La selección y estudio de buenos problemas es una tarea compleja y valiosa en la didáctica de la matemática.

Un buen problema para la clase de matemáticas es consistente con el objetivo de la clase, con los objetivos de mediano plazo de la componente matemática del currículo y con los objetivos transversales del mismo. Un buen problema permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos en clases anteriores. También es un buen problema aquel que desarrolla habilidades genéricas propias del quehacer en matemáticas, como pensamiento inductivo, modelación, formulación, representación, argumentación y validación.

- ¿Por qué centrar la clase en la resolución de un problema?

Porque este tipo de clases es proclive a la consecución de los múltiples objetivos que se propone el currículo a través de la matemática escolar. Un problema es un reactivo que involucra al alumno en una actividad orientada a la abstracción, la modelación, la formulación, la discusión, en fin. A partir del enunciado del problema, el profesor entrega a los alumnos la responsabilidad de construir su conocimiento guiando la dinámica de la clase hacia la discusión, la reflexión o la ejercitación según los objetivos propuestos y el tiempo previsto para ello.

El enfoque de resolución de problemas en matemáticas se ajusta a las demandas sociales del currículo. Esto es, a la aspiración de que los ciudadanos se incorporen constructivamente a un país en que la tecnología ha dejado para las máquinas las tareas intelectuales repetitivas y las manuales que exigen fuerza física. El requerimiento social actual y futuro es la capacidad de integración al medio y de adaptación constructiva a los cambios que muchas veces no se prevén.

Desde la perspectiva psicológica, el aprendizaje puede ser entendido como una reconstrucción de la comprensión. La memorización contribuye a que los aprendizajes se retengan pero sólo como conocimientos aislados. Es la resolución de problemas la que lleva al alumno a integrar los conocimientos nuevos a los ya adquiridos, favoreciendo el enriquecimiento de la comprensión y por ende un mejor aprovechamiento de las capacidades personales para la vida del individuo y de su colectivo.

Teniendo en consideración que los formatos de las clases inciden en los objetivos de las mismas, podemos precisar que aquellas clases en que el profesor asume un

> rol eminentemente de expositor, o en que la actividad del alumno se reduce preferentemente a la ejercitación, los objetivos de la clase se limitan a aprendizajes reproductivos. En el modelo de clases, centrado en la exploración de un problema nuevo para los alumnos, el ritmo y enfoque de la clase es armoniosamente negociado por el profesor y los alumnos. Si bien la clase no conduce a los alumnos por un camino "óptimo" y uniforme, favorece la vinculación del concepto nuevo con los aprendizajes previos de los alumnos.
>
> Si bien el proceso de exploración es lento, lleva a una comprensión más profunda por parte del alumno y tiene ventajas en otras dimensiones que lo hace más eficiente desde una perspectiva más amplia y de largo plazo. Al tener presente el doble objetivo de la matemática escolar: el formativo (habilidades generales de comunicación, pensamiento y actitudes) y el informativo (destrezas y conceptos), el modelo de aprendizaje productivo de resolución de problemas es más eficiente que el modelo reproductivo, de modelación por repetición (pp. 99-101).

### 2.3.3 Solución de problemas

Para Polya (1965), la resolución de un problema consiste en cuatro fases bien definidas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Donde en las fases anteriores se enfocan en la búsqueda de un "resolutor ideal" Martínez (2010) y cada fase se acompaña de una serie de preguntas que direccionan la actividad hacia la búsqueda de soluciones al problema.

De acuerdo con el trabajo de Polya, Schoenfeld citado en Castro (2008) buscaba en un principio instruir a los estudiantes en heurísticos generales de resolución de problemas, en los cuales no ha tenido éxito. Razón por la cual rompe con la estructura planteada por

Polya y se plantea la necesidad de enseñar heurísticos o estrategias específicas asociadas a tipos de problemas. De lo cual Schoenfeld (1985) citado en Siñerez (2002, p.6), define “las estrategias heurísticas como reglas para tener éxito en la resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan a comprenderlos mejor o hacer progresos a su solución”. Los trabajos de Schoenfeld son por otro lado, la búsqueda constante de explicaciones para el comportamiento de los resolutores reales de problemas (Martínez, 2010).

En Godino (2002) se encuentran los diferentes componentes que propone Schoenfeld (1985) para la resolución de problemas:

1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.
2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles.
3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.
4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

Para Godino, la resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje, los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo, mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas, incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que debe ser el aspecto central en la organización de los contenidos matemáticos.

En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes, así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

### 2.3.4 Aprendizaje significativo

Ausubel, (citado por Tomas, 2011) plantea que “el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse como (Estructura cognitiva)” por lo tanto, es muy importante relacionar la cantidad de información que posee el alumno; esto significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático, el docente debe explorar lo que el estudiante ya sabe sobre el tema, los conceptos que maneja para que el conocimiento no empiece de cero, que los educandos hayan tenido experiencias y adquirido conocimiento que pueda ser aprovechado para su propio beneficio.

Este aprendizaje se da cuando los contenidos matemáticos son relacionados no al pie de la letra con lo que el estudiante ya sabe, es decir que las ideas deben relacionarse con un conocimiento existente (imagen, símbolo concepto) significativo presente en la estructura cognitiva del estudiante, es decir que el docente bebe disponer de dos estrategias didácticas o pedagógicas una donde pueda identificar los conocimientos que ya poseen los estudiantes y la segunda con base en los anteriores resultados logre despertar de la disposición, motivación y participación del estudiante y se pueda dar un aprendizaje significativo.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. (Mesa, 2004)

Dando interpretación al párrafo anterior se toma como ejemplo un caso de aplicación para la enseñanza de la física, si los conceptos de movimiento, aceleración y velocidad están presentes en la estructura cognitiva del individuo entonces estos servirán de anclaje para el aprendizaje del movimiento uniforme rectilíneo y del movimiento uniforme acelerado. (Mesa, 2004)

Dado que en el aprendizaje significativo los conocimientos nuevos deben relacionarse fundamentalmente con lo que el alumno ya sabe, es necesario que se relacionen, de manera sincrónica, un mínimo de condiciones:

1. El contenido que se ha de aprender debe tener sentido lógico, es decir, poseer unas características mínimas, para su organización y estructuración.
2. El contenido debe organizarse con sentido psicológico en la estructura cognoscitiva del educando, mediante la revisión en los conceptos previos.
3. El estudiante debe tener deseos de aprender, motivación; es decir, que su actitud sea positiva hacia el aprendizaje.

***Tipos de aprendizaje significativo según Ausubel***

- Aprendizaje de representaciones

Es el aprendizaje más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, al respecto Ausubel (citado por Gallardo & Camacho, 2008) dice que “Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan” o sugieran por ejemplo cuando se le enseña al estudiante la palabra triángulo el significado de esa palabra pasa a ser representada en concreto se vuelve el equivalente al concepto de triángulo que el estudiante percibe en el momento y significa la misma cosa para él.

- Aprendizaje de conceptos

Los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos" los conceptos son adquiridos a través de dos procesos: formación cuando el concepto se adquiere a través de la experiencia directa es decir de acuerdo al ejemplo anterior el estudiante adquiere el significado genérico del triángulo estableciendo equivalencia entre el símbolo y atributos comunes y asimilación se genera a medida que el niño amplía su vocabulario, así podrá distinguir el triángulo en distintos colores tamaños cuando los vea en cualquier momento (Gallardo & Camacho, 2008).

- Aprendizaje de proposiciones

Este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones. El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario. Luego, estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. (Ramos, del Valle, & Ross, 2006)

### 2.3.5 Didáctica de las fracciones

Para Friz, Sanhueza, Sánchez, Belmar y Figueroa (2008), en su trabajo sobre *Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones*, consideran que:

> El aprendizaje de las fracciones debe tender al desarrollo de competencias matemáticas, por lo tanto, se deben contemplar procedimientos de tipo cognitivo como relacionar, asociar, comparar, anticipar, verificar, argumentar, comunicar; y también involucra actitudes positivas como la autocrítica, el trabajo en equipo, la transferencia de situaciones a la vida cotidiana de los alumnos.

Es deseable que el trabajo sea desarrollado en pequeños grupos, a fin de posibilitar la discusión, contra argumentación y un pensamiento divergente. De la misma forma, no se debe olvidar que los conocimientos previos juegan un papel fundamental en las experiencias; una buena estrategia para sistematizarlos sería a través de un esquema, una figura, un diagrama o una tabla. Para este trabajo, lo recomendable sería que el alumno pudiera discriminar el orden entre diferentes fracciones a través de algoritmos o esquemas concretos. Muchos problemas se hacen más transparentes a través de una representación adecuada de los elementos más relevantes que intervienen en la situación.

El profesor debe ser un mediador que posibilite la mayor comprensión y manejo de cada proceso cognitivo, al mismo tiempo que permita al niño la mayor transferencia posible a todas las situaciones de aprendizaje no solo escolar, sino también extraescolar.

Debe transformar su quehacer pedagógico tradicional en un verdadero desafío de “aprender a aprender”, por lo tanto, para la propuesta se tendrá en cuenta la estrategia de resolución de problemas propuesta por Valls (2007), que considera las siguientes fases sobre las cuales se “problematizará” a los alumnos en el saber matemático de las fracciones:

Primero. Comprender el problema Leer el enunciado, identificar lo que se sabe (los datos del problema) y lo que se pide (la pregunta), usar alguna representación que ayude a comprender mejor el problema: materiales, diagrama, papel cuadriculado etc. y expresar el enunciado con las propias palabras.

Segundo. Buscar una o varias estrategias de resolución. Hacer un esquema, una figura, un diagrama, una tabla, experimentar para tratar de identificar o conjeturar alguna propiedad, observar patrones o regularidades, estudiar casos particulares, usar el ensayo y error, eliminar una condición, suponer el problema resuelto: pensar desde el final o buscar un problema semejante.

Tercero. Aplicar la estrategia seleccionada. No desmotivarse fácilmente y tratar de llegar hasta el final, pero si la estrategia no funciona, buscar otra.

Cuarto. Revisar el proceso. Explicar, cuando se tenga una respuesta, lo que se ha hecho de forma que otra persona pueda entenderlo, intentar resolverlo utilizando una estrategia diferente o preguntarse qué ocurriría si se cambian los datos, las condiciones del problema o la pregunta.

## 2.4 Marco conceptual

A continuación, se hace la distinción de algunos conceptos necesarios que orientan la comprensión del presente trabajo.

### 2.4.1 La historia de los números

La presentación de la historia de los números que a continuación se expone, está tomada principalmente de Ifrah (2000) y de Recamán (2002).

Las primeras nociones matemáticas se encuentran inmersas en los estilos de vida de los primeros grupos de personas y civilizaciones. Para estos grupos se hizo indispensable contar y medir, cuando se dedicaron a la agricultura y el pastoreo, y usar formas geométricas en la elaboración de cerámicas y esculturas que más adelante comercializarían con otros pueblos. Es decir, a la par del desarrollo humano y de sus sociedades se origina el concepto de número y surge la necesidad de crear nombres para designarlos.

En la primera civilización Mesopotamia se desarrolló un sistema de comunicación escrita y con ella surgen las primeras representaciones simbólicas de los números. Dado que hay infinidad de números era imposible inventar y recordar un símbolo para cada uno, la solución, insinuada originariamente por los babilónicos, fue utilizar una cantidad finita de símbolos que pudiera ordenarse de infinitas maneras. Es decir, que el valor de un signo no dependería solo de forma sino de su posición. Sin embargo, se hizo necesario representar la ausencia de unidades y es en Babilonia hacia el año 200 a.c que aparece el símbolo del 0. Sin embargo, al otro lado del mundo, la civilización Maya y luego la Inca, también formalizaron sus sistemas de numeración posicional que incluía el 0 y un símbolo para él. De esta forma se evidencia como los números surgen dondequiera que aparece una civilización, así sean representados de varias formas y con diferentes símbolos.

Se fueron desarrollando varios sistemas de numeración, los egipcios lo hicieron a través de jeroglíficos, en este sistema, cada una de las potencias de 10 era representada por un símbolo diferente y los otros números eran representados mediante una repetición del símbolo. Pero, luego los escribas idearon un sistema hierático en el que había un símbolo diferente para los números entre 1y 9, para cada múltiplo de 10 entre 10 y 90 y para los múltiplos de 100 entre 100 y 900. Sistemas similares utilizaron los hebreos, los griegos y los chinos; estos últimos, inventaron un tablero para contar (precursor del ábaco). Por otro lado, los babilonios desarrollaron su sistema de numeración basado en el número 60, los Mayas en el número 20 y los incas en base 10. Sin embargo, es en la India donde se origina el sistema basado exclusivamente en 10 símbolos diferentes, pero solo se desarrollan por completo años más tarde, en el siglo VII y recibe el nombre de indo-arábigo. En efecto, los musulmanes durante las incursiones islámicas a la India recogen estos símbolos y los siguen difundiendo en sus conquistas.

Las civilizaciones luego de idear una forma sistemática para escribir los números pasaron a realizar cómputos y crearon reglas para realizar operaciones aritméticas básicas. Los egipcios reconocen la aparición de los números fraccionarios, como se evidencia en el papiro de Rhind (principalmente) y en el papiro de Moscú; gracias a sus conocimientos construyen la gran pirámide Gizehn hacia el año 2900 a.c.

Debido a cambios políticos y económicos de esa época se produjo la desaparición de las civilizaciones de Egipto y Babilonia, y el surgimiento de otros pueblos como los hebreos, fenicios, asirios y griegos. Sobre todo, los griegos que logran convertir a Grecia en una poderosa civilización y lugar de residencia de grandes pensadores, como Tales de Mileto y Pitágoras. Este último personaje fundó con sus discípulos la secta de los pitagóricos con quienes inició el estudio de las propiedades de los números dando origen a la moderna teoría de números, se les atribuye la primera demostración del teorema de Pitágoras, por eso lleva su nombre, entre muchos aportes tanto en la aritmética, geometría y otras ramas de las matemáticas, como en otras ciencias. El imperio griego continua su expansión y llega a Mesopotamia, y convierte a Alejandría como capital principal, en esta se había fundado el Museo o “templo de las musas”, centro que reúne matemáticos como Euclides, Eratóstenes de Cirene e Hiparía. En la civilización griega también se destacan otros grandes pensadores como Platón, Arquímedes, Diofanto y Aristóteles quien fundó las bases de la lógica.

A mediados del siglo VII surge el islamismo, tras su expansión por terrenos grecorromanos se recopilaron varios manuscritos de Grecia y la India que se tradujeron al árabe, se creó un instituto de investigaciones “la casa de la sabiduría”, para llevar a cabo estudios que ampliaron lo teórico y, sobre todo, contribuyeron a la aplicación práctica de las matemáticas. Se pueden considerar tres grandes aportes de los musulmanes, el desarrollo completo del sistema posicional decimal de numeración para que incluyera las fracciones decimales, el estudio sistemático del algebra, y haber comenzado a considerar la relación entre el álgebra y la geometría. Se destacan los textos escritos por Al-Juwarismi que introduce los fundamentos del sistema posicional en base 10 y hace los principales aportes del algebra; por Abu Al-Hasan Al-Uqlidisi (920-980) que introduce las fracciones decimales; y por Jemshid Al-Kashi que desarrolla una notación conveniente para las fracciones decimales.

En la edad media, el cultivo de la matemática no murió del todo como se dice, se tradujeron gran cantidad de manuscritos griegos, hindú y árabes al latín, surgen las primeras universidades, se inicia con fuerza el capitalismo y todo lo que tenga que ver con números se hace indispensable. El matemático más destacado en esta época fue Fibonacci (1170-1240) y su obra más destacada el libro del cálculo que contiene muchos problemas formulados con ayuda de su creatividad.

Durante el renacimiento se perfecciona el álgebra, aparecen los números negativos, llamados inicialmente números sofistico por Cardano (1501-1576), se introducen los símbolos de paréntesis y exponentes al algebra por Bombelli (1526-1572), es articulada una teoría de ecuaciones por Viete y aparece la notación para las fracciones decimales por Simón Stiven (1548-1620).

En el siglo XVII, gracias a la consolidación de la imprenta, se facilita la comunicación y el intercambio de ideas entre estudiosos de la matemática. Especialmente, se reconocen los aportes de Fermat tanto con sus teoremas, como en la teoría de la probabilidad y la geometría analítica, aunque no hizo publicaciones porque consideraba que era una pérdida de tiempo el sustentarlas y explicarlas, luego de su muerte se publican algunos apuntes y manuscritos. También sobresale en esta época el trabajo realizado por Newton y Leibniz en el cálculo infinitesimal.

En el siglo XVIII se destaca el trabajo de Euler quien se dedicó a la investigación, fue el primero en hacer demostraciones rigurosas de muchos teoremas y propuestos por Fermat, demostró el producto de dos cantidades negativas. Posteriormente, en la revolución francesa se establece el sistema métrico y se acuerda el metro como unidad de medida.

En el siglo XIX se destaca el trabajo de Gauss considerado el príncipe de las matemáticas a quien se le atribuyen muchos logros, pero el más reconocido es el descubrimiento de la geometría no euclidiana. Otro personaje destacado en este siglo es Galois que se interesó en la solución de ecuaciones de grado superior al cuarto. Durante el siglo XX los matemáticos profesionales se concentraron en las universidades o institutos, entre ellos, Hilbert, Gödel, Hardy, Ramanujan, Erdös quien demostró un teorema de Chebyshev y por último Wiles que logro demostrar el ultimo teorema de Fermat en 1994.

A la par de este intento de barrido histórico del origen de los números, cabe resaltar que en este trabajo se aborda un tema específico: los números fraccionarios cuyo origen apunta a la necesidad contar, medir y repartir. La evidencia más antigua sobre el uso de los números fraccionarios está en el papiro de Ahmes (o papiro de Rhind) y en el papiro de Moscú. En ellos los egipcios presentan problemas de la vida diaria que se resolvían mediante operaciones con fracciones. Las fracciones se expresaban colocando el jeroglífico "boca", que significaba "parte" en el numerador y la expresión numérica específica en el denominador, excepto casos especiales (2/3, 3/4), el único numerador de las fracciones egipcias fue la unidad. Para operar una cantidad como 3/5, lo descomponían en una suma de fracciones con denominador 1 (1/5+1/5+1/5). Sin embargo, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones hacia el siglo VI.

## 2.4.2 Las fracciones

La conceptualización de las fracciones, su enseñanza y aprendizaje se considera una de las temáticas a las cuales se le presta mayor atención y que es abordada en su estudio tanto a nivel nacional como internacional (Flores, 2011) dada las dificultades de su enseñanza y aprendizaje y que sin embargo se consideran una estructura de amplia riqueza y complejidad, puesto que su aplicación está dada en múltiples contextos como la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana en los cuales representa diversos significados (De León y Fuenlabrada, 1996).

Considerando que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es una necesidad latente en los procesos escolares se hace fundamental partir de su definición que según Kieren (1984, citado por Valdemoros 2004) "señala que el significado de cociente está ligado a situaciones de reparto equitativo de cierto número de objetos, entre un número determinado de personas" (p. 4), dicho significado semántico dado en la expresión "a/b" se constituye en la abreviación de "a dividido entre b" (Valdemoros, 2004).

Así mismo, Fandiño (2009) afirma:

> "Fracción" deriva del término latino "fractio", es decir, "parte obtenida rompiendo", es decir "romper". Por lo tanto, es erróneo pensar que, en el significado original etimológico de "fracción", ya esté comprendida la solicitud

> (que es específica sólo para la matemática) de que las partes obtenidas con la acción de romper sean “iguales” (p. 37)

En este orden de ideas los números fraccionarios hacen parte de los llamados números racionales que según Castaño (2014) describe como:

> Una pareja de números enteros llamados numerador y denominador, con la única condición de que el denominador no sea cero. Se escribirá así: m/n donde m es el numerador y n el denominador. También se puede escribir (y es más usual) m/n con el numerador sobre el denominador, separados por una raya horizontal o vínculo. La segunda forma tiene la ventaja de que la raya reemplaza el paréntesis, tanto en numerador como en denominador. Por ejemplo: a+b/c-d equivale a (a + b) / (c – d) y es más legible. De esta forma de escribir se deriva una forma de hablar: por ejemplo, al racional ¾ se lo llama también “tres sobre cuatro”. A los números racionales también se les llama quebrados, fracciones o fraccionarios, pero estos dos últimos nombres sólo suelen usarse cuando el denominador no sea 1 (p.27).

Y que finalmente Dickson (1991) afirma que:

> Los números racionales” son los números expresables como razón o cociente de dos números enteros y, por consiguiente, entre ellos contamos con todas las fracciones, porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones, esto es, los decimales finitos y los periódicos.

Ahora bien, una vez abordado el concepto, es importante en la presente investigación dar cuenta que para enseñar operaciones con números fraccionarios, se debe comenzar por afianzar el conocimiento del número racional, pues es necesario que además de comprender el concepto y la idea de fracción, se aclare cómo se interconectan, dando información acerca de las variables y relaciones que intervienen; según Kieren (1993) este aprendizaje se puede aplicar mediante un método fundamentado en la visualización de constructo, entendido este como la forma en que el sujeto aprende un objeto de la realidad y lo transforma en un objeto mental para concebir el entendimiento sobre el mismo, en este caso se hace referencia a las fracciones como el constructo y sus interrelaciones como sub-constructos, de los cuales a saber se identifican: relación parte-todo, parte-parte, cociente, razón, operador y medida; que una vez abordados, se pasa a la enseñanza y resolución de operaciones en situaciones problema.

### 2.4.3 Las representaciones

Merino (2012), distingue entre las representaciones: verbal, tabular, pictórica, simbólica (citado en Paladinez, 2018). La Tabla 1 muestra una tipología de las representaciones.

Tabla 1. *Tipos de representaciones (Merino, 2012)*

| **Tipos de representaciónes** | |
|---|---|
| **Verbal** | La representación verbal es una forma de exponer la información mediante el uso del lenguaje natural. |
| **Tabular** | La representación tabular es una tabla de datos que sirve para organizar, relacionar y representar cantidades numéricas, desde cualquier otra forma de representación. |
| **Pictórica** | La representación pictórica es una forma visual de representación, que ayuda a interpretar y relacionar información. Se caracteriza por la ausencia de notaciones simbólicas. La representación pictórica contiene dibujos. |
| **Simbólica** | La representación simbólica incluye *la numérica* (números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático) y *la algebraica* (uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar). En algunos casos puede ser *múltiple* las cuales resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos anteriormente. |

### 2.4.4 Las interpretaciones de una fracción

Teniendo en cuenta los estudios de Streeflan (1993) y Llinares y Sánchez (2003), Heuvel-Panhuizen (2009), se propone la siguiente clasificación de las interpretaciones de una fracción:

I. Relación parte-todo y la medida:
   1. La fracción en conjuntos continuos de área.
   2. La fracción en conjuntos discretos.

II. Relación de comportamiento entre dos situaciones o variables.
   1. La fracción como cociente.
   2. La fracción como probabilidad.
   3. La fracción como operador.
   4. La fracción como porcentaje.
   5. La fracción como razón de cambio.

Y tomando las definiciones panteadas por Figueroa (2005), en el proyecto de aula *Solucionando problemas de medición, variación, y aleatoriedad haciendo uso de las fracciones*, se presentan los siguiente conceptos:

#### *2.4.4.1 La relación parte-todo y la medida*

Al trabajar en esta interpretación se ubica primeramente un 'todo' (continuo o discreto), el cual se divide en partes congruentes (puede ser de las partes de una superficie o la cantidad de objetos). Mediante la fracción se observará la relación que existe entre un determinado número de partes y el número total de partes.

Al 'todo' se le da el nombre de unidad. Debe haber mucha habilidad para dividir el objeto en partes o trozos iguales.

La fracción en conjuntos continuos de área.
Aquí se concibe como el todo o unidad el área total de la figura geométrica usada como referencia. El denominador representa el número total de subáreas congruentes en que fue dividida la unidad y el numerador de la fracción representa el número de subáreas congruentes escogidas o elegidas.

La fracción en conjuntos discretos.

Aquí se concibe como el todo o unidad al número total de elementos de un conjunto. El denominador representa el número total de elementos del conjunto y el numerador el número de elementos seleccionados.

### *2.4.4.2 La relación de comportamiento entre dos situaciones o variables*

La fracción como cociente.

Bajo esta interpretación se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro (división indicada $\frac{a}{b}$), o bien, dividir una cantidad en un número de partes dadas. La fracción como división indicada ( $\frac{3}{5} = 3 \div 5$) aparece en un contexto de reparto.

La fracción como probabilidad.

Aquí se establece una comparación todo-todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles.

La fracción como operador.

La fracción aparece como un operador aplicado a cierta cantidad o medida. Primero actúa el denominador como repartidor en partes congruentes de la unidad y luego el numerador como multiplicador de esas divisiones, es decir, entendemos el operador $\frac{a}{b}$ como $a.\frac{1}{b}$ .

La fracción como porcentaje.

La relación que se establece entre un número y 100 recibe el nombre particular de porcentaje. Por regla general, los porcentajes tienen asignado un aspecto de 'operador', es decir, al interpretar 'el 60% de 500' se concibe actuando la fracción $\frac{60}{100}$ sobre 500 (dividir 500 en 100 partes y tomar 60). Aquí la unidad o el todo siempre representa el 100%.

La fracción como razón.

Se entiende como una comparación bidimensional, es decir, entre dos situaciones o variables medibles que en ocasiones carecen de límite o de un todo. El numerador indica o de refiere al comportamiento de la primera variable mencionada y el denominador a la segunda variable comparativa. Es una de las interpretaciones más usadas para resolver problemas de variación.

### 2.4.5 Problemas en contexto

Un proceso general de la matemática es la resolución y planteamiento de problemas, según lo estipulado en los lineamientos curriculares (MEN, 1998). Este proceso le permite al estudiante relacionar los conocimientos específicos del área con su contexto y, por ende, dar más sentido a la matemática. En este trabajo se abordan problemas de medición, conteo, aleatoriedad y variación.

### 2.4.6 Pensamientos matemáticos

Los lineamientos curriculares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (1998) hacen referencia a cinco pensamientos que se relacionan con el desarrollo de conocimientos básicos de las matemáticas.

1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos.

> El pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (Mcintosh, citado en MEN, 1998, p. 26).

2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Howard Garner plantea en su teoría de las múltiples inteligencias, que “el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y la resolución de problemas” (citado en MEN, 1998, p. 37).

3. Pensamiento métrico y sistema de medidas.

    El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos. Este también está relacionado con la medida de las cantidades de magnitud, su estimación y aproximación, al igual que con la capacidad de usar instrumentos de medida (Vanegas, Gutiérrez y Galarcio, 2006, p. 97).

4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

"La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre" (MEN, 1998, p. 47).

5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

"El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica" (MEN, 1998, p. 50)

# Capítulo 3

# Metodología

## 3.1 Tipo de trabajo

Este trabajo que tiene como objetivo "utilizar las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados, en la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad" se enmarca en el paradigma cualitativo porque posee un enfoque humanista para intentar comprender en y desde la práctica una realidad determinada por la activa interacción de los estudiantes participantes, observar y estudiar en la experiencia de aprendizaje los procesos de interpretación y representación de las fracciones generadas en el aula de clase durante la solución de problemas en diferentes contextos.

Luego de la recolección de datos, este trabajo no pretende generalizar de manera probabilística los resultados, al contrario, es de carácter descriptivo y su aporte es la riqueza interpretativa, contextualización del entorno, la descripción de situaciones generales y particulares de los estudiantes, sus avances o dificultades en el proceso de interpretación y representación de las fracciones y su utilidad en la solución de problemas.

## 3.2 Instrumentos metodológicos

En la fase de ejecución del trabajo se implementarán en su orden los siguientes instrumentos:

Taller diagnóstico: Se aplicará un taller inicial diseñado con el propósito de indagar los conocimientos previos que tienen los niños sobre las fracciones, posterior a esto, el docente afianzará conceptos sobre las interpretaciones y representaciones de una fracción y planteará algunos algoritmos de tal manera que el estudiante tenga herramientas para contextualizar lo teórico y aplicarlo en la solución de problemas (ver Anexo A).

Taller de afianzamiento: se desarrollará un taller dividido en dos sesiones: en la primera se fortalecerá la interpretación y representación de las fracciones como conjuntos continuos de área, como conjuntos discretos, como cociente y como probabilidad. A través del trabajo orientado en clase por la docente para la solución de ocho problemas de medición, conteo y probabilidad.

En la segunda sesión se enfocará el trabajo colaborativo en la interpretación de la fracción como operador, como porcentaje y como razón de cambio y el uso de estas para solucionar seis problemas de conteo y variación.

Durante el desarrollo de los talleres de afianzamiento la docente expone de manera general al grupo de estudiantes diversas maneras en las que pueden utilizar las representaciones, interpretaciones y operaciones de las fracciones para solucionar problemas de diferentes contextos. Aunque, se centra en orientar de manera individual a cada estudiante, resaltando sus avances a través de la asignación de monitorías, identificando sus debilidades y motivando la superación de estas con más explicaciones. A partir del trabajo por monitorías, se verifica que la totalidad de estudiantes solucionen todo el taller (ver Anexo B).

Taller final: se realizará un taller con mayor nivel de complejidad que incluye siete problemas de medición, conteo, variación y aleatoriedad. El estudiante, de manera individual y con ayuda mínima de la docente, deberá utilizar diferentes interpretaciones y representaciones de las fracciones para darle solución a cada uno de ellos (ver Anexo C).

## 3.3 Población y muestra

Este trabajo se realizará en la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de la ciudad de Neiva – Huila de carácter público y sector urbano. La población a la cual se dirige eta propuesta es a los 114 estudiantes matriculados en grado quinto de primaria de la institución que a su vez están organizados en tres cursos: 501, 502, 503.

Sin embargo, para ejecutar este proyecto se toma una muestra no probabilística, cuyos elementos dependen del criterio de elección del investigador. En este caso, la muestra está formada por todos los estudiantes del curso 503, integrado por 16 mujeres y 21 hombres de edades entre los 10 y 13 años, quienes durante el año escolar 2018 tienen asignado como director de grupo y docente de matemáticas a la ponente de esta investigación.

## 3.4 Fuentes de información

La principal fuente información de este trabajo será la producción escrita de los estudiantes durante el desarrollo de cada uno de los talleres, la observación directa, activa y reflexiva, y también, las clases de relaciones entre los participantes: la comunicación simétrica entre estudiantes y asimétrica entre estudiantes- docente.

## 3.5 Análisis de los resultados

Los resultados obtenidos del proceso de intervención de aula con los estudiantes durante la solución de los talleres se analizarán de la siguiente manera:

El taller diagnostico se valora de modo global para identificar las fortalezas y las debilidades de los estudiantes frente al uso y la interpretación de las fracciones en diferentes contextos, a diferencia de los talleres de afianzamiento y final que se estudiarán teniendo en cuenta los procesos inmersos en cada uno de los contextos de los problemas resueltos, tal como se describe a continuación:

**<u>Problemas de medición</u>:**

- Fracción en conjuntos continuos de área:
  - Determina si el problema implica magnitudes continuas como área o longitud.
  - Percibe y reconoce las partes o subáreas que componen la unidad
  - Realiza subdivisiones congruentes tanto de la parte seleccionada como de la unidad.
  - Reconoce el significado del numerador como el número de subdivisiones congruentes de la parte seleccionada y el denominador como el número total de subdivisiones congruentes de la unidad.
  - Utiliza diagramas o esquemas para dividir una cantidad continua en partes iguales.
  - Expresa de manera adecuada y en forma numérica la fracción que representa la parte solicitada.
  - Compara gráficamente fracciones en este contexto y determina su equivalencia

- Fracción en conjuntos discretos:
  - Identifica si los elementos del conjunto son discretos (si se pueden enumerar uno por uno separadamente).
  - Reconoce y clasifica el número de elementos que componen el todo y el número de elementos que componen la parte o información solicitada.
  - Reconoce y asocia el numerador como el número de elementos que componen la parte o información solicitada y el denominador como el número de elementos que componen el todo o la unidad.
  - Expresa de manera adecuada y en forma numérica la fracción que representa la parte solicitada.
  - Compara gráficamente fracciones en este contexto y determina su equivalencia

**Problemas de conteo**:

- Fracción como cociente:
  - Representa gráficamente una situación de reparto.
  - Reconoce la fracción como una división indicada.
  - Escribe el cociente de un reparto como fracción.

  - Expresa la fracción como un número mixto.
  - Realiza la conversión de número mixto a un número fraccionario.

- Fracción como operador:
  - Relaciona la expresión "… parte de…" como un operador o factor.
  - Identifica la fracción como un factor.
  - Opera correctamente los factores.
  - Expresa el resultado como una fracción irreducible.
  - Determina si el factor fraccionario amplia o reduce al otro factor.

**Problemas de aleatoriedad:**

- Fracciones como probabilidad:
  - Identifica el número de resultados posibles.
  - Reconoce el número de casos favorables.
  - Interpreta la probabilidad como el cociente entre casos favorables y total de casos posibles.
  - Expresa la probabilidad como una fracción.

**Problemas de variación:**

- Fracciones como porcentaje:
  - Representa el porcentaje como fracción con denominador 100.
  - Simplifica la fracción hasta obtener un resultado irreducible.
  - Representa la fracción con denominador 100 como porcentaje.

- Fracción como razón:
  - Identifica las magnitudes a relacionar.
  - Reconoce la razón como una comparación entre los comportamientos de las variables identificadas.
  - Plantea equivalencias a partir de razones.
  - Amplifica y completa proposiciones o equivalencias.

# Capítulo 4

# Resultados y discusión

Los estudiantes seleccionados para llevar a cabo este proyecto desarrollaron tres talleres con una serie de problemas en diferentes contextos en los que utilizaron diversas interpretaciones y representaciones de las fracciones para encontrar las respectivas soluciones. A continuación, se presentan los resultados obtenidos durante la ejecución de esta propuesta en el siguiente orden: resultados en el taller diagnóstico, de afianzamiento y final. Para facilitar la descripción de las fortalezas y debilidades detectadas en cada situación se toma como referencia la solución individual de un estudiante.

## 4.1 Resultados en el taller diagnóstico

La docente, al iniciar la sesión, indaga en el grupo de estudiantes de manera oral sobre saberes previos que ellos tienen frente a los números fraccionarios y percibe interés y expectativa frente a este tema, da instrucciones para resolver de manera individual siete problemas de diferentes contextos (ver Anexo A) y los invita a buscar las respectivas respuestas usando preferiblemente las fracciones para cada solución. Además, menciona que el desarrollo del taller no estará condicionado a una valoración numérica para el periodo escolar, pero que es muy importante hacer el esfuerzo de resolverlo en su totalidad para determinar con mayor precisión las fortalezas y debilidades más notorias en el curso frente a la interpretación de las fracciones.

Los estudiantes resuelven los problemas planteados y de estos se toman los siguientes ejemplos para iniciar el análisis de los resultados señalando las fortalezas y debilidades más comunes de este grupo de niños al interpretar y representar los números fraccionarios.

## 4.1.1 Problemas de medición

### *4.1.1.1 Fracción en conjuntos de área*

En la solución propuesta por el estudiante (ver Figura 1), se puede apreciar que el niño determina la unidad o un todo por medio de un diagrama circular, luego divide en partes congruentes, a la vez que establece la relación entre un número específico de partes que indican el área en remodelación y el número total de partes de la biblioteca.

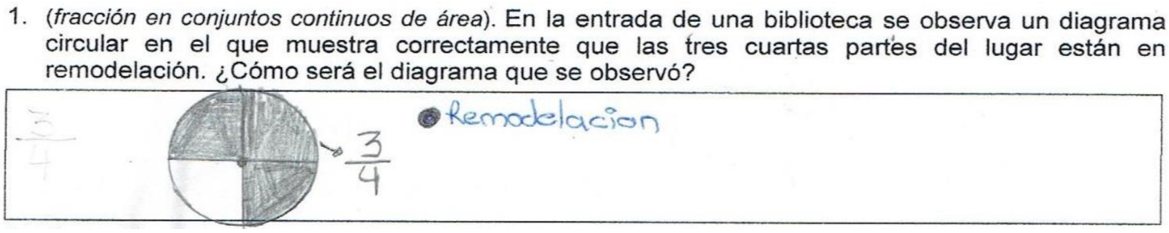



*Figura 1.* Representación de la unidad como diagrama circular.

### *4.1.1.2. Fracción en conjuntos discretos*

La solución de este ejercicio por parte de los estudiantes se agrupa principalmente en dos tipos de respuesta. Una en la que el educando representa la situación empleando un conjunto continuo de área mientras la otra muestra que el niño interpreta y representa la situación como un conjunto de elementos discretos cuyos elementos se pueden contar uno por uno (ver Figura 2). A través de la intervención de la docente se busca que el estudiante sea capaz de diferenciar las dos interpretaciones e identifique la pertinencia de cada una en la solución del problema.

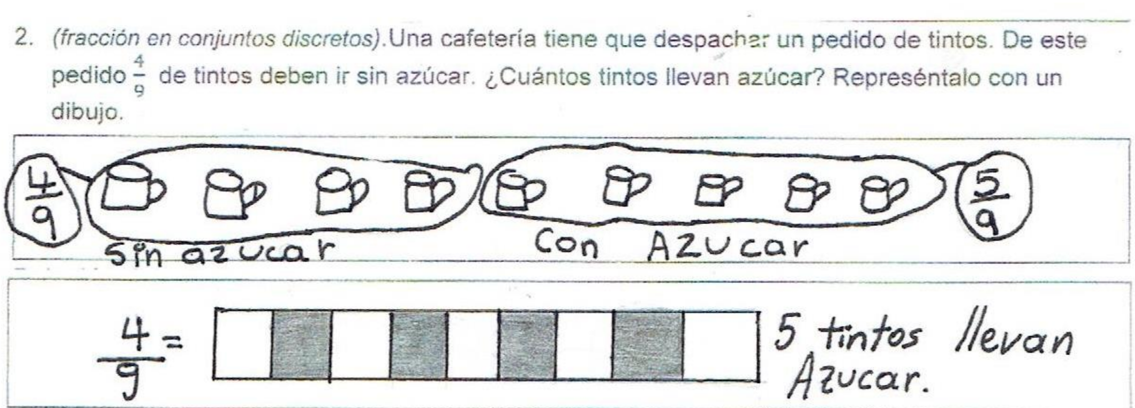
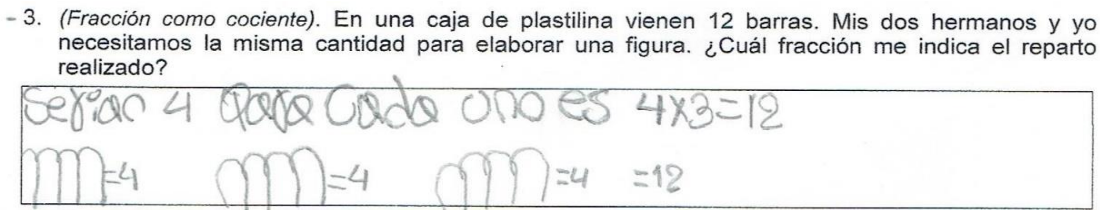



*Figura 2.* Representación conjunto continuo vs conjunto discreto

## 4.1.2 Problemas de conteo

### *4.1.2.1 Fracción como cociente*

En la siguiente figura se evidencia como el estudiante representa gráficamente la situación de reparto, pero muestra dificultad para asociarlo con una fracción, es decir, no interpreta la fracción como una división indicada $\frac{a}{b}$. (ver Figura 3).


3. *(Fracción como cociente)*. En una caja de plastilina vienen 12 barras. Mis dos hermanos y yo necesitamos la misma cantidad para elaborar una figura. ¿Cuál fracción me indica el reparto realizado?

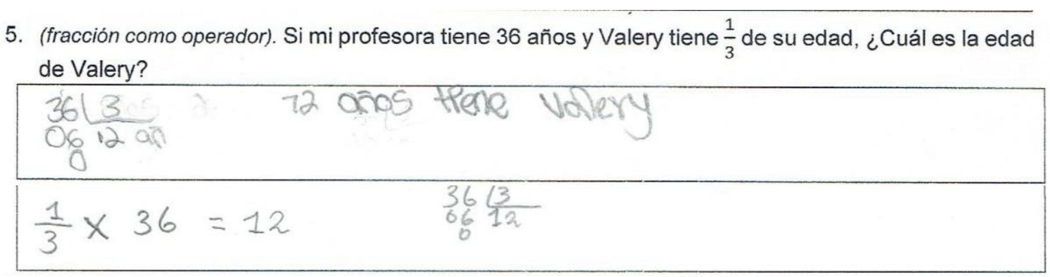
Serían 4 para cada uno es 4X3=12

=4 =4 =4 =12

*Figura 3.* Representación gráfica del reparto de los colores

### *4.1.2.2 Fracción como operador*

Al resolver el problema de conteo que se muestra a continuación se observan dos soluciones que coinciden en su respuesta, pero manejan una interpretación y representación simbólica diferente. En la primera, el estudiante logra resolverlo al repartir la cantidad total en partes iguales, es decir, haciendo la división de números naturales 36 ÷ 3; en la segunda, el estudiante expresa la fracción un tercio como operador (Figura 4).


5. *(fracción como operador)*. Si mi profesora tiene 36 años y Valery tiene $\frac{1}{3}$ de su edad, ¿Cuál es la edad de Valery?

36 | 3 — 06 12 años — 0 — 12 años tiene Valery

$\frac{1}{3} \times 36 = 12$ — 36 | 3 — 06 12 — 0

*Figura 4.* Solución con uso de números naturales vs número racional.

## 4.1.3 Problema de aleatoriedad

### *4.1.3.1 Fracción como probabilidad*

En concordancia a lo establecido en los estándares básicos de competencias del grado quinto de primaria se busca que los niños conjeturen y pongan a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos, por ello se pretende fortalecer el concepto de probabilidad como una interpretación de las fracciones. En la solución del problema propuesto, aunque la mayoría de los estudiantes del curso no respondieron nada, cabe destacar los siguientes casos: a). el estudiante intenta relacionar el termino probabilidad con porcentaje (ver Figura 5) y b). el niño es capaz de interpretar la probabilidad como fracción y responder la pregunta del problema con la expresión $\frac{4}{16}$.

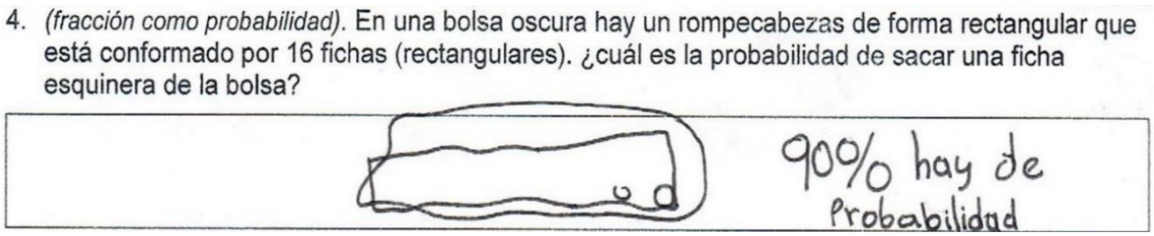



*Figura 5*. Evidencia de la dificultad para determinar probabilidad.

## 4.1.4 Problemas de variación

### *4.1.4.1 Fracción como porcentaje*

En este problema de variación se puede observar, en las pocas soluciones propuestas, que el estudiante tiene dificultad para establecer la relación entre porcentaje y su interpretación como fracción con denominador 100, para este caso, $\frac{75}{100}$. Sin embrago, busca representar la situación de manera gráfica como se aprecia en la Figura 6; a pesar de no ser válida la respuesta, se puede rescatar la intención de relacionar una situación de porcentaje como una fracción en conjuntos continuos de área.

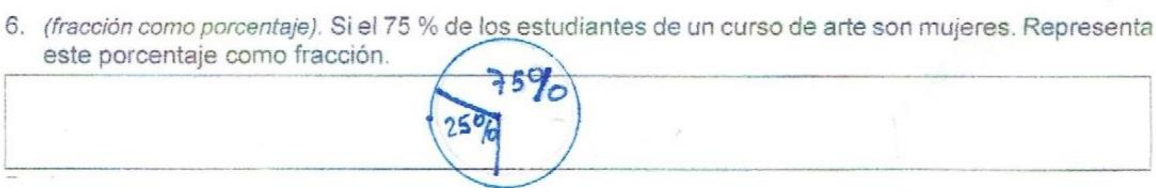



*Figura 6*. Ejemplo de dificultad para representar el procentaje.

### *4.1.4.2 Fracción como razón*

En el grupo de estudiantes prevalece la opción de no responder la pregunta, sin embargo, algunos plantean soluciones gráficas o con operaciones aditivas como se muestra en la Figura 7. Se puede apreciar que todos los estudiantes del curso presentan dificultad para interpretar las fracciones como razón, y por ello no comparan la cantidad de niños y niñas por medio de razones y proporciones.

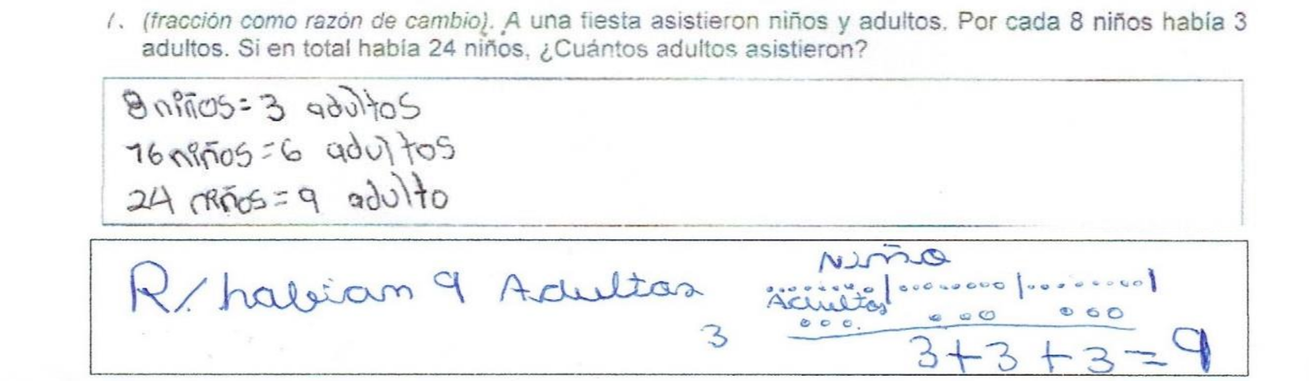



*Figura 7.* Ausencia de interpretación del problema como razones y proporciones.

## 4.2 Resultados en el taller de afianzamiento

En el taller de afianzamiento los educandos resuelven catorce problemas con la orientación de la docente y la colaboración de los estudiantes monitores de matemáticas, tal como se plantea en la metodología de trabajo. A continuación, se referencian algunas soluciones presentadas por los niños en proceso de intervención en el aula.

### 4.2.1 Problemas de medición

#### *4.2.1.1 Fracción en conjuntos continuos de área*

Tras leer los dos problemas de medición, el estudiante determina que en el primero se implica una magnitud continua: área, mientras en el segundo se involucran dos magnitudes: área y longitud. En ambos problemas, se observa como el niño utiliza diagramas o esquemas para dividir una cantidad continua en partes iguales, la intención de subdividir en fragmentos congruentes, y la adecuada expresión numérica de la fracción que representa la parte solicitada (ver Figura 8 y 9).

Adicionalmente, se puede percibir que la mayoría de los niños reconocen el significado del numerador como el número de subdivisiones congruentes de la parte seleccionada y el denominador como el número total de subdivisiones congruentes de la unidad.

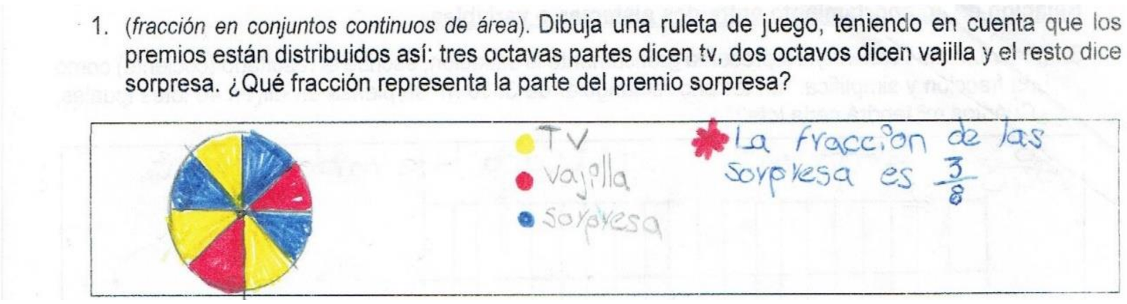



*Figura 8.* El estudiante diseña un diagrama circular y lo divide en partes congruentes.

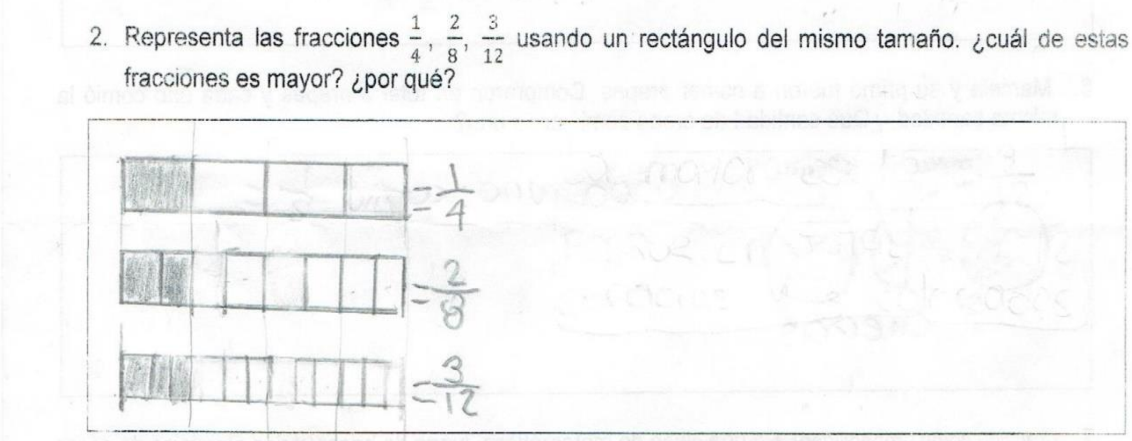



*Figura 9.* Adecuada representación y comparación gráfica de fracciones.

Por otro lado, en el segundo problema, el estudiante además de representar las fracciones indicadas puede compararlas entre sí, como se observa en la Figura 9. Aunque en este ejemplo el estudiante no escribió una respuesta explícita, se puede evidenciar que sí reconoce las partes que componen una unidad y representa gráficamente las tres fracciones de tal manera que puede justificar su relación de equivalencia.

Sin embargo, a pesar del énfasis hecho por la docente en la necesidad de dibujar rectángulos del mismo tamaño como indica el enunciado del ejercicio, y dividirlos verticalmente en subáreas congruentes (ver Figura 9), muchos estudiantes los dibujaron con diferentes longitudes (ver Figura 10) de tal manera que al final no pudieron comparar gráficamente las fracciones, ni determinar su equivalencia y tampoco responder correctamente la pregunta del problema.

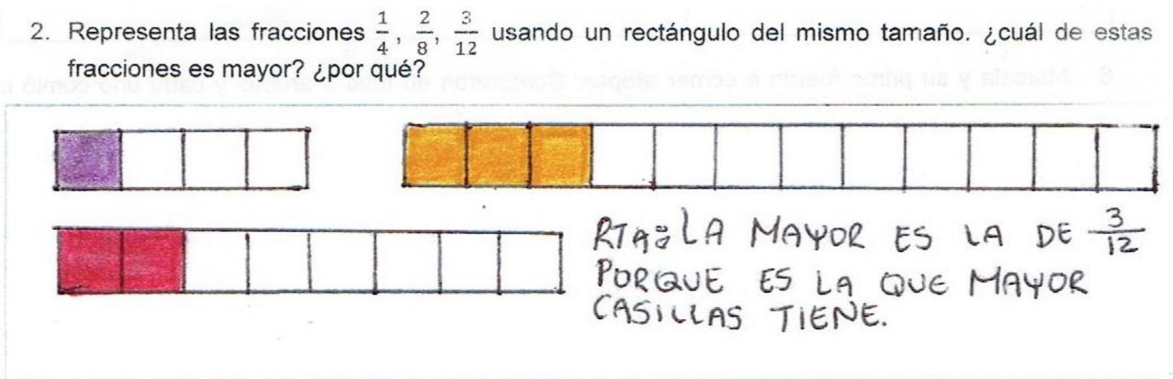



*Figura 10.* Dificultad en la comparación de fracciones.

### *4.2.1.2 Fracción en conjuntos discretos*

Al observar las figuras el estudiante reconoce y clasifica el número de elementos que componen el todo y el número de elementos que componen la parte a la que hace referencia la pregunta del problema, a la vez que asocia el numerador como el número de elementos que integran la parte solicitada y el denominador como el número de elementos que conforman el todo. Por lo anterior, logra expresar en forma adecuada y numérica la fracción que representa la parte solicitada, como se puede evidenciar en la Figura 11 y 12.

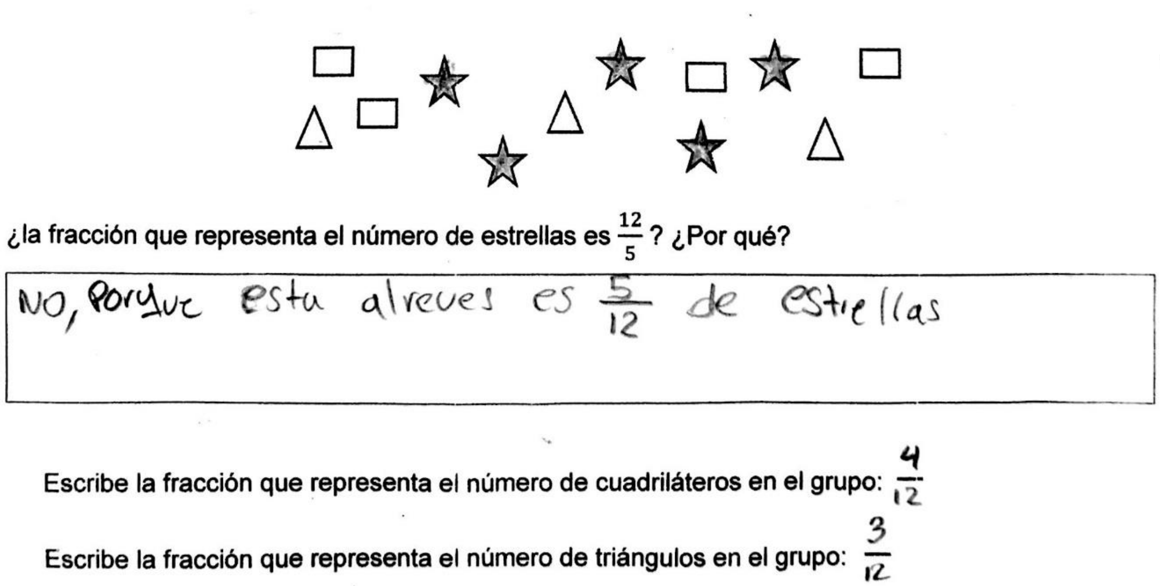



*Figura 11.* Clasificación de los elementos que conforman el todo, con respuesta acertada.

Por otra parte, contrario a los anteriores aciertos, se presenta el caso en que el estudiante muestra dificultad para asociar el numerador y denominador de la fracción con el número de elementos correspondientes. Por ejemplo, (ver Figura 12) el estudiante cuenta e indica la cantidad total de elementos que conforman el conjunto, pero no reconoce que este valor debe posicionarse en el denominador de la fracción, de igual manera enumera la cantidad de estrellas pero no asocia este valor con el numerador de la fracción; al final afirma que la expresión $\frac{12}{5}$ es la que representa la cantidad de estrellas que hay en el conjunto de elementos.

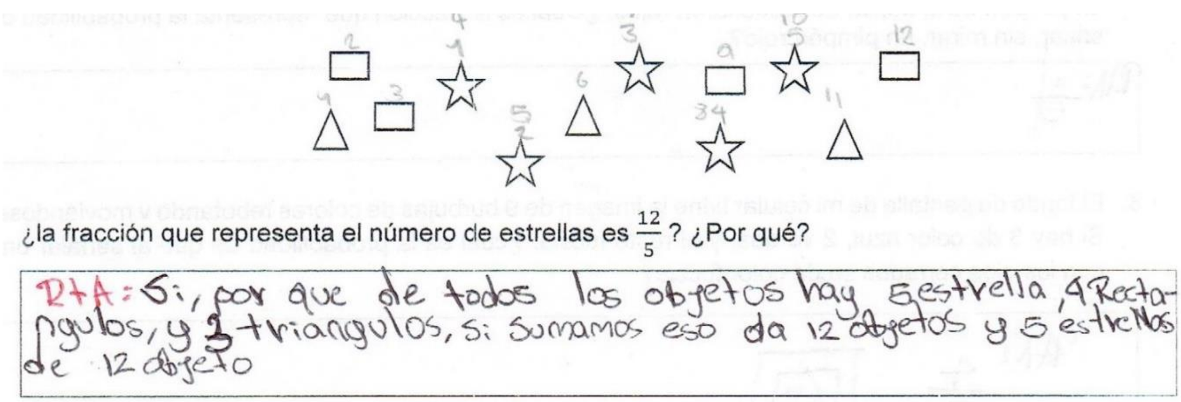



*Figura 12.* Clasificación de cada grupo de elementos que conformn el todo, pero con deficiencia al determinar su respectiva posición en el numerador y denominador.

Igualmente, con bastante recurrencia, se aprecia dificultad para identificar si los elementos del conjunto son discretos, es decir, se pueden enumerar uno a uno por separado (Figura 13) o si al contrario se refieren a magnitudes continuas como área, tal como se muestra en la Figura 14.

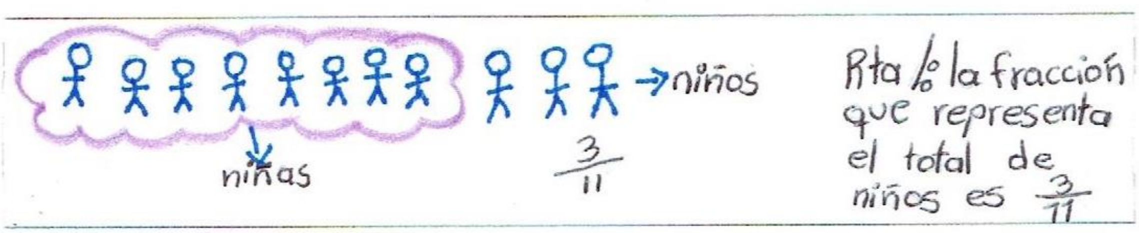



*Figura 13.* Representación de la unidad como conjunto de elementos discretos.

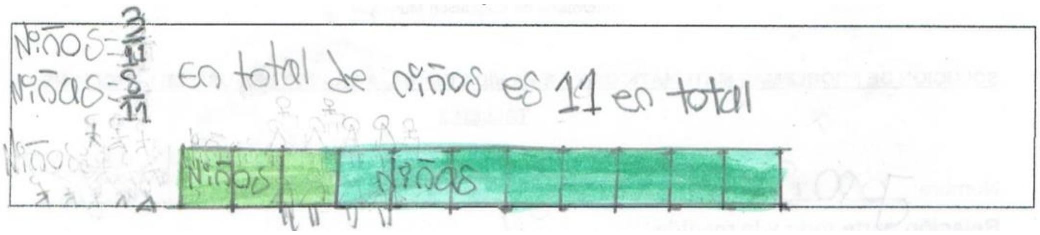



*Figura 14.* Representación de la unidad  como conjunto continuo de elementos.

## 4.2.2 Problemas de conteno

### *4.2.2.1 Fracción como cociente*

Al resolver problemas de conteo a partir de la interpretación de la fracción como cociente, se percibe la debilidad del niño al reconocer la fracción como una división indicada (Figura 15). Pero, también se aprecia como fortaleza que el estudiante representa gráficamente las situaciones de reparto.

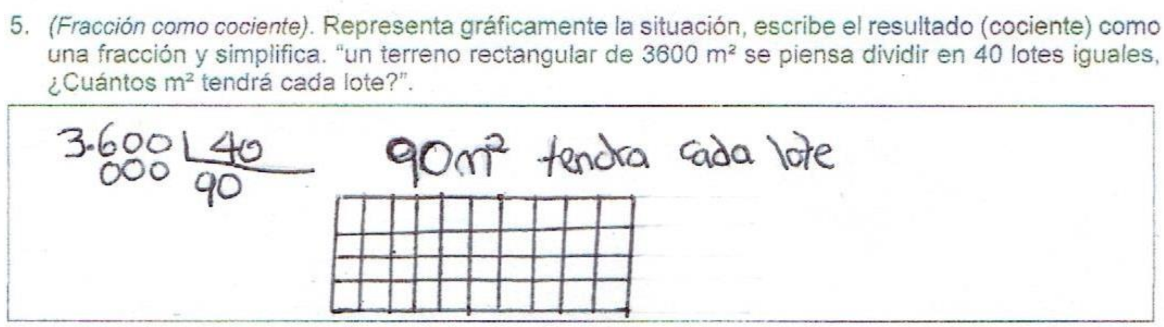



*Figura 15.* Estudiante que no reconoce la división de dos números naturales como una fracción.

Además, hay repuestas que permiten valorar la facilidad con que el estudiante plantea la división como una fracción, simplifica y responde rápidamente de manera acertada.

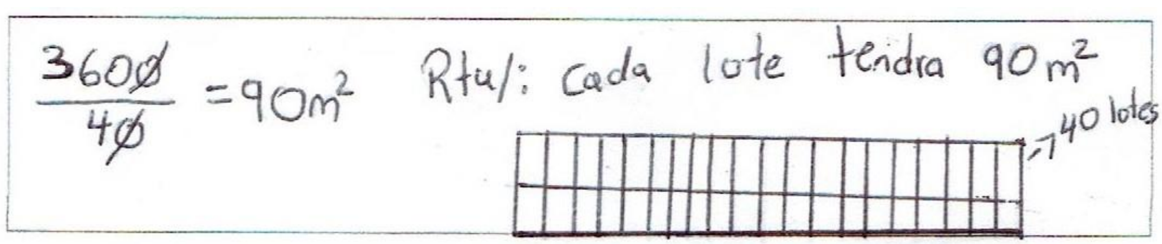



*Figura 16.* Estudiante que reconoce la división indicada como fracción y simplifica.

Por otro lado, en el siguiente problema (ver Figura 17), se puede apreciar cómo el estudiante reconoce y escribe el cociente de un reparto como fracción y posteriormente la expresa en un número mixto.

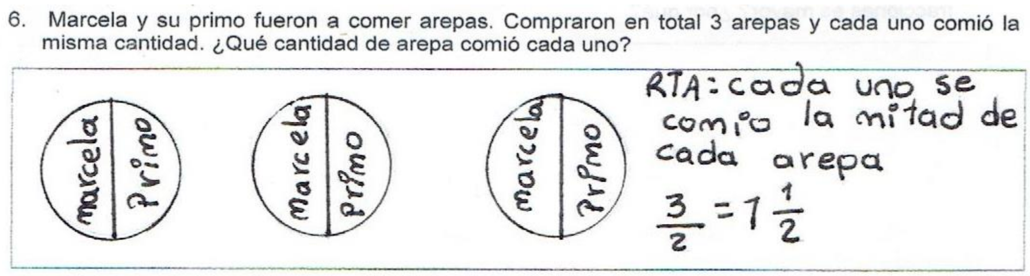



*Figura 17.* El estudiante asocia el reparto con una fracción y expresa como número mixto.

### *4.2.2.2 Fracción como operador*

Al revisar el ejercicicio se percibe la facilicadad que tiene el estudiante para relacionar la expresion mitad, tercera y sexta parte como un operador o factor y se visualiza como determina que este factor fraccionario reduce al numero natural, es decir, deduce que cada región coloreada será menor a la unidad. Luego plantea la multiplicación y opera acertadamente los factores hasta expresar su resultado como una fracción irreducible (ver Figura 18).

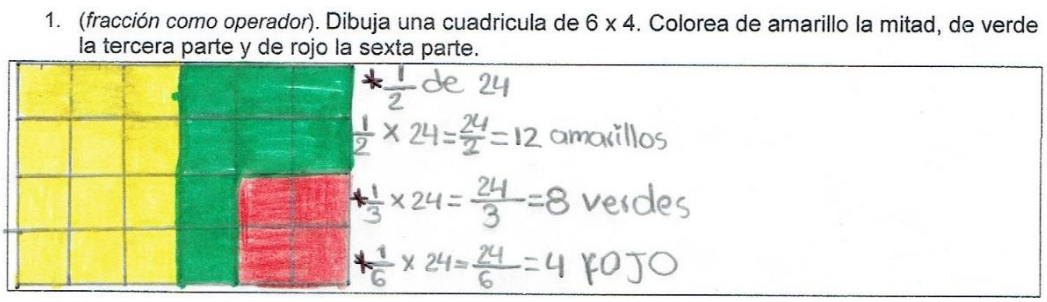



*Figura 18.* Representación gráfica de las fracciones como operador.

En el siguiente problema (ver Figura 19), se observa que el estudiante interpreta y soluciona gráficamente la situación e identifica la fracción como operador, pero presenta dificultad al representarlo numéricamente, pues plantea la operación $\frac{1}{4}$ x 3= 12 en vez de $\frac{1}{4}$ x 12= 3, a pesar de tener definida la cantidad total de juguetes como especifica en su respuesta.

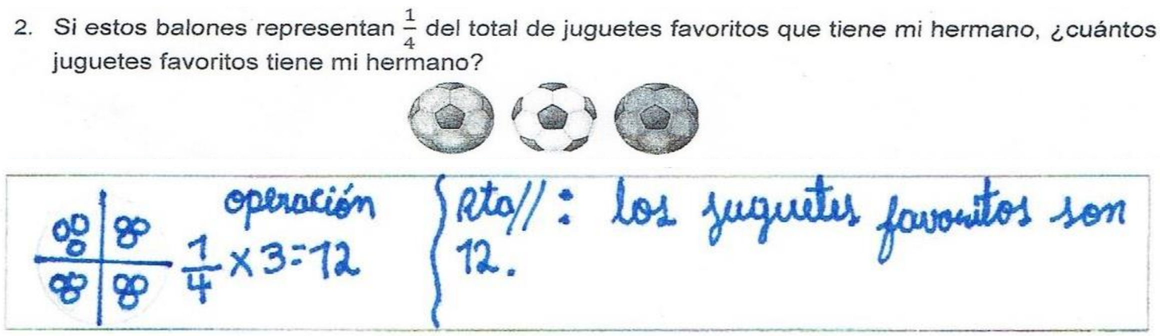



*Figura 19.* Dificultad para expresar numérica y acertadamente la operación.

Paralelamente, se puede evidenciar el caso en que el estudiante sí escribe la expresión de manera adecuada y además opera correctamente los factores (ver Figura 20).

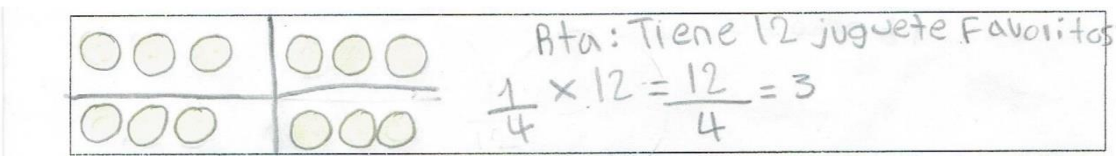



*Figura 20.* Representación, operación y respuesta apropiada.

## 4.2.3 Problemas de aleatoriedad

### *4.2.3.1 Fracción como probabilidad*

Cuando los niños dan respuesta a los problemas de aleatoriedad se contempla la facilidad que tienen la gran mayoría para identificar el número de resultados posibles y de eventos favorables, permitiendo la asertividad al interpretar la probabilidad como el cociente entre casos favorables y total de casos posibles, y por último su correcta escritura como fracción; lo anterior se puede verificar en las siguientes imágenes de soluciones propuestas por uno de los estudiantes (ver Figura 21 y 22):

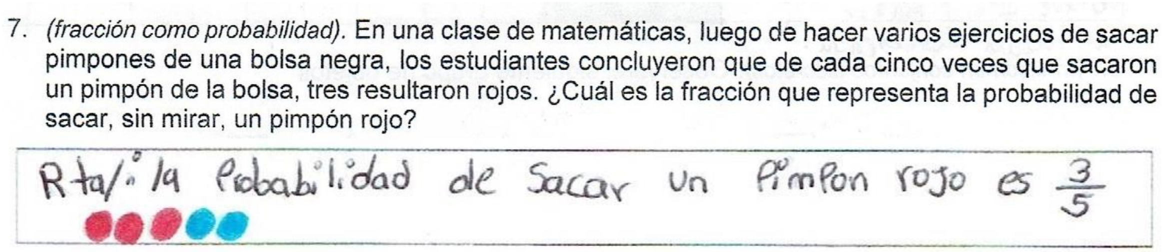



*Figura 21.* Representación gráfica del problema con respuesta.

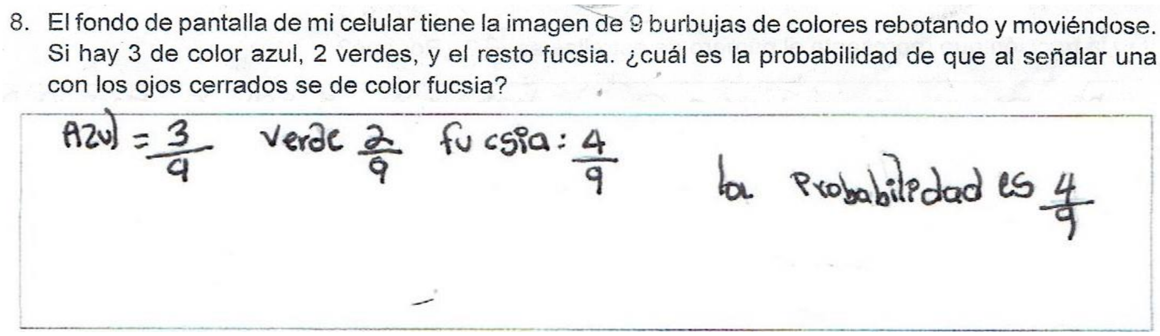



*Figura 22.* Expresión numérica correcta de cada probabilidad.

## 4.2.4 Problemas de variación

### *4.2.4.1 Fracción como procentaje*

En la solución de este problema de variación, cabe resaltar como el estudiante relaciona y representa el porcentaje como una fracción con denominador 100¸ retoma la fracción como operador para llegar al resultado irreducible y finalmente calcula la cantidad de estudiantes que llegan puntuales (ver Figura 23).

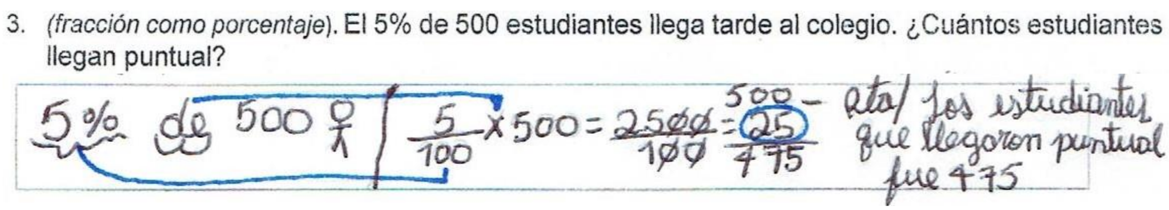



Figura 23. representación de porcentaje como una fracción de denominador 100.

Al observar la solución propuesta al otro problema, se aprecia la forma en que el estudiante representa el 25% como la fracción $\frac{25}{100}$ para proceder a operar, simplificar y llegar a la respuesta solicitada (ver Figura 24).

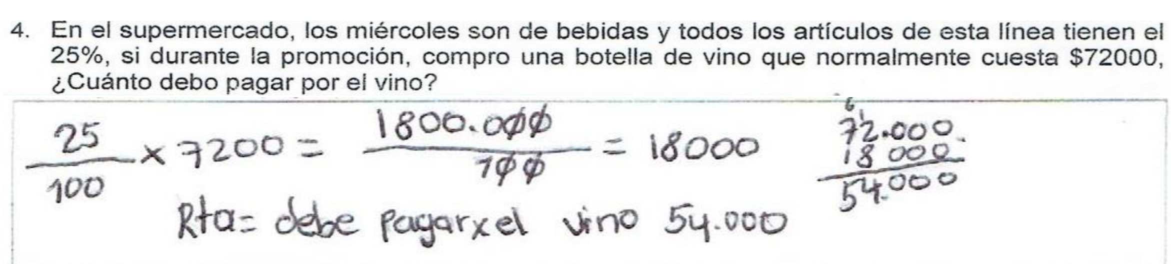
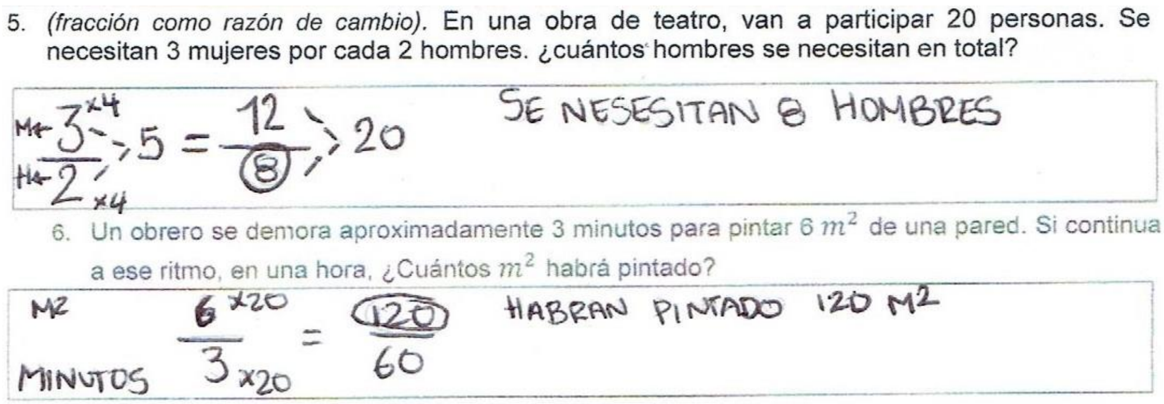



*Figura 24.* Expresión de porcentaje como fracción, con un error de escritura al operar.

#### *4.2.4.2 Fracción como razón*

Con la orientacion de la docente y los monitores se resuelven estos otros problemas de variación a partir del uso de las fracciones como razones y proporciones. En el siguiente ejemplo (ver Figura 25), se observa la manera en que el estudiante identifica las magnitudes a relacionar y compara su comportamiento al plantear las razones. Además, se evidencia que amplifica y completa la equivalencia.


5. *(fracción como razón de cambio).* En una obra de teatro, van a participar 20 personas. Se necesitan 3 mujeres por cada 2 hombres. ¿cuántos hombres se necesitan en total?

M→ $\frac{3^{\times 4}}{2_{\times 4}}$ → 5 = $\frac{12}{8}$ → 20 SE NESESITAN 8 HOMBRES

H→

6. Un obrero se demora aproximadamente 3 minutos para pintar 6 $m^2$ de una pared. Si continua a ese ritmo, en una hora, ¿Cuántos $m^2$ habrá pintado?

M2 $\frac{6^{\times 20}}{3_{\times 20}} = \frac{120}{60}$ HABRAN PINTADO 120 M2

MINUTOS

*Figura 25.* Comparación de las magnitudes indicadas por medio de razones y proposiciones.

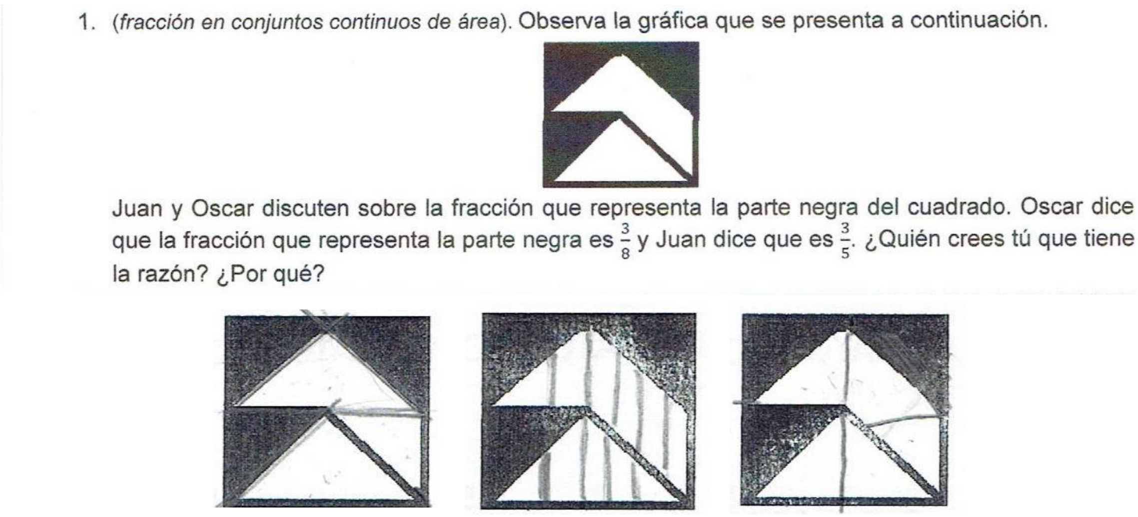
## 4.3 Resultados en el taller final

El taller final se realiza acorde a los criterios descritos en los instrumentos metodológicos. Para iniciar el análisis de los resultados obtenidos, se toman ejemplos de soluciones que permitan evidenciar las fortalezas y debilidades en la interpretación y representación de fracciones.

### 4.3.1 Problemas de medición

#### *4.3.1.1 Fracción en conjuntos continuos de área*

A diferencia de los problemas anteriores, el estudiante no debe determinar su todo, sino que necesita prioritariamente detectar la forma o patrón geométrico de las regiones que componen la unidad presentada (un cuadrado) para verificar que el área de ésta se divida en partes congruentes. A continuación, se señalan ejemplos en los que se visualiza como el estudiante no realiza la división del área en partes iguales (ver Figura 26).

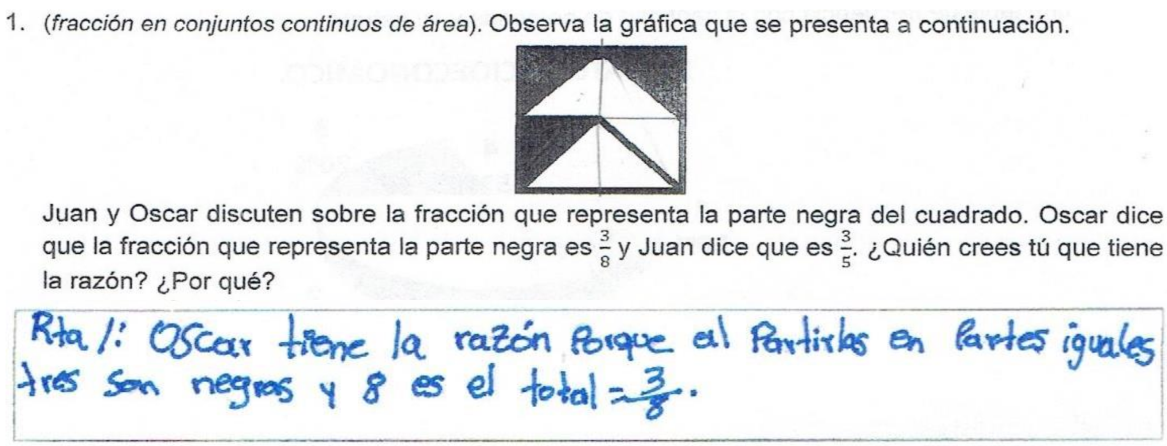

1. (*fracción en conjuntos continuos de área*). Observa la gráfica que se presenta a continuación.

Juan y Oscar discuten sobre la fracción que representa la parte negra del cuadrado. Oscar dice que la fracción que representa la parte negra es $\frac{3}{8}$ y Juan dice que es $\frac{3}{5}$. ¿Quién crees tú que tiene la razón? ¿Por qué?

*Figura 26.* Ejemplos de subdivisiones del área en partes no congruentes.

Razón por la que luego presenta dificultad al expresar numéricamente la fracción que representa la parte sombreada, pues no puede establecer eficazmente la cantidad total de subdivisiones (denominador) ni cuántas de ellas cumplen con la condición de color señalado (numerador). Sumado a ello, se nota la carencia de argumentos para justificar su respuesta a la pregunta del problema.

Contrario a lo expuesto anteriormente se puede valorar en el siguiente ejemplo (ver Figura 27), como el estudiante percibe, reconoce y grafica las partes congruentes que componen el área del "todo" expuesto en el enunciado del problema.


1. (*fracción en conjuntos continuos de área*). Observa la gráfica que se presenta a continuación.

Juan y Oscar discuten sobre la fracción que representa la parte negra del cuadrado. Oscar dice que la fracción que representa la parte negra es $\frac{3}{8}$ y Juan dice que es $\frac{3}{5}$. ¿Quién crees tú que tiene la razón? ¿Por qué?

Rta /: OScar tiene la razón Porque al Partirlas en Partes iguales tres Son negras y 8 es el total $= \frac{3}{8}$.

*Figura 27.* El estudiante subdivide en partes congruentes el cuadro indicado.

Además, en la justificación de la respuesta se evidencia que el estudiante plantea adecuadamente la fracción de la parte sombreada y reconoce el significado del numerador y denominador de esta.

#### *4.3.1.2 Fracción en conjuntos discretos*

En esta oprotunidad, el estudiante determina con precision que la unidad o todo hace referencia a un conjunto discreto de elementos. Al leer el enunciado del problema, logra establecer que la totalidad de pimpones son 24, es decir, asocia el denominador de la fracción $\frac{8}{24}$ como el número total de elementos que conforman el conjunto y a la par establece que de ellos 8 son azules.

A partir de los datos inferidos, el niño procede a representar gráficamente el conjunto discreto y va coloreando la cantidad de pimpones que se le indica en el enunciado de tal manera que al final puede determinar con precisión la cantidad de pimpones rojos. Sin embargo, faltó puntualizar esta respuesta empleando la expresión “cuatro de veinticuatro, son pimpones rojos”, o la fracción $\frac{4}{24}$ e incluso simplificar a $\frac{1}{6}$ y afirmar que “uno de cada seis pimpones es rojo” (ver Figura 28).

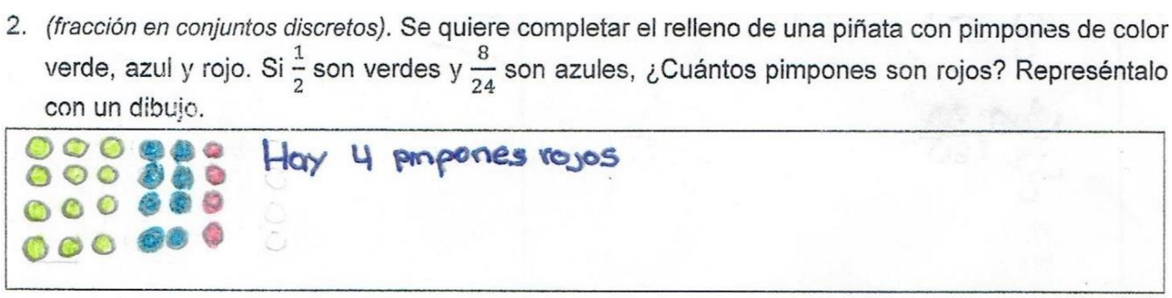



*Figura 28.* Interpretación de las fracciones como conjunto de elementos discretos.

### 4.3.2 Problemas de conteo

#### *4.3.2.1 Fracción como cociente*

Frente a este problema la primera acción que realiza el estudiante es representar la situación de reparto a través de un gráfico, de tal manera que al relacionar un metro de cinta con cada cartelera observa que sobra una cinta completa y procede a dividirla en tres partes congruentes para asignar un tercio a cada una de las imágenes que están en la parte superior de su dibujo. (ver Figura 29). Así, luego de repartir una cantidad (cuatro) en las partes dadas (tres) expresa esta operación con un número mixto y finalmente lo escribe como una fracción. Sin embargo, se aspiraba que el estudiante primero indicara la división como una fracción, es decir $\frac{3}{4}$, sin necesidad de dividir, y posteriormente realizara la conversión a número mixto. Aunque la secuencia de procedimientos no es la que se anhelaba, se puede rescatar que el estudiante interpreta y representa una división de naturales como una fracción.

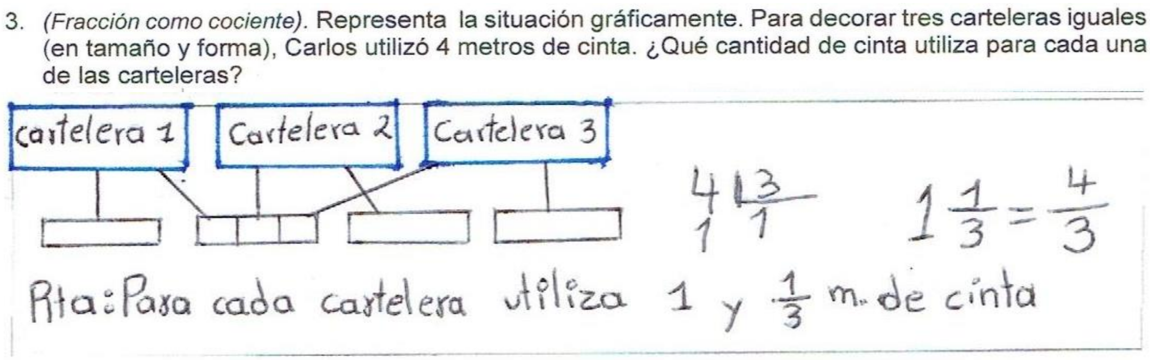



*Figura 29.* Evidencia de la representación gráfica del reparto, su expresión como fracción y número mixto.

#### *4.3.2.2 Fracción como operador*

Para darle solución al problema que se presenta en la Figura 30, el estudiante maneja medidas de longitud y concepto de rectángulo antes de representar numéricamente como se reduce a la tercera parte cada lado de la figura. Luego de dibujar el cuadrilátero con las medias que indiaca el enunciado, el alumno relaciona la expresión “reduce a la tercera parte” como un operador, lo escribe y opera para determinar las nuevas medidas de los lados del rectángulo.

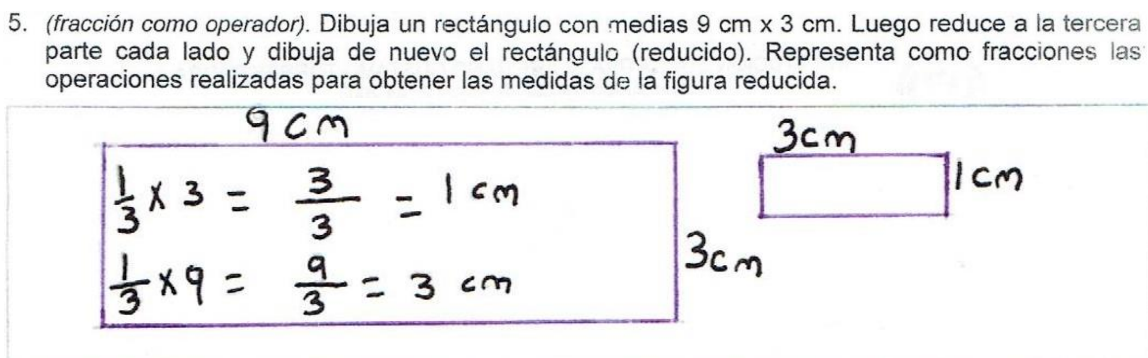



*Figura 30.* Interpretación de la fracción como operador.

Sin embargo, se sigue presentando dificultad en varios estudiantes para plantear la multiplicación y/o resolverla correctamente y por ende llegar a la respuesta, tal como se muestra en la Figura 31.

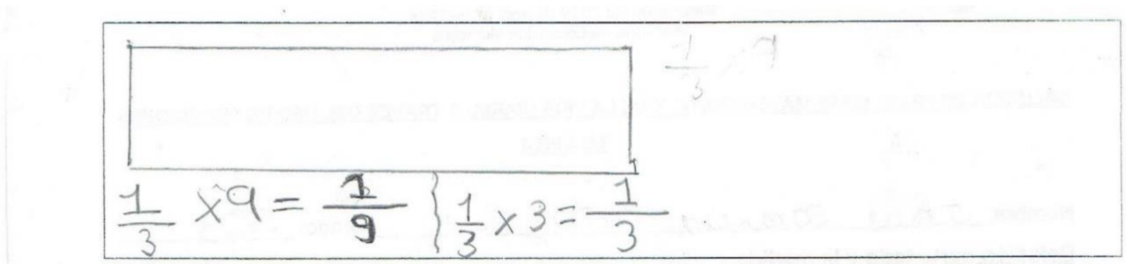


*Figura 31.* Dificultad al multiplicar por el operador fraccionario.

## 4.3.3 Problema de aleatoriedad

### *4.3.3.1 Fracción como probabilidad*

La solución de este problema se enmarca en tres tendencias: el estudiante que no responde o no emplea fracciones en su procedimiento; el que plantea la probabilidad como fracción, pero no propone una comparación valida entre ellas; y el que responde acertadamente.

En la Figura 32 se visualiza la manera gráfica en que el estudiante representa la situación. Aunque esta se puede considerar válida y en cierta medida aproxima al niño a responder la pregunta, no cumple con el propósito de interpretar y representar la probabilidad como una fracción.

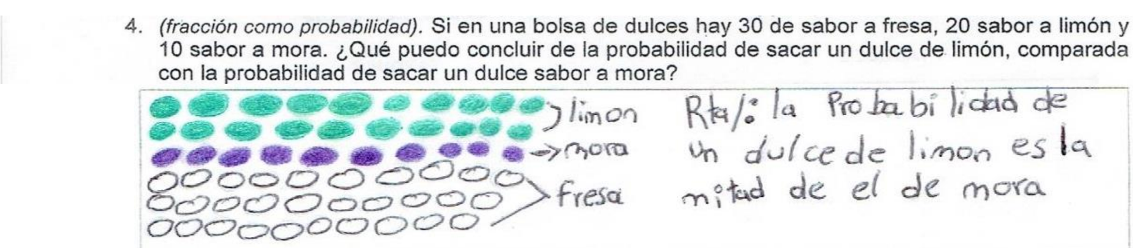


*Figura 32.* Representación gráfica para establecer probabilidad.

Al observar la siguiente solución, se puede inferir que el estudiante primero determina el todo o número de casos posibles, es decir, calcula la cantidad total de dulces. Luego, reconoce el número de casos favorables e interpreta la probabilidad como un cociente, dicho de otra manera, expresa la probabilidad de sacar un dulce de mora con la fracción $\frac{10}{60}$, la probabilidad de sacar un dulce de limón con $\frac{20}{60}$ y también define la probabilidad de obtener un dulce de fresa. Si bien tiene definida la probabilidad para cada caso, al establecer una comparación entre ellas presenta dificultad y redacta una afirmación falsa, pues emplea el término “triple” en vez de “doble” (ver Figura 33).

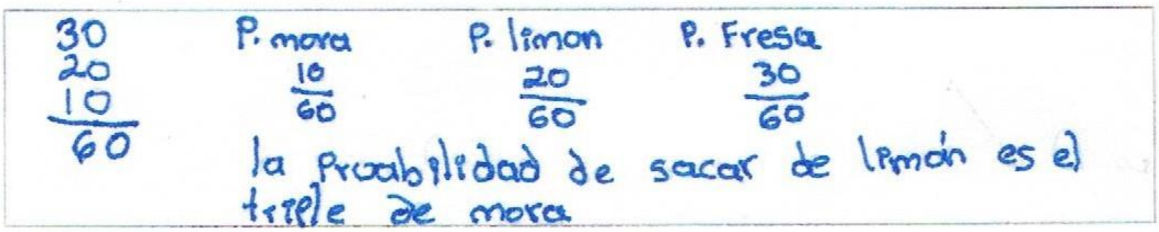



*Figura 33.* Interpretación correcta de probabilidad, pero respuesta equivocada.

Por otro lado, el estudiante interpreta cada probabilidad como el cociente entre los casos favorables (numerador) y el total de casos posibles (denominador) y las expresa correctamente como fracciones. A partir de ellas, establece adecuadamente comparaciones y logra responder la pregunta del problema (ver Figura 34).

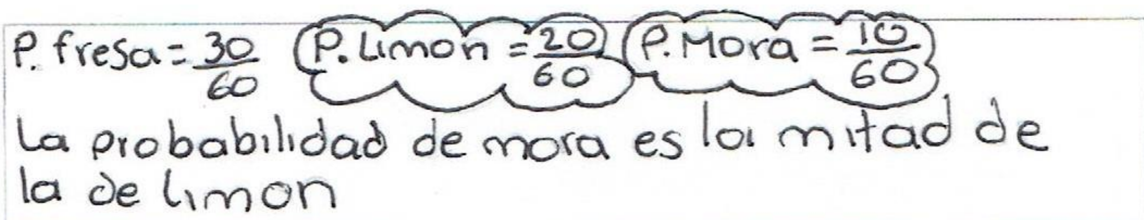



*Figura 34.* Expresión de la probabilidad como fracción y respuesta veraz.

## 4.3.4 Problemas de variación

### *4.3.4.1 Fracción como porcentaje*

La solución propuesta por el estudiante ante este problema inicia con la elaboración de una tabla de frecuencia para organizar los datos que le están proporcionando en el enunciado e identificar los datos que debe buscar. En otras palabras, organiza la información y reconoce que debe establecer el número específico de personas a partir del porcentaje indicado en cada estrato. Para ello, como se observa en la Figura 35, el niño representa el porcentaje como una fracción con denominador 100, de tal modo que, al aplicarla como un operador a la cantidad total de personas encuestadas y simplificar a un número irreducible, obtiene los datos requeridos para completar la tabla. Por ejemplo, para determinar la cantidad de personas encuestadas que pertenecen al estrato cuatro, que representan un 5% del total, el estudiante escribe dicho porcentaje como fracción $\frac{5}{100}$ , luego la aplica como operador y simplifica para obtener el resultado, así: $\frac{5}{100}$ x 1200 = $\frac{6000}{100}$ = 60 personas.

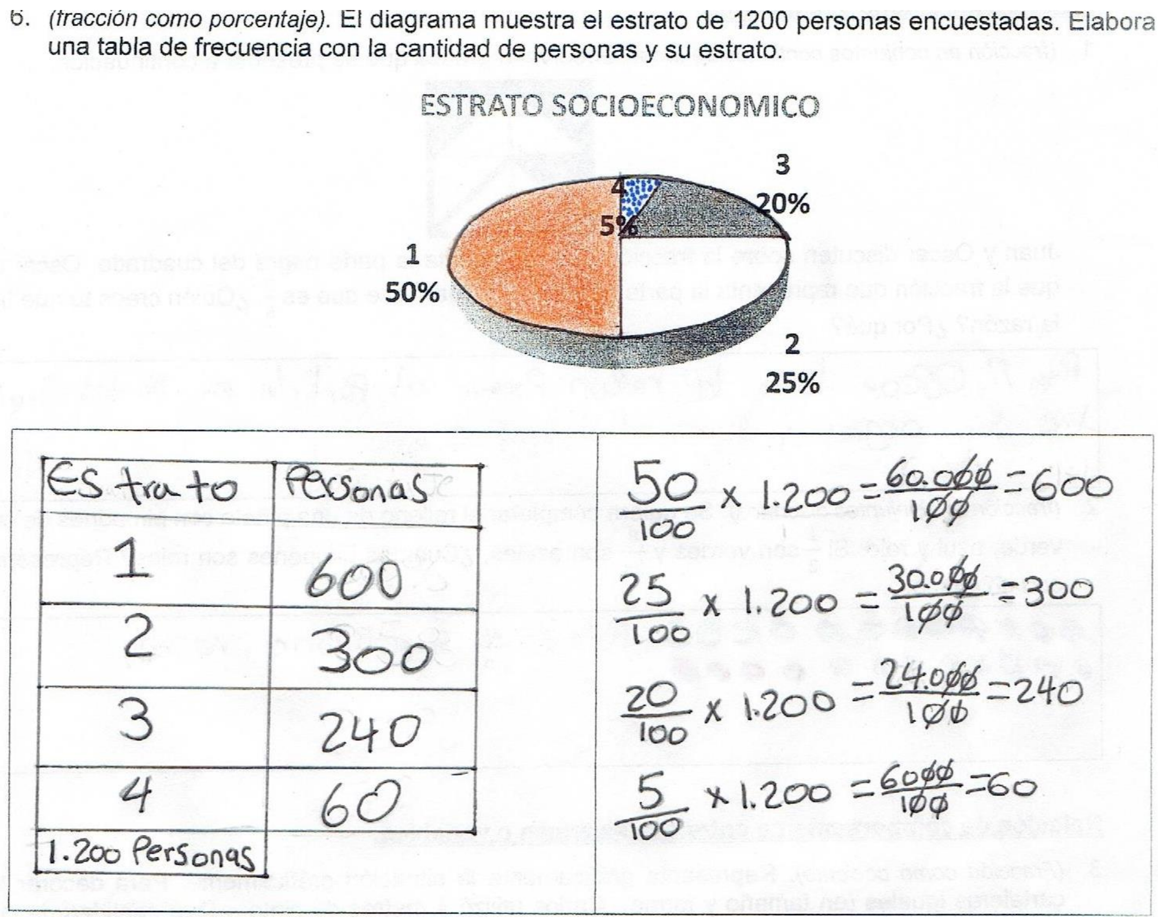
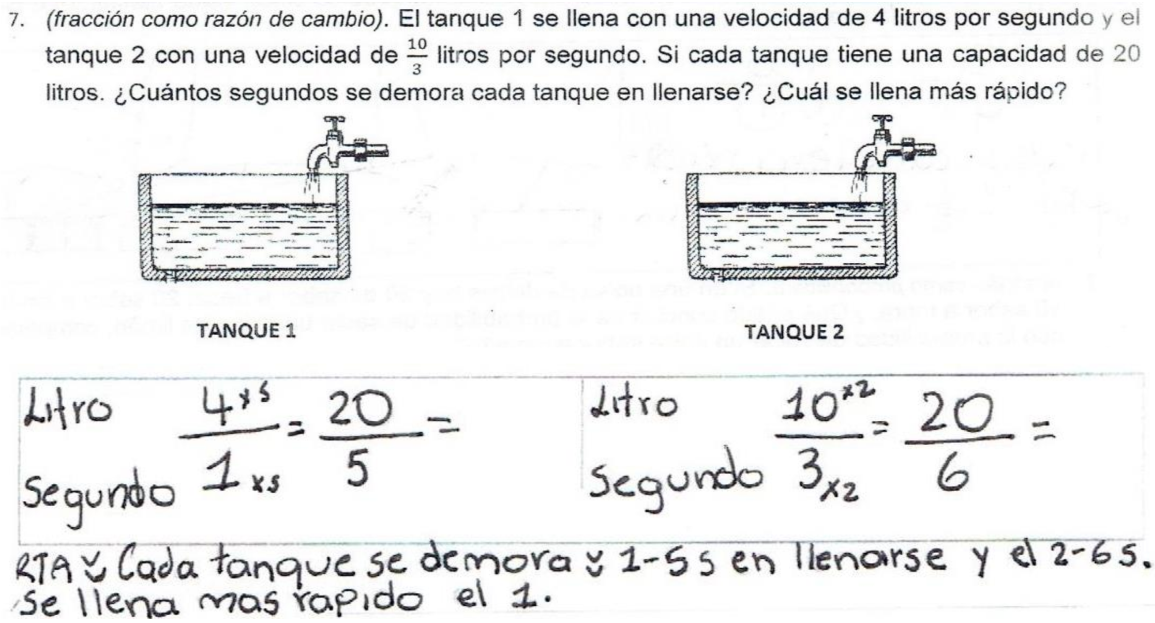



*Figura 35.* Interpretación de porcentaje como fracción decimal.

#### *4.3.4.2 Fracción como razón*

Al valorar las soluciones de este problema, se aprecia una notoria dificultad para establecer cuáles son las magnitudes que se comparan, determinar cuál de ellas va en el numerador y cuál en el denominador, plantear la razón, determinar su equivalencia, y determinar la respuesta. Sin embargo, se resalta el avance de estudiantes que, si logran interpretar la situación a través de la comparación de las magnitudes litros/segundos, plantear las razones y proporciones correspondientes para poder justificar que el tanque uno se llena en menos tiempo, es decir más rápido que el tanque dos (ver Figura 36).



7. *(fracción como razón de cambio)*. El tanque 1 se llena con una velocidad de 4 litros por segundo y el tanque 2 con una velocidad de $\frac{10}{3}$ litros por segundo. Si cada tanque tiene una capacidad de 20 litros. ¿Cuántos segundos se demora cada tanque en llenarse? ¿Cuál se llena más rápido?



| | |
|---|---|
| Litro / Segundo $\frac{4^{\times 5}}{1_{\times 5}} = \frac{20}{5} =$ | Litro / Segundo $\frac{10^{\times 2}}{3_{\times 2}} = \frac{20}{6} =$ |

RTA: Cada tanque se demora: 1-5 s en llenarse y el 2-6 s.
Se llena mas rapido el 1.

*Figura 36.* Interpretación de las fracciones como razones y proposiciones.

# 5. Capítulo 5

## Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones que se pudieron extraer del análisis de los resultados y así poder dar respuesta a la consecución de los objetivos propuestos.

### 5.1 Conclusiones

Como síntesis del estudio y análisis de los resultados obtenidos tras la aplicación de los instrumentos metodológicos, se puede concluir lo siguiente:

- Se diseñaron y aplicaron talleres basados en problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad que permitieron a los estudiantes abordar las diferentes representaciones de una fracción.

- Se lograron avances significativos en los estudiantes en torno al uso e interpretación de las fracciones, durante la aplicación y aumento de complejidad de los instrumentos metodológicos.

- Se amplió el rango de utilidad que dan los estudiantes a las interpretaciones de una fracción, sus diferentes representaciones y significados por medio de la solución de problemas en los contextos de medición, conteo, variación y aleatoriedad.

- Los estudiantes muestran avances muy importantes en todas las interpretaciones incluidas en los problemas, pero se destacan principalmente los alcanzados en la interpretación de las fracciones como porcentaje: la mayoría representan el porcentaje como una fracción con denominador 100, operan si es necesario y simplifican hasta obtener un resultado irreducible; en la interpretación de la fracción como conjuntos discretos: identifican si los elementos del conjunto se pueden contar uno a uno, reconocen el número de elementos que componen el todo y el número de elementos que representan la parte solicitada y su respectiva posición en el denominador y numerador; en la interpretación de la fracción como conjunto continuo de área: reconocen si trata de una magnitud continua como área o longitud, identifican las sub áreas que conforman el todo y/o realizan las divisiones congruentes, expresan numéricamente la fracción que representa la parte solicitada, comparan gráficamente fracciones y determinan su equivalencia; y en la interpretación de la fracción como probabilidad: identifican el número de resultados posibles y el número de casos favorables, plantean la probabilidad como el cociente entre casos favorables y total de casos posibles.

- Los estudiantes también tuvieron avances en las otras interpretaciones, aunque en estas se notan aún debilidades. En la interpretación de fracción como razón se destaca que varios alumnos identifican las magnitudes a relacionar, pero con dificultad comparan su comportamiento al plantear razones y completar las proposiciones; en la interpretación de fracción como cociente los niños representan gráficamente la situación de reparto y lo expresan como número mixto, con cierta debilidad reconocen la fracción como una división indicada o escriben el cociente de un reparto como fracción; y en la interpretación de fracción como operador se resalta que los estudiantes relacionan la expresión “parte de” como un operador fraccionario que reduce la unidad, y con facilidad simplifican y expresan el resultado como una fracción irreducible, sin embargo, con frecuencia presentan dificultad al multiplicar el factor fraccionario.

- Se logró cumplir con los parámetros propuestos por los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias y los derechos básicos de aprendizaje. En cuanto a lo propuesto por los lineamientos, se fortaleció el pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Respecto a los estándares básicos de competencias los estudiantes avanzaron en las siguientes competencias: interpretan las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones; utilizan la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relacionan estas dos notaciones con la de los porcentajes; modelan situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa; comparan diferentes representaciones del mismo conjunto de datos; conjeturan y ponen a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos; analizan y explican relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

- En concordancia con los derechos básicos de aprendizaje, se evidencia que los niños escriben las fracciones como decimales y viceversa; interpretan datos que involucran porcentajes; multiplican o dividen el numerador o el denominador de una fracción por un mismo número para hacerla equivalente a otra y comprende la equivalencia en diferentes contextos; resuelven problemas de proporcionalidad directa; dividen una fracción por un número natural; comprenden la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas.

- El trabajo por grupos de monitorías propicia un ambiente de aprendizaje colaborativo en los estudiantes, los motiva, genera confianza y seguridad en el tema, promueve el liderazgo, fortalece el trabajo en equipo y garantiza que todos los estudiantes culminen la actividad propuesta.

- La resolución de problemas es un proceso fundamental en las matemáticas y se debe abordar desde todos los temas del área porque despierta el interés del estudiante, muestra la utilidad del contenido, le permite indagar diversas estrategias de solución, verificar viabilidad de las respuestas, generalizar procesos y alcanzar con mayor seguridad las competencias esperadas.

- Al abordar las fracciones desde estas siete interpretaciones se logra optimizar el tiempo empleado para avanzar y cumplir con la programación del área de matemáticas establecida en el plan de estudios de la institución educativa.

## 5.2 Recomendaciones

La ejecución de este proyecto permite plantear las siguientes recomendaciones para le realización de otros procesos semejantes:

- Socializar los resultados obtenidos con docentes de matemáticas de grado cuarto y sexto para compartir las debilidades detectadas, propiciar la reflexión pedagogía en torno a ellas y generar estrategias de fortalecimiento.

- Apoyarse en el trabajo por monitorías durante la aplicación del taller final.

- Aumentar la cantidad del tipo de problemas en que se presentó menor desempeño para complementar y reforzar competencias.

- Aumentar el tiempo de aplicación de los instrumentos para asesorar individualmente a más estudiantes.

- Fortalecer en todas las clases de matemáticas la formulación y solución de problemas.

- Promover en los estudiantes la presentación de sus respuestas con lapicero, en la mayor medida posible.

- Incluir en la programación curricular de grado quinto el tema de los números fraccionarios desde sus diferentes interpretaciones a través del planteamiento y solución de problemas en varios contextos.

# Bibliografía


Brousseau g. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física. Recuperado en http://www.famaf.unc.edu.ar/wp-content/uploads/2015/03/BEns05.pdf

Castaño–Arbeláez, N. M., García-Castro, L. I. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria*. Universidad Autónoma de Manizales. Recuperado en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5342626

Castro, E. (2008). *Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España*. En: XII Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Badajóz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Dickson, L; Brown, M; Gibson, O (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Labor, MEC, Barcelona. 1991.

Fandiño, M. I. (2005). Le frazioni, aspetti concettuali e didattici. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italia. Recuperado en http://www.math.unipa.it/~grim/dott_HD_MphCh/MPinilla_giugno_07.pdf

Fernández, S. (2005). Matemáticas para pensar (mediante la resolución de problemas). *Aula de innovación educativa,* (143-144), 83-96. Recuperado de https://es.scribd.com/document/150779925/Matematicas-Para-Pensar

Figueroa, J. (2005). *Solucionando problemas de medición, variación, y aleatoriedad haciendo uso de las fracciones. (proyecto de aula).* Institución educativa San Vicente de Paul de Sincelejo, Sucre. Sincelejo, Colombia

Flores, R (2011). *Los significados asociados a la nación de fracción en la escuela secundaria.* En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México, DF. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/4645/1/FloresLossignificadosALME2011.pdf

Friz, M., Sanhueza, S., Sánchez, A., Belmar, M. y Figueroa, E (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes Educacionales*, *13*(2), 87-98. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/979/97912401006.pdf

Gallardo, P., Camacho J (2008). *Teorías del aprendizaje y práctica docente.* Sevilla, España.

Galvez, G. (1994). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires. Recuperado en https://es.calameo.com/read/000677512dc74d230359b

Godino, Juan (2002). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Universidad de Granada, España. Recuperado en https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª ed.). México D.F., México: Editorial McGraw-Hill. Recuperado en https://investigar1.files.wordpress.com/2010/05/1033525612-mtis_sampieri_unidad_1-1.pdf

Hoyos, J. R. (2015). *Diseño y aplicación de una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje significativo de las fracciones en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa José Asunción Silva del municipio de Medellín.* (Maestría en Enseñanza de las ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/48349/1/71194166.2015.pdf

Hurtado, Mª. E. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el sexto grado.* (Maestría en la enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

Ifrah, G. (2000). *The history of numbers. From prehistory to the invention of the computer*. New York, United States of America: john Wiley & Sons, Inc. Recuperado en https://archive.org/details/TheUniversalHistoryOfNumbers/page/n1

Inostroza, F. (2012). *Dificultades en la resolución de problemas matemáticos y su abordaje pedagógico. Un desafío pendiente para profesores y estudiantes*. Pontificia Universidad de Chile. Santiago de Chile, Chile. Recuperado en https://es.calameo.com/read/0040884995a385248c0c5

Institución Educativa Claretiana "Gustavo Torres Parra" (2017). *Proyecto Educativo Institucional.* Neiva, Colombia. Recuperado en http://www.semneiva.gov.co/institución-claretiano/pei-claretiano.html

Isoda, M y Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de las clases.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado en http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/ProblemSolvingIsodaOlfos.pdf

Kieren, T (1993). *Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding.* University of Alberta, Canada. Recuperado en https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=cvJ0l6VpEwUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=Kieren+(1993&ots=OTv5U8_z0P&sig=hJq1exRIJLCvPxOLiYuBnAkywEY#v=onepage&q&f=false

León, H., Fuenlabrada, I (1996). *Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto.* Revista Mexicana de Investigación Educativa. Recuperado en https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14000202.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). Fracciones. La relación parte-todo. Madrid: Síntesis.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. Chamorro (Coord.), Didáctica de las Matemáticas para Primaria. España.

Merino, Eduardo (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización.* Universidad de Granada. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf

Mesa, W (2004). *Modelación computacional para la enseñanza y aprendizaje del movimiento rectilíneo.* Universidad de Antioquia, Colombia. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/216/6/WilliamMesa_2004_modelacioncomputacional.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar¡ En Ministerio de Educación nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (pp. 46-95). Santa Fe de Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Panamericana, Formas e Impresos S. A. Recuperado de https://es.slideshare.net/sbmalambo/dba-derechos-bsicos-de-aprendizaje-matemticas

Morales, R. O. (2014). *Dificultades y erorres en la solución de problemas con números racionales.* (Maestría en Enseñanza de las Ciencias). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Recuperado en http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/235/1/Dificultad_error_solución_problema_número_racional.pdf

Paladinez, D. F. (2018). *Desarrollo del pensamiento varacional en estudiantes de primaria, a través de actividades de aprendizaje basadas en problemas*. (Maesría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado en http://bdigital.unal.edu.co/68320/1/10294981.2018.pdf

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. En M. Panizza (Comp.), *Enseñar a leer matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 59-72). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Recuperado en: http://postitulo.matematica.infd.edu.ar/archivos/repositorio/250/291/Conceptos_basicos_de_la_teoria_de_situaciones-Panizza.pdf

Polya, G (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving.* Combined Edition. New York: Wiley & Sons, Inc.

Recamán, B. (2002). *Los números. Una historia para contar*. Bogotá, Colombia: Icono.

Ruiz, C. A. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED*. (Maestría en Enseñanza de las ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de colombia, Bogotá, colombia. Recuperado en http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

Sánchez, J. K. (2018). *Resolución de problemas con operaciones básicas de fraccionarios a partir de la implementación de objetos virtuales basados en páginas interactivas de uso libre*. (Maestría en Enseñanza de las Ciencias). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Recuperado en http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/552/1/Resol_proble_operacion_básica_fracciona_implementa_objetos_virtuales.pdf

Stelzer, F., Andrés, Mª. L., Canet-Juric, L., Introzzi, I., Urquijo, S. (2016). Relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el prendizaje de las fracciones. *Cuadernos de Investigación Educativa*, *7*(1), 13-27. Recuperado en https://revistas.ort.edu.uy/cuadernos-de-investigacion-educativa/article/view/2573/2562

Streefland, L (1993). *Fractions: a realistic approach*. State University of Utrecht. Recuperado en http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Streefland_Las_fracciones.pdf

Tomas, U. (2011). *Teoría del aprendizaje significativo – David Ausubel*. Recuperado de http://elpsicoasesor.com/teoria-del-aprendizaje-significativo-david-ausubel/

Valdemoros, M. (1993). La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México. Recuperado en https://www.researchgate.net/publication/28129617_Lenguaje_fracciones_y_reparto

Valencia, I. A. (Septiembre 2013). Enseñanza y aprendizaje de las fracciones en un contexto real basado en la resolución de problemas (3136-3147). En E. Rodríguez (Presidente), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*,Montevideo, Uruguay. Recuperado en http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/433.pdf

Valls, J.; Callejo, M.L. y Llinares, S. (2007). *Entornos virtuales de aprendizaje. Interacción y construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.* Comunicación presentada en el XI Simposio de la SEIEM, Adeje, Tenerife. Septiembre. Recuperado en https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/60907/R61_1.pdf?sequence=1

Van den Heuvel – Panhuizen, M (2009). *Explorando el uso de la estrategia y la flexibilidad de la estrategia en la resolución de problemas no rutinarios por parte de los alumnos de primaria de matemáticas.* ZDM Mathematics Education.

Vanegas, M. D., Gutiérrez, J. M. y Galarcio, A. (2006). Los estándares curriculares del pensamiento métrico para la Educación matemática. En M. E. Posada (Ed.), *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas* (pp. 95-114). Medellín, colombia: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. En http://funes.uniandes.edu.co/6484/

Varela, Mª. P. (1994). *La resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias. Aspectos didácticos y cognitivos.* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperado en https://biblioteca.ucm.es/tesis/19911996/S/5/S5006501.pdf

# ANEXOS

## A. Anexo A. Taller diagnóstico

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

**Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales**
**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**
**Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra (Neiva - Huila)**

*EL USO E INTERPRETACIÓN DE FRACCIONES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS CONTEXTOS DE MEDICIÓN, CONTEO, VARIACIÓN Y ALEATORIEDAD, EN ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA.*

**TALLER DIAGNÓSTICO**

**Relación parte todo y la medida.**

1. (*fracción en conjuntos continuos de área*). En la entrada de una biblioteca se observa un diagrama circular en el que muestra correctamente que las tres cuartas partes del lugar están en remodelación. ¿Cómo será el diagrama que se observó?

2. *(fracción en conjuntos discretos).* Una cafetería tiene que despachar un pedido de tintos. De este pedido $\frac{4}{9}$ de tintos deben ir sin azúcar. ¿Cuántos tintos llevan azúcar? Represéntalo con un dibujo.

**Relación de comportamiento entre dos sistemas o variables.**

3. *(Fracción como cociente).* En una caja de plastilina vienen 12 barras. Mis dos hermanos y yo necesitamos la misma cantidad para elaborar una figura. ¿Cuál fracción me indica el reparto realizado?

4. *(fracción como probabilidad).* En una bolsa oscura hay un rompecabezas de forma rectangular que está conformado por 16 fichas (rectangulares). ¿cuál es la probabilidad de sacar una ficha esquinera de la bolsa?

5. *(fracción como operador).* Si mi profesora tiene 36 años y Valery tiene $\frac{1}{3}$ de su edad, ¿Cuál es la edad de Valery?

6. *(fracción como porcentaje).* Si el 75 % de los estudiantes de un curso de arte son mujeres. Representa este porcentaje como fracción.

7. *(fracción como razón de cambio). A* una fiesta asistieron niños y adultos. Por cada 8 niños había 3 adultos. Si en total había 24 niños, ¿Cuántos adultos asistieron?

# B. Anexo B. Taller de afianzamiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

**Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales**
**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**
**Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra (Neiva - Huila)**

*EL USO E INTERPRETACIÓN DE FRACCIONES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS CONTEXTOS DE MEDICIÓN, CONTEO, VARIACIÓN Y ALEATORIEDAD, EN ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA.*

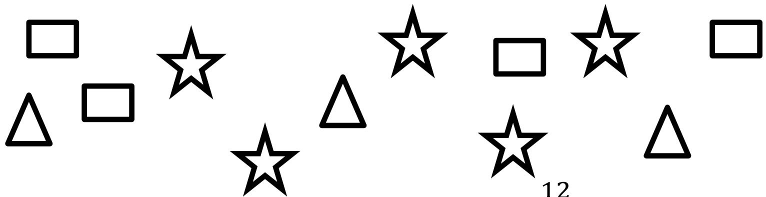
**TALLER DE AFIANZAMIENTO**

**Relación parte todo y la medida.**

1. (*fracción en conjuntos continuos de área*). Dibuja una ruleta de juego, teniendo en cuenta que los premios están distribuidos así: tres octavas partes dicen tv, dos octavos dicen vajilla y el resto dice sorpresa. ¿Qué fracción representa la parte del premio sorpresa?

2. Representa las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ usando un rectángulo del mismo tamaño. ¿cuál de estas fracciones es mayor? ¿por qué?

3. *(fracción en conjuntos discretos).* Observa el siguiente grupo de objetos



¿la fracción que representa el número de estrellas es $\frac{12}{5}$ ? ¿Por qué?

Escribe la fracción que representa el número de cuadriláteros en el grupo: —

Escribe la fracción que representa el número de triángulos en el grupo: —

4. En el grupo de música hay 11 estudiantes, de los cuales 8 son niñas. ¿Qué fracción del grupo representa el total de niños? Represéntalo con un dibujo.

**<u>Relación de comportamiento entre dos sistemas o variables.</u>**

5. *(Fracción como cociente).* Representa gráficamente la situación, escribe el resultado (cociente) como una fracción y simplifica. “un terreno rectangular de 3600 m² se piensa dividir en 40 lotes iguales, ¿Cuántos m² tendrá cada lote?”.

6. Marcela y su primo fueron a comer arepas. Compraron en total 3 arepas y cada uno comió la misma cantidad. ¿Qué cantidad de arepa comió cada uno?

7. *(fracción como probabilidad).* En una clase de matemáticas, luego de hacer varios ejercicios de sacar pimpones de una bolsa negra, los estudiantes concluyeron que de cada cinco veces que sacaron un pimpón de la bolsa, tres resultaron rojos. ¿Cuál es la fracción que representa la probabilidad de sacar, sin mirar, un pimpón rojo?

8. El fondo de pantalla de mi celular tiene la Figura de 9 burbujas de colores rebotando y moviéndose. Si hay 3 de color azul, 2 verdes, y el resto fucsia. ¿cuál es la probabilidad de que al señalar una con los ojos cerrados se de color fucsia?

**<u>Relación de comportamiento entre dos sistemas o variables.</u>**

9. (*fracción como operador*). Dibuja una cuadricula de 6 x 4. Colorea de amarillo la mitad, de verde la tercera parte y de rojo la sexta parte.

10. Si estos balones representan $\frac{1}{4}$ del total de juguetes favoritos que tiene mi hermano, ¿cuántos juguetes favoritos tiene mi hermano?

11. (*fracción como porcentaje*). El 5% de 500 estudiantes llega tarde al colegio. ¿Cuántos estudiantes llegan puntual?

12. En el supermercado, los miércoles son de bebidas y todos los artículos de esta línea tienen el 25%, si durante la promoción, compro una botella de vino que normalmente cuesta $72000, ¿Cuánto debo pagar por el vino?

13. *(fracción como razón de cambio).* En una obra de teatro, van a participar 20 personas. Se necesitan 3 mujeres por cada 2 hombres. ¿cuántos hombres se necesitan en total?

14. Un obrero se demora aproximadamente 3 minutos para pintar 6 $m^2$ de una pared. Si continua a ese ritmo, en una hora, ¿Cuántos $m^2$ habrá pintado?

# C. Anexo C. Taller final

**Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales**
**Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**
**Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra (Neiva - Huila)**

*EL USO E INTERPRETACIÓN DE FRACCIONES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS CONTEXTOS DE MEDICIÓN, CONTEO, VARIACIÓN Y ALEATORIEDAD, EN ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA.*

**TALLER FINAL**

**Relación parte todo y la medida.**

1. (*fracción en conjuntos continuos de área*). Observa la gráfica que se presenta a continuación.

Juan y Oscar discuten sobre la fracción que representa la parte negra del cuadrado. Oscar dice que la fracción que representa la parte negra es $\frac{3}{8}$ y Juan dice que es $\frac{3}{5}$. ¿Quién crees tú que tiene la razón? ¿Por qué?

2. *(fracción en conjuntos discretos).* Se quiere completar el relleno de una piñata con pimpones de color verde, azul y rojo. Si $\frac{1}{2}$ son verdes y $\frac{8}{24}$ son azules, ¿Cuántos pimpones son rojos? Represéntalo con un dibujo.

**<u>Relación de comportamiento entre dos sistemas o variables.</u>**

3. *(Fracción como cociente).* Representa la situación gráficamente. Para decorar tres carteleras iguales (en tamaño y forma), Carlos utilizó 4 metros de cinta. ¿Qué cantidad de cinta utiliza para cada una de las carteleras?

4. *(fracción como probabilidad).* Si en una bolsa de dulces hay 30 de sabor a fresa, 20 sabor a limón y 10 sabor a mora. ¿Qué puedo concluir de la probabilidad de sacar un dulce de limón, comparada con la probabilidad de sacar un dulce sabor a mora?

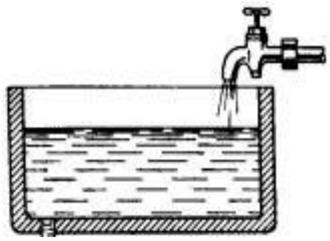
5. *(fracción como operador).* Dibuja un rectángulo con medias 9 cm x 3 cm. Luego reduce a la tercera parte cada lado y dibuja de nuevo el rectángulo

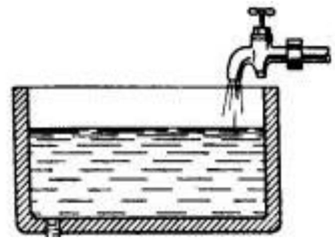
(reducido). Representa como fracciones las operaciones realizadas para obtener las medidas de la figura reducida.

6. *(fracción como porcentaje).* El diagrama muestra el estrato de 1200 personas encuestadas. Elabora una tabla de frecuencia con la cantidad de personas y


su estrato.

7. *(fracción como razón de cambio).* El tanque 1 se llena con una velocidad de 4 litros por segundo y el tanque 2 con una velocidad de $\frac{10}{3}$ litros por segundo. Si cada tanque tiene una capacidad de 20 litros. ¿Cuántos segundos se demora cada tanque en llenarse? ¿Cuál se llena más rápido?





| **TANQUE 1** | **TANQUE 2** |
| --- | --- |
| | |