



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Valoración de opciones europeas en el modelo telegráfico con saltos doble exponenciales vía transformada de Laplace

Deisy Yanira Camargo Galvis

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

Valoración de opciones europeas en el modelo telegráfico con saltos doble exponenciales vía transformada de Laplace

Deisy Yanira Camargo Galvis

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Actuaría y Finanzas

Director:
Ph.D. Oscar Javier López Alfonso

Línea de Investigación:
Finanzas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

A mis padres y mis hermanos

Declaración de obra original

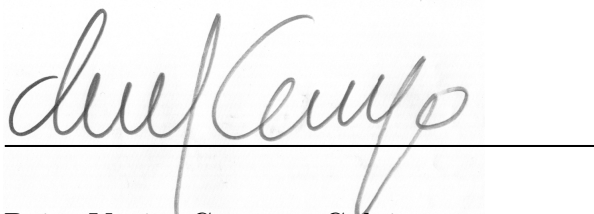
Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

A handwritten signature in black ink, reading "Deisy Camargo", is written over a horizontal line. The signature is cursive and fluid.

Deisy Yanira Camargo Galvis

Fecha: 12/08/2020.

Resumen

En este trabajo se estudia la aplicación de la transformada de Laplace para la valoración de opciones Europeas call y put en el modelo telegráfico con saltos constantes y aleatorios, en donde, los saltos en el precio del activo subyacente se suponen distribuidos doble exponencial asimétricos. Se encuentra de forma analítica la transformada de Laplace del precio de las opciones Europeas y se implementa el método de Euler para hallar la transformada inversa. Se comparan los resultados de esta implementación con la solución analítica en el caso de saltos constantes y con la simulación de Monte Carlo en el caso de saltos aleatorios, comprobando la efectividad del método propuesto.

Palabras clave: Proceso telegráfico con saltos, distribución doble exponencial asimétrica, transformada de Laplace, valoración de opciones Europeas.

Abstract

This thesis studies the application of the Laplace transform for the valuation of European call and put options in the telegraphic model with constant and random jumps, where the jumps in the price of the underlying asset are assumed to be asymmetric double exponential distribution. The Laplace transform of the price of European options is analytically found and the Euler method is implemented to find the Laplace inverse transform. The results of this implementation are compared with the analytical solution in the case of constant jumps and with the Monte Carlo simulation in the case of random jumps, checking the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Telegraphic process with jumps, double asymmetric exponential distribution, Laplace transform, European options valuation

Índice general

Resumen	IX
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XI
1 El modelo telegráfico con saltos constantes	3
1.1 Distribución del proceso telegráfico	4
1.2 Proceso telegráfico con saltos constantes	5
1.3 Distribución del proceso telegráfico con saltos constantes.	6
1.4 Función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos constantes	7
2 Valoración de las opciones Europeas en el modelo telegráfico con saltos cons- tantes	12
2.1 Precio de una opción Europea por transformada de Laplace	13
2.2 Valoración de una Call por transformada inversa de Laplace numérica	18
3 El modelo telegráfico con saltos doble exponenciales	20
3.1 La distribución doble exponencial	21
4 Valoración de las opciones europeas vía transformada de Laplace	24
4.1 Valoración por transformada inversa de Laplace	25
5 Conclusiones	27
Bibliografía	29

Índice de figuras

1-1	Trayectoria de \mathcal{T} si $\mu_1 > 0 > \mu_2$ y $\varepsilon(0) = 1$	3
1-2	Trayectoria de X_t si $\mu_1 > 0 > \mu_2$, $h_1 < 0 < h_2$ y $\varepsilon(0) = 1$	6
2-1	Simulación de una trayectoria del modelo telegrafico con saltos constantes, $\varepsilon_0 = 1$	13
3-1	Simulación de una trayectoria del modelo telegráfico con saltos doble exponenciales, $\varepsilon_0 = 1$	22

Índice de cuadros

1-1	Comparación de los valores de las funciones generadoras	11
2-1	Comparación de los precios para la Call del estado inicial 1	19
2-2	Comparación de los precios para la Call del estado inicial 2	19
4-1	Comparación de los precios para la Call europea de estado inicial 1	26
4-2	Comparación de los precios para la Call europea de estado inicial 2	26

Introducción

A pesar del éxito del modelo de Black-Scholes-Merton y el hecho que logra modelar el precio de los instrumentos derivados de los activos riesgosos de forma única¹ y analítica, este modelo presenta problemas a la hora de reflejar propiedades de los datos reales como son: las características leptocúrticas y asimétricas de los retornos de un activo, la sonrisa de la volatilidad y el efecto de clustering de la misma. Adicionalmente, se hace cada vez más evidente que en el mundo real existen saltos causados por factores de carácter económico, político, social y ambiental. Es un hecho estilizado conocido que los datos reales de mercado no siguen un movimiento Browniano geométrico por lo que muchos académicos han tratado de modelar estas características con modelos más robustos pero que mantengan las propiedades necesarias de un modelo financiero, como el no arbitraje.

Los modelos Markov modulados de cambio de régimen (Markov-modulated regime-switching models) han atraído la atención en modelación financiera pues, permiten la utilización de tiempos no homogéneos en la dinámica del activo y adicionalmente capturan características como la asimetría y colas pesadas de los retornos, variación de la volatilidad condicionada al tiempo y clustering de la volatilidad, al igual que cambios estructurales de la condiciones económicas del mercado, véase López & Serrano (2015).

De los modelos Markov modulados con cambio de régimen el escogido para este trabajo es el modelo telegráfico de dos estados con saltos, tanto constantes como variables, presentado por primera vez en Ratanov (2007) y que posteriormente los trabajos de Kolesnik & Ratanov (2013), López & Ratanov (2012a), López & Ratanov (2012b) y López & Serrano (2015) han estudiado las características de éste.

El propósito de esta tesis es el estudio de la aplicación de la transformada de Laplace para la valoración de opciones vainilla en el modelo telegráfico con saltos, tanto constantes como variables.

La transformada de Laplace es un método matemático usado para resolver problemas en ecuaciones diferenciales, pero en este caso se utilizará para simplificar el cálculo de la integral asociada al valor esperado en la valoración de opciones, de forma que obteniendo la transformada inversa de estas expresiones se llegue al precio del correspondiente derivado

¹El modelo de Black-Scholes-Merton representa un mercado financiero sin arbitraje y completo.

valorado. Infortunadamente, no es fácil encontrar una solución analítica para la transformada inversa de Laplace en el caso del modelo telegráfico con saltos, por lo cual, es necesaria la utilización de métodos numéricos para su solución.

Éste trabajo es la primera vez que se estudia la utilización de estas técnicas en la valoración de opciones bajo este modelo y lo logrado aquí permite abrir el camino hacia la valoración de opciones más complejas o exóticas, como las opciones con barreras o las opciones lookback.

Este trabajo se divide en cinco secciones, en la primera se abarca el estudio del modelo telegráfico con saltos constantes y se calcula la función generadora de momentos, donde encontramos que tiene dos expresiones algebraicamente equivalentes. En la segunda sección se hace el cálculo de la transformada de Laplace de la función de precio de una Call y Put europea y la valoración por métodos numéricos de su transformada inversa para encontrar el precio. En la tercera sección se hace el análisis del modelo telegráfico con saltos variables y se hace la suposición de que tales saltos se distribuyen doble exponencial asimétrica, se calcula la función de densidad de los saltos y se calcula la generadora de momentos de este proceso. En la cuarta sección se utiliza el teorema demostrado en la sección 2, pero se aplica en el modelo con saltos aleatorios doble exponenciales asimétricos, se hace la valoración numérica de la transformada inversa comparada con los resultados de los precios simulados por el método de Monte Carlo. Por último, se presentan las conclusiones.

1 El modelo telegráfico con saltos constantes

Sea $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 0}$ una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados $E = \{1, 2\}$ definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ y con generador infinitesimal dado por

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

La cadena define un conjunto de variables aleatorias (v.a.) $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ que representan los tiempos de cambio de la cadena de Markov, de forma que ε_n representa el estado de la cadena antes del n -ésimo tiempo de cambio τ_n , que se define como: $\varepsilon_n := \varepsilon_{\tau_n^-}$.

A partir de la cadena de Markov es posible definir un proceso telegráfico, que para este trabajo se supondrá asimétrico y continuo, $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_t\}_{t > 0}$, así:

$$\mathcal{T}_t = \int_0^t \mu_{\varepsilon_s} ds, \quad (1-1)$$

donde μ_1 y μ_2 son dos números reales tales que $\mu_1 \neq \mu_2$ y sin pérdida de generalidad se supondrá que $\mu_1 > \mu_2$.

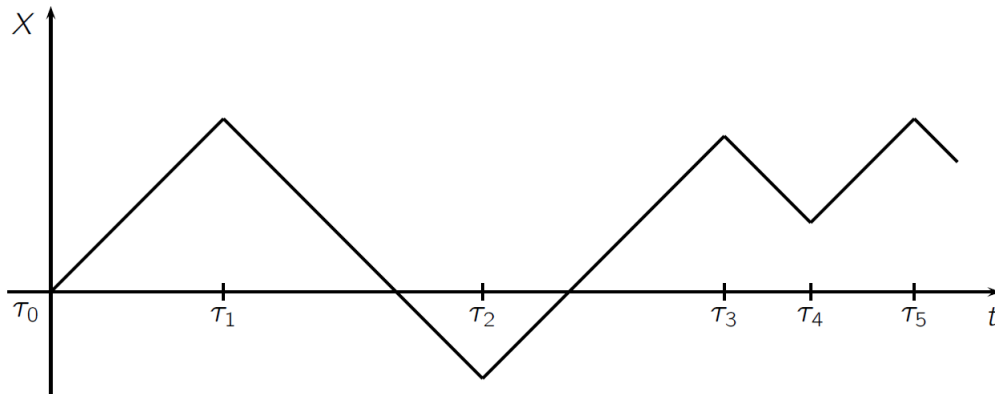


Figura 1-1: Trayectoria de \mathcal{T} si $\mu_1 > 0 > \mu_2$ y $\varepsilon(0) = 1$.

1.1. Distribución del proceso telegráfico

El proceso telegráfico depende del estado inicial de la cadena y esta dependencia se simplificará en la expresión de la probabilidad así:

$$\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \varepsilon(0) = i), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (1-2)$$

Con lo cual, la función de densidad del proceso telegráfico \mathcal{T} , que se denotará $p_i(x, t)$ se define como:

$$p_i(x, t) := \frac{\mathbb{P}_i(\mathcal{T}_t \in dx)}{dx}, \quad i = 1, 2. \quad (1-3)$$

Al fijar el estado inicial de la cadena $\varepsilon(0) = i$ con $i \in \{1, 2\}$ en Kolesnik & Ratanov (2013) se explica la igualdad en distribución del proceso, al separarlo antes y después del primer cambio de la cadena de Markov, es decir,

$$\mathcal{T}_t \stackrel{D}{=} \mu_i t \mathbf{1}_{\{t < \tau_1\}} + (\mu_i \tau_1 + \tilde{\mathcal{T}}_{t-\tau_1}) \mathbf{1}_{\{t > \tau_1\}} \quad (1-4)$$

donde τ_1 es el tiempo del primer cambio de la cadena y $\tilde{\mathcal{T}}$ es un proceso con los mismos parámetros, pero que comienza en el otro estado de la cadena, es decir comienza en $3 - i$ con $i \in \{1, 2\}$.

La igualdad en distribución también se puede obtener, si adicionalmente, se condiciona el proceso fijando el número de cambios de la cadena de Markov, con lo cual

$$\mathcal{T}_t \mathbf{1}_{\{N_t=0\}} = \mu_i t \mathbf{1}_{\{t < \tau_1\}} \quad (1-5)$$

$$\mathcal{T}_t \mathbf{1}_{\{N_t=n\}} = (\mu_i \tau_1 + \tilde{\mathcal{T}}_{t-\tau_1}) \mathbf{1}_{\{\tilde{N}_t=n-1\}} \quad (1-6)$$

para cualquier $t > 0$, donde \tilde{N}_t es un proceso de Poisson independiente de N_t y en el que sus intensidades dependen con los estados de $\tilde{\mathcal{T}}_t$. Con lo cual, la función de densidad del proceso telegráfico se puede expresar como:

$$p_i(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(x, t; n), \quad i = \{1, 2\} \quad (1-7)$$

donde $p_i(x, t; n)$ se define como

$$p_i(x, t; n) := \frac{\mathbb{P}_i(\mathcal{T}_t \in dx, N_t = n)}{dx}. \quad (1-8)$$

A partir de lo anterior, la función de densidad del telegráfico demostrado en Lopez & Ratanov (2014) es:

Proposición 1.1.1. *La función de densidad $p_i(x, t; n)$ del proceso telegráfico \mathcal{T}_t para $i \in \{1, 2\}$ y $n \geq 1$ es*

$$p_i(x, t; 0) = e^{-\lambda_i t} \cdot \delta(x - \mu_i t) \quad (1-9)$$

$$p_1(x, t; n) = \begin{cases} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \frac{\xi(x, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x, t))^k}{k!} \theta(x, t), & n = 2k + 1, k \geq 0 \\ \lambda_1^k \lambda_2^k \frac{\xi(x, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x, t))^{k-1}}{(k-1)!} \theta(x, t), & n = 2k, k \geq 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

$$p_2(x, t; n) = \begin{cases} \lambda_1^k \lambda_2^{k+1} \frac{\xi(x, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x, t))^k}{k!} \theta(x, t), & n = 2k + 1, k \geq 0 \\ \lambda_1^k \lambda_2^k \frac{\xi(x, t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(t - \xi(x, t))^k}{k!} \theta(x, t), & n = 2k, k \geq 0 \end{cases} \quad (1-11)$$

donde

$$\xi(x, t) = \frac{x - \mu_2 t}{\mu_1 - \mu_2} \quad y \quad t - \xi(x, t) = \frac{\mu_1 t - x}{\mu_1 - \mu_2} \quad (1-12)$$

y

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\lambda_1 \xi(x, t) - \lambda_2 (t - \xi(x, t))} \mathbf{1}_{\{0 < \xi(x, t) < t\}}. \quad (1-13)$$

Con el fin de hacer modelación financiera se necesita generalizar el proceso telegráfico adicionándole un componente de saltos, ver Kolesnik & Ratanov (2013). En este trabajo se supondrán dos tipos de saltos, los saltos constantes y los saltos aleatorios distribuidos doble exponencial asimétrica.

1.2. Proceso telegráfico con saltos constantes

Se consideran dos constantes $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ con $h_1 \neq h_2$ que representan las longitudes de los saltos en los tiempos en que se presentan los cambios de la cadena de Markov. Con h_1 y h_2 se define un proceso de saltos puros $\mathcal{J} = \{J_t\}_{t>0}$ definido sobre el mismo espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ así:

$$J_t = \sum_{n=1}^{N_t} h_{\varepsilon_n}, \quad J_0 = 0 \quad (1-14)$$

donde N_t es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad estocástica $\{\lambda_{\varepsilon_t}\}_{t \geq 0}$ dependiente de la cadena de Markov anteriormente definida.

El proceso telegráfico con saltos constantes se define como:

$$X_t = \mathcal{T}_t + J_t = \int_0^t \mu_{\varepsilon_s} ds + \sum_{n=1}^{N_t} h_{\varepsilon_n} \quad (1-15)$$

con estados alternantes (μ_1, λ_1, h_1) y (μ_2, λ_2, h_2) .

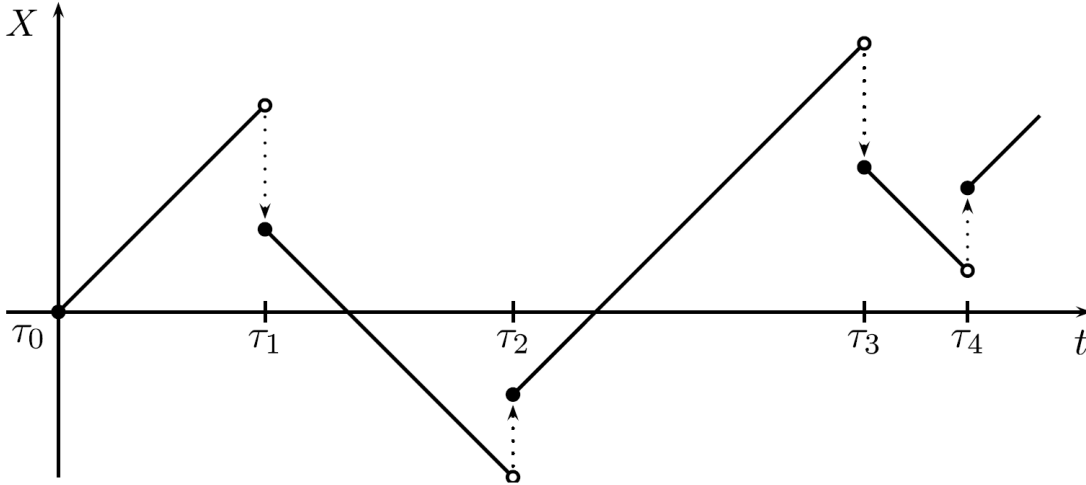


Figura 1-2: Trayectoria de X_t si $\mu_1 > 0 > \mu_2$, $h_1 < 0 < h_2$ y $\varepsilon(0) = 1$.

Al fijar el estado inicial de la cadena $\varepsilon(0) = i$, con $i \in \{1, 2\}$, se mantiene la igualdad en distribución en (1-4) al separar el proceso antes y después del primer cambio de la cadena de Markov y por ende del primer salto,

$$X_t \stackrel{D}{=} \mu_i t \mathbf{1}_{\{t < \tau_1\}} + (\mu_i \tau_1 + h_i + \tilde{X}_{t-\tau_1}) \mathbf{1}_{\{t > \tau_1\}} \quad (1-16)$$

donde \tilde{X}_t es un proceso con los mismos parámetros, pero comienza en $3 - i$ con $i \in \{1, 2\}$.

Fijando el número de saltos se obtiene igualmente que

$$X_t \mathbf{1}_{\{N_t=0\}} = \mu_i t \mathbf{1}_{\{t < \tau_1\}} \quad (1-17)$$

$$X_t \mathbf{1}_{\{N_t=n\}} = (\mu_i \tau_1 + h_i + \tilde{X}_{t-\tau_1}) \mathbf{1}_{\{\tilde{N}_t=n-1\}} \quad (1-18)$$

donde \tilde{N}_t es un proceso de Poisson independiente de N_t y sus intensidades dependen de los estados de \tilde{X}_t .

1.3. Distribución del proceso telegráfico con saltos constantes.

A partir de la proposición 1.1.1 sobre la función de densidad del telegráfico, pueden ser encontradas las expresiones correspondientes a la función de densidad del proceso telegráfico

con saltos constantes, que se notará cómo $q_i(x, t)$. Para esto se debe utilizar el siguiente resultado presentado en López & Ratanov (2012a).

Proposición 1.3.1. *Sea $q_i(x, t; n)$ la función de densidad del proceso telegráfico con saltos constantes, suponiendo n cambios de la cadena de Markov entre 0 y t , entonces*

$$q_i(x, t; n) = p_i(x - j_{i,n}, t; n) \quad (1-19)$$

donde $j_{i,n}$ representa la suma de los primeros n saltos, es decir, $j_{i,n} := \sum_{k=1}^n h_{i_k}$, suponiendo que el primer estado de la cadena es $\varepsilon(0) = i$ y que $i_k = i$ si k es impar y $i_k = 3 - i$ si k es par.

Con esto, la expresión para la función de densidad del proceso telegráfico con saltos constantes es:

$$q_i(x, t; 0) = p_i(x, t; 0) = e^{-\lambda_i t} \cdot \delta(x - \mu_i t) \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned} q_1(x, t; n) &= p_1(x - j_{1,n}, t; n) \\ &= \begin{cases} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \frac{\xi(x - j_{1,n}, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x - j_{1,n}, t))^k}{k!} \theta(x - j_{1,n}, t), & n = 2k + 1, k \geq 0 \\ \lambda_1^k \lambda_2^k \frac{\xi(x - j_{1,n}, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x - j_{1,n}, t))^{k-1}}{(k-1)!} \theta(x - j_{1,n}, t), & n = 2k, k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1-21)$$

$$\begin{aligned} q_2(x, t; n) &= p_2(x - j_{2,n}, t; n) \\ &= \begin{cases} \lambda_1^k \lambda_2^{k+1} \frac{\xi(x - j_{2,n}, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x - j_{2,n}, t))^k}{k!} \theta(x - j_{2,n}, t), & n = 2k + 1, k \geq 0 \\ \lambda_1^k \lambda_2^k \frac{\xi(x - j_{2,n}, t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(t - \xi(x - j_{2,n}, t))^k}{k!} \theta(x - j_{2,n}, t), & n = 2k, k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1-22)$$

donde

$$\xi(x - j_{i,n}, t) = \frac{x - j_{i,n} - \mu_2 t}{\mu_1 - \mu_2} \quad y \quad t - \xi(x - j_{i,n}, t) = \frac{\mu_1 t - x + j_{i,n}}{\mu_1 - \mu_2}$$

y

$$\theta(x - j_{i,n}, t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\lambda_1 \xi(x - j_{i,n}, t) - \lambda_2 (t - \xi(x - j_{i,n}, t))} \mathbf{1}_{\{0 < \xi(x - j_{i,n}, t) < t\}}.$$

1.4. Función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos constantes

La función generadora de momentos puede ser calculada utilizando la misma propiedad utilizada en la ecuación (1-7) para definir la función de densidad del proceso telegráfico, es

decir,

$$q_i(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_i(x, t; n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(x - j_{i,n}, t; n) \quad (1-23)$$

Al igual que en la ecuación (1-2), existe una expresión para simplificar la dependencia del valor esperado del proceso y el primer estado de la cadena de Markov

$$\mathbb{E}_i(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot \mid \varepsilon(0) = i)$$

por tanto, si $\psi_i(z, t)$ representa la función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos constantes, entonces esta función puede ser calculada cómo:

$$\psi_i(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_i(z, t; n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(e^{zX_t} \mathbf{1}_{\{N_t=n\}}) \quad (1-24)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_i(z, t; n) &= \mathbb{E}_i(e^{zX_t} \cdot \mathbf{1}_{\{N_t=n\}}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} q_i(x, t; n) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} p_i(x - j_{i,n}, t; n) dx \end{aligned} \quad (1-25)$$

Teorema 1.4.1. *La función generadora del proceso telegráfico con saltos constantes, para cada estado $i \in \{1, 2\}$ es:*

$$\psi_i(z, t) = e^{-\lambda_i t + \mu_i t z} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_i(z, t; 2k+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(z, t; 2k) \quad (1-26)$$

donde

$$\psi_1(z, t; 2k+1) = \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(2k+1)!} e^{z j_{1,2k+1} + z \mu_2 t - \lambda_2 t} t^{2k+1} {}_1F_1(k+1; 2k+2; 2(z\nu - \kappa)t), \quad (1-27)$$

$$\psi_1(z, t; 2k) = \frac{\lambda_1^k \lambda_2^k}{(2k)!} e^{z j_{1,2k} + z \mu_2 t - \lambda_2 t} t^{2k} {}_1F_1(k+1; 2k+1; 2(z\nu - \kappa)t), \quad (1-28)$$

$$\psi_2(z, t; 2k+1) = \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{k+1}}{(2k+1)!} e^{z j_{2,2k+1} + z \mu_2 t - \lambda_2 t} t^{2k+1} {}_1F_1(k+1; 2k+2; 2(z\nu - \kappa)t), \quad (1-29)$$

$$\psi_2(z, t; 2k) = \frac{\lambda_1^k \lambda_2^k}{(2k)!} e^{z j_{2,2k} + z \mu_2 t - \lambda_2 t} t^{2k} {}_1F_1(k; 2k+1; 2(z\nu - \kappa)t). \quad (1-30)$$

Aquí ${}_1F_1(a; b; z)$ representa la función hipergeométrica confluyente o función de Kummer de primera clase definida como:

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer, véase Gradshteyn & Ryzhik (2007).

Demostración. La expresión de la función generadora de momentos, cuando aún no se ha presentado el primer cambio en la cadena es:

$$\psi_i(z, t; 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\lambda_i t} \delta(x - \mu_i t) dx = e^{-\lambda_i t + \mu_i t z}. \quad (1-31)$$

En el caso en que el primer estado de la cadena es $\varepsilon(0) = 1$ y n es impar se tiene que,

$$\psi_1(z, t; 2k + 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \frac{\xi(x - j_{1,n}, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x - j_{1,n}, t))^k}{k!} \theta(x - j_{1,n}, t) dx$$

al reducir la notación haciendo los siguientes reemplazos:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi(x - j_{1,n}, t) = \frac{x - j_{1,n} - \mu_2 t}{2\nu}, & \nu &= \mu_1 - \mu_2 \\ (t - \xi_1) &= t - \xi(x - j_{1,n}, t) = \frac{\mu_1 t - x + j_{1,n}}{2\nu} \\ \theta(x - j_{1,n}, t) &= \frac{1}{2\nu} e^{-\lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 (t - \xi_1)} \mathbf{1}_{\{0 < \xi_1 < t\}} \end{aligned}$$

y cambiando la variable x por ξ_1 por medio del siguiente reemplazo $x = 2\xi_1\nu + j_{1,n} + \mu_2 t$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi_1(z, t; 2k + 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \frac{\xi(x - j_{1,n}, t)^k}{k!} \frac{(t - \xi(x - j_{1,n}, t))^k}{k!} \theta(x - j_{1,n}, t) dx \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \xi_1^k (t - \xi_1)^k \frac{1}{2\nu} e^{-\lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 (t - \xi_1)} \mathbf{1}_{\{0 < \xi_1 < t\}} 2\nu d\xi_1 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} \int_0^t e^{zx - \lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 (t - \xi_1)} \xi_1^k (t - \xi_1)^k d\xi_1 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} \int_0^t e^{z(2\xi_1\nu + j_{1,n} + \mu_2 t) - \lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 (t - \xi_1)} \xi_1^k (t - \xi_1)^k d\xi_1 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,n} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \int_0^t e^{2z\nu\xi_1 - \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_1} \xi_1^k (t - \xi_1)^k d\xi_1 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,n} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \int_0^t e^{2z\nu\xi_1 - 2\xi_1\kappa} \xi_1^k (t - \xi_1)^k d\xi_1; \quad 2\kappa = \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,n} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \int_0^t e^{2(z\nu - \kappa)\xi_1} \xi_1^k (t - \xi_1)^k d\xi_1 \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,n} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \mathbf{B}(k + 1, k + 1) t^{2k+1} {}_1F_1(k + 1; 2k + 2; 2(z\nu - \kappa)t) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{B}(x, y)$ es la función Beta definida como $\mathbf{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$.

Con esto la expresión final para la función $\psi_1(z, t; 2k + 1)$, en el caso en que el primer estado de la cadena es $\varepsilon(0) = 1$ y n es impar es:

$$\begin{aligned} \psi_1(z, t; 2k + 1) &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,2k+1} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \mathbf{B}(k + 1, k + 1) t^{2k+1} {}_1F_1(k + 1; 2k + 2; 2(z\nu - \kappa)t) \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(k!)^2} e^{zj_{1,2k+1} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} \frac{k!k!}{(2k + 1)!} t^{2k+1} {}_1F_1(k + 1; 2k + 2; 2(z\nu - \kappa)t) \\ &= \frac{\lambda_1^{k+1} \lambda_2^k}{(2k + 1)!} e^{zj_{1,2k+1} + z\mu_2 t - \lambda_2 t} t^{2k+1} {}_1F_1(k + 1; 2k + 2; 2(z\nu - \kappa)t). \end{aligned}$$

Los demás casos se obtiene similarmente, quedando así demostrado el teorema. \square

La función generadora del proceso telegráfico con saltos constantes tiene otra expresión demostrada por López & Ratanov (2012a).

Proposición 1.4.1. *Para cualquier $z \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, la función $\psi_i(z, t)$ para $i \in \{1, 2\}$, tiene la forma*

$$\psi_1(z, t) = e^{t(\mu z - \lambda)} \left(\cosh(t\sqrt{D_z}) + (\nu z - \kappa + \lambda_1 e^{zh_1}) \cdot \frac{\sinh(t\sqrt{D_z})}{\sqrt{D_z}} \right), \quad (1-32)$$

$$\psi_2(z, t) = e^{t(\mu z - \lambda)} \left(\cosh(t\sqrt{D_z}) - (\nu z - \kappa - \lambda_2 e^{zh_2}) \cdot \frac{\sinh(t\sqrt{D_z})}{\sqrt{D_z}} \right), \quad (1-33)$$

donde

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad \nu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad \kappa = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2},$$

$$y \quad D_z := D(z) = (\nu z - \kappa)^2 + \lambda_1 \lambda_2 e^{z \cdot (h_1 + h_2)}.$$

Las dos expresiones son equivalentes y se comprobó esta igualdad numéricamente con los siguientes resultados para dos conjuntos de parámetros diferentes, en donde se observan diferencias solamente en el treceavo decimal de la expresión, ver Cuadro 1-1.

Cuadro 1-1: Comparación de los valores de las funciones generadoras

z	ψ_1 (1-26)	ψ_1 (1-32)	ψ_2 (1-26)	ψ_2 (1-33)	ψ_1 (1-26)	ψ_1 (1-32)	ψ_2 (1-26)	ψ_2 (1-33)
5	1.20753	1.20753	1.45082	1.45082	1.074378	1.074378	1.108770	1.108770
6	1.26767	1.26767	1.80989	1.80989	1.093773	1.093773	1.144995	1.144995
7	1.33163	1.33163	2.42158	2.42158	1.114644	1.114644	1.186791	1.186791
8	1.39928	1.39928	3.45938	3.45938	1.136986	1.136986	1.234555	1.234555
9	1.47064	1.47064	5.21621	5.21621	1.160796	1.160796	1.288731	1.288731
10	1.54580	1.54580	8.18672	8.18672	1.186079	1.186079	1.349812	1.349812
11	1.62488	1.62488	13.20650	13.20650	1.212840	1.212840	1.418345	1.418345
12	1.70807	1.70807	21.68749	21.68749	1.241090	1.241090	1.494936	1.494936
13	1.79555	1.79555	36.01618	36.01618	1.270841	1.270841	1.580259	1.580259
14	1.88753	1.88753	60.22745	60.22745	1.302111	1.302111	1.675059	1.675059
15	1.98424	1.98424	101.14501	101.14501	1.334920	1.334920	1.780161	1.780161

Con $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = -0,01$, $h_1 = -0,6$, $h_2 = 0,5$,
 $\lambda_1 = 0,065$ y $\lambda_2 = 0,042$.

Con $\mu_1 = 0,03$, $\mu_2 = -0,05$, $h_1 = -0,05$,
 $h_2 = 0,08$, $\lambda_1 = 0,38$ y $\lambda_2 = 0,7625$.

La función generadora de momentos del proceso será utilizada en la valoración de opciones como se puede ver en la siguiente sección.

2 Valoración de las opciones Europeas en el modelo telegráfico con saltos constantes

En esta sección, se considera un modelo de mercado con dos activos, una acción y un bono. El bono será el activo libre de riesgo y su precio en el tiempo se notará como $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ donde $T > 0$ denota la fecha de ejercicio del contrato derivado que se quiere valorar. El proceso del precio del activo riesgoso o subyacente se notará como $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$. Los dos procesos de precios están definidos sobre el mismo espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{Q})$ donde \mathbb{Q} es la medida neutral al riesgo.

Bajo la medida \mathbb{Q} el precio del bono es modelado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$dB_t = B_t \cdot r dt, \quad B_0 = 1, \quad (2-1)$$

y el precio del activo riesgoso es modelado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t \left(\mu_{\varepsilon(t)} dt + d \left(\sum_{n=1}^{N_t} e^{h_{\varepsilon_n}} - 1 \right) \right). \quad (2-2)$$

La solución de la ecuación diferencial estocástica esta dada por

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \mu_{\varepsilon(s)} dt + \sum_{n=1}^{N_t} h_{\varepsilon_n} \right) \quad (2-3)$$

con lo cual, el activo es modelado por la exponencial de un proceso telegráfico con saltos constantes de estados (μ_1, λ_1, h_1) y (μ_2, λ_2, h_2) .

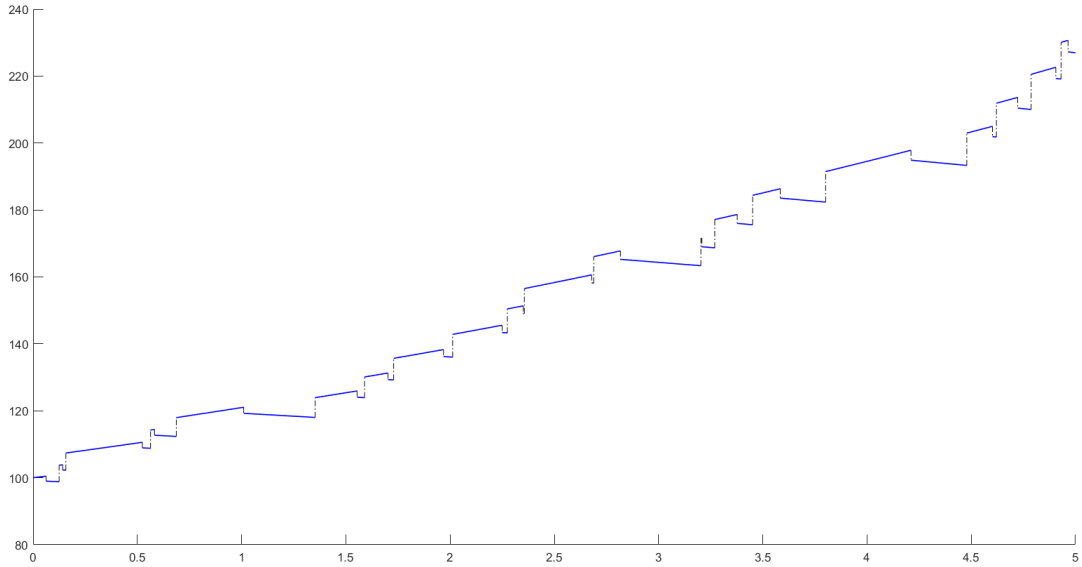


Figura 2-1: Simulación de una trayectoria del modelo telegrafico con saltos constantes, $\varepsilon_0 = 1$.

Donde los parámetros de simulación son: $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = -0,03$, $h_1 = -0,01$, $h_2 = 0,03$, $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 7$.

2.1. Precio de una opción Europea por transformada de Laplace

El precio de una opción Call de strike K , tiempo de maduración T y valor inicial del activo S_0 en el modelo telegráfico con saltos constantes X_t es

$$\begin{aligned} C_i(T, K) &= e^{-rT} \mathbb{E}_i [(S(T) - K)^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_i [(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+]; \quad \text{con } k = -\ln(K) \end{aligned} \quad (2-4)$$

para $i \in \{1, 2\}$, pues el precio de la opción dependerá del estado inicial de la cadena de Markov.

Para el precio de una opción Put europea de strike K y tiempo de maduración T se tiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} P_i(T, K) &= e^{-rT} \mathbb{E}_i [(K - S(T))^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_i [(e^k - S_0 e^{X_T})^+]; \quad \text{con } k = \ln(K) \end{aligned} \quad (2-5)$$

con $i \in \{1, 2\}$.

Similarmente a lo encontrado en el trabajo de Kou *et al.* (2005), se aplica la transformada de Laplace sobre la función del precio de las opciones Europeas, obteniendo una expresión que puede ser calculada explícitamente y que termina dependiendo de la función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos. Utilizando estas expresiones calculadas en el espacio de Laplace, se emplea la transformada inversa de Laplace numéricamente obteniendo así los precios de las opciones.

Teorema 2.1.1. Si X_t es un proceso telegráfico con saltos constantes, como el definido en la ecuación (1-15), entonces la transformada de Laplace con respecto a $k = -\ln(K)$ de la función de precio de una opción Call, $C_i(T, k)$, es:

$$\mathcal{L}(C_i(T, k)) = \hat{f}_{C_i}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} C_i(T, k) dk = e^{-rT} \frac{S_0^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot \psi_i(\xi+1, T), \quad (2-6)$$

y la transformada de Laplace, con respecto a $k = \ln(K)$, de la función de precio de una opción Put, $P_i(T, k)$, es:

$$\mathcal{L}(P_i(T, k)) = \hat{f}_{P_i}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} P_i(T, k) dk = e^{-rT} \frac{S_0^{-(\xi-1)}}{\xi(\xi-1)} \cdot \psi_i(-(\xi-1), T). \quad (2-7)$$

Demostración. La transformada de Laplace con respecto a k , de la función de precio de una Call $C_i(T, K)$ para cada $i \in \{1, 2\}$ es

$$\hat{f}_{C_i}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} C_i(T, k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+ \right] dk$$

como $S_0 e^{X_T} - e^{-k} > 0$, si $k > -X_T - \ln(S_0)$, la anterior expresión se puede reescribir así:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{C_i}(\xi) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} \mathbb{E}_i [(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+] dk \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} \max\{S_0 e^{X_T} - e^{-k}; 0\} dk \right] \quad (\text{por Fubini}) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\int_{-X_T - \ln(S_0)}^{\infty} e^{-\xi k} (S_0 e^{X_T} - e^{-k}) dk \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[S_0 e^{X_T} \int_{-X_T - \ln(S_0)}^{\infty} e^{-\xi k} dk - \int_{-X_T - \ln(S_0)}^{\infty} e^{-k(\xi+1)} dk \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[S_0 e^{X_T} \frac{e^{-\xi k}}{-\xi} \Big|_{-X_T - \ln(S_0)}^{\infty} - \frac{e^{-k(\xi+1)}}{-(\xi+1)} \Big|_{-X_T - \ln(S_0)}^{\infty} \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[S_0 e^{X_T} \left(\frac{e^{\xi(X_T + \ln(S_0))}}{\xi} \right) - \left(\frac{e^{(\xi+1)(X_T + \ln(S_0))}}{(\xi+1)} \right) \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\frac{S_0^{\xi+1} e^{(\xi+1)X_T}}{\xi} - \frac{S_0^{\xi+1} e^{(\xi+1)X_T}}{\xi+1} \right] \\
&= e^{-rT} \frac{S_0^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \mathbb{E}_i [e^{(\xi+1)X_T}] \\
&= e^{-rT} \frac{S_0^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \psi_i(\xi+1, T)
\end{aligned}$$

La transformada de Laplace con respecto a k , de la función de precio de una Put $P_i(T, k)$ es

$$\hat{f}_{P_i}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} P_i(T, k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} e^{-rT} \mathbb{E}_i [(e^k - S_0 e^{X_T})^+] dk$$

como $e^k - S_0 e^{X_T} > 0$ si $k > X_T + \ln(S_0)$, la anterior expresión se puede reescribir así:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{P_i}(\xi) &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi k} \max\{e^k - S_0 e^{X_T}; 0\} dk \right] \quad (\text{por Fubini}) \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\int_{X_T + \ln(S_0)}^{\infty} e^{-\xi k} (e^k - S_0 e^{X_T}) dk \right] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\int_{X_T + \ln(S_0)}^{\infty} e^{-k(\xi-1)} dk - S_0 e^{X_T} \int_{X_T + \ln(S_0)}^{\infty} e^{-\xi k} dk \right] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\frac{e^{-k(\xi-1)}}{-(\xi-1)} \Big|_{X_T + \ln(S_0)}^{\infty} - S_0 e^{X_T} \frac{e^{-\xi k}}{-\xi} \Big|_{X_T + \ln(S_0)}^{\infty} \right] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\left(\frac{e^{-(\xi-1)(X_T + \ln(S_0))}}{(\xi-1)} \right) - S_0 e^{X_T} \left(\frac{e^{-\xi(X_T + \ln(S_0))}}{\xi} \right) \right] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_i \left[\frac{S_0^{-(\xi-1)} e^{-(\xi-1)X_T}}{\xi(\xi-1)} \right] \\
 &= e^{-rT} \frac{S_0^{-(\xi-1)}}{\xi(\xi-1)} \mathbb{E}_i [e^{-(\xi-1)X_T}] \\
 &= e^{-rT} \frac{S_0^{-(\xi-1)}}{\xi(\xi-1)} \psi_i(-(\xi-1), T)
 \end{aligned}$$

□

Con esto, la transformada de Laplace de la función del precio de la Call y de la Put queda en términos del parámetro ξ , del precio inicial del activo S_0 y de la función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos $\psi_i(\xi, T)$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Utilizando el método de transformada de Laplace es también posible calcular las sensibilidades de las opciones Call y Put ya que las expresiones en el espacio de Laplace son fácilmente derivables.

Corolario 2.1.1. Las expresiones para las sensibilidades delta y gamma de las opciones Call

y Put son:

$$\Delta(C_i(T, k)) = \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(e^{-rT} \frac{S_0^\xi}{\xi} \cdot \psi_i(\xi + 1, T) \right), \quad \text{donde } k = -\ln(K). \quad (2-8)$$

$$\Gamma(C_i(T, k)) = \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(e^{-rT} S_0^{\xi-1} \cdot \psi_i(\xi + 1, T) \right), \quad \text{donde } k = -\ln(K). \quad (2-9)$$

$$\Delta(P_i(T, k')) = -\mathcal{L}_\xi^{-1} \left(e^{-rT} \frac{S_0^{-\xi}}{\xi} \cdot \psi_i(1 - \xi, T) \right), \quad \text{donde } k' = \ln(K). \quad (2-10)$$

$$\Gamma(P_i(T, k')) = \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(e^{-rT} S_0^{-1-\xi} \cdot \psi_i(1 - \xi, T) \right), \quad \text{donde } k' = \ln(K). \quad (2-11)$$

Demostración. En el caso del Delta para el precio de una Call se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta C_i(T, k) &= \frac{\partial C_i(T, k)}{\partial S_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_0} \left(\mathcal{L}_\xi^{-1} \left(\hat{f}_{C_i}(\xi) \right) \right) \\ &= \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial S_0} \left(\hat{f}_{C_i}(\xi) \right) \right) \\ &= \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial S_0} \left(e^{-rT} \frac{S_0^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \psi_i(\xi+1, T) \right) \right) \\ &= \mathcal{L}_\xi^{-1} \left(e^{-rT} \frac{S_0^\xi}{\xi} \psi_i(\xi+1, T) \right), \quad \text{donde } . \end{aligned}$$

donde $k = -\ln(K)$ y \mathcal{L}_ξ^{-1} representa la transformada inversa de Laplace en ξ .

Utilizando este mismo razonamiento se obtienen las demás expresiones, para cualquier tiempo de maduración T y cualquier strike K . \square

Con los resultados de esta sección podemos encontrar otra forma de valoración de opciones Europeas a partir del cálculo de la transformada de Laplace.

En la siguiente sección se presenta los resultados de la valoración de una call y su comparación con los resultados de la utilización de la función analítica presentada por Lopez (2014).

2.2. Valoración de una Call por transformada inversa de Laplace numérica

A partir del teorema 2.1.1 se tiene una expresión para la transformada de Laplace de la función de pago de una Call $C_i(T, k)$ que es

$$\hat{f}_{C_i}(\xi) = e^{-rT} \frac{S_0^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot \psi_i(\xi+1, T). \quad (2-12)$$

En la proposición 1.4.1 se presentaron las expresiones para la función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos constantes, una para cada estado inicial de la cadena de Markov, con las cuales se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{C_1}(\xi) = e^{-rT} \frac{S(0)^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot e^{T(\mu(\xi+1)-\lambda)} & \left(\cosh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}}) + \right. \\ & \left. (\nu(\xi+1) - \kappa + \lambda_1 e^{(\xi+1) \cdot h_1}) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}})}{\sqrt{D_{(\xi+1)}}} \right) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{C_2}(\xi) = e^{-rT} \frac{S(0)^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot e^{T(\mu(\xi+1)-\lambda)} & \left(\cosh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}}) - \right. \\ & \left. (\nu(\xi+1) - \kappa - \lambda_2 e^{(\xi+1) \cdot h_2}) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}})}{\sqrt{D_{(\xi+1)}}} \right) \end{aligned} \quad (2-14)$$

Para el cálculo de la transformada inversa de Laplace¹ de estas expresiones, en el trabajo de Petrella (2014) se explica la utilización de la extensión del algoritmo de Euler para la transformada inversa de Laplace en cualquier modelo financiero y en particular en el modelo de Kou, que también es un modelo de saltos. En ese trabajo se explica la necesidad de utilizar una constante de re-escalado que permita controlar las potencias en la expresión de la transformada de Laplace y que la constante A en la fórmula de aproximación de la inversión es obtenida a partir de experimentación numérica.

En la siguiente tabla se comparan los precios a partir de la fórmula analítica presentada en Lopez (2014) y los precios obtenidos por la transformada inversa numérica, para una Call, para varios strike's y varios tiempos de maduración.

Para los parámetros $S_0 = 100$, $r = 0,05$, $\mu_1 = 0,07$, $\mu_2 = -0,08$, $h_1 = -0,012$, $h_2 = 0,009$, $\lambda_1 = 1,66667$ y $\lambda_2 = 14,4444$, los valores obtenidos son:

¹Ver Anexo 1.

Strike	T = 0.5		T = 0.75		T = 1		T = 1.25		T = 1.5	
	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace
95	7.3456	7.3423	8.4966	8.4946	9.6332	9.6338	10.7558	10.7570	11.8644	11.8619
96	6.3704	6.3703	7.5336	7.5300	8.6822	8.6833	9.8165	9.8181	10.9367	10.9367
97	5.3960	5.3899	6.5711	6.5689	7.7314	7.7322	8.8774	8.8740	10.0092	10.0095
98	4.4244	4.4246	5.6104	5.6093	6.7817	6.7841	7.9388	7.9370	9.0819	9.0842
99	3.4617	3.4600	4.6544	4.6506	5.8345	5.8344	7.0017	6.9822	8.1555	8.1540
100	2.5219	2.5232	3.7101	3.7095	4.8935	4.8941	6.0678	6.0703	7.2307	7.2315
101	1.6345	1.6369	2.7916	2.7924	3.9656	3.9657	5.1409	5.1389	6.3097	6.3015
102	0.8520	0.8525	1.9246	1.9235	3.0642	3.0646	4.2278	4.2291	5.3962	5.3946
103	0.2470	0.2460	1.1505	1.1498	2.2114	2.2125	3.3407	3.3407	4.4966	4.4966
104	0.0000	0.0000	0.5259	0.5265	1.4402	1.4396	2.4985	2.4981	3.6219	3.6211
105	0.0000	0.0000	0.1083	0.1012	0.7940	0.7950	1.7283	1.7297	2.7882	2.7885

Cuadro 2-1: Comparación de los precios para la Call del estado inicial 1

Strike	T = 0.5		T = 0.75		T = 1		T = 1.25		T = 1.5	
	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace	Precio Modelo Analítico	Precio transformada de Laplace
95	7.3456	7.3473	8.4966	8.4969	9.6333	9.6322	10.7558	10.7558	11.8644	11.8652
96	6.3703	6.3700	7.5337	7.5344	8.6822	8.6795	9.8165	9.8139	10.9367	10.9382
97	5.3965	5.3955	6.5715	6.5706	7.7317	7.7297	8.8775	8.8757	10.0092	10.0095
98	4.4267	4.4241	5.6116	5.6110	6.7824	6.7828	7.9392	7.9403	9.0821	9.0813
99	3.4686	3.4688	4.6578	4.6584	5.8363	5.8346	7.0026	7.0001	8.1559	8.1576
100	2.5393	2.5378	3.7182	3.7193	4.8975	4.8990	6.0699	6.0684	7.2318	7.2325
101	1.6715	1.6717	2.8086	2.8101	3.9741	3.9715	5.1452	5.1448	6.3120	6.3140
102	0.9187	0.9183	1.9565	1.9566	3.0804	3.0789	4.2363	4.2370	5.4007	5.4028
103	0.3523	0.3525	1.2026	1.2025	2.2393	2.2414	3.3558	3.3574	4.5048	4.5038
104	0.0421	0.0418	0.5989	0.5985	1.4835	1.4829	2.5232	2.5219	3.6358	3.6368
105	0.0000	0.0000	0.1947	0.1951	0.8529	0.8524	1.7652	1.7663	2.8102	2.8113

Cuadro 2-2: Comparación de los precios para la Call del estado inicial 2

Las diferencias encontradas entre los dos métodos en promedio están por debajo del 0.1%, pero se considera que estas diferencias pueden disminuirse si se encuentra otro método para el cálculo de la transformada inversa de Laplace que presente menor inestabilidad en su cálculo.

3 El modelo telegráfico con saltos doble exponenciales

En esta sección se supondrá que el activo riesgoso se modela por un proceso telegráfico con saltos, donde los saltos serán variables aleatorias con distribución doble exponencial asimétrica. En este caso el activo riesgoso es modelado por la siguiente ecuación diferencial estocástica, bajo una medida neutral al riesgo \mathbb{Q}

$$dS_t = S_{t-} \left(\mu_{\varepsilon(s)} dt + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \gamma(dy, dt) \right), \quad (3-1)$$

donde $\gamma(dy, dt)$ es la medida aleatoria correspondiente al proceso de Poisson compuesto, para más información sobre medida aleatoria ver Jeanblanc *et al.* (2009).

La ecuación (3-1), puede también ser escrita cómo:

$$dS_t = S_{t-} \left(\mu_{\varepsilon(t)} dt + d \left(\sum_{n=1}^{N_t} e^{Y_n} - 1 \right) \right), \quad (3-2)$$

y la solución de la ecuación diferencial estocástica en (3-1) esta dada por

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \mu_{\varepsilon(s)} dt + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y \gamma(dy, dt) \right) \quad (3-3)$$

o de forma equivalente por

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \mu_{\varepsilon(s)} dt + \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n} \right) \quad (3-4)$$

donde $\{Y_{\varepsilon_n, n}\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, que se distribuyen doble exponencial asimétrica con distribuciones alternantes f_1 y f_2 , independientes entre sí e independientes de la cadena de Markov ε . La alternancia de los saltos queda determinada por el estado inicial de la cadena, por lo cual la densidad de cada variable será:

$$f_Y = \begin{cases} f_1 & \text{si } \varepsilon(0) = 1, n = 2k + 1 \text{ ó } \varepsilon(0) = 2, n = 2k \\ f_2 & \text{si } \varepsilon(0) = 2, n = 2k + 1 \text{ ó } \varepsilon(0) = 1, n = 2k \end{cases} \quad (3-5)$$

para cualesquiera funciones de densidad f_1 y f_2 que se utilicen.

3.1. La distribución doble exponencial

Sea Y^+ y Y^- dos v.a. exponenciales de parámetros η y θ , respectivamente. Una variable Y se distribuye doble exponencial asimétrica, es decir $Y \sim DE(p, \eta, \theta)$, entonces

$$Y \stackrel{D}{=} \begin{cases} Y^+ & \text{con probabilidad } p, \\ -Y^- & \text{con probabilidad } q = 1 - p. \end{cases} \quad (3-6)$$

o equivalentemente,

$$Y \stackrel{D}{=} p \cdot Y \cdot \mathbf{1}_{\{y>0\}} + q \cdot -Y^- \cdot \mathbf{1}_{\{y<0\}} \quad (3-7)$$

y su función de densidad se expresa como:

$$f(y) = p \cdot \eta e^{-\eta y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \theta e^{\theta y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}} \quad (3-8)$$

donde $0 \leq p \leq 1$, $p + q = 1$ y $\eta, \theta > 0$.

En el proceso de Poisson compuesto de la ecuación (3-4) las dos funciones de densidad de los saltos son:

$$f_1(y) = p_1 \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q_1 \cdot \theta_1 e^{\theta_1 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \quad (3-9)$$

$$f_2(y) = p_2 \cdot \eta_2 e^{-\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q_2 \cdot \theta_2 e^{\theta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \quad (3-10)$$

donde $\eta_i > 0$, $\theta_i > 0$ para $i = 1, 2$ y $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$ tales que $p_i + q_i = 1$ para $i = 1, 2$.

La media de la doble exponencial para cada $i \in \{1, 2\}$ es:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{p_i}{\eta_i} - \frac{q_i}{\theta_i}. \quad (3-11)$$

y la expresión para la función generadora de momentos de la doble exponencial asimétrica, la función ϕ_i , para cada estado inicial es

$$\phi_1(z) = \frac{p_1 \eta_1}{\eta_1 - z} + \frac{q_1 \theta_1}{\theta_1 + z}, \quad (3-12)$$

$$\phi_2(z) = \frac{p_2 \eta_2}{\eta_2 - z} + \frac{q_2 \theta_2}{\theta_2 + z}. \quad (3-13)$$

Una de las características más importantes de la doble exponencial es el hecho que permite aproximar distribuciones más complejas cómo la distribución Gamma, la Pareto o la Weibull, para más información sobre este tema ver Cai & Kou (2011) y Wu & Liang (2018).

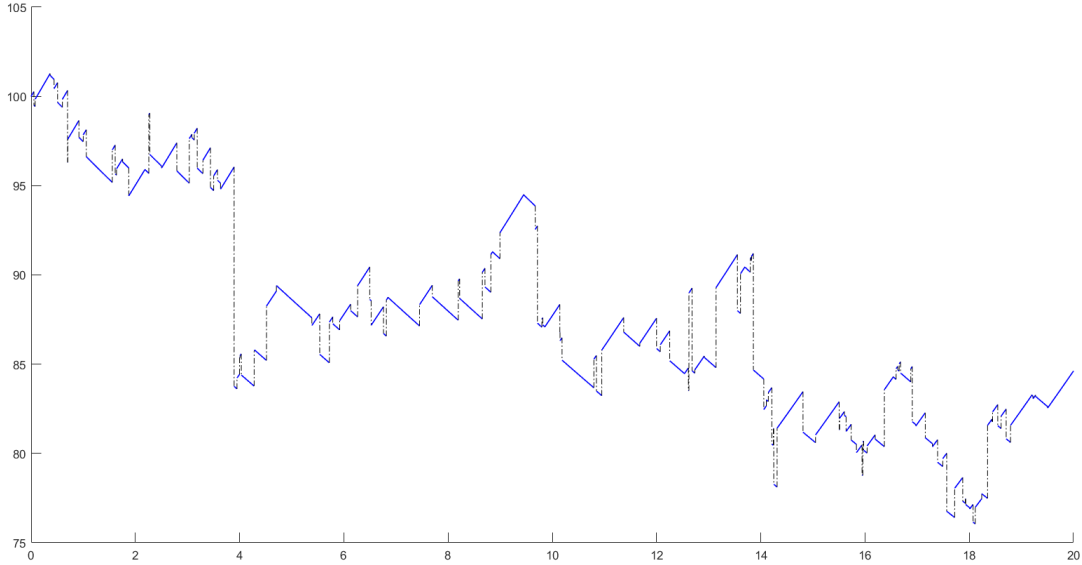


Figura 3-1: Simulación de una trayectoria del modelo telegráfico con saltos doble exponenciales, $\varepsilon_0 = 1$

Donde los parámetros de simulación son: $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = -0,03$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 7$, $\eta_1 = 100$, $\theta_1 = 50$, $p_1 = 0,26$, $\eta_2 = 40$, $\theta_2 = 70$ y $p_2 = 0,62$.

En el trabajo de López & Serrano (2015) se encuentra una expresión de la función generadora de momentos de un proceso telegráfico con saltos aleatorios que se utilizará para la valoración de las opciones por transformada de Laplace.

Proposición 3.1.1. Sea X_t un proceso telegráfico con saltos aleatorios como el definido en (3-4) y sea f_i , para $i \in \{1, 2\}$, las funciones de densidad de los saltos, entonces la función generadora de momentos $\Psi_i(z, t) := \mathbb{E}[e^{z \cdot X_t}]$ para $i \in \{1, 2\}$ tiene la forma

$$\Psi_1(z, t) = e^{t(\mu z - \lambda)} \left(\cosh(t\sqrt{D_z}) + (\nu z - \kappa + \lambda_1 \varphi_1(z)) \cdot \frac{\sinh(t\sqrt{D_z})}{\sqrt{D_z}} \right), \quad (3-14)$$

$$\Psi_2(z, t) = e^{t(\mu z - \lambda)} \left(\cosh(t\sqrt{D_z}) - (\nu z - \kappa - \lambda_2 \varphi_1(z)) \cdot \frac{\sinh(t\sqrt{D_z})}{\sqrt{D_z}} \right), \quad (3-15)$$

donde

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad \nu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad \kappa = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2},$$

$$\varphi_i(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{z \cdot y} f_i(y) dy - 1, \quad D_z = (\nu z - \kappa)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \varphi_1(z) \varphi_2(z).$$

Como se supuso saltos doble exponenciales asimétricos, la función φ_i , de los saltos para cada estado inicial es

$$\varphi_1(z) = \frac{p_1\eta_1}{\eta_1 - z} + \frac{q_1\theta_1}{\theta_1 + z} - 1, \quad (3-16)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{p_2\eta_2}{\eta_2 - z} + \frac{q_2\theta_2}{\theta_2 + z} - 1 \quad (3-17)$$

Al igual que en el caso de saltos constantes, esta función generadora permitirá la valoración de las opciones europeas, como se puede ver en la siguiente sección.

4 Valoración de las opciones europeas vía transformada de Laplace

Cómo se puede ver en la sección 2.1 el precio de una opción europea Call o Put puede ser calculada a partir de la transformada de Laplace de la función del precio. La expresión de la transformada queda en términos de la función generadora de momentos del proceso estocástico que modela el logaritmo de los precios $\log(S_t)$ y se encuentran los precios utilizando la transformada inversa de Laplace.

Recordemos que el precio de la Call y Put europea de strike K , tiempo de maduración T y valor inicial del activo S_0 es,

$$C_i(T, k) = e^{-rT} \mathbb{E}_i [(S(T) - K)^+] = e^{-rT} \mathbb{E}_i [(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+], \quad (4-1)$$

$$P_i(T, k') = e^{-rT} \mathbb{E}_i [(K - S(T))^+] = e^{-rT} \mathbb{E}_i [(e^{k'} - S_0 e^{X_T})^+] \quad (4-2)$$

donde $k = -\ln(K)$, $k' = \ln(K)$ e $i \in \{1, 2\}$.

Teorema 4.0.1. Si X_t es un proceso telegráfico con saltos variables que se distribuyen doble exponencial asimétrico, como el definido en la ecuación (3-4), entonces la transformada de Laplace con respecto a $k = -\ln(K)$ de la función del precio de una Call europea es:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{C_1}(\xi) = & e^{-rT} \frac{S(0)^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot e^{T(\mu(\xi+1)-\lambda)} \left(\cosh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}}) + \right. \\ & \left. \left(\nu(\xi+1) - \kappa + \lambda_1 \left(\frac{p_1 \eta_1}{\eta_1 - \xi - 1} + \frac{q_1 \theta_1}{\theta_1 + \xi + 1} - 1 \right) \right) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}})}{\sqrt{D_{(\xi+1)}}} \right) \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{C_2}(\xi) = & e^{-rT} \frac{S(0)^{\xi+1}}{\xi(\xi+1)} \cdot e^{T(\mu(\xi+1)-\lambda)} \left(\cosh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}}) - \right. \\ & \left. \left(\nu(\xi+1) - \kappa - \lambda_2 \left(\frac{p_2 \eta_2}{\eta_2 - \xi - 1} + \frac{q_2 \theta_2}{\theta_2 + \xi + 1} - 1 \right) \right) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(\xi+1)}})}{\sqrt{D_{(\xi+1)}}} \right) \end{aligned} \quad (4-4)$$

y la transformada de Laplace con respecto a $k' = \ln(K)$ de la función del precio de una Put europea es:

$$\hat{f}_{P_1}(\xi) = e^{-rT} \frac{S(0)^{-(\xi-1)}}{\xi(\xi-1)} \cdot e^{T(\mu(1-\xi)-\lambda)} \left(\cosh(T\sqrt{D_{(1-\xi)}}) + \left(\nu(1-\xi) - \kappa + \lambda_1 \left(\frac{p_1\eta_1}{\eta_1 + \xi - 1} + \frac{q_1\theta_1}{\theta_1 - \xi + 1} - 1 \right) \right) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(1-\xi)}})}{\sqrt{D_{(1-\xi)}}} \right) \quad (4-5)$$

$$\hat{f}_{P_2}(\xi) = e^{-rT} \frac{S(0)^{-(\xi-1)}}{\xi(\xi-1)} \cdot e^{T(\mu(1-\xi)-\lambda)} \left(\cosh(T\sqrt{D_{(1-\xi)}}) - \left(\nu(1-\xi) - \kappa - \lambda_2 \left(\frac{p_2\eta_2}{\eta_2 + \xi - 1} + \frac{q_2\theta_2}{\theta_2 - \xi + 1} - 1 \right) \right) \cdot \frac{\sinh(T\sqrt{D_{(1-\xi)}})}{\sqrt{D_{(1-\xi)}}} \right) \quad (4-6)$$

Demostración. Utilizar el teorema 2.1.1, pero con la precaución que se debe emplear es la generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos aleatorios distribuidos doble exponencial asimétrico, la expresión de la transformada de Laplace de las funciones del precio en (4-1) y (4-2), para ambos estados iniciales de la cadena de Markov son obtenidas similarmente. \square

4.1. Valoración por transformada inversa de Laplace

Para el cálculo de la transformada inversa de Laplace de estas expresiones se utilizó la extensión del algoritmo de Euler para la transformada inversa de Laplace al igual que como se hizo en la sección de saltos constantes.

Al no existir una fórmula analítica para el cálculo de las opciones europeas, en la siguiente tabla se comparan los precios a partir de simulaciones de Monte Carlo de trayectorias del proceso y los precios obtenidos por la transformada inversa numérica, para una Call, para varios strike's y varios tiempos de maduración.

Para los parámetros $S_0 = 100$, $r = 0,05$, $\mu_1 = 0,07$, $\mu_2 = -0,08$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 11$, $\eta_1 = 100$, $\theta_1 = 50$, $p_1 = 0,26$, $\eta_2 = 40$, $\theta_2 = 70$, $p_2 = 0,62$, los valores obtenidos son:

Strike	T = 0.5		T = 0.75		T = 1		T = 1.25		T = 1.5	
	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace
95	4.8287	4.8286	4.7460	4.7424	4.6703	4.6909	4.9000	4.9016	4.9603	4.9561
96	4.0971	4.0972	3.9690	3.9722	3.8405	3.8510	4.2056	4.2043	4.2987	4.2954
97	3.4236	3.3798	3.2617	3.2683	3.0689	3.0662	3.5610	3.5608	3.6836	3.6839
98	2.8093	2.8093	2.6142	2.6159	2.3761	2.3766	2.9765	2.9764	3.1227	3.1228
99	2.2672	2.2571	2.0461	2.0458	1.7777	1.7777	2.4524	2.4524	2.6068	2.6068
100	1.7973	1.8002	1.5674	1.5673	1.2784	1.2786	1.9917	1.9917	2.1628	2.1627
101	1.3997	1.4002	1.1698	1.1698	0.8836	0.8837	1.5980	1.5980	1.7703	1.7703
102	1.0716	1.0710	0.8514	0.8515	0.5930	0.5927	1.2634	1.2634	1.4302	1.4302
103	0.8070	0.8070	0.6079	0.6109	0.3819	0.3821	0.9840	0.9840	1.1453	1.1453
104	0.5990	0.6007	0.4248	0.4245	0.2482	0.2482	0.7579	0.7578	0.9057	0.9057
105	0.4361	0.4360	0.2940	0.2895	0.1598	0.1597	0.5759	0.5753	0.7065	0.7065

Cuadro 4-1: Comparación de los precios para la Call europea de estado inicial 1

Strike	T = 0.5		T = 0.75		T = 1		T = 1.25		T = 1.5	
	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace	Simulación Monte Carlo	Precio transformada de Laplace
95	4.9273	4.9285	4.9924	4.9933	5.0606	5.0668	5.1279	5.1558	5.1879	5.2203
96	4.0823	4.0813	4.2031	4.2015	4.3157	4.3540	4.4191	4.4197	4.5115	4.5115
97	3.2871	3.2872	3.4759	3.4754	3.6295	3.6295	3.7587	3.7592	3.8837	3.8840
98	2.5857	2.5857	2.8158	2.8158	2.9988	3.0030	3.1730	3.1723	3.3037	3.3015
99	1.9699	1.9699	2.2342	2.2342	2.4516	2.4524	2.6283	2.6286	2.7819	2.7815
100	1.4543	1.4541	1.7376	1.7376	1.9667	1.9665	2.1574	2.1574	2.3220	2.3220
101	1.0481	1.0481	1.3224	1.3224	1.5534	1.5536	1.7451	1.7451	1.9095	1.9096
102	0.7335	0.7335	0.9877	0.9877	1.2048	1.2048	1.3916	1.1488	1.5596	1.5596
103	0.5047	0.5047	0.7234	0.7234	0.9205	0.9205	1.0971	1.0971	1.2563	1.2563
104	0.3408	0.3407	0.5194	0.5197	0.6919	0.6919	0.8555	0.8555	1.0035	0.9989
105	0.2281	0.2281	0.3719	0.3721	0.5179	0.5180	0.6608	0.6601	0.7922	0.7922

Cuadro 4-2: Comparación de los precios para la Call europea de estado inicial 2

Las diferencias encontradas entre los dos métodos en promedio están por debajo del 0.3 %, sin embargo, para encontrar la estabilidad deseada en el método Monte Carlo fue necesario realizar 2.000.000 de simulaciones, lo cual aumentó significativamente el tiempo de computación.

5 Conclusiones

Se encontró una nueva expresión para la función generadora de momentos de un proceso telegráfico con saltos constantes que no había sido hallada explícitamente en ningún trabajo anterior, esto permitió encontrar el termino dominante de la función generadora de momentos y con esto poder encontrar la constante de reescalado necesaria para la estabilidad del método numérico que aplica la transformada inversa de Laplace.

Se encontró la transformada de Laplace de las opciones Europeas en el modelo telegráfico, con saltos constantes y aleatorios, gracias al conocimiento de una forma analítica de la función generadora de momentos del proceso telegráfico con saltos. Esto hace que el modelo telegráfico con saltos sea un candidato ideal en la utilización del método de transformada de Laplace para valoración de opciones financieras.

Los datos obtenidos numéricamente distan muy poco de los datos obtenidos por métodos analíticos y ese mismo comportamiento se vio con los datos simulados por Monte Carlo y los obtenidos por transformada inversa de Laplace en el modelo telegráfico con saltos doble exponenciales asimétricos. Además, la transformada inversa de Laplace tiene un significativo menor tiempo de ejecución que los otros dos métodos utilizados, la formula analítica y el método Monte Carlo.

Los resultados encontrados en esta tesis son el punto de partida para poder encontrar los tiempos de parada del proceso telegráfico con saltos aleatorios distribuidos doble exponenciales, insumo fundamental para poder valorar opciones exóticas, tales como, las opciones con barrera y lookback, utilizando la teoría de transformada de Laplace.

Anexo A. Transformada de Laplace

A continuación se presentan las principales características de la transformada de Laplace y de la transformada inversa que serán de utilidad al cálculo de la valoración de opciones.

Definición 5.0.1 (Transformada de Laplace). *Sea f una función definida sobre t donde $t \in \mathbb{R}$ y para todo $t < 0$ se tiene que $f(t) = 0$. La transformada de Laplace de la función f en un punto $s \in \mathbb{C}$ se define cómo:*

$$F(s) = \mathfrak{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m e^{-st} f(t) dt \quad (5-1)$$

cuando el límite existe.

La existencia de la transformada de una función, en general, no esta garantizada para todos los valores de \mathbb{C} . Por definición la integral converge si la función f no crece muy rapidamente y una apropiada tasa de crecimiento para f puede ser definida, como se muestra a continuación.

Definición 5.0.2 (Orden Exponencial). *Una función f tiene orden exponencial $\alpha > 0$ si existen constantes $M > 0$ y α tal que, para algún $t_0 \geq 0$*

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5-2)$$

En la practica a una gran cantidad de funciones se les puede definir su transformada de Laplace.

Teorema 5.0.1 (Existencia de la transformada de Laplace). *Si f es continua a trozos en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial α , entonces la transformada de Laplace $\mathfrak{L}(f)$ existe para $Re(s) > \alpha$ y converge absolutamente.*

Para consultar otras propiedades de la transformada de Laplace, véase Schiff (1999).

Transformada inversa de Laplace

En esta sección se analizara el problema de invertir la transformada usando métodos analíticos o numéricos.

Definición 5.0.3 (Transformada de Laplace inversa). *Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$, es decir, $\mathfrak{L}(f(t)) = F(s)$, entonces $f(t)$ es llamada transformada inversa de Laplace de $F(s)$.*

En lo subsiguiente se utilizará la siguiente notación para la transformada inversa:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F(s)) \quad (5-3)$$

Teorema 5.0.2 (Fórmula de Fourier-Mellin de inversión compleja). *Si $F(s) = \mathfrak{L}(f(t))$ con $s \in \mathbb{C}$ entonces, para $t > 0$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ts} F(s) ds = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iy}^{\alpha+iy} e^{ts} F(s) ds \quad (5-4)$$

La expresión en (5-4) también es conocida como *fórmula de inversión compleja* y la integral se desarrolla sobre la línea vertical cuando $x > \alpha$. Por esto, un posible camino para resolver esta integral es empleando la integral de contorno que esta definida como:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{ts} F(s) ds \quad (5-5)$$

donde C es el contorno de Bromwich, véase Schiff (1999).

Existen diversos métodos numéricos para estimar la transformada inversa de Laplace, definida a partir de la fórmula de Fourier-Mellin. En este trabajo se utilizará la extensión del algoritmo de Euler, explicado por Petrella (2014).

Proposición 5.0.1 (Extensión del algoritmo de Euler). *Para una función f definida en los reales, si $F(s) = \mathfrak{L}(f(t))$ es su transformada de Laplace, entonces la función f puede ser aproximada a partir de la siguiente expresión:*

$$f(t) = \frac{e^{A/2}}{2t} \operatorname{Re} \left(F \left(\frac{A}{2t} \right) \right) + \frac{e^{A/2}}{2t} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \operatorname{Re} \left(F \left(\frac{A - 2j\pi i}{2t} \right) \right) - e_d, \quad (5-6)$$

donde $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, A es una constante positiva escogida a partir la experimentación numérica y e_d es la discretización del error definida como $e_d = e_d^+ + e_d^-$ donde:

$$e_d^+ = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-jA} f((2j+1)t) \quad e_d^- = \sum_{j=-\infty}^{-1} e^{-jA} f((2j+1)t)$$

Bibliografía

- Cai, N., & Kou, S. G. 2011. Option Pricing Under a Mixed-Exponential Jump Diffusion Model. *Management Science*, **57**(11), 2067–2081.
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. 2007. *Table of Integrals, Series, and Products*. seventh edn. Academic Press, Elsevier.
- Jeanblanc, M., Yor, M., & Chesney, M. 2009. *Mathematical methods for financial markets*. Springer.
- Kolesnik, D., & Ratanov, N. 2013. *Telegraph processes and Option Pricing*. Springer briefs in statistics.
- Kou, S., Petrella, G., & Wang, H. 2005. Pricing path-dependent options with jump risk via Laplace transforms. *The Kyoto Economic Review*, **74**(1), 1–23.
- Kou, S. G. 2002. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, **48**(2), 1086–1101. Informs.
- Lopez, O. 2014. *Option Pricing in Market Models Driven by Telegraph Processes with Jumps*. Ph.D. thesis, Universidad del Rosario.
- Lopez, O., & Ratanov, N. 2014. On the asymmetric telegraph processes. *Appl. Prob.*, **51**.
- López, O., & Ratanov, N. 2012a. Kac's rescaling for jump-telegraph processes. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 1768–1776.
- López, O., & Ratanov, N. 2012b. Option pricing driven by a telegraph process with random jumps. *Applied Probability*, **49**(3), 838–849.
- López, O., & Serrano, R. 2015. Martingale Approach to Optimal Portfolio-Consumption Problems in Markov-Modulated Pure-Jump Models. *Stochastic Models*, **31**(2), 261–291.
- Petrella, G. 2014. An extension of the Euler Laplace transform inversion algorithm with applications in option pricing. *Operations Research Letters*, **32**, 380–389.

-
- Prager, D., & Zhang, Q. 2016. Valuation of a Stock Loan under a Markov Chain Model. *Journal of Systems Science and Complexity*, **29**, 171–186.
- Ratanov, N. 2007. A jump telegraph model for option pricing. *Quantitative Finance*, **7**(5), 575–583.
- Ratanov, N. 2019. First Crossing Times of Telegraph Processes with Jumps. *Methodology and Computing in Applied Probability*. preprint.
- Schiff, Joel L. 1999. *The laplace transform: theory and applicatios*. Springer-Verlag.
- Wu, Y., & Liang, X. 2018. Vasicek model with mixed-exponential jumps and its applications in finance and insurance. *Advances in Difference Equations*, 1–12.