UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Algunos métodos para resolver problemas que involucran ecuaciones cúbicas en la enseñanza media

Martha Liliana Mogollón Becerra

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

Algunos métodos para resolver problemas que involucran ecuaciones cúbicas en la enseñanza media

Martha Liliana Mogollón Becerra

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

Doctora Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

A mi familia
Walter, Laura y Mario
Con quienes todo es posible.

Agradecimientos

De manera muy especial agradezco a la profesora Clara Helena Sánchez por su orientación en la elaboración de este trabajo, por sus observaciones y oportunas intervenciones. Además porque gracias a su cátedra de Historia de las Matemáticas me brindó una oportunidad inigualable de repensar el ejercicio docente y de encontrar formas incluyentes y nuevas de vincular a mis estudiantes con su propia formación.

Resumen

En este trabajo se presenta una aproximación al desarrollo histórico de la resolución de ecuaciones y en especial de la ecuación cúbica. Se trata sobre el origen de los métodos que permiten resolver ecuaciones hasta grado tres como son el método de Cardano-Tartaglia y la demostración de su ecuación, el origen del método numérico de Newton-Rahpson para calcular las raíces de un polinomio y los axiomas de Papiroflexia que permiten solucionar ecuaciones cúbicas. Finalmente se presentan algunas aplicaciones de estos métodos y de sus ideas subyacentes que permitirían acercar a los estudiantes de grado undécimo de educación media a la resolución de ecuaciones de grado tres.

Palabras clave: (Ecuación cúbica, Método de Cardano-Tartaglia,Aproximaciones de Newton, Axiomas de Papiroflexia, Aplicaciones en el aula)

Abstract

This paper presents an historical development of the equations solving and speciality of the cubic equation. It is about the origin of methods that allow equations solving up to grade three like the Cardano-Tartaglia and the equation demostration, the origin of the numeric method of Newton-Rahpson to calculate the roots of a polynom and the axioms of origami that allow solving cubic equations. Finally, it present some uses of these methods and ideas that allow eleventh grade students to solve degree three equations.

Keywords: (Cubic Equation, Method of Cardano-Tartaglia, Newton approximations, Axioms of Origami, applications in the classroom)

Contenido

Pág.

Resumen IX

Lista de Figuras XV

Lista de tablas XVII

Introducción 1

1. Conceptos Previos 5

1.1 Definiciones 5

1.2 Teoremas 5

1.2.1 Teorema del Residuo 6

1.2.2 Teorema del Factor 6

1.2.3 Teorema Fundamental del Álgebra 6

1.2.4 Corolario 1 6

1.2.5 Corolario 2 6

1.2.6 Corolario 3. 7

1.2.7 Teorema de Continuidad de la función polinómica 7

1.2.8 Teorema del Valor Intermedio 7

1.2.9 Derivabilidad de una función polinómica 8

2. Antecedentes Históricos 9

2.1 Época Antigua (2700 a 2200 a C.) 9

2.2 Mohamemed ibn-Musa Al-Khowarizmi 14

2.3 François Viète (1540-1603) 17

2.4 René Descartes (1596-1650) 18

2.5 La duplicación del Cubo 19

2.6 Ecuaciones cúbicas en la matemática árabe 22

2.7 Ecuaciones cúbicas en el Renacimiento: Cardano y Tartaglia 23

2.7.1 La solución de Cardano-Tartaglia para la ecuación cúbica 25

2.8 Método de aproximación de Newton- Rahpson 29

3. Papiroflexia 31

3.1 Resolución de Ecuaciones Cúbicas por el método de Papiroflexia 31

3.1.1 Los seis Axiomas de Humiaki Huzita 31

3.1.2 Aplicación del Axioma seis para hallar la solución de la ecuación cúbica... 33

4. Aplicaciones en el Aula de Clase 35

4.1. Introducción 35

4.2 Objetivos Generales 35

4.3 Actividad 1 35

4.3.1 Objetivos 36

4.3.2 Ejercicios Propuestos 36

4.3.3 Indicaciones para el docente 37

4.4 Actividad 2: Raíces por Aproximación y Teorema del Factor 38

4.4.1 Objetivos 38

4.4.2 Ejercicios Propuestos 38

4.4.3 Indicaciones para el Docente 40

4.5 Actividad 3. Aplicación del método de Newton-Rahpson 42

4.5.1 Objetivos 42

4.5.2 Ejercicios Propuestos 43

4.5.3 Indicaciones para el Docente 44

4.6 Actividad 4. Aplicación del método de doblado de papel 45

4.6.1 Objetivos 45

4.6.2 Ejercicios Propuestos 45

4.6.3 Indicaciones para el Docente 47

4.7 Actividad 5. Aplicación del Método de Cardano-Tartaglia 48

4.7.1 Objetivo 48

4.7.2 Ejercicios Propuestos 49

4.7.3 Indicaciones para el Docente 50

4.8 Actividad 6: Ejercicios y Problemas adicionales 52

4.8.1 Objetivo 52

4.8.2 Ejercicios Propuestos 52

4.8.3 Indicaciones para el Docente 53

Conclusiones y Recomendaciones 57

Anexo A: Construcciones mediante la aplicación de Axiomas de Papiroflexia LIX

Bibliografía 99

Lista de Figuras

Pág.

Figura 1-1 Teorema del Valor Medio 8
Figura 2-1 Interpretación geométrica método de Regula Falsi para ecuaciones lineales 11
Figura 2-2 Generalización método de Regula Falsi por semejanza de triángulos 11
Figura 2-3 Interpretación geométrica del método de la doble Regula Falsi para ecuaciones lineales 12
Figura 2-4 Descomposición de un cuadrado utilizando fracciones unitarias 13
Figura 2-5 Interpretación Geométrica para la resolución de ecuaciones 14
Figura 2-6 Planteamiento geométrico de AL-Khwarizmi para ecuaciones cuadráticas 15
Figura 2-7 Planteamiento ecuación capítulo IV de AL-Khwarizmi 16
Figura 2-8 Completación de cuadrado para resolver ecuación cuadrática Al-Khowarizmi 16
Figura 2-9 Método geométrico para resolver ecuación cuadrática capítulo VI de Al-Khowarizmi 17
Figura 2-10 Solución de una ecuación z^2=az+b^2 presentada por René Descartes 18
Figura 2-11 Solución de una ecuación $z^2 = -az + b$ presentada por René Descartes 19
Figura 2-12 Solución de Archytas para la duplicación del cubo 20
Figura 2-13 Intercección de un cilindro y un toro de diámetro nulo 20
Figura 2-14 Intersección de curvas 21
Figura 2-15 Construcción de Archytas 21
Figura 2-16 Interpretación geométrica de Archytas 22
Figura 2-17 Completación de cubo 25
Figura 2-18 Completación de cubo 25
Figura 2-19 Completación de cubo 26
Figura 2-20 Completación de cubo 26
Figura 2-21 Procedimiento geométrico para la raíz cuadrada 29
Figura 2-22 Aproximaciones de Newton 30
Figura 3-1 Axioma 6 de papiroflexia 32
Figura 4-1 Determinación de la recta tangente a dos parábolas 48
Figura 4-2 Parábola e Hipérbola en el mismo plano 51
Figura 4-3 Resolución gráfica de ecuación cúbica 53
Figura 4-4 Resolución de ecuación cúbica por doblado de papel 54

Lista de tablas

Pág.

Tabla 2-1 Descripción de los capítulos del texto de Al-Khowarizmi sobre la solución de ecuaciones cuadráticas **14**
Tabla 2-2 Método para calcular la raíz cuadrada de un número por aproximaciones numéricas: método babilonio **29**
Tabla 4-1 Actividad 2 Raíces por aproximación Propuesta de Clase **39**
Tabla 4-2 Actividad 2 resuelta raíces por aproximación Propuesta de Clase **41**
Tabla 4-3: Método de Ruffini para descomponer en factores un polinomio **42**
Tabla 4-4 Variación del lado de la base y la altura de un prisma con volumen **43**
Tabla 4-5 Variación del lado de la base y la altura de un prisma con volumen **44**
Tabla 4-6: Aproximaciones de Newton para determinar una raíz de la ecuación cúbica. **55**

Introducción

La educación matemática tiene como propósito el desarrollo de habilidades de pensamiento; habilidades que se consolidan a través del trabajo sobre los contenidos disciplinares. Los contenidos son los que posibilitan la formación o extensión de las habilidades y el nivel que se pretende desarrollar con ellas.

Tanto la modelación y resolución de problemas como el razonamiento y la comunicación, constituyen algunas de las habilidades más importantes que se persiguen en el aprendizaje de las matemáticas.

En el documento emitido por el MEN al respecto de los componentes curriculares para el área de matemáticas, se plantean cinco tipos de *Pensamientos* que permiten la categorización de los contenidos organizados mediante procesos de pensamiento. El *pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos* recoge aquellos en los que se trata con la variable, su interpretación, propiedades, gráficas, ecuaciones, expresiones, así como la modelación de situaciones de variación con funciones de diferente tipo y el uso de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos, entre otros [1].

El enfoque de la enseñanza de las matemáticas en muchas ocasiones se circunscribe a los contenidos que tradicionalmente han hecho parte del currículo. Existe una tendencia tradicional a permanecer dentro del estudio de los mismos tópicos, bien sea por la comodidad que brinda para los profesores dado su dominio conceptual o por los niveles de dificultad que se puedan presentar por fuera de estos.

Un caso particular relacionado con el pensamiento variacional, está en el trabajo con los métodos de resolución de ecuaciones. En el aula, se modelan situaciones, se plantean y resuelven ecuaciones polinómicas de primero y segundo grado. En poquísimos casos se hacen presentes ecuaciones polinómicas de grado tres o más y mucho menos se hace mención de posibles métodos de solución ni de los aspectos históricos que dieron origen a los procesos tratados en las matemáticas escolares actuales.

---

[1] Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de Competencias en Matemáticas. *Potenciar el pensamiento matemático*: Un reto escolar. 2006

Los estándares citados, sin embargo, hacen referencia al trabajo con ecuaciones polinómicas en general. El estudio de los métodos de solución de ecuaciones de grado mayor a dos apunta también a conseguir los aspectos anteriormente mencionados de la actividad matemática.

Para ser más concreta, planteo el cómo resolverían nuestros estudiantes de educación media, situaciones como las citadas a continuación:

¿Cuáles deberán ser las dimensiones de una caja de base cuadrada con tapa, que tenga una capacidad de 100 m^3 y que se pueda construir con una lámina de $20m^2$?

¿Cuáles son y cómo podemos determinar los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 1$ y la hipérbola $y = \frac{1}{x} + 2$?

¿Hasta dónde se debe sembrar un árbol de 10 m de alto de tal manera que la parte que quede al aire sea el cubo de la que quede en tierra?

¿Cuál es la tasa de interés que debe cobrarse a una cuota base de 120 mil pesos, durante cuatro meses para pagar un artículo que cuesta 400 mil pesos?

Muy seguramente muchos lograrían plantear el modelo matemático que represente estas situaciones, pero ¿cuántos podrían encontrar sus soluciones?

Aunque éstas son situaciones sencillas en su planteamiento y comprensión, podían constituir un elemento importante en el desarrollo del pensamiento variacional del estudiante; sin embargo, no son tomadas en cuenta, muchas veces ni siquiera se hace mención de ellas en el aula de clase, y mucho menos de los posibles métodos que se conocen para resolverlas.

El estudio de las ideas que generaron los métodos de solución de ecuaciones cúbicas, la evolución de sus conceptos y la formalización de estos, constituye una forma de aproximar al estudiante a la comprensión de los métodos propios de la resolución de ecuaciones y a una visión más humana del desarrollo matemático, que le permita cuestionar y razonar antes que aplicar para resolver.

Si planteáramos en el aula el problema de la *duplicación del cubo* o *la trisección del ángulo,* y nos detuviéramos a reflexionar, sobre: ¿qué plantea cada uno de ellos?, ¿cómo resolveríamos estos problemas?, ¿qué soluciones se han presentado?, ¿por qué fueron tan importantes en el desarrollo del pensamiento matemático?, presentaríamos una visión diferente de las matemáticas, se mostraría que los problemas han surgido de manera natural, impregnados de desaciertos pero llenos de oportunidades para abrir caminos diferentes de conocimientos, pensamientos y procesos.

Por otro lado, se ha difundido entre los estudiantes y profesores el uso de las herramientas tecnológicas como calculadoras graficadoras y software especializado, como elementos

indispensables para llevar a cabo la actividad matemática. Sin desconocer su gran utilidad y eficacia, debemos insistir en el razonamiento más que en el resultado.

En las siguientes páginas de este trabajo, se presentarán los fundamentos matemáticos que garantizan la existencia de las raíces de toda ecuación polinómica[2]. Se hará un recorrido por la historia del desarrollo de las ecuaciones polinómicas de grados uno, dos y tres, mostrando las situaciones que dieron origen a su posterior formulación y solución.

Se hace una reseña sobre el método de Newton para encontrar raíces de ecuaciones polinómicas por medio de aproximaciones y se presentarán los axiomas que permiten resolver ecuaciones polinómicas por medio de doblado de papel, haciendo un breve análisis de estos axiomas.

Al final de este trabajo se plantean algunas actividades que pueden ser llevadas al aula y que mediante los métodos estudiados permitirán a estudiantes y profesores abordar el trabajo académico al respecto de los métodos para encontrar soluciones a ecuaciones polinómicas de grado tres.

Se limita el desarrollo de la propuesta a ecuaciones de hasta grado tres dado que el propósito es mostrar la existencia de métodos que permiten la solución de ecuaciones cúbicas y con ello abrir la inquietud en los estudiantes acerca de la posibilidad de plantear y resolver ecuaciones polinómicas de cualquier grado.

La propuesta va dirigida a estudiantes de grado undécimo, en donde se supone un dominio del lenguaje algebraico que permita el planteamiento de problemas, el dominio de las operaciones aritméticas y la representación en el plano cartesiano de funciones de variable real.

Además, se anexa un álbum con ejercicios de Papiroflexia resueltos con el propósito de ilustrar las aplicaciones de este método para dinamizar el trabajo en aula.

[2] Aunque sabemos que para hallarlas en las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco no hay una fórmula general de solución.

1. Conceptos Previos

En este capítulo se dan las definiciones y teoremas, que garantizan matemáticamente la existencia de las raíces de ecuaciones polinómicas de grado n. Se omiten las demostraciones por considerarse que estas no son el propósito de este trabajo y que el lector podrá encontrar estas demostraciones en libros especializados sobre *Teoría de Ecuaciones*, algunos de ellos mencionados en la bibliografía.

1.1 Definiciones

1.1.1 Se denomina función potencia n-ésima a la función real de variable real que a cada x le asigna x^n. Esto es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^n$.

1.1.2 Una función polinómica o simplemente polinomio es una combinación lineal[3] de funciones potencia de coeficiente real y exponente natural. Esto es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_{n-1}x + q_n$.

1.1.3 Se define el grado de un polinomio como el grado más grande de todos los términos diferentes de 0 del polinomio.

1.1.4 Dada una función polinómica de la forma $f(x) = q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_{n-1}x + q_n$ la expresión *f(x)=0* se denomina ecuación polinómica de grado n con coeficientes $q_0, q_1, \ldots q_n \in \mathbb{R}$.

1.1.5 Una ecuación polinómica de grado n se denomina ecuación polinómica normada, cuando el coeficiente del término n-ésimo q_0 es 1.

En el caso en que $q_0 \neq 1$, basta dividir cada término de la ecuación polinómica por q_0, para obtener la ecuación polinómica normada $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$, $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}, p_n$ con $p_i \in \mathbb{R}$.

1.2 Teoremas

Los siguientes teoremas garantizan la existencia de las raíces de una ecuación polinómica de grado n.

---

[3] Sean P(x) y Q(x) funciones potencia de variable real, a y b números reales cualesquiera. La expresión L(x) = a.P(x) + b.Q(x) se llama combinación lineal de P(x) y Q(x).

1.2.1 Teorema del Residuo

El residuo de la división de un polinomio $f(x)$ entre un binomio $(x-c)$, es igual al valor del polinomio $f(x)$ calculado en *x=c*, es decir, $r = f(c)$.

1.2.2 Teorema del Factor

$f(x)$ es divisible entre $(x-c)\ si, y\ sólo\ si, f(c) = 0$

1.2.3 Teorema Fundamental del Álgebra

Toda ecuación de la forma $\mathrm{f(x)} = 0$ tiene al menos una raíz, real o imaginaria.

Del Teorema Fundamental del Álgebra se deducen importantes corolarios como son:

1.2.4 Corolario 1

Sea $f \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio no nulo $f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$

con coeficientes reales de grado $n \geq 1$, $f(x)$ tiene exactamente n raíces, no necesariamente todas distintas. Esto significa que $f(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_m)^{k_m}$, $con\ k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_m = n$ y $c \epsilon \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.2.5 Corolario 2

Toda ecuación polinómica de grado n impar tiene al menos una raíz real. Si la ecuación tiene una raíz compleja del tipo $a + bi$ también tendrá su raíz conjugada $a - bi$. Este corolario asegura que toda ecuación de tercer grado tendrá una raíz real.

1.2.6 Corolario 3.

Toda ecuación de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se transforma en una ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ mediante la introducción[4] de una variable *y+n.*

Para determinar las raíces de un polinomio es indispensable hallar los factores con los que se puede expresar el polinomio, usando los métodos conocidos de descomposición en factores incluyendo la división sintética cuyo fundamento está en el Teorema del Factor.

Se espera que los estudiantes de undécimo grado, a los cuales va dirigida esta propuesta dominen este proceso.

Los teoremas citados a continuación, establecen la continuidad de las funciones polinómicas y, por ende, la certeza de hallar sus derivadas dado que toda función derivable es continua.

1.2.7 Teorema de Continuidad de la función polinómica

Una función potencia $f(x) = x^n$ es continua para para todo $x \in \mathbb{R}$.

El teorema anterior indica que toda función polinómica de números reales es también una función continua en todo su dominio.

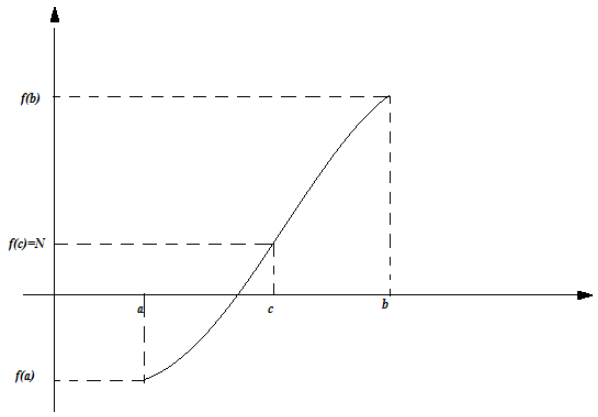
1.2.8 Teorema del Valor Intermedio

Si *f(x)* es continua en el intervalo $[a, b]$, y si N es cualquier número comprendido entre *f(a)* y *f(b)*, entonces existe al menos un número *c* entre *a* y *b* tal que *f(c)* = N

---

4 Para determinar la constante n en la ecuación cúbica: si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación entonces $x_1 = y_1 + n$, $x_2 = y_2 + n$, $x_3 = y_3 + n$, sumando las tres igualdades se obtiene $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_2 + 3n$ pero como $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ entonces $-a = y_1 + y_2 + y_2 + 3n$. Pero para que el término cuadrático se anule es necesario que $y_1 + y_2 + y_2 = 0$. De lo que se obtiene que $-a = 3n$, con lo que se tiene que para anular el término cuadrático de la ecuación cúbica se remplaza $x = y - \frac{a}{3}$

Figura 1-1 Teorema del Valor Medio



1.2.9 Derivabilidad de una función polinómica

Toda función potencia $f(x) = x^n$ es derivable en todo su dominio. Lo cual indica que la función polinómica también es derivable en todo su dominio.

2. Antecedentes Históricos

El objetivo de este capítulo es presentar la evolución de las ideas que han llevado a determinar los procedimientos para resolver ecuaciones de primero, segundo y tercer grado en diferentes épocas del desarrollo de la humanidad.

2.1 Época Antigua (2700 a 2200 a C.)

En los papiros egipcios como el papiro del *Rhind* (también llamado de *Ahmes),* se encuentran evidencias del desarrollo matemático de la civilización egipcia. En él por ejemplo, aparece el uso del sistema de numeración decimal y la aritmética aditiva (en la que toda multiplicación o división se puede resolver mediante sumas).

En la matemática egipcia, es sobresaliente el uso de fracciones unitarias con denominador impar. Algunos historiadores argumentan que el uso de estas fracciones se hacía, bien por usar números pequeños o preferir los pares a los impares o dada la interpretación en sentido ordinal como denominación de las partes en que se fracciona la unidad (Fauvel, 1992);

Según Collette (J.M., 1985), el método egipcio se basa en la técnica de división sobre fracciones naturales $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4})$ por medio del método por él denominado "de desdoblamiento":

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{40}+\left[\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right]+\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right]$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{40}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$

El uso de fracciones unitarias parece haber originado el planteamiento de algunos enunciados que resultan en ecuaciones. Examinemos el problema 21 del papiro Rhind:

"Completar $^2/_3$ y $^1/_{15}$ para obtener 1".

En términos modernos se requiere encontrar x, tal que $^2/_3 + {}^1/_{15} + x = 1$.

El método consistía en modificar la ecuación para no tratar con fracciones. En este caso al multiplicar por 15 se obtiene $10 + 1 + y = 15$. El problema se ha transformado en determinar *"lo que le falta a 10 y 1 para completar 15"* de lo que se obtiene $y=4$ y por consiguiente $x=4/15$.

En la situación planteada para el problema 21, se sigue un procedimiento en el que se emplea el concepto de equivalencia; en lugar de solucionar la ecuación $^{2}/_{3} + {}^{1}/_{15} + x = 1$ se busca la solución de $10 + 1 + y = 15$ donde y representa quince veces el valor buscado y que resulta más sencillo de determinar.

Aunque el uso de fracciones unitarias no es para nosotros usual ni práctico[5], es importante tener en cuenta que en la matemática de la época a la que nos referimos, su uso hacía parte del desarrollo matemático particular y proponían una solución a las necesidades que dieron origen a tales situaciones. En este caso, el planteamiento de ecuaciones está inmerso en el uso de cierto tipo de fracciones que le daban sentido y significado a su solución.

Es importante aclarar que en estos escritos no se puede evidenciar el concepto de *variable,* pero se utiliza el vocablo ***aha*** para referirse al "término desconocido".

Algunas problemas planteados y resueltos mediante ecuaciones de primer grado proponen un método particular; el problema 26 del papiro de Ahmes plantea: *"Una cantidad y su cuarto se convierten en 15"*, este problema enunciado en términos algebraicos, plantea la ecuación lineal $x + \frac{x}{4} = 15$.

El método por medio del cual se calculaban los valores desconocidos para las ecuaciones recibía el nombre de *"falsa posición" o "regula falsi"*. Éste consistía en ensayar un valor cualquiera que sustituido en la ecuación estableciera la cantidad de veces que cabía éste *falso* resultado en el verdadero, obteniéndose así, el número de veces por el que debía multiplicarse el falso valor tomado inicialmente (Ochoviet, 2009, pág. 2).

De manera específica, para la ecuación 26 el método sería así:

1. Se toma un valor inicial, por ejemplo *x= 4*.
2. Se remplaza *x=4* en la ecuación, se obtiene $4 + \frac{1}{4}.4$ cuyo resultado es 5 .
3. 5 es un resultado falso, ya que lo que se busca es el valor que al sustituir en "la variable" sea 15. Al dividir 15 entre 5, se obtiene la cantidad de veces que debe ser multiplicado el valor falso.
4. El valor buscado será el resultado de multiplicar el primer valor estimado, 4, por *3*, es decir 12 que es el valor que satisface la condición establecida en el problema.

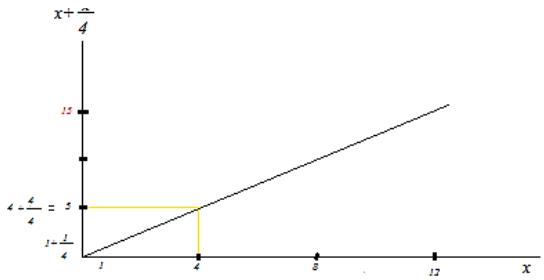
Este método ejemplifica el uso de aproximaciones, en el que se inicia con un valor falso hasta lograr corregirlo.

[5] Se hace referencia de éste aspecto por ser el método con el cual se trataban las cantidades para la época a la que se hace referencia; sin embargo no se hará uso de la descomposición en fracciones unitarias para el desarrollo de esta propuesta.

Si representamos en el plano cartesiano el proceso descrito vemos que hace uso del principio de proporcionalidad en triángulos semejantes:

Al representar en el eje de las abscisas los valores falsos que se remplazan y en el eje de las ordenadas los resultados de dicho remplazo, éste genera una unidad de medida que determina el factor por el cual se debe multiplicar el valor falso para obtener el verdadero. En la Figura 2-1 se representa esta interpretación del método:

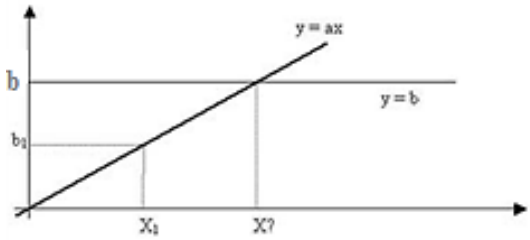
Figura 2-1 Interpretación geométrica método de Regula Falsi para ecuaciones lineales



Al sustituir por 4 en la expresión, se establece una unidad de medida con la cual se compara el valor buscado, por ello se divide 15 entre 5. Esta medida determina cuántas veces habrá que tomar el falso valor x=4.

De manera general, si x_1 es el primer valor que se remplaza en la ecuación, cuyo resultado es b_1, la proporción $\frac{x_1}{x} = \frac{b_1}{b}$ determinaría la solución de la ecuación.

Figura 2-2 Generalización método de Regula Falsi por semejanza de triángulos



El método de la falsa posición es válido para ecuaciones de la forma *ax = b;* sin embargo para ecuaciones de la forma *ax + b = c* se aplica el mismo método dos veces como se ve a continuación en el siguiente problema:

Un mercader compra tres piezas de paño por 45 florines. La primera es blanca, la segunda es verde y la tercera es negra. La verde cuesta el doble de la blanca y cuatro florines más. La negra cuesta tres veces la verde menos 5 florines. Averiguar cuánto vale cada una para que si el mercader las tiene que vender por separado no pierda"

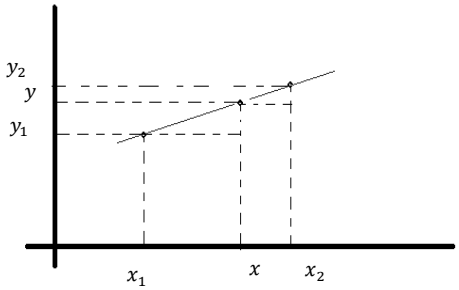
El matemático árabe al-Amuli describe los pasos que hay que dar para llegar a la solución (Meavilla Seguí, 2001). Si suponemos que la pieza blanca vale 5 florines entonces la verde, costaría 14 florines y la negra 37 florines. Sumando las tres cantidades se tiene 56 florines

con lo que se tiene una diferencia de 11 florines del verdadero valor de las tres piezas. Luego se supone una segunda falsa posición, por ejemplo 4 florines para la blanca, en consecuencia la verde vale 12 y la negra 31 florines. Sumando las tres cantidades se tienen 47 florines, con una segunda diferencia es de 2 florines. Obteniendo la verdadera posición de la siguiente manera:

$$x = \frac{11\times4-2\times5}{11-2} = \frac{34}{9}$$

Si analizamos geométricamente el método de la doble falsa posición, tomamos dos valores falsos y sus resultados $(x_{1,}y_1)$ y $(x_{2,}y_2)$, estos determinarían dos puntos en el plano cartesiano, como se ilustra en la Figura 2-3:

Figura 2-3 Interpretación geométrica del método de la doble Regula Falsi para ecuaciones lineales



Por estos dos puntos existirá una recta que también pase por x, por lo que podemos establecer la siguiente proporción

$$\frac{y_2 - y}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Resolviendo para x tendremos

$$x = \frac{(y - y_1)x_2 + (y_2 - y)x_1}{(y_2 - y_1) + (y - y_1)}$$

Donde $y_2 - y$ y $y - y_1$ serían las diferencias (desviaciones) de las que habla la solución propuesta en el papiro y x_1 y x_2 los valores de prueba.

Este método de la doble falsa posición es una generalización del método simple y emplea de nuevo la idea de proporcionalidad entre los lados de dos triángulos semejantes[6].

Otro ejemplo que muestra el uso de ecuaciones en la matemática egipcia de la antigüedad se encuentra en el *Papiro de Berlín* (o papiro de Wetscar escrito en los tiempo de los hicsos *entre 1650 y 1540 a C), allí se han encontrado problemas que suponen sistemas de* ecuaciones, con una de ellas cuadrática. Veamos su planteamiento y la situación que da origen al sistema:

[6] El método de la doble falsa posición es de manera iterativa un método para resolver ecuaciones no lineales por medio de aproximaciones sucesivas. En algunos documentos es presentado como el método de las escalas.

"Te dicen que el área de un cuadrado de 100 codos es igual a la suma de los otros dos cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *del otro. Averigua los lados de los cuadrados"*

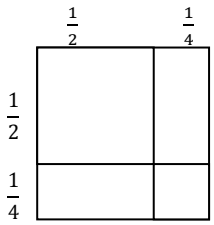
Planteado en términos algebraicos tendríamos las ecuaciones $x^2+y^2=100$ y $x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)y$ donde *x, y* son los lados de los cuadrados más pequeños.

La solución que presenta el Papiro hace uso de fracciones unitarias nuevamente:

1. Supone un valor para el lado x=1
2. Con lo que el lado del otro cuadrado es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3. Las áreas son 1 y $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$
4. La suma de las áreas es $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$
5. La raíz de este número es $1+\frac{1}{4}$
6. Como el valor del área del cuadrado pedido es 100 su lado será 10
7. Qué número multiplicado por $1+\frac{1}{4}$ será 10? Este número es 8
8. Y el lado del otro cuadrado será 6

Se hace aquí más evidente el uso frecuente en los egipcios de fracciones unitarias, en donde parecía ser un proceso natural determinar el área de un cuadrado dividido en cuatro

Figura2-4 Descomposición de un cuadrado utilizando fracciones unitarias



Para calcular la longitud del lado cuya área es $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$, se utiliza la descomposición del área en áreas menores, cuyos lados permiten determinar de manera evidente la longitud buscada.

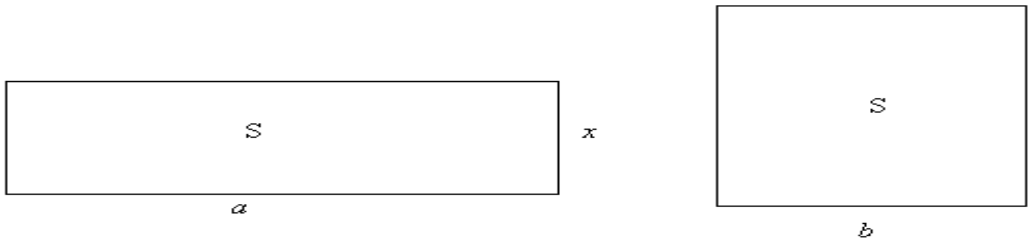
Esta descomposición de un área en áreas menores mediante fracciones unitarias, lleva implícitos resultados de la geometría euclidiana al determinar el lado de un cuadrado de áreas conocidas.

En la matemática griega (300 a. C), la resolución de ecuaciones de primer grado tiene una fuerte influencia del método egipcio en cuanto al uso del método de la falsa posición, pero como es característico de la matemática de los griegos se hace referencia a la interpretación geométrica de los enunciados. Por ejemplo:

"Hallar el lado de un rectángulo conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado"

en la que se plantean relaciones entre objetos geométricos, sin ser considerados como ecuaciones o variables. El planteamiento geométrico es como se presenta a continuación:

Figura 2-5 Interpretación Geométrica para la resolución de ecuaciones



Es decir plantea una ecuación en términos algebraicos como *ax=S,* dando una solución mediante la aproximación de valores y el uso del método de la falsa posición, de manera simple o doble.

2.2 Mohamemed ibn-Musa Al-Khowarizmi

Mohamemed ibn-Musa Al-Khowarizmi(813-833), matemático Árabe, a quien se le atribuirá el término "algoritmo" y "álgebra", escribió más de media docena de obras de astronomía y matemáticas probablemente basados en el *Sindhind*[7]. En estos textos se encuentra en forma directa y elemental la exposición de la resolución de ecuaciones y muy especialmente las ecuaciones de segundo grado. Aunque no se tiene certeza de lo que significaban las palabras "al-jabr" y "muqabalah" se cree que estas expresiones se referían a completación como transposición de términos que están restados y cancelación de términos iguales en los dos miembros.

En el tratado "Cálculo mediante restitución y reducción", Al-Khowarizmi presenta la solución de seis tipos de ecuaciones que resultan de componer raíces, cuadrados y números.

En la tabla 2-1, se sintetizan las diferentes ecuaciones cuadráticas que Al-Khowarizmi presentó en los capítulos I al VI:

La estructura de cada ecuación para los diferentes capítulos evita el manejo de cantidades negativas por cuanto las soluciones dadas se refieren a una serie de pasos para completar cuadrados aplicados a ejemplos concretos. Los procedimientos son específicos de la estructura de cada ecuación en los seis capítulos del texto.

---

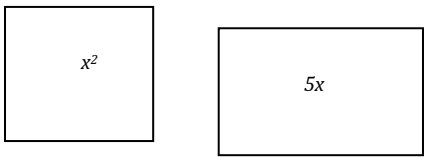
[7] Obra astronómico-matemática recibida de la India traducida hacia el año 775 al árabe (Boyer, 1999)

Tabla 2-1 Descripción de los capítulos del texto de Al-Khowarizmi sobre la solución de ecuaciones cuadráticas

Número de Capítulo	Descripción en palabras de cada tipo de ecuación	Planteamiento algebraico
Capítulo I	Cuadrados igual a raíces	$x^2 = 5x$ $\frac{x^2}{3} = 4x$ $5x^2 = 10x$
Capítulo II	Cuadrados igual a números	$x^2 = 5$ $\frac{x^2}{3} = 4$ $5x^2 = 10$
Capítulo III	Cuadrados iguales a números para coeficientes de la variable mayor, igual o menor que uno	$\frac{x^2}{3} = 4$ $5x^2 = 10$
Capítulo IV	Cuadrados y raíces iguales a números	$x^2 + 10x = 39$ $2x^2 + 10x = 48$ $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$
Capítulo V	Cuadrados y números iguales a raíces	$x^2 + 21 = 10x$
Capítulo VI	Raíces y números iguales a cuadrados	$3x + 4 = x^2$

Para las ecuaciones planteadas en el capítulo I, se establece la relación entre dos áreas; así cuando se pregunta por la longitud x que satisface $x^2 = 5x$ se busca determinar el área de un cuadrado que es cinco veces su lado como se presenta en la siguiente figura.

Figura 2-6 Planteamiento geométrico de AL-Khwarizmi para ecuaciones cuadráticas



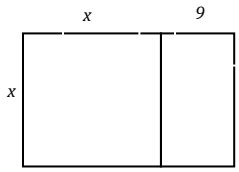
Así planteada la situación que corresponde a la ecuación $x^2 = 5x$, el lado x debe valer necesariamente 5. Debido a la naturaleza misma de la igualdad, la solución nula no es tomada en cuenta ya que carece de significación.

En la resolución de ecuaciones dadas en este texto se considera que cada uno de los tipos de ecuación son distintas entre sí y por ello se establece una forma de solución particular; pero

además se ofrecen demostraciones geométricas, lo que revela la influencia griega de la llamada álgebra geométrica presente en la matemática árabe.

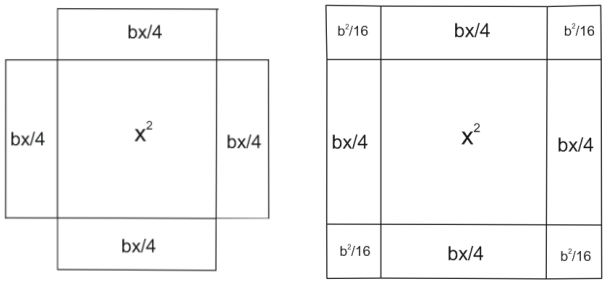
En el capítulo IV se resuelven ecuaciones del tipo "el cuadrado de la cosa más nueve veces la cosa es 36" que resulta en la ecuación $x^2 + 9x = 36$. AL-Khwarizmi considera un cuadrado y rectángulo tales que sus áreas sumadas sean 36:

Figura 2-7 Planteamiento ecuación capítulo IV de AL-Khwarizmi



Al cuadrado de área x^2, le agrega cuatro rectángulos, de lados x y $\frac{9}{4}$, que de manera general corresponde a tomar un cuadrado de lado *x* y dividir el área *bx* en cuatro rectángulos que serán colocados a los cuatro costados del cuadrado x^2

Figura 2-8 Completación de cuadrado para resolver ecuación cuadrática Al-Khowarizmi



Es decir, se toma un cuadrado de lado *x*, a este se le agregan cuatro rectángulos de lado *x* y *b/4*, (divide el rectángulo *9x* en cuatro rectángulos iguales), para luego colocarlos a los lados del cuadrado x^2. Este procedimiento le permitirá completar un cuadrado que determine el valor de *x.*

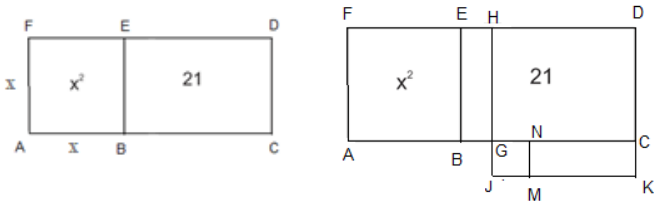
Completa un cuadrado, agregándole cuatro cuadrados de lados $\frac{b^2}{16}$, obtiene un cuadrado de lado $x + \frac{b}{2}$, como se muestra en la figura 2-8.

De esta forma el área inicial *36* se ha aumentado en cuatro veces $\frac{9^2}{16}$ obteniéndose la siguiente igualdad $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = 36 + 4\frac{9^2}{16}$ es decir $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = 36 + \frac{81}{4}$.

Para encontrar el valor de *x* plantea un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $x + \frac{9}{2}$ y cuyos catetos son 6 y $\frac{9}{2}$. Lo que resulta ser un triángulo de lados $\frac{15}{2}$, 6 y $\frac{9}{2}$ por lo que *x* valdría 3.

En términos generales, como sabemos, la solución de una ecuación de la forma $x^2 + bx = c$ es $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$ de donde $x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$.
Las demostraciones geométricas para las ecuaciones presentadas en los capítulos V o VI son más complicadas. Veamos por ejemplo los pasos para resolver la ecuación $x^2 + 21 = 10x$.

Figura 2-9 Método geométrico para resolver ecuación cuadrática capítulo VI de Al-Khowarizmi



Para representar geométricamente el lado izquierdo de la igualdad se han de considerar dos áreas que tengan un lado igual x hasta ahora desconocido. Se dibuja un cuadrado para representar x^2 y un rectángulo para representar 21 unidades, como se muestra en la figura 2-9. Pero como la suma de estas áreas debe ser $10x$, se tiene un rectángulo de ancho x y largo 10.

Se construye la mediatriz HG de AC, por lo que HD=GC=5 y se prolonga de tal manera que HJ=HD=5, formándose el cuadrado HDKJ y el cuadrado JMNG.

1. El área del cuadrado HDKJ es 25 por ser G punto medio del lado de longitud 10, por lo tanto el rectángulo MKCN tiene lados *5-x* y *x* que es igual al área del rectángulo EHGB.

2. De esta forma el cuadrado JMNG tiene un valor de 4 por ser BCDE rectángulo de área 21 y HDKJ cuadrado de área 25. El lado del cuadrado JMNG es 2. Como GJ=BG , y como AG=5 tenemos que *x= AB=5-2=3*, que es la solución de la ecuación planteada.

En esta demostración se evidencia el uso de propiedades de la geometría euclidiana como la de la mediatriz de un segmento. La demostración sigue las exigencias de rigor de la época, se hacen al "estilo geométrico" que naturalmente requerirán de nuevos conocimientos de geometría.

2.3 François Viète (1540-1603)

Considerado como una de las figuras más destacadas en la transición de las matemáticas del Renacimiento al mundo moderno dadas sus importantes contribuciones al álgebra, propone además de utilizar vocales para representar una cantidad desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número conocido, algunas relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algebraica con las dificultades propias de no aceptar raíces ni coeficientes negativos.

Con respecto a la solución de ecuaciones cúbicas propone la introducción de una nueva incógnita *y* que permitiría transformar la ecuación $x^3+3ax=b$ en una ecuación cuadrática en y^3 de la cual ya se conocen sus soluciones (Boyer, 1999).

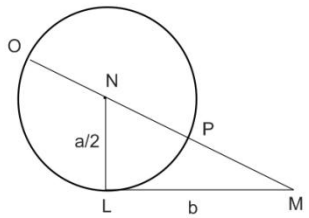
2.4 René Descartes (1596-1650)

Hacia el siglo XVII, René Descartes, el padre de la geometría analítica, desarrolla su teoría de ecuaciones, en donde incluye la regla de los signos con la que se puede determinar el número de raíces positivas y negativas de una ecuación. Descartes suministra también un marco geométrico para las operaciones algebraicas rompiendo con la tradición griega de considerar x^2 como área ó x^3 como volumen, al interpretarlos como segmentos, permitiéndole romper con el *principio de homogeneidad*[8] y conservando el significado geométrico (Boyer, 1999).

En el libro I de *La Géométrie,* Descartes presenta la resolución de algunas ecuaciones de la forma $z^2 = az + b^2$ *y* $z^2 = -az + b^2$. En el primer caso procede como sigue:

Construye un triángulo rectángulo NLM cuyo lado LM es igual a b, raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2 y el otro lado LN es $a/2$, la mitad de la otra cantidad conocida que multiplica a z.

Figura 2-10 Solución de una ecuación $z^2=az+b^2$ presentada por René Descartes



Prolongando MN, construye una circunferencia de radio $a/2$ con centro en N.

Prolongando MP hasta O , la línea OM es z, que es la línea buscada, se tiene $MP \cdot MO = LM^2$, [9] pero como $MP = MO - a$ y LM = b entonces, $(MO - a) \cdot MO = b^2$.

Si llamamos a $MO = z$, tenemos $(z - a) \cdot z = b^2$ es decir $z^2 - az = b^2$. Por lo que el valor buscado corresponde al segmento MO. Efectivamente:

$$z = MO = ON + NM = ON + \sqrt{NL^2 + LM^2} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

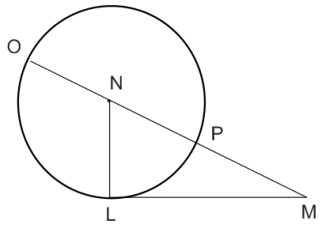
En el segundo caso para la ecuación $z^2 = -az + b^2$, Descartes basa su desarrollo en la misma construcción, aplicando las mismas propiedades, pero considerando el segmento MP

[8] El principio de homogeneidad es aquel en donde las operaciones sólo pueden hacerse entre magnitudes de igual dimensión.

[9] En los Elementos de Euclides libro III proposición 36 , se establece que*" Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra lo toca, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente"*

como z y PO como a, teniendo como resultado la igualdad $z(z+a)=b^2$. Además como $OP=OM-MP$ se tiene $(z+a)-z=a^2$ y $ON=NP=NL=\frac{a}{2}$. Con lo que concluye que $z=PM=MN-NP=\sqrt{NL^2+LM^2}-\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$. Que es la solución de la ecuación planteada.

Figura 2-11 Solución de una ecuación$z^2=-az+b^2$ presentada por René Descartes



La importancia del método presentado por Descartes es que al comenzar a trabajar analíticamente, las deducciones surgen a partir de construcciones geométricas y propiedades establecidas en la geometría euclidiana, designando con letras tanto cantidades conocidas como desconocidas y operando con ellas como si se hubiera resuelto el problema y de manera que cada cantidad sea expresada mediante relaciones entre los segmentos de maneras distintas estableciendo igualdades para determinar la solución de la ecuación planteada.

2.5 La duplicación del Cubo

El origen de las ecuaciones cúbicas se remonta a dos de los tres problemas griegos*: la duplicación del cubo*, y *la trisección del ángulo.* El primero tiene su origen en dos versiones: en una de ellas el rey Minos insatisfecho por el tamaño de la tumba a su hijo ordena que sea duplicada sin perder su forma cúbica original. Y en la otra, se cuenta que el oráculo de Delfos responde a los atenienses que para controlar la peste, ellos deben duplicar su altar cúbico.

Este problema algebraicamente es una sencilla ecuación $x^3=2V$, donde V es el volumen del altar y en la cual se debe determinar la longitud del lado del otro cubo cuyo volumen sea 2V .

Estos problemas no pueden ser resueltos con regla no graduada y compás al estilo de los Elementos de Euclides. En el libro A *History of Greek mathematics, Sir Thomas Heath* hace una recopilación de las soluciones teóricas dadas por Archytas, Eudoxus y Menecmo, usando herramientas no euclidianas.

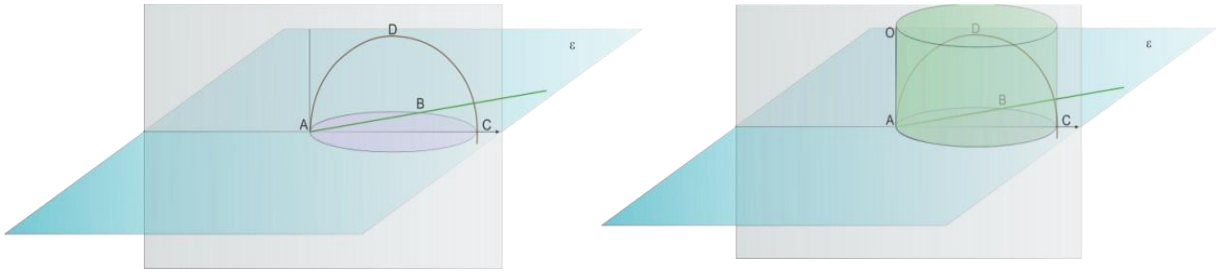
A continuación se presenta la solución dada por Archytas para la duplicación del cubo, considerada esta, una solución notable teniendo en cuenta la fecha en la que se desarrolló (primera mitad del siglo IV) y por ser una solución que utiliza la intersección de tres volúmenes: un cilindro, un cono y un toro[10] de diámetro interior nulo.

[10] En geometría, un toro es una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta). La palabra «toro» proviene

En el siglo V a C. Hipócrates de Quios había reducido el problema a intercalar dos medias geométricas entre la magnitud que representa la arista a del cubo primitivo y la arista b del cubo duplicado: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Archytas encuentra las medias geométricas x y y encontrando el punto en el que se interceptan los tres volúmenes.

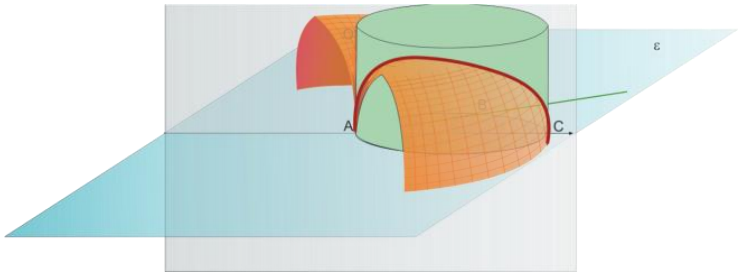
Para ello, Archytas primero construye una circunferencia de diámetro AC en el plano ε, y por el punto A traza la cuerda AB. Por un plano perpendicular a ε que contiene la línea AC se traza otra circunferencia del mismo diámetro AC llamada ADC. (Figura 2-12 lado izquierdo)

Figura 2-12 Solución de Archytas para la duplicación del cubo



Sobre la circunferencia ABC se construye un cilindro (figura 2-12 lado derecho) y al hacer girar el semicírculo ADC alrededor de la recta AO se genera un toro de diámetro interior nulo que al interceptarse con el cilindro genera una determinada curva presentada en la figura 2-13 de color rojo. Esa curva por tanto estará en las superficies del toro y del cilindro.

Figura 2-13 intercepción de un cilindro y un toro de diámetro nulo



del vocablo en latín torus, el cual en castellano significa «bocel» o «murecillo», que es una moldura redondeada de la basa, con forma de hogaza de pan. Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Toro

A continuación gira la recta AB alrededor del diámetro AC, se generará un cono recto, que cortará al cilindro en otra curva, de color verde, en la figura 2-14

Figura 2-14 Construcción de Archytas

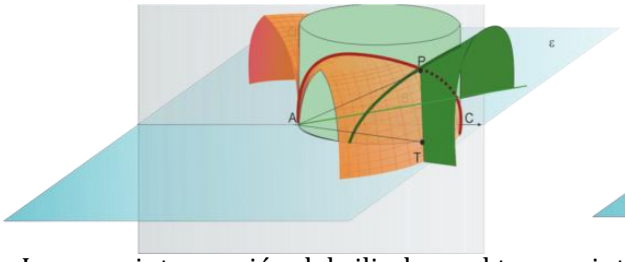
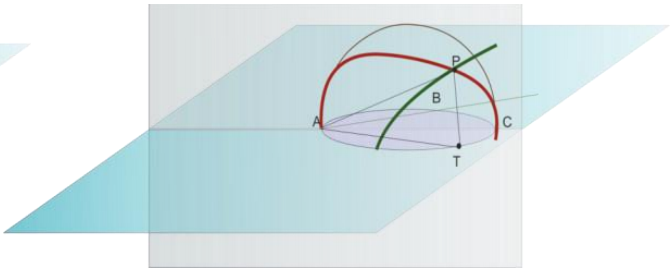


Figura 2-15 Intersección de curvas



La curva intersección del cilindro y el toro se intersecta con la curva de intersección del cono y el cilindro en un punto P (figura 2-15). La proyección T de este punto sobre el plano ε estará en el cilindro y sobre la circunferencia ABC[11].

Entonces se cumple que: $\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AC}$, donde AT y AP son las medias geométricas y AB y AC las aristas del cubo original y el cubo con volumen duplicado.

Al considerar las tres proporciones que genera la expresión anterior tenemos

$$(1)\ \frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AP} \quad (2)\ \frac{AB}{AT} = \frac{AP}{AC} \quad (3)\ \frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AC}$$

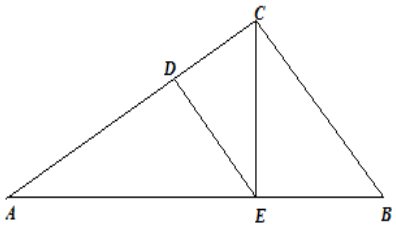
De tal manera que si $AT = x$ $AP = y$ $AB = V$ $AC = 2V$ entonces tenemos que la ecuación (1) genera $x^2 = Vy$ que representa una parábola. De la expresión (2) $xy = 2V^2$, obtenemos una hipérbola y de (3) $y^2 = 2Vx$ otra parábola.

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (1) se obtiene la ecuación cúbica $x^3 = 2V^2$, que Archytas resuelve encontrando la proyección del punto de intersección de las curvas generada por el cilindro y el toro al cruzarse, con la curva generada por el cono y el cilindro. Obsérvese que si el volumen V=1, entonces 2V=2 y $x = \sqrt[3]{2}$.

[11] Las gráficas que se presentan aquí han sido trabajadas a través del programa *Corel Draw*© (versión en español) que es un programa que permite la construcción de gráficas en diferentes capas y facilitan el manejo de perspectivas y modificación punto por punto de dibujos, de esta forma la presentación de planos perpendiculares y volúmenes puestos en ellos se facilita mucho más que en otros programas o en el dibujo a mano en el tablero.

Archytas logra con el planteamiento de las dos medias proporcionales simplificar el problema a construir tres triángulos rectángulos semejantes, de tal manera que AD y AB sean las aristas de los cubos y AC y AE sean las medidas a intercalar. Por lo tanto debemos encontrar los vértices de dos triángulos que verifiquen la condición.

Figura 2-14 Interpretación geométrica de Archytas



Aunque en este trabajo no se realiza la adaptación del desarrollo de la solución de Archytas para la duplicación del cubo, el método puede presentar oportunidades pedagógicas en tanto es posible realizar un análisis de la propiedades de las que hace uso la demostración en el espacio tridimensional como la semejanza de triángulos que se presentan en el plano que contiene el triángulo APT y el toro de diámetro nulo y las proporciones que se deducen de triángulos rectángulos semejantes que permiten determinar las medias geométricas que requiere la solución del problema.

De otro lado, la construcción de los tres volúmenes a través de las herramientas tecnológicas como el usado en el presente trabajo, posibilitaría en el aula la visualización de las intersecciones de estos y sus respectivas curvas de intersección.

2.6 Ecuaciones cúbicas en la matemática árabe

Omar Khayyam (1050-1123), conocido como "el fabricante de tiendas", escribe un álgebra que extendía a la clásica de Al-Khowarizmi hasta las ecuaciones cúbicas, aunque parece haber considerado imposible dar solución de tipo aritmético a estas ecuaciones y presenta únicamente soluciones geométricas mediante intersecciones de cónicas para resolverlas como lo habían hecho Menecmo, Arquímedes y Alhazen[12].

Lo más relevante de Omar Khayyam fue que generalizó el método para cubrir todas las ecuaciones que tengan alguna raíz positiva. Él se da cuenta que estas ecuaciones no pueden resolverse por medio de la geometría plana, es decir utilizando únicamente regla y compás sino que requiere las secciones cónicas.

En notación algebraica, el planteamiento de Omar Khayyam se reduce a remplazar en la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, x^2 por $2py$ de donde $2pyx + 2bpy + cx + d = 0$ que es la ecuación de una hipérbola, mientras que $x^2 = 2py$ representa una parábola. Las abscisas para las cuales la hipérbola y la parábola se cortan serán las raíces de la ecuación cúbica (Boyer, 1999).

[12] (965–1039), inspirado en la obra de Ptolomeo sobre reflexión y refracción estudió la estructura del ojo, extendió los resultados de Arquímedes sobre conoides y volúmenes entre muchos otros aportes a la ciencia.

2.7 Ecuaciones cúbicas en el Renacimiento: Cardano y Tartaglia

Durante los siglos XV y XVI, habiéndose determinado la solución de las ecuaciones cuadráticas, se plantean problemas que generan ecuaciones cúbicas en las que la misma situación presenta soluciones particulares diferentes. La solución depende de la consideración hecha; veamos un primer problema, es el siguiente:

Dividir 10 en dos partes de manera que multiplicando una por la otra hagan cuatro veces el cociente de la mayor por la menor.

Si consideremos que x y *10-x* son los números, se tienen dos casos:

$$x(10-x) = 4\frac{10-x}{x} \quad \text{con} \quad 10-x < x$$
$$x(10-x) = \frac{4x}{x-10} \quad \text{con } 10-x > x$$

De la primera se obtiene $x^3 - 10x^2 - 4x = -40$ y de la segunda $20x^2 - x^3 = 96x$

En el primer caso se establece una ecuación de tercer grado completa[13] y en la segunda una ecuación que carece de término independiente, donde una de sus raíces es cero con lo que el problema se reduce a solucionar una ecuación cuadrática ya conocida para la época. La primera ecuación se daba como "*ecuación sin solución*" (Livio, 2008).

Si nos detenemos un poco en el análisis de la situación planteada podemos establecer que las dos ecuaciones deben llevar a obtener las mismas soluciones, pero al proponer condiciones iniciales diferentes, se plantean también ecuaciones diferentes y que para el caso de la ecuación $x^3 - 10x^2 - 4x = -40$ y contextualizados en la época y los desarrollos matemáticos de la época, se considera como una ecuación sin solución al desconocer un procedimiento algebraico o geométrico para encontrarlas.

Esta situación particularmente brinda posibilidades pedagógicas que permitirían discusiones frente al establecimiento del orden de cantidades y las deducciones que a partir de este orden puedan ser generadas. Abre la posibilidad de discutir frente al número de soluciones que se pueden presentar y a la necesidad de resolver ecuaciones cúbicas completas.

[13] Una ecuación polinómica completa se refiere a aquella en la cual la ecuación de grado n, está compuesta por n+1 términos.

Scipione dal Ferro (1465-1526), profesor de matemáticas de Bologna, resolvió ecuaciones particulares del tipo $x^3 + px = q$ aunque no publicó su método[14]. Hacia 1510 le confía su secreto a Antonio María Fior quien años más tarde reta a Noccoló Fontana de Brescia (1499-1557) conocido como "Tartaglia" a resolver treinta ecuaciones de grado tres. Tartaglia resolvió las treinta ecuaciones en donde se incluían algunas de la forma $x^3 + px = q$ con p y q positivos e incluso de la forma $x^3 + q = px$ y cuyos procedimientos eran desconocidos para Scipione dal Ferro.

Gerolamo Cardano, médico renacentista, destacado por sus trabajos en álgebra, publica hacia 1545 y rompiendo una promesa a Tartaglia, su solución para la ecuación $x^3 + px = q$ en su libro *Ars Magna.*

Tartaglia había revelado a Cardano su método en forma de verso, luego de una gran presión por parte de éste. El verso traducido al español es el siguiente:

Cuando está el cubo con las cosas preso
Y se iguala a algún número discreto
Busca otras dos que difieran en eso

Después tú harás esto que te espeto
Que su producto sea igual al
tercio cubo de la cosa neta[15]

En realidad Tartaglia resuelve ecuaciones de los tres tipos siguientes: $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$, y $= px + q$.

De la ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, en la época de Cardano se consideraba tantos tipos como posibilidades para los signos positivos y negativos de los coeficientes. Dado el carácter geométrico que se le asignaba a toda expresión algebraica el número negativo no tenía sentido en el espacio físico. Como por ejemplo determinar un cuadrado de magnitud negativa o un volumen negativo de un cuerpo tridimensional.

Cardano y su discípulo Ferrari, comprueban posteriormente, que el método de Tartaglia y de Antonio Fior son los mismos e incluso que algunas publicaciones de Tartaglia, eran traducciones de la obra de Arquímedes copiado de Guillermo de Moerbecke (Morris, 1994).

---

[14] La razón para no publicar los resultados es que en esta época, era costumbre proponer desafíos para resolver problemas. Contar con un método de solución ponía al contrincante en inmediata desventaja (Martín Casalderrey, 2009).

[15] Este poema relata de forma bastante original las condiciones que se deben buscar en dos números que al ser sumados dan como resultado una raíz de la ecuación cúbica.

Fiore sólo sabía resolver ecuaciones cúbicas incompletas del tipo, $x^3 + px + q = 0$ pero Cardano había resuelto ecuaciones como: $x^3 + px^2 + q = 0$ reduciéndolo al caso anterior por medio de una sustitución[16].

Este consistía en sustituir x por $\left(y - \frac{b}{3}\right)$, en la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, obteniendo: $\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0$ que a su vez corresponde $ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}cb + d = 0$, donde $c - \frac{b^2}{3}$ y $\frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}cb + d$ son constantes por lo que la ecuación toma la forma de $y^3 + py + q = 0$.

2.7.1 La solución de Cardano-Tartaglia para la ecuación cúbica

La solución de una ecuación cúbica $x^3 = px + q$, por el método de Cardano – Tartaglia requiere inicialmente establecer geométricamente una equivalencia entre el volumen de un cubo cuyo lado es x y una suma de prismas rectos de lados y y z, mediante el procedimiento llamado *completación del cubo,* que es análogo al procedimiento conocido como la completación de cuadrado del que se hace mención en la página 13. El procedimiento es el que sigue:

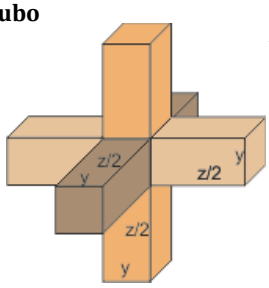
- Primero se construye un cubo de arista y,

Figura 2-15 Completación de cubo

Volumen y^3

- Sobre cada lado del cubo se construyen seis prismas de lados y y $\frac{z}{2}$ como se muestra a continuación y cuyo volumen es $\frac{y^2 z}{2}$

Figura 2-16 Completación de cubo



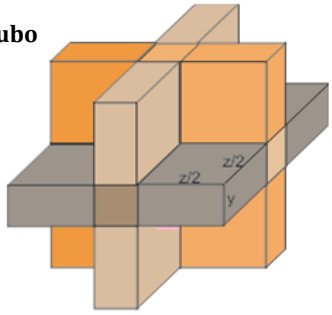
Al sumar los volúmenes obtenemos

$$y^3 + 6y^2\frac{z}{2} = y^3 + 3y^2 z$$

[16] Al parecer Cardano había encontrado esta sustitución y había generalizado el resultado como se muestra en el capítulo 1 corolario 3, pero no se encuentra evidencia de ello en los textos consultados.

- Se completa la figura adicionándoles doce prismas con dos lados de longitud $\frac{z}{2}$ y otro lado de longitud y

Figura 2-17 Completación de cubo

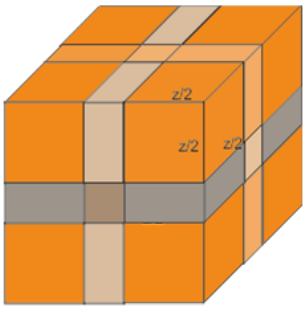


Con un volumen total de

$$y^3 + 3y^2z + 12y\frac{z^2}{4}$$
$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2$$
$$y^3 + 3yz(y+z)$$

- Para completar el cubo falta agregar los ocho cubos de lado $\frac{z}{2}$ cuyo volumen es $\frac{z^3}{8}$

Figura 2-18 Completación de cubo



$$y^3 + 3yz(y+z) + z^3$$

Pero el volumen anterior es evidentemente $(y+z)^3$ por lo que

$$(y+z)^3 = y^3 + 3yz(y+z) + z^3$$

Si consideramos que $x = y + z$ tendríamos que la ecuación anterior se transforma en:

$$x^3 = y^3 + 3yz(x) + z^3$$

Tomando en cuenta la ecuación cúbica $x^3 = px + q$ *(1)* podemos establecer las siguientes igualdades $p = 3yz$ y $q = y^3 + z^3$ (2). De donde $z = \frac{p}{3y}$ y que al ser remplazado en $q = y^3 + z^3$ se obtiene: $y^3 + \frac{p^3}{27y^3} = q$.

Al multiplicar ambos miembros por y^3 resulta la ecuación $y^6 + \frac{p^3}{27} = qy^3$ o $y^6 - qy^3 + \frac{p^3}{27} = 0$ (3). Resolver esta ecuación corresponde a resolver la ecuación cuadrática: $w^2 - qw + \frac{p^3}{27} = 0$ con $w = y^3$ (4). Que resolviendo por medio de la fórmula cuadrática se obtiene

$$w_1 = \frac{q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$w_2 = \frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Por lo que las soluciones de la ecuación cúbica serán

$$y_1^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad y_2^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

De la misma manera se procede para calcular z, despejando y en (2) ,y remplazando para obtener la ecuación $z^3 + \frac{p^3}{27z^3} = q$ de donde $z^6 - qz^3 + \frac{p^3}{27} = 0$, es es de nuevo una ecuación cuadrática para $w = z^3$ cuyas soluciones son

$$z_1^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad z_2^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Antes de determinar el valor de x que soluciona la ecuación (1) debemos determinar cuáles son las combinaciones entre y_1^3, y_2^3, z_1^3 y z_2^3 que se deben escoger para satisfacer $q = y^3 + z^3$, lo cual nos deja solo frente al caso

$$y_1^3 + z_2^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

De manera que

$$y^3 + z^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Para que las raíces cuadradas se eliminen y se cumpla la igualdad. De esta forma al ser *x=y+z* se tiene que

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Que es la fórmula cúbica para la resolución de ecuaciones cúbicas.[17]

---

[17] En el método de Cardano–Tartaglia las raíces de la ecuación cúbica se pueden obtener por medio de finitas sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces. El teorema de Abel-Ruffini establece que no pueden resolverse ecuaciones de grado mayor o igual a cinco por medio de un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíces de los coeficientes de la ecuación. La teoría de Galois proporciona la explicación en detalle de por qué es posible resolver ecuaciones de grado inferior al cuarto, y por qué las soluciones son expresables mediante operaciones algebraicas y extracción de raíces. Galois enunció y demostró un teorema, a veces llamado "teorema de Galois", para identificar dichas ecuaciones. Dice así: *«Si en una ecuación polinómica la potencia más alta es un número primo y si, supuesto conocidos dos valores de la x, los demás se pueden obtener a partir de ellos*

Es importante anotar que la solución ecuación cúbica por este método resulta en algunos casos dispendiosa dada la cantidad de cálculos que se requieren para encontrar la solución y que el remplazo en la fórmula presentada y en algunos casos nos da como resultado números que no son sencillos de simplificar. Por ejemplo si la ecuación a resolver es $x^3 - 9x - 28 = 0$, donde los valores de p y q serían respectivamente 9 y 28, que al remplazarlos en

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{28}{2}+\sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{28}{2}-\sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{3}\right)^3}}$$

De donde $x = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 4$.

Pero en la ecuación $x^3 - x - 120 = 0$, en la que los valores de p y q son 1 y 120 al remplazar en la ecuación es $\sqrt[3]{\frac{120}{2}+\sqrt{\left(\frac{120}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{120}{2}-\sqrt{\left(\frac{120}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3}}$ que corresponde a $\sqrt[3]{60+\sqrt{\frac{97199}{27}}}+\sqrt[3]{60-\sqrt{\frac{97199}{27}}}$, cuyo resultado es un valor exacto de 5, pero los procedimientos para su simplificación son dispendiosos. Sin embargo cuando se estudia en el método de Cardano -Tartaglia es evidente que la solución requiere (como lo dice el poema escrito por Tartaglia) encontrar dos números cuyos triple producto sea p y la suma de sus cubos sea q.

La suma de estos números será una de las soluciones de la ecuación dada. Ello podría representar un camino alternativo en la solución de algunas ecuaciones cúbicas más adelante.

Queda sin embargo por estudiar la determinación de las otras dos raíces de la ecuación pero dado el nivel al que va dirigido la propuesta se omitirá aquí la demostración de que todo número tiene tres raíces cúbicas[18]. Para determinar las otras dos raíces de las ecuaciones cúbicas se tendrá en cuenta el teorema del factor citado en el capítulo I, en donde encontrada una de las raíces se descompone en factores primos la ecuación cúbica para determinar una ecuación cuadrática a la que se le aplica la fórmula.

---

usando únicamente la suma, la resta, la multiplicación y la división, entonces la ecuación puede ser resuelta mediante radicales.»

[18] Si el lector está interesado en ella puede consular el libro de álgebra Superior de Hall & Knight Artículo 110 página 96

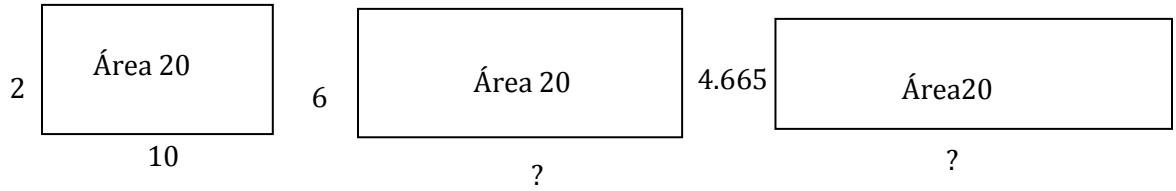
2.8 Método de aproximación de Newton- Rahpson

El método de Newton – Rahpson determina los ceros de una función de variable real mediante el uso de rectas tangentes a la curva que se acercan a la raíz.

El método de aproximaciones tiene sus orígenes en la matemática de los babilonios, quienes desarrollaron un método de aproximación para encontrar la raíz cuadrada de un número determinado. A continuación se explica el método mediante un ejemplo:

Si se quería encontrar la raíz cuadrada de 20, se buscaba construir un cuadrado cuya área fuera 20 y determinar la longitud de este cuadrado, que correspondería a la raíz de 20. Entonces: primero se construiría un rectángulo de área 20, se escogerían los lados 10 y 2

Figura 2-19 Procedimiento geométrico para la raíz cuadrada



El promedio de estos dos valores es decir 6 servirá para aproximar a la raíz del número. Luego construiría un rectángulo de base 6 y área 20
Por lo que su altura debe ser 20/6 =3.33. De nuevo promediaría las longitudes del último rectángulo 9.33/2 = 4.665 y construiría un nuevo rectángulo de base 4.665 y de área 20 cuya altura será entonces de 20/4.665=4.287.
Observemos en la siguiente tabla, como se han ido aproximando los datos a la raíz buscada.

Tabla 2-2 Método para calcular la raíz cuadrada de un número por aproximaciones numéricas: método babilonio

Base	Altura	Área
2	10	20
6	3.333333	20
4.666667	4.285714	20
4.47619	4.468085	20
4.472138	4.472134	20
4.472136	4.472136	20

Vemos como para el cálculo de la raíz cuadrada se hace uso del concepto de área de un rectángulo al cual se le hacen varias compensaciones entre sus lados de tal manera que el área permanezca constante. De manera general, si *n* es el número al que se desea extraer las raíz cuadrada, se establecerá que existen dos números que multiplicados dan *n.*

Sean los números x_0 y x_1 $con\, x_0 \times x_1 = n$

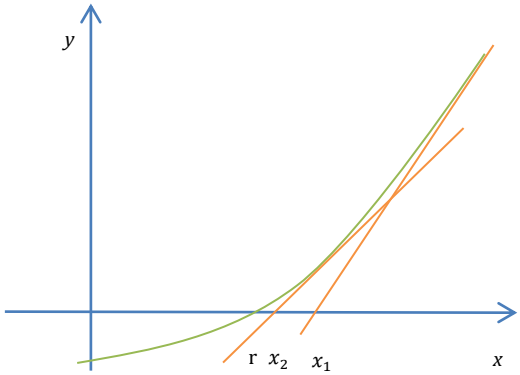
donde $x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$ $x_3 = \frac{n}{x_2}$ $x_4 = \frac{x_2+x_3}{2} = \frac{\frac{n}{x_3}+x_3}{2}$ y $x_5 = \frac{n}{x_4}$

De manera general se tiene la ecuación de reiteración $x_i = \frac{\frac{n}{x_{i-1}}+x_{i-1}}{2}$.

Utilizando los resultados anteriormente presentados, sería natural preguntarse por la solución de la ecuación $x^2 - 20 = 0$, es decir en la raíz de la función $f(x) = x^2 - 20$.

El método de Newton-Rahpson, es un método no generalizado de aproximación de las raíces de una función. La idea básica se muestra en la Figura 2-22, donde r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, x_0 es una aproximación obtenida de tomar la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $(x_0, f(x_0))$.

Figura 2-20 Aproximaciones de Newton



Para hallar una fórmula que dé la mejor aproximaciónx_1, se tiene que la pendiente de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ es la derivada de $f(x)$.

Por lo tanto $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}$, que equivale a $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si el procedimiento se repite empleando x_1 como la aproximación inicial, se obtiene una aproximación aún mejor. Esta aproximación x_2 está relacionada con x_1 por:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

Los inconvenientes que presenta el método de Newton es que como se sabe por cálculo diferencial , un punto crítico es aquel valor de x que hace la primera derivada cero por lo que este método presenta indeterminación en esos puntos críticos por lo que en ellos la recta tangente nunca cruza al eje de las abscisas; sin embargo al ser esta una propuesta para estudiantes de grado undécimo, quienes ya han desarrollado los principios básicos del cálculo diferencial, el método de aproximaciones de Newton puede ser implementado como una aplicación a este e incluso puede mostrarse en que casos el método no es aplicable.

3. Papiroflexia

La Papiroflexia u Origami basa su método en el doblado de papel. Su origen parece haber sido japonés entre los años 700 y 1100 de la era actual en donde a las cartas y poesías no solo se daba importancia a su contenido y escritura sino a la forma en la que se hacía el plegado y que era considerado simbólico de acuerdo a la ocasión.

Pero sus aplicaciones van mucho más allá de la creación de figuras. Es el alemán Fröbel, quién lo utiliza en niños del jardín de infantes como una técnica de enseñar la geometría. Hacia el año 1893 el libro hindú Sindara Row "Geometric excercises in paper folding" presenta un amplio estudio de la Geometría Euclidiana a partir del doblado de papel lo que hace que cobre gran importancia en la enseñanza de la misma y se destaquen trabajos de diferentes autores alrededor del tema, mejorando y unificando sus técnicas.

De manera particular, el doblado de papel propone una justificación de lo que en Geometría Euclidiana se considera dado por la intuición. Por ejemplo, en la Proposición 8 del Libro I de Euclides se plantea que "si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y también tienen la base igual, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales", basando su razonamiento en la superposición de triángulos cuyos lados y ángulos coinciden.

3.1 Resolución de Ecuaciones Cúbicas por el método de Papiroflexia

Una aplicación importante de este método permite resolver ecuaciones de tercer grado. Presentaremos en este aparte seis axiomas que nos permitirán determinar la solución de ecuaciones cúbicas y la fundamentación matemática de estos resultados.

3.1.1 Los seis Axiomas de Humiaki Huzita

Humiaki Husita, matemático Japonés, plantea los seis primeros axiomas que describen las matemáticas de la papiroflexia y nos permiten resolver problemas de construcción geométrica. A cada uno de los cuatro primeros axiomas le corresponde un postulado o axioma de la geometría Euclidiana. Para el axioma cinco existe una correspondencia con la definición de recta tangente y recta secante a una circunferencia y el axioma seis determinará la solución de la ecuación cúbica (Henríquez, 2008). A continuación se mencionan los cinco primeros axiomas y el análisis del sexto que es el que tiene que ver con el tema de este trabajo. Si el lector está interesado en examinar más a fondo los primeros cinco axiomas y algunas construcciones que se sugieren como trabajo de aula, puede consultar el Anexo A de construcciones que se presenta para este trabajo.

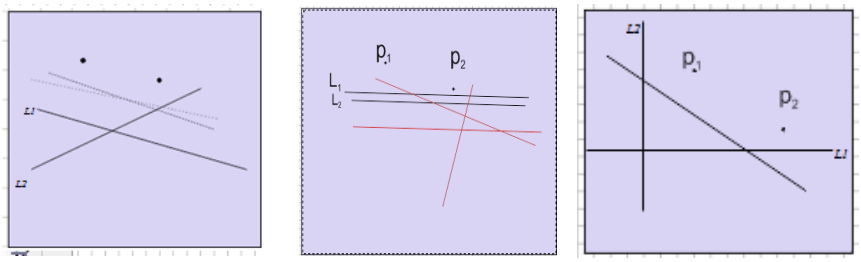
Los seis axiomas son:

1. Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único doblez que pasa por p_1 y p_2; esto equivale a trazar una línea recta por dos puntos dados (Postulado 1 de Euclides: Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta).
2. Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único doblez que pone a p_1 sobre p_2; esto equivale a trazar la mediatriz del segmento que une a p_1 y p_2 (Libro I Proposición 10 de Euclides: Dividir en dos partes iguales un segmento dado y Proposición 11: Trazar una recta perpendicular a un segmento dado desde un punto del mismo segmento).
3. Dadas dos líneas l_1 y l_2, existe un único doblez que pone a l_1 sobre l_2; esto equivale a bisecar el ángulo que se forma entre las dos líneas. (Libro I Proposición 9: Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado).
4. Dadas una línea l_1 y un punto p_1, existe un único doblez perpendicular a l_1 y que pase por p_1; esto equivale a trazar una línea perpendicular a una línea que pase por un punto dado. (Libro I Definición 10 de Euclides: Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es *recto*, y la recta que está sobre la otra se llama *perpendicular* a la otra recta)
5. Dados dos puntos p_1 y p_2 y una línea l_1, existe un doblez que pone a p_1 sobrel_1 y que pasa por p_2; esto equivale a encontrar los puntos de intersección entre una línea l_1, y un círculo con centro en p_2 y radio p_1p_2(Libro III Definición 2de Euclides: Una recta es tangente a una circunferencia cuando, tocando a la circunferencia y siendo alargada no corta a la circunferencia). Por lo tanto pueden haber 0,1 o 2 posibles soluciones (dobleces).

   Este axioma se puede interpretar como los puntos que equidistan de un punto fijo y una recta fija. Podemos pensar que el punto fijo p_1 es el foco de una parábola y la línea l_1 fija es la directriz de esa misma parábola.

6. Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos líneas l_1 y l_2, existe un doblez que pone a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2; esto equivale a encontrar una línea (el doblez) que sea tangente simultáneamente a dos parábolas, una con foco en p_1 y directriz l_1, y otra con foco en p_2 y directriz en l_2. Este último axioma también equivale a encontrar la o las solución (es) de una ecuación cúbica. Para unos puntos y unas líneas dadas puede existir 0,1,2, o 3 dobleces que cumple las condiciones del axioma.

Figura 3-1Axioma 6 de papiroflexia



En la figura 3-1 se muestran algunas soluciones para dos líneas y dos puntos dispuestos de diferente manera, en el álbum anexo se amplían las construcciones.

3.1.2 Aplicación del Axioma seis para hallar la solución de la ecuación cúbica.

Si se tiene una ecuación cúbica de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, en un plano cartesiano escogemos los punto p_1 y p_2 con coordenadas *(a,1) y (c,b)* respectivamente, y las líneas l_1 y l_2 con ecuaciones *y+1=0* y *x+c=0*. Si se dobla el papel de manera que p_1 quede sobre l_1 y p_2 sobre l_2, la pendiente del doblez será una de las soluciones de la ecuación; a continuación se presenta la demostración (Henríquez, 2008).

Si una de las parábolas tiene foco en el punto p_1 y la directriz en la línea l_1, sabemos que ésta es una parábola de la forma $(x-h)^2 = 4(y-k)$, donde el vértice está en el punto *(h ,k)* y el foco está a p unidades del vértice por lo que la parábola tiene por ecuación $(x-a)^2 = 4y$. Para este caso el doblez que cumple las condiciones del axioma 6 debe pasar por un punto $(x_{1,}y_1)$ y tiene una ecuación $y = tx + u$. Como el doblez es tangente a la parábola, la pendiente t de la tangente será la derivada de $(x-a)^2 = 4y$ en el punto $(x_{1,}y_1)$, por lo que tenemos $y_1 = \frac{(x_1-a)^2}{4}$ cuya primera derivada es $\frac{dy_1}{dx} = \frac{x_1-a}{2}$ que igualando queda $t = \frac{x_1-a}{2}$, Por lo tanto $x_1 = 2t + a$.

El punto de corte de la recta tangente se encuentra remplazando el punto en la ecuación $y = tx + u$ es decir $u = y_1 - tx_1(x_{1,}y_1)$.

Si luego remplazamos el valor de y_1 como un punto de la parábola $y_1 = \frac{(x_1-a)^2}{4}$ y el valor de x_1 entonces tenemos que $u = -t^2 - at$.

Para la segunda parábola que tiene foco en el punto p_2 y directriz la línea l_2, Se puede concluir que tiene ecuación general $(y-k)^2 = 4cx$.

Ya que tiene vértice en el punto $(0, b)$ y p=c. El doblez que determina la recta tangente a la primera parábola es también tangente a esta, por lo que para calcular la ecuación de esta recta debemos derivar la ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{(y_2-b)}$. Por lo que $t = \frac{2c}{(y_2-b)}$ de lo que $y_2 = \frac{2c}{(t-b)}$.

Para encontrar el punto de corte de la recta tangente con el eje y remplazamos el punto $(x_{2,}y_2)$ en la ecuación $y = tx + u$ de lo que obtenemos $u = \frac{c}{t} + b$

Al igualar las dos ecuaciones que se obtienen para u obtenemos $-t^2 - at = \frac{c}{t} + b$ con lo que se tiene la ecuación cúbica $t^3 + at^2 + bt + c = 0$.

De esta forma, para resolver ecuaciones cúbicas por el método de doblado de papel, se toman como directrices las rectas *y+1=0* y *x+c=0* y como focos los puntos *(a,1) y (c,b)* y como se demostró arriba, la pendiente de la recta tangente común a las dos parábolas resuelve la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Existe otra forma de considerar los focos y directrices de las parábolas; sin embargo en este trabajo no se presentan, si el lector está interesado en dicho método y su demostración matemática puede consultar la página de internet www.novalecortar.com en el trabajo presentado por Nicolás Gajardo Henríquez en el año 2008.

4. Aplicaciones en el Aula de Clase

4.1. Introducción

En este capítulo se plantean una serie de situaciones a través de la cuales un estudiante de grado undécimo de enseñanza media puede resolver problemas mediante la aplicación de los métodos descritos en los capítulos anteriores.

El propósito fundamental, es llevar paulatinamente al estudiante a desarrollar habilidades que potencien el pensamiento variacional. Se inicia con ejercicios conceptuales, luego la solución de ecuaciones y, finalmente la aplicación de las mismas en la solución de situaciones problémicas. Además, se retoman las principales conclusiones de los métodos tratados en los capítulos anteriores y algunos ejercicios mencionados que se han tomado de los textos de historia. Se hace énfasis en lo anterior y no únicamente en la aplicación de las fórmulas demostradas.

Los problemas y situaciones se presentan en nueve fichas de trabajo, cada una con propósitos específicos y orientados a discriminar las condiciones que hacen pertinente cada uno de los métodos de solución abordados.

En cada ficha se ha intentado dar la fundamentación y argumentación pertinente de lo que se desarrolla y se espera que los estudiantes desarrollen. Este podría orientar el trabajo del profesor en el aula, puntualizando en las posibles dificultades que presentan los métodos.

El trabajo está orientado a estudiantes de grado undécimo dado el nivel de conocimientos previos que se deben tener y los procesos de pensamiento que han desarrollado en su escolaridad anterior. Dentro de esos conocimientos se debe contar con un manejo adecuado de propiedades algebraicas de polinomios, procesos básicos de descomposición en factores, lenguaje algebraico y aritmético, el concepto de función de variable real, derivada de una función polinómica, solución de ecuaciones de segundo grado, elementos y propiedades de secciones cónicas fundamentalmente de parábolas.

4.2 Objetivos Generales

- Reconocer diferentes métodos de solución de ecuaciones cúbicas.
- Resolver analíticamente situaciones que impliquen ecuaciones cúbicas.

4.3 Actividad 1

En esta actividad se espera que los estudiantes distingan funciones polinomiales de aquellas que no los son, reconociendo sus características. El recurso tecnológico, como la calculadora gráfica o algún software que permita realizar las gráficas de funciones polinómicas, ayudaría

a identificar de manera visual el número de raíces de cada una de ellas con el grado del polinomio y así inducir el teorema fundamental del álgebra.

4.3.1 Objetivos

- Reconocer polinomios de una variable, reconocer el grado y la relación entre este y las intersecciones con el eje x.
- Determinar las raíces reales y complejas y los x-interceptos de algunas funciones polinómicas de grado uno, dos y tres.

4.3.2 Ejercicios Propuestos

1. Para las siguientes funciones determina cuáles son funciones polinómicas y cuáles no
   a. $f(x) = 5x^3 - x^2 + \sqrt{2}$
   b. $f(x) = 0{,}4x^4 + x^2 - x$
   c. $f(x) = 3x^2 + 2/\sqrt{2}$
   d. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
   e. $f(x) = \pi$
2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas determina sus interceptos con el eje x.(x-intercepto)
   a. $f(x) = 4$
   b. $f(x) = -3x+2$
   c. $f(x) = x^2$
   d. $f(x) = x^2 + x$
   e. $f(x) = x^2 + x - 2$
   f. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
3. De acuerdo con el resultado anterior responde las siguientes preguntas:
   a. Toda función polinómica tiene x-interceptos? Justifica
   b. Cuántas soluciones puede tener una ecuación lineal?
   c. Cuántas soluciones puede tener una función cuadrática?
   d. Por qué no siempre el número de x-interceptos de una función polinómica $f(x)$ es igual al número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$? Justifica
4. Para las siguientes ecuaciones, realiza su representación gráfica en el plano cartesiano, describe su comportamiento estableciendo comparaciones entre las cuatro funciones planteadas y determina los puntos en los cuales las curvas interceptan los ejes cartesianos.
   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
   c. $f(x) = 2x^3 + x$

d. $f(x) = -x^3 + x + 1$

5. Teniendo en cuenta la conclusión obtenida para ecuaciones cuadráticas, lineales y cúbicas, ¿Cuál sería la conclusión general que puedes obtener?

4.3.3 Indicaciones para el docente

Es necesario que los estudiantes distingan las características de una función polinómica, el conjunto numérico al que pertenecen los exponentes y los coeficientes.

Se debe puntualizar en las siguientes observaciones en cuanto al comportamiento y características de las funciones propuestas para la segunda parte :

- Para la función constante $f(x) = 4$ determina una recta paralela al eje x en la que no existe intercepto con el eje horizontal. La constante *4* puede ser considerado como el monomio cuyo coeficiente es 4 y literal es x^0, lo que permite identificar el grado del mismo y relacionarlo con sus no-interceptos al eje x.
- En la función lineal $f(x) = -3x+2$ se plantea una función lineal con una inclinación o pendiente de *-3*, lo cual garantiza que cortará al eje X en un único punto. Los estudiantes podrán determinar el número de soluciones que tiene la ecuación $-3x+2=0$ bien utilizando la información gráfica o por medio de procedimientos algebraicos conocidos en este nivel.
- La función $f(x) = x^2$ representa una parábola cuyo vértice (0,0) que a su vez representa el x-intercepto. Es importante anotar que $x^2 = x \times x$ y que al resolver $x^2 = 0$ lo que se está tratando de determinar son los valores para los cuales un producto es igual a cero. De esta manera se obtendría $x = 0$ en ambos casos. Se parte de este hecho para tratar la multiplicidad de la solución de la ecuación cuadrática dada. Se pueden plantear otras ecuaciones en las que las raíces tengan multiplicidad diferente de uno.
- Tanto para la función $f(x) = x^2 + 2x$ como para $f(x) = x^2 + x - 2$ se presentan parábolas que presentan dos raíces reales, que se determinan mediante una descomposición en factores y la aplicación del criterio de productos iguales a cero.
- Para la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ representada en el plano mediante una parábola que no intercepta al eje x, se analizan las soluciones de la ecuación $3x^2 + 2x + 1 = 0$ mediante el uso de números complejos.

La asociación de los resultados anteriores con ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 = 0$ nos permitirá relacionar el grado de un polinomio con el número de raíces de la ecuación y como éstas, pueden ser de naturaleza real o compleja.

Una vez compartidos los resultados de los ejercicios propuestos, se debería realizar la conceptualización de estos, introduciendo los teoremas que garanticen la existencia de las raíces de un polinomio hasta de grado tres.

4.4 Actividad 2: Raíces por Aproximación y Teorema del Factor

Una vez establecido el hecho de que toda función polinómica tiene tantas raíces complejas como lo indique el grado general del polinomio, se pretende:

4.4.1 Objetivos

- Determinar (al menos una raíz real) de las ecuaciones cúbicas por medio de aproximaciones.
- Aplicar el teorema del factor para determinar todas las raíces de una ecuación cúbica dada.

4.4.2 Ejercicios Propuestos

- Motivación:

  Se quiere dividir un segmento de 10 cm en dos partes de manera que cuatro veces el cociente del mayor por el menor sea igual al producto de las partes

- Ensayo y error:

  Escoge aleatoriamente dos números cuya suma sea 10 y responde las siguientes preguntas:

a. Si uno de los segmentos mide 5cm, ¿cuál es la medida del otro?
b. ¿Cuál es el cociente entre estos segmentos? ¿Y cuatro veces el cociente?
c. ¿Satisfacen estos valores las condiciones dadas?
d. Aumenta la medida del segmento mayor varias veces y observa la variación que se presenta en el cuádruplo del cociente y en el producto de las longitudes de los segmentos.

- Completa la siguiente tabla con diferentes valores para los segmentos en los que se divida el segmento de 10 cm

Tabla 4-1 Actividad 2 Raíces por aproximación Propuesta de Clase

A	B	A x B	A/B	4A/B	
Parte en que se divide 10	**10-x**	**Producto de las partes**	**Cociente de las partes**	**Cuatro veces el cociente**	**Comportamiento entre el cuádruplo del cociente y el producto**
5	5				
…					

- Compartir resultados
  a. Reunidos en grupos de trabajo comparte los resultados obtenidos y el razonamiento realizado para determinar los resultados.
  b. Comprueba que las respuestas dadas por tus compañeros son o no satisfactorios para las condiciones del problema.
  c. ¿Cuántas soluciones se han encontrado al problema?
  d. ¿Que se podría concluir si el segmento se dividiera en dos pedazos de 10 y 0 cm respectivamente?
- Plantear ecuaciones:
  De manera individual responde las siguientes preguntas
  a. Al designar como x y $10 - x$ las partes en las cuales se divide el segmento, completa las siguientes enunciados: La mayor es _____ y la menor es_____
  b. Escribe a la derecha la ecuación para la situación dada:$(\quad) \times (\quad) = 4\left(-\right)$
  c. Realiza las operaciones necesarias para que la ecuación no tenga expresiones racionales.
  d. Comparte tus resultados con los compañeros de grupo y discute los planteamientos que han realizado.
- Resolución del problema
  a. Al comparar las ecuaciones del numeral anterior, ¿como podrías justificar que dos ecuaciones diferentes planteen el mismo problema?
  b. ¿Serán las soluciones de las ecuaciones las mismas? Pruébalo
  c. ¿Qué tipo de ecuación plantea la situación?
  d. ¿Cuántas soluciones se deben tener para estas ecuaciones?
  e. Utiliza una de las soluciones encontradas en el punto 1 para determinar otras soluciones utilizando división sintética.

4.4.3 Indicaciones para el Docente

Partiendo del planteamiento de la situación específica, se pretende el planteamiento algebraico de dicha situación.

La intención del ejercicio es permitir al estudiante aproximarse a la solución por ensayo y error, utilizando los conceptos desarrollados en la primera parte de la propuesta, también se pretende contrastar los planteamientos de los estudiantes en el sentido de ofrecer una situación que no genere una única ecuación.

Para ello se ha retomado el problema planteado en el capítulo referente a los antecedentes históricos, el cual se pide: "*dividir 10 en dos partes de manera que multiplicando una por la otra hagan cuatro veces el cociente de la mayor por la menor".*

El estudiante se irá aproximando al problema a partir de ensayo y error. Esto le permitirá comprender el enunciado, observar valores para las partes en la que se pretende dividir la cantidad inicial que no satisfacen la condición, por ejemplo:

- Si alguno escogiese dividir el segmento en 4 y 6 podrá observar que su producto es 24 y cuatro veces el cociente del mayor por el menor es 6, que no cumple las condiciones dadas y sin embargo mediante el razonamiento de las partes en que puede ser dividido 10, podrá llegar a la conclusión de que la parte menor debe ser necesariamente un número menor a 4 para que el cociente se haga mayor y así la multiplicación por 4 se haga mayor, acercándose al producto de las partes que a su vez se hizo más pequeño.

Para ilustrar el proceso de aproximación el estudiante podrá escribir sus resultados se puede completar la información en la tabla sugerida, de tal forma que se puedan realizar las compensaciones necesarias para determinar los valores que han de satisfacer las condiciones dadas. A continuación se muestra la tabla con algunos resultados y las observaciones en las que se debe hacer énfasis.

Tabla 4-2 Actividad 2 resuelta raíces por aproximación Propuesta de Clase

A	**B**	**A x B**	**A/B**	**4A/B**	
Parte en que se divide 10	**10-x**	**Producto de las partes**	**Cociente de las partes**	**Cuatro veces el cociente**	**Comportamiento entre el cuádruplo del cociente y el producto**
5	5	25	1	4	25 y 1 son muy lejanos
4	6	24	1.5	6	24 y 6 son muy lejanos aún
3	7	21	2.333333	9.3333	El producto se acercó a cuatro veces el cociente
2.5	7.5	18.75	3	12	Los valores se hacen más cercanos al valor buscado

Este proceso permitirá encontrar valores apropiados[19].

Sobre la reflexión de la posibilidad de determinar tres soluciones al problema, se podría recurrir al grado de la ecuación que resulte.

Este problema se ha seleccionado ya que proporciona la oportunidad de establecer dos ecuaciones de acuerdo a la caracterización de las partes en las cuales se considera dividido el segmento: En este caso las ecuaciones que representan el enunciado son:

- *ecuación 1*: $x^3 - 10x^2 - 4x = -40$
- *ecuación* 2: $20x^2 - x^3 = 96x$. [20]

en donde *x* representa la mayor y menor longitud en la que se dividirá 10 respectivamente.

[19] Se espera que los estudiantes encuentren soluciones distintas entre ellos para permitir la discusión de los resultados.

[20] Sería muy útil discutir con los estudiantes si estas ecuaciones son o no equivalentes y lo que ello significaría. Esto posibilitaría otros tópicos de discusión.

Claramente para la segunda ecuación existe una raíz *x = 0*, y aplicando el teorema del factor, se podrá escribir una ecuación de segundo grado como factor de x. De allí se obtendrán las otras dos raíces.

Para la primera ecuación, la cuestión es más compleja; sin embargo abre una posibilidad de motivar la introducción del tema principal de la propuesta: métodos para resolver ecuaciones cúbicas.

El teorema del factor nos indica que conocida una raíz *c* de una ecuación polinómica, esta se puede escribir como producto de *(x-c)* por un polinomio de grado uno menos que el inicial.

Utilizamos este resultado para determinar los factores: $x^3 - 10x^2 - 4x + 40 = 0$

La regla de Ruffini presenta un algoritmo que permite determinar el polinomio de grado dos (para este caso) como cociente de $x^3 - 10x^2 - 4x + 40$ y $(x - c)$

Podemos considerar alguna de las soluciones halladas por ensayo y error: en este caso tomaremos 2.

Tabla 4-3: Método de Ruffini para descomponer en factores un polinomio

1	-10	-4	40	
	2	-16	-40	2
1	-8	-20	0	

De donde la ecuación $x^3 - 10x^2 - 4x + 40 = 0$ puede ser factorizada como $(x - 2)(x^2 - 8x - 20) = 0$. De nuevo el polinomio $(x^2 - 8x - 20)$ es factorizable en $(x - 10)(x + 2)$. Por lo que las soluciones de la ecuación son 2, -2 y 10

4.5 Actividad 3. Aplicación del método de Newton-Rahpson.

En esta actividad el estudiante deberá tener conocimientos básicos de cálculo diferencial como el concepto de la derivada de una función polinómica y el significado de ella como la pendiente de la recta tangente en un punto dado.

4.5.1 Objetivos

- Determinar raíces cuadradas de números reales a partir del método babilonio
- Encontrar aproximaciones de ecuaciones cúbicas por el método de Newton-Rahpson.

- Establecer las condiciones para determinar las raíces de una ecuación cúbica a partir de los criterios de la primera derivada.

4.5.2 Ejercicios Propuestos

Primera Parte

1. Determina la raíz de la ecuación $x^2 - 10 = 0$ (con tres cifras significativas) a partir de un rectángulo de lados 5 y 2.
2. Realiza la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 10$ y verifica el grado de exactitud de la solución encontrada en el punto 1.
3. Podrías generalizar el método de los babilonios para determinar la raíz cúbica de un número real?

Segunda Parte

Se requiere construir una caja de base cuadrada con tapa en la que se empleen 400 m^2 de material y que la caja tenga un volumen de 200 m^3. Cuáles son las dimensiones de la caja?

Responde las siguientes preguntas

1. Escribe dos expresiones algebraicas que representen el área total superficial y el volumen de una caja de base cuadrada.
2. Ensaya con algunos valores para tratar de intuir las dimensiones de la caja.
3. Si disminuyéramos en un centímetro por cada lado de la base de la caja, ¿cuál tendría que ser el alto de la misma para que conserve su volumen?
4. Si aumentáramos en un centímetro por cada lado la base de la caja cuánto debe disminuir su alto para que mantenga el mismo volumen.
5. Utilizando una calculadora completa la siguiente tabla

Tabla 4-4 Variación del lado de la base y la altura de un prisma con volumen.

Lado de la base	Altura	Volumen	Área Superficial
1		500	
2		500	
3		500	
4		500	
5		500	
6		500	

6. Establece una ecuación que represente la situación en términos de una variable.
7. De acuerdo con el método de Newton-Rhapson y a la aproximación que determinaste, determina las dimensiones de la caja, encontrando las pendientes de las rectas tangentes a la curva y acercándolas a la raíz del polinomio (tres cifras significativas).
8. Determina la naturaleza de las otras soluciones a partir de la factorización del polinomio por la raíz encontrada. (¿Se puede generalizar el método de Ruffini a números decimales?)

Tercera parte

Si se tiene la ecuación $3x^3 - 3x + 6 = 0$

1. Encuentra una raíz por el método de Newton comenzando con el valor $x_0 = 1$ y luego en $x_0 = -1$
2. Justifica por qué el método falla en estos casos y establece un procedimiento en el que no se incurra en estos errores.
3. Escoge otro valor y determina la solución aproximada.

4.5.3Indicaciones para el Docente

En la primera parte de la actividad el docente podrá recalcar en la importancia del método al margen de la dificultad de los cálculos con números decimales, haciendo énfasis en la interpretación geométrica que surge y cómo esta puede pensarse para determinar la raíz cúbica de un número a partir de un volumen y de la compensación entre las longitudes de los lados. Incluso podría llegar a plantearse la necesidad de tener una caja de base cuadrada. Algunas indicaciones importantes:

- La caja no podría ser un cubo pues la arista tendría que ser $2\sqrt[3]{25}$ con lo que no tendría un área superficial de 400 cm^2
- Podrá disminuir o bien el lado de la base o el alto para asegurar que disminuya el área superficial.

Para ilustrar lo anterior podemos resumir las posibilidades de ensayo que encontrarían los estudiantes al jugar con diferentes posibilidades para las condiciones puestas en el problema

Tabla 4-5 Variación del lado de la base y la altura de un prisma con volumen

Lado de la base	Altura	Volumen	Área Superficial
4	12.5	500	232
5	8	500	210

6	5.5555	500	205.32
7	4.081632653	500	212.24
8	3.125	500	228

Se espera que los estudiantes puedan plantear la ecuación $x^2y = 200$ para representar la condición dada para el volumen de la caja de base x y altura y, plantear la ecuación $2x^2 + 4xy = 400$ del área superficial. Con lo que se establece la expresión $2x^3 - 200x + 1600 = 0$.

En la segunda parte se aplica el método de Newton, pero antes es importante que es el estudiante tenga claro el significado del enunciado y como la alteración de una longitud requiere de la variación de otra para mantener constante el volumen y el área total superficial.

Los cálculos de la primera derivada no deben representar dificultad en el estudiante de este nivel.

En la tercera actividad la finalidad está en que el estudiante logre determinar que el criterio de la primera derivada le dará indicios sobre los valores que le proporcionarán indeterminación en el método de Newton.

4.6 Actividad 4. Aplicación del método de doblado de papel

El objetivo de esta parte de la propuesta es resolver un problema modelando una ecuación cúbica por medio de doblado de papel, fundamentado en los axiomas tratados en el capítulo anterior y en las construcciones mostradas en el álbum anexo.

4.6.1Objetivos

- Aplicar los axiomas de Humiaki Huzita para construir las rectas tangentes a una parábola por medio de doblado de papel
- Determinar la solución de una ecuación cúbica por medio de doblado de papel

4.6.2 Ejercicios Propuestos

I. Realiza las siguientes construcciones

1. En una hoja blanca marca tres puntos A,B y C no colineales
2. Determina los dobleces que unen los puntos dos a dos.

3. Construye el circuncentro del triángulo ABC aplicando el axioma 2 de Humiaki Huzita

II. Realiza las siguientes construcciones

1. En una hoja blanca marca tres puntos A,B y C no colineales
2. Determina los dobleces que unen los puntos dos a dos.
3. Construye las bisectrices del triángulo ABC aplicando el axioma 3 de Humiaki Huzita.

III. Realiza las siguientes construcciones

1. En una hoja cuadriculada o milimetrada traza una recta (d) y un marca un punto (f).
2. Realiza varios dobleces de tal manera que el punto f coincida con la recta d, marca en cada caso el punto de intersección (p) entre la línea perpendicular a d y que pasa por f y la línea marcada por el doblez.
3. Une los puntos de intersección p con una curva
4. Determina la ecuación de la curva trazada en el punto 3.
5. Argumenta de manera clara porque estos puntos son puntos de una parábola basados en su definición

IV. Aplica el procedimiento de doblado de papel en la construcción de tangentes

1. Dada la parábola $8x=y^2-1$ utiliza el procedimiento del punto anterior para determinar 5 rectas tangentes a esta.

V. Aplica el Axioma 5 de Humiaki Huzita

1. En una hoja de papel cuadriculado coloca dos rectas y dos puntos y determina un doblez en el que cada punto coincida con una recta.
2. Determina cuidadosamente si este doblez es único o se pueden determinar otro(s)
3. Establece la pendiente de esta recta.

VI. Aplica el Axioma 5 en la construcción de parábolas

1. En una hoja cuadriculada o milimetrada marca el foco y la directriz de la parábola $y = x^2 + 1$.
2. Realiza el mismo procedimiento del ejercicio anterior para la parábola $y^2 = 4x$. En la misma hoja del punto 1.
3. Determina el doblez que hacen coincidir los focos de las parábolas con sus directrices
4. Con ayuda de la cuadrícula determina la pendiente de la recta (doblez)
5. Escribe la ecuación cúbica cuya solución es la pendiente de dicha recta.

VII. Aplica el Axioma VI en la resolución de Ecuaciones Cúbicas

1. Dada la ecuación $x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$, utiliza los axiomas de papiroflexia para determinar la solución de la ecuación dada.
2. Resuelve el siguiente problema por medio de la aplicación de los axiomas de papiroflexia.

VIII. Resolución de problemas

Hasta dónde se debe sembrar un árbol de 10 m de alto de tal manera que la parte que quede al aire sea el cubo de la que quede en tierra.

4.6.3Indicaciones para el Docente

El trabajo preliminar puede orientarse hacia el análisis de los seis axiomas presentados, realizando una variedad de ejercicios que permitan su familiarización e incluso un adiestramiento en la realización de los dobleces. (ver anexo A)

En las tres primeras secciones de esta actividad se sugieren algunos ejercicios aplicados de los axiomas.

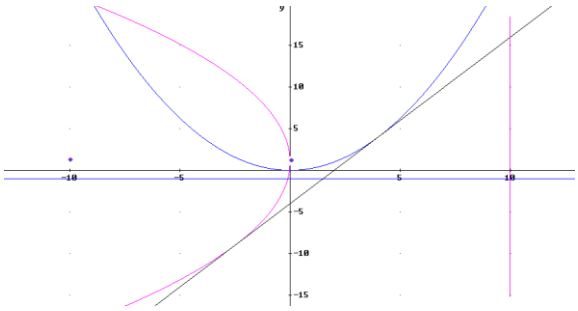
El análisis de aula sobre la argumentación en la solución de ecuaciones cúbicas basado en la tangente común a dos parábolas genera una ecuación cúbica[21]. Se pretende utilizar las conclusiones allí obtenidas para resolver este tipo de ecuaciones, mediante la construcción de dos parábolas que cumplan las condiciones requeridas. El objetivo de este es mostrar una forma alternativa de solucionar ecuaciones.

- En los ejercicios de la sexta parte de la actividad se plantean las parábolas $y = x^2 + 1$ y $y^2 = 4x$, se requiere determinar las rectas directrices y los focos de estas. Colocarlas en la plano cartesiano y doblar la hoja de tal manera que cada foco coincida con su directriz. La determinación de la pendiente de este doblez también se puede hacer de manera gráfica y para ello será útil utilizar papel cuadriculado que nos permita tomar mediciones un poco más exactas. El ejercicio permitirá al final plantear la ecuación cúbica por medio de la determinación de los coeficientes *a, b* y *c* que se obtienen a partir de los focos de las parábolas.
- Al finalizar se parte de una situación que plantea la ecuación cúbica $x^3 + x - 10 = 0$ para de allí obtiener los focos y las directrices de dos parábolas que permitirán determinar la recta tangente a ambas y a su vez la pendiente que solucionará la ecuación.

[21] Este trabajo requerirá de los estudiantes conocer el significado geométrico de la derivada de una función, como también los métodos de derivación y derivación implícita de funciones; estos temas son considerados ampliamente en el nivel undécimo que es precisamente el nivel al que va dirigida la propuesta.

Los dos puntos en el plano representados por p_1 y p_2 (que serán los focos de las parábolas) tendrán como coordenadas *(a, 1) = (0, 1) y (c, b)= (-10 ,1)* respectivamente, y las líneas l_1 y l_2 con ecuaciones *y +1= 0* y *x + c = x – 10 = 0* que corresponden a las directrices de las parábolas respectivamente.

Figura 4-1Determinación de la recta tangente a dos parábolas



Si se dobla el papel de manera que p_1 quede sobre l_1 y p_2 sobrel_2, la pendiente del doblez será una de las soluciones de la ecuación;

En la gráfica de arriba se han realizado las gráficas de las parábolas y el doblez que se obtiene para hacer coincidir cada foco con su directriz.

Aunque no es un método exacto, los estudiantes podrán llegar a encontrar una buena aproximación de la raíz real de la ecuación planteada y apoyándose en el teorema del factor podrán determinar las otras raíces de la ecuación planteada.

4.7 Actividad 5. Aplicación del Método de Cardano-Tartaglia

En esta tercera parte de la propuesta se pretende retomar el método denominado de Cardano-Tartaglia para solucionar ecuaciones cúbicas sin aplicar la fórmula demostrada pues no es el objetivo realizar remplazos en la fórmula demostrada en el capítulo 2, sino utilizando la conclusión que antecede la deducción de la fórmula.

4.7.1 Objetivo

- Reconocer los aspectos principales del desarrollo de la fórmula de Cardano-Tartaglia.
- Determinar el punto o puntos de intersección de dos curvas en el plano
- Aplicar las conclusiones obtenidas en el método de Cardano-Tartaglia para encontrar la solución de ecuaciones cúbicas
- Reducir ecuaciones cúbicas completas por medio de simplificaciones.

4.7.2 Ejercicios Propuestos

Primera Parte

1. Consulta en textos de álgebra superior o en internet acerca de Tartaglia y Cardano.
2. Cuáles fueron los aportes de cada uno de ellos a la matemática.
3. En qué aspectos es importante la fórmula de Cardano-Tartaglia en la teoría de ecuaciones?
4. Cuáles fueron los aspectos que caracterizaron el Renacimiento Italiano y como estos se ven reflejados en esta historia?

Segunda Parte

Situación problémica.

El tele-mercadeo utiliza diferentes servicios para vender sus productos, los pedidos por vía telefónica es uno de ellos. Su comportamiento está sujeto a diferentes aspectos como el impacto de la publicidad, la rotación de los productos, la eficacia del producto que se ofrece etc.

En una empresa de tele-mercadeo se ha determinado que el comportamiento de las ventas se presenta de dos formas:

En los primeros días de lanzamiento de la campaña publicitaria se generan unos gastos fijos de 6 mil dólares y las ganancias netas representan el cuadrado del tiempo transcurrido. Algunos días después las ganancias comienzan a descender siguiendo la trayectoria $3\left(\frac{3}{t}\right)$*. Con el fin de garantizar la productividad de la empresa se requiere determinar el momento en el que se debe lanzar otro producto. A partir de qué momento es necesaria esta acción*

5. Plantea la ecuación que representa el comportamiento de las ganancias en los primeros t días del lanzamiento de la campaña publicitaria.
6. Determina los interceptos con los ejes para esta primera parte y escribe su significado en el contexto del problema.
7. Plantea la ecuación que representa el descenso de las rentabilidad y describe su comportamiento.
8. Plantea una expresión que permita determinar el instante en el que se debe impulsar otro producto y escríbela como una ecuación polinómica
9. OPCIÓN 1: Teniendo en cuenta que para el método de Cardano-Tartaglia, determinar la solución de una ecuación de la forma $\boldsymbol{x^3 = px + q}$ requiere encontrar dos números cuya suma de cubos sea q y cuyo tercio del producto sea p, determina los números que satisfacen estas condiciones a partir de la descomposición factorial de p para la ecuación planteada en el punto anterior.
10. OPCIÓN 2: Utiliza la fórmula demostrada para ecuaciones cúbicas de Cardano-Tartaglia para verificar la solución encontrada en el punto 5. Si es necesario utiliza una calculadora para simplificar las expresiones.

11. Contesta las siguientes preguntas
a. En qué aspectos es mejor aplicar el método de la OPCIÓN 1 que el de la OPCIÓN 2?
b. En qué aspectos sería mejor aplicar el método de la OPCIÓN 2 frente a la OPCIÓN 1?

Tercera Parte

Para resolver las siguientes ecuaciones determina el binomio que permite reducir la ecuación a una de la forma $x^3+px+q=0$ y soluciónala por medio del método de Cardano-Tartaglia.

a. Dada la ecuación $x^3+48x+520=0$, cuál será la ecuación de la cual se ha eliminado el término cuadrático?
b. Modifica la siguiente ecuación cúbica de tal manera que se anule el término cuadrático. $x^3-6x^2+2x-3=0$
c. Si la ecuación cúbica reducida es $x^3+26x+2=0$ cuál sería la ecuación completa donde aparecería el término cuadrática

4.7.3 Indicaciones para el Docente

En la primera parte de la actividad se plantean algunas preguntas en las que se pretende sumergir al estudiante en el contexto de la época. En la historia que rodea la fórmula dada por Cardano-Tartaglia para la solución de la ecuación cúbica y en la reflexión de la importancia de esta en la teoría de ecuaciones. Los componentes éticos que rodearon este desarrollo vinculados a los aspectos que caracterizaron el Renacimiento en Italia.

Para la segunda parte es necesario presentar la demostración de la fórmula, para ello se puede realizar la completación del cubo con figuras en tres dimensiones que le permita al estudiante a partir de lo concreto darle significado a las conclusiones que de allí se obtienen, como se presenta en el capítulo 2 del presente trabajo.

Retomando los aspectos principales de la demostración se deberá tener en cuenta que para solucionar una ecuación de la forma $\boldsymbol{x^3 = px + q}$ se consideran dos cantidades y, z tales que su suma sea el valor de x, es decir $\boldsymbol{x = y + z}$ pero estas cantidades deben satisfacer dos condiciones:

$$p = 3yz \qquad \text{y} \qquad q = y^3 + z^3$$

Este desarrollo aplicado a la situación particular permite la comprensión del propósito de la solución de ecuaciones polinómicas y más específicamente del planteamiento de ecuaciones cúbicas en contextos reales.

En esta situación el estudiante deberá plantear dos funciones a saber:

$$f(t) = t^2 - 6 \quad g(t) = 3\left(\frac{3}{t}\right)$$

Para solucionar la pregunta planteada para la situación es necesario determinar el o los puntos en los cuales las dos curvas se cruzan para lo que se requerirá plantear la igualdad: $t^2 - 6 = 3\left(\frac{3}{t}\right)$ que de manera equivalente es $t^3 - 6t - 9 = 0$

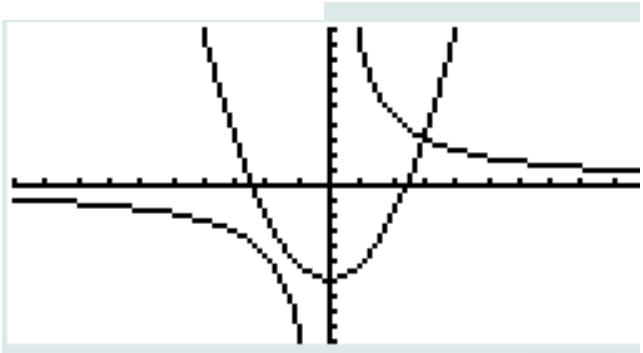
Si nos referimos a la solución de la ecuación por el método de Cardano-Tartaglia, tendremos que preguntarnos por dos números u , w cuyo triple producto sea 6 y la suma de sus cubos sea 9.

Para ello resultaría más conveniente descomponer 6/3 en dos factores y a partir de allí determinar cuáles pueden satisfacer la segunda condición.

Al tener 2= 2x1 , vemos que la suma de sus cubos es 9, por lo que la solución de esta ecuación es 2+1=3.

En la siguiente gráfica se muestra la representación en el plano de las dos curvas y el punto en donde ellas se cortan.

Figura 4-2 Parábola e Hipérbola en el mismo plano



Es muy importante contextualizar las respuestas de cada una de las preguntas, dándole el significado correspondiente a los interceptos con los ejes de la parábola y a los resultados en la situación misma y verificando su solución.

Como el estudiante ya estará familiarizado con el teorema fundamental del Álgebra, se le deberá cuestionar sobre las otras raíces que tiene la ecuación planteada y sobre la forma en que puede determinarlas[22].

En la tercera parte se presentan ecuaciones completas en las que se debe eliminar el término cuadrático. Si el profesor realiza algunas reducciones mediante el planteamiento de la

[22] el método de Ruffini, que permite la factorización del polinomio $(t^3 - 6t - 9)$ como $t^3 - 6t - 9 = (t-3)(t^2 - 3t + 3) =$

sustitución de la variable por y-n, podría inducir en el estudiante un acercamiento a la conclusión que permite la reducción de cualquier ecuación cuadrática.

Dada la ecuación $x^3-6x^2+8x-16=0$, se realizará la sustitución de x por $z-n$ y se deducirá que n debe tener un valor de 2 para anular el término cuadrático.

En la ecuación $2x^3+24x^2-4x+2=0$ se deberá determinar la ecuación normada que permita reducir el coeficiente de x^3 a 1. Posteriormente se establecerá que el binomio $z-4$ reducirá la ecuación a una equivalente sin término cuadrático.

4.8 Actividad 6: Ejercicios y Problemas adicionales

4.8.1 Objetivo

Determinar la solución de ecuaciones cúbicas por diversos métodos

4.8.2 Ejercicios Propuestos

1. $2x^3 + 3x^2 - 12x = 0$
2. $x^3 + x^2 - 12x = -2$
3. $x^3 + 6x^2 - 12x - 112 = 0$
4. $x^2 - x^3 = 1$
5. $2(x-2)^3 = 0$
6. Determinar el (los) punto(s) en los cuales las funciones $f(x) = x^2 + 30$ y $g(x) = -\left(\frac{12}{x} + 35\right)$ se interceptan en el plano.
7. Teniendo en cuenta la proporción establecida por Archytas en donde resolver una ecuación de la forma $x^3 + k = 0$ requiere establecer el punto de intersección de dos parábolas. Cuáles son las parábolas que se interceptan para resolver la ecuación $x^3 - 8 = 0$.
8. En la Meseta Kaibab, en Arizona, las autoridades de la vida silvestre mantuvieron records del nacimiento de venados, sobre un periodo de 25 años. Durante un tiempo la población creció, pero, los limitados recursos alimenticios y otros factores ambientales, afectaron los rebaños y ocasionaron un descenso en el número de nacimientos. Se modeló una función con estos datos, donde x representa el tiempo en años desde el comienzo de la recopilación de datos y la cantidad de nacimientos de venados está dado por $d(x) = x^3 + 4.4x^2 - 31.4x - 12.8 = 0$
   a. Determinar los tiempos en los cuales la población no presentó ningún nacimiento.
   b. Teniendo en cuenta los resultados anteriores determina los periodos en los que la población estuvo aumentando?

c. Un rectángulo es dibujado dentro de la parábola y=10-x^2 de manera que dos de las esquinas están sobre el eje x y las dos de arriba están en la curva. Determinar las coordenadas de los vértices del rectángulo de tal manera que el área sea de 2cm^2. Realice una gráfica que ilustre el significado de la respuesta

9. Los Gráficos de las funciones $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$ y $g(x) = x^2 + 2$, se cortan en el punto de abscisa -1. Calcular todas las coordenadas en que ambas funciones se interceptan.
10. Un rectángulo es dibujado dentro de la parábola y=10-x^2 de manera que dos de las esquinas están sobre el eje x y las dos de arriba están en la curva. Determinar las coordenadas de los vértices del rectángulo de tal manera que el área sea de 2cm^2. Realice una gráfica que ilustre el significado de la respuesta

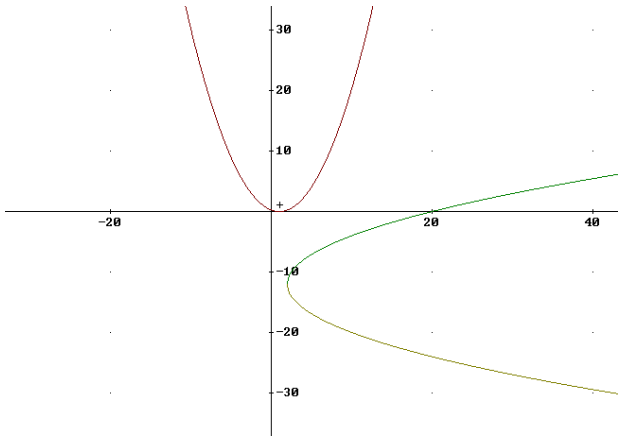
4.8.3Indicaciones para el Docente

Se presentan ocho ecuaciones cúbicas en las que se pide determinar al menos una raíz real por alguno de los métodos trabajados. De esta forma

Para la ecuación 1, cuya factorización es simple, una de sus raíces es *x=0* y ello permite determinar las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2+3x-12$.

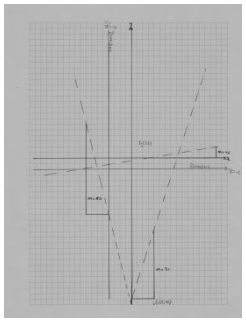
Para la ecuación 2: $x^3 + x^2 - 12x = -2$, se descarta el método de Cardano dado que tendríamos que eliminar el término cuadrático remplazando la variable por (y-$\frac{1}{3}$) resultando en la ecuación $y^3 - \frac{35}{3}x - \frac{56}{27} = 0$ y determinar dos números cuyo producto sea $-\frac{35}{9}$ y cuya suma de cubos sea $-\frac{56}{27}$, por lo que se tendrían necesariamente soluciones no enteras. Si consideramos el método de doblado de papel se podría considerar dos parábolas con focos (1,1) y (2,-12) y directrices x=-2 y=-1 respectivamente, para tratar de determinar las rectas que hacen coincidir los puntos con las rectas. A continuación se muestran las parábolas que se generan.

Figura 4-3 Resolución gráfica de ecuación cúbica



Resolver la ecuación planteada requerirá determinar la pendiente de la recta tangente a las dos curvas. En la ilustración de abajo se muestra la imagen escaneada de los dobleces que se generan. Encontramos que las tres pendientes son 3-1, 0.16 y -4, estas son calculadas de manera muy sencilla en el papel cuadriculado que sirve de respaldo para la construcción que se hace en el anexo..

Figura 4-4 Resolución de ecuación cúbica por doblado de papel



Sin embargo las pendientes de las rectas se pueden encontrar mediante el ángulo que forma cada u a sobre el eje x positivo.

- En la ecuación 3, se da una ecuación cúbica completa en la que al sustituir[23] *x* por *z-2* se reduce a la ecuación $z^3-24z-72=0$, La solución se puede determinar buscando dos números cuya triple producto sea 24 y la suma de sus cubos sea 72. Estos números son 2 y 4, por lo que la solución es 6 según lo planteado para el método Cardano-Tartaglia. Por un lado es importante enfatizar con los estudiantes que el cambio de variable transforma la ecuación y que el resultado por lo tanto de la ecuación $x^3 + 6x^2 - 12x - 112 = 0$ es 4 y por otro que este cambio de variable es un proceso sencillo que puede ser abordado sin recurrir a fórmulas sino más bien a razonamientos algebraicos y que el proceso de generalización puede llegar una vez mostrada la necesidad.
- La ecuación 4, es una oportunidad para razonar frente a la practicidad de la aplicación de doblado de papel por ejemplo y como este no presenta una solución exacta por lo que aplicando aproximaciones de Newton sería el método más conveniente. En la siguiente tabla se muestra la deducción de las aproximaciones

[23] Consultar el corolario 4 del capítulo 1

comenzando por $x_n = -1$. Es importante hacer ver hacia donde corre la aproximación si comenzáramos por 1 y cuanto más se demora el proceso si lo hiciéramos por ½ pero también la utilidad del método cuando las raíces no son exactas. El cálculo de los otros valores que además son números complejos puede proceder mediante el teorema del factor.

Tabla 4-6: Aproximaciones de Newton para determinar una raíz de la ecuación cúbica.

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
-1	1	-5	-0.8
-0.8	0.152	-3.52	-0.75681818
-0.75681818	0.00625936	-3.23195764	-0.75488147
-0.75488147	1.226E-05	-3.21930107	-0.75487767
-0.75487767	4.7344E-11	-3.21927621	-0.75487767
-0.75487767	0	-3.21927621	-0.75487767

A continuación se plantean cuatro situaciones que requieren determinar la ecuación cúbica pertinente y sus raíces.

Para el problema 7 se plantea una situación en la que es necesario insertar medios geométricos entre dos factores de 8 que permita determinar las parábolas que al intersectarse lo hacen en el punto de coordenadas (2,4). La solución del problema se puede orientar a partir de la expresión $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{8}$ haciendo uso de la conclusión dada por Archytas en la duplicación del cubo.

Para el problema 10 se pide encontrar las coordenadas de un rectángulo que inscrito en la parábola $y=10-x^2$ y el eje x tenga un área fija. La ecuación cúbica que se determina: $2a(10-a^2)=1$ tiene tres raíces reales que a su vez determinan tres rectángulos posibles inscritos en la parábola dada. La ecuación cúbica puede solucionarse tanto por el método de doblado de papel, aproximaciones de Newton o aplicando la fórmula de Cardano y le da a la solución de la ecuación cúbica la posibilidad de pensar en esta como un medio para resolver problemas en contexto.

Conclusiones y Recomendaciones

El currículo que presenta el MEN tiene un propósito claro, un fundamento definido y unas intencionalidades de acuerdo a la proyección de ciudadano que deseamos formar; sin embargo y a pesar de ser unos lineamientos generales, recaen una y otra vez, en el planteamiento de programas iguales, de temáticas iguales y de desarrollos iguales. Muchas veces al intentar romper esos esquemas surgen cuestionamientos como ¿y eso a los estudiantes para qué les sirve? pensando, de pronto, que aprender matemáticas es acumular conocimiento útil, que debe ser aplicado. Esta propuesta sugiere un tema que no se trata en la educación media pero que permite acercarse desde muchos ángulos a la formación del pensamiento variacional de los estudiantes desde un tópico diferente a los desarrollos clásicos y al margen de la utilidad en sí misma de los procedimientos, que no son para nada despreciables.

El ejercicio docente debe atreverse a conocer el surgimiento de los conceptos y procesos matemáticos, si bien todo comienzo es difícil y representa un reto, también presenta muchas posibilidades de crecer en el mismo y de ver este ejercicio de manera dinámica de tal forma que los estudiantes evidencien una matemática viva.

El conocimiento matemático, al ser considerado desde su fundamento histórico adquiere una naturaleza diferente, dinámica, contextualizada y rica en oportunidades de razonamiento que posibilitan una mejor y mayor comprensión de los conceptos que subyacen y que permiten el desarrollo algorítmico que además son el resultado de la intervención del ser humano en su intención de resolver problemas que no necesariamente son del mundo físico sino de la matemática en si misma pero que de todas formas representan una situación por resolver.

De manera particular, alrededor de la solución de la ecuación cúbica se tienen varias alternativas, que si se orientan adecuadamente en cuanto a sus dificultades bien sea de operatividad, de profundidad en conocimientos básicos necesarios o en cuanto a su exactitud ofrecen caminos alternativos que enriquecen las habilidades de razonamiento y la formación del pensamiento variacional.

En esta propuesta se han mencionado una buena cantidad de situaciones que permiten el planteamiento de ecuaciones cúbicas, ejercicios y aplicaciones alrededor de las formas de solución que pueden ser tratadas con nuestros estudiantes no como el compendio de fórmulas muchas veces dispendiosas (como el caso de la fórmula demostrada de Cardano-Tartaglia) sino como estrategias que surgen de los procesos mismos de su génesis. Algunas formas alternativas como la papiroflexia presentan una excusa altamente rica en posibilidades, en formas diferentes de pensar, hacer y ejercer matemáticamente.

Algunas oportunidades de ampliación de esta propuesta se dan alrededor del uso del computador como potenciador de la construcción de aplicaciones que muestren de manera interactiva y dinámica la representación de la ideas alrededor de las cuales surgieron las soluciones, es el caso del uso de programas como *Flash*© o *Corel Draw*© que permiten una

interfaz mejor con el usuario al presentar herramientas de generación de gráficas y de movimiento.

De la misma forma en la bibliografía presentada se encuentran algunos links de páginas en las que se muestran formas alternativas de solucionar problemas como la Duplicación del Cubo o la Trisección del Ángulo a través del doblado de papel. Al revisar estas construcciones se evidencias nuevas oportunidades de hacer matemáticas y presentar caminos alternativos en la solución de problemas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Anexo A: Construcciones mediante la aplicación de Axiomas de Papiroflexia

Martha Liliana Mogollón Becerra

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

Anexo: Construcciones mediante la aplicación de Axiomas de Papiroflexia

Martha Liliana Mogollón Becerra

Directora:

Doctora Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

Introducción al Anexo 65

1. Primera Parte: Ilustración de los axiomas I, II, III, IV de Humiaki Huzita 67

1.1 Axioma I 67

1.2 Axioma II 69

1.3 Axioma III 69

1.4 Axioma IV 71

2. Segunda Parte: Aplicación de los axiomas I, II, III y IV en la construcción de líneas y puntos notables en triángulos, líneas paralelas y triángulos equiláteros. 73

2.1 Construcción de la Circuncentro de un triángulo 75

2.2 Construcción del Ortocentro de un triángulo. 75

2.3 Construcción del Incentro de un triángulo. 77

2.4 Construcción de la recta paralela a una recta dada por un punto dado. 79

2.5 Construcción de un triángulo equilátero 81

3. Tercera Parte: Ilustración del axioma V de Humiaki Huzita 85

3.1 Caso I 85

3.2 Caso 2 85

3.3 Caso 3 87

3.4 Construcción de parábolas por medio de la aplicación de los axiomas I a V. 89

4. Cuarta Parte: Ilustración del axioma VI de Humiaki Huzita 91

4.1 Caso I 93

4.1 Caso 2 95

4.1 Caso 3 95

4.4 Axioma seis como solución de la ecuación cúbica 97

Introducción al Anexo

Este Anexo se presenta con el propósito de ilustrar los axiomas de Papiroflexia del japonés Humiaki Huzita, quien los estableció y a partir del análisis de sus alcances logró resolver ecuaciones cúbicas por medio del doblado de papel.

Se presentan los seis axiomas, ilustrando en algunos casos aplicaciones que se pueden llevar al aula de clase tanto para el trabajo de Geometría Euclidiana como de Geometría Analítica y por supuesto para presentar un método alternativo de resolución de ecuaciones cúbicas que es el objetivo fundamental del trabajo de grado del cuál este es anexo.

Para permitir visualizar mejor los dobleces de cada construcción se presenta el planteamiento de cada Axioma o Problema, el trazado de líneas continuas y punteadas en diferentes colores que permiten visualizar el proceso y la construcción misma, adicionalmente se presentan las construcciones con algunas indicaciones para realizarlas y los dobleces en hojas de papel mantequilla que permiten al lector seguir los procedimientos, manipular la construcción y comprobar la aplicación de los axiomas o las propiedades a que haya lugar en cada caso[24].

[24] Para revisar las construcciones realizadas es necesaria la versión impresa de este trabajo ya que en la versión digital no aparecen las figuras construidas dado que éstas se hicieron a mano.

1. Primera Parte: Ilustración de los axiomas I, II, III, IV de Humiaki Huzita

1.1 Axioma I

Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único doblez que pasa por p_1 y p_2; esto equivale a trazar una línea recta por dos puntos dados (Postulado 1 de Euclides: Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta).

El proceso de construcción requiere doblar el papel de tal manera que el borde una el punto $\boldsymbol{p_1}$ con el punto $\boldsymbol{p_2}$ y marcar el doblez.

Consultar versión impresa Anexo A

1.2 Axioma II

Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un único doblez que pone a p_1 sobre p_2; esto equivale a trazar la mediatriz del segmento que une a p_1 y p_2 (Libro I Proposición 10 de Euclides: Dividir en dos partes iguales un segmento dado y Proposición 11: Trazar una recta perpendicular a un segmento dado desde un punto del mismo segmento.).

El proceso de construcción requiere colocar el punto $\boldsymbol{p_1}$ sobre el punto $\boldsymbol{p_2}$ y marcar el doblez.

Consultar versión impresa Anexo A

1.3 Axioma III

Dadas dos líneas l_1 y l_2, existe un único doblez que pone a l_1 sobre l_2; esto equivale a bisecar el ángulo que se forma entre las dos líneas. (Libro I Proposición 9: Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado).

El proceso requiere dadas dos rectas previamente construidas (cuya existencia está garantizada en el axioma 1), hacerlas coincidir colocando una sobre otra y marcar el doblez.

Consultar versión impresa Anexo A

1.4 Axioma IV

Dadas una línea l_1 y un punto p_1, existe un único doblez perpendicular a l_1 y que pase por p_1; esto equivale a trazar una línea perpendicular a una línea que pase por un punto dado. (Libro I Definición 10 de Euclides: Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es *recto*, y la recta que está sobre la otra se llama *perpendicular* a la otra recta)

Esta construcción requiere doblar la recta l_1 sobre sí misma de tal manera que el borde coincida con el punto p_1 y marcar el doblez. La construcción de la paralela a una línea dada por un punto requeriría la perpendicular de la perpendicular.

Consultar versión impresa Anexo A

2. Segunda Parte: Aplicación de los axiomas I, II, III y IV en la construcción de líneas y puntos notables en triángulos, líneas paralelas y triángulos equiláteros.

2.1 Construcción de la Circuncentro de un triángulo

El circuncentro del triángulo es el punto en el cual coinciden las tres mediatrices de los lados y es el centro de la circunferencia circunscrita. No es objetivo de este trabajo demostrar que dicho punto existe sino mostrar una forma de determinarlo.

Para su construcción, dado un triángulo ABC se aplica de manera sucesiva el axioma II que permite construir la mediatriz de un segmento para cada uno de los lados del triángulo.

En el aula de clase se puede ampliar esta construcción ampliándola a diferentes clases de triángulos y a partir de ellos permitir que los estudiantes respondan a preguntas como por ejemplo:

- ¿Por qué la intersección de las mediatrices determina el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo?
- ¿En qué casos el circuncentro es interior al triángulo o Exterior al triangulo o queda sobre el mismo?

Consultar versión impresa Anexo A

2.2 Construcción del Ortocentro de un triángulo.

El Ortocentro de un triángulo es el punto en el cuál coinciden las alturas del mismo.

Para la determinación de este punto en un triángulo ABC, se deben hacer las construcciones de las líneas perpendiculares de cada lado que pasa por el vértice opuesto, aplicando el axioma IV de Humiaki Huzita.

Aplicando propiedades geométricas euclidianas y las figuras construidas podríamos plantear en el aula de clase las siguientes preguntas:

¿En que tipo de triángulos el Ortocentro está en el interior, exterior o sobre el triángulo?

Consultar versión impresa Anexo A

2.3 Construcción del Incentro de un triángulo.

El Incentro es el punto en el cual se intersectan las tres bisectrices del triángulo,

Para su construcción se requiere dado un triángulo ABC, marcar los dobleces de hacer coincidir los lados del triángulo dos a dos aplicando el axioma III de Humiaki Huzita.

Algunas preguntas que pueden ser resueltas mediante la construcción del incentro son:
¿Cuál es la razón por la cual en la intersección de las tres bisectrices se encuentra el centro de la circunferencia inscrita en la circunferencia?
Describe que propiedad en común tienen todos los puntos que se encuentran sobre la bisectriz de un ángulo.

Consultar versión impresa Anexo A

2.4 Construcción de la recta paralela a una recta dada por un punto dado.

Para realizar esta construcción, dados las recta l_1 y el punto $p_1$doblamos la hoja de tal manera que la recta coincida con ella misma deslizando el papel hasta que quede el punto p_1 en el borde y se marca el doblez (perpendicular de l1 que pasa por p_1). Doblando la hoja de tal manera que el doblez realizado coincida con el mismo y deslizando el papel hasta que el punto p_1 quede en el nuevo borde de la hoja para hacer el nuevo doblez que es la paralela de l_1 y pasa por p_1.

Consultar versión impresa Anexo A

2.5 Construcción de un triángulo equilátero

Para la construcción del triángulo equilátero, sobre una hoja rectangular ABCD y se construye la paralela media de los lados más largos de la hoja, se lleva el vértice A hasta que coincida con la paralela media de tal forma que el doblez pase por el vértice B adyacente a A, determinando el punto O. Se prolonga el lado AO haciendo el doblez completo sobre AO, el triángulo OBF es equilátero.

Observando la construcción y marcando el punto E se puede concluir que el triángulo es equilátero a través de la solución a las siguientes preguntas:
¿Qué ángulo forma BE con OF ? ¿Por qué?. ¿Qué es BE en el triángulo OBF.
¿Qué es E en el segmento OF ? ¿Por qué?.
¿Qué es también BE en el triángulo OBF?
¿Qué relación existe entre los triángulos FBE y EBO?

Consultar versión impresa Anexo A

3. Tercera Parte: Ilustración del axioma V de Humiaki Huzita

Dados dos puntos p_1 y p_2 y una línea l_1, existe un doblez que pone a p_1 sobre l_1 y que pasa por p_2; esto equivale a encontrar los puntos de intersección entre una línea l_1, y un círculo (con centro en p_2 y radio p_1p_2), y por lo tanto pueden haber 0,1 o 2 posibles soluciones (dobleces). Este axioma permitiría encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática.

3.1 Caso I

Corresponde al caso en el que no existe un doblez que pase por el punto p_2 y coloque al punto p_1 sobre la recta l_1.

Si se observa la construcción planteada, dadas las distancias entre $p1$ y $p2$. Al observar la construcción vemos que al deslizar el punto p_1 sobre la recta l_1 no se puede generar el doblez que pase por el punto p_2, es decir girando el punto p_1 alrededor de p_2 este no alcanza a tocar la recta l_1 ya que es mayor la distancia entre el segmento p_1p_2 que la del segmento entre el punto.

Consultar versión impresa Anexo A

3.2 Caso 2

Corresponde al caso en el que hay un único doblez que coloca el punto p_1 sobre la recta y pasa por el punto p_2 y es una circunferencia de radio p_1p_2 que es tangente a la recta l_1.

Las distancias entre los segmentos p_1p_2 y el punto p_2 y la intersección entre la recta l_1y la perpendicular que pasa por p_2 son iguales, por lo que al deslizar el punto $p_1$sobre la recta hasta que el doblez pase por p_2 sólo se logrará una sola solución.

Consultar versión impresa Anexo A

3.3 Caso 3

Corresponde al caso en el que existen dos dobleces que colocan el punto p_1 sobre la recta y pasa por el punto p_2 y es una circunferencia de radio p_1p_2 en done la recta l_1 es secante.

La distancia entre los segmentos p_1p_2 es mayor a la distancia entre el punto p_2 y la intersección entre la recta l_1y la perpendicular que pasa por p_2, por lo que al deslizar el punto $p_1$sobre la recta hasta que el doblez pase por p_2 se logran obtener dos dobleces diferentes.

Consultar versión impresa Anexo A

3.4 Construcción de parábolas por medio de la aplicación de los axiomas I a V.

Como sabemos, una parábola está dada por los puntos en el plano cartesiano que equidistan de una recta o directriz y un punto llamado foco.

Para construir la parábola a partir de los axiomas anteriores, trazamos una recta que será la directriz y un punto o foco. Hacemos coincidir el punto con la recta, marcamos el doblez, construimos sobre el papel doblado la perpendicular a la directriz que pase por el foco. La intersección entre esta perpendicular y el doblez será un punto de la parábola, puesto que la distancia entre este punto de la parábola es igual tanto a la directriz como al foco. Este proceso se repite para generar varios puntos de la parábola.

Consultar versión impresa Anexo A

4. Cuarta Parte: Ilustración del axioma VI de Humiaki Huzita

Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos líneas l_1 y l_2, existe un doblez que pone a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2; esto equivale a encontrar una línea (el doblez) que sea tangente simultáneamente a dos parábolas, una con foco en p_1 y directriz l_1, y otra con foco en p_2 y directriz en l_2. Este último axioma también equivale a encontrar la o las solución(es) de una ecuación cúbica. Para unos puntos y unas líneas dadas puede existir 1, 2 o 3 dobleces que cumplen las condiciones del axioma.
Como se demostró en el capítulo 4, la aplicación del axioma VI, permite la solución de la ecuación cúbica por lo que siempre existe al menos un doblez ya que la ecuación cúbica siempre tiene al menos una solución real.

4.1 Caso I

Corresponde al caso en el que existe un doblez que coloque a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2. La construcción que se muestra es la de dos rectas que se intersectan y dos puntos tales que $p_1 = p_2$, de tal manera que el punto quede colocado sobre la intersección de las rectas. Sería pertinente trabajar sobre la generalidad de las condiciones de dos parábolas que sólo tengan una recta tangente en común.

Consultar versión impresa Anexo A

4.1 Caso 2

Corresponde al caso en el que existen dos dobleces que colocan a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2;

Para esta construcción existen varias disposiciones entre las rectas y los puntos. Una actividad de aula puede consistir en encontrar diferentes disposiciones para ellas a través del trabajo con parábolas dispuestas a su vez de diferente manera en el plano y que tengan dos rectas tangentes comunes.

Consultar versión impresa Anexo A

4.1 Caso 3

Corresponde al caso en el que existen tres dobleces que colocan a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2.

Para esta construcción se presentan dos puntos a lado y lado de una de las rectas y el trabajo también presenta múltiples posibilidades de indagación.

Consultar versión impresa Anexo A

4.4 Axioma seis como solución de la ecuación cúbica

Si se tiene una ecuación cúbica de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, en un plano cartesiano se marcan los punto p_1 y p_2 con coordenadas *(a,1) y (c,b)* respectivamente, y las líneas l_1 y l_2 con ecuaciones *y+1=0* y *x+c=0*. Si se dobla el papel de manera que p_1 quede sobre l_1 y p_2 sobrel_2, la pendiente del doblez será una de las soluciones de la ecuación. En el trabajo sobre ecuaciones cúbicas se muestra la explicación de cómo funciona el método.

Aquí se presenta la construcción de la solución para el ejercicio propuesto en la actividad de papiroflexia en el que se resuelve la ecuación $x^3+x^2-12x+2=0$ cuyas soluciones son bastante exactas con valores de -4, 3.1 y 0.16.

Para esta construcción se adjunta tanto el doblez en el papel mantequilla como una hoja con cuadricula de medio centímetro para permitir encontrar las pendientes de las rectas, es decir las pendientes de los doblces que se generan al hacer coincidir los puntos con las líneas, aplicando el Axioma 6.

Consultar versión impresa Anexo A

Bibliografía

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática.* Alianza.

Fauvel, J. y. (1992). *The history of Mathematics.* Londres: Macmillan Press.

García Merayo, F. (1995). *Lecciones Prácticas de Cálculo Numérico.* Madrid.

Hall H.S., K. B. (1977). *Ágebra superior.* Ciudad De México: Hispano-Americana.

Henríquez, N. G. (Marzo de 2008). *Puntos-constructibles-y-origami*. Recuperado el 30 de Abril de 2011, de novalecortar.blogspot.com: http://novalecortar.blogspot.com/2008/11/puntos-constructibles-y-origami.html

J.M., C. (1985). *Historia de las matemáticas.* España: Siglo XXI.

Livio, M. (2008). *La ecuación jamás resulta. .* Editorial Ariel.

Lluberes, K. P. (1984). *Álgebra Superior.* Santo Domingo: Editorial Taller.

Martín Casalderrey, F. (2009). *Cardano y Tartaglia: la aventura de la ecuación cúbica.* Nivola Libros y Ediciones.

Martín Llorente, L. .. (s.f.).

Martínez, C. E. (2011). *Las matemáticas en los papiros egipcios*. Recuperado el 27 de Agosto de 2011, de Astroset: http://www.astroseti.org/articulo/3659/

Meavilla Seguí, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales.* España: Prensas Universitarias de Zaragosa.

Morris, K. (1994). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

Nacional, M. d. (2006). *Estándares básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: Un reto escolar.* Bogotá.

Nicolás, G. H. (2011). *No vale cortar*. Recuperado el 1 de 11 de 2011, de 2008: http://www.novalecortar.com

Ochoviet, C. (2009). *De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas al Álgebra Abstracta: Un paseo a Través de la Historia*. Recuperado el 4 de 10 de 2011, de Instituto de Profesores "Artigas": http://www.http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV8_n1_2007/De%20la%20Resolucion_de_Ecuaciones/De%20la%20Resolucion_de_Ecuaciones.pdf

Reyes Guerrero, A. (2002). *Álgebra Superior.* Ciudad de México: Thomson.

Thomas, H. (1628). *La hisstoria de las matemáticas Griegas.* Oxford.

Thomas, H. (2006). *PROJECT ORIGAMI:activities for exporing mthematics.*