

Funciones Exponencialmente Convexas

por

Juan Humberto Arango Escalante

Tesis presentada como requisito parcial para
optar al título de Magister en Matemáticas

Director
Diego Mejía Duque

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Posgrado en Matemáticas
Mayo, 1995

0297
1995

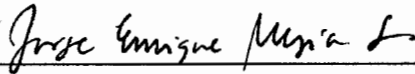
FUNCIONES EXPONENCIALMENTE CONVEXAS

Juan Humberto Arango Escalante

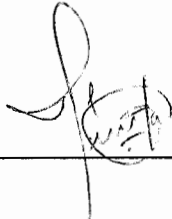
Aprobado por:



Diego Mejía Duque
Director



Jorge Mejía Laverde
Jurado



Fernando Puerta Ortiz
Jurado

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

34784

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
contrato No. RC-146-93, código 1118-05-303-92.

Contenido

Introducción	iv
1 PRELIMINARES	1
Familias normales en $H(\mathbb{D})$.	1
La clase S y el radio de Köbe.	2
Las clases C , S* y P .	3
Subordinación.	5
El Teorema de Convergencia de Carathéodory.	8
La métrica hiperbólica.	9
2 DEFINICIONES BÁSICAS Y CARACTERIZACIONES	10
3 CASOS PARTICULARES Y EJEMPLOS	21
Casos particulares.	23
Ejemplos.	26
4 PROPIEDADES GENERALES	31
5 EL RADIO DE KÖBE DE $C \cap EC(\alpha)$.	35
Cota inferior.	35
Cota superior.	38
Funciones extremales.	40

6 RADIO DE KÖBE DE $EC(\alpha)$.	43
Cotas superior e inferior.	43
Observaciones finales.	54

Introducción

En el presente trabajo se comienza el estudio de las *funciones exponencialmente convexas*, desde el punto de vista del análisis complejo.

El estudio surgió al intentar ampliar la clase $\mathcal{C}(k)$ de las funciones k -convexas, para $0 < k \leq 1$, introducida por Mejía y Minda en [MM]. La clase $\mathcal{C}(k)$ ha sido estudiada también por Wirths [W], y está estrechamente relacionada con la clase de las funciones convexas de tipo acotado, introducida por Goodman en [G2].

La caracterización analítica de la clase $\mathcal{C}(k)$ es la siguiente:

Una función f analítica en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y normalizada por $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ es k -convexa si y sólo si

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > k |zf'(z)| \text{ para cada } z \in \mathbb{D}.$$

Esta condición equivale a que

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \right) > 0$$

para cada $z \in \mathbb{D}$ y cada $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = k$.

La clase $\mathcal{C}(k)$ se amplía, pues, definiendo una nueva clase, que notaremos por $EC(\alpha)$, por medio de esta última desigualdad, pero para un valor fijo de α .

Un estudio más concienzudo de esta condición analítica nos ha llevado a una condición equivalente de tipo geométrico. Más explícitamente, una función f de la clase \mathcal{S} (analítica y univalente en \mathbb{D} , y normalizada como arriba) pertenece a $EC(\alpha)$ si y sólo si la función $\exp \circ (\alpha f)$ es convexa; es decir, su rango $e^{\alpha f}[\mathbb{D}]$ es un subconjunto convexo del plano complejo. Esto explica por qué llamar a la función αf *exponencialmente convexa*.

En el estudio de la clase $EC(\alpha)$ usamos técnicas provenientes de la Teoría Geométrica de Funciones y de la Geometría Diferencial; entre otras, la llamada subordinación y la métrica hiperbólica.

En el primer capítulo se exponen las definiciones y resultados necesarios para que una persona con conocimientos básicos en análisis complejo tenga una comprensión cabal del trabajo.

En el segundo capítulo se presentan las definiciones y caracterizaciones relacionadas con las funciones exponencialmente convexas analíticas y univalentes, con la normalización acostumbrada en la Teoría Geométrica de Funciones (la misma de arriba). La principal caracterización, obtenida mediante el uso del teorema de representación de Herglotz y el teorema de Alexander,

afirma que para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, f pertenece a la clase $EC(\alpha)$ si y sólo si existe $g \in \mathbf{C}$ (la clase de las funciones de \mathbf{S} que son convexas) tal que $f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g)$, donde Log es la rama principal del logaritmo. Como corolario tenemos que si $EC(\alpha) \neq \phi$, entonces $|\alpha| \leq 2$.

En el tercer capítulo se consideran dos casos particulares (extremos) y un par de ejemplos. Se ve que $EC(0) = \mathbf{C}$, y que si $|\alpha| = 2$, entonces $EC(\alpha)$ contiene una sola función (que pertenece a la clase \mathbf{C}). Los ejemplos muestran que si $0 < |\alpha| < 2$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{C} , y que si $0 < |\alpha| < \frac{4}{\pi}$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{S}^* (la clase de las funciones de \mathbf{S} que son estelares respecto al origen).

En el cuarto capítulo se demuestra la compacidad de las clases $EC(\alpha)$ y de la unión de todas ellas (con respecto a la topología de la convergencia uniforme local). También se prueba un teorema que permite reducir al caso $\alpha > 0$ muchos problemas relacionados con la clase $EC(\alpha)$.

En el quinto capítulo se demuestra que el radio de Köbe de la clase $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ (el radio del mayor disco con centro en el origen que puede inscribirse en el rango de cualquier función de la clase) es, exactamente, $\frac{1}{|\alpha|} \text{Sen}^{-1} \frac{|\alpha|}{2}$. Se exhiben también las únicas dos funciones extremales del problema (aquéllas cuyos rangos no contienen un disco mayor con centro en el origen). En la demostración se usa, fundamentalmente, la métrica hiperbólica (en particular un resultado de Minda [M]).

En el último capítulo se estudia el radio de Köbe de la clase $EC(\alpha)$. Se obtiene para éste una cota inferior estricta ($\frac{1}{|\alpha|} \ln \frac{|\alpha|}{2}$). Finalmente, un ejemplo muestra que $\frac{1}{|\alpha|} \text{Sen}^{-1} \frac{|\alpha|}{2}$ no puede ser el valor exacto del radio de Köbe para todo valor del parámetro α . Concretamente, si $0 < |\alpha| < 1,25$ (aproximadamente), entonces el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ es estrictamente menor que $\frac{1}{|\alpha|} \text{Sen}^{-1} \frac{|\alpha|}{2}$.

Quiero aquí expresar mis agradecimientos al profesor Diego Mejía por su valiosa orientación.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Familias normales en $H(\mathbb{D})$.

Notaremos por \mathbb{D} al disco complejo unidad: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

En $H(\mathbb{D})$ (el conjunto de las aplicaciones analíticas en \mathbb{D}) se define una métrica (caso particular de la definida a comienzos del Capítulo VII de [C]) que determina la convergencia usual de sucesiones de funciones analíticas en \mathbb{D} .

Teorema 1.1 . Si $(f_n)_n$ es una sucesión en $H(\mathbb{D})$ y $f \in H(\mathbb{D})$, entonces

$(f_n)_n$ converge a f (según la métrica) si y sólo si converge uniformemente en cada subconjunto compacto de \mathbb{D} .

Demostración: Véase la Proposición 1.10 del Capítulo VII de [C].

Definición 1.2 . Se dice que la familia $\mathfrak{F} \subseteq H(\mathbb{D})$ es **normal** si y sólo si dada una sucesión $(f_n)_n$ en \mathfrak{F} , existen una subsucesión $(f_{n_k})_k$ y una función $f \in H(\mathbb{D})$ tales que $(f_{n_k})_k$ converge (uniformemente en compactos de \mathbb{D}) a f . Si la función límite f pertenece también a \mathfrak{F} , la familia es secuencialmente compacta (según la métrica de $H(\mathbb{D})$) y, por consiguiente, compacta.

Definición 1.3 . Una familia $\mathfrak{F} \subseteq H(\mathbb{D})$ se dice **localmente acotada** si y sólo si dado cualquier subconjunto compacto K de \mathbb{D} , existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in K$ y toda $f \in \mathfrak{F}$.

El teorema de Montel y su recíproco proporcionan una caracterización para la normalidad de una familia:

Teorema 1.4 . Sea $\mathfrak{F} \subseteq H(\mathbb{D})$. Así, \mathfrak{F} es normal si y sólo si es localmente acotada.

Prueba: Véase [D], sección 1.3.

La clase \mathbf{S} y el radio de Köbe.

Por su importancia, recordamos una forma del muy conocido *Teorema de Riemann* de la representación conforme (una forma más general puede verse en la página 10 de [P]):

Teorema 1.5 . *Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano complejo. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ y w es un punto dado de Ω , entonces existe una única función $f \in H(\mathbb{D})$ tal que f es univalente (inyectiva), $f[\mathbb{D}] = \Omega$, $f(0) = w$ y $f'(0) > 0$.*

Definición 1.6 . *La teoría geométrica de funciones estudia especialmente las funciones analíticas univalentes en el disco unidad. La familia de aquellas $f \in H(\mathbb{D})$ que son univalentes y están **normalizadas** por $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, constituye la importante clase \mathbf{S} . Es fácil ver que si f es analítica y univalente en \mathbb{D} , entonces la función*

$$\frac{1}{f'(0)} (f - f(0))$$

pertenece a \mathbf{S} (se está forzando la normalización, sin que se pierdan la analiticidad ni la univalencia).

Una consecuencia del llamado *teorema de crecimiento de \mathbf{S}* es el hecho de que la clase \mathbf{S} es localmente acotada y, por ende, normal. Para su prueba, véase el Teorema 2.6 de [D]. De aquí se deduce el teorema final de la sección 1.3 de [D] (ver allí su demostración):

Teorema 1.7 . *La clase \mathbf{S} es compacta.*

Definición 1.8 . *Dada una función $f \in \mathbf{S}$, se llama **disco de Köbe** de f al mayor disco con centro en el origen que está contenido en $f[\mathbb{D}]$ (el rango de f). **El radio de Köbe** de f , que notaremos ρ_f , es, por definición, el radio del disco de Köbe de f . Y el **radio de Köbe** de una clase $\mathfrak{F} \subseteq \mathbf{S}$ es el ínfimo de los radios de Köbe de las funciones de \mathfrak{F} , o sea*

$$\inf \{ \rho_f : f \in \mathfrak{F} \}.$$

El Teorema *un cuarto* de Köbe prueba que el radio de Köbe de la clase \mathbf{S} es $\frac{1}{4}$ (véase la sección 2.2 de [D]).

Las clases \mathbf{C} , \mathbf{S}^* y \mathbf{P} .

Definición 1.9 . Una función f analítica y univalente en \mathbb{D} se llama **convexa** si y sólo si su rango $f[\mathbb{D}]$ es un conjunto convexo (dados $z, w \in f[\mathbb{D}]$ y $t \in [0; 1]$, entonces $tz + (1 - t)w = w + t(z - w) \in f[\mathbb{D}]$). A la clase de las funciones de \mathbf{S} que son convexas se la nota \mathbf{C} . En símbolos,

$$\mathbf{C} := \{f \in \mathbf{S} : f \text{ es convexa}\}.$$

Definición 1.10 . Un subconjunto E de \mathbb{C} se llama **estelar respecto al origen**, o simplemente **estelar**, si y sólo si para cualquier punto $z \in E$, todo el segmento (cerrado) que lo une al origen está contenido en E (o sea que $\forall t \in [0; 1]$, $tz \in E$).

Definición 1.11 . Una función $f \in H(\mathbb{D})$ univalente es **estelar** si y sólo si $f[\mathbb{D}]$ es un subconjunto estelar de \mathbb{C} . Los miembros de la clase \mathbf{S} que son funciones estelares constituyen la clase notada como \mathbf{S}^* . En símbolos,

$$\mathbf{S}^* := \{f \in \mathbf{S} : f \text{ es estelar}\}.$$

Definición 1.12 . La clase \mathbf{P} se define como el conjunto de las funciones f analíticas en \mathbb{D} (no necesariamente univalentes) que tienen parte real positiva, con la normalización $f(0) = 1$. En símbolos,

$$\mathbf{P} := \{f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = 1 \text{ y } \operatorname{Re}f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}\}.$$

Teorema 1.13 . Si $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = 1$ y $\operatorname{Re}f(z) \geq 0, \forall z \in \mathbb{D}$, entonces $f \in \mathbf{P}$.

Demostración: Si existiera un $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\operatorname{Re}f(z_0) = 0$, entonces f no puede ser constante (porque $f(0) = 1$), luego (por el teorema de la función abierta) f es abierta. Por consiguiente, $f[\mathbb{D}]$ es un abierto del plano complejo y $(\operatorname{Re}f)[\mathbb{D}]$ (que es la proyección de $f[\mathbb{D}]$ sobre el eje real) es un intervalo abierto de \mathbb{R} . Pero $0 = \operatorname{Re}f(z_0) \in (\operatorname{Re}f)[\mathbb{D}]$, luego existe un $x \in (\operatorname{Re}f)[\mathbb{D}]$ tal que $x < 0$; o sea que existe un $z \in \mathbb{D}$ tal que $\operatorname{Re}f(z) = x < 0$, absurdo. Así que $\operatorname{Re}f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}$. ■

Para las funciones de la clase \mathbf{P} se cumple el llamado *Teorema de Representación de Herglotz*:

Teorema 1.14 . Dada $f \in \mathbf{P}$, existe $\mu : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$$

y

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t), \forall z \in \mathbb{D} \text{ (fórmula de Herglotz)}$$

Los siguientes resultados relacionan las clases aquí definidas; sus demostraciones pueden verse en el teorema 2.4 de [S].

Teorema 1.15 . Si $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces se tiene:

a) $f \in \mathbf{S}^* \Leftrightarrow$ la función $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ pertenece a la clase \mathbf{P} .

b) $f \in \mathbf{C} \Leftrightarrow$ la función

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathbf{P}.$$

c) $f \in \mathbf{C} \Leftrightarrow zf'(z) \in \mathbf{S}^*$ (Teorema de Alexander).

Teorema 1.16 . La clase \mathbf{C} es compacta.

Demostración: Puede verse en [HM], Teorema 4.1.

Definición 1.17 . Sea $f \in \mathbf{S}$. Las funciones $c^{-1}f(cz)$ para $c \in \partial\mathbb{D}$ se llaman las **rotaciones** de f .

Su nombre se debe a que $(cz) [\mathbb{D}] = \mathbb{D}$, luego $f(cz) [\mathbb{D}] = f[\mathbb{D}]$ y $c^{-1}z$ es una rotación de z , luego $(c^{-1}f(cz)) [\mathbb{D}]$ es una rotación de $f[\mathbb{D}]$. Además, no se pierden la analiticidad, ni la univalencia (porque $c^{-1}f(cz)$ es la compuesta de las funciones analíticas univalentes cz , f y $c^{-1}z$), ni la normalización (fácil de verificar). En otras palabras, las rotaciones de f ($\in \mathbf{S}$) también pertenecen a \mathbf{S} .

Proposición 1.18 . Sea $f \in \mathbf{C}$. Entonces, las rotaciones de f también están en \mathbf{C} .

Prueba: Sea $c \in \partial\mathbb{D}$. Por lo anterior, $c^{-1}f(cz) \in \mathbf{S}$. Además, como el rango de $c^{-1}f(cz)$ es una rotación del de f , entonces también es convexo. Por consiguiente, $c^{-1}f(cz) \in \mathbf{C}$. ■

Finalizamos esta sección con un resultado de [G1], pág. 110:

Teorema 1.19 . Si f es una función analítica y localmente inyectiva en una región G de \mathbf{C} , y γ es una curva cerrada y simple de clase C^2 en G , entonces $f \circ \gamma$ es una curva convexa (encierra una región convexa) si y sólo si

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} + \frac{f''(\gamma(t))}{f'(\gamma(t))} \gamma'(t) \right) \geq 0, \forall t.$$

Subordinación.

Comenzamos recordando el importante *Lema de Schwarz*:

Teorema 1.20 . Sea $f \in H(\mathbb{D})$, con $f(0) = 0$ y

$$|f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Ambas desigualdades son estrictas, a menos que f sea una rotación del disco unidad (es decir, a menos que exista $c \in \partial\mathbb{D}$ tal que $f(z) = cz, \forall z \in \mathbb{D}$).

Definición 1.21 . Sean $f, g \in H(\mathbb{D})$. Se dice que g está **subordinada** a f , notado $g \prec f$, si y sólo si existe $\omega \in H(\mathbb{D})$, con $|\omega(z)| \leq |z|$ para $z \in \mathbb{D}$ (y por lo tanto $\omega[\mathbb{D}] \subseteq \mathbb{D}$) tal que $g = f \circ \omega$.

En este caso (existiendo tal función ω), es claro que $\omega(0) = 0$, $g[\mathbb{D}] \subseteq f[\mathbb{D}]$ y

$$g'(0) = f'(0) \cdot \omega'(0),$$

luego ($|\omega'(0)| \leq 1$, por el lema de Schwarz)

$$|g'(0)| \leq |f'(0)|.$$

Si

$$|g'(0)| = |f'(0)|,$$

entonces $|\omega'(0)| = 1$, luego ω es de la forma $\omega(z) = cz$ para alguna constante $c \in \partial\mathbb{D}$, o sea que $g[\mathbb{D}] = f[\mathbb{D}]$.

Teorema 1.22 . Si $f, g \in \mathbf{S}$ y $g \prec f$, entonces $g = f$.

Prueba: Existe $\omega \in H(\mathbb{D})$ tal que $|\omega(z)| \leq |z|$ ($\forall z \in \mathbb{D}$) y $g = f \circ \omega$. Pero

$$|g'(0)| = 1 = |f'(0)|,$$

luego $\omega(z) = cz$, con $c \in \partial\mathbb{D}$. Así,

$$1 = g'(0) = f'(\omega(0)) \cdot \omega'(0) = 1 \cdot c,$$

luego $c = 1$, ω es la función idéntica en \mathbb{D} y $g = f$. ■

Teorema 1.23 . Sean $f, g \in H(\mathbb{D})$. Si $f(0) = g(0)$, f es univalente y $g[\mathbb{D}] \subseteq f[\mathbb{D}]$, entonces g está subordinada a f .

Prueba: Ver el Teorema 3.1 de [HM].

Corolario 1.24 . Si I es la función idéntica en \mathbb{D} , $f \in \mathbf{S}$ y $f \neq I$, entonces el radio de Kőbe de f es menor que 1.

Prueba: Si no fuera así, $\mathbb{D} \subseteq f[\mathbb{D}]$, luego la función I estaría subordinada a f . Por el teorema 1.22 , f sería igual a I . ■

Nota 1 . La función $l(z) = \frac{z}{1-z}$ es una transformación de Möbius que envía a \mathbb{D} (conformemente) sobre el semiplano

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1/2\}.$$

Claramente $l \in \mathbf{S}$. Las rotaciones de l son las aplicaciones de \mathbf{S} (únicas, por el teorema de Riemann) cuyos rangos son semiplanos. Éstos contienen al origen y sus fronteras son tangentes al círculo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}.$$

Así que $l \in \mathbf{C}$ (al igual que sus rotaciones).

Teorema 1.25 . El radio de Kőbe de la clase \mathbf{C} es $1/2$; y las únicas funciones extremales son las rotaciones de l . O sea que si $f \in \mathbf{C}$ y $\rho_f = \frac{1}{2}$, entonces existe $c \in \partial\mathbb{D}$ tal que

$$f(z) = c^{-1}l(cz) = \frac{z}{1-cz}.$$

Prueba: En el teorema 2.15 de [D] se demuestra que el radio de Kőbe de \mathbf{C} es $\frac{1}{2}$.

Sea, ahora, $f \in \mathbf{C}$ tal que $\rho_f = \frac{1}{2}$. Observemos que ρ_f es el distancia desde el origen hasta la frontera de $f[\mathbb{D}]$. Como $\{0\}$ es compacto y $\partial f[\mathbb{D}]$ es cerrado, existe $w_o \in \partial f[\mathbb{D}]$ tal que

$$\operatorname{dist}(\{0\}, \partial f[\mathbb{D}]) = \operatorname{dist}(0, w_o).$$

Así, $\frac{1}{2} = \rho_f = |w_o|$. La convexidad de f implica que $f[\mathbb{D}]$ está contenido en el semiplano que contiene al origen y cuya frontera es tangente al círculo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$$

en w_ρ . Pero hay una rotación g de l cuyo rango es, precisamente, ese semiplano. Por el teorema 1.23, $f \prec g$; y por el teorema 1.22, se concluye que $f = g$. ■

El Teorema de Convergencia de Carathéodory.

Definición 1.26 . Sea $(D_n)_n$ una sucesión de dominios simplemente conexos del plano complejo tal que $0 \in D_n \neq \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y sea

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n.$$

El **Kérnel** de $(D_n)_n$, notado $\ker (D_n)_n$, se define como sigue:

Si 0 no es un punto interior de E ,

$$\ker (D_n)_n = \{0\}.$$

Si, en cambio, 0 es punto interior de E (o sea que hay un disco con centro en el origen contenido en todos los D_n), entonces $\ker (D_n)_n$ es el mayor dominio D que contiene al origen y es tal que cada subconjunto compacto (de D) está contenido en todos los D_n , excepto en un número finito de ellos. En símbolos,

$$\ker (D_n)_n = \bigcup \{C, \text{ dominio de } \mathbb{C} : 0 \in C \text{ y } (\forall K, \text{ subconjunto compacto de } C) (\exists J, \text{ subconjunto finito de } \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N} \setminus J) (K \subseteq D_n)\}.$$

La siguiente proposición es sólo una parte del llamado *Teorema de Convergencia de Carathéodory*:

Teorema 1.27 . Sea $(D_n)_n$ una sucesión de dominios simplemente conexos de \mathbb{C} tales que $0 \in D_n \neq \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea, además, $(f_n)_n$ la sucesión de las funciones analíticas y univalentes en \mathbb{D} tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_n[\mathbb{D}] = D_n$, $f_n(0) = 0$ y $f'_n(0) > 0$. Si $(f_n)_n$ converge en $H(\mathbb{D})$ a una función f (analítica en \mathbb{D}) y $\ker (D_n)_n \neq \{0\}$, entonces f es univalente y $f[\mathbb{D}] = \ker (D_n)_n$.

Demostración: Véase el teorema 3.1 de [D].

La métrica hiperbólica.

Definición 1.28 . Sean Ω una región simplemente conexa del plano complejo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y f una función analítica y univalente en \mathbb{D} tal que $f[\mathbb{D}] = \Omega$. La **densidad de la métrica hiperbólica** de Ω es la aplicación $\lambda_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la expresión

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{2}{|f'(f^{-1}(w))| (1 - |f^{-1}(w)|^2)}, \quad \forall w \in \Omega.$$

Para un estudio más completo de la métrica hiperbólica, véase [A] y [N].

Si $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\lambda_\Omega(f(z)) = \frac{2}{|f'(z)| (1 - |z|^2)}.$$

Finalmente, enunciamos el resultado principal (Teorema 5) del artículo [M] :

Teorema 1.29 . Sean Ω una región convexa del plano complejo y M un número real positivo. Si para cada $z \in \Omega$, $\delta_\Omega(z) \leq M$, donde $\delta_\Omega(z)$ representa la distancia de z a $\partial\Omega$, entonces

$$\frac{\pi}{2M \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2M} \delta_\Omega(z)\right)} \leq \lambda_\Omega(z) \text{ para toda } z \in \Omega.$$

Si la igualdad se cumple en algún punto de Ω , entonces Ω es una franja (o banda infinita) de ancho $2M$.

Capítulo 2

DEFINICIONES BÁSICAS Y CARACTERIZACIONES

Comenzamos introduciendo las funciones exponencialmente convexas, y presentando algunas definiciones y caracterizaciones importantes.

Definición 2.1 . Decimos que $F \in H(\mathbb{D})$ es *exponencialmente convexa* si y sólo si la función $\exp \circ F$ (ó e^F) es convexa (definición 1.9).

Estamos interesados en estudiar las transformaciones exponencialmente convexas que son univalentes. Pero si F es analítica y univalente en \mathbb{D} y definimos

$$f = \frac{1}{F'(0)} (F - F(0))$$

($\in \mathbf{S}$: definición 1.6), entonces F es exponencialmente convexa si y sólo si $F'(0) \cdot f$ lo es (porque $e^{F'(0) \cdot f} = e^{F-F(0)} = e^{-F(0)} e^F$ es convexa $\Leftrightarrow e^F$ es convexa). Por esto, el estudio de las funciones exponencialmente convexas univalentes equivale, esencialmente (módulo transformaciones), a estudiar aquéllas que pertenecen a la clase \mathbf{S} al ser divididas por alguna constante compleja, lo cual nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.2 . Sean $f \in H(\mathbb{D})$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Decimos que f es *α -exponencialmente convexa* si y sólo si la función $\exp \circ (\alpha f)$ (ó $e^{\alpha f}$) es convexa (definición 1.9).

La función f puede o no ser univalente.

Ejemplo 2.3 . La función $f(z) = \frac{1}{2} z^2$, con $z \in \mathbb{D}$, es exponencialmente convexa, pero no es univalente:

La no univalencia de f es clara: $(f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} = f(\frac{1}{2}))$.

Para ver la convexidad exponencial, sea γ una curva cerrada en $f[\mathbb{D}]$. Según el teorema 1.19, $\exp \circ \gamma$ es una curva convexa (encierra una región convexa) si y sólo si

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} + \frac{\exp''(\gamma(t))}{\exp'(\gamma(t))} \gamma'(t) \right) \geq 0, \forall t$$

o sea , si y sólo si

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} + \gamma'(t) \right) \geq 0.$$

Sea re^{it} (para $t \in [0; 2\pi]$) una parametrización del círculo de radio $r < 1$ y centro en 0. Al aplicarle f , se obtiene una curva γ con parametrización

$$\gamma(t) = \frac{r^2}{2} e^{2it}.$$

Así,

$$\gamma'(t) = ir^2 e^{2it}$$

y

$$\gamma''(t) = -2r^2 e^{2it},$$

luego

$$\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} + \gamma'(t) = \frac{-2}{i} + ir^2 \cos(2t) + i^2 r^2 \sin(2t)$$

o sea que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} + \gamma'(t) \right) = 2 + r^2 \cos(2t),$$

que es positiva para todo t .

Por lo anterior, $\exp \circ \gamma$ es una curva convexa. Pero ésta es el resultado de aplicar $\exp \circ f$ al círculo re^{it} . Luego $\exp \circ f$ envía a los discos \mathbb{D}_r con centro en el origen y radio r menor que 1 en conjuntos convexos. Pero

$$(\exp \circ f)[\mathbb{D}] = (\exp \circ f) \left[\bigcup_{r < 1} \mathbb{D}_r \right] = \bigcup_{r < 1} (\exp \circ f)[\mathbb{D}_r].$$

Como ésta es una unión de conjuntos convexos encajados, es convexa. Por lo tanto, f es exponencialmente convexa.

Nota 2 . Las funciones exponencialmente convexas univalentes y normalizadas tienen una caracterización puramente analítica, surgida al generalizar las clases $\mathcal{C}(k)$ introducidas por Mejía y Minda en [MM], e independientemente por Wirths en [W] al estudiar el problema de los coeficientes de las funciones convexas de tipo acotado, introducidas por Goodman en [G2].

Definición 2.4 . Dado $k \in (0; 1]$, la clase $\mathcal{C}(k)$ de las funciones k -convexas consiste de las $f \in \mathbf{S}$ (definición 1.6) tales que

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > k |zf'(z)| \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Como

$$\begin{aligned} |zf'(z)| &= \left| -e^{it} z f'(z) \right| \geq \\ &\geq \operatorname{Re} \left(-e^{it} z f'(z) \right) = -\operatorname{Re} \left(e^{it} z f'(z) \right) \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > -k \operatorname{Re} \left(e^{it} z f'(z) \right)$$

para cualquier $f \in \mathcal{C}(k)$, luego

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + k e^{it} z f'(z) \right) > 0, \forall z \in \mathbb{D}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, si $f \in \mathbf{S}$ y satisface la desigualdad anterior, entonces dado $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, sea

$$t = \pi - \operatorname{Arg} (z f'(z));$$

así,

$$\begin{aligned}
e^{it} z f'(z) &= e^{it} |z f'(z)| e^{i \text{Arg}(z f'(z))} \\
&= e^{i\pi} |z f'(z)| \\
&= -|z f'(z)|,
\end{aligned}$$

luego

$$\text{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) - k |z f'(z)| > 0,$$

o sea que $f \in \mathcal{C}(k)$.

En conclusión, $f \in \mathcal{C}(k)$ si y sólo si $f \in \mathbf{S}$ y

$$\text{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \right) > 0$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = k$.

Esto sugiere definir una clase más amplia que $\mathcal{C}(k)$ dejando α fija.

Definición 2.5 . Dada $\alpha \in \mathbb{C}$, decimos que $f \in EC(\alpha)$ si y sólo si $f \in \mathbf{S}$ y

$$\text{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \right) > 0$$

para toda $z \in \mathbb{D}$.

Nota 3 . Es claro que si

$$|\alpha| = k \in (0; 1],$$

entonces $\mathcal{C}(k) \subseteq EC(\alpha)$.

De hecho,

$$\mathcal{C}(k) = \cap \{ EC(\alpha) : |\alpha| = k \}.$$

Además, en la definición no se impone la condición $|\alpha| \leq 1$.

Teorema 2.6 (caracterización de la clase $EC(\alpha)$). Si $\alpha \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$f \in EC(\alpha)$ si y sólo si existe $g \in \mathbf{C}$ (definición 1.9) tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

(Log es la rama principal del logaritmo).

Demostración : Sea $f \in EC(\alpha)$. Se sabe (definición 1.12) que la función

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \in \mathbf{P}.$$

De acuerdo con la fórmula de Herglotz (teorema 1.14) , existe $\mu : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$$

y

$$\begin{aligned} & 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \\ = & \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) \text{ para } z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \\ = & \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) - 1 \\ = & \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} - 1 \right) d\mu(t) \\ = & \int_0^{2\pi} \frac{2ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t), \end{aligned}$$

luego

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) (\forall z \in \mathbb{D}). \quad (2.1)$$

Como f' no se anula en \mathbb{D} y $f'(0) = 1$, existe $h \in H(\mathbb{D})$ tal que $\exp(h(z)) = f'(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ y $h(0) = 0$. Por consiguiente,

$$f''(z) = \exp(h(z)) \cdot h'(z),$$

luego

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = h'(z),$$

e integrando en ambos miembros de (2.1), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^z h'(w)dw + \alpha \int_0^z f'(w)dw &= 2 \int_0^z \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}}{1 - we^{-it}} d\mu(t) \right) dw \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^z \frac{e^{-it}}{1 - we^{-it}} dw \right) d\mu(t) \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^z \frac{d}{dw} \text{Log}(1 - we^{-it}) dw \right) d\mu(t) \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \text{Log}(1 - ze^{-it}) d\mu(t). \end{aligned}$$

Sean

$$I(z) = -2 \int_0^{2\pi} \text{Log}(1 - ze^{-it}) d\mu(t)$$

y

$$g(z) = \int_0^z \exp(I(w)) dw$$

(para $z \in \mathbb{D}$).

Por lo anterior y el teorema fundamental del cálculo,

$$h(z) + \alpha f(z) = I(z),$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(\alpha f(z)) &= \alpha f'(z) \cdot \exp(\alpha f(z)) \\ &= \alpha \cdot \exp(h(z)) \cdot \exp(\alpha f(z)) \\ &= \alpha \cdot \exp(I(z)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d}{dw} \exp(\alpha f(w)) dw \\ &= \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha f(z)) - \exp(\alpha f(0))], \end{aligned}$$

o sea que

$$\exp(\alpha f(z)) = 1 + \alpha g(z),$$

luego $\alpha f(z)$ es un logaritmo de $1 + \alpha g(z)$. Entonces existe $n(z) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\alpha f(z) = \text{Log}(1 + \alpha g(z)) + 2\pi i \cdot n(z).$$

Como f y g son continuas, entonces $n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Z}$ lo es, luego es constante ($n[\mathbb{D}]$ es conexo); además,

$$0 = \alpha f(0) = \text{Log}(1 + \alpha g(0)) + 2n\pi i = 2n\pi i,$$

luego $n = 0$. Por lo tanto,

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

Por otra parte, si $K(z) = z \cdot \exp(I(z))$, entonces $K(0) = 0$ y

$$K'(z) = \exp(I(z)) + z \cdot \exp(I(z)) \cdot I'(z)$$

luego $K'(0) = \exp(0) = 1$ y

$$\begin{aligned} \frac{zK'(z)}{K(z)} &= 1 + zI'(z) \\ &= 1 + zh'(z) + \alpha z f'(z) \\ &= 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \in \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, de acuerdo al teorema 1.15(a), $K \in \mathbf{S}^*$ (definición 1.11).

Pero

$$zg'(z) = z \cdot \exp(I(z)) = K(z),$$

luego $g \in \mathbf{C}$ (teorema 1.15(c)).

Recíprocamente, sea $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

Así, f es analítica y univalente (es la compuesta de funciones analíticas univalentes),
 $f(0) = 0$ y

$$f'(z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha g'(z)}{1 + \alpha g(z)}$$

luego $f'(0) = 1$ (y así $f \in \mathbf{S}$) y

$$f''(z) = \frac{g''(z)(1 + \alpha g(z)) - \alpha (g'(z))^2}{(1 + \alpha g(z))^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \\ = & 1 + z \frac{g''(z)(1 + \alpha g(z)) - \alpha (g'(z))^2}{1 + \alpha g(z)} \cdot \frac{1}{g'(z)} + \alpha z \frac{g'(z)}{1 + \alpha g(z)} \\ = & 1 + z \frac{g''(z)}{g'(z)} \in \mathbf{P} \end{aligned}$$

(definición 1.12 y teorema 1.15(b)), luego $f \in EC(\alpha)$. ■

Corolario 2.7 . Si $EC(\alpha) \neq \phi$, entonces $|\alpha| \leq 2$.

Prueba: Sean $\alpha \neq 0$, $f \in EC(\alpha)$ y $g \in \mathbf{C}$ tales que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

Entonces $1 + \alpha g(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{D}$ (no existe $\text{Log}(0)$), o sea que $-\frac{1}{\alpha} \notin g[\mathbb{D}]$.

Pero si $|\alpha| > 2$, entonces $|\frac{1}{\alpha}| < \frac{1}{2}$ y así (por el teorema 1.25) $-\frac{1}{\alpha} \in g[\mathbb{D}]$, lo cual es absurdo. Luego $|\alpha| \leq 2$. ■

Lema 2.8 . Si f es una función analítica y univalente en \mathbb{D} , y $e^{\alpha f}$ es convexa, entonces $e^{\alpha f}$ es univalente.

Prueba: Como $0 \notin e^{\alpha f} [\mathbb{D}]$ (porque $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$), la convexidad de $e^{\alpha f}$ implica que el rayo L que parte de 0 con dirección opuesta a $e^{\alpha f(0)}$ no corta a $e^{\alpha f} [\mathbb{D}]$.

Considerando $0 \in L$, sea l_1 una rama del logaritmo en $L^c = \mathbb{C} \setminus L$.

Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$l_1 \left(e^{\alpha f(z)} \right) = \alpha f(z) + 2n\pi i$$

(para cada $z \in \mathbb{D}$ existe un $n(z)$, pero la función

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[l_1 \left(e^{\alpha f(z)} \right) - \alpha f(z) \right]$$

es continua y con rango contenido en \mathbb{Z} , luego es constante). Haciendo $l = l_1 - 2n\pi i$, otra rama del logaritmo en L^c , tenemos que $l \circ e^{\alpha f} = \alpha f$. Por lo tanto,

$$e^{\alpha f} = l^{-1} \circ l \circ e^{\alpha f} = l^{-1} \circ (\alpha f)$$

o sea que $e^{\alpha f}$ es univalente. ■

Teorema 2.9 . Si $f \in \mathbf{S}$: $f \in EC(\alpha)$ si y sólo si f es α -exponencialmente convexa.

Demostración: Sea $f \in EC(\alpha)$. Existe $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

Así, $e^{\alpha f} = 1 + \alpha g$, que es convexa (la aplicación $1 + \alpha z$, $z \in \mathbb{C}$, preserva la convexidad), luego f es α -exponencialmente convexa.

Recíprocamente, sea $e^{\alpha f}$ convexa. Hagamos

$$g = \frac{1}{\alpha} \left(e^{\alpha f} - 1 \right).$$

Por el lema 2.8, $e^{\alpha f}$ es univalente y, por consiguiente, lo es también g (la función $\frac{1}{\alpha}(z-1)$ es univalente).

Como $e^{\alpha f}$ es convexa, g es convexa ($\frac{1}{\alpha}(z-1)$ preserva la convexidad).

Además,

$$g(0) = \frac{1}{\alpha} (e^0 - 1) = 0$$

y

$$g'(z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha f'(z) e^{\alpha f(z)},$$

luego

$$g'(0) = 1 \cdot e^0 = 1.$$

O sea que $g \in \mathbf{C}$.

Pero

$$1 + \alpha g = e^{\alpha f}, 0 \notin e^{\alpha f} [\mathbb{D}] \text{ y } 1 \in (1 + \alpha g) [\mathbb{D}],$$

luego (por la convexidad, $e^{\alpha f} [\mathbb{D}] \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$) tiene sentido

$$\text{Log}(1 + \alpha g) = \text{Log} \circ e^{\alpha f}.$$

Mediante un análisis semejante al hecho en la prueba del lema 2.8, se llega a que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{Log} \circ e^{\alpha f} = \alpha f + 2n\pi i,$$

lo cual implica que (para $z = 0$)

$$n = \frac{1}{2\pi i} (\text{Log}(e^0) - \alpha \cdot 0) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\text{Log}(1 + \alpha g) = \alpha f,$$

o sea que $f \in EC(\alpha)$. ■

Nota 4 . En conclusión, dados $f \in \mathbf{S}$ y $\alpha \in \mathbf{C}^*$, tenemos la equivalencia de las siguientes proposiciones:

a) f es α -exponencialmente convexa.

b) $f \in EC(\alpha)$.

c) Si $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \right) > 0.$$

d) Existe $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}(1 + \alpha g).$$

e) αf es exponencialmente convexa.

Capítulo 3

CASOS PARTICULARES Y EJEMPLOS

Antes de pasar a ver un par de casos particulares y algunos ejemplos interesantes, veamos el siguiente lema:

Lema 3.1 . *Log (la función logaritmo principal) envía discos de $\mathbb{C}_o = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ en conjuntos convexos.*

Demostración: Sea D_r el disco con centro en a y radio r . Si la clausura de D_r , $\overline{D_r}$, está contenida en \mathbb{C}_o , entonces $|a| > r$.

Al aplicar el teorema 1.19 a $f = \text{Log}$, la condición para que una curva γ cerrada y simple de clase C^2 en \mathbb{C}_o sea enviada por Log en una curva convexa (y encierre una región convexa) se convierte en

$$\text{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right) \geq 0, \forall t.$$

Ahora, $\gamma(t) = a + re^{it}$, con $t \in [0; 2\pi]$, es una parametrización de ∂D_r (es una curva cerrada y simple en \mathbb{C}_o). Así,

$$\gamma'(t) = ire^{it}$$

y

$$\gamma''(t) = -re^{it},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} &= \frac{1}{i} - \frac{ire^{it}}{a + re^{it}} \\ &= \frac{ia}{a + re^{it}} \cdot \frac{\bar{a} + re^{-it}}{\bar{a} + re^{-it}} \\ &= \frac{i}{|a + re^{it}|^2} (|a|^2 + are^{-it}), \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right) &= \frac{|a|^2 + \operatorname{Re}(are^{-it})}{|a + re^{it}|^2} \\ &\geq \frac{|a|^2 - r|a|}{|a + re^{it}|^2} \geq 0, \end{aligned}$$

ya que

$$-\operatorname{Re}(are^{-it}) = \operatorname{Re}(-are^{-it}) \leq |-are^{-it}| = r|a| \quad (\text{todo } \forall t \in \mathbb{R}).$$

Por consiguiente, $\operatorname{Log}\gamma$ es una curva (cerrada y simple) convexa, o sea que $\operatorname{Log}[D_r]$ es un conjunto convexo.

En general, si $D_r \subseteq \mathbb{C}_o$ (∂D_r podría tocar a $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$), entonces $\operatorname{Log}[D_p]$ es convexo para toda $p \in (0; r)$ (porque $\overline{D_p} \subseteq \mathbb{C}_o$), luego

$$\operatorname{Log}[D_r] = \operatorname{Log}[\cup_{p < r} D_p] = \bigcup_{p < r} \operatorname{Log}[D_p]$$

es convexa (por ser una unión de conjuntos convexos encajados). ■

Corolario 3.2 . Si g es una transformación de Möbius, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ y $-\frac{1}{\alpha}$, $\infty \notin g[\mathbb{D}]$, entonces

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}(1 + \alpha g) \in \mathbf{CnEC}(\alpha)$$

(aquí es claro que se está considerando a g restringida a \mathbb{D}).

Prueba: Sea

$$f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}(1 + \alpha g).$$

Como $\infty \notin g[\mathbb{D}]$, entonces g es analítica en \mathbb{D} , luego f lo es ($1 + \alpha g(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{D}$, ya que $-\frac{1}{\alpha} \notin g[\mathbb{D}]$).

f es univalente al ser la compuesta de funciones univalentes (g , $1 + \alpha z$, Log y $\frac{1}{\alpha} z$). Además, $f(0) = 0$ y

$$f' = \frac{g'}{1 + \alpha g},$$

luego $f'(0) = 1$.

Como toda transformación de Möbius es univalente y convexa, entonces $g \in \mathbf{C}$, luego $f \in EC(\alpha)$.

Finalmente, si $0 < r < 1$, entonces $(1 + \alpha g)[r\mathbb{D}]$ es un disco ($g[\partial(r\mathbb{D})]$ no es una recta porque $\infty \notin g[\mathbb{D}]$) y (por el lema 3.1) $f[r\mathbb{D}]$ es un conjunto convexo.

Como

$$f[\mathbb{D}] = f\left[\bigcup_{r<1} r\mathbb{D}\right] = \bigcup_{r<1} f[r\mathbb{D}]$$

es una unión de conjuntos convexos encajados, entonces $f[\mathbb{D}]$ es convexo, luego $f \in \mathbf{C}$. ■

Casos particulares.

1. Si $\alpha = 0$: En este caso $EC(\alpha) = \mathbf{C}$, ya que si $f \in \mathbf{S}$, entonces (por el teorema 1.15)

$$\begin{aligned} f \in EC(0) &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathbf{P} \\ &\Leftrightarrow f \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

2. Si $|\alpha| = 2$: En este caso

$$EC(\alpha) = \left\{ \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} \left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z} \right) \right\}$$

(la clase posee un único elemento).

Prueba: Sean $f \in EC(\alpha)$ y $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}(1 + \alpha g).$$

Como $-\frac{1}{\alpha} \notin g[\mathbb{D}]$ y $\left|-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{2}$, entonces (teorema 1.25) existe $c \in \partial\mathbb{D}$ tal que $g(z) = \frac{z}{1-cz}$.

Así,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\alpha z}{1 - cz} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + (\alpha - c)z}{1 - cz} \right) \end{aligned}$$

Pero esto implica que $|\alpha - c| \leq 1$ porque de lo contrario

$$\left| -\frac{1}{\alpha - c} \right| < 1$$

y existiría

$$f\left(-\frac{1}{\alpha - c}\right) = \frac{1}{\alpha} \text{Log}\left(\frac{1 - 1}{1 + c(\alpha - c)^{-1}}\right) = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(0),$$

absurdo.

Por otra parte

$$|\alpha - c| \geq |\alpha| - |c| = 2 - 1 = 1;$$

luego

$$|\alpha - c| = 1 = |\alpha| - |c|,$$

o sea que existe $k \geq 0$ tal que $\alpha = kc$.

Así,

$$2 = |\alpha| = k|c| = k,$$

luego $\alpha = 2c$ y

$$f(z) = \frac{1}{2c} \text{Log}\left(\frac{1 + cz}{1 - cz}\right),$$

o sea que

$$f(z) = \frac{1}{\alpha} \text{Log}\left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z}\right).$$

Recíprocamente,

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log}\left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z}\right) = \frac{1}{\alpha} \text{Log}\left(1 + \alpha \frac{2z}{2 - \alpha z}\right)$$

y

$$g(z) = \frac{2z}{2 - \alpha z} = \frac{z}{1 - \frac{\alpha}{2}z} \in \mathbf{C}$$

(véase el teorema 1.25).

Por consiguiente

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log}\left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z}\right) \in EC(\alpha). \blacksquare$$

Nota 5 . La función

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z} \right)$$

(con dominio \mathbb{D}) está en \mathbf{C} , como consecuencia del corolario anterior.

Así,

$$|\alpha| = 2 \Rightarrow EC(\alpha) \subseteq \mathbf{C}.$$

Es fácil ver que

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left(\frac{2 + \alpha z}{2 - \alpha z} \right) [\mathbb{D}]$$

(el rango de la función) es la franja (o banda infinita) de ancho $\frac{\pi}{2}$ centrada en 0 y con inclinación $-\text{Arg}(\alpha)$.

Nota 6 Como consecuencia de lo anterior, en adelante consideraremos $0 < |\alpha| < 2$, a menos que se especifique lo contrario.

Proposición 3.3 . Si $F \in H(\mathbb{D})$ es univalente y exponencialmente convexa, entonces $|F'(0)| \leq 2$. Además, 2 es la mejor cota posible.

Prueba: Si $f = \frac{1}{F'(0)} (F - F(0))$, entonces $f \in \mathbf{S}$ y

$$e^{F'(0) \cdot f} = e^{-F(0)} \cdot e^F$$

es convexa, luego $f \in EC(F'(0))$. Por el corolario 2, $|F'(0)| \leq 2$.

Según lo visto arriba, la función

$$f(z) = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{2 + 2z}{2 - 2z} \right)$$

pertenece a $EC(2)$, luego $F(z) = 2f(z)$ es univalente y exponencialmente convexa y

$$F'(0) = 2f'(0) = 2,$$

o sea que la cota 2 no se puede mejorar. ■

Ejemplos.

Ejemplo 3.4 . *El siguiente ejemplo muestra que si $0 < \alpha < 2$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{C} :*

Como

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{2} \right) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{-1/2}{1 - k/2} = -\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{k \rightarrow 2^-} \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{2} \right) = -\infty,$$

entonces existe al menos un $k \in (0; 2)$ tal que

$$-\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{2} \right)$$

(porque $-\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{2}$).

Sean

$$h(z) = \frac{1}{k} \text{Log} \left(1 + k \frac{z}{1-z} \right)$$

y

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha h).$$

Es fácil ver que la función $g(z) = \frac{z}{1-z}$ satisface la hipótesis del corolario 3.2 para $\alpha = k$ ($g[\mathbb{D}] = \{z \in \mathbf{C} : \text{Re}(z) > -1/2\}$, luego $-1/k \notin g[\mathbb{D}]$), concluyéndose que $h \in \mathbf{C}$.

Además, si $z \in \mathbb{D}$, $h(z) \neq -1/\alpha$; de lo contrario, $\frac{z}{1-z} \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{1}{k} \text{Log} \left(1 + k \frac{z}{1-z} \right) < \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{2} \right),$$

o sea que $\frac{z}{1-z} < -\frac{1}{2}$, lo cual es falso para $z \in \mathbb{D}$.

Por consiguiente $f \in EC(\alpha)$.

Para ver que f no es convexa, observemos que la función $1 + k \frac{z}{1-z}$ envía a \mathbb{D} (conformemente) sobre el semiplano

$$\{z \in \mathbf{C} : \text{Re}(z) > 1 - k/2\}.$$

Al aplicar Log obtenemos una región contenida en la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \right\},$$

que se abre hacia la derecha a partir de un vértice en el punto $\ln\left(1 - \frac{k}{2}\right)$ (< 0).

Así, $(1 + \alpha h)$ $[\mathbb{D}]$ se abre hacia la derecha a partir de un vértice en el punto

$$1 + \frac{\alpha}{k} \ln\left(1 - \frac{k}{2}\right)$$

y entre las rectas

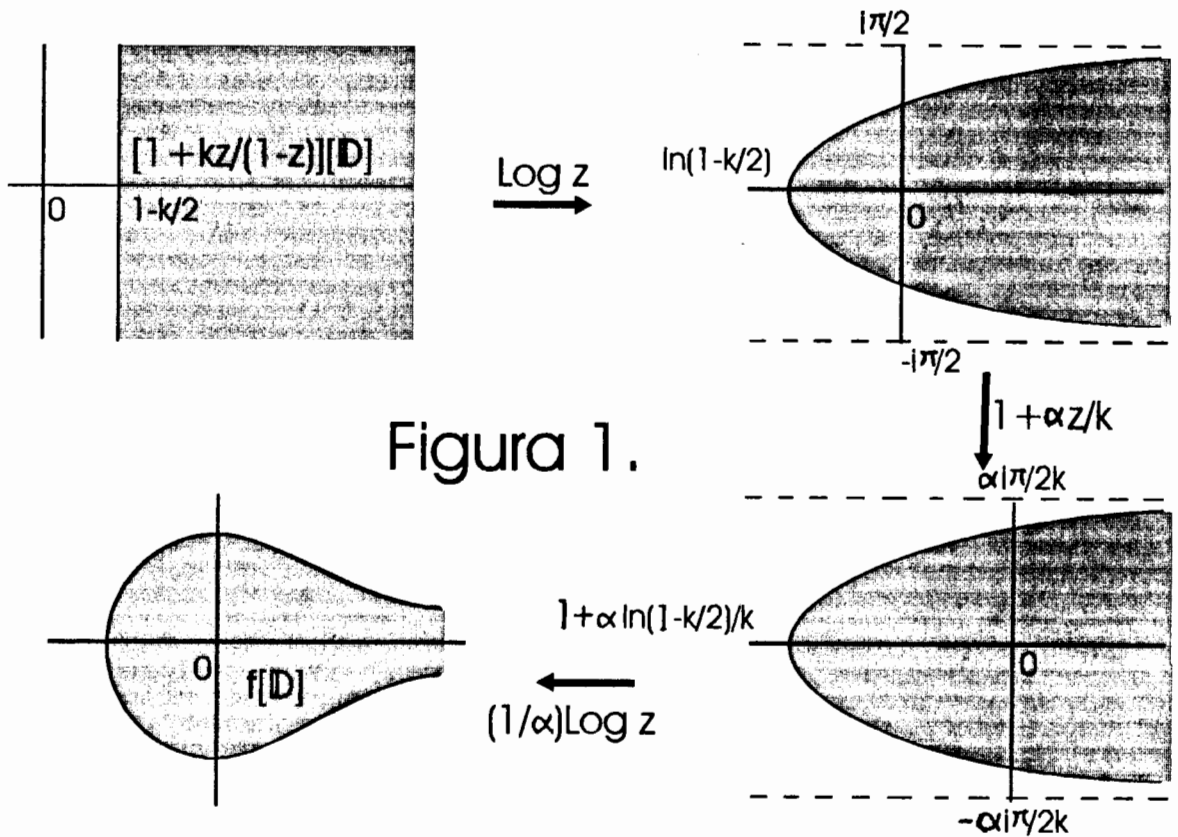
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = \frac{\alpha\pi}{2k} \right\}$$

y

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = -\frac{\alpha\pi}{2k} \right\}$$

(asíntotas de su frontera).

Al aplicar de nuevo Log se obtiene una gráfica que no es convexa (véase la figura 1), luego $f \notin \mathbb{C}$.



Ejemplo 3.5 . El siguiente ejemplo muestra que si $0 < \alpha < 4/\pi$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en S^* (definición 1.11) :

Sean

$$h(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

y

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log} (1 + \alpha h).$$

Es sencillo comprobar que la función $g(z) = \frac{z}{1-iz}$ satisface la hipótesis del corolario 3.2 para $\alpha = 2i$, luego

$$h(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} (1 + 2ig(z)) \in \mathbf{C}.$$

La función $\frac{1+iz}{1-iz}$ envía \mathbb{D} sobre el semiplano derecho ($\text{Re}(z) > 0$).

Al aplicar Log se obtiene la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Al rotar y contraer (aplicando la función $\frac{z}{2i}$) se observa que $h[\mathbb{D}]$ es la franja vertical

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{4} \right\};$$

y como $-\frac{1}{\alpha} < -\frac{\pi}{4}$, entonces $-\frac{1}{\alpha} \notin h[\mathbb{D}]$. Así, $f \in EC(\alpha)$.

Por otra parte, $(1 + \alpha h)[\mathbb{D}]$ es la franja

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\alpha\pi}{4} < \text{Re}(z) - 1 < \frac{\alpha\pi}{4} \right\};$$

al aplicar Log se obtiene una región limitada por dos curvas que se abren hacia la derecha a partir de sus vértices $\ln\left(1 - \frac{\alpha\pi}{4}\right)$ y $\ln\left(1 + \frac{\alpha\pi}{4}\right)$. Ambas curvas tienen a las rectas

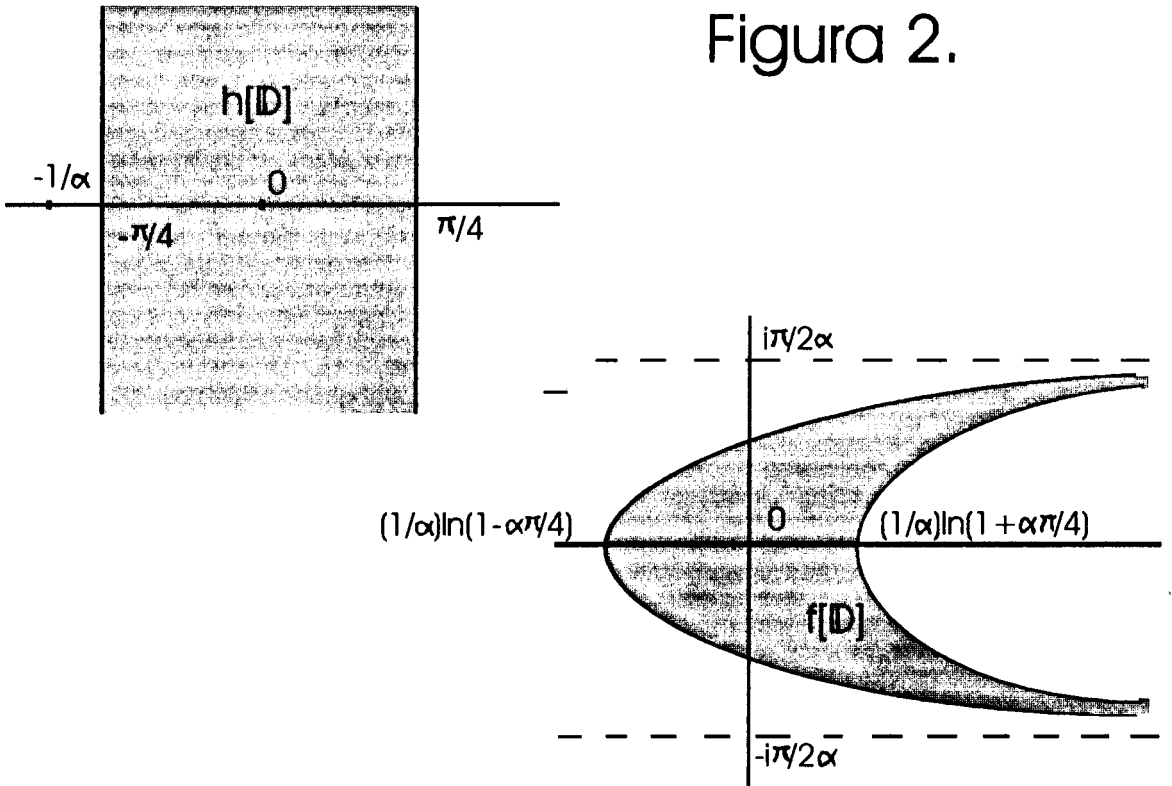
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = \frac{\pi}{2} \right\}$$

y

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = -\frac{\pi}{2} \right\}$$

como asíntotas, lo cual indica que (aplicando $\frac{z}{\alpha}$) $f[\mathbb{D}]$ no es estelar (respecto al origen). Por consiguiente, $f \notin \mathbf{S}^*$ (ver la figura 2).

Figura 2.



Capítulo 4

PROPIEDADES GENERALES

La caracterización de las funciones de $EC(\alpha)$ permite probar la compacidad de esta clase, usando el hecho de que la clase \mathbf{C} es compacta.

Teorema 4.1 . *La clase $EC(\alpha)$ es compacta (definición 1.2).*

Demostración: Basta ver que $EC(\alpha)$ es cerrada en \mathbf{S} , ya que esta clase es compacta (teorema 1.7).

Para esto, sea $(f_n)_n$ una sucesión en $EC(\alpha)$ que converge, en \mathbf{S} , a una función f (de \mathbf{S}), y veamos que $f \in EC(\alpha)$:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n \in \mathbf{C}$ tal que

$$f_n = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g_n)$$

y $-\frac{1}{\alpha} \notin g_n[\mathbb{D}]$.

Así,

$$1 + \alpha g_n = \exp(\alpha f_n),$$

luego

$$g_n = \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha f_n) - 1].$$

Como \mathbf{C} es compacta (teorema 1.16), existen una subsucesión $(g_{n_k})_k$ de $(g_n)_n$ y una función $g \in \mathbf{C}$ tales que $(g_{n_k})_k$ converge a g (uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{D}). Entonces, dado $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha f_{n_k}(z)) - 1] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha f(z)) - 1]$$

(las convergencias son puntuales), luego

$$\exp(\alpha f(z)) = 1 + \alpha g(z),$$

o sea que existe $m(z) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\alpha f(z) = \text{Log}(1 + \alpha g(z)) + 2m(z)\pi i,$$

luego

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} [\alpha f(z) - \text{Log}(1 + \alpha g(z))].$$

Esto muestra que la función $m : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua y, por lo tanto, constante (\mathbb{D} es conexo, luego $m[\mathbb{D}]$ lo es). Como $f, g \in \mathbf{S}$, entonces $f(0) = g(0) = 0$, luego $m = m(0) = 0$. En conclusión,

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g),$$

o sea que $f \in EC(\alpha)$. ■

Definición 4.2 .

$$EC := \bigcup \{EC(\alpha) : \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha| \leq 2\}.$$

Teorema 4.3 . EC es una clase compacta.

Demostración: Sea $(f_n)_n$ una sucesión en EC que converge (en \mathbf{S}) a una función $f \in \mathbf{S}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$, con $|\alpha_n| \leq 2$, tal que $f_n \in EC(\alpha_n)$.

Veamos que $f \in EC$, considerando dos casos:

El primero, si $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 0\}$ es infinito. Para cada n en este conjunto, existe $g_n \in \mathbf{C}$ tal que

$$f_n = \frac{1}{\alpha_n} \text{Log}(1 + \alpha_n g_n).$$

Como la clase \mathbf{C} es compacta, existe una subsucesión de $(g_n)_n$ que converge a una función $g \in \mathbf{C}$; y como el disco cerrado

$$\{z : z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| \leq 2\}$$

es compacto, existe una subsucesión $(\alpha_{n_k})_k$ de la de los correspondientes (de los g_n de la subsucesión que converge a g) α_n que converge a un

$$\alpha \in \{z : z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| \leq 2\}.$$

Así, si $z \in \mathbb{D}$,

$$\operatorname{Re} \left[1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} + \alpha z f'(z) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[1 + z \frac{f''_{n_k}(z)}{f'_{n_k}(z)} + \alpha_{n_k} z f'_{n_k}(z) \right] \geq 0,$$

o sea que $f \in EC(\alpha)$.

En el segundo caso, $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 0\}$ es infinito. Así, para cada n en este conjunto, $f_n \in EC(0) = \mathbb{C}$, luego (por la compacidad de \mathbb{C}) existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ que converge (en \mathbb{C}) a una $\hat{f} \in \mathbb{C}$. Por consiguiente, $(f_{n_k})_k$ converge en \mathbb{S} a f y a \hat{f} (\mathbb{C} es un subespacio de \mathbb{S}), luego (por la unicidad del límite) $f = \hat{f}$ y, por lo tanto, $f \in EC(0)$.

En cualquier caso, $f \in EC$. ■

Teorema 4.4 . Si $0 < k \leq 2$ y $c \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$$EC(kc) = \{c^{-1}F(cz) : F \in EC(k)\}.$$

O sea que si $c = \frac{\alpha}{|\alpha|}$:

$$f \in EC(\alpha) \Leftrightarrow \text{existe } F \in EC(|\alpha|) \text{ tal que } f(z) = c^{-1}F(cz), \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración: Sea $f \in EC(kc)$. Entonces existe $g \in \mathbb{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{kc} \operatorname{Log}(1 + kcg).$$

Sea $G(z) = cg(c^{-1}z)$. Así, (proposición 1.18) $G \in \mathbb{C}$ y $-\frac{1}{k} \notin G[\mathbb{D}]$ (de lo contrario, $-\frac{1}{kc} \in g[\mathbb{D}]$), luego la función

$$F = \frac{1}{k} \operatorname{Log}(1 + kG)$$

pertenece a $EC(k)$ y

$$c^{-1}F(cz) = \frac{1}{kc} \text{Log}(1 + kcg(z)) = f(z).$$

Recíprocamente, sean $F \in EC(k)$ y $f(z) = c^{-1}F(cz)$. Así, existe $G \in \mathbf{C}$ tal que

$$F = \frac{1}{k} \text{Log}(1 + kG).$$

Sea $g(z) = c^{-1}G(cz)$. Como $g \in \mathbf{C}$ y $-\frac{1}{kc} \notin g[\mathbb{D}]$ (si no, $-\frac{1}{k} \in G[\mathbb{D}]$), entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= c^{-1} \frac{1}{k} \text{Log}(1 + kG(cz)) \\ &= \frac{1}{kc} \text{Log}(1 + kcg(z)) \in EC(kc). \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7 . Este teorema implica que muy buena parte de los problemas relacionados con la clase $EC(\alpha)$ pueden reducirse al caso $\alpha > 0$. En particular, el ejemplo 3.4 muestra que si $0 < |\alpha| < 2$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{C} ; y el ejemplo 3.5 muestra que si $0 < |\alpha| < \frac{4}{\pi}$, entonces $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{S}^* .

Capítulo 5

EL RADIO DE KÖBE DE $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$.

Consideraremos, ahora, el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$, para $\alpha \in \mathbf{C}$ con $|\alpha| \leq 2$, el cual notaremos por R'_α .

Por el teorema 4.4, dada $f \in \mathbf{C} \cap EC(\alpha)$, la función $F(z) = cf(c^{-1}z)$, donde $c = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, pertenece a $\mathbf{C} \cap EC(|\alpha|)$, ya que la clase \mathbf{C} es invariante bajo rotaciones (proposición 1.18). El rango de F es una rotación del de f (definición 1.17), luego sus radios de Köbe (definición 1.8) son iguales. Por consiguiente, $R'_{|\alpha|} \leq \rho_F = \rho_f$, luego el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ es mayor o igual que el de $\mathbf{C} \cap EC(|\alpha|)$.

Recíprocamente, dada $F \in \mathbf{C} \cap EC(|\alpha|)$, la función $f(z) = c^{-1}F(cz)$ está en $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ y tiene el mismo radio de Köbe. O sea que el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ es menor o igual que el de $\mathbf{C} \cap EC(|\alpha|)$.

La igualdad de los radios de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ y de $\mathbf{C} \cap EC(|\alpha|)$ implica que el problema de hallarlo puede reducirse al caso $\alpha > 0$. En adelante (en este capítulo), a menos que se especifique lo contrario, consideraremos, pues, $\alpha \in (0; 2)$ (los casos $\alpha = 0$ y $|\alpha| = 2$ son triviales, de acuerdo con lo visto en la sección 3.1) y $f \in \mathbf{C} \cap EC(\alpha)$.

Cota inferior.

Llamemos $\Omega = f[\mathbb{D}]$. Sabemos que existe $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g).$$

Como $-\frac{1}{\alpha} \notin g[\mathbb{D}]$, entonces $0 \notin h[\mathbb{D}]$, donde $h = 1 + \alpha g$. Además, $g[\mathbb{D}]$ es un conjunto convexo y $1 + \alpha z$ es una función conforme, luego $h[\mathbb{D}]$ es convexo. Por un teorema de Hahn-Banach, como $\{0\}$ y $h[\mathbb{D}]$ son conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, y $h[\mathbb{D}]$ es abierto, entonces existe una recta L_o del plano complejo (un hiperplano de \mathbb{R}^2) que separa a $\{0\}$ y $h[\mathbb{D}]$.

Sea L la recta que pasa por 0 y es paralela a L_ρ . Claramente $h[\mathbb{D}]$ está contenido en el semiplano derecho (porque $1 = h(0) \in h[\mathbb{D}]$) determinado por L . También es claro que existe $\theta \in (0; \pi)$ tal que $L \setminus \{0\}$ está constituido por los puntos de \mathbb{C} con argumentos principales iguales a θ o a $\theta - \pi$, luego el semiplano mencionado está formado por los puntos de \mathbb{C} con argumentos principales estrictamente entre $\theta - \pi$ y θ . Pero la función logaritmo principal envía a dichos puntos en aquéllos con parte imaginaria estrictamente entre $\theta - \pi$ y θ . O sea que el semiplano es enviado por Log en la franja horizontal

$$\{z \in \mathbb{C} : \theta - \pi < \text{Im}(z) < \theta\},$$

de ancho π . Así que $(\alpha f)[\mathbb{D}] = \text{Log}[h[\mathbb{D}]]$ está contenido en dicha franja y (aplicando la función conforme $\frac{1}{\alpha}z$) Ω está contenida en la franja horizontal

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\theta}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha} < \text{Im}(z) < \frac{\theta}{\alpha}\right\},$$

de anchura $\frac{\pi}{\alpha}$.

Dado $w \in \Omega$, llamemos $\delta_\Omega(w)$ a la distancia (euclídea) de w a $\partial\Omega$. De lo anterior, es claro que

$$\delta_\Omega(w) \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \forall w \in \Omega.$$

Si λ_Ω es la densidad de la métrica hiperbólica (definición 1.28) de Ω , entonces para cada $z \in \mathbb{D}$,

$$\lambda_\Omega(f(z)) = \frac{2}{|f'(z)|(1 - |z|^2)}.$$

Por todo esto y el teorema 1.29, tenemos que

$$\frac{\pi}{2M \text{sen}\left(\frac{\pi}{2M}\delta_\Omega(w)\right)} \leq \lambda_\Omega(w)$$

para toda $w \in \Omega$, donde $M = \frac{\pi}{2\alpha}$; o sea que

$$\frac{\alpha}{\text{sen}[\alpha\delta_\Omega(f(z))]} \leq \lambda_\Omega(f(z)) \text{ para cualquier } z \in \mathbb{D}. \quad (5.1)$$

Entonces llegamos a que

$$\frac{\alpha}{\text{sen} [\alpha \delta_{\Omega} (f(z))]} \leq \frac{2}{|f'(z)| (1 - |z|^2)},$$

o sea que

$$\text{sen} [\alpha \delta_{\Omega} (f(z))] \geq \frac{\alpha}{2} |f'(z)| (1 - |z|^2), \forall z \in \mathbb{D}. \quad (5.2)$$

Haciendo $z = 0$ se obtiene $\text{sen}[\alpha \delta_{\Omega} (0)] \geq \frac{\alpha}{2}$, luego

$$\alpha \delta_{\Omega} (0) \geq \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$$

(porque $\alpha \delta_{\Omega} (0) \leq \frac{\pi}{2}$), o sea

$$\delta_{\Omega} (0) \geq \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}.$$

Pero $\delta_{\Omega} (0)$ no es más que ρ_f , el radio de Köbe de f . Hemos hallado, pues, una cota inferior para el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$:

$$R'_{\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}.$$

Cota superior.

Ejemplo 5.1 . *El siguiente ejemplo muestra que se cumple la otra desigualdad*
($R'_\alpha \leq \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$):

Sea $\alpha \in (0; 2)$. Consideremos la función

$$g_\alpha(z) = \frac{z}{1 - e^{i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} z} \quad (\text{transformación de Möbius}).$$

Como

$$\frac{z}{1 - e^{i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} z} = -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 1 = z \left(e^{i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} - \alpha \right)$$

y

$$\left| e^{i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} - \alpha \right| = \left| -\frac{\alpha}{2} - i\sqrt{1 - \alpha^2/4} \right| = 1,$$

entonces $-\frac{1}{\alpha} \notin g_\alpha [\mathbb{D}]$. Como $g_\alpha(0) = 0$,

$$g'_\alpha(z) = \frac{1}{\left(1 - e^{i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} z\right)^2}$$

luego $g'_\alpha(0) = 1$ y, claramente, $\infty \notin g_\alpha [\mathbb{D}]$, entonces la función

$$f_\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{Log} (1 + \alpha g_\alpha)$$

pertenece a $\mathbf{C} \cap \text{EC}(\alpha)$, de acuerdo con el corolario 3.2.

Se sabe que $g_\alpha [\mathbb{D}]$ es el semiplano que contiene al origen, cuya frontera (recta) es tangente al círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el punto $-\frac{1}{2} e^{-i\text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}}$. O sea que dicha recta pasa por $-\frac{1}{\alpha}$ y tiene ángulo de inclinación $\text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$ (véase la figura **3**) .

Así, $(1 + \alpha g_\alpha) [\mathbb{D}]$ (aplicando $1 + \alpha z$) es el semiplano que contiene a 1, cuya frontera pasa por el origen y tiene la misma inclinación. Al aplicar Log , los rayos (semirrectas que parten del origen) son enviados en rectas horizontales (por mantener el argumento constante). Los rayos que constituyen la frontera de $(1 + \alpha g_\alpha) [\mathbb{D}]$ pasan por $e^{i\text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}}$ y $e^{i(\text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} - \pi)}$, luego sus

imágenes bajo Log son las rectas horizontales que pasan por los puntos $i\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}$ e $i(\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}-\pi)$, respectivamente. O sea que

$$(\alpha f_\alpha) [\mathbb{D}] = \text{Log}(1 + \alpha g_\alpha) [\mathbb{D}]$$

es la franja horizontal (de anchura π) limitada por dichas rectas. Finalmente, al aplicar la función $\frac{1}{\alpha}z$, es fácil ver que $f_\alpha [\mathbb{D}]$ es la franja horizontal (de anchura $\frac{\pi}{\alpha}$)

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{\alpha} < \text{Im}(z) < \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Como $0 < \text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} = \left| \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{\alpha} \right|;$$

por consiguiente, el punto de la frontera de $f_\alpha [\mathbb{D}]$ más próximo al origen es $\frac{i}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}$, lo cual significa que el radio de Köbe de f_α es $\frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}$.

Algo semejante (reflejando respecto al eje real) se obtiene si se toma la función

$$\widetilde{f}_\alpha = \frac{1}{\alpha}\text{Log}(1 + \alpha \widetilde{g}_\alpha),$$

donde

$$\widetilde{g}_\alpha(z) = \frac{z}{1 - e^{-i\text{Cos}^{-1}\frac{\alpha}{2}z}}.$$

Aquí, el rango $\widetilde{f}_\alpha [\mathbb{D}]$ es la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2} \right\}$$

(también de anchura $\frac{\pi}{\alpha}$).

Así que los radios de Köbe de f_α y \widetilde{f}_α son iguales a $\frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}$. Por consiguiente,

$$R'_\alpha = \inf \{ \rho_f : f \in \mathbb{C} \cap EC(\alpha) \} \leq \frac{1}{\alpha}\text{Sen}^{-1}\frac{\alpha}{2}.$$

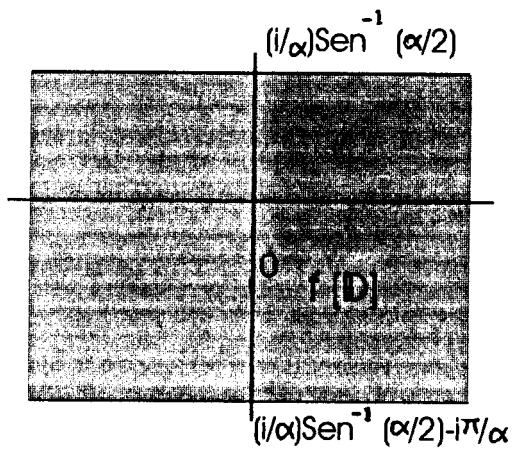
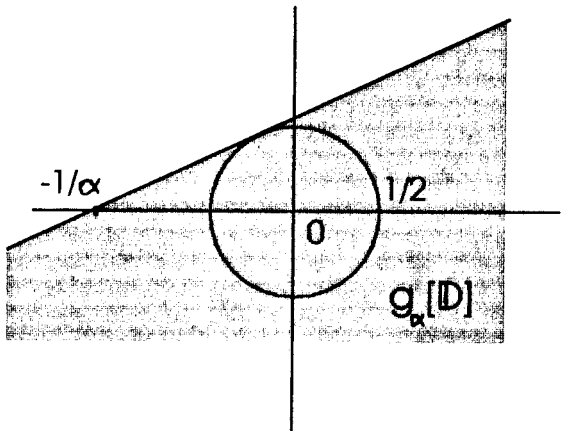


Figura 3.

Funciones extremales.

Se tiene, pues, que $R'_\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$.

Las funciones f_α y \widetilde{f}_α del ejemplo 5.1 tienen radio de Kőbe igual a $\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$. Pero, ¿habrá otras funciones extremales, además de f_α y \widetilde{f}_α ?

Para estudiar esto, sea $f \in \mathbf{C} \cap EC(\alpha)$ tal que

$$\rho_f = \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}.$$

Entonces, con las notaciones de arriba, $\delta_\Omega(0) = \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$, luego se da la igualdad en (5.2) y, por consiguiente, en (5.1), para $z = 0$. Vemos, pues, que se da la igualdad en la desigualdad del

teorema 1.29 para $z = 0$, lo cual implica que $\Omega = f[\mathbb{D}]$ es una franja de ancho $2M = \frac{\pi}{\alpha}$. Como

$$\Omega \subseteq \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\theta}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha} < \text{Im}(z) < \frac{\theta}{\alpha} \right\},$$

franja de ancho $\frac{\pi}{\alpha}$, entonces esta contención no puede ser estricta, debiéndose cumplir la igualdad.

O sea que (aplicando αz)

$$\text{Log}[h[\mathbb{D}]] = (\alpha f)[\mathbb{D}] = \{z \in \mathbb{C} : \theta - \pi < \text{Im}(z) < \theta\},$$

luego $h[\mathbb{D}]$ es la imagen bajo la función exponencial de esta última franja horizontal; como tiene anchura π , su imagen es un semiplano cuya frontera pasa por el origen (es la unión de rayos que forman un ángulo con vértice en 0 y con amplitud π).

Aplicando la función conforme $\frac{1}{\alpha}(z-1)$, vemos que $g[\mathbb{D}] = \frac{1}{\alpha}(h-1)[\mathbb{D}]$ es un semiplano cuya frontera pasa por $-\frac{1}{\alpha}$. Pero la normalización de g (ver el teorema 1.25) implica que existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{it}z}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Se sabe que $\partial g[\mathbb{D}]$ es una recta tangente al círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ en el punto $e^{i(\pi-t)} = -e^{it}$; pero como pasa por $-\frac{1}{\alpha}$, entonces (véase la figura 3) su ángulo de inclinación es

$$\pm \text{Sen}^{-1} \frac{1/2}{1/\alpha} = \pm \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2},$$

o sea que el punto de tangencia tiene argumento principal $\pm(\pi - \text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2})$, lo cual significa que

$$-e^{it} = e^{\pm(\pi - \text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2})} = e^{\pm\pi} \cdot e^{\mp \text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} = -e^{\mp \text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{\mp \text{Cos}^{-1} \frac{\alpha}{2}} z},$$

o sea que $f = f_\alpha$ ó $f = \widetilde{f}_\alpha$.

En conclusión, las únicas funciones extremales son f_α y \widetilde{f}_α .

Resumiendo los resultados anteriores, tenemos el

Teorema 5.2 . *Dados $\alpha \in (0; 2)$ y $f \in \mathbf{C} \cap EC(\alpha)$, se tiene que*

$$\frac{\alpha}{2} |f'(z)| (1 - |z|^2) \leq \text{sen}[\alpha \delta_{\Omega}(f(z))]$$

para cada $z \in \mathbb{D}$, donde $\Omega = f[\mathbb{D}]$ y $\delta_{\Omega}(f(z))$ es la distancia de $f(z)$ a $\partial\Omega$. Haciendo $z = 0$ obtenemos $\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} \leq \rho_f$ (el radio de Köbe de f). Además, $\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} < \rho_f$, a menos que f sea una de las funciones f_{α} ó \widetilde{f}_{α} del ejemplo 5.1. Así que $R'_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$ es el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$.

Capítulo 6

RADIO DE KÖBE DE $EC(\alpha)$.

Estudiaremos, ahora, el radio de Köbe de la clase $EC(\alpha)$.

Por el teorema 4.4, dada $f \in EC(\alpha)$, la función $F(z) = cf(c^{-1}z)$, donde $c = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, pertenece a $EC(|\alpha|)$. El rango de F es una rotación del de f (definición 1.17), luego sus radios de Köbe (definición 1.8) son iguales. Por consiguiente, el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ es mayor o igual que el de $EC(|\alpha|)$.

Recíprocamente, dada $F \in EC(|\alpha|)$, la función $f(z) = c^{-1}F(cz)$ está en $EC(\alpha)$ y tiene el mismo radio de Köbe. O sea que el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ es menor o igual que el de $EC(|\alpha|)$.

La igualdad de los radios de Köbe de $EC(\alpha)$ y de $EC(|\alpha|)$ implica que el problema de hallarlo puede reducirse al caso $\alpha > 0$. Consideraremos, pues, $0 < \alpha < 2$, R_α el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ y $f \in EC(\alpha)$.

Cotas superior e inferior.

Para obtener una cota superior para R_α , basta considerar una función particular de $EC(\alpha)$.

Para esto, tomemos la aplicación f_α del ejemplo 5.1. Recordemos que el rango de f_α es la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{\alpha} < \text{Im}(z) < \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} \right\},$$

así que su radio de Köbe, $\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$, es una cota superior para R_α .

Para la cota inferior, tenemos la siguiente

Proposición 6.1 . $R_\alpha \geq \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right)$.

Demostración: Supongamos que

$$R_\alpha < \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Entonces existe $f \in EC(\alpha)$ con radio de Kőbe (= $\inf \{ |w| : w \in \partial f [\mathbb{D}] \}$) menor que este valor.

Así, existe $w_o \in \partial f [\mathbb{D}]$ tal que

$$|w_o| < \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Sea $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g)$$

y definamos

$$z_o = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha w_o) - \frac{1}{\alpha}$$

(para que $w_o = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha z_o)$), $t_o = \text{Arg}(w_o)$ (el argumento principal) y $r_o = \alpha |w_o|$.

Tenemos, entonces, que

$$r_o < \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) < \ln 2 < \frac{\pi}{2},$$

$\alpha w_o = r_o e^{it_o}$ y

$$1 + \alpha z_o = \exp(\alpha w_o) = \exp [r_o \cos t_o + i r_o \text{sen } t_o].$$

Así,

$$\begin{aligned} |\alpha z_o|^2 &= \left| e^{r_o \cos t_o} [\cos (r_o \text{sen } t_o) + i \text{sen } (r_o \text{sen } t_o)] - 1 \right|^2 \\ &= e^{2r_o \cos t_o} - 2e^{r_o \cos t_o} \cos (r_o \text{sen } t_o) + 1. \end{aligned}$$

Hagamos

$$\psi_r(t) = e^{2r \cos t} - 2e^{r \cos t} \cos (r \text{sen } t) + 1$$

para $t \in [-\pi; \pi]$, con $r \in (0; \pi/2)$ (r fijo).

$$\psi'_r(t) = 2re^{r \cos t} \left[-\text{sen } t \cdot e^{r \cos t} + \text{sen } t \cdot \cos(r \text{sen } t) + \cos t \cdot \text{sen}(r \text{sen } t) \right]$$

$$= -2re^r \cos t \left[\sin t \cdot e^{r \cos t} - \sin(t + r \sin t) \right].$$

Consideremos

$$A = \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \times [0; \pi]$$

y

$$\varphi(r, t) = \sin t \cdot e^{r \cos t} - \sin(t + r \sin t) \text{ para } (r, t) \in A.$$

Sea (r, t) un punto crítico de φ en $(0; \pi/2) \times (0; \pi)$.

Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

o sea que

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sin t \cdot e^{r \cos t} \cos t - \cos(t + r \sin t) \cdot \sin t,$$

luego (por ser $\sin t \neq 0$)

$$e^{r \cos t} \cos t = \cos(t + r \sin t),$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= \cos t \cdot e^{r \cos t} - r \sin^2 t \cdot e^{r \cos t} - \cos(t + r \sin t) \cdot (1 + r \cos t), \end{aligned}$$

luego

$$\cos t - r \sin^2 t - \cos t \cdot (1 + r \cos t) = 0,$$

lo cual implica que $r = 0$, contradiciendo lo anterior.

Así que φ no tiene puntos críticos en el interior del rectángulo A , o sea que toma su valor mínimo en la frontera.

Es claro que φ se anula si $t = 0$, $t = \pi$ o $r = 0$.

Para $r = \frac{\pi}{2}$, sea

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi\left(\frac{\pi}{2}, t\right) \\ &= \operatorname{sen} t \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cos t} - \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t\right),\end{aligned}$$

con $t \in (0; \pi)$.

Definiendo $\omega(t) = t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t$, consideremos los siguientes casos:

a) Si $t \geq \frac{\pi}{2}$:

Así,

$$\omega'(t) = 1 + \frac{\pi}{2} \cos t$$

y

$$\omega''(t) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t < 0$$

para $t \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Como

$$\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi = \omega(\pi),$$

entonces $\omega(t) \geq \pi$, luego

$$\pi \leq t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t < \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

o sea que

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t\right) \leq 0$$

y $\varphi(t) > 0$.

b) Si $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2}$:

ω es estrictamente creciente en $(0; \frac{\pi}{2})$, luego

$$\pi = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right) > \omega(t) \geq \omega\left(\frac{\pi}{3}\right) > \omega\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi}{2},$$

y así,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}t\right) &= \operatorname{sen}(\omega(t)) \leq \operatorname{sen}\left(\omega\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 0,66988.\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\cos t > 0$, entonces

$$\operatorname{sen}t \cdot e^{\frac{\pi}{2}\cos t} > \operatorname{sen}t \geq \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \simeq 0,866.$$

Así que $\varphi(t) > 0$.

c) Si $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{3}$:

$$\pi > \omega\left(\frac{\pi}{3}\right) > \omega(t) \geq \omega\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{2},$$

luego

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}t\right) &\leq \operatorname{sen}\left(\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 0,94755,\end{aligned}$$

mientras que

$$\operatorname{sen}t \cdot e^{\frac{\pi}{2}\cos t} > \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot e^{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}} \simeq 1,55.$$

Por consiguiente, $\varphi(t) > 0$.

d) Si $\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}t\right) &\leq 1 < 1,51827 \\ &\simeq \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot e^{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}} < \operatorname{sen}t \cdot e^{\frac{\pi}{2}\cos t},\end{aligned}$$

luego $\varphi(t) > 0$.

e) Si $t \leq \frac{\pi}{6}$:

$\operatorname{sen}t \leq \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, luego

$$t + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}t \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} \left(t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t \right) < t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t.$$

Así,

$$\varphi(t) > \operatorname{sen} t \left(e^{\frac{\pi}{2} \cos t} - \frac{\pi}{2} \right) - t \quad (\text{para } t \neq 0),$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{t} &> \frac{\operatorname{sen} t}{t} \left(e^{\frac{\pi}{2} \cos t} - \frac{\pi}{2} \right) - 1 \\ &> \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\pi/6} \left(e^{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{2} \right) - 1 > 0, \end{aligned}$$

ya que las funciones $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ y $e^{\frac{\pi}{2} \cos t}$ son decrecientes en $(0; \pi)$. Entonces $\varphi(t) > 0$.

En conclusión, $\varphi(t) > 0$ para $t \in (0; \pi)$, luego $\varphi(r, t) \geq 0$ para $(r, t) \in A$.

O sea que $\psi'_r(t) < 0$ para $t \in (0; \pi)$. Como $\psi'_r(-t) = -\psi'_r(t)$, entonces $\psi'_r(t) > 0$ para $t \in (-\pi; 0)$. Esto implica que $\psi_r(0) \geq \psi_r(t)$ para $t \in [-\pi; \pi]$ (y para todo $r \in (0; \pi/2)$).

O sea que

$$\begin{aligned} |\alpha z_o|^2 &= \psi_{r_o}(t_o) \leq \psi_{r_o}(0) \\ &= e^{2r_o} - 2e^{r_o} + 1 = (e^{r_o} - 1)^2, \end{aligned}$$

luego

$$\alpha |z_o| \leq e^{r_o} - 1 = e^{\alpha |w_o|} - 1 < \frac{\alpha}{2}$$

y así, $|z_o| < \frac{1}{2}$, lo cual significa (teorema 1.25) que $z_o \in g[\mathbb{D}]$. Sea $v \in \mathbb{D}$ tal que $z_o = g(v)$.

Entonces (ya que $|\alpha w_o| < \pi$)

$$\begin{aligned} w_o &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} (1 + \alpha z_o) \\ &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} (1 + \alpha g(v)) \\ &= f(v) \in f[\mathbb{D}] = \operatorname{int} f[\mathbb{D}], \end{aligned}$$

contradiciendo el hecho de que $w_o \in \partial f[\mathbb{D}]$ ($f[\mathbb{D}]$ es abierto en \mathbb{C} por el teorema de la función abierta, ya que f es analítica y univalente).

Por lo tanto,

$$R_\alpha \geq \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right). \blacksquare$$

Nota 8 . Como $EC(\alpha) \subseteq \mathbf{S}$, cuyo radio de Köbe es $\frac{1}{4}$, ésta es una cota inferior trivial para R_α . Veamos que hemos mejorado esta cota, o sea que

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right)$$

para cualquier $\alpha \in (0; 2)$:

Sea

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Así,

$$\sigma'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2}{2+\alpha} \cdot \frac{1}{2}.$$

Haciendo $x = \frac{2+\alpha}{2}$, tenemos que $\alpha = 2x - 2$, luego

$$\alpha^2 \cdot \sigma'(\alpha) = -\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \ln x,$$

con $x \in (1; 2)$.

Si

$$\lambda(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x,$$

entonces

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < 0,$$

luego $\lambda(x) < \lambda(1) = 0$, o sea que $\sigma'(\alpha) < 0$. Así,

$$\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) = \sigma(\alpha) > \sigma(2) = \frac{\ln 2}{2} > \frac{1}{4}.$$

Nota 9 . Para los casos extremos, tenemos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{2+\alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(para la cota inferior) y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \text{sen } x} = \frac{1}{2}$$

(para la cota superior).

Y $\frac{1}{2}$ es, precisamente, el radio de Köbe de $EC(0) = \mathbf{C}$.

Lema 6.2 . Sea $(B_n)_n$ una sucesión de discos abiertos de \mathbf{C} con centro en el origen. Si la sucesión de sus respectivos radios, $(r_n)_n$, está acotada y

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0,$$

entonces $\ker (B_n)_n$ (definición 1.26) es el disco abierto $B = \mathbb{D}_r$ (con centro en 0 y radio r).

Prueba: Es claro que

$$p = \inf \{ r_n : n \in \mathbb{N} \} > 0,$$

luego $\mathbb{D}_p \subseteq B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$; o sea que

$$0 \in \mathbb{D}_p = \text{int} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Sea K un subconjunto compacto de B . Entonces existe $r' > 0$ tal que $K \subseteq \mathbb{D}_{r'}$ y $\overline{\mathbb{D}_{r'}} \subseteq B = \mathbb{D}_r$. Así,

$$r' < r = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n,$$

luego $r' < r_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto para un número finito; y entonces

$$K \subseteq \mathbb{D}_{r'} \subseteq \mathbb{D}_{r_n} = B_n$$

para esas mismas n . Por consiguiente, $B \subseteq \ker (B_n)_n$.

Sea, ahora, $z \in \ker (B_n)_n$. Como $\ker (B_n)_n$ es abierto, entonces existe $w \in \ker (B_n)_n$ tal que $|w| > |z|$. Entonces (como $\{w\}$ es compacto) $w \in B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto para un número finito; luego (para esas n) $|w| < r_n$ y, por lo tanto,

$$|w| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n,$$

luego $|z| < r$; o sea que $z \in \mathbb{D}_r = B$. Por tanto, $\ker(B_n)_n \subseteq B$. ■

Teorema 6.3 . Sea $(f_n)_n$ una sucesión en \mathbf{S} que converge (uniformemente en compactos de \mathbb{D}) a una función f de \mathbf{S} . Si $(r_n)_n$ es la sucesión de sus respectivos radios de Köbe, entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho_f$$

(el radio de Köbe de f).

Demostración: Sean (para cada $n \in \mathbb{N}$) B_n el disco (abierto) de Köbe de f_n (con centro en 0 y radio r_n), B el disco de Köbe de f , $D_n = f_n[\mathbb{D}]$ y $D = \ker(D_n)_n$.

Veamos primero que $B \subseteq \ker(B_n)_n$:

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n \geq \frac{1}{4}$ (radio de Köbe de la clase \mathbf{S}), entonces $\mathbb{D}_{1/4} \subseteq B_n \subseteq D_n$, luego $\ker(D_n)_n \neq \{0\}$ y $\ker(B_n)_n \neq \{0\}$.

Por el teorema de la convergencia de Carathéodory (teorema 1.27), $f[\mathbb{D}] = D$.

Sea K un subconjunto compacto de B . Entonces existe $p > 0$ tal que

$$K \subseteq \mathbb{D}_p \subseteq \overline{\mathbb{D}_p} \subseteq B.$$

Así, $\overline{\mathbb{D}_p}$ es un subconjunto compacto de $f[\mathbb{D}] = \ker(D_n)_n$ (porque $B \subseteq f[\mathbb{D}]$). Entonces $\overline{\mathbb{D}_p} \subseteq D_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto para un número finito. Para cualquiera de estas n , $\overline{\mathbb{D}_p} \subseteq B_n$, ya que éste es el disco abierto de mayor radio, con centro en el origen, contenido en $f_n[\mathbb{D}] = D_n$. Por consiguiente, $K \subseteq B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto para un número finito; o sea que $B \subseteq \ker(B_n)_n$.

Sea, ahora,

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n.$$

Claramente $r > 0$ (de hecho $r \geq 1/4$). Además, $r_n \leq 1$ para cada n (por el corolario 1.24), luego el lema anterior nos dice que $\ker(B_n)_n$ es el disco abierto \mathbb{D}_r . Y de acuerdo con lo anterior, $B \subseteq \mathbb{D}_r$, luego $\rho_f \leq r$.

Supongamos ahora que $\rho_f < r$. Sea q tal que $\rho_f < q < r$. Así, $\overline{\mathbb{D}_q}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}_r = \ker(B_n)_n$, luego $\overline{\mathbb{D}_q} \subseteq B_n \subseteq D_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto para un número

finito; por consiguiente,

$$\overline{\mathbb{D}}_q \subseteq \ker (D_n)_n = f[\mathbb{D}].$$

Pero esto implica que $\overline{\mathbb{D}}_q \subseteq B$ (el disco abierto de mayor radio, con centro en el origen, contenido en $f[\mathbb{D}]$), lo cual es absurdo (porque $\rho_f < q$). Por lo tanto,

$$\rho_f = r = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n. \blacksquare$$

Corolario 6.4 . Si \mathcal{A} es una clase compacta en \mathbf{S} y R es el radio de Kőbe de \mathcal{A} , entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $R = \rho_f$.

Prueba:

$$R = \inf \{ \rho_f : f \in \mathcal{A} \},$$

luego existe una sucesión $(f_n)_n$ en \mathcal{A} tal que $R = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, donde $r_n = \rho_{f_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como \mathcal{A} es compacta (definición 1.2) , existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ que converge a una función f de \mathcal{A} . Por el teorema anterior (la sucesión $(r_{n_k})_k$ está acotada porque converge a R),

$$\rho_f = \liminf_{k \rightarrow \infty} r_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k} = R. \blacksquare$$

Corolario 6.5 . La desigualdad en la proposición 6.1 es estricta:

$$R_\alpha > \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Demostración: Sabemos que

$$R_\alpha \geq \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Supongamos que

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Como $EC(\alpha)$ es una clase compacta (teorema 4.1), existe $f \in EC(\alpha)$ tal que $R_\alpha = \rho_f$.

Sean $g \in \mathbf{C}$ tal que

$$f = \frac{1}{\alpha} \text{Log}(1 + \alpha g)$$

y $r = \alpha\rho_f$. Así, $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{2})$, luego $e^r = 1 + \frac{\alpha}{2}$.

Por ser $\partial f [\mathbb{D}]$ cerrada y $\{0\}$ compacto, existe $w_o \in \partial f [\mathbb{D}]$ tal que

$$\rho_f = \text{dist}(\partial f [\mathbb{D}], 0) = |w_o|.$$

Así, $|\alpha w_o| = \alpha\rho_f = r$. Pero

$$\alpha w_o \in \partial(\alpha f) [\mathbb{D}] = \partial \text{Log}(1 + \alpha g) [\mathbb{D}],$$

luego

$$\exp(\alpha w_o) \in \partial(1 + \alpha g) [\mathbb{D}]$$

(porque la funciones αz y exponencial son conformes).

Sean $\gamma(t) = \exp(re^{it})$ para $t \in [-\pi; \pi]$, y

$$z_o = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha w_o) - \frac{1}{\alpha}.$$

Así,

$$1 + \alpha z_o = \exp(\alpha w_o) \in \partial(1 + \alpha g) [\mathbb{D}],$$

luego $z_o \in \partial g [\mathbb{D}]$ (por la conformidad de la función $1 + \alpha z$). Entonces $|z_o| \geq \frac{1}{2}$ (radio de Kőbe de \mathbf{C}).

Pero existe $t_o \in [-\pi; \pi]$ tal que $\alpha w_o = |\alpha w_o| e^{it_o}$, o sea que $\alpha w_o = r e^{it_o}$.

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - 1|^2 &= |\exp(r \cos t + ir \sin t) - 1|^2 \\ &= \left| e^{r \cos t} [\cos(r \sin t) + i \sin(r \sin t)] - 1 \right|^2 \\ &= e^{2r \cos t} - 2e^{r \cos t} \cos(r \sin t) + 1 \end{aligned}$$

coincide con la función $\psi_r(t)$ de la demostración de la proposición 6.1. Y allí se probó que para todo $t \in [-\pi; \pi]$, $\psi_r(t) \leq \psi_r(0)$. Ahora bien,

$$\psi_r(t_o) = |\gamma(t_o) - 1|^2 = |\exp(\alpha w_o) - 1|^2 = |\alpha z_o|^2$$

y

$$\psi_r(0) = |e^r - 1|^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

luego $|\alpha z_o| \leq \frac{\alpha}{2}$, o sea que $|z_o| \leq \frac{1}{2}$.

Por consiguiente, $|z_o| = \frac{1}{2}$, lo cual implica que

$$\psi_r(t_o) = |\alpha z_o|^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \psi_r(0).$$

Como ψ_r es estrictamente creciente en $[-\pi; 0]$ y estrictamente decreciente en $[0; \pi]$, entonces $t_o = 0$, o sea que $\alpha w_o = r$ y

$$z_o = \frac{1}{\alpha}(e^r - 1) = \frac{1}{2}.$$

Entonces $\frac{1}{2} \in \partial g[\mathbb{D}]$, luego (por el teorema 1.25) $g(z) = \frac{z}{1-cz}$, $\forall z \in \mathbb{D}$, con $c \in \partial\mathbb{D}$. Pero así, c debe valer 1 y $g[\mathbb{D}]$ es el semiplano

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \right\},$$

luego (como $\alpha \in (0; 2)$) $-\frac{1}{\alpha} \in g[\mathbb{D}]$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, $R_\alpha > \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \frac{\alpha}{2})$. ■

Observaciones finales.

Se tienen una cota inferior estricta ($\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \frac{\alpha}{2})$) para el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ y una cota superior ($\frac{1}{\alpha} \operatorname{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$), que coincide con el radio de Köbe de $\mathbf{C} \cap EC(\alpha)$.

Uno podría estar tentado a pensar que $\frac{1}{\alpha} \operatorname{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$ es también el radio de Köbe de $EC(\alpha)$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esto no es cierto (al menos para $\alpha < 1,25$ aproximadamente).

Ejemplo 6.6 . Se sabe que la función $\frac{1+z}{1-z}$ envía a \mathbb{D} conformemente sobre el semiplano derecho

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Al aplicar Log se obtiene la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Las funciones iz y $\frac{\pi}{2} + z$ rotan y trasladan, respectivamente, dicha franja. Aplicando, finalmente, la contracción $\frac{1}{x}z$, para $x > 0$, obtenemos la función

$$J_x(z) = \frac{1}{x} \left[\frac{\pi}{2} + i \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right],$$

que envía a \mathbb{D} conformemente sobre la franja vertical

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{x} \right\}.$$

Sean, ahora, $x < \pi$,

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{i \cos x}{1 + \text{sen } x} \\ \text{y } T_x(z) &= \frac{z + w_x}{1 + \overline{w_x} z} \end{aligned}$$

(un automorfismo del disco unidad \mathbb{D}). Así, $T_x(0) = w_x$ y

$$\begin{aligned} \frac{1 + w_x}{1 - w_x} &= \frac{1 + \text{sen } x + i \cos x}{1 + \text{sen } x - i \cos x} \cdot \frac{1 + \text{sen } x + i \cos x}{1 + \text{sen } x + i \cos x} \\ &= \frac{1 + 2\text{sen } x + \text{sen}^2 x - \cos^2 x + 2i \cos x (1 + \text{sen } x)}{1 + 2\text{sen } x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{2\text{sen } x + 2\text{sen}^2 x + 2i \cos x (1 + \text{sen } x)}{2(1 + \text{sen } x)}. \end{aligned}$$

Simplificando, tenemos que

$$\frac{1 + w_x}{1 - w_x} = \text{sen } x + i \cos x.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\text{Log} \left(\frac{1+w_x}{1-w_x} \right) &= \ln \left| \frac{1+w_x}{1-w_x} \right| + i \text{Arg} \frac{1+w_x}{1-w_x} \\
&= \ln(1) + i \text{Tan}^{-1} \cot x \\
&= i \left(\frac{\pi}{2} - x \right),
\end{aligned}$$

luego

$$J_x(w_x) = \frac{1}{x} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] = 1.$$

Tomemos, para $\alpha \in (0; 2)$, la aplicación

$$H_\alpha(z) = (J_{x_\alpha} \circ T_{x_\alpha})(-iz),$$

donde x_α es la única raíz de la ecuación $\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\alpha}{2}$ en el intervalo $(0; \pi)$ (aquí la función $\frac{\text{sen } x}{x}$, con derivada $\frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$, es estrictamente decreciente). Como

$$T'_{x_\alpha}(z) = \frac{1 + \bar{w}z - \bar{w}(z+w)}{(1 + \bar{w}z)^2} = \frac{1 - |w|^2}{(1 + \bar{w}z)^2},$$

para $w = w_{x_\alpha}$, y

$$J'_{x_\alpha}(z) = \frac{i}{x} \cdot \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2i}{x(1-z^2)},$$

entonces $T'_{x_\alpha}(0) = 1 - |w|^2$ y

$$\begin{aligned}
H'_\alpha(0) &= J'_{x_\alpha}(T_{x_\alpha}(0)) \cdot T'_{x_\alpha}(0) \cdot (-i) \\
&= \frac{2i(1 - |w|^2)}{x(1 - w^2)} \cdot (-i) \\
&= \frac{2}{x} \cdot \frac{1 - |w|^2}{1 - w^2}.
\end{aligned}$$

Pero

$$1 - w^2 = \frac{1 + 2\text{sen } x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1 + \text{sen } x)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1 + \operatorname{sen} x)}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{2}{1 + \operatorname{sen} x}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
1 - |w|^2 &= \frac{1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{2\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x},
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1 - |w|^2}{1 - w^2} = \operatorname{sen} x,$$

luego

$$H'_\alpha(0) = \frac{2\operatorname{sen} x}{x} = \alpha.$$

Sea, entonces,

$$G_\alpha = \frac{1}{\alpha} (H_\alpha - 1).$$

Como

$$H_\alpha [\mathbb{D}] = J_{x_\alpha} [T_{x_\alpha} [\mathbb{D}]] = J_{x_\alpha} [\mathbb{D}]$$

es una franja vertical, entonces $G_\alpha [\mathbb{D}]$ también lo es, luego G_α es una función convexa. Además,

$$\begin{aligned}
G_\alpha(0) &= \frac{1}{\alpha} (J_{x_\alpha} (T_{x_\alpha}(0)) - 1) \\
&= \frac{1}{\alpha} (J_{x_\alpha} (w_{x_\alpha}) - 1) \\
&= \frac{1}{\alpha} (1 - 1) = 0,
\end{aligned}$$

$$G'_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha} H'_\alpha(0) = 1$$

y G_α es analítica y univalente (por ser la compuesta de funciones analíticas univalentes).

Por consiguiente, $G_\alpha \in \mathbf{C}$.

Por lo visto arriba,

$$0 \notin J_{x_\alpha} [\mathbb{D}] = H_\alpha [\mathbb{D}],$$

luego $-\frac{1}{\alpha} \notin G_\alpha [\mathbb{D}]$. Por lo tanto, la aplicación

$$F_\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{Log} (1 + \alpha G_\alpha) = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \circ H_\alpha$$

pertenece a la clase $EC(\alpha)$. Para visualizar la gráfica de $F_\alpha [\mathbb{D}] = \frac{1}{\alpha} \text{Log}[H_\alpha [\mathbb{D}]]$, recordemos que $H_\alpha [\mathbb{D}]$ es la franja vertical

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{x_\alpha} \right\},$$

que es enviada por la función $\frac{1}{\alpha} \text{Log}$ (conformemente) sobre la región contenida en la franja horizontal

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2\alpha} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$$

que se encuentra a la izquierda de una curva que pasa por el punto $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\pi}{x_\alpha}$ y que tiene por asíntotas las rectas

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = -\frac{\pi}{2\alpha} \right\}$$

y

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$$

(véase la figura 4).

Nota 10 . *Este ejemplo muestra que para $0 < |\alpha| < 2$, la clase $EC(\alpha)$ no está contenida en \mathbf{S}^* .*

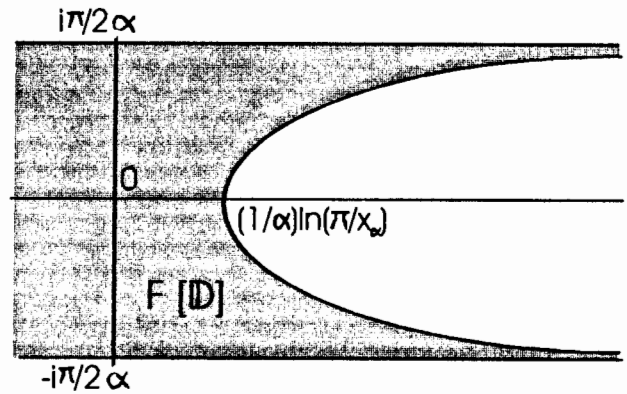
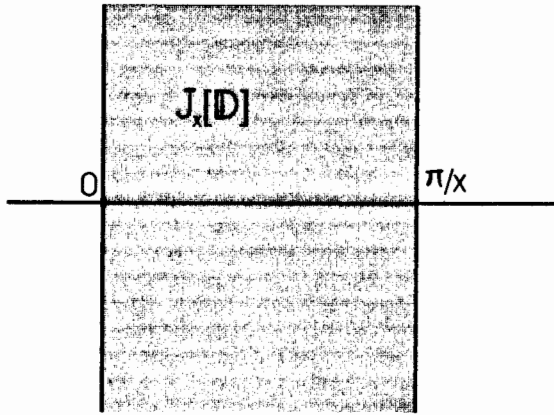


Figura 4.

De la gráfica (figura 4) puede observarse que

$$\rho_{F_\alpha} = \min \left\{ \frac{\pi}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\pi}{x_\alpha} \right\},$$

donde x_α es la única raíz de la ecuación $\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\alpha}{2}$ para $x \in (0; \pi)$.

Como

$$\begin{aligned} \ln \frac{\pi}{x_\alpha} < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{x_\alpha} < e^{\pi/2} \\ &\Leftrightarrow x_\alpha > \frac{\pi}{e^{\pi/2}} \approx 0,653 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen } x_\alpha}{x_\alpha} < \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}} \right)}{\frac{\pi}{e^{\pi/2}}} \\ &\Leftrightarrow \alpha < 2 \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}} \right)}{\frac{\pi}{e^{\pi/2}}} \approx 1,8608, \end{aligned}$$

entonces $\rho_{F_\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\pi}{x_\alpha}$ para

$$\alpha < 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}} \right)}{\frac{\pi}{e^{\pi/2}}}.$$

Si

$$\alpha \geq 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}} \right)}{\frac{\pi}{e^{\pi/2}}},$$

entonces $\rho_{F_\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha}$, que es mayor que $\frac{1}{\alpha} \operatorname{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$.

Para el caso

$$\alpha < 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}} \right)}{\frac{\pi}{e^{\pi/2}}},$$

consideremos la función

$$\psi(x) = \operatorname{Sen}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \ln \frac{\pi}{x}, \text{ para } x \in (0; \pi].$$

Vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = -\infty$$

y $\psi(\pi) = 0$. Además,

$$\psi \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \operatorname{Sen}^{-1} \frac{1/2}{5\pi/6} - \ln \frac{6}{5} \approx 0,19216 - 0,18232 > 0.$$

Analicemos el crecimiento de ψ :

Como

$$\psi(x) = \operatorname{Sen}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \ln \pi + \ln x,$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}} \cdot \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}} + 1 \right), \end{aligned}$$

así que $\psi'(x) = 0$ si y sólo si

$$x \cos x - \operatorname{sen} x + \sqrt{x^2 - \operatorname{sen}^2 x} = 0.$$

Como $\operatorname{sen} x - x \cos x > 0$ para $x \in (0; \pi)$, esta condición equivale a

$$\operatorname{sen}^2 x - 2x \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x^2 \cos^2 x = x^2 - \operatorname{sen}^2 x,$$

o sea

$$2\operatorname{sen}^2 x - 2x \operatorname{sen} x \cdot \cos x - x^2 \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

o (dividiendo por $2x \operatorname{sen}^2 x$)

$$\frac{1}{x} - \cot x - \frac{x}{2} = 0.$$

Llamemos

$$h(x) = \cot x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}.$$

Así,

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} - \operatorname{csc}^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} - \cot^2 x.$$

Veamos que existe un único $x \in (0; \pi)$ tal que $h(x) = 0$, considerando los siguientes casos:

a) Si $0 < x < \sqrt{5 - \sqrt{13}}$:

$$x^2 < 5 - \sqrt{13} < 5 + \sqrt{13},$$

luego

$$(x^2 - 5 + \sqrt{13})(x^2 - 5 - \sqrt{13}) > 0,$$

o sea que $x^4 - 10x^2 + 12 > 0$.

Así,

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36} - \frac{2}{2+x^2} \\ = & \frac{72 + 36x^2 - 12x^2(2+x^2) + x^4(2+x^2) - 72}{36(2+x^2)} \\ = & \frac{x^2(x^4 - 12x^2 + 2x^2 - 24 + 36)}{36(2+x^2)} \\ = & \frac{x^2(x^4 - 10x^2 + 12)}{36(2+x^2)} > 0, \end{aligned}$$

luego

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x^2}}\right)^2.$$

Como $x < \sqrt{6}$, entonces $1 - \frac{x^2}{6} > 0$, luego

$$1 - \frac{x^2}{6} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+x^2}}.$$

Pero

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots > x - \frac{x^3}{6} > \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2+x^2}},$$

luego

$$\operatorname{csc}^2 x < \frac{2+x^2}{2x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2},$$

o sea que $h'(x) > 0$.

Así,

$$\begin{aligned} h(x) &> \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x} = 0. \end{aligned}$$

b) Si $\sqrt{5 - \sqrt{13}} \leq x < 1,3$:

Aquí, $x < \frac{\pi}{2}$, luego

$$\cot x > \cot 1,3 > 0,2776.$$

Como la función $\frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ (con derivada $\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}$) es estrictamente creciente, entonces

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{1}{x} &\geq \frac{\sqrt{5 - \sqrt{13}}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5 - \sqrt{13}}} \\ &= \frac{5 - \sqrt{13} - 2}{2\sqrt{5 - \sqrt{13}}} > -0,257, \end{aligned}$$

luego

$$h(x) > 0,2776 - 0,257 > 0.$$

c) Si $1,3 \leq x \leq \sqrt{2}$:

$x < \pi/2$, luego

$$\cot x \geq \cot \sqrt{2} > 0,157.$$

Por otra parte,

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{x} \geq \frac{1,3}{2} - \frac{1}{1,3} > -0,1193.$$

Por consiguiente,

$$h(x) > 0,157 - 0,1193 > 0.$$

Hemos visto, pues, que

$$h(x) > 0, \forall x \in (0; \sqrt{2}].$$

d) Si $\sqrt{2} < x < \pi$:

Aquí,

$$h'(x) \leq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - x^2}{2x^2} < 0.$$

Como $h(\sqrt{2}) > 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = -\infty,$$

entonces existe un único x en el intervalo $(\sqrt{2}; \pi)$ tal que $h(x) = 0$.

Ese único punto donde se anula $h(x)$, en $(0; \pi)$, es el único donde se anula $\psi'(x)$. Y por todo lo anterior, la función ψ tiene un máximo (absoluto) en dicho punto. Además (porque ψ' es continua), entre 0 y ese punto, ψ debe ser estrictamente creciente; y del punto a π debe ser estrictamente decreciente. Por lo tanto, ψ se anula en un único punto y del intervalo $(0; \pi)$. Para $x \in (0; y)$, $\psi(x) < 0$; y para $x \in (y; \pi)$, $\psi(x) > 0$.

Como la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ (con derivada $(x \cos x - \text{sen } x)/x^2 < 0$) es estrictamente decreciente en $[0; \pi]$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

y $\frac{\text{sen } \pi}{\pi} = 0$, entonces a cada valor de $\alpha \in (0; 2)$ le corresponde un único valor de $x \in (0; \pi)$ tal

que $\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\alpha}{2}$, y viceversa.

Notemos por β el valor de α correspondiente al valor de $x = y$ (el y de arriba).

Si un valor de α es menor que β , entonces su correspondiente valor de x es mayor que y , luego $\psi(x) > 0$. Así,

$$\text{Sen}^{-1} \frac{\text{sen } x}{x} - \ln \frac{\pi}{x} > 0,$$

luego

$$\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\pi}{x_\alpha},$$

o sea que el radio de Köbe de la función F_α del ejemplo 6.6 es menor que $\frac{1}{\alpha} \text{Sen}^{-1} \frac{\alpha}{2}$. Hemos obtenido, pues, una mejor cota superior para el radio de Köbe de $EC(\alpha)$ (para $\alpha < \beta$):

$$R_\alpha \leq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\pi}{x}, \text{ donde } \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\alpha}{2}, \text{ con } x \in (0; \pi).$$

Si $\alpha > \beta$, las desigualdades anteriores se cumplen en sentido contrario y no se mejora la cota superior para R_α .

Si $\alpha = \beta$, las desigualdades de arriba se convierten en igualdades, y ambas cotas coinciden.

El valor de β es, aproximadamente, 1,25.

Bibliografía

- [A] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants. Topics in geometric function theory*, MacGraw-Hill, New York, 1973.
- [C] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.
- [D] Peter L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
- [G1] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publishing Company, Vol. I, 1983.
- [G2] A. W. Goodman, *Convex functions of bounded type*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), 541-546.
- [HM] D. J. Hallenbeck and T. H. MacGregor, *Linear problems and convexity techniques in geometric function theory*, Pitman Publishing Limited, London, 1984.
- [M] C. David Minda, *Lower Bounds for the Hyperbolic Metric in Convex Regions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 13, No. 1 (1983), 61-69.
- [MM] Diego Mejía and David Minda, *Hyperbolic Geometry in k -Convex Regions*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 141, No. 2 (1990), 333-354.
- [N] R. Nevalinna, *Analytic functions*, Springer-Verlag, 1970.
- [P] Christian Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [S] Glenn Schober, *Univalent Functions - selected topics*, Springer-Verlag, 1975.
- [W] K.-J. Wirths, *Coefficient bounds for convex functions of bounded type*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 525-530.