UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas

Development of Variational Thought in Primary Students, through Problem Based Learning Activities

Diego Fernando Paladinez Salazar

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2018

Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas

Diego Fernando Paladinez Salazar

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

MS.c Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2018

Dedicatoria

“He sido un hombre afortunado en la vida: nada me fue fácil”

Sigmund Freud

A Dios:

Por brindarme sabiduría y fortaleza.

A mi esposa:

Por el apoyo incondicional y creer en mí.

Agradecimientos

A Dios por su infinita bondad de regalarme la vida y darme esta bella profesión de la docencia, por darme la posibilidad de soñar con nuevas oportunidades y hacerlas realidad a través de la disciplina, el esfuerzo y la dedicación.

A la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales, a los docentes y compañeros de maestría que compartieron su conocimiento y experiencia científica.

Al profesor, magister Jaider Albeiro Figueroa Flórez, asesor de este trabajo, por sus valiosos aportes, su disposición y su constante motivación para hacer posible este trabajo. El profesor Jaider es un gran ser humano que se interesa por el tema de la educación en la sociedad.

A la Hermana Johanna Gómez Ortiz, rectora de la Institución Educativa, Colegio Nuestra Señora de Bethlem Hermanas Bethlemitas – Popayán, por apoyarme en la realización del trabajo y brindarme los permisos necesarios para la consecución de esta meta.

A mis suegros Juan Ortiz y Miriam Andrade, por brindarme su cariño y valiosos consejos llenos de sabiduría, respeto y comprensión.

Resumen

En el presente trabajo se propone contribuir en el fortalecimiento de los procesos relacionados con la generalización, uso de representaciones y el uso de la letra, asociados al pensamiento variacional, en estudiantes de grado 5° a partir del diseño y aplicación de actividades de aprendizaje basadas en problemas. La metodología para llevar a cabo este proyecto se apoya en el desarrollo de actividades de aprendizaje basadas en problemas, las cuales se denominan como actividades de iniciación, actividades de afianzamiento y actividades de profundización, construidas con base a los estudios teóricos y didácticos sobre el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de básica primaria las cuales recomiendan el uso de la función, la generalización de patrones y los sistemas de representación. Entre los resultados se evidencia el fortalecimiento de habilidades en el proceso de generalización, la necesidad del uso de las representaciones para poder comunicar y plasmar lo visualizado y además de darle sentido al uso de la letra para representar cantidades indeterminadas o desconocidas, en la solución de problemas de variación y cambio.

Palabras clave: **Pensamiento variacional, generalización, patrón, razonamiento, comprensión, representaciones, situación problema.**

Abstract

In the present work it is proposed to contribute in the strengthening of the processes related to the generalization, use of representations and the use of the letter, associated to the variational thinking, in 5th grade students from the design and application of learning based activities in trouble. The methodology to carry out this project is based on the development of problem based learning activities, which are called initiation activities, consolidation activities and deepening activities, built on the basis of theoretical and didactic studies on development. of variational thinking in elementary school students who recommend the use of the function, the generalization of patterns and representation systems. The results show the strengthening of skills in the process of generalization, the need to use representations to communicate and capture what has been observed, as well as giving meaning to the use of the letter to represent unknown or unknown quantities, in the solution of problems of variation and change.

Keywords: **Variational thinking, generalization, pattern, reasoning, comprehension, representations, problem situation.**

Contenido

Contenido

1. Capítulo 1 5
1.1 Descripción y planteamiento del problema 5
1.2 Justificación..... 9
1.3 Objetivos 12
1.3.1 Objetivo General.....12
1.3.2 Objetivos específicos.....12

2. Capítulo 2 15
2.1 Marco de antecedentes 15
2.1.1 Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea generalización. 16
2.1.2 Iniciación al aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. 17
2.1.3 Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación......18
2.1.4 Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada. 20
2.1.5 Maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado. 21
2.1.6 Propuesta didáctica para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado, por medio de estrategias de enseñanza mediadas por los sistemas de gestión de aprendizaje durante el año 2014. 24
2.1.7 Desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por Geogebra. 26
2.1.8 Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto de educación básica primaria. (9-10 años). 28
2.1.9 Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria. 31
2.1.10 Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento resolución de problemas. 32
2.2 Marco Teórico 33
2.2.1 Pensamiento variacional y razonamiento algebraico.....34
2.2.2 Algebra escolar, Early algebra y Razonamiento Algebraico en Básica Primaria. 39
2.2.3 Didáctica para el Desarrollo del Pensamiento Variacional 43
2.2.4 La generalización de patrones, una alternativa para el acercamiento del razonamiento algebraico. 45
2.2.5 El uso de las representaciones 47
2.2.6 Algunas dificultades presentadas en la transición de la aritmética al álgebra. 49
2.2.7 Patrones y funciones.....52
2.2.8 Funciones en la Educación Primaria 52

2.2.9 El enfoque de resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento variacional. 53
2.2.10 La Teoría de las situaciones didácticas 55
2.2.11 Teoría del aprendizaje colaborativo o cooperativo....57
2.2.12 Reflexiones sobre el marco teórico 58
2.3 Marco conceptual 59
2.3.2 Razonamiento algebraico temprano 61
2.3.3 Patrones 61
2.3.4 Generalización de patrones....62
2.3.5 Representaciones 64
2.3.6 Variable (Uso de la letra)....65
2.3.7 Cambio 66
2.3.8 Variación 66
2.3.9 Situación problema....67
2.3.10 Estrategia didáctica....67
2.3.11 Herramientas tecnológicas....68
2.3.12 Geogebra....68
2.3.13 Función....68
2.3.14 Actividad de aprendizaje 69

3. Capítulo 3 71
3.1 Tipo de trabajo 71
3.2 Instrumentos Metodológicos 72
3.2.1 Actividades de iniciación....72
3.2.2 Actividades de afianzamiento....73
3.2.3 Actividades de profundización....73
3.3 Población y muestra 74
3.4 Fuentes de información 74
3.5 Análisis e interpretación de los resultados 75

4. Capítulo 4 79
4.1 Resultados en la actividad de iniciación 79
4.1.1 Análisis del proceso de generalización....80
4.1.2 Análisis del proceso uso de representaciones....82
4.1.3 Análisis del proceso uso de la letra 85
4.2 Resultados de la actividad de afianzamiento.... 86
4.2.1 Análisis del proceso de generalización....87
4.2.2 Análisis proceso uso de representaciones....95
4.2.3 Análisis del proceso uso de la letra 97
4.2 Resultados de la actividad de profundización 99
4.2.1 Análisis del proceso uso de representaciones....100
4.2.2 Análisis del proceso de generalización....101
4.2.3 Análisis del proceso uso de la letra 105

5. Capítulo 5 113
5.1 Conclusiones 113
5.2 Recomendaciones.... 116

Bibliografía 117

Anexo A: Actividad de iniciación 121

Anexo B: Actividades de afianzamiento 127

Anexo C: Actividades de Profundización 134

Lista de figuras

Pág.

Figura 1. Medio Didáctico, Guy Brousseau 56
Figura 2. Tipos de patrones 79
Figura 3. Identificación visual de patrones 80
Figura 4. Registro de regularidad. 81
Figura 5. Identificación visual de patrones E2 81
Figura 6. Representación múltiple: Pictórica y verbal 83
Figura 7. Representación múltiple: Pictórica y simbólico numéricas 84
Figura 8. Dificultad de variación y cambio 85
Figura 9. Software Geogebra, deslizadores para crear movimiento 87
Figura 10. Proceso de generalización 88
Figura 11. Descripción de la regularidad 89
Figura 12. Generalización E2 89
Figura 13. Descripción de la regularidad en proceso de generalización 90
Figura 14. Generalización con apoyo tabular y gráfico 91
Figura 15. Dificultad para comunicar ideas 94
Figura 16. Representación verbal 96
Figura 17. Representación simbólico numérica 96
Figura 18. Uso de la abreviatura 98
Figura 19. Uso de la "letra" 98
Figura 20. Dificultades para generalizar 99
Figura 21. Representación verbal y pictórica 100
Figura 22. Representación del tipo verbal 101
Figura 23. Representación del tipo simbólico algebraico 101
Figura 24. Generalización de patrones a cualquier término de la secuencia 102

Figura 25. Dificultad en generalización de patrones a cualquier término de una secuencia 103
Figura 26. Proceso de generalización 104
Figura 27. Proceso de generalización. Representación verbal 104
Figura 28. Tabla de reconocimiento de regularidades. Uso de la función 105
Figura 29. Letra como número generalizado 106
Figura 30. Letra I, como número generalizado 106
Figura 31. Letra n considerada como variable 107
Figura 32. Letra evaluada 107
Figura 33. Dificultad en el proceso de generalización 108
Figura 34. Muestra, estudiantes grado 5° básico. 109
Figura 35. Sesiones de actividad de iniciación 109
Figura 36. Sesiones actividad de iniciación. E7 110
Figura 37. Sesiones actividad de afianzamiento 110
Figura 38. Sesiones actividad de afianzamiento. E13 111
Figura 39. Sesiones actividad de profundización 111

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1. Tipos de representaciones (Merino, 2012) 47

Tabla 2. Formas de expresión de las representaciones (Mason et al., 1999) 48

Introducción

A través de la historia, la matemática se ha considerado como la "ciencia de los patrones", ya que todas las áreas de estudio de las matemáticas se ocupan de formalizar y generalizar. Además, ayuda a resolver las necesidades de la vida de las personas, convirtiéndolas en ciudadanos reflexivos que aporten a la sociedad. De igual manera esta ciencia estimula el razonamiento de las personas y desde el punto de vista escolar, el razonamiento matemático, el cual permite fortalecer la capacidad de organizar el conocimiento, las representaciones y procedimientos matemáticos, para comprender e interpretar el mundo real.

Con la necesidad de organizar el conocimiento matemático, es importante conocer las características del razonamiento algebraico, pues en ellas se fundamenta el desarrollo del pensamiento variacional, "el cual cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, p.66).

A partir de nuestra preocupación por desarrollar pensamiento algebraico y por ende el variacional en estudiantes de temprana edad, se consultaron diversas investigaciones que se interesan en la introducción y desarrollo del algebra en la Educación Básica Primaria las cuales tienen como principal objetivo minimizar la dificultad que se presenta en Estudiantes de Educación Secundaria al enfrentarse directamente al álgebra, sin tener un reconocimiento previo de sus relaciones y estructuras.

En este sentido, se propone el trabajo, "El desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Básica Primaria, a través de actividades de aprendizaje basadas en problemas" que tiene la intención de contribuir en el fortalecimiento de los procesos relacionados con la

generalización, uso de representaciones y uso de la letra, los cuales están asociados al pensamiento variacional. Como alcances de este proyecto, se espera que éste brinde posibilidades de optimizar habilidades en los procesos antes mencionados en estudiantes de los grados 4 y 5 del colegio Nuestra Señora de Bethlem – Hermanas Bethlemitas Popayán.

En cuanto a la metodología utilizada, corresponde al paradigma cualitativo-descriptivo. Por tanto, sólo se relata el comportamiento observado del sujeto en contexto con cierto grado de intervención por parte del investigador durante el desarrollo de actividades de aprendizaje de aula como instrumentos para posibilitar aprendizaje.

En el primer capítulo se exponen la descripción del problema, la justificación y los objetivos. En el capítulo dos, se presenta una recopilación de antecedentes internacionales y nacionales sobre el desarrollo del pensamiento variacional en niños de básica primaria; enseguida se exponen las distintas teorías o estudios que soportan la hipótesis del trabajo y finalmente el marco conceptual. En el tercer capítulo se explica la metodología de investigación, especificando el tipo de trabajo, los instrumentos metodológicos, la población y muestra, las fuentes de información y el cómo se realizará el análisis e interpretación de resultados. En el capítulo cuatro, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes seleccionados como muestra durante los talleres de iniciación, afianzamiento y profundización; además se plantea una discusión analítica en torno a lo producido. Para finalizar, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones a las que se llegó y se sugieren algunas recomendaciones al respecto.

El significado que el trabajo tiene en el avance de nuestro campo de estudio es contribuir al desarrollo del pensamiento variacional en la básica primaria y se desea que se incluyan en el currículo los procesos adecuados a la edad. Además, de permitir crear diferentes estrategias basadas en la lúdica, TIC´S y cognitivas, para avanzar hacia futuras investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento algebraico temprano.

1. Capítulo 1

Horizonte del trabajo

Este capítulo se centra en tres aspectos: planteamiento y descripción del problema, justificación del proyecto y definición de objetivos a alcanzar. En el primero de los aspectos, hay una referencia hacia la problemática que presentan los estudiantes del grado 5° de primaria del Colegio Nuestra Señora de Bethlem – Hermanas Bethlemitas Popayán y suponemos que los de la mayoría de colegios también, cuando no se trabajan las temáticas concernientes al desarrollo del pensamiento variacional en niños; esto nos permite indagar al respecto y buscar dar solución a situaciones problémicas de variación y cambio en un contexto matemático. En el segundo, se da razón de la importancia de realizar aportes significativos como el presente estudio, en armonía con las políticas del Ministerio de Educación en Colombia para consolidar una comunidad que se apropie de las investigaciones en pensamiento algebraico temprano y así buscar estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el último, se exponen los objetivos, general y específicos, que se han trazado como logro final de esta investigación, a partir de la pregunta problematizadora.

1.1 Descripción y planteamiento del problema

Los estudiantes de educación secundaria, por lo general cambian del estudio de un sistema aritmético al estudio de un sistema algebraico de una manera abrupta, es decir pasan del uso del número en casos y situaciones particulares de conteo, al manejo de símbolos que indican generalidades y patrones sin percibir el sentido de su uso. Diversos investigadores recomiendan incluir en el currículo de la básica primaria actividades que permitan el

desarrollo del razonamiento algebraico temprano; el cual desde el punto de vista curricular en Colombia está ligado al desarrollo del pensamiento variacional. El fortalecimiento de los procesos asociados a este tipo de pensamiento preparará el camino de transición entre lo numérico y lo simbólico.

Aunque en el Plan Área de Matemáticas del Colegio Nuestra Señora de Bethlem – Hermanas Bethlemitas Popayán, se expone la idea de trabajar en grado 5°: El uso de patrones y secuencias; lenguaje algebraico y ecuaciones. La experiencia ganada como docente da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes al abordar estas temáticas, entre ellas destaco:

- Los estudiantes no perciben de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de números, figuras o letras, es decir, se les dificulta percibir un patrón.
- No realizan conjeturas acertadas sobre la forma o el valor del siguiente término de una secuencia, no hay claridad al expresar ese término o los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones.
- No formulan acertadamente un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, configurar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizar.
- No utilizan un sistema simbólico de representación para expresar sus conjeturas y generalizaciones.
- El signo igual solo se percibe como el resultado de una operación aritmética, no como una equivalencia entre los términos a lado del signo, esto genera confusión al momento de resolver problemas simples que se modelan con el uso de ecuaciones.
- Entre otras

Para los estudiantes estas temáticas son algo abstractas y confusas ya que, el hecho de trabajar con letras que representan números y expresiones del lenguaje algebraico, les genera en ellos ciertas dificultades, como la ausencia de sentido y significado sobre representaciones simbólico algebraicas. Estas dificultades pueden estar asociadas a:

Falta de trabajo constante en el tema de la generalización y el razonamiento, dar un paso demasiado rápido al tratamiento del algebra y a una falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra.

Según los Lineamientos y Estándares en Matemáticas del MEN, el estudio de la variación y cambio, son necesarios para iniciar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento variacional y el aprendizaje comprensivo de los sistemas algebraicos. Esto debe realizarse desde toda la básica primaria, en efecto:

> Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico (…) (MEN, 2006)

El docente debe tener en cuenta en el diseño e implementación de las actividades de aprendizaje para los estudiantes, los procesos asociados al pensamiento variacional, los cuales deben direccionarse hacia el desarrollo del razonamiento lógico matemático, para generar aprendizajes significativos.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p.54)

Esto nos cuestiona sobre las metodologías didácticas y pedagógicas que nos ayudan a mejorar la practica en el aula; además de darle relevancia al pensamiento variacional que hace parte de los conocimientos básicos expuestos en los Lineamientos curriculares, los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje, emanados por el MEN.

Se quiere contribuir al desarrollo y construcción de un entramado que sea el soporte de la competencia intelectual, usando como elementos la capacidad del pensamiento y el conocimiento. Es así que nos cuestionamos, sobre nuestro rol como docentes: ¿Cuál es nuestro papel como docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje?, ¿Cómo hacemos para generar comprensión en nuestros estudiantes?, ¿Lo que se enseña en el aula de clases es lo que debe saber el estudiante?, ¿Las actividades de aprendizaje que planteamos tiene coherencia con lo que exige el MEN?

Y en el tema que nos ocupa: ¿Cómo puedo contribuir al desarrollo del pensamiento variacional, en el sentido de fortalecer el uso de la letra, el uso de las representaciones y el proceso de generalización, en estudiantes del grado quinto?

1.2 Justificación

Este trabajo surge por el interés de continuar con el estudio sobre la modelación matemática que desde el año 2014 se venían desarrollando, a partir del trabajo "Los procesos de modelación matemática que realizan estudiantes de grado 9° de secundaria", y que dejó como sugerencia trabajar en el desarrollo del pensamiento variacional desde la básica primaria.

Dado que en la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de Bethlem – Hermanas Bethemitas Popayán donde actualmente laboró se percibe que no hay una estructura bien definida para el desarrollo del pensamiento variacional en la mayoría de los cursos de la básica primaria, es de interés estudiar los conceptos y actividades que permitirán el desarrollo de dicho pensamiento en los estudiantes.

Hernández (2014) afirma: "Las actividades de aprendizaje deben permitirles identificar regularidades y patrones; y además que éstos sean capaces de argumentar hechos y relaciones matemáticas que optimicen procesos de razonamiento lógico matemático" (p.19). Podemos ver que el desarrollo del pensamiento variacional se cimienta en el razonamiento algebraico. Este implica, por parte del docente, el reconocimiento de elementos propios de la actividad matemática: los procesos de simbolización, de generalización y formalización. Es aquí donde surgen las necesidades de comunicar a través de diferentes sistemas de representación tales como icónicos, tabulares, lenguaje y simbólicos; y también necesidades de razonamientos como la argumentación y búsqueda de regularidades (como encontrar patrones y explicarlos). En este orden de ideas (J. D. Godino & Font, 2003) hacen un análisis del álgebra en la educación primaria, aportando en su estudio que el:

> "Razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones; y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el

> pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones.” (p.9)

Es de resaltar, que el estudio de la variación como elemento fundamental del pensamiento variacional, proporciona u ofrece a los estudiantes elementos conceptuales y procedimentales, para identificar, caracterizar, generalizar, argumentar y justificar relaciones y operaciones matemáticas, que benefician no solo a la comprensión del álgebra escolar, sino también el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemáticos. En efecto el MEN, es su texto de estándares básicos de competencias matemáticas señala que:

> El pensamiento variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Desde lo matemático hay una relación directa con los otros pensamientos, muy especialmente con el métrico, pues el pensamiento variacional se encarga, fundamentalmente, de la modelación matemática y esto requiere de la activación constante de procesos de medición, elaboración de registros y establecimiento de relaciones entre cantidades de magnitud. (MEN, 2006, p.66)

> (…) en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, también se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. (MEN, 2006, p. 68)

A manera de justificación curricular, de acuerdo a lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), los estudiantes inician el desarrollo del pensamiento variacional con el estudio de las regularidades y la detección de las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente; para ello se deben crear actividades que les permitan percibir o analizar de qué forma cambia , aumenta o disminuye la forma o el

valor en una secuencia o sucesión de figuras, números, letras, sonidos, y así relacionar, predecir y conjeturar sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; además de procurar expresar ese término , o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones. En lo referente al desarrollo de este pensamiento desde la básica primaria, se proponen competencias básicas para los grados 4° y 5°, particularmente al culminar el grado 5° los estudiantes deben estar en condiciones de justificar regularidades en una secuencia numérica, geométrica o gráfica, y predecir patrones de variación en dichas secuencias, además de interpretar y describir representaciones graficas que presentan variaciones; y representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales, en este caso el estudiante produce las reglas verbales a partir de la observación y análisis de las secuencias pictóricas. En efecto según el MEN, exponen que:

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de figuras involucran los principios de visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Las actividades de aprendizaje basadas en estos principios, prepararan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre como construir los términos siguientes a partir de las regularidades encontradas o del hallazgo de un patrón que los guie más o menos directamente a la expresión informal algebraica. (MEN, 2006, p. 67)

Nuestro interés final es crear dinamismo en los procesos de enseñanza, donde los estudiantes puedan fortalecer y darles protagonismo a los procesos del pensamiento variacional que son de gran relevancia al igual que los demás tipos de pensamiento plasmados en los planes de estudio; se quiere proporcionar estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, éste, asumido como eje articulador de las actividades matemáticas. Para el favorecimiento del desarrollo de este eje, hay que concentrar los

esfuerzos en lo metodológico y en este sentido se procura introducir el uso de las TIC como mediador cognitivo en conjunto con situaciones problema para que el aprendizaje sea más efectivo, motivador y constructivo.

Este trabajo sustenta su viabilidad, por cuanto para su desarrollo la institución educativa permite su ejecución, para lo cual se firma un consentimiento informado por parte del maestrante, donde se exponen las características del trabajo y la normatividad ética en cuanto a toma de imágenes y videos en la recolección de evidencias. Además, se cuentan con espacios adecuados, todos los salones con Smart TV de 50", conexión a internet, salón con video beam y sala de sistemas, de igual manera el software Geogebra es gratuito y se cuenta con computadores portátiles y herramientas ofimáticas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Contribuir en el fortalecimiento de los procesos relacionados con la generalización, uso de representaciones y uso de la letra, asociados al pensamiento variacional en estudiantes del grado 5° del Colegio Nuestra Señora de Bethlem - Hermanas Bethlemitas Popayán, a partir del diseño y aplicación de actividades de aprendizaje basadas en la solución de problemas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Proponer una estrategia didáctica que contemple el diseño y aplicación de actividades de aprendizaje basadas en la solución de problemas de variación y que acerquen a los estudiantes al reconocimiento de generalidades o patrones, al uso de la letra y el uso de representaciones en diversos contextos.

- Realizar el análisis e interpretación de los avances y las dificultades encontradas en los estudiantes a lo largo del desarrollo de las actividades de aprendizaje, en cuanto a los procesos de generalización, uso de los sistemas de representación y el uso de la letra.

2. Capítulo 2

Marco Referencial

2.1 Marco de antecedentes

Explorando diferentes fuentes de información a nivel nacional e internacional, se pudo conocer más sobre el tema de nuestro trabajo, lo cual nos permite tener una visión amplia de lo que se ha realizado y como esto puede aportar en el alcance de nuestros objetivos.

Respecto al desarrollo del pensamiento algebraico (pensamiento variacional) en niños de básica primaria, específicamente en edades de 8 a 10 años de edad, hay un gran interés en investigar sobre, la emergencia de estos pensamientos, así como la forma en que se hace visible la comprensión en ellos.

A continuación, se presentan las investigaciones más relevantes con respecto a nuestra temática de estudio, para lo cual se destacarán los objetivos propuestos y las principales conclusiones.

2.1.1 Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea generalización.

Autor: Eduardo Merino Cortés, 2012. Universidad de Granada, España.

Objetivo: Analizar el pensamiento funcional en estudiantes de 5° de primaria que resuelven tareas de generalización a partir de un ejemplo genérico.

Resultados y conclusiones: El tipo de representación más usado es el verbal, aunque en la mayoría de los casos las representaciones aparecen de manera múltiple, es decir acompañadas de otras representaciones de carácter numérico o pictórico. Respecto al uso de la letra, utilizan la letra n como símbolo para sustituir a un número o para sustituir una palabra que es el elemento que se cuantifica; en este segundo uso los niños utilizan la letra n en una representación pictórica. (Ejemplo: Dibujar siete letras n, significa que representan una cantidad de siete mesas). Respecto al pensamiento funcional en relación a como covarian dos magnitudes, los estudiantes realizaron conteo y representaciones pictóricas para llegar a los resultados requeridos. En cuanto a la generalización, se observó en una de las situaciones, que no llegaron a una respuesta aplicable a cualquier número de objetos, si no que se referían a casos concretos.

Con base al análisis de los datos, se concluye que el uso de patrones estuvo condicionado por las magnitudes con las que trabajaban los alumnos, si son números pequeños (generalización cercana), utilizan el conteo y los dibujos; mientras que con cifras grandes (generalización lejana) los alumnos recurrían a cálculos numéricos, a través de la identificación de diferentes patrones.

Se observó dificultad cuando se relacionaron tres o más variables en una situación problema, en ella se pedía encontrar una magnitud a partir de la relación con otras dos. Esto sugiere que una generalización basada en una relación compuesta puede resultar más dificultosa para estudiantes de esa edad. También resulto complejo la introducción de la letra para representar un numero generalizado, pues en la mayoría de los casos los estudiantes la utilizaban para casos particulares.

2.1.2 Iniciación al aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza.

Autor: Yolanda Serres Voisin, 2011. Universidad Central de Venezuela.

Objetivo: Analizar qué se entiende por álgebra escolar, como se relaciona el lenguaje y el pensamiento algebraico y analizar la iniciación del aprendizaje del álgebra, relacionando los procesos de generalización y simbolización con el desarrollo de las concepciones de variable y la resolución de problemas.

Se observa que el autor del trabajo realiza un análisis con base a una revisión bibliográfica, en lo concerniente a lo propuesto en el objetivo y fundamentalmente concluye:

Conclusiones: Las bases para la enseñanza del álgebra y el logro del desarrollo del pensamiento algebraico según las investigaciones sobre aprendizaje del álgebra son:

- Promover la observación analítica y crítica de generalidades y su verbalización durante el tiempo que sea necesario para luego promover la simbolización de las observaciones.
- Hacer preguntas abiertas (¿Cuáles?, ¿Cómo?, ¿Por qué?, ¿Cuándo?) para que a través de la discusión los estudiantes puedan identificar las fortalezas y limitaciones de diferentes formas de representación (aritmética, algebraica, gráfica, verbal) y puedan traducir una en otra con fluidez.
- Identificar y promover el uso de distintas estrategias de generalización desarrolladas por los estudiantes, como las de contexto, objeto entero, adivinar y chequear.
- Diseñar actividades de aprendizaje que permita a los estudiantes adquirir el concepto de variable con sus distintos usos, e ir apropiándose de los nuevos significados de los símbolos matemáticos ya utilizados en aritmética y geometría, como el signo igual, los signos de mayor y menor que, los signos de las operaciones, las letras y las fórmulas. El autor cita a Ursini (2005) se espera que las y los estudiantes construyan significados, los desarrollen y puedan comunicar sus ideas algebraicas a las demás personas, específicamente que diferencien entre los distintos usos de las variables,

pasando entre uno y otro de manera flexible, verbalicen las características de cada uso y usen el lenguaje algebraico para expresarse.(citado en Voisin, 2011,p.140)

- Trabajar la resolución de problemas, como una de las formas de desarrollar la simbolización, construir el concepto de incógnita o variable y construir y resolver ecuaciones.

2.1.3 Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.

Autor: Lilia P. Aké, 2013. Universidad de Granada, España.

Esta autora propone en su tesis doctoral, tres objetivos generales, de los cuales destacamos para nuestro interés el siguiente:

Objetivo: Caracterizar el álgebra y el razonamiento algebraico desde una perspectiva global que permita la identificación de sus principales rasgos con el fin de clarificar su naturaleza en los grados elementales.

Conclusiones: A través de una revisión literaria, se da una síntesis sobre las investigaciones realizadas respecto a la inclusión del álgebra en los niveles elementales, para así llegar a la consecución del objetivo, con lo cual se organiza la información destacando los siguientes aspectos:

- Las investigaciones realizadas sobre las diferentes temáticas que permiten introducir el álgebra en la escuela elemental: generalización de la aritmética, el estudio de los patrones y las funciones, el estudio de la equivalencia enmarcado dentro del pensamiento relacional, el estudio de las nociones de incógnita y variable (temáticas conocidas en la literatura como rutas de acceso al álgebra).
- Las investigaciones que proponen diferentes enfoques del álgebra para caracterizar el razonamiento algebraico que permitiese entender su naturaleza en la escuela primaria.

- La formación del maestro de primaria respecto a la inclusión del álgebra en la escuela elemental.

El estudio de las diversas tareas empleadas en las investigaciones para promover el razonamiento algebraico en los niños da cuenta de la diversidad en las formas de interpretar el álgebra en los niveles elementales. Por tal motivo se consideró necesaria la articulación de una visión propia del álgebra que les permitiese tener un marco de referencia sobre su significado en la escuela primaria. Para ello se consideró el siguiente objetivo específico:

Elaborar un modelo de caracterización del álgebra que articule, bajo la interpretación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, las diversas perspectivas del álgebra escolar.

Para alcanzar este objetivo, se tuvo en cuenta las investigaciones consultadas y se articuló con la propuesta propia, donde se consideró dos aspectos fundamentales en la actividad algebraica, los procesos de generalización y la simbolización. La generalización, interpretada desde el EOS[1], mediante la noción de objeto intensivo, permite entenderla como una entidad relativa al contexto y no como una entidad absoluta, lo que favorece su estudio en los primeros grados de la escuela primaria. La simbolización, ligada a los procesos de generalización, tiene lugar, cuando emerge un objeto intensivo como entidad unitaria y es comunicada a través de medios ostensivos. En este sentido los procesos de unitarización y ostensión juegan un papel relevante en la formulación de nuevos procesos de generalización. Paralelamente se valoró el pensamiento funcional y el estructural, así como la modelización como fuentes de donde pueden emerger tareas que promuevan el desarrollo del razonamiento algebraico.

[1] Para mayor información sobre este campo de estudio, ver documento de Godino, Batanero y Font (2009). Disponible en internet, URL: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

2.1.4 Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada.

Autor: Natalia Astrid Guzmán Bautista, 2013. Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá.

Objetivo: Proponer una secuencia de actividades y/o talleres que potencien los procesos de generalización y dé significado a la variable, donde los niños desde la verbalización de una regularidad puedan ir enriqueciendo el lenguaje hasta apropiarse del rigor que implica el uso de símbolos.

Resultados y conclusiones: Las actividades se estructuran a través de juegos donde los niños identifican regularidades, susceptibles a generalizar. A medida que se hacen más complejas las soluciones verbales que se plantean, se va haciendo necesario utilizar sincopas (abreviaciones, simbología informal) o incluir expresiones simbólicas formales. Además, en las actividades se intenta presentar una aproximación a la noción de variación ligada a la idea de cambio.

El autor basado en las propuestas de Early algebra y Pre-álgebra expuestas en el marco teórico, diseña las actividades con la intencionalidad de que el niño encuentre regularidades y patrones, para una posterior generalización, encontrando como resultado que fue posible aproximar a los niños al concepto de variación y conjuntamente de atribuirle sentido a los símbolos; en ese proceso se van introduciendo variables y explorando significados desde la intuición y la creatividad y no por procedimientos predeterminados.

Se destaca la relevancia de introducir en las prácticas educativas, elementos innovadores por parte del docente, donde se deje de lado el papel del docente como un transmisor de la información y el alumno como el receptor, lo cual hace parte del esquema tradicional de la educación. Respecto al pensamiento variacional en básica primaria se deben crear

situaciones que potencien estrategias como la observación, el reconocimiento de patrones y regularidades y la descripción de éstas; las actividades que terminan de manera natural en la generalización, no requieren de usar un lenguaje simbólico formal, basta con usar el lenguaje natural.

Se hacen necesarios escenarios en donde los niños tengan la posibilidad de crear, inventar argumentar y desarrollar otras estrategias que les permitan desarrollar el pensamiento matemático. Creación de herramientas que faciliten la comprensión del lenguaje simbólico, entre ellas están las actividades que requieran procesos de generalización desde la básica primaria a través de lo que se conoce como aritmética generalizada, lo cual permitirá potenciar simultáneamente dominios aritméticos y algebraicos.

La experiencia de la aplicación de las actividades lleva a concluir que los niños proseen muchas habilidades, observación aguda, que les permite encontrar coincidencias y crean estrategias para resolver situaciones; por tanto, son capaces de realizar actividades como las propuestas en el trabajo, donde solo dependen de las orientaciones del maestro.

2.1.5 Maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado.

Autor: Juan Sebastián Cuartas Carmona, 2015. Universidad de Antioquia, Colombia.

Objetivo: Analizar maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado.

El autor aclara el término “maneras”, el cual se debe entender en la investigación como las “formas de hacer”, en las cuales se pretende indagar por el *conocimiento procedimental* de cada niño. El conocimiento procedimental se entiende como un conjunto de acciones que “[…] se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; y con las habilidades y destrezas para elaborar,

comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente" (MEN, 2006, p. 50). En la investigación, tales acciones son respuestas escritas y verbales que fueron producidas por cada niño.

Resultados y conclusiones: Según la observación de las respuestas dadas por lo estudiantes, se analiza que hay identificación de patrones cuando se debe analizar fenómenos de cambio, ya que reconocen el aumento constante entre los términos de una secuencia. Esto se aprecia en la operación realizada, por ejemplo, la adición sucesiva o la multiplicación que mencionan algunos de los niños participantes de la investigación. Además, se aprecian cantidades constantes (que no varían), es decir, una misma cantidad que algunos de los niños sumaban después de realizar la multiplicación, independiente de la posición o término de la secuencia por la que se preguntaba. Aunque los niños no utilizan estas denominaciones: cambio constante, adición sucesiva, constante (invariante), se reconocen en su expresión verbal.

Los niños hicieron una generalización lejana al responder por la manera en que determinarían la cantidad correspondiente a una posición cualquiera. Según Stacey (1989), "La generalización de este tipo se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere" (citado en Cuartas, 2015, p.120)

Además, se aprecia que algunos de los niños participantes dieron cuenta de una generalización teórica, la cual corresponde a lo expresado por Dörfler (2008) que consiste "en ampliar el reconocimiento de regularidades a otra cantidad de casos entre de los términos o posiciones de una secuencia para responder, sin necesidad de apoyarse en conteo sucesivo o construcción de dibujos" (Citado en Cuartas, 2015, p. 120).

Los participantes de la investigación presentaron una generalización lejana, de acuerdo a Stacey (1989) "en la cual se emplea una regla de formación que permite calcular, de forma inmediata, el término de cualquier posición de la secuencia" (Citado en Cuartas, 2015, p. 120).

Respecto a la generalización realizada en algunos de los estudiantes, se pudo determinar que los alumnos al explorar los patrones y al darse cuenta de alguna regularidad o regla que se presentan en las secuencias de las figuras, no necesariamente se materializa la generalización de manera simbólica convencional, ya que algunas respuestas contenían expresiones pictóricas –dibujos- y otras verbales -lenguaje natural-, y de este modo la generalización no se reduce a la expresión formal simbólica, sino que también atiende a otro tipo de representaciones que señalan propiedades relativas a las estructuras de la tarea.

En relación a las formas de expresión, empleadas por los estudiantes para responder a las tareas, la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización. Según Radford (2013) "la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación." (Citado en Cuartas, 2015, p. 121-122).

Las tareas diseñadas, permitieron identificar que los estudiantes generalizan patrones lineales a partir de diversas estrategias. Algunos, por ejemplo, identificaron un incremento constante, otros emplearon las tablas de multiplicar y otros establecieron una razón de cambio. De estas estrategias empleadas, aunque no necesariamente conducían a una respuesta correcta, se puede inferir que los estudiantes analizados generalizan patrones lineales, pero es necesario recordar que no había un interés en que los estudiantes nombraran los patrones como *lineales*, sino que hicieran mención de algunas características de estos, y así lo hicieron.

Los estudiantes analizados hacen *generalización empírica* porque recurrieron a una estrategia considerada por ellos mismos – conteo, adición sucesiva, multiplicación sucesiva – para dar respuesta a la tarea, en vez de emplear una regla de formación asignada para todos los casos y establecida previamente por un referente de autoridad – profesor o libro de texto- . Es decir, estos estudiantes mencionan características que servirían para producir una regla de formación, según la tarea propuesta pero estas características, aunque sean atribuidas a

todas las posiciones de la secuencia, no les permitiría responder de inmediato por una posición más distante, debido a la estrategia que emplearon. Además, estos estudiantes se apoyaron en dibujos o listas de números para determinar la cantidad de figuras que habría en una configuración correspondiente a la posición solicitada en la tarea.

Cuando a los niños se les preguntaba por las dificultades que habían tenido en la resolución de cada tarea, algunos respondieron que las más fáciles eran aquellas en las que le pedían dibujar. Parece que el apoyo visual les facilitaba a estos niños la resolución de la tarea. Pero no es conveniente cuando se utiliza para encontrar términos o posiciones en las secuencias muy grandes o lejanos.

2.1.6 Propuesta didáctica para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado, por medio de estrategias de enseñanza mediadas por los sistemas de gestión de aprendizaje durante el año 2014.

Autor: Susana Del Pilar Hernández Castaño**,** 2014. Universidad Nacional de Colombia – sede Medellín.

Objetivo: Diseñar una propuesta didáctica en el área de matemáticas, para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de la básica primaria, por medio de estrategias de enseñanza mediadas por los sistemas de gestión de aprendizaje.

Según Sanchis (2013) Un **LMS** (Learning Managment System o Sistema de gestión del aprendizaje):

> Es una aplicación basada en web que debe integrar herramientas y recursos para administrar, distribuir y controlar actividades de formación a través de Internet. Se encarga principalmente de la gestión de los usuarios (alumnos, profesores y usuarios de administración), materiales y actividades de formación y del seguimiento del proceso de aprendizaje de cada alumno mediante evaluaciones e informes y ofreciendo herramientas de comunicación entre alumnos y profesores (mensajería interna, chats, videoconferencia, foros...). (citado en Hernández, 2014, p.24)

En relación al sistema de gestión de aprendizaje, el autor de este trabajo no hace una referencia específica al tipo de plataforma que utilizó para la realización de su investigación.

De acuerdo a lo propuesto en el objetivo, se concluye que:

Conclusiones:

- La tecnología responde a las nuevas dinámicas que deben adaptar los docentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con la intencionalidad de propiciar nuevos escenarios y entornos, que proyecten la capacidad e interés de los estudiantes y potencie en ellos la autonomía, la comunicación y el trabajo colaborativo, lo cual se traduce en el desarrollo de la educación dentro y fuera del aula de clase.
- Los sistemas de gestión de aprendizaje se convierten en una herramienta metodológica, que permite a los docentes supervisar la participación, el desempeño y el progreso académico de los estudiantes, identificando e integrando los diferentes ritmos de aprendizajes.
- Cada estrategia de enseñanza es una guía que le permitirá al docente saber cómo debe implementar los contenidos y objetivos para cada periodo académico; y en cuanto al estudiante es una guía que le proporciona todo el fundamento teórico necesario para ejecutar cada una de las actividades propuestas.
- Las estrategias de enseñanza creadas por el docente, deben desarrollar los procesos de razonamiento lógico matemático, las cuales le permitirán al estudiante interpretar, argumentar, y resolver problemas matemáticos, además que se pueda evidenciar como el estudiante reflexiona, ejecuta y evalúa sus conocimientos, alcanzando tanto

los contenidos curriculares como el desarrollo de los procesos de razonamiento lógico matemático desde el pensamiento variacional.

2.1.7 Desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por Geogebra.

Autor: Luisa Fernanda Sánchez Chaverra, 2016. Universidad del Valle, Colombia.

Objetivo: Caracterizar la actividad matemática que desarrollan los estudiantes, al enfrentarse a una secuencia de tareas que promueva la objetivación de saberes relacionados con el pensamiento algebraico, a partir de la integración de Geogebra.

Resultados y conclusiones: Las actividades diseñadas en Geogebra, poseen una retroalimentación (anuncios o letreros que aparecen, donde se informa si la tarea se realizó correctamente o no), lo cual permite validar o cambiar las estrategias en los procedimientos desarrollados por los estudiantes, mediando en la actividad sujeto-objeto, sin necesidad de la intervención constante del docente. En concordancia, se observa que, en el proceso de objetivación, la potencialidad de integrar Geogebra, se resalta en cuanto actúa como mediador para la actividad del sujeto dada su herramienta de retroalimentación.

Se resalta que el trabajo entre pares posibilita la utilización de diferentes formas culturales de interacción y, además, verifica que la mediación entre sujeto y los objetos no se da únicamente por los instrumentos sino también por la presencia del compañero.

Se logró ver que los estudiantes no solo identificaron las magnitudes involucradas en las situaciones problema, sino que lograron diferenciar las cantidades que varían y las que permanecen constantes y las tuvieron en cuenta para la construcción de la expresión general. Se trabajó con objetos como patrones, operaciones como la adición y multiplicación, y surge el uso de la letra como una incógnita que representa cantidades desconocidas con múltiples valores, y además se identifica cómo logran operar con esos valores desconocidos, lo que

hace que se evidencie con más facilidad el paso del pensamiento contextual al pensamiento simbólico, logrando identificar los tres elementos que dan cuenta de la generalización algebraica (indeterminancia, analiticidad y designación simbólica)

Las representaciones tabulares permiten identificar con facilidad la relación entre dos magnitudes, por ejemplo, observando el tiempo y la distancia regularidades entre ellas. Además, la representación tabular acompañada de una cartesiana, permite realizar comparaciones en la tabla, establecer regularidades y comparaciones en el plano.

El trabajo con TIC es diseñado con la intencionalidad de generar interés por lo que sucede en la historia, esto hace que el trabajo sea mucho más fácil, pues ellos con ansiedad desean llegar a las respuestas, con la expectativa de continuar viendo lo que ocurre en el cuento para avanzar en las tareas. Se identificaron instrumentos que permitían evidenciar la forma de pensar de los estudiantes, tales como los gestos, las expresiones deícticas[2], las operaciones en Geogebra, las operaciones mentales, el lápiz y papel, los sistemas de representación gráfico y tabular, los cuales se relacionaban directamente con los objetos/conceptos y que permitían la toma de conciencia de los objetos generalizados (objetivación).

Se destaca que no se logró que Geogebra fuera un medio para la acción en la construcción de expresiones generales de forma simbólica, ya que las fórmulas que se utilizaron en la hoja de cálculo no sirvieron de apoyo para la construcción de tales expresiones, como se había propuesto inicialmente. La docente no hizo suficiente énfasis en la utilización de las celdas de la herramienta de hoja de cálculo. Sin embargo, el hecho de que en Geogebra se puedan realizar las operaciones con los resultados de forma automática, permite que los niños prueben sus hipótesis y estimen resultados, sin necesidad de hacer la operación a lápiz y papel. El software actúa como una forma de validación.

[22] Los **deícticos** son las palabras que se interpretan en relación con la situación de comunicación, y necesitan que se muestre de algún modo a qué se refieren. Si se usan oralmente, se puede señalar o mirar aquello de lo que se está hablando. Si se emplean por escrito, remiten a algo ya mencionado o por mencionar, y solo se llenan de contenido al contextualizarse. Tomado de Wikipedia.

Además, se pudo observar que el uso de los diferentes sistemas de representación que ofrece Geogebra; permitió la utilización de patrones gráficos presentados en la vista gráfica 1, así como, el desarrollo de varios procedimientos de tipo aditivo y multiplicativo, y la identificación del patrón numérico a partir de las figuras dadas, es decir, a partir de la articulación entre las estructuras de tipo numérico y las estructuras de tipo espacial. En esta misma vista gráfica, se propició el trabajo con el plano cartesiano, el cual permitió a los estudiantes de una forma distinta encontrar las regularidades y las relaciones entre dos magnitudes, comparando los resultados de los puntos en el plano con los resultados de la tabla propuesta en la vista de la hoja de cálculo.

2.1.8 Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto de educación básica primaria. (9-10 años).

Autor: Rodolfo Vergel Causado, 2014. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Objetivo: El trabajo investigativo está orientado por la siguiente pregunta:
¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?

Para ello, se tendrán en cuenta los *procesos de objetivación del saber* propuestos por Radford (2010), los cuales en relación a las formas de pensamiento algebraico temprano se pueden clasificar en una tipología de las generalizaciones, a saber:

> *Factual*, relacionada con los gestos y la actividad perceptual; *contextual*, relacionada con la descripción general de los objetos; y *simbólica*, en la que los objetos son expresados en el lenguaje alfanumérico – sistema semiótico del álgebra-. Para el caso del trabajo realizado, esta tipología se tomó únicamente desde el punto de vista representativo; es decir, que cada una de estas formas de pensamiento en realidad van a denotar una forma de representar

> aspectos propios del pensamiento algebraico y no precisamente el nivel. En este orden de ideas Radford (2010) expresa que en el *pensamiento algebraico Factual* la generalidad se basa en acciones realizadas sobre números; las actuaciones constan aquí de palabras, gestos y de actividad perceptual. Por su parte, en *el pensamiento algebraico Contextual* la formulación algebraica es una descripción del término general (citado enVergel, 2014, p.8-9)

Resultados y conclusiones: En la investigación se resaltan estudios cognitivos relacionados con la teoría de objetivación y los elementos asociados con la concepción multimodal del pensamiento humano, lo cual posibilitó una mirada muy cercana a la actividad matemática realizada por los estudiantes, cuando enfrentaron las tareas sobre secuencias de generalización de patrones.

Para dar respuesta al interrogante usando como base las producciones de los estudiantes a lo largo de las tareas propuestas sobre generalización de patrones, se afirmó que las formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian (usan como último recurso o, en definitiva) en la actividad. La actividad se puede entender como el diseño didáctico que se realizó para la estructuración mental del conocimiento y consecución de las tareas. Las evidencias analizadas nos permiten constatar que es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico.

En algunas actividades en las cuales se requiere justificar generalizaciones, aparecieron formas más complejas de pensamiento algebraico, ya que los estudiantes tuvieron que movilizar otros medios semióticos de objetivación, como es el caso de los recursos lingüísticos, que permitieron instanciar otra forma o clase de pensamiento algebraico como lo es el Contextual, es decir, una forma de pensamiento algebraico que está en continuidad con el Factual, pero va más allá, va más lejos. En este sentido se afirmó que hay una evolución del *pensamiento algebraico Factual hacia el contextual.*

De igual manera se puede concluir que los problemas en los cuales se pide justificar con sus propias palabras situaciones de generalización, permiten identificar la característica común

en la secuencia figural con lo cual se pudo deducir la formula o regla que proporciono el valor de cualquier figura de la secuencia.

Los análisis llevados a cabo en el estudio, ponen en evidencia que las secuencias de figuras con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas sin apoyo tabular. En efecto, las secuencias de figuras posibilitan una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual se traduce en un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. Dichas estructuras sirvieron de punto de referencia para efectuar la generalización, la cual se consideró como algebraica Factual.

El análisis basado en los medios semióticos de objetivación, permitieron denotar que los alumnos realizan una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos y el lenguaje natural.

La investigación aporta conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (edades entre 9 – 10 años) ponen en juego cuando abordan problemas de generalización de patrones y con la caracterización del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes.

En términos más generales, se consideró que la investigación aporta elementos didácticos y metodológicos que permiten repensar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en tanto ponen en el horizonte didáctico formas alternativas de intervención en el aula de matemáticas que necesariamente deberían considerar aspectos corpóreos en el acto de conocer y aprender.

2.1.9 Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria.

Autores: Diego Acosta, Irene Jiménez y Blanca Villar, 2015. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Objetivo: Describir e implementar una actividad en la que se desarrolle el pensamiento variacional en primaria, observando los procesos de conjeturación y argumentación de los estudiantes bajo dicha actividad.

La actividad a la cual hacen referencia los autores de este trabajo consiste en elaborar un *applet* en el software Geogebra, el cual permitirá registrar las conjeturas y argumentaciones que los estudiantes arrojan al manipular el applet; y posteriormente se realizara una descripción de los datos arrojados.

Conclusiones: Con base a la experiencia de la aplicación del applet y el cuerpo del trabajo se concluye:

- Todos los estudiantes desarrollan y exponen ideas del pensamiento variacional a partir del applet trabajado.
- La mayoría de estudiantes realizaron conjeturas asociadas a la visualización y a partir de la misma, algunos de ellos se arriesgaron a formular conjeturas, e intrínsecamente un par de estudiantes lograron validar sus conjeturas y argumentarlas de forma sustancial.
- Se puede inferir también que el diseño del applet fue acertado frente a su objetivo, el cual consistía en desarrollar procesos de pensamiento variacional, y este permitió a su vez encontrar los diferentes procesos de conjeturación y argumentación.

2.1.10 Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento resolución de problemas.

Autor: Erika Sofía González Trujillo, 2012. Universidad Nacional de Colombia- sede Bogotá.

Objetivo: Plantear una propuesta didáctica que centra su desarrollo en potenciar en los estudiantes los diferentes usos e interpretaciones de la variable a través de procesos de generalización en contextos geométricos y numéricos, propiciando el análisis sobre sus propias concepciones y razonamiento.

Antes de pasar a las conclusiones, destacamos los siguientes aspectos que se tienen en cuenta en la propuesta didáctica:

- Se plantean algunas situaciones problema en diversos contextos con el fin de flexibilizar el significado de variable, sus distintos usos y formas de representarla a partir de la generalización y modelación de situaciones. La propuesta didáctica está diseñada para niños entre los 10 y 13 años de edad.
- La actividades basadas en situaciones problema, parten de la experiencia con los niños y su principal objetivo teniendo como referente epistemológico (*retórico, sincopado y simbólico*) el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico en la construcción del concepto de variable, es que el niño vivencie las etapas históricas en la construcción del lenguaje simbólico, de forma que inicialmente el niño describa en palabras las situaciones observadas de lo que está pasando, e identifique y comunique verbalmente patrones, regularidades, variaciones, como un acercamiento a la etapa del lenguaje retórico, posteriormente lo avanzamos al lenguaje sincopado cuando el niño siente la necesidad de abreviar esas observaciones al momento de describir lo que sucede en determinada situación. Dicha descripción podrá ser cualitativa o cuantitativa; es importante resaltar que la descripción, puede ser resultado de una observación referida a las cualidades de la figura (grande, pequeño, horizontal, vertical, etc.), es decir de tipo cualitativo, como también cuantitativas e irá acompañada de diversas abreviaturas que el niño usará como recurso para describir; de

ahí la importancia de las preguntas que se le planteen, ya que éstas deben apuntar a enriquecer sus observaciones y cuestiones, acercándolo al uso lenguaje simbólico.

Conclusiones: Con base al análisis de los datos recogidos en la propuesta didáctica, se concluye que:

- Una de las formas de acercar a los niños al manejo de letras y a la construcción del lenguaje simbólico con significado es a través de procesos de generalización que se pueden abordar con actividades en diferentes contextos, dicha actividades introducen al manejo de letras, facilitan la comprensión del significado de variable a través de las relaciones de tipos numérico o geométrico, establece una relación aritmética-geometría , que se amplía con la simbolización en una relación aritmética- geometría-álgebra.
- El recorrido histórico – epistemológico del lenguaje simbólico y del significado de variable permitió comprender las dificultades a las que se enfrentar los niños al iniciar un curso de álgebra, cuando no se ha tenido una sólida comprensión del lenguaje simbólico. La historia revela que ese paso no se da en un solo instante, sino por el contrario diferentes situaciones motivaron la construcción de dicho lenguaje.

2.2 Marco Teórico

A continuación, se especifican diversos aportes, definidos como teorías que enriquecen el sentido conceptual y procedimental del presente trabajo. Destacando en primera instancia una definición que engloba todo lo relacionado al pensamiento variacional y su estrecha relación con el razonamiento algebraico; seguidamente se muestran algunos trabajos investigativos que dan cuenta de la relevancia de posibilitar el desarrollo del razonamiento algebraico desde edades tempranas, a continuación se abordan los procesos del pensamiento que entran en juego en la construcción del conocimiento matemático y finalmente se enfatiza en diversas teorías de aprendizaje que dan muestra de los múltiples elementos que se deben aplicar en el contexto para hacer más enriquecedora cada una de las practicas pedagógicas.

2.2.1 Pensamiento variacional y razonamiento algebraico

Tal como se aprecia en este trabajo, el centro de interés es dar cuenta del pensamiento variacional, pero se pudo evidenciar que existe una relación entre estos dos conceptos, los cuales se deben asumir articuladamente, para direccionar y enmarcar nuestro actuar en el aula, por lo que se hace necesario caracterizarlos, describirlos y además establecer diferencias entre ellos.

2.2.1.1 Pensamiento Variacional.

El conocimiento de las características que describen los procesos asociados al pensamiento variacional, es asumido como un insumo para fundamentar una propuesta de trabajo basado en situaciones problema. Para tal necesidad, se tiene en cuenta lo expuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1988) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemática (MEN, 2006), en relación al pensamiento variacional, en efecto:

> El pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (p.66)

> El desarrollo de este pensamiento, se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que las rigen, para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al reconocer en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para establecer en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. (p.66)

En este sentido, el estudio de los patrones se constituye en una herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la básica primaria. Por lo tanto, se deben tener en cuenta los escenarios o contextos en el que se desarrollen las tareas, pueden ser geométricos, numéricos, pictóricos, sonidos y en general en la vida práctica donde se puedan observar situaciones de variación y cambio; donde se pueda reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación. Los contextos de variación deben incluir patrones aditivos y multiplicativos.

El ente ministerial propone en su documento de Estándares (2006), algunas ejemplificaciones de actividades que se pueden trabajar con los estudiantes de básica primaria, para el desarrollo del pensamiento variacional y preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a básica secundaria, las cuales son:

- Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras.
- Hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia;
- Procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (p.67)

En relación al cambio, éste también se puede estudiar en la Educación Básica Primaria a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día) representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones.

En este orden de ideas, desarrollar el pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación, tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el contexto de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas (MEN,2006). Por lo anteriormente mostrado, la relación del pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos, muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio, y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos.

Para dar cuenta de este trabajo, se potencian algunos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos en (MEN,2006) planteados de primero a quinto, relacionados al pensamiento variacional y de los cuales se rescatan los siguientes:

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Predecir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.

En este orden de ideas , proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 1988).

2.2.1.2 Razonamiento algebraico.

Este tipo de razonamiento relacionado con los procesos de generalización, variación y cambio, lo definen algunos investigadores como Godino & Font (2003), de la siguiente manera:

> El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central. (p.9)

De modo semejante, también se caracteriza como:

> Un proceso en el cual los estudiantes generalizan las ideas matemáticas a partir de un conjunto de instancias particulares, establecen esas generalizaciones a través del discurso de la argumentación y las expresan de maneras cada vez más formales y apropiadas para la edad. (Kaput, Carraher & Blanton, 2008)

Se puede evidenciar en ambas citas, que el centro del razonamiento algebraico son los procesos de generalización, ya que el desarrollo del razonamiento algebraico implica promover dichos procesos, con el deseo de que se estimule en los sujetos actividades como la justificación, la argumentación, el establecimiento de conjeturas, la caracterización de comportamientos, entre otras y que le logre llegar a mayores niveles de formalización en las representaciones.

Si bien el razonamiento algebraico no desconoce los fenómenos de variación y cambio, presenta una manera particular de abordar tales estudios a partir de la generalización de patrones, es decir se considera aquí que el pensamiento variacional es una forma amplia de

pensar matemáticamente y el razonamiento algebraico una manera de dar cuenta de dicho pensamiento.

De acuerdo con lo anterior, coincidimos con GA (2006) [3] al indicar la relación entre el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico , la cual se expresa así:

> El desarrollo de pensamiento variacional se fundamenta, o mejor se desarrolla, sobre lo que en general podemos llamar razonamiento algebraico. Este implica, por parte del docente, el reconocimiento de elementos propios de toda actividad matemática: los procesos de simbolización, de generalización y de formalización. A través de éstos se hacen necesarias formas de comunicación sobre la base de diferentes sistemas de representación tales como los icónicos, tabulares y simbólicos; y de razonamientos como la argumentación y búsqueda de elementos estructurales (por ejemplo, dar cuenta de un patrón). (p. 18)

Para concatenar nuestro estudio teórico con el siguiente apartado, rescato los estudios de Godino, Castro, Aké & Wilhelmi (2012), en el que, basándose en diversos investigadores, comprenden que:

> En razón a la dificultad del álgebra, y a que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo, se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria (Carpenter; Frankle; Levi, 2003). En este sentido diversos investigadores han apoyado la inclusión temprana del álgebra en la escuela primaria (Davis, 1985; Vergnaud, 1988). Kaput (2000) hizo una propuesta, denominada *algebra for all*, en la que sugiere tomar acción para algebrizar el currículo de la escuela primaria con el fin de promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. La inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria se ha denominado *Early algebra.* (citados en, Godino, et al., 2012)

[3] Gobernación de Antioquia (GA): Documento que hace parte de una serie de módulos relacionados con la Didáctica de la Matemática. Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. En asocio con Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia 2006.

Se presenta en la siguiente sección la propuesta Early algebra. En primer lugar, se centra el discurso en la concepción del álgebra escolar, para más adelante, definir la propuesta Early algebra y su motivo de estudio, el cual se vincula con el Razonamiento Algebraico en básica primaria.

2.2.2 Algebra escolar, Early algebra y Razonamiento Algebraico en Básica Primaria.

2.2.2.1 Algebra Escolar

El interés de diversos investigadores internacionales por introducir el álgebra desde los primeros grados de básica primaria, ha llevado a un estudio inicial sobre la comprensión del razonamiento algebraico y el pensamiento variacional, y de este modo se han realizado estudios para poder articular el álgebra en el currículo elemental, comprendiendo sus características.

En el trabajo realizado por Cortés (2012), se hace una síntesis de los aportes de diversos autores en relación a esta temática.

Bednarz, Kieran & Lee (1996) distinguen cinco concepciones diferentes sobre el álgebra: "la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de funciones" (Citado en Cortés, p. 13).

Por su parte, Usiskin (1999) presenta cuatro concepciones del álgebra escolar:

> (a) álgebra como aritmética generalizada, (b) algebra como un estudio de procedimientos para resolver cierto tipo de problemas, (c) álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y (d) álgebra como el estudio de estructuras. Aunque el segundo autor vincula el álgebra al uso del simbolismo algebraico, en ambas concepciones se destacan los patrones (aritméticos y geométricos), la generalización, la resolución de problemas, las cantidades, las funciones y la modelización, como componentes del álgebra que se identifican con el

> álgebra escolar. Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985) identifican diferentes "raíces" del álgebra, entre las que figura la generalización. (citado en Cortés, p.14)

Desde la amplia visión del álgebra escolar mencionada Carraher, Martinez, & Schliemann, (2007), insisten en que los estudiantes aprendan a "realizar generalizaciones a partir de patrones. Para que los estudiantes comprendan el significado de las leyes algebraicas se les proponen tareas en las que ellos establezcan relaciones entre nociones y significados a través de actividades en diferentes contextos" (citado en Cortés, p.14).

Por su parte los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000)[4], también aportan una visión multidimensional del álgebra, distinguiendo como componentes de la misma:

> La comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, representación de relaciones matemáticas, análisis de situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos, uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio. Además, recomiendan que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde la educación infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior" (p. 37). (citado en Cortés, p.14)

Esta recomendación es acorde con la propuesta conocida como *Early-Algebra* que plantea "la introducción de modos de pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos escolares" (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Kaput, 2000; Molina, 2009). "De las matemáticas propias de la educación primaria pueden emerger naturalmente diferentes modos de pensamiento algebraico, que tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar" (Blanton y Kaput, 2005). Los autores que abordan esta propuesta tales como Kaput (1998, 2000); y Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow y Lara-Roth (2003), "adoptan una visión del álgebra que engloba el

[4]Documentos de asociación creada en Estados Unidos: National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standars of School Mathematics, 2000.

estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones." (citado en Cortés, p.14-15)

2.2.2.2 Early algebra

Autores tanto nacionales como internacionales Moreno (2015); Cuartas (2015) y Cortés (2012) respectivamente han recopilado un análisis de la necesidad de la introducción del estudio del álgebra en educación básica primaria, en efecto como indican Carraher, Schliemann y Brizuela (2006):

> la enseñanza del álgebra ha estado tradicionalmente pospuesta hasta la adolescencia por razones históricas. Presunciones sobre el desarrollo psicológico de los estudiantes, así como investigaciones que documentaban las usuales dificultades que los adolescentes tienen con el álgebra apoyaban el retraso en la inclusión del álgebra en el currículo. Muchos autores han argumentado que los niños en edad temprana son incapaces de aprender álgebra porque no tienen la capacidad cognitiva suficiente para manipular conceptos como las variables y las funciones. Sin embargo, como destaca Molina (2009), "en las dos últimas décadas se han realizado investigaciones que tratan la integración del álgebra en el currículo de educación primaria." (citado en Cortés, p.15)

En este orden de ideas Molina (2004); Socas (2011); Kaput (1999) y Warren & Cooper (2005) centran su atención en la matemática de la escuela elemental, pues la consideran como el acceso clave al álgebra escolar en secundaria; primero, por la destacada presencia de la aritmética en el currículo de matemáticas de educación primaria y segundo, por la intensa conexión existente entre estas dos sub-áreas. Además, sugieren que el álgebra y la aritmética se integren en el currículo tan pronto sea posible, pues el objetivo principal, es promover el pensamiento algebraico junto con el pensamiento aritmético de manera paralela, para obtener una mejor enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra escolar. (citado en Moreno, 2015).

Lo señalado anteriormente, ha llevado al consenso de introducir el enfoque *Early Algebra*. Este enfoque, es una propuesta de cambio curricular, que trae un impacto de cambio en la educación matemática, pues promueve el pensamiento algebraico desde los primeros ciclos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tal y como afirman Blanton y Kaput (2011):

> El *Early algebra*, no hace referencia a trasladar el contenido curricular de álgebra a la educación primaria, ni tampoco enseñar álgebra simbólica; lo que busca, es introducir una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas; para crear un puente que facilite el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria y de esta manera crear un aprendizaje basando en la comprensión de las matemáticas. (Citado en Moreno, p. 31)

Además, Molina (2006) caracteriza la Early algebra como:

> Una propuesta para abordar el problema descrito, está basada en la introducción del álgebra, de manera transversal, gradual y sistemática, en todos los grados de escolaridad. Esta propuesta es vista como una forma de pensamiento y expresión a partir de objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, con la finalidad de promover una enseñanza y un aprendizaje para la comprensión y facilitar el estudio formal del álgebra, promoviendo así un mayor grado de generalidad en el pensamiento de los estudiantes y aumentando su capacidad para expresar la generalidad. (citado en Cuartas, 2015, p. 31)

De acuerdo con este planteamiento, una de las dos cuestiones que abordan Blanton y Kaput (2011) es ¿cómo integrar el pensamiento algebraico en los primeros grados de manera que prepare a los estudiantes de matemáticas para los grados superiores?, los autores afirman posteriormente que desde los primeros grados deben incluirse patrones, conjeturas y justificaciones en el currículo, para construir generalidad matemática. Paralelamente autores como (Blanton y Kaput, 2006; Molina, 2006; Molina, 2011) coinciden en que el "álgebra puede enseñarse a partir de los primeros grados y puede servir como una preparación para el estudio del álgebra en grados superiores, y exponen el caso de la *generalización* como un enfoque a través del cual se hace factible esta propuesta." (citado en Cuartas, 2015 p.31). Otros enfoques son: *la resolución de problemas, la modelación y uso de la función*.

Para nuestro trabajo nos basaremos en los enfoques de enseñanza y aprendizaje basados en la *generalización, resolución de problemas y función.*

2.2.2.3 Razonamiento Algebraico en Básica Primaria

Como se consideró anteriormente, el razonamiento algebraico es el que da cuenta del desarrollo del pensamiento variacional, y éste se puede manifestar de diferentes formas. Kaput (1998) identifica cinco formas interrelacionadas de razonamiento algebraico en la básica primaria en donde el *Algebra* se entiende como:

- Generalizar y formalizar patrones y regularidades, en particular, el álgebra como aritmética generalizada.
- Manipulaciones sintácticas guiadas de símbolos
- El estudio de las estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y relaciones
- El estudio de las funciones, relaciones y la variación conjunta
- La Modelación (citado en Jacobs, Loef, Carpenter, Levi, & Battey, 2007, p.2)

Para nuestro objeto de estudio tendremos en cuenta las anteriores recomendaciones.

2.2.3 Didáctica para el Desarrollo del Pensamiento Variacional

A continuación, se muestra el estado actual de la investigación didáctica sobre los procesos asociados al pensamiento variacional. Cabe recordar que en nuestro trabajo pensamiento variacional se desarrollara de la mano del razonamiento algebraico elemental.

Por lo anteriormente dicho, iniciamos con el conocimiento que debe tener el maestro para poder generar estrategias que le permitan desarrollar el pensamiento variacional. Para ello investigaciones como la de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, (2012), establecen que:

> La formación del maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos, descubriendo su función central en la actividad

matemática. Sólo así serán los maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles.

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y que, por tanto, deben conocer los maestros en formación, son:

1. *Los patrones o regularidades* existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. El *uso de símbolos* permite expresar de manera más eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.
3. Las *variables* son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.
4. Las *funciones* son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. (p. 4 -5)

Posteriormente entre estos mismos autores Aké, Godino, & Gonzato (2013), se proponen una distinción en niveles del razonamiento algebraico, pero para nuestro interés destacaremos ejemplos de actividades que pueden ayudar a clarificar los rasgos característicos del álgebra en la educación primaria. Para ello se propone clasificar las actividades en cuatro grupos, cada uno defendiendo un nivel diferente de razonamiento algebraico. Se parte de la siguiente caracterización de *"sentido algebraico"*. Se trata de la capacidad de un sujeto para:

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.

- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada. (p.46)

Este sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que, partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

Con base a lo anterior, nos proponemos destacar aspectos particulares de nuestro interés para la consecución de nuestros objetivos, entre ellos están: *la generalización de patrones y uso de representaciones.*

2.2.4 La generalización de patrones, una alternativa para el acercamiento del razonamiento algebraico.

Uno de los procesos fundamentales de la actividad matemática es la generalización, puesto que es requerida en las diferentes formas de "hacer matemáticas", como por ejemplo en la resolución de problemas, la modelación, entre otras. Es por ello que investigadores como Mason (1996) afirman, que "la generalización es el corazón de las matemáticas, pues permite acceder a la construcción de los conceptos matemáticos y el establecimiento de las relaciones entre ellos." (citado en Tapiero y Hernández, p. 40)

La generalización es la expresión de relaciones o propiedades entre diferentes objetos de manera que se perciban regularidades entre dichos objetos y puedan ser enunciadas verbal o simbólicamente, siendo considerada por Radford (citado por Vergel, 2014) como una de las principales vías para introducir el álgebra en la escuela, debido a que hace posible que los estudiantes se aproximen a situaciones de variación, lo que se constituyen como importante para el desarrollo del pensamiento algebraico, favoreciendo el tratamiento sintáctico del sistema simbólico. Tal como indica Mason, Graham, Pimm, y Gower (1985),

el reconocimiento de patrones a través de la generalización debe ser desarrollado a lo largo del ciclo de educación básica.

Los procesos de generalización de patrones permiten una división en fases que conviene también desde un punto didáctico (Mason, 1985):

a) "La visión de la regularidad, la diferencia, la relación - Ver un patrón

b) Su exposición verbal - Describir un patrón

c) Su expresión escrita de la manera más concisa posible - Registrar un patrón." (citado en Hernández y Tapiero, 2014, p.41)

A continuación, se caracterizan cada una de estas fases del proceso de generalización:

> *"Ver un patrón"* hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. Aunque en ocasiones y dependiendo de la situación, la visualización pueda ser un proceso rápido e intuitivo para los sujetos, hay otras situaciones en las que este mismo proceso se puede complejizar a tal punto que se requiera hacer un análisis de las situaciones planteadas, estudiando sus características o propiedades, de manera que se manipule la información y se pueda llegar al reconocimiento del patrón.
>
> *"Describir un patrón"* consiste en describir la regularidad percibida que inicialmente se hace en lenguaje natural y de manera oral. Es frecuente que a los estudiantes les resulte algo difícil pasar del ver al describir un patrón, por eso es importante que se destine un tiempo al trabajo en grupo para que puedan aclarar sus ideas, discutiendo sus observaciones y percepciones. La descripción obliga a que los estudiantes hagan una organización de sus ideas y por medio de la comunicación con sus compañeros verifiquen sus conjeturas o las reformulen. Por tal motivo es importante que el maestro favorezca actividades que le permitan dar tal paso de una fase a otra.
>
> *"Registrar un patrón"* implica una variedad de formatos que no necesariamente es el simbólico, sino que pueden ser a través de escritos, dibujos, gráficos o tablas, o una combinación de estas, como dibujos apoyados con palabras. Hay que resaltar que una buena razón para registrar los patrones es el hecho de que las ideas en la mente tienden a dar vueltas y ser fugaces, en cambio una vez que están plasmadas en el papel son fáciles de analizar,

> discutir y de llegar a más personas, siendo también una forma de exponer las ideas a la crítica. Este registro debe ser propio del estudiante, es decir que sea él mismo quien lo genere a partir de los elementos matemáticos o conceptuales con los que cuente. (Tapieros y Hernández, 2014 p. 41-42)

2.2.5 El uso de las representaciones

Este apartado presenta una tipología de las representaciones. Además, se mencionan diversas formas de expresión para estas representaciones.

Rico (2009), subraya que "la representación matemática es la herramienta, ya sea un signo o un gráfico, mediante la cual un individuo expresa un concepto o procedimiento matemático, permitiendo así que el individuo pueda registrar y comunicar su conocimiento matemático" (citado en Cortés, 2012 p. 18-19).

Cortés (2012) distingue entre las representaciones: verbal, tabular, pictórica, simbólica. La Tabla 1 muestra una tipología de las representaciones.

Tabla 1. Tipos de representaciones (Cortés, 2012)

Tipos de representaciones	
Verbal	La representación verbal es una forma de exponer la información mediante el uso del lenguaje natural.
Tabular	La representación tabular es una tabla de datos que sirve para organizar, relacionar y representar cantidades numéricas, desde cualquier otra forma de representación.
Pictórica	La representación pictórica es una forma visual de representación, que ayuda a interpretar y relacionar información. Se caracteriza por la ausencia de notaciones simbólicas. La representación pictórica contiene dibujos.
Simbólica	La representación simbólica incluye *la numérica* (números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático) y *la algebraica* (uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar). En algunos casos puede ser *múltiple* las cuales resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos anteriormente.

En este trabajo se consideran las expresiones verbales en las justificaciones que presentan los estudiantes por escrito en las tareas de generalización y en las respuestas que dan en las entrevistas captadas en video. También "puede haber representaciones múltiples, las cuales resultan de combinar los tipos de representación mencionados" (Merino, 2012).

Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999) reconocen tres formas de expresión: Verbal, mixta y simbólica. En la Tabla 2 se clasifican las formas de expresión.

Tabla 2. Formas de expresión de las representaciones (Mason et al., 1999)

Formas de expresión	
Verbal	La expresión verbal es aquella que se escribe completamente con *palabras* del idioma usual, sin el uso de símbolos especiales (como +, x), excepto los dígitos, que también pertenecen a nuestro mundo simbólico.
Mixta	La expresión mixta es una forma que resulta de la combinación entre la forma *verbal y la simbólica* (p. 54). Esta forma de expresión se caracteriza porque permite simplificar las expresiones verbales en frases descriptivas que codifican las variables particulares, y usar símbolos matemáticos para indicar operaciones.
Simbólica	La expresión simbólica se caracteriza porque no contiene palabras, solo admite el *uso de letras, números, símbolos matemáticos o figuras* para representar una variable clave. Esta forma de expresión también puede contener *palabras a medias.*

Estas formas de expresión se caracterizan porque favorecen la expresión de la generalidad y, por lo tanto, son algebraicas (Mason, et al., 1999).

2.2.6 Algunas dificultades presentadas en la transición de la aritmética al álgebra.

Entre las expresiones usadas por los estudiantes, suscita para nosotros un gran interés el uso de la letra como un tipo de representación simbólica para indicar sus comprensiones con respecto a la variación y cambio, a continuación, veremos como las letras se han tenido en cuenta para este fin.

2.2.6.1 Uso de la letra como variable

Un análisis más detallado acerca del uso de la letra en el álgebra, lo encontramos en Küchemann (1981) quien categorizó los siguientes seis niveles de interpretación de letras, de acuerdo al mínimo nivel requerido para una ejecución exitosa.

- **Letra evaluada:** La letra es asignada a un valor numérico desde el principio. Es decir, se les *asignan valores numéricos arbitrarios* a las letras; por ejemplo, si se pregunta al niño, "Si $5 + x = 8$, ¿cuánto vale x ?", dirá que 3, sin hacer ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental.

- **Letra no considerada:** La *letra es ignorada* o su existencia es reconocida sin darle un significado. Si se pregunta al estudiante por el valor de $a + b + 2$,cuando se sabe qué $a + b$ es igual a 27 , el niño puede responder sin pensar en ningún momento en los valores de a, b o la suma $a +$ b. Otro ejemplo sería, en expresiones como $2x + 3y + 7z$, algunos estudiantes dan como respuesta $12xyz$; en este caso, los estudiantes trabajan realizando operaciones aritméticas $(2 + 3 + 7)$, ignorando la presencia de las letras o, en el mejor de los casos las consideran, pero no tienen valor para ellos.

- **Letra considerada como un objeto concreto:** La letra es reconocida como *abreviaturas de nombres de objetos* o como objetos en sí mismo. La frase matemática $3m + 7b$ y la frase "tres manzanas y siete bananos" se consideran como equivalentes. La letra se ve como la abreviatura del nombre de un objeto particular. Esto ocurre especialmente en problemas donde se involucran objetos concretos como lápices, mesas, etc.

- **Letra considerada como una incógnita específica:** Los estudiantes perciben que las letras tienen un *valor especifico, pero desconocido*. Por ejemplo, la expresión $A + B + C$ nunca será igual a $A + M + C$, porque B no es igual a M (aunque ambas sean reconocidas como variables que deben ser siempre con valor diferente una de la otra) , ya que son representadas por diferentes letras del alfabeto.

- **Letra como un número generalizado:** Los estudiantes perciben que las letras representan valores, o por lo menos son capaces de tomar varios valores en lugar de sólo uno. Por ejemplo, los estudiantes, si se les pide que elaboren una lista de todos los valores posibles para la expresión $a + b = 20$, presentan generalmente una lista con varios números enteros que satisfacen la condición. Sin embargo, tienden a no darse cuenta de que deben expresar, de manera obligatoria, todos los números que satisfacen la condición. (García, Segovia, & Lupiáñez, 2014, p. 1549)
- **Letra considerada como variación de cantidad (variable):** La letra es vista como representando un rango de valores no especificados. Si se pregunta, ¿qué es mayor $3n$ ó $n + 3$? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no especificados y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los estudiantes prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado. Pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, tratan la letra como variable. (Rivera & Sanchez, 2012, p. 27-28)

En el mismo estudio, Küchemann (1981) identifica las primeras tres categorías de los usos de la letra (evaluada, ignorada y como objeto) en el nivel más elemental del manejo de ésta. En cambio, cuando los participantes reconocen las variables como incógnitas específicas, números generales o variación de cantidades, considera que tienen un entendimiento alto sobre el concepto de la misma. En este mismo sentido, sostiene que un estudiante habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable”. Sugiere también, que es más fácil para el estudiante trabajar con la “letra como incógnita específica” que con la “letra como número generalizado”, y que es más fácil trabajar con la “letra como número generalizado” que con la “letra como variable”.(citado en García et al., 2014, p.1550)

2.2.6.2 Signo igual

Diversos estudios[5] muestran que las interpretaciones que hacen los estudiantes del signo "=" y de las ecuaciones pueden diferir de las que se pretende en la enseñanza. Por ejemplo, los estudiantes piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, $2 + 3 = 5$, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones " $2 + 3 = 5$ " y " 5 ". Ellos consideran que cambiando la letra en una ecuación puede cambiar la solución; podemos encontrar que dan soluciones diferentes a estas dos ecuaciones: $7x + 3 = 28$, y $7B + 3 = 28$; algunos estudiantes pueden argumentar que x es mayor porque está más al final del alfabeto que B (Godino,2003).

El profesor puede aprovechar este tipo de situaciones para ampliar el significado del signo igual "=". Una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. Esto ayudará a los estudiantes a superar su idea de que el signo "=" es una indicación de realizar un cálculo, y ver que en el álgebra el signo igual cumple una relación de simetría y transitividad, la cual deja explícito que es un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación.

Para efectos didácticos en básica primaria se realizan tareas entendiendo el signo igual como el equilibrio entre una balanza, donde los platos de la balanza son las expresiones o cantidades indeterminadas a derecha e izquierda de esta.

Las anteriores fueron algunas dificultades usuales cuando se está abordando el pensamiento variacional en su etapa inicial desde la aritmética, las cuales fueron consideradas en el diseño y el análisis de este trabajo de acuerdo a los resultados que muestran las investigaciones antes citadas, sobre razonamiento algebraico en Educación Básica Primaria.

[5] Los estudios específicos a los que nos referimos corresponden a los realizados por diferentes investigadores como Mason (1985), Kieran (1989,1992), Radford (2006), Godino (2003), citados en diferentes apartados de este proyecto. (Citado en Rivera y Sánchez, 2012)

2.2.7 Patrones y funciones

Según los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) "los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" los patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad" (p. 51).

La introducción de función en los contextos descritos prepara al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes) (MEN, 1998; Rivera & Sánchez, 2012).

Desde nuestra percepción para desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes de primaria, si es necesario mostrar una regularidad en el concepto de función, con el objetivo de estimular una estrategia recursiva, y así logre generalizar expresiones para cualquier término de una secuencia.

2.2.8 Funciones en la Educación Primaria

Investigaciones sobre la generalización matemática y algebra temprana, señalan que el estudio del cambio es fundamental para la comprensión de las funciones y los niveles más altos de las matemáticas que se basan en ella (por ejemplo, cálculo). Un estudio del cambio no sólo sirve en niveles más altos de matemáticas, sino también ayuda a una mejor comprensión de los procesos de la aritmética. Las primeras experiencias de cambio (por

ejemplo, color, forma) son naturales e interesantes para los niños pequeños. Pues estas experiencias van más allá de simplemente encontrar y describir los patrones de cambio, pero también abarcan las ideas como el cambio cualitativo (por ejemplo, crecí más alto), el cambio cuantitativo (por ejemplo, crecí 2 cm más alto), las relaciones entre estos cambios (por ejemplo, si todo el mundo creció más en la misma cantidad y la altura de John cambió de 143 cm a 145 cm) y el uso de estas relaciones para resolver problemas (por ejemplo, si la altura de Alison es ahora 133 cm , ¿qué altura tenía ella antes de que creciera?). Desde un contexto matemático el cambio, podría verse en cómo, cambia el perímetro de una figura en relación a la variación de sus lados. (Carraher, Martinez & Schiliemann, 2007)

En nuestro estudio se utilizará la función lineal, ya que ésta modela situaciones sencillas, para trabajar con los estudiantes, por ejemplo: Asociarle a una mesa cierta cantidad de personas sentadas, si es una mesa, se le asocian 4 personas, si son 2 mesas, serian 8 personas sentadas, y así sucesivamente.

2.2.9 El enfoque de resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento variacional.

Es a través de este enfoque lleno de teorías de gran aplicabilidad, practicidad e interacción que se habla de un proceso de enseñanza y aprendizaje, en el cual el estudiante es el protagonista, pues sin su motivación e interés el proceso se verá truncado. El educador debe valerse del conocimiento que adquiere del contexto y proponer la solución de problemas que nutran la construcción del aprendizaje variacional.

Ante esto, en los lineamientos curriculares del MEN (1998), proponen que:

> "El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica (…)" (p.73)

Es por eso que se busca realizar un proceso en el cual se analizan las variaciones y cambios en un conjunto diverso de secuencias de figuras, gráficos, tablas y a partir de la información abordada establecer mecanismos lógicos de identificación de las regularidades, de patrones, repeticiones o similitudes. Del mismo modo, se requiere de un momento en el cual el estudiante debe aprender a interpretar la información representada a través de diversos lenguajes, de forma que establezca posibles respuestas, y así adquiera una capacidad de autonomía que contribuya a la construcción de nuevos aprendizajes.

En concordancia con lo anterior, Hecklein, Engler, Vrancken, & Müller (2011) señalan que:

> Potenciar o desarrollar el pensamiento variacional implica preparar a los alumnos para resolver problemas y tratar la información que reciben del medio, de manera que sean capaces de reconocer las estrategias para su solución y favorecer un mejor entendimiento e interpretación de la realidad. En esta dirección, los procesos de cambio y variación constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar (p. 23-24). (citado en Dávila, 2018)

Teniendo en cuenta lo anterior se pueden distinguir dos tendencias: Una que enfatiza el proceso de resolución y otra que resalta el conocimiento base del individuo que resuelve el problema, particularmente la organización de ese conocimiento. Con ello se pretende dar a conocer en el proceso de resolución de problemas las posibles estrategias que utiliza un individuo a la hora de enfrentarse ante este tipo de situaciones, ya que estas son más enriquecedoras que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto en el cual los datos guarden cierta coherencia.(Benjumea, Gallego, Miranda, Montoya, & Ocampo, 2007, p. 40)

Adentrándonos un poco más en la necesidad de enmarcarnos dentro del enfoque problémico, se parte de la inmersión del ser humano en su cotidianidad, el cual se encuentra expuesto a situaciones problema que traen consigo diversas variables y factores que repercuten de forma significativa en su entorno inmediato, por lo tanto el ser humano demanda la aplicación de habilidades para saber cómo afrontar dichas situaciones, es ahí donde entra en juego la perspectiva contextual de la educación y el rol del docente para orientar al estudiante

en la toma inteligente de decisiones ante determinadas situaciones problema en un contexto matemático o cotidiano.

Aquí cabe citar entonces el valioso aporte de (Freire, 2002), quien da una perspectiva de cómo debe ser el pensamiento del educador para el desarrollo de dicha teoría: “Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo y me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad” (p. 14).

En el caso específico de las matemáticas, para el manejo de conceptos del pensamiento variacional es indispensable conocer las exigencias de la sociedad, es decir, generar procesos reflexivos de enseñanza y aprendizaje en los que se estimulen las situaciones problema a partir de circunstancias existentes que permitan un detallado análisis de variaciones y representaciones. Esto desarrolla la lógica, el razonamiento y una versatilidad conceptual que le ayuda al estudiante en su formación personal y en su desempeño dentro de la sociedad.

Tal y como lo afirma (Rodriguez, 2010):

> La metodología del aprendizaje basado en problemas concibe al estudiante como un sujeto activo, por lo que debe realizar una actividad para poder apropiarse del conocimiento, y con ello desarrollar su intelecto. Es importante precisar que el estudiante, junto con el conocimiento, hace que la enseñanza problémica permita asimilar métodos y procedimientos, acercándolos al desarrollo de la lógica de la actitud científica y a la formación en la investigación (p.82).

2.2.10 La Teoría de las situaciones didácticas

En nuestro deseo de adquirir una práctica de aula, en la cual los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje, consultamos la teoría de las situaciones didácticas que propone Guy Brousseau.

Por situación didáctica se entiende una situación construida intencionalmente por el profesor con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado o que esté en camino de constituirse. La

situación didáctica se planifica con base en actividades problematizadoras, cuya necesidad de ser resueltas o abordadas, implique la emergencia del conocimiento matemático que da sentido a la clase, la que ocurre en el aula, es un escenario llamado triángulo didáctico, cuyos lados indican conjuntos de interacciones entre los tres protagonistas (indicados por los vértices):

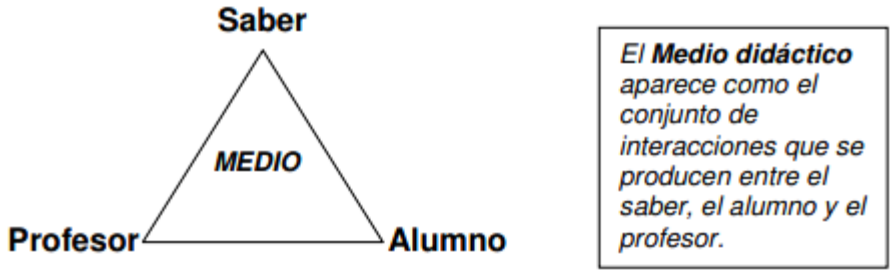


Figura 1. Medio Didáctico, Guy Brousseau
Fuente, Roberto Vidal.

En el desarrollo de una situación didáctica, aparecen "momentos"; momentos denominados como **situaciones a-didacticas**, que se caracterizan por el trabajo que realiza el alumno interactuando con el problema propuesto o bien discutiendo con sus compañeros acerca de éste, es decir cuando interactúa con el medio preparado por su mentor. El profesor debe procurar que el alumno se responsabilice por trabajar en él y si no llega a su solución, al menos indique ciertas aproximaciones según los objetivos propuestos. Así, en estas situaciones a-didácticas interesa observar "cómo se las arregla" el estudiante ante el problema que le demanda el maestro.

En palabras del propio Brousseau (1998): El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.(citado en Vidal, 2009, p.3)

El profesor ya ha planeado la situación didáctica (la actividad en general) de modo que existan estos momentos (situaciones a-didácticas) en que los alumnos interactúan con el problema, presenten conflictos cognitivos, se propicie la discusión y el debate y también hagan preguntas. El papel del profesor, en tanto, consiste en guiar con intervenciones o

respondiendo a las preguntas, pero con otras interrogantes o señales sin "soplar" las respuestas. A este proceso dialéctico Brousseau le llama **Proceso de Devolución.**

Según Brousseau (1986), "el personal docente debe crear situaciones para sus estudiantes, en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos y sea el alumnado quien lo descubra" (citado en Alfaro & Fonseca, 2016, p. 21)

Se evidencia de esta forma que para el desarrollo del pensamiento variacional es vital que el docente plantee situaciones problematizadoras a partir de las experiencias significativas y los conocimientos previos que tenga el estudiante. De igual forma, la propuesta de usar actividades de aprendizaje, previamente intencionalizadas para concatenar los conocimientos y mediando con tecnologías de información y comunicación, tienen el objetivo de propiciar espacios de análisis y reflexión eficaces, lo cual cobra importancia para desarrollar dicho pensamiento.

2.2.11 Teoría del aprendizaje colaborativo o cooperativo

Es de relevancia resaltar esta teoría, ya que en la institución donde se lleva a cabo este trabajo de investigación, el enfoque colaborativo aparece en su PEI, como una herramienta o método pedagógico que es necesario para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Bruffee (1993) establece que:

El aprendizaje colaborativo se inscribe dentro de una epistemología socioconstructivista (…). El conocimiento es definido como un proceso de negociación o construcción conjunta de significados, y esto vale para todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunque el peso del concepto está puesto en el reconocimiento del valor de la interacción cognitiva entre pares, el aprendizaje colaborativo involucra también al docente, o sea a todo el contexto de la enseñanza –comunidad de aprendizaje– (citado en Roselli, 2011, p.179)

Por tanto, esta teoría se centra en el proceso de construcción epistémica en ambientes microsociales tales como el aula de clase o el grupo de trabajo, donde todos los actores de

la comunidad educativa interactúan en consenso, respetando el punto de vista del otro, para conjuntamente propiciar un conocimiento nuevo.

Para Gunawardena, Lowe y Anderson (1997) “la interacción se convierte en un elemento clave, si se toma en cuenta que el proceso esencial es juntar las contribuciones de los participantes en la co-creación de conocimiento” (Citado en Galindo, Ruíz, y Martínez, 2012, p. 2).

En tal sentido, el trabajo en equipo posibilita la discusión entre pares y potencia la reconfiguración efectiva de constructos y paradigmas que conllevan a la solución de situaciones problémicas de contexto con alcances comunitarios, inclusive.

Según Monereo (2004), “Cuando el educando está en interacción con (…) alguien que se le parece, tarda menos en resolver problemas con la ayuda de un adulto o de compañeros más capaces que si lo hiciera solo” (Citado en Galindo et al., 2012, p. 5). Cada vez más nuestras instituciones educativas deben atender a una población con necesidades educativas especiales, para lo cual es importante desarrollar un trabajo en equipo teniendo en cuenta las similitudes en los procesos mentales de aprendizaje. Lamentablemente, estos aspectos no se tienen en cuenta en ocasiones al momento de diseñar la estrategia grupal, generando en el mejor de los casos estancamiento epistémico y aislamiento social.

2.2.12 Reflexiones sobre el marco teórico

En resonancia a todo lo anteriormente expuesto de las teorías mencionadas, nos dan una luz de cómo se pueden concebir el papel que ha de cumplir el estudiante y el docente.

Papel del estudiante

El papel del estudiante durante la ejecución y desarrollo de las actividades de aprendizaje, aparte de que él es el agente activo y el actor principal en este proceso, también debe asumir las siguientes responsabilidades:

- Enfrentarse a nuevas experiencias cognitivas y situaciones problema para darles solución a partir de la comprensión de las mismas, mediante el reconocimiento y comprensión de los patrones y regularidades encontrados.
- Realizar y justificar representaciones que den cuenta de la comprensión en relación a las situaciones planteadas.
- Modelar regularidades que se presentan en las secuencias graficas o numéricas.
- Compartir sus ideas con las compañeras de grupo, para facilitar la retroalimentación en cuento a comprensión o manejo de dificultades.

Papel de docente:

El papel del docente durante todo el desarrollo del proyecto, se convierte en un agente motivador y guía para los estudiantes con el propósito de hacer más provechoso y dinámico los procesos de enseñanza y de aprendizaje, con miras al fortalecimiento de los procesos asociados al pensamiento variacional, por lo cual debe:

- Buscar aclarar dudas, ideas y generalizaciones hechas por los discentes
- Generar ambientes de discusión y conclusión acerca de las preguntas,
- Posibilitar e integrar situaciones experienciales y vivenciales, con el fin que el conocimiento sea más fructífero haciendo uso de la lúdica y la creatividad.
- Organizar y direccionar las actividades en grupos de trabajo, de tal manera que se posibilite el aprendizaje colaborativo y cooperativo.
- Hacer uso adecuado en la introducción de la nueva terminología y demostrar la formalización
- Proporcionar la terminología apropiada y presentar la formalización requerida por el conocimiento matemático establecido.
- Proporcionar los medios tecnológicos para que se conviertan en mediadores cognitivos del razonamiento matemático.

2.3 Marco conceptual

A continuación, se exponen las definiciones de algunos términos, conceptos y teorías propias del presente estudio, teniendo en cuenta el contexto en el cual se desarrolla el mismo, lo que conlleva a una comprensión sólida del proceso investigativo que aquí se realiza, de

los múltiples elementos que contribuyen a la puesta en marcha de dicho estudio y del análisis efectuado sobre los resultados obtenidos.

2.3.1 Pensamiento variacional

Para definir este pensamiento y explorar su caracterización que propiciará el desarrollo del mismo, se tiene en cuenta lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006, 1998) en sus Estándares y Lineamientos Curriculares en Matemáticas.

> El pensamiento variacional tienen que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006 p.66)

El ente ministerial posteriormente, expresa que:

> El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. (p.66)

Y en este orden de ideas con relación a la básica primaria resaltan:

> Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular

> un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.(p.67)

2.3.2 Razonamiento algebraico temprano

Propuestas como Early- algebra han conceptualizado lo que se comprende como el *álgebra temprana* o pensamiento algebraico temprano, es decir en niños desde preescolar hasta la básica primaria.
Consideraremos *el razonamiento algebraico como el insumo del cual se desarrolla el pensamiento variacional:*
Vale recordar que para básica primaria se consideró, la siguiente caracterización:

Kaput (1998) identifica cinco formas interrelacionadas de razonamiento algebraico en la básica primaria en donde el *Algebra* se entiende como:

- Generalizar y formalizar patrones y regularidades, en particular, el álgebra como aritmética generalizada.
- Manipulaciones sintácticas guiadas de símbolos
- El estudio de las estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y relaciones
- El estudio de las funciones, relaciones y la variación conjunta
- La Modelación (citado en Jacobs et al., 2007, p.2)

2.3.3 Patrones

Castro, Cañadas, & Molina (2010) definen el patrón (o pauta) como: “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p. 57).

La relación entre patrones y generalización ha sido reconocida por diversos autores. Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La idea básica de la noción de patrón es que surgen a partir de la repetición de una situación con regularidad .(Castro et al., 2010)

2.3.4 Generalización de patrones

Según Radford (1997), *generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Ontogenéticamente hablando, este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.(citado en Vergel, 2014, p.80)

Radford estudia la generalización de patrones a partir de tres problemas: *fenomenológico, epistemológico y semiótico.*

> El *problema fenomenológico* se refiere a la atención que presta el estudiante sobre los objetos, es decir, la caracterización de un objeto y la identificación de sus semejanzas y diferencias con otros objetos a partir de atributos como la forma, la cantidad, el color, la distancia entre los objetos (cuadrados, triángulos…). Este autor menciona que una dificultad de orden fenomenológico consiste en que los alumnos tienden a centrarse en la dimensión numérica y también se dejan llevar por la apariencia, sin verificar sobre la veracidad o falsedad de una presunta figura en determinada posición. En las tareas propuestas, en este trabajo, la estructura numérica responde a la pregunta ¿cuántas figuras? Mientras que la estructura espacial responde a ¿dónde ubicarlas?
>
> El *problema epistemológico* está relacionado con la comprensión del objeto y con la decisión o selección sobre aquello que se considera y aquello que se descarta. También se caracteriza por la identificación de una propiedad común entre los términos de la secuencia y generación de una estrategia para encontrar algún término, esto ocurre cuando se pregunta por términos remotos de una secuencia, por ejemplo, el término 25.
>
> El *problema semiótico* está vinculado con la denotación del objeto, denotación que puede tomar varias formas de representación. De acuerdo con Radford (2013) la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación. (citado en Cuartas, 2015, p. 36-37)

La generalización algebraica de secuencias se caracteriza por:

- El reconocimiento de una propiedad común, a partir de la observación de ciertos términos particulares;
- la generalización de la propiedad identificada a cada término de la secuencia; y
- la habilidad para usar esta propiedad común, con la finalidad de generar una expresión que permite determinar el valor de cada término de la secuencia (Radford, 2013)

La diferencia entre la generalización algebraica y la generalización aritmética está en la forma en que el estudiante usa el patrón que identifica. Cuando el patrón sirve para contar y, de este modo, encontrar la cantidad correspondiente a un término de la secuencia, hay *generalización aritmética*; pero cuando el patrón se usa como un principio que permite encontrar cualquier término de la secuencia, hay *generalización algebraica* (Radford, 2013).

En el diseño metodológico se presentan las tareas de generalización y las sesiones de entrevista como las formas de indagar acerca de la presencia de generalización aritmética o algebraica en las respuestas de los estudiantes participantes de la investigación y en el análisis se delimita la terminología requerida para la elaboración del marco teórico en función de la investigación en curso. De este modo, Radford (2013) presenta la generalización de patrones como un asunto que puede ser estudiado en la escuela a partir de los primeros grados de escolaridad.

Los estudios mencionados, en este documento, admiten asumir para esta investigación que un niño generaliza cuando tiene la posibilidad de enunciar el cumplimiento de una regla de formación que permite construir una configuración correspondiente a una secuencia dada. Esta definición sugiere que los niños que no enuncian también pueden generalizar, aunque el investigador no tenga evidencias para documentarlo, y por tal razón no se considere en el informe de investigación.

Finalmente se asume la generalización de patrones como: El reconocimiento, expresión y validación de reglas de formación. El *reconocimiento* es la habilidad intelectual que posee cada individuo para identificar una característica común, que se supone, puede volver a

presentarse en una situación –en este caso, la situación está constituida por la secuencia presentada en una tarea- y que por tanto le permite obtener una regla de formación para la secuencia; la *expresión* es la representación que permite registrar y comunicar el reconocimiento que han tenido previamente los estudiantes; la *validación* puede ser la aceptación mediante la asignación de un valor de verdad (verdadera o falsa) para una expresión o la justificación de la respuesta dada por el estudiante ante la tarea presentada.

2.3.5 Representaciones

Consultando algunas definiciones, en diversos trabajos resaltamos las siguientes:
Fernández (1997) define la representación como "el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático" (citado en Cortés, 2012, p.18)

Goldin y Kaput (1996) consideran que las *representaciones internas* son las configuraciones que no son directamente observables, pero que se pueden inferir a través de lo que se dice o se hace. Las *representaciones externas* son las configuraciones observables tales como las palabras, gráficos, dibujos, etc. que representan cuestiones que son accesibles a la observación. (citado en Cortés, 2012 p.19).

Castro y Castro (1997) "distinguen entre representaciones internas como imágenes mentales, y representaciones externas como las que tienen una traza o soporte físico tangible." (citado en Cortés, 2012 p.19).

Con respecto a lo citado anteriormente, las representaciones internas y externas, las expone

> Duval (1999), en donde define como representación externa la producida como tal por un sujeto o sistema, que se efectúa a través de un sistema semiótico y es accesible a todos quienes conocen dicho sistema. Por otro lado, describe la representación interna como aquella que pertenece a un sujeto y que no es comunicada a otro a través de la producción

> de una representación externa. Como plantea el mismo Duval, las representaciones externas no tienen como única función la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática, la cual depende directamente del tipo de representación utilizada. Este autor destaca la importancia de trabajar con varias representaciones ligadas a un mismo objeto, ya que esa diversificación, ayudará potencialmente a la comprensión del objeto estudiado. (citado en Cortés, 2012 p.19).

Además, para ilustrar un poco más estas definiciones:

> Cucoo (2001) define las *representaciones externas* como las que nos permiten comunicamos fácilmente con otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones. Este autor define *las representaciones internas* como las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir. (citado en Cortés, 2012 p.19).

En nuestro trabajo nos centraremos en el análisis de las representaciones internas y externas. Cabe resaltar que las representaciones externas juegan una doble función: actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan. Pero, según Rico (2009), una representación no cobra sentido por sí sola y de forma aislada, sino que debe contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones. De ahí la necesidad de definir qué son estos *sistemas de representación*[6], y qué tipo de sistemas se consideran en el campo en que estamos trabajando.

2.3.6 Variable (Uso de la letra)

Se entiende como variable los símbolos que representan elementos variables o que cambian, usualmente se usan letras.

[6] Ver marco teórico sistemas de representación.

En efecto corroborando con Godino & Font, (2003): Una variable es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos. (p.20)

De acuerdo a Godino & Font (2003) el camino para comprender los símbolos como representaciones de objetos y los símbolos como objetos, se da en dos etapas:
1) En la primera los símbolos substituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación que representan.
2) En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan. (p.17)

2.3.7 Cambio

El cambio puede entenderse como la modificación en la cantidad de una magnitud. “El cambio implica necesariamente comparaciones, para que un objeto cambie o no, es necesario un referente de comparación, si cambia es preciso tener en cuenta con respecto a qué cambia, si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué no cambia” (Gómez, 2008). “El estudio del cambio puede entenderse como una de las formas de pensar, como ocurre con el análisis de relaciones entre cantidades y la identificación de estructuras.”(Citado en Sibaja & Soto, 2016)

2.3.8 Variación

“La *variación* puede identificarse en los cambios de magnitud, específicamente la tasa de cambio en relación con el tiempo” (MEN, 2006); por ejemplo, la aceleración es un cambio

de velocidad con respecto al tiempo. “La *variación* permite explicar de qué forma cambia una magnitud con respecto a otra” (MEN, 1998). “La *variación* se trata de un valor que cambia con relación a otro, y se logra por ejemplo cuando los alumnos preparan tablas con los valores correspondientes a cantidades de dos magnitudes relacionadas” (Godino & Font, 2003).

2.3.9 Situación problema

Se entenderá como situación problema en este contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a una serie de actividades o tareas de naturaleza algebraica. Esto se pudo determinar de acuerdo a los siguientes referentes teóricos:

De acuerdo con Mason (1985), “para anticipar el pensamiento algebraico en la educación matemática temprana se deben promover actividades o tareas que permitan ver, decir, registrar y probar un patrón.”(citado en Moreno, 2015). Es decir, se debe “promover el pensamiento algebraico por medio de la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas” (Molina, 2011). Finalmente, “para crear un aprendizaje significativo de las matemáticas se deben proponer actividades que permitan que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, argumenten, discutan y practiquen habilidades del cálculo.”(NCTM, 2000)

2.3.10 Estrategia didáctica

El concepto de estrategia didáctica, se comparte con lo expuesto en el documento de Velasco y Mosquera (2010) en el cual se entiende que *las estrategias didácticas* son acciones planificadas por el docente con el objetivo de que el estudiante logre la construcción del aprendizaje y se alcancen los objetivos planteados. Una estrategia didáctica es, en un sentido estricto, un procedimiento organizado, formalizado y orientado a la obtención de una meta claramente establecida. Su aplicación en la práctica diaria requiere del perfeccionamiento de procedimientos y de técnicas cuya elección detallada y diseño son responsabilidad del docente. Ésta implica:

- “Una planificación del proceso de enseñanza aprendizaje,
- Una gama de decisiones que él o la docente debe tomar, de manera consciente y reflexiva, con relación a las técnicas y actividades que puede utilizar para alcanzar los objetivos de aprendizaje.” (p.2)

2.3.11 Herramientas tecnológicas

Se definen como la gran variedad de programas y aplicaciones de software que se encuentran disponibles para agilizar y hacer más efectivo para los usuarios la puesta en marcha de diversos contenidos que son aplicables en cualquier contexto, es decir actividades que van desde la vida cotidiana hasta los procesos más especializados ya sea el ámbito personal, escolar o profesional, en los cuales tienen mucha aplicabilidad pues estas herramientas tienen la ventaja que agilizan y perfeccionan las tareas en las cuales se emplean.

2.3.12 Geogebra

Es un software dinámico creado por Markus Hohenwarter desarrollado como un conjunto de objetos, operaciones y relaciones utilizados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas los cuales permiten integrar sistemas gráficos, geométricos, aritméticos y algebraicos a través de operaciones básicas y analíticas que se desarrollan a diario en esta área del conocimiento y en los diferentes grados de escolaridad.

2.3.13 Función

El concepto de función lo asumimos no tan abstracto, ya que la idea es trabajar una noción en estudiantes de primaria, y que con base en ello puedan realizar generalizaciones. Según Godino y Font (2003), las “*funciones* son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.” (p. 776)

2.3.14 Actividad de aprendizaje

Las actividades de aprendizaje se entenderán como acciones o recursos para conseguir el aprendizaje, en efecto éstas son ejercicios o supuestos prácticos que pretenden que el alumno no se limite a memorizar, sino que esté constantemente aplicando los conocimientos con la finalidad de que los convierta en algo operativo y dinámico. Mediante las actividades se puede guiar y organizar el aprendizaje, ejercitar, afianzar y consolidar lo aprendido, repasar los aspectos destacados que son objeto de estudio y, de esta manera, controlar el propio aprender; además es posible asimilar nuevas ideas integrando el conocimiento nuevo a lo ya aprendido (Delgadillo, s.f.)

3. Capítulo 3

Metodología

En el presente capítulo, se explica la metodología de la investigación utilizada en la realización de este trabajo. Se detallan aspectos relevantes como el tipo de investigación; se establecen los instrumentos que permiten el análisis de los procesos que se desarrollarán, se caracteriza la población y muestra, y se identifican las fuentes de información principales y secundarias; y además se describe la manera como se llevará a cabo el análisis e interpretación de resultados con base en algunos indicadores que determinan el desarrollo del pensamiento variacional a través de los procesos asociados a dicho pensamiento en estudiantes de básica primaria.

3.1 Tipo de trabajo

Dado que el trabajo busca "*Contribuir en el fortalecimiento de los procesos relacionados con la generalización, uso de representaciones y uso de la letra, asociados al pensamiento variacional en estudiantes del grado 5° del Colegio Nuestra Señora de Bethlem - Hermanas Bethlemitas Popayán, a partir del diseño y aplicación de actividades de aprendizaje basadas en la solución de problemas",* se inscribe en el paradigma cualitativo y es de carácter descriptivo.

Lo cualitativo, por cuanto la variable o variables de estudio corresponden a procesos de pensamiento asociados a la variación, es decir, cualidades que pueden ser observables o que se pueden explorar con base en las propias palabras de los estudiantes (habladas o escritas)

y las maneras de pensar o razonar desde las formas de comunicación simétrica y/o asimétrica.

El trabajo se considera de carácter descriptivo, puesto que la manera de presentar y validar los resultados es, a partir, de descripciones cualitativas sobre avances o dificultades que presentan los estudiantes, a lo largo del proceso de intervención en torno a tres procesos bien definidos

- Uso de la letra
- Uso de las representaciones, y
- La generalización

Consideramos que el avance en estos tres procesos determina una contribución de suma importancia en el desarrollo del pensamiento variacional y el uso de los sistemas algebraicos en los estudiantes involucrados.

3.2 Instrumentos Metodológicos

Para efectos del análisis y descripción de los resultados obtenidos en la investigación, se desarrollan actividades prácticas de aula que presentan tareas a modo de situaciones problema en diversos contextos; y en algunas de ellas se utiliza el Software Geogebra como un facilitador cognitivo en el análisis de la variación y cambio.
Durante el transcurso de la investigación, se desarrollan las siguientes actividades de aprendizaje:

3.2.1 Actividades de iniciación

En las actividades de iniciación se desea una familiarización a la idea de patrón como elementos que se repiten en una determinada secuencia, que puede estar en diversos contextos: figuras geométricas, sucesiones numéricas, elementos cotidianos o de la realidad. Además de identificar los patrones, se desea que los estudiantes puedan describir las regularidades observadas, en las cuales los elementos de las secuencias tienen una manera

de comportarse que no es al azar, sino que es regida por una regla que ellos deben descubrir o encontrar. Para tal fin se da la instrucción de plasmar sus ideas mediante comentarios verbales o escritos.

3.2.2 Actividades de afianzamiento

Son actividades que se basan en un proceso de construcción colectiva del conocimiento en las cuales se resuelven situaciones problema entre docente y estudiante.

En estas actividades se tiene como finalidad encontrar, describir y registrar patrones en situaciones de contexto geométrico y numérico. El propósito es que el estudiante desarrolle habilidades de pensamiento que coadyuven al análisis y solución de los problemas propuestos, esto se reflejará en su capacidad de identificar regularidades en contextos geométricos, numéricos, tabulares y del lenguaje natural y hacer uso de representaciones para expresarlas. Además, se desea que el alumno realice tareas concernientes al concepto de función, en las cuales deberá relacionar dos cantidades para llegar a los resultados.

Además, se introducen visualizaciones interactivas con el software Geogebra, donde se percibe el cambio y variación de algunas figuras geométricas, esto como complemento del trabajo a realizar.

3.2.3 Actividades de profundización

Las actividades de profundización presentan situaciones problemas un poco más complejas, las cuales demandan de una integración de casi todas las características que dan cuenta del razonamiento algebraico, a través de tareas relacionadas con el concepto de función.

Estas actividades pretenden que el estudiante comunique sus observaciones de patrones en secuencias o tablas, usando el sistema de verbal y algún sistema de representación simbólico, donde se pueda evidenciar, que detecta las regularidades y es capaz de razonar sobre la variación entre los términos de una secuencia; y además realiza conjeturas y generalizaciones para cualquier término en dichas secuencias.

3.3 Población y muestra

Para nuestra investigación se considera una población conformada por estudiantes de grado quinto del Colegio Nuestra Señora de Bethlem – Hermanas Bethlemitas de la ciudad de Popayán, Cauca. El colegio es una institución de carácter privado y está conformado por estudiantes de género femenino hasta la fecha actual.

Para la elección de la muestra se usó un proceso de selección no probabilístico por conveniencia, que se caracteriza por tomar todos los elementos a los que se tiene acceso en un momento determinado. Esto se puede corroborar por lo expuesto en Sampieri (2006): "Para el enfoque cualitativo, al no interesar tanto la posibilidad de generalizar los resultados, las muestras no probabilísticas o dirigidas son de gran valor, pues logran, si se procede cuidadosamente y con una profunda inmersión inicial en el campo, obtener los casos que interesan al investigador y que llegan a ofrecer una gran riqueza para la recolección de datos." (p. 565)

El número de niñas que conforman la muestra es 27, comprendidas en edades de 9 a 11 años; y la estratificación socioeconómica donde se ubican corresponde a los niveles 3 y 4.

Las estudiantes se codificarán de la forma: E1, E2, E3, … así sucesivamente, para evitar usar nombres propios. Esto quedó acordado en el consentimiento informado que se entregó a las directivas de la institución.

3.4 Fuentes de información

La información que nos permitirá describir los resultados obtenidos en el presente trabajo, proviene de las siguientes fuentes:

- La producción escrita de las estudiantes en el desarrollo de las actividades, como fuente principal.
- Grabaciones en video donde se rescatarán y transcribirán algunas justificaciones dadas por las estudiantes sobre las situaciones planteadas.

- La interacción y comunicación entre estudiantes y docente.

3.5 Análisis e interpretación de los resultados

Este apartado tiene como objetivo mostrar la forma en que se analizarán los resultados, teniendo en cuenta los procesos descritos en 3.1.

Proceso 1: Uso de la letra

Se analizará el uso de la letra de acuerdo a las siguientes categorías, expuestas en el marco teórico[7]. Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- **Letra evaluada:** La letra es asignada a un valor numérico desde el principio. Es decir, se les *asignan valores numéricos arbitrarios* a las letras.

- **Letra no considerada:** La *letra es ignorada* o su existencia es reconocida sin darle un significado.

- **Letra considerada como un objeto concreto:** La letra es reconocida como *abreviaturas de nombres de objetos* o como objetos en sí mismo.

- **Letra considerada como una incógnita específica:** Los estudiantes perciben que las letras tienen un *valor especifico, pero desconocido*.
- **Letra como un número generalizado:** Los estudiantes perciben que las *letras representan valores, o por lo menos son capaces de tomar varios valores en lugar de sólo uno*.
- **Letra considerada como variación de cantidad (variable):** La letra es vista como *representando un rango de valores no especificados*.

Proceso 2: Uso de las representaciones

Se tiene en cuenta las formas de expresión de las representaciones:

[7] Para ejemplificar un poco más estas categorías, consultar marco teórico: Apartado 2.2.6.1: Uso de la letra como variable.

- *Verbal:* La expresión verbal es aquella que se escribe completamente con palabras del idioma usual, sin el uso de símbolos especiales (como +, x), excepto los dígitos, que también pertenecen a nuestro mundo simbólico. Se tendrán en cuenta estas representaciones en las justificaciones que presenten los estudiantes por escrito y en las entrevistas captadas en video, sobre las tareas de generalización.
- *Pictórica:* es una forma visual de representación, que ayuda a interpretar y relacionar la información entre los datos e incógnitas de la tarea propuesta. Por lo general se utilizan dibujos sin ninguna notación de carácter simbólico.
- *Simbólica:* son aquellas de que se pueden representar con números y letras, de distinguen de dos tipos:
    - *Numérica:* la cual se basa en el uso de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo.
    - *Algebraica:* Se caracteriza por el uso de simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas, aquí se admiten palabras a medias que indiquen cantidades relacionadas con símbolos de las operaciones aritméticas. Estas son las representaciones que suponen mayor grado de dificultad.
- *Múltiples:* son aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos anteriormente.

Proceso 3: La generalización

Se tiene en cuenta la caracterización del proceso de generalización:

- *Ver un patrón:* el estudiante hace una identificación mental de un patrón o una relación, es decir logra identificar algo común en las secuencias o términos de las secuencias propuestas.
- *Describir el patrón*: el estudiante describe la regularidad percibida que inicialmente hace en lenguaje natural y de manera oral.
- *Registrar un patrón*: el estudiante debe usar algunas de las representaciones para registrar los patrones.

4. Capítulo 4

Resultados y discusión

Teniendo en cuenta lo observado en cada una de las actividades de aprendizaje desarrolladas en el aula, se procede a realizar una descripción en cuanto a los avances o dificultades presentadas en cada taller de iniciación, afianzamiento y profundización; y con los hallazgos, se muestran las evidencias que permiten el análisis de dicha información.

4.1 Resultados en la actividad de iniciación

Al inicio de la actividad hubo mucha motivación y disposición de trabajo por parte de los estudiantes, ya que el docente presentó diversos patrones en imágenes proyectadas. Se mostraron patrones con sonidos, figuras, números, … además se estableció una clasificación de los patrones en dos tipos y se mostraron algunos ejemplos: *patrones que se repiten*, son los que muestran una repetición estática, algo que ocurre una y otra vez; mientras que los *patrones que cambian* tienen un componente adicional a la repetición, y es que las repeticiones presentan alguna variación. Como se puede apreciar en la figura 2

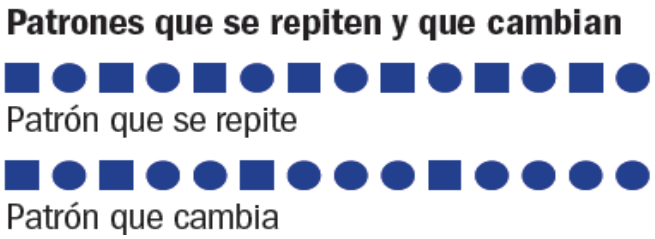


Figura 2. Tipos de patrones
Fuente: Copyright 2014, texto Matemática 3° básico. Editorial Pearson versión Chile.

Posteriormente se explicaron las instrucciones para resolver la actividad de iniciación (ver Anexo A). Las instrucciones son relevantes, ya que los estudiantes de la muestra por lo general preguntan ¿qué tarea se debe realizar?, sin ellos haber leído antes los enunciados de la actividad.

En esta actividad se empezó a realizar el análisis del desempeño de los estudiantes en los 3 procesos asociados al desarrollo del pensamiento variacional: La generalización, uso de representaciones y uso de la letra.

4.1.1 Análisis del proceso de generalización

En cuanto a la generalización, el estudiante debe *ver, describir y registrar* el patrón que analiza. Las primeras tareas que se le pide al estudiante es observar detalladamente secuencias de figuras y posteriormente describirlas.

Una primera intención era lograr que los estudiantes identificaran una característica común (o regularidad) en los elementos de las secuencias de figuras, esto se logra a través de la visualización, ya que el individuo es capaz de hacerse una imagen mental de los elementos y poder así referirse a estos con base a lo que percibe. Posteriormente después de identificada la regularidad deben conjeturar y describir lo observado, aquí pudimos darnos cuenta que

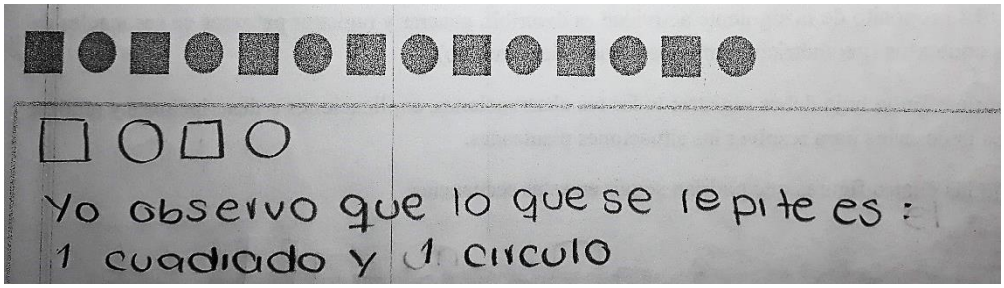


Figura 3. Identificación visual de patrones
Fuente: Estudiante E8, actividad de iniciación.

las estudiantes recurren al lenguaje natural y generalmente de manera oral, para realizar dichas descripciones y para validar sus hipótesis recurren al docente e indagan si sus deducciones son correctas. Finalmente, el estudiante recurre a un tipo de representación para comunicar lo que había descrito. Ver figuras 3 y 4.

La figura 4 muestra el proceso de generalización de la estudiante E13, al reconocer la característica común, describirla y registrarla mediante símbolos y la palabra “etc…”, con ello pretende decir que la secuencia siempre continuará de esa manera: “cuadrado y circulo”

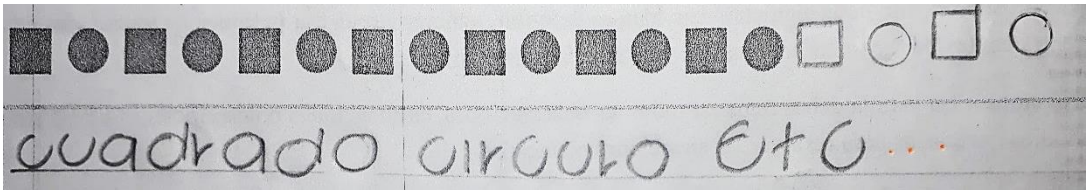


Figura 4. Registro de regularidad.
Fuente: Estudiante E13, actividad de iniciación.

Veamos el proceso de generalización del estudiante E2, esto se evidencia en diálogo con el docente. Inicialmente visualiza la secuencia y logra identificar la característica común,

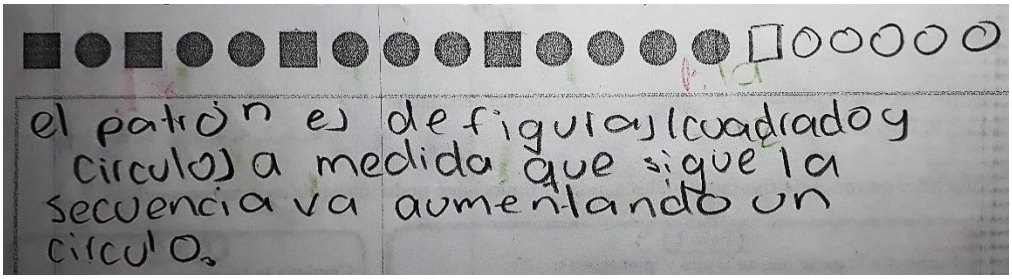


Figura 5. Identificación visual de patrones E2
Estudiante E2, actividad de iniciación.

posteriormente conjetura describiendo lo observado y lo registra de manera verbal y pictórica, tal como se aprecia en Figura 5. E2 reconoce que hay una cantidad invariante, la cual corresponde a un cuadrado, y que a medida que la secuencia se prolonga después de cada cuadrado hay una cantidad que cambia o va aumentando, específicamente expresa que aumenta “un círculo”.

Otra de las tareas que debían realizar, era la de crear una manilla usando mostacillas[8] de colores, con la condición de que debía seguir un patrón. E7, construye un patrón de colores

[8] Mostacillas: Bolitas de colores, que se utilizan en bisutería.

y describe la regularidad que presenta, además reconoce un patrón numérico en la cantidad de mostacillas usadas de cada color y lo registra verbalmente. E7 generaliza su construcción al comunicar que así sucesivamente continúa el patrón creado. Con base a la transcripción del audio (video 1) podemos apreciar lo antes dicho:

- E7[9]: /Señalando la manilla/ "mi patrón es azul, morado y rosado; y se repite /señala cada color/, "3 azules, 4 moradas y 2 rosadas, …" /señala el final de la manilla/ "aquí, sí siguiéramos sería azul, morado y rosado; y así sucesivamente."
- Docente: "Muy bien!, te quedo bonita "… "se puede apreciar que siempre usa lo mismo"

4.1.2 Análisis del proceso uso de representaciones

Un proceso importante después de visualizar e identificar las características o regularidades en una secuencia, es comunicarlas y registrarlas; para ello se necesita hacer uso de algún sistema de representación. Los estudiantes utilizan diferentes sistemas: verbal, pictórico, simbólico y múltiples.

El estudiante E11 utiliza un sistema de representación múltiple para comunicar lo que ha percibido y descrito, se vale de representaciones pictóricas y verbales para poder registrar el patrón que representa la sucesión de figuras.

[9] El texto entre barras (/ /) indican acciones corporales que realizan los sujetos, para dar sus explicaciones. El texto entre comillas es transcripción textual de las respuestas que ofrecen los participantes en la entrevista.

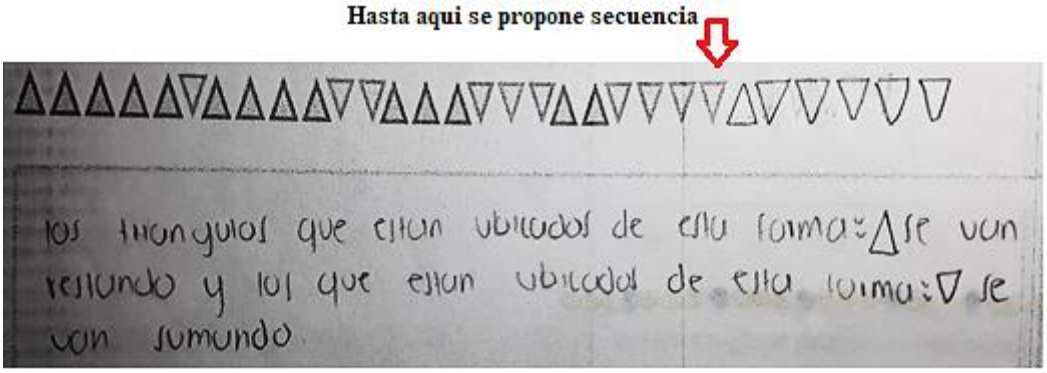


Figura 6. Representación múltiple: Pictórica y verbal
Fuente: Estudiante E11, actividad de iniciación.

De la anterior tarea de analizar la secuencia de los triángulos, el estudiante E2 utiliza también un sistema de representación múltiple (verbal y pictórico) para comunicar sus conjeturas, E2 indaga sobre la continuación de la secuencia, ya que observa que los triángulos que "apuntan hacia arriba" disminuyen, y tienden a desaparecer (video 2); a continuación, se realiza la transcripción textual:

- E2[10]: /señala los últimos triángulos de la figura, donde indica la flecha/ "y entonces este aumenta acá," /señala los triángulos que apuntan hacia abajo, a la derecha de la flecha/ "estos de acá no importan" /señala los triángulos de la izquierda de la flecha/ "pero si este queda en uno, /señala el último triángulo hacia arriba/ "después queda en cero o se vuelve a iniciar desde acá." /señala los primeros 5 triángulos de la secuencia/

- Docente: / señala ultimo triángulo hacia arriba/ "como este llega a uno, ahí pararía".

Podemos analizar que E2, piensa que la secuencia podría continuar, lleva su pensamiento hacia el concepto de patrón y percibir la regularidad, pero al percatarse que los triángulos hacia arriba terminan, entonces piensa que toda la secuencia dada, es un solo patrón, y que iniciaría de nuevo.

[10] El texto entre barras (/ /) indican acciones corporales que realizan los sujetos, para dar sus explicaciones. El texto entre comillas es transcripción textual de las respuestas que ofrecen los participantes en la entrevista.

Finalmente, en la actividad de iniciación se proponen situaciones problema, en las cuales los estudiantes deberán utilizar el reconocimiento de patrones, e intentar mediante representaciones apoyarse para comunicar su comprensión y dar solución a la situación planteada.

Podemos resaltar las diversas estrategias que usan las estudiantes, para dar respuesta a los problemas: Usando arreglos bidimensionales de patrones (pictórico), identifican lo que es común y usando representaciones simbólico numéricas, logran dar respuesta a las preguntas, esto se puede apreciar en la figura 7. El problema es el siguiente:

Karen quiere pintar unas piedras redondas para hacer un collar. El patrón que se le ocurrió es: Verde, naranja, verde, amarillo, verde, rojo. El collar debe tener 36 piedras redondas. ¿Cuántas piedras verdes deberá pintar Karen?

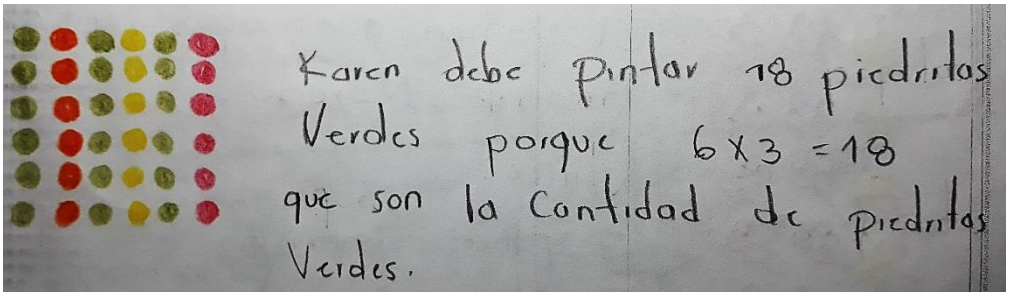


Figura 7. Representación múltiple: Pictórica y simbólico numéricas
Fuente: Estudiante E9, actividad de iniciación.

E9 realiza un proceso de generalización, en el momento que utiliza una ayuda visual ordenando las piedras de colores para observar algo que es común en la secuencia, cada columna del arreglo tiene 6 piedras, de las cuales hay 3 columnas con piedras verdes, lo describe de manera verbal y lo registra valiéndose de representaciones simbólicas numéricas, 6 x 3 = 18, E9 se percata que de acuerdo a la cantidad de columnas que tenga, puede multiplicar siempre por 6.

Como conclusión de las actividades de iniciación, se destacan el reconocimiento de patrones y regularidades en las secuencias, además del uso de diferentes sistemas de representación para describir esa regularidad. Con respecto a la generalización, se pueden observar las 3 etapas: ver, describir y registrar, esto desde un nivel muy básico.

También se presentaron dificultades en el reconocimiento de patrones, pues algunos estudiantes no lograron reconocer las regularidades en un patrón que cambia. Esto se puede observar en la figura 8.

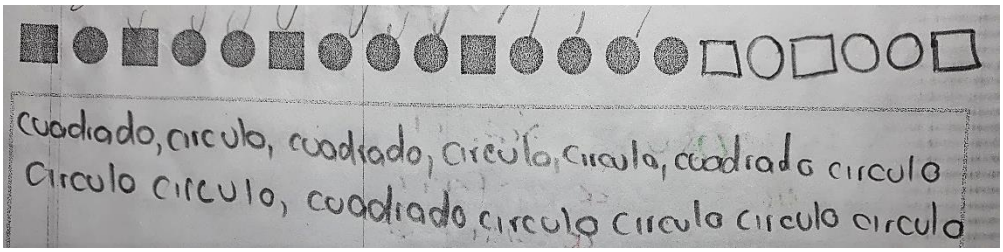


Figura 8. Dificultad de variación y cambio
Fuente: Estudiante E14, actividad de iniciación.

E14, percibe que una vez terminada la secuencia, el patrón se repite nuevamente. La intención, era que se diera cuenta que hay una cantidad invariante y otra que está cambiando.

4.1.3 Análisis del proceso uso de la letra

Las actividades de iniciación no estaban diseñadas para apreciar el uso del sistema de representación simbólico algebraico, ya que estas actividades tenían como intención familiarizar al estudiante con el concepto de patrón y describir regularidades en secuencias de figuras o numéricas, las cuales no implicaban tareas de aplicar la característica común encontrada a un término específico de la secuencia o a cualquier término de la secuencia, donde se permitiera el uso de cantidades indeterminadas susceptibles al uso de símbolos para su representación.

4.2 Resultados de la actividad de afianzamiento

De acuerdo a lo planteado en la metodología de trabajo, la actividad de afianzamiento se desarrolló de tal manera que los estudiantes estuvieran acompañados y asesorados en algún momento por el docente. La idea era dejarlos actuar con cierta autonomía en grupos para que discutan sus ideas.

Esta actividad consistió inicialmente en observar secuencias de figuras, donde cada término está conformado por torres de cubos; para cada secuencia se acompaña con una tabla donde se relacionan la cantidad de pisos de cada torre con la cantidad de cubos que la conforman, con ello se busca que el estudiante construya más términos de la sucesión y además descubra alguna regularidad en los dibujos y en la tabla, ésta como ayuda para encontrar un patrón y aplicarlo a otros términos de la secuencia. Seguidamente se plantean situaciones problema donde a partir de secuencias numéricas el aprendiz debe encontrar un patrón que se pueda replicar consecutivamente y como parte final se tienen situaciones problema donde se deben llegar a las respuestas con base a la relación entre dos cantidades, dicha relación se presenta en tablas y verbalmente.

Como experiencia introductoria, para dar comienzo a la actividad el docente se apoyó del medio Geogebra para mostrar la variación en torres formadas por cubos. Esta herramienta informática permite crear deslizadores para poder mover y animar las figuras conformadas por magnitudes de largo, ancho y alto, tal como lo muestra la figura 9.

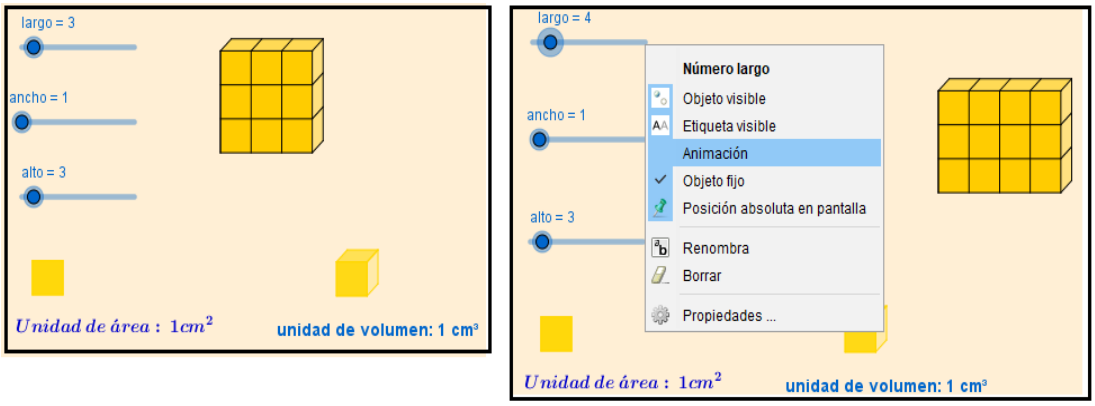


Figura 9. Software Geogebra, deslizadores para crear movimiento
Fuente: Copyright 2015, Adolfo Galindo Borja.[11]

En este taller los estudiantes debían encontrar regularidades en las secuencias, lo común entre los términos de las secuencias, y prever que esto puede volver a repetirse. Lo anterior está relacionado a los procesos de la generalización, uso de las representaciones y se resaltarán algunos casos el "uso de la letra" en las representaciones.

4.2.1 Análisis del proceso de generalización

En cuanto a la generalización, el estudiante debe ver, describir y registrar el patrón que analiza. Una primera intención, es que con base en la ayuda de Geogebra, ellos puedan encontrar las regularidades entre los términos de las secuencias, y así lograr que puedan identificar algo común, lo describan y representen usando los sistemas de representación, y en ese orden de ideas puedan aplicar esa regularidad en otros términos de la secuencia.

[11] Recuperado de página oficial Geogebra: https://www.geogebra.org/m/vZKMysPV

E8, realiza un proceso de generalización, ya que inicialmente visualiza la secuencia de figuras, se crea una imagen mental con las características y describe oralmente lo que percibe, posteriormente la descripción la sustenta escribiendo que "se están restando 3 cubos" y conjetura, que para el caso de que la torre crezca, habría que sumar 3 cubos; además para facilitar sus cálculos y dar respuesta a la pregunta, utiliza los arreglos bidimensionales

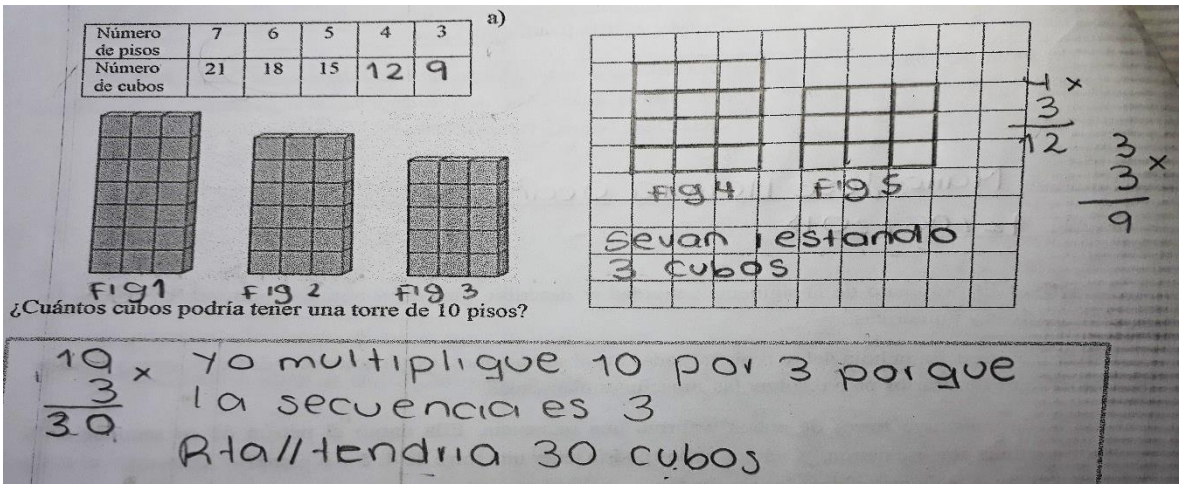


Figura 10. Proceso de generalización
Fuente: Estudiante E8, actividad de afianzamiento.

de las figuras nuevas que ha creado y usando la multiplicación, expresa una forma de aplicar la regularidad a otros términos específicos de la secuencia, es decir registra la regularidad o patrón. El hecho de completar la tabla le favoreció darse cuenta de la regularidad en la secuencia, pues a la cantidad de pisos se le relaciona con la cantidad de cubos en cada torre. Ver figura 10.

Analicemos el proceso de generalización de las dos estudiantes siguientes, para resolver la anterior situación problema *¿cuántos cubos podría tener una torre de 10 pisos?* Después del proceso de observación, las estudiantes comunican lo percibido mentalmente y enuncian sus conjeturas al respecto, posteriormente para registrar lo que ha comprendido con claridad, se basan en arreglos de dos dimensiones, o en representaciones de tipo simbólico, tal como lo muestran E2 y E4, en las figuras 11 y 12 respectivamente.

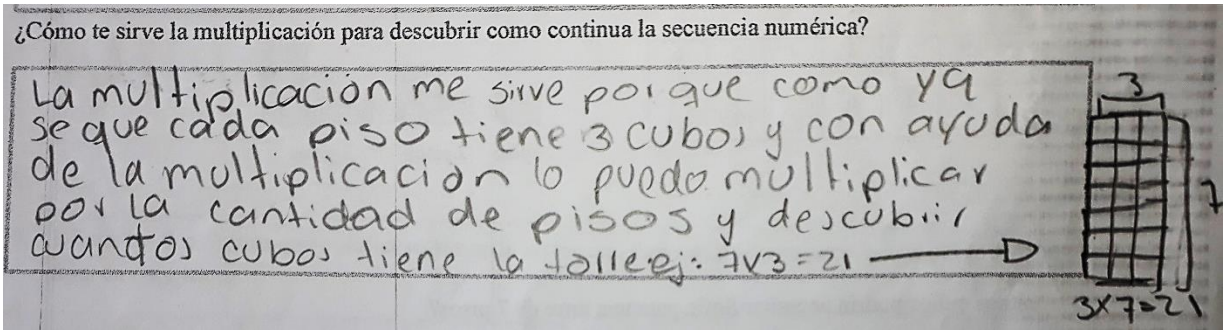


Figura 11. Descripción de la regularidad
Fuente: Estudiante E2, actividad de afianzamiento

E2, al identificar la característica común entre los miembros de la secuencia, la aplica a otros términos de la misma y muestra su capacidad de calcular la cantidad de cubos de cualquier término de la secuencia utilizando un ejemplo, esto indica que ha alcanzado el proceso de generalización. En efecto veamos su respuesta a la pregunta en figura 12.

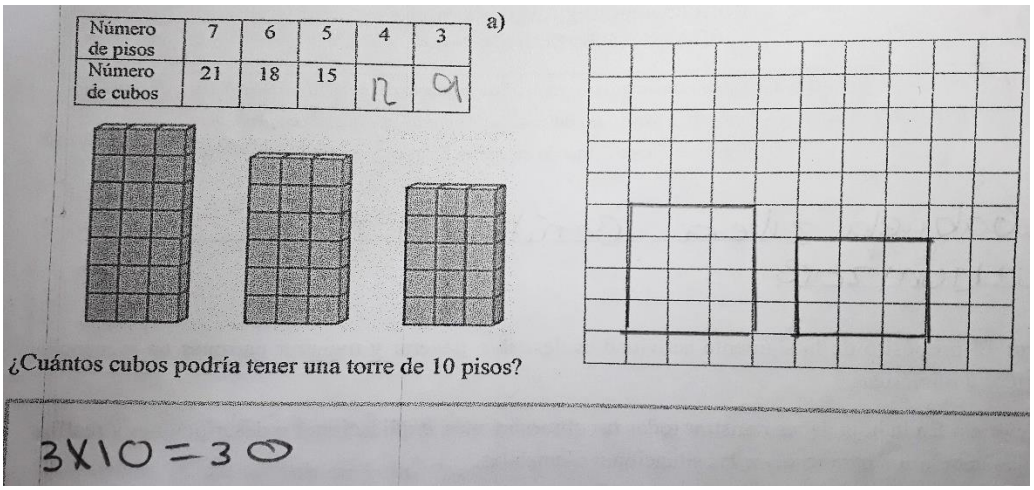


Figura 12. Generalización E2
Fuente: Estudiante E2, actividad de afianzamiento

Después de la descripción anterior (figura 11) de E2, aplica la regularidad hallada en la secuencia para una torre de 10 pisos, sabe que cada piso tiene 3 cubos y al multiplicar por la cantidad de pisos encuentra la cantidad de cubos para el término de la secuencia pedido.

Por su parte E4, visualizando inicialmente la secuencia de figuras se hace una idea mental de la regularidad, las describe oralmente e infiere que si las torres crecen entonces aumenta cada vez 3 cubos la siguiente torre, esto lo registra basándose en representaciones simbólico

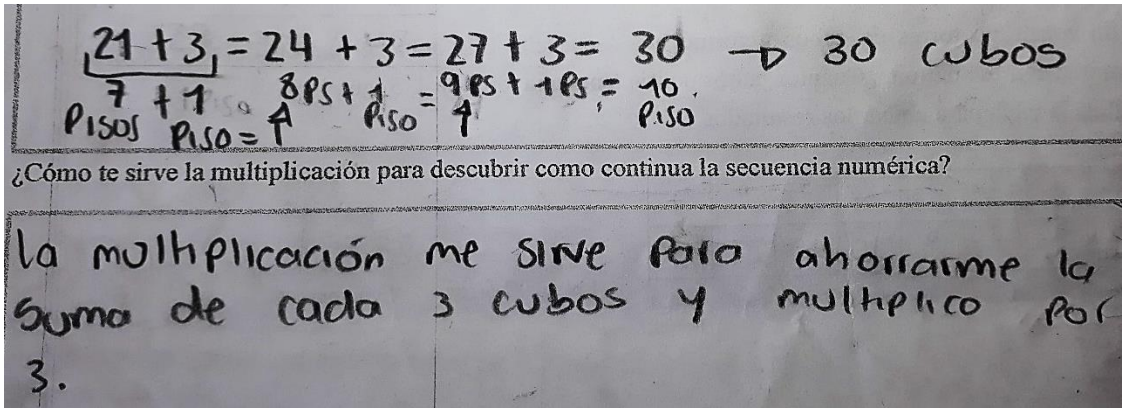


Figura 13. Descripción de la regularidad en proceso de generalización
Fuente: Estudiante E4, actividad de afianzamiento

numéricas y usando algunas palabras abreviadas. De la figura 13 podemos validar que E4 reconoce que hay un aumento constante entre los términos de la secuencia de las figuras. Esto se aprecia en la operación realizada, en la cual siempre suma 3 cubos. En este orden de ideas se concluye que E4 logra extender esa característica común observada a otros términos de la secuencia, lo cual indica generalización.

A continuación, rescataremos el proceso de generalización que realiza E13 (video 3) ante la siguiente situación problema mostrada en la figura 14, ya que por lo general los estudiantes tienden a borrar sus ayudas visuales en el papel, con lo cual hacen perder las evidencias de los procesos. Esto lo hacen con la finalidad de tener bien presentados sus trabajos, es decir sin tantos rayones.

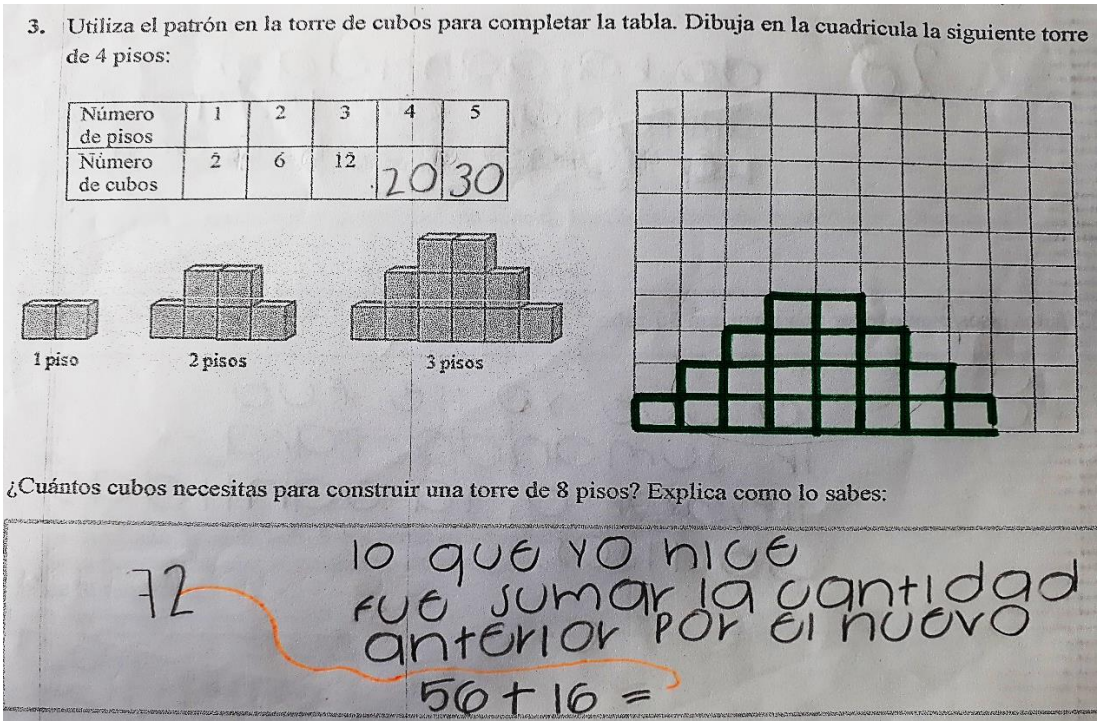


Figura 14. Generalización con apoyo tabular y gráfico
Fuente: Estudiante E13, actividad de afianzamiento

- Docente: “E13 nos va a explicar cómo se dio cuenta de la secuencia de este ejercicio”
- E13: /señala con el portaminas la tabla y cada una de las casillas con los números de pisos/ “heee, bueno primero tenemos los números de piso que son 1, 2, 3, 4 y 5” /corre el portaminas en cada casilla señalando los números de piso/ “y el número de cubos que seria 2, 6, 12, 20 y 30” “¡cómo yo hice para saber que iba el 20 y el 30!” /señala con el portaminas lo números 20 y 30/ “lo siguiente fue así” /señala el número 2 de la tabla al inicio del número de cubos/ “yo tenía que sumar 2 más 4 para que me diera 6” /escribe el número 4 encima del número 2 señalado al inicio/
- Docente: “aquí en la figura lo puedes ver, ¿cierto?, mira” /señala con los dedos la figura con 2 pisos/

- E13: “haaa, sí”

- Docente: “vaya señalando la figura también”
- E13: “haaa, bueno”, “entonces para que me diera 6” /señala con el portaminas la figura de dos pisos/ “como podemos ver aquí hay 6 /cuenta la cantidad de cubos en la figura de 2 pisos/ “1, 2, 3, 4, 5 y 6” /conteo señalando cada uno de los cubos de la figura de 2 pisos/ “luego de 6 tenía que…sumarle al 6 otros 6 /escribe + 6 encima del número 6 en la casilla de numero de cubos/ “para poder que me diera 12” /encierra en un circulo la figura de 3 pisos/ “ósea que se puede encontrar en este” /señala nuevamente la figura de 3 pisos/ “después de ahí, tenía que ir sumando de 2 en 2 /señala la casilla en la tabla con el número 12 donde se encuentran el número de cubos/
- Docente: “ya no son 6, ¿sino?”
- E13: “…serían 8” /escribe el número 8 encima del número 12, en la casilla de número de cubos/ “porque mire, 6, 7 y 8” /realiza conteo desde la casilla con el número 6 hasta la casilla con el número 12, en el sector de número de cubos/ “y después del 8 , yo sumaba y me daba 20” /señala con el portaminas en número 8 escrito anteriormente y luego el número 20 al lado derecho en la casilla de número de cubos/ “después del 20, para que me pudiera dar el 30” /señala el número 30 en la casilla de número de cubos/ “tenía que sumarle …10” /escribe el número 10 encima del número 20 de la casilla anterior al 30/ “porque, 8, 9 y 10” /señala el número 8 escrito anteriormente encima del 12 y realiza el conteo con los dedos/ “que sería éste” /señala el número 10 escrito anteriormente encima del número 20/ “entonces sumaria

20 más 10” /señala el número 20 y el 10 que se encuentra encima de éste/ “que me daría 30” /señala el número 30/ “ y éste está representado en esta gráfica de acá” /encierra en un circulo la figura construida en la cuadricula/

- Docente: “¡Muy bien!”
- E13: /Lee la pregunta de la situación problema/ *“*ahora me dice*, ¿Cuántos cubos necesitas para construir una torre de 8 pisos? Explica como lo sabes”* “heee, como lo sé , es como yo les acabo de explicar, aquí sería” /señala con el portaminas el número 30 en la casilla de número de cubos/ “ a 30 le sumo 12” /escribe el número 12 encima del número 30/ “30 más 12 me da 42” /realiza la suma mental señalando el número 30 y 12; luego señala el número 42 ya escrito fuera de la tabla/ “ahora de 12, pasaría a 12, 13, 14” /conteo mental, escribe el 14 encima del número 42/ “…que 42 más 14 me daría 56” /señala los números 42 y 14; realiza la suma mental; y señala el resultado que es 56/
- Docente: ¡Muy bien!
- E13: “ahora seria, 14” /realiza conteo mental, señalando el número 56/ “heee, 15, 16” /escribe el numero 16 encima del 56/ “que 56 más 16 me daría, mmm” /señala el número 56 y el 16 encima de éste/
- Docente: “Haga la sumita por ahí” /señala espacio en blanco en la hoja del taller/
- E13: “haber” /realiza la suma/ “…daría 72” /escribe el 72 debajo del número 8, que había escrito previamente encima, en las casillas de número de pisos/ “y listo eso es todo”
- Docente: “Correcto muy bien, muchas gracias”

De la anterior justificación de la estudiante E13, podemos darnos cuenta, que ella se apoya en la tabla y en las figuras de la secuencia, inicialmente visualiza como cambian los valores en la tabla respecto al número de cubos en cada torre, percibe que el número de cubos de una figura siguiente se obtiene al sumarle al número de cubos de la figura anterior un número par que inicia desde el 4, esto lo corrobora mostrando la figura, al reconocer esta característica común, la describe verbalmente apoyándose en la tabla, los números y las figuras, posteriormente utiliza el sistema de representación pictórico, verbal y simbólico numérico para validar su conjetura. De esta manera, es capaz de usar esa propiedad común para calcular el valor de cualquier término de la secuencia, lo cual indica que ha realizado un proceso de generalización.

El hecho de pasar de visualizar una regularidad a describirla, muestra dificultad, ya que deben organizar sus ideas y comunicarlas a sus compañeros de grupo y docente. En algunos casos se observó falta de argumentos y elementos propios de los conocimientos matemáticos para poder describir lo que observaban.

De las secuencias numéricas en la actividad la estudiante E15, muestra dificultad para comunicar lo observado, lo cual le lleva a cometer errores. La pregunta formulada en la actividad dice:

Los números de las casas de una calle forman una secuencia numérica. Si el patrón de esta secuencia continúa, ¿Cuáles son los números de las tres casas que continúan?

Lo dicho anteriormente se aprecia en la figura 15.

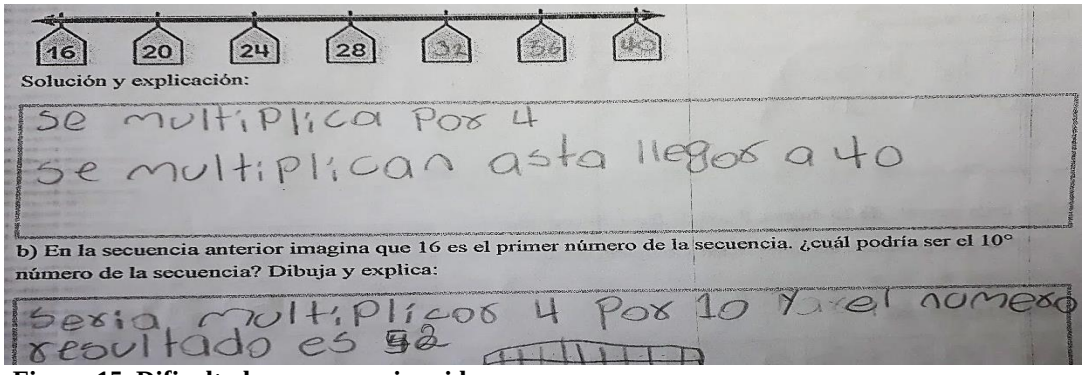


Figura 15. Dificultad para comunicar ideas
Fuente: Estudiante E15, actividad de afianzamiento

4.2.2 Análisis proceso uso de representaciones

En cuanto al uso de representaciones utilizados para registrar y comunicar las regularidades encontradas en las secuencias, se destacan: El uso de representaciones verbales, pictóricas y múltiples.

Las *representaciones múltiples* están conformadas por dos o más sistemas de representación, para el caso de la figura 10 podemos observar una representación múltiple, en la cual la estudiante E8 se apoya en arreglos de figuras bidimensionales (pictórico), lenguaje verbal "yo multipliqué 10 por 3 porque la secuencia es 3" y simbólico numérico, ya que se aprecia el uso de números y operaciones expresadas mediante lenguaje matemático y con ellas realiza un cómputo.

De igual manera se puede observar el uso de la representación múltiple conformada por las representaciones pictórica, verbal y simbólica en la figura 11 y 12, donde la estudiante E2, realiza sus descripciones para poder dar respuesta a las preguntas. La figura 12 muestra la representación simbólico numérica que E2 utiliza para realizar un cómputo.

A continuación, mostraremos como E8 y E9, para poder comunicar y hacer sus descripciones respecto a la identificación de las regularidades halladas en una secuencia numérica, utilizan un sistema de representación diferente para responder el mismo interrogante.

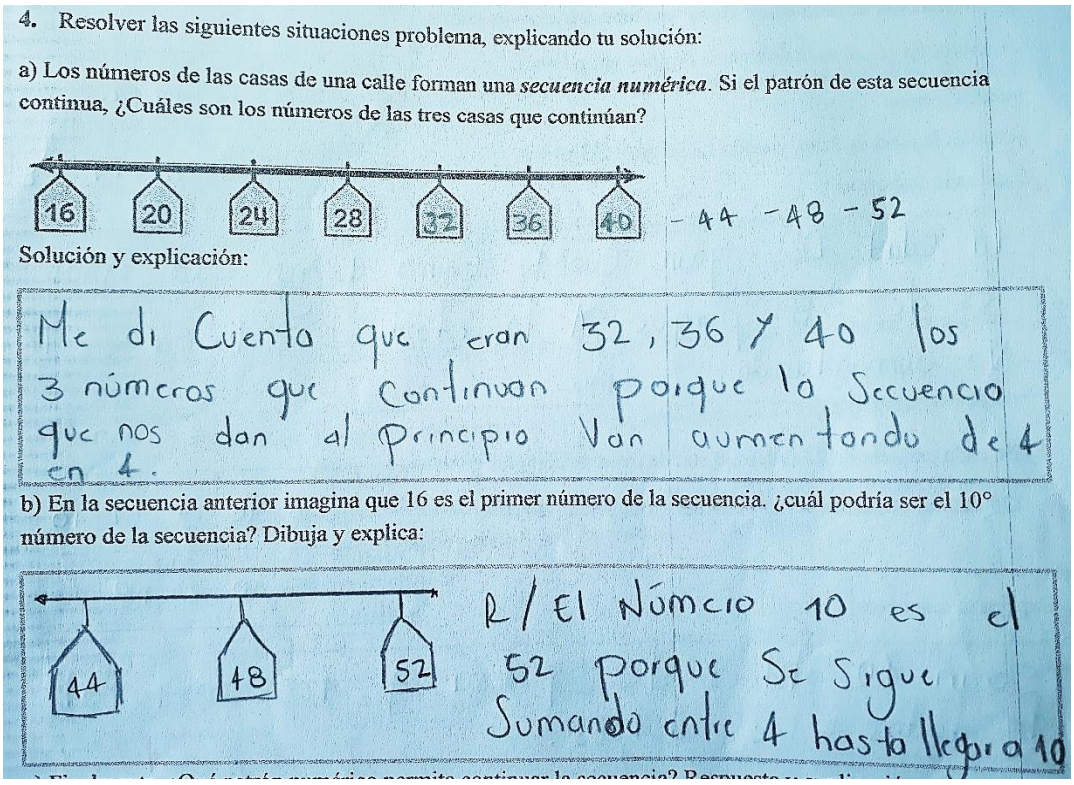


Figura 16. Representación verbal
Fuente: Estudiante E9, actividad de afianzamiento

Respecto a la solución del literal b) E9, utiliza un sistema de representación verbal para dar respuesta a la pregunta de la situación problema (ver figura 16). A diferencia de E8, quien utiliza un sistema de representación simbólico numérico para comunicar lo que ha percibido (ver figura 17).

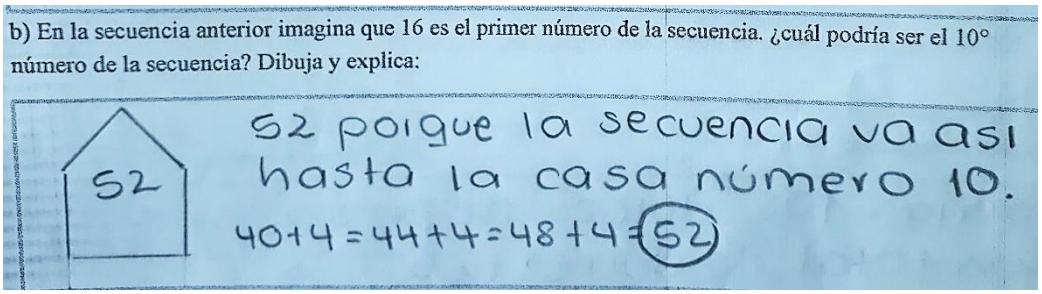


Figura 17. Representación simbólico numérica
Fuente: Estudiante E8, actividad de afianzamiento

E8, suma consecutivamente el número 4, extendiendo la regularidad hallada en la secuencia, hasta encontrar el término N° 10 pedido.

4.2.3 Análisis del proceso uso de la letra

Esta actividad se asume como un puente entre el lenguaje natural y el simbólico, solo se realizan preguntas para generalizar a términos particulares de las secuencias, aunque en un caso se indaga por una expresión en general, el cual hace referencia a encontrar el perímetro de cualquier cuadrado. Podemos darnos cuenta que los estudiantes sienten la necesidad de usar algún tipo de abreviatura o usar sincopas, para registrar las regularidades o patrones.

En la figura 13 se puede apreciar el uso de la letra o letras reconocidas como una abreviatura de un objeto concreto, ya que en la expresión *8ps*, las letras *ps* indican el objeto concreto "piso de un edificio"

Sumado a lo anterior observamos que en las situaciones problema al final del taller, se pudo captar la necesidad del uso de abreviaturas, pues en ese momento los estudiantes se encuentran en un *proceso de transición entre lo retórico y simbólico*, y desean comunicar las características comunes observadas en los miembros de la secuencia de figuras e intentan aplicar esas propiedades comunes a cualquier término de la secuencia. Veamos como algunos estudiantes intentan registrar el patrón observado a través de una abreviatura con símbolos o palabras, aquí el uso de la "letra"[12] no propiamente se asume como una representación algebraica formal, pero son la base para construir posteriormente la sintaxis del lenguaje algebraico. Veamos en el caso de E9 intenta crear una expresión general para calcular el perímetro de cualquier cuadrado; en su representación utiliza la expresión "*multiplicando x 4* que son los lados del cuadrado", ella identifica que debe multiplicar la medida del lado del cuadrado siempre por 4, ya que el cuadrado tiene 4 lados iguales; aunque no utiliza un símbolo o letra específica, se puede asumir que este es el paso a posteriores representaciones del tipo: $n\ x\ 4$, (n = medida del lado del cuadrado), ver figura 18

[12] "Letra": No necesariamente una sola letra.

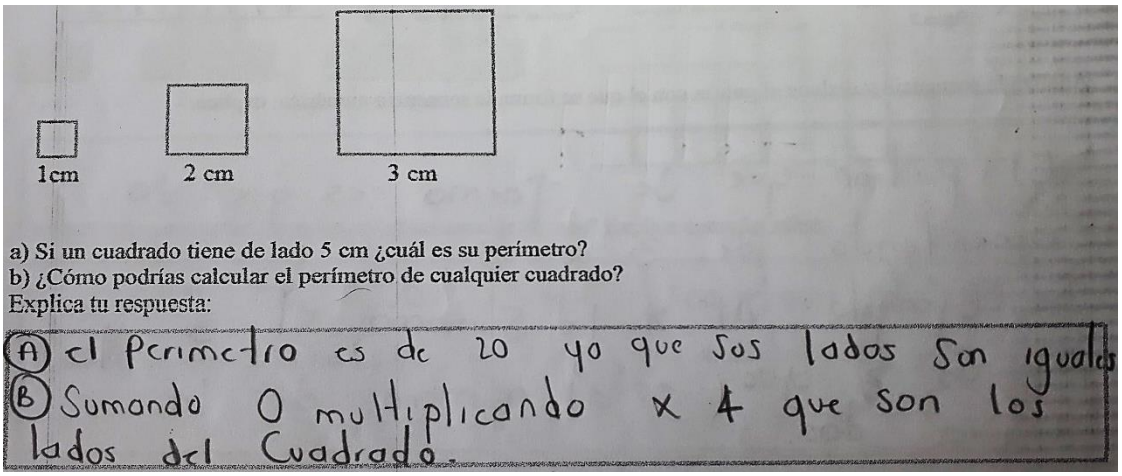


Figura 18. Uso de la abreviatura
Fuente: Estudiante E9, actividad de afianzamiento

En otro caso podemos observar como E2, intenta justificar el mismo interrogante del problema anterior, se visualiza que alcanza un grado más simplificado en su representación de la regularidad, utilizando un sistema de representación de símbolos y palabras, tal como se muestra en figura19.

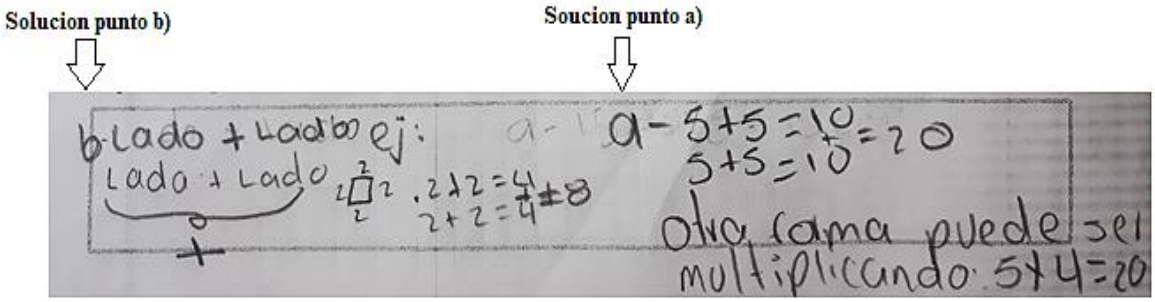


Figura 19. Uso de la "letra"
Fuente: Estudiante E2, actividad de afianzamiento

La solucion anterior es concebida como una generalizacion ya que indica que siempre se deben sumar los 4 lados ($lado + lado + lado + lado$) . La palabra “lado” indica el valor de la distancia del lado del cuadrado, podriamos decir que este tipo de representación corresponde al uso de la letra como un número generalizado.

Algunas dificultades que se muestran al momento de describir las regulardidades a nivel general, incluyen falta de conocimiento de los conceptos matemáticos, la estudiante E13,

permite evidenciar esto con base las preguntas de la anterior situación problema. Ver figura 20.

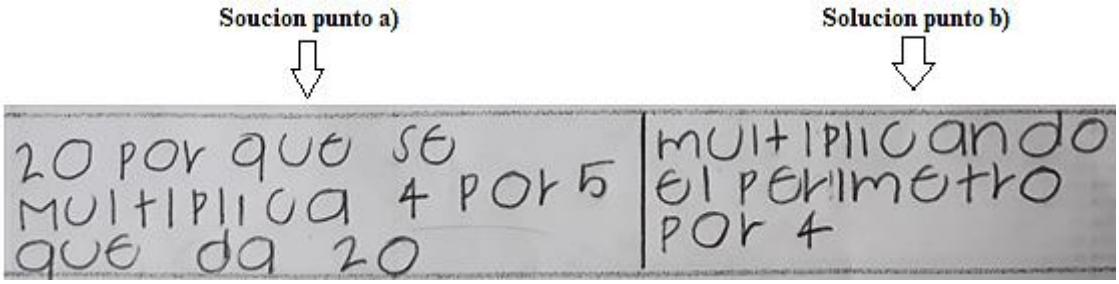


Figura 20. Dificultades para generalizar
Fuente: Estudiante E13, actividad de afianzamiento

De la actividad de afianzamiento se logra concluir que los estudiantes logran percibir las regularidades y lo que es común en las secuencias de figuras o números, pero para lograr comunicar esa descripcion presentan dificultades de tipo conceptual de las matemáticas o no cuentan con el lenguaje propio del álgebra para representar sus ideas. En la mayoria de los casos el tipo de representacion utilizado es el verbal y algunas excepciones muestran la necesidad del uso de símbolos o abreviaturas para intentar mostrar sus conjeturas.

4.2 Resultados de la actividad de profundización

En el taller de profundización se crearon situaciones problema con una herramienta importante para la conjetura en la generalización matemática y es el concepto de función, en ellas se animan a los estudiantes a hacer conjeturas. Pero para ello, se prepara un camino comprensible a los alumnos para que puedan relacionar dos magnitudes y en algunos otros problemas deben percibir una magnitud constante y otra variando.

Inicialmente se presentan tablas con algunos valores ya establecidos para estimular la estrategia recursiva, después se interrumpe la estrategia y se deja una brecha corta o larga, entre los valores de entrada de la función o entre los términos de las secuencias, para animar al estudiante a organizar sus ideas, y logre describir las regularidades; y finalmente se busca que creen algún tipo de expresión general para cualquier término de las secuencias.

Lo anterior está relacionado con los procesos del uso de las representaciones, generalización, y usos de la letra.

4.2.1 Análisis del proceso uso de representaciones

En cuanto al uso de las representaciones se observa que generalmente se valen de representaciones múltiples, específicamente verbal y pictórica. Recordemos que las representaciones son una herramienta para que los estudiantes plasmen lo que han visualizado y tengan a la mano sus ideas, ya que en la mente tienden a dar vueltas y ser fugaces, en cambio una vez plasmadas en el papel son fáciles de analizar, discutir y comunicar a otras personas.

E10 muestra una representación múltiple basada en lenguaje natural y una representación pictórica. La tarea propuesta, incluye calcular cuántos elementos contiene el siguiente término de una secuencia, en este caso el término N° 7, dicha secuencia está basada en la sucesión de Fibonacci[13]. A continuación, se muestra la solución de E10 en la figura 21.

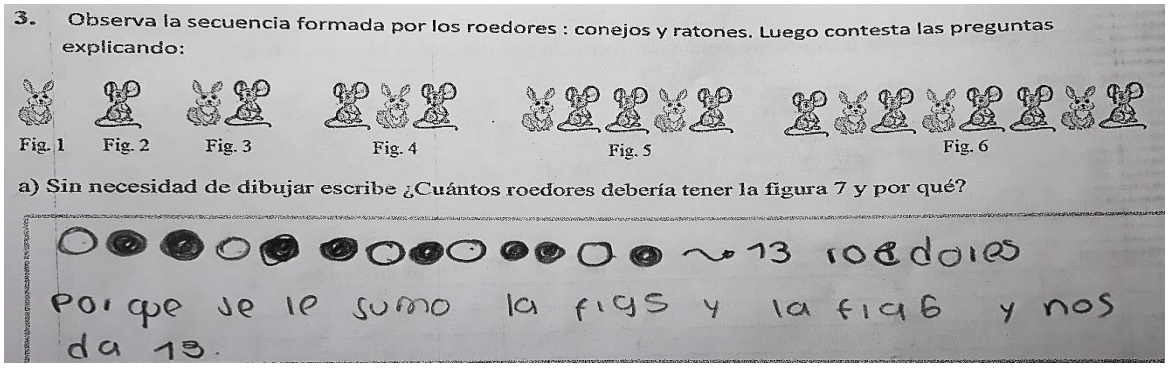


Figura 21. Representación verbal y pictórica
Fuente: Estudiante E10, actividad de profundización.

[13] Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. En esta sucesión, cada término es definido en función de otro dos. Fuente, Wikipedia.

El estudiante utiliza círculos negros y blancos para representar las dos clases de animales que aparecen en la secuencia, con ello representa la regularidad encontrada en los términos anteriores.

También, podemos apreciar representaciones solo verbales, como lo muestra E9. Ver figura 22.

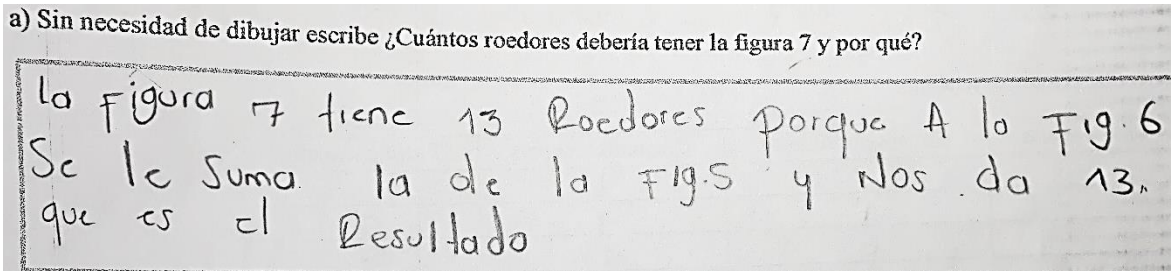


Figura 22. Representación del tipo verbal
Fuente: Estudiante E9, actividad de profundización

Y en otro caso el estudiante E1, utiliza una representación simbólica algebraica, pues usa símbolos basados en palabras incompletas, interconectados con el símbolo de la suma " + ". Tal como se aprecia en la figura 23. (Se comprende que: $Fig.5 + Fig.6 = 13$).

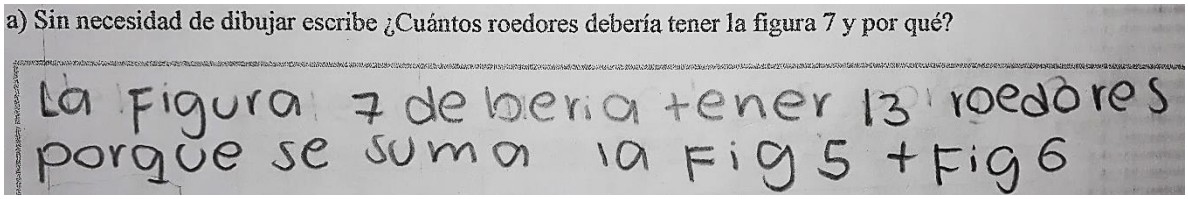


Figura 23. Representación del tipo simbólico algebraico
Fuente: Estudiante E1, actividad de profundización

4.2.2 Análisis del proceso de generalización

Para el analisis visual previo a la solucion del problema, se hizo necesario en algunos casos apoyo del docente para indicar las caracteristicas comunes entre los primeros términos de las secuancias, de esta manera las estudiantes, percibieron la regularidad que se presentaba entre todos los términos de la secuencia y posteriormente lo registraron para el término

subsiguiente. En este orden de ideas, la consecusion de la generalización, se pudo evidenciar en algunos estudiantes, ya que basados en la regularidad encontrada, la aplicaron a cualquier término de la secuencia, y asi pudieron encontrar, el valor de cualquier término de la secuencia.. E9 registra la generalización para el término 100 de la secuencia de animales mostrada en la figura 21.

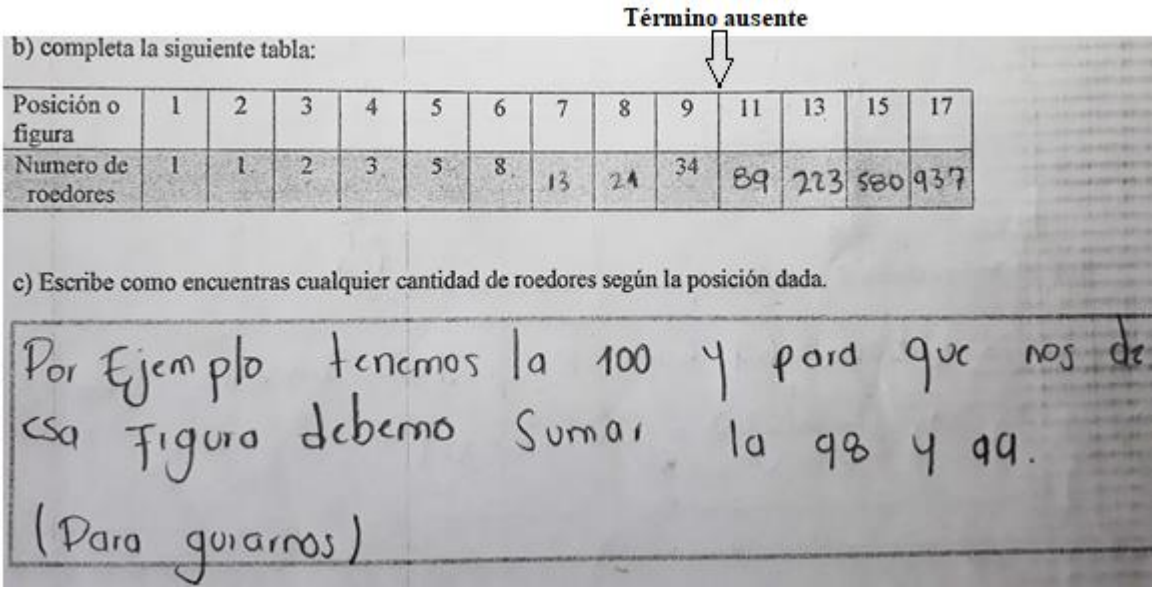
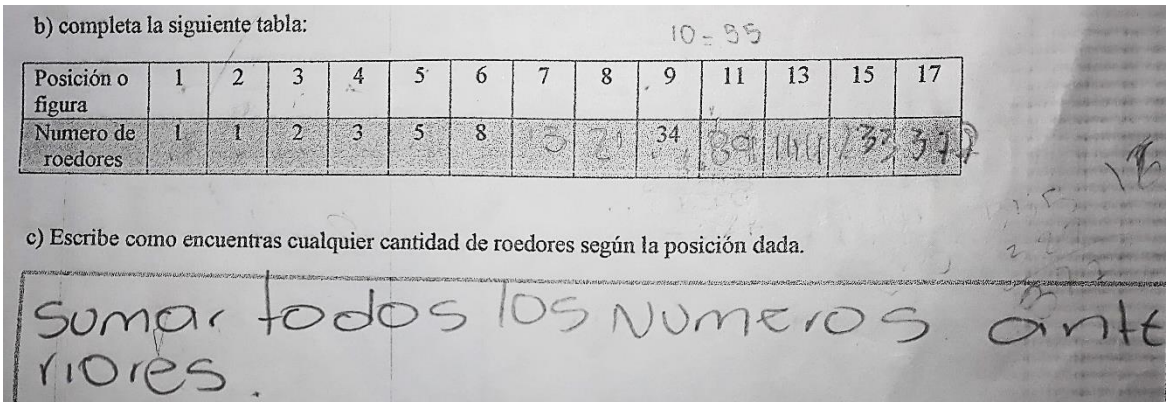


Figura 24. Generalización de patrones a cualquier término de la secuencia
Fuente: Estudiante E9, actividad de profundización

E9, después de visualizar la secuencia y apoyándose en la tabla, conjetura para otros términos de la secuencia, y de manera verbal expone la descripción del patrón para el término o posición 100 de la secuencia.

El objetivo de que completaran la tabla, era justamente con la intención de que siguieran la regularidad hallada, y así poder corroborar su comprensión; además, las brechas o términos les causó preocupación, pues decían que cómo hacían para encontrar la cantidad de animales para el término o posición 11, si no estaba el resultado de la posición 10. Al percatarse que debían sumar los dos resultados anteriores, prosiguieron su tarea. Aunque en algunos casos se confundían en las sumas. Debido a la premura de terminar la actividad.

La actividad anterior presentaba un grado de dificultad amplio, y algunos estudiantes no lograron determinar una solución para un término grande en la secuencia de Fibonacci. E16, presenta dificultades para generalizar las regularidades a cualquier término de una secuencia, ver figura 25.


b) completa la siguiente tabla:

Posición o figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15	17
Numero de roedores	1	1	2	3	5	8			34				

c) Escribe como encuentras cualquier cantidad de roedores según la posición dada.

Sumar todos los Numeros anteriores.

Figura 25. Dificultad en generalización de patrones a cualquier término de una secuencia
Fuente: Estudiante E16, actividad de profundización

A continuación, un ejemplo muy concreto de mostrar el proceso de generalización que realiza un estudiante, sin hacer uso de representaciones del simbolismo formal algebraico, es en el cual se favorece el razonamiento algebraico a través del concepto de función. E9 logra descubrir la regularidad basándose en la visualización de las figuras y el uso de la tabla en la siguiente situación problema y la registra verbalmente, ver figuras 26 y 27.

El problema dice: *Observa detenidamente la secuencia formada por caracoles blancos y negros.*

a) Completa la tabla

b) Si Alejandra quiere dibujar la figura 34 ¿Cuántos caracoles debe dibujar?

c) Explica una forma de hallar la cantidad total de caracoles para cualquier figura.

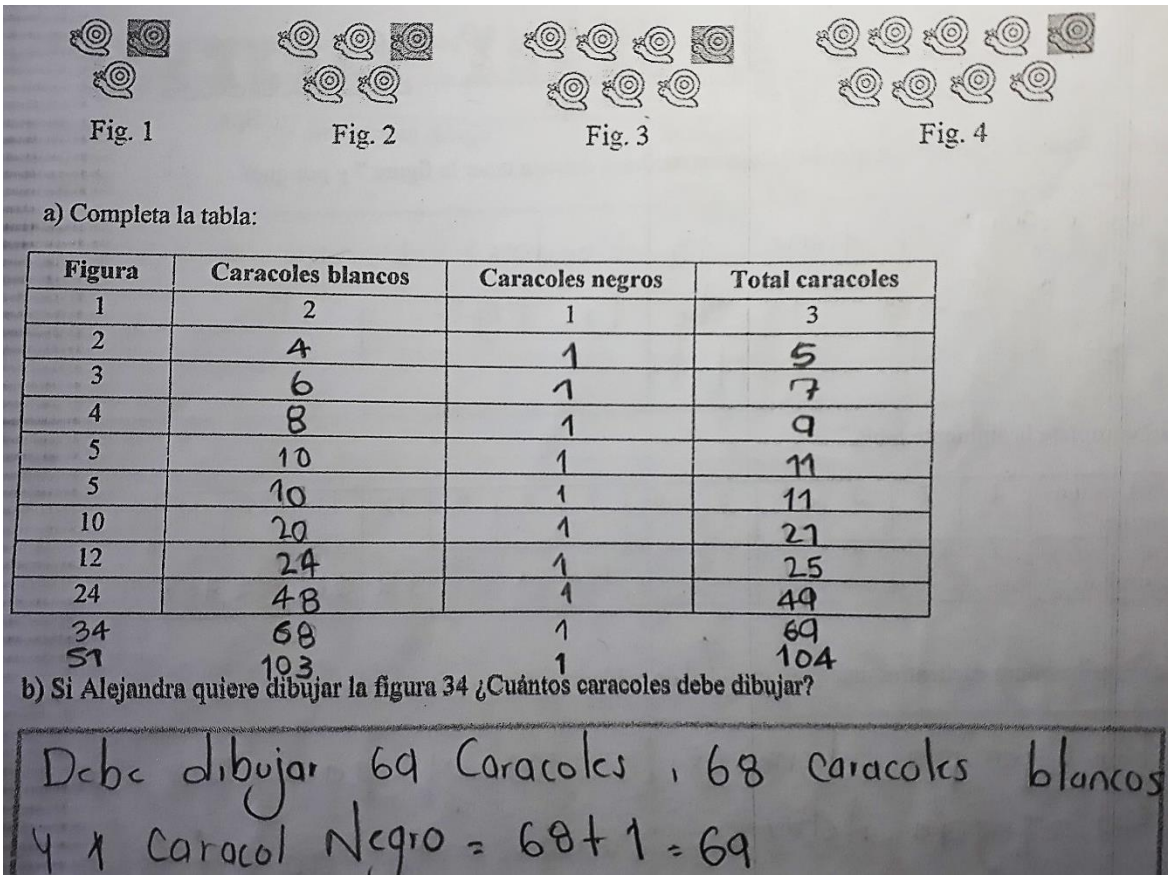


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

a) Completa la tabla:

Figura	Caracoles blancos	Caracoles negros	Total caracoles
1	2	1	3
2	4	1	5
3	6	1	7
4	8	1	9
5	10	1	11
5	10	1	11
10	20	1	21
12	24	1	25
24	48	1	49
34	68	1	69
51	103	1	104

b) Si Alejandra quiere dibujar la figura 34 ¿Cuántos caracoles debe dibujar?

Debe dibujar 69 Caracoles, 68 caracoles blancos y 1 Caracol Negro = 68 + 1 = 69

Figura 26. Proceso de generalización
Fuente: Estudiante E9, actividad de profundización

Como podemos analizar, E9 reconoce que lo caracoles blancos van siempre en números pares y ella lo asocia a la multiplicación por 2, además se percata que la cantidad de caracoles negros siempre es constante, de lo cual generaliza así, para cualquier término de la secuencia. Ver figura 27.

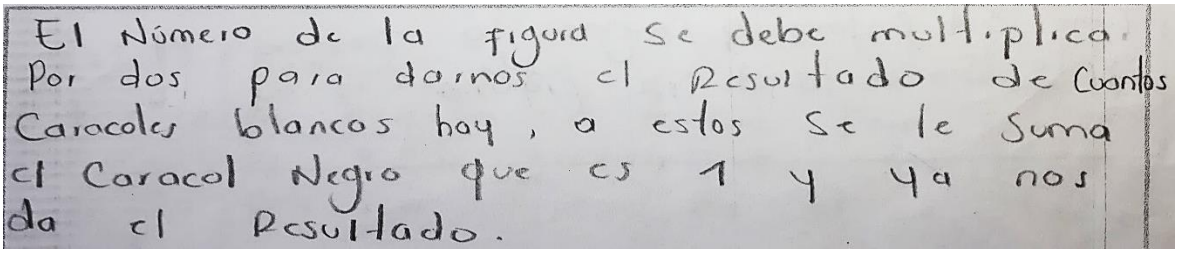


Figura 27. Proceso de generalización. Representación verbal
Fuente: Estudiante E9, actividad de profundización

4.2.3 Análisis del proceso uso de la letra

En cuanto al uso de la letra en la actividad, su pudo determinar que, en algunos casos, la letra la interpretan de acuerdo a la tipificación: como a una incógnita específica, número generalizado, letra evaluada y como variable.

Para registrar lo anterior, se analizaron las respuestas dadas a la siguiente situación problema:

"En un restaurante por cada mesa cuadrada solo se pueden sentar máximo 4 personas. Completa los datos de la siguiente tabla y responde las preguntas."

a) ¿Cómo calcularías la cantidad de personas sentadas para 100 mesas?

b) Si se tiene un número cualquiera de mesas. ¿Cómo calcularías el número de personas que se pueden sentar en ellas?

La situación problema contiene una tabla (ver figura 28) que debe llenarse, antes de dar respuesta a las preguntas, esto se hace con la intención de crearle una estrategia al estudiante para que reconozca la regularidad y así le asocie al número de mesas, el número de personas sentadas, esto en referencia a usar el concepto de función como un medio para construir generalizaciones. Posteriormente se presenta una brecha amplia en la tabla y se indaga por el número de personas que deberían estar sentadas en 100 mesas, esta brecha ayuda al aprendiz a organizar sus ideas y generalizar a un término más grande, y en consecuencia se le posibilitará una recurrencia para encontrar una expresión general.

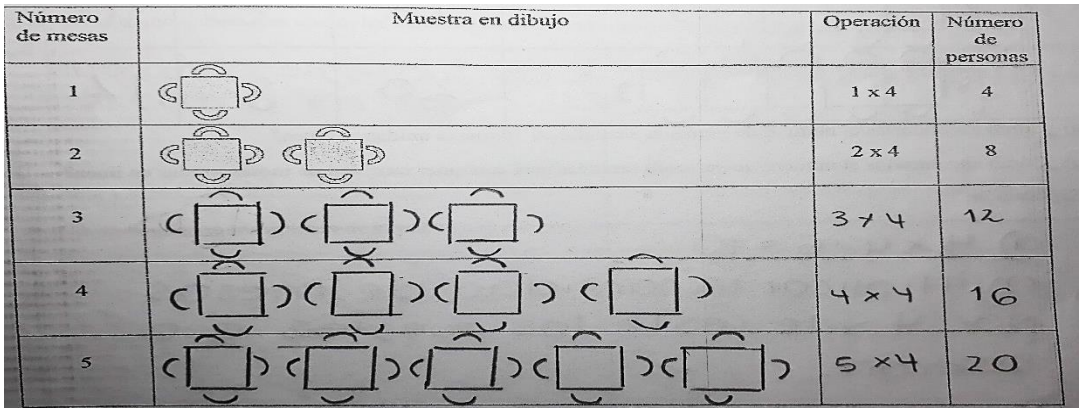


Figura 28. Tabla de reconocimiento de regularidades. Uso de la función
Fuente: Estudiante E8, actividad de profundización

Par dar respuesta al literal *b)* de la situación problema, respecto a encontrar una expresión general, se evidenció, lo siguiente:

El estudiante E8 le da un significado a la letra como número generalizado, al expresar "yo multiplicaría N x 4", asume que de esta manera siempre encontraría el resultado para cualquier cantidad de mesas. Ver figura 29.

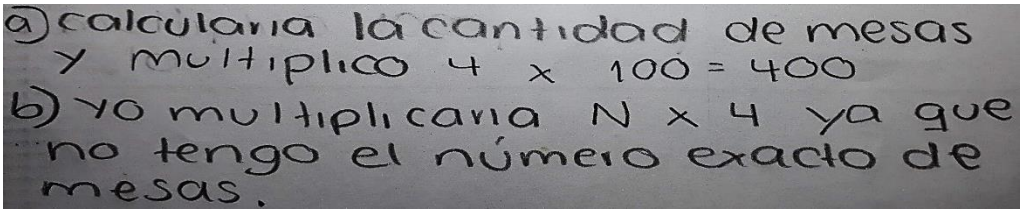


Figura 29. Letra como número generalizado
Fuente: Estudiante E8, actividad de profundización

Por otra parte E6, utiliza una representacion simbólica algebraica, para poder dar respuesta al literal *b)*, de la cual podemos deducir , que la letra Y la interpreta como número generalizado y la letra I, como una incógnita especifica, ya que la asume como un número específico, pero desconocido. Esto se puede apreciar en la figura 30.

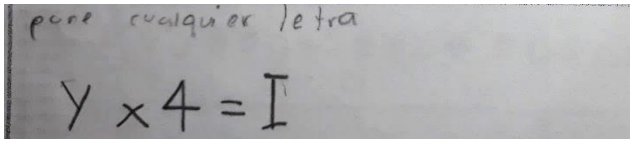


Figura 30. Letra I, como número generalizado
Fuente: Estudiante E6, actividad de profundización

El hecho de usar otra letra para el resultado, es decir la letra I, hace pensar que identifica ese resultado como una incógnita especifica, diferente al número que representa la letra Y. En este orden de ideas, podemos concluir que E6 percibe que las letras tienen un valor específico pero desconocido.

E2, confecciona una generalización en la que utiliza la misma letra *n* para realizar su representación simbólica, " $n \times 4 = n$" , aquí se pude inferir que para el caso de la expresión $n \times 4$, la letra *n* representa un rango de valores no especificados y del mismo modo para la letra *n* al lado derecho de la expresión, esto se puede tipificar como la letra que representa una variable. Ver figura 31.

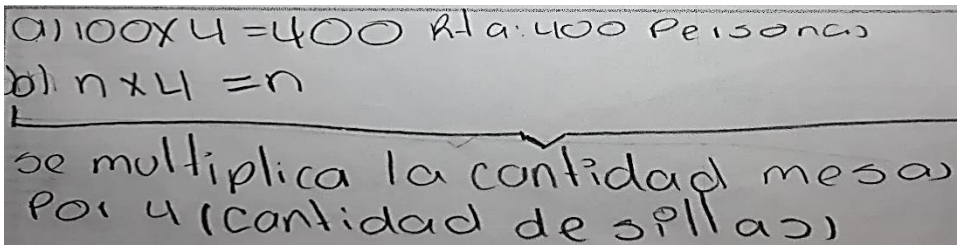


Figura 31. Letra n considerada como variable
Fuente: Estudiante E2, actividad de profundización

Otra forma de usar la letra, según lo tipificado es la letra evaluada, la cual consiste en asignarle valores numéricos arbitrarios desde el principio para poder justificar la representación simbólica. Ver figura 32.

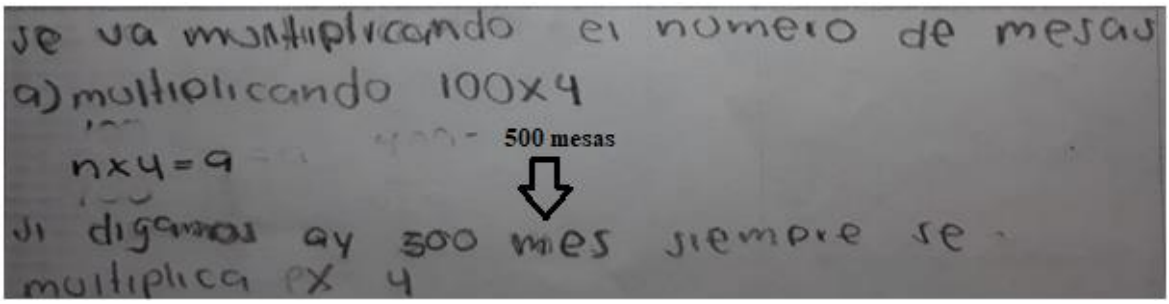


Figura 32. Letra evaluada
Fuente: Estudiante E12, actividad de profundización

E12, asigna el valor 500, a la letra *n* para poder justificar su representacion simbólica.

Entre las dificultades que se presentaron, se observa que E16, no logro relacionar el número de mesas con el número de personas sentadas, y por ende esto le llevo a cometer errores en cuanto a el proceso de generalización, tal como se aprecia en la figura 33.

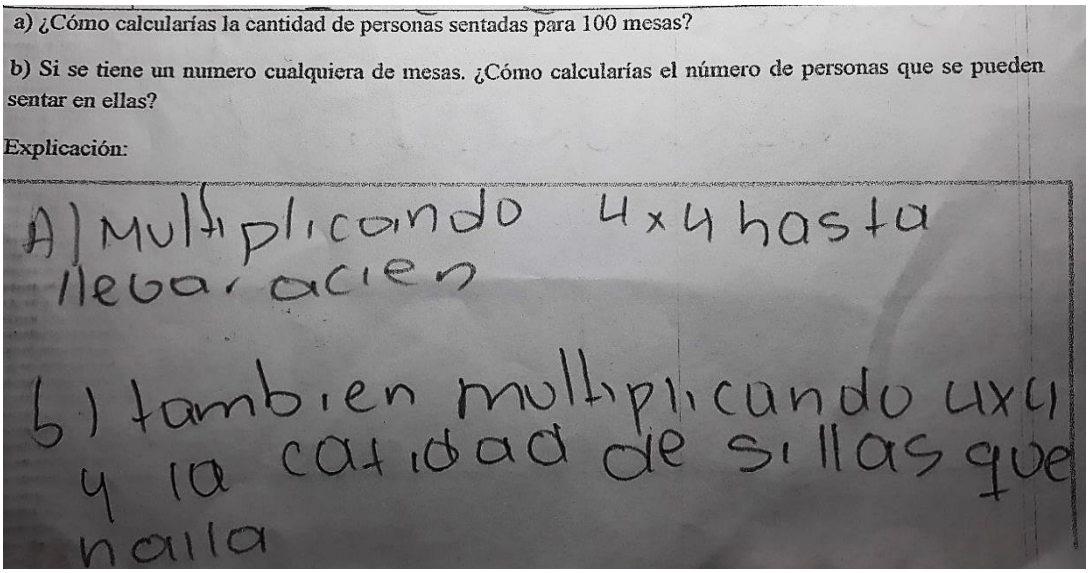


Figura 33. Dificultad en el proceso de generalización
Fuente: Estudiante E16, actividad de profundización

Finalmente, como hechos significativos de avance o dificultad identificados durante el proceso, se resaltan:

- Desarrollo del pensamiento variacional con base al fortalecimiento de los procesos relacionados con el uso de la letra, uso de representaciones y la generalización.
- Curiosidad e interés por conocer mejor el software geogebra.
- Trabajo colaborativo entre pares
- Buen uso del tiempo libre, ya que algunas sesiones se realizaron extraclase.
- Limitaciones en en cuanto a la conceptualización de presaberes
- Debilidades en la resolución de operaciones básicas
- Dificultad del manejo del lenguaje simbólico
- Dificultades semánticas y sintácticas del lenguaje natural y propio de las matemáticas
- Cansancio en las actividades extensas
- Motivación cuando hay uso de material concreto
- Regocijo al saber que estudiaban temas importantes para bachillerato
- Frustaciones cuando no hay comprensión
- Expresión de su gusto por el arte, al crear patrones con diseños propios

A continuación algunas imágenes que evidencian el desarrollo de las actividades de aprendizaje:

Figura 34. Muestra, estudiantes grado 5° básico.
Colegio Nuestra Señora de Bethlem Popayán. Año escolar 2017-2018.

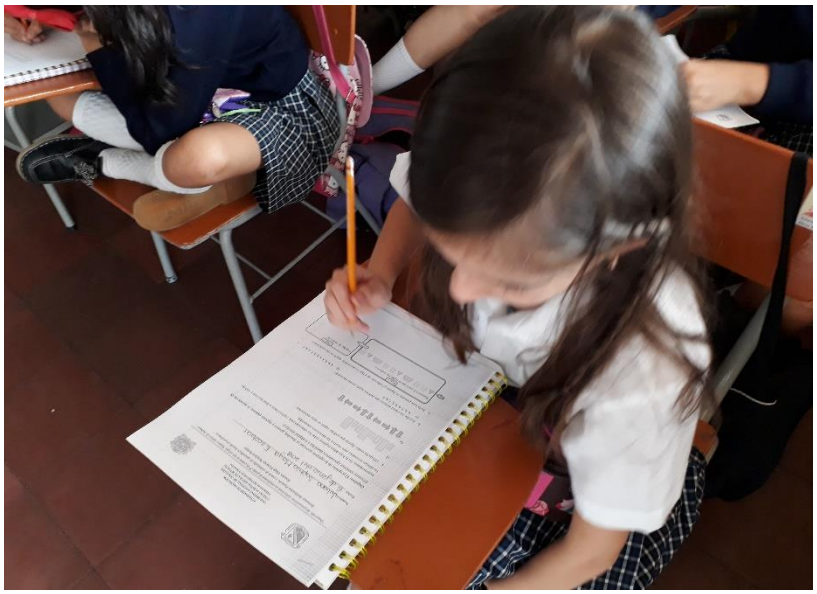


Figura 35. Sesiones de actividad de iniciación

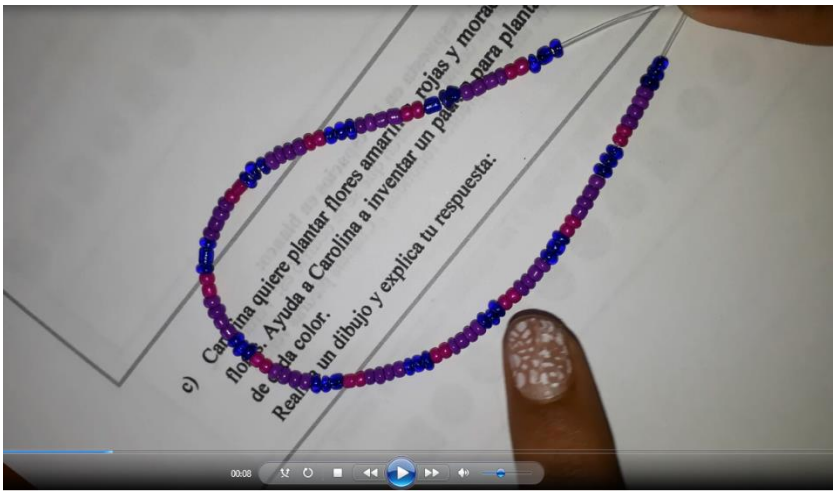


Figura 36. Sesiones actividad de iniciación. E7
Fuente: video 1

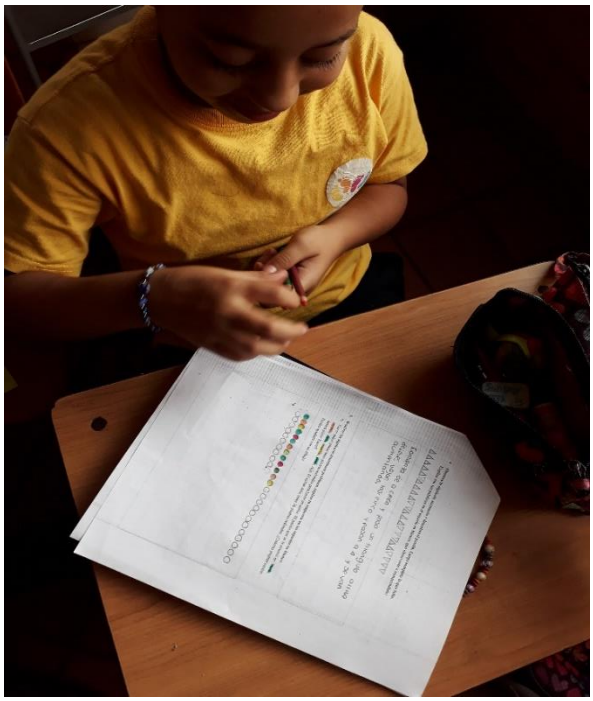


Figura 37. Sesiones actividad de afianzamiento

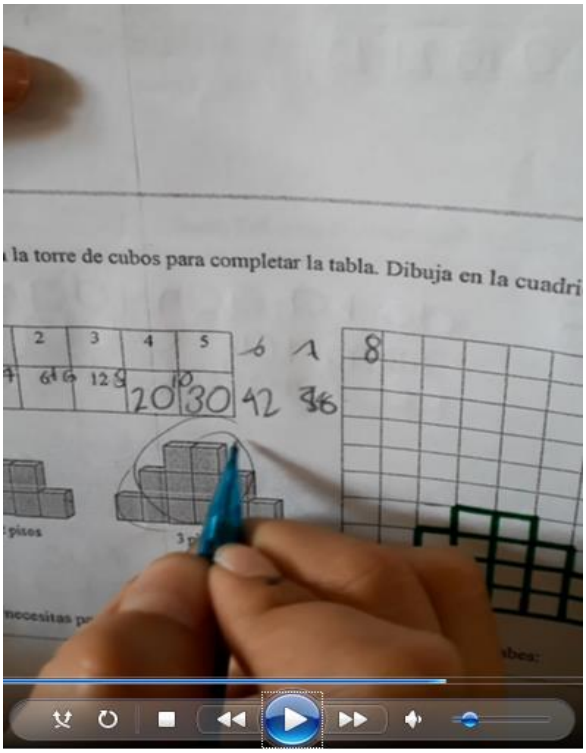


Figura 38. Sesiones actividad de afianzamiento. E13
Fuente: video 3

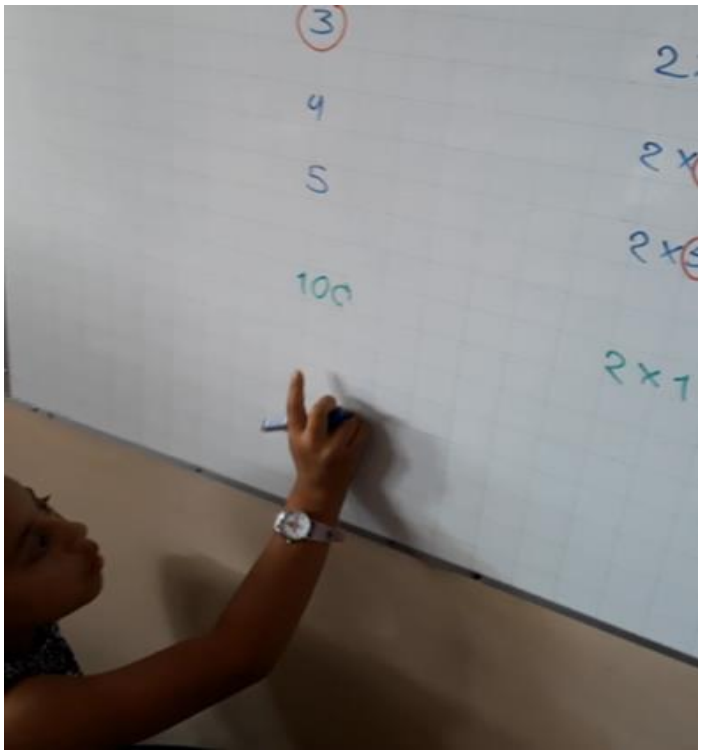


Figura 39. Sesiones actividad de profundización

5. Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones que se pudieron extraer del análisis de los resultados y así poder dar respuesta a la consecución de los objetivos propuestos.

5.1 Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos durante el desarrollo del presente trabajo y con la experiencia que brinda la interacción constante con los estudiantes durante el proyecto, se puede llegar a concluir lo siguiente:

- Se observaron avances en los estudiantes en cuanto al fortalecimiento de los procesos de generalización, uso de representaciones y uso de la letra. Respecto a la generalización de patrones, se propició en el estudiante la visualización, descripción y registro de regularidades, ya que las preguntas tenían la intención de que el estudiante explicara o argumentara sus observaciones y las plasmara verbal o por escrito. De esta manera al visualizar las secuencias de figuras, objetos o números, los estudiantes identificaban características comunes y relaciones entre los elementos, eso les permitió crear imágenes mentales para poder conjeturar acerca de la tarea que debían realizar. Paso seguido, debían describir las regularidades que encontraron y comunicarlas a través de algún sistema de representación, ya sea verbal, simbólico o pictórico. En algunos casos cuando se indagó sobre encontrar algún término especifico de la secuencia, los estudiantes lograron aplicar las

regularidades encontradas y así daban respuesta a las tareas propuestas. También, se analizó que varios estudiantes desarrollaron la capacidad de deducir una expresión que permitiera calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

- En relación al uso de representaciones, se convirtió en una herramienta necesaria para poder plasmar sus comprensiones después del proceso de visualización. La representación verbal es la que generalmente utilizan, este tipo de representación les permite inicialmente la discusión entre compañeras y docente, pero para poder mantener esas creaciones mentales se les motivó a plasmar con lápiz y papel lo que habían conjeturado, y de esta manera evitar que se fugaran las ideas.
- El uso de la letra se encuentra entre las representaciones de tipo algebraico simbólico, se incentivó en la actividad de afianzamiento usar algún tipo de abreviatura o sincopa que permitiera encontrar expresiones generales para dar razón del valor de cualquier término de una secuencia. Al crear un puente entre lo retórico y simbólico, permitió la necesidad de usar algún tipo de representación simbólica para resumir lo que se expresa verbalmente; esto se pudo evidenciar en la actividad de profundización.
- Se alcanzó un conocimiento en el uso de la simbología para representar generalizaciones, este avance se pudo evidenciar cuando se hacía uso de símbolos numéricos, palabras a medias, letras y algunas expresiones de las cuales se valían los aprendices para comunicar sus razonamientos y justificar que con base a esas creaciones simbólicas, se podían determinar términos desconocidos de la secuencia estudiada.
- Se pudo acercar a los estudiantes al concepto de función asociado al cambio de una magnitud con respecto a otra, y se pudo evidenciar que, al resolver las situaciones, se favoreció en los niños procesos asociados al cambio, la variación y generalización. Para registrar sus observaciones construyeron “fórmulas” con algún tipo de representación basado inclusive en el uso de la letra, pero en general las generalizaciones fueron de tipo verbal, ya que se les dificultó crear o construir una representación simbólico – algebraica para expresar las variaciones de los objetos estudiados.

En cuanto a la propuesta de la estrategia didáctica se puede concluir:

- Fue relevante el conocimiento previo de la caracterización del razonamiento algebraico en niños, esto se convirtió en la materia prima que permitió la producción idónea de las actividades de aprendizaje, con las cuales se contribuyó al desarrollo del pensamiento variacional.
- Se logró articular una estrategia didáctica para dar cuenta del reconocimiento de generalidades o patrones, uso de la letra y uso de las representaciones, acotando el razonamiento algebraico a la edad de los niños, de lo cual se pudo concluir que tomando como insumo los aspectos teóricos de dicho razonamiento se puede contribuir al desarrollo del pensamiento variacional.
- La metodología utilizada posibilitó que los estudiantes bajo un enfoque problémico, avanzaran, en los procesos de reconocimiento de patrones, generalización y uso de la letra. Esto contribuye a preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la básica secundaria.
- Respecto al uso de Geogebra en el aula, es una herramienta que genera asombro e interés por parte de los estudiantes y docente en cuanto a su funcionamiento. Con ella se permitió mostrar de una manera interactiva la variación y el cambio de las figuras geométricas conformadas por bloques de cubos.
- Se propone implementar en el plan de estudios de matemáticas del Colegio Nuestra Señora de Bethlem Hermanas Bethlemitas- Popayán, temáticas relacionadas con los patrones, generalización de patrones y uso de las funciones en la básica primaria, que se puedan trabajar mediante la estrategia didáctica adecuada a la edad de los estudiantes para el desarrollo del pensamiento variacional. Se desea promover la conformación de una comunidad educativa para explorar más las herramientas didácticas interactivas y con ellas crear actividades más lúdicas e interesantes para los niños.

5.2 Recomendaciones

- Identificar las teorías que permiten dar cuenta del desarrollo del pensamiento variacional, que en el ámbito internacional y nacional lo asocian al razonamiento algebraico temprano, pensamiento algebraico temprano: Early algebra, álgebra temprana, pre - álgebra, teoría de la objetivación, enfoque ontosemiótico, entre otras. Para poder tener un marco que permita el desarrollo de nuevas investigaciones relacionadas con la temática de este estudio.
- Promover otras investigaciones no solamente sobre el desarrollo del pensamiento variacional, sino el geométrico, aleatorio o numérico con el uso de Geogebra en básica primaria.
- Estudiar y aprender el manejo del software Geogebra, como una gran herramienta para crear actividades de aprendizaje lúdicas e interesantes para los estudiantes. Lo cual conlleva a apasionarse por el uso de las TIC´S en el aula.
- Dedicar buena parte de tiempo al desarrollo y la planeación de las actividades de aprendizaje, para que logren desarrollarse en el tiempo previsto, en nuestro caso, fue necesario varias sesiones para una sola actividad.

Bibliografía

Aké, L., Godino, J., & Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matematica*, *33*, 39–52.

Alfaro, C., & Fonseca, J. (2016). La teoría de los campos conceptuales y su papel en la enseñanza de las matemáticas. *Uniciencia*, *30*(1), 17–30. Retrieved from http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/7581/7958

Benjumea, P., Gallego, D., Miranda, N., Montoya, N., & Ocampo, A. (2007). *El desarrollo del pensamiento variacional y la formulación de problemas en los grados 2º, 3º, 4º y 9º de la educación básica*. Unversidad de Antioquia, Colombia.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, (June 2014), 2–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*(1945), 55–67. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/1557/1/Uno-54-_2010.pdf

Cortés, E. M. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea generalización.*

Cuartas, J. (2015). *Maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado*. Universidad de Antioquia, Colombia.

Dávila, W. (2018). Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria , mediado por GeoGebra.

Freire, P. (2002). *Pedagogia da autonomia*. (E. P. E. T. S/A, Ed.).

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. (2014). El Uso de las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas ., 1545–1566.

Retrieved from http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n50/1980-4415-bolema-28-50-1545.pdf

Gobernación, A. (2006). Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Medellín, Colombia.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. The Nature of Elementary Algebraic Reasoning, 483–511.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (n.d.). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros 1, (2014), 1–20.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Documento: *Matemáticas y su Didáctica para maestros.*

Hernández, K., & Tapiero, K. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónos en estudiantes de educación básica primaria.* Univeridad del Valle, Colombia.

Jacobs, V., Loef, M., Carpenter, T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children´s Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258–288.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). *Algebra in early grades*. New York, USA.: Taylor and Francis Group.

Küchemann, D. (1981). Chapter 8 : Algebra. In *Children´s Understanding of Matematics*. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Dietmar_Kuechemann/publication/309033356_Chapter_8_Algebra/links/57fe6cbf08ae72756401620c/Chapter-8-Algebra.pdf

MEN. Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. Estandares Básicos de Competencias Matematicas (2006). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años, 27–51.

Moreno, G. (2015). *Una aproximación al algebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos.* Universidad del Valle, Colombia.

NCTM. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. EE.UU.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. *investigación en didáctica de la matemática*. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/2013 - En torno a tres problemas de la generalización.pdf

Rivera, E., & Sanchez, L. (2012). *Desarrollo del Pensamiento Variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de Patrones Numéricos.* Universidad del Valle , Colombia.

Rodriguez, Y. (2010). La práctica pedagógica desde un enfoque problémico. Una propuesta para la formación de maestros. *"Entre Comillas,"* (13).

Roselli, N. D. (2011). Teoría del aprendizaje colaborativo y teoría de la representación social : convergencias y posibles articulaciones, *2*(2), 173–191.

Sibaja, A., & Soto, S. (2016). *Razonamiento Algebraico en 3° grado*. Universidad de Antioquia, Colombia.

Susana Del Pilar Hernández Castaño. (2014). Propuesta didáctica para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado, por medio de estrategias de enseñanza.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados en Educación Basica Primaria(9-10 años).

VIdal, R. (2009). La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones, 1–7. Recuperado de: http://repositorio.uahurtado.cl/bitstream/handle/11242/6553/pagina3_archivo+adjunto_cuaderno_11.pdf?sequence=1

Voisin, Y. S. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza.

ANEXOS

Anexo A: Actividad de iniciación

ACTIVIDADES DE INICIACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE BETHLEM
HERMANAS BETHLEMITAS POPAYÁN

"Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado 5° de primaria del colegio Bethlemitas Popayán, a través de actividades de aprendizaje basado en problemas."

Docente: Diego Fernando Paladinez Salazar

Nombre: _____

Fecha: _____

Objetivo: El propósito de la siguiente actividad es describir, generar y registrar patrones en secuencias de diferentes contextos (geométrico, numérico o cualquier otro tipo).

Instrucciones: En la hoja debes registrar todas tus observaciones, explicaciones o descripciones y realizar los dibujos necesarios para resolver las situaciones planteadas.

1. Dibuja las cuatro figuras que podrían seguir en estas secuencias:

a)

b)

2. Escribe los cuatro números que podrían seguir en esta secuencia:

a) **9, 2, 7, 6, 9, 2, 7, 6, 9** **b)** **4, 0, 3, 3, 4, 0, 3, 3, 4, 0,3**

3. Sofía hace patrones de figuras ¿Cuáles son las 4 figuras que podrían seguir en esta secuencia?:

Describe en este espacio el patrón del ejercicio anterior usando palabras:

4. Observa detalladamente los patrones en las siguientes secuencias y descríbelos en el espacio en blanco:

- **Patrón que se repite (Dibuja las 4 figuras que podrían continuar)**

Patrón que cambia (Dibuja las 6 figuras que podrían continuar)

- **Observa la siguiente secuencia y descubre el patrón. Luego completa lo que falta. Explica con tus palabras en el espacio en blanco, que observaste o comprendiste:**

5. **Resolver las siguientes situaciones problema, explica tu respuesta en los espacios en blanco:**
   a) Karen quiere pintar unas piedras redondas para hacer un collar. El patrón que se le ocurrió es: Verde, naranja, verde, amarillo, verde, rojo. El collar debe tener 36 piedras redondas. ¿Cuántas piedras verdes deberá pintar Karen?

b) Camila enhebró mostacillas para hacer una pulsera. Usó una mostacilla azul, luego tres amarillas, una azul tres amarillas, y así sucesivamente, hasta usar 18 mostacillas amarillas. ¿Cuántas mostacillas usó en total?

Usa el material para representar el patrón y la secuencia. (Materiales: hilos y mostacillas de colores)

c) Carolina quiere plantar flores amarillas, rojas y moradas en el borde de su jardín. Para ello necesita 20 flores. Ayuda a Carolina a inventar un patrón para plantar las flores. Luego indica cuantas flores necesitas de cada color.
Realiza un dibujo y explica tu respuesta:

Anexo B: Actividades de afianzamiento

ACTIVIDADES DE AFIANZAMIENTO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE BETHLEM
HERMANAS BETHLEMITAS POPAYÁN

"Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado 5° de primaria del colegio Bethlemitas Popayán, a través de actividades de aprendizaje basado en problemas."

Docente: Diego Fernando Paladinez Salazar

Nombre: _____

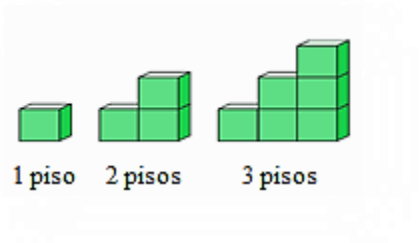
Fecha: _____

Objetivo: El propósito de la siguiente actividad es describir, generar y registrar patrones en secuencias geométricas y numéricas.

Instrucciones: En la hoja debes registrar todas tus observaciones, explicaciones o descripciones y realizar los dibujos necesarios para resolver las situaciones planteadas.

1. Sofía construyó torres de cubos y formó una secuencia. Ella anotó el patrón de su secuencia. Si continua con ese patrón, ¿Cuántos cubos podría tener una torre de 4, 5 y 6 pisos?
Utiliza la tabla para ubicar los resultados.

Número de pisos	1	2	3	4	5	6
Número de cubos	1	3	6			



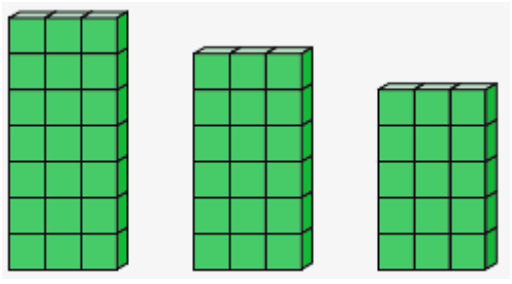
Explicar:

a) ¿Cuántos cubos podría necesitar Sofía para una torre de 7 pisos?

b) ¿Cuántos pisos puede tener una torre con 36 cubos?

2. Dibuja las dos torres que siguen en esta secuencia, utiliza la cuadrícula. Encuentra los números que faltan en la tabla. Y contesta las preguntas explicando.

Número de pisos	7	6	5	4	3
Número de cubos	21	18	15		

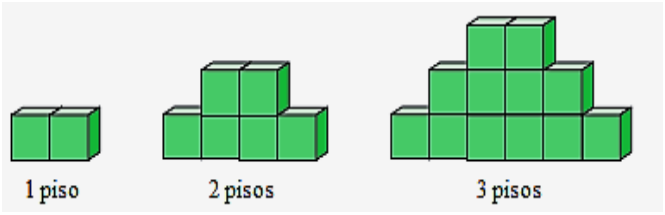


a) ¿Cuántos cubos podría tener una torre de 10 pisos?

¿Cómo te sirve la multiplicación para descubrir como continua la secuencia numérica?

3. Utiliza el patrón en la torre de cubos para completar la tabla. Dibuja en la cuadrícula la siguiente torre de 4 pisos:

Número de pisos	1	2	3	4	5
Número de cubos	2	6	12		



¿Cuántos cubos necesitas para construir una torre de 8 pisos? Explica como lo sabes:

4. Resolver las siguientes situaciones problema, explicando tu solución:

a) Los números de las casas de una calle forman una ***secuencia numérica***. Si el patrón de esta secuencia continúa, ¿Cuáles son los números de las tres casas que continúan?

Solución y explicación:

b) En la secuencia anterior imagina que 16 es el primer número de la secuencia. ¿cuál podría ser el 10° número de la secuencia? Dibuja y explica:

c) Finalmente, ¿Qué patrón numérico permite continuar la secuencia? Respuesta y explicación:

5. Escribe sobre la línea la secuencia numérica que se relaciona con la cantidad de fósforos en la figura (apóyate del material):

Secuencia numérica:

_____

Analiza la secuencia y deduce el patrón con el que se forma la secuencia numérica, explica:

6. Resolución de problemas: Hacer una tabla y buscar un patrón

a) Averiguar ¿Cuál es la diferencia de edad entre Laura y su amigo Juan? En la tabla se representan algunos datos que te pueden ayudar.
¿Cuál es la edad de Juan, cuando Laura tenga 33 años?
Explica tu respuesta:

Edad de Laura	8	12			33
Edad de Juan	13	17			

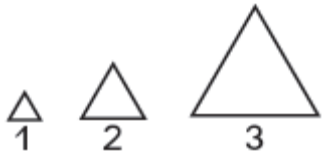
b) En cada paquete de 25 dulces, 8 son de fresa. Si compras 125 dulces, ¿Cuántos serán de fresa? Completa la tabla.

Explica tu respuesta:

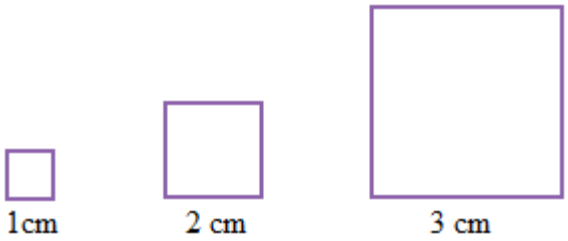
Dulces de fresa	8				
Total de dulces	25				

7. Dibuja las dos figuras que podrían seguir en la secuencia. Encuentra los números que podrían hacer falta en cada tabla.

Longitud de cada lado(cm)	1	2	3		
Perímetro del triángulo(cm)	3	6			



8. Usa una tabla para relacionar la longitud del lado de los cuadrados con su perímetro. Observa el dibujo:



a) Si un cuadrado tiene de lado 5 cm ¿cuál es su perímetro?

b) ¿Cómo podrías calcular el perímetro de cualquier cuadrado?

Explica tu respuesta:

Anexo C: Actividades de Profundización

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE BETHLEM
BETHLEMITAS POPAYÁN

"Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado 5° de primaria del colegio Bethlemitas Popayán, a través de actividades de aprendizaje basado en problemas."

Docente: Diego Fernando Paladinez Salazar

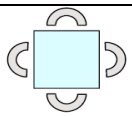
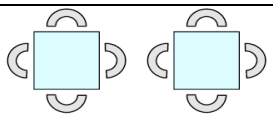
Nombre: _____

Fecha: _____

Objetivo: El propósito de la siguiente actividad es: procurar la representación, descripción y generalización de patrones o regularidades.

Instrucciones: En la hoja debes registrar todas tus observaciones, explicaciones o descripciones y realizar los dibujos necesarios para resolver las situaciones planteadas.

1. En un restaurante por cada mesa cuadrada solo se pueden sentar máximo hasta 4 personas. Completa los datos de la siguiente tabla y responde las preguntas:

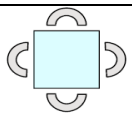
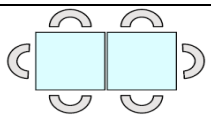
Número de mesas	Muestra en dibujo	Operación	Número de personas
1		1 x 4	4
2		2 x 4	8
3			
4			
5			

a) ¿Cómo calcularías la cantidad de personas sentadas para 100 mesas?

b) Si se tiene un numero cualquiera de mesas. ¿Cómo calcularías el número de personas que se pueden sentar en ellas?

Explicación:

2. En el mismo restaurante las mesas en forma cuadrada siempre se organizan en una línea, en la siguiente tabla se muestra como, completa los espacios en blanco y responde las preguntas:

Número de mesas	Muestra en dibujo	Número de personas, si las mesas están separadas	Número de puestos que se pierden al unir mesas	Número de personas en las mesas unidas
1				
2				
3				
4				
5				

a) ¿Cómo encontrarías el número de personas sentadas en 10 mesas unidas en línea?

b) ¿Cómo encontrarías el número de personas sentadas para cualquier cantidad de mesas unidas en línea?

Explicación:

3. Observa la secuencia formada por los roedores : conejos y ratones. Luego contesta las preguntas explicando:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

a) Sin necesidad de dibujar escribe ¿Cuántos roedores debería tener la figura 7 y por qué?

b) completa la siguiente tabla:

Posición o figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15	17
Número de roedores	1	1	2	3	5	8			34				

c) Escribe como encuentras cualquier cantidad de roedores según la posición dada.

d) ¿Cómo aumentan los ratones de la posición 5 a la posición 6?

e) ¿Qué cantidad de ratones y conejos tendrá la posición 9?

4. Observa detenidamente la siguiente secuencia formada por caracoles blancos y negros:

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

a) Completa la tabla:

Figura	Caracoles blancos	Caracoles negros	Total caracoles
1	2	1	3
2			
3			
4			
5			
5			
10			
12			
24			

b) Si Alejandra quiere dibujar la figura 34 ¿Cuántos caracoles debe dibujar

c) Si una figura está compuesta por 51 caracoles ¿Cuál es la figura?

d) ¿Explica una forma de hallar la cantidad total de caracoles de cualquier figura?