Mayorización, politopos y clases de matrices combinatorias

Diego Alberto Chitiva Huertas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
Agosto de 2020

Mayorización, politopos y clases de matrices combinatorias

Diego Alberto Chitiva Huertas
Matemático

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Ciencias Matemáticas

Director
Armando Reyes, D.Sc.
Profesor Asociado

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
Agosto de 2020

Título

Mayorización, politopos y clases de matrices combinatorias

Title

Majorization, polytopes and combinatorial matrix classes

Resumen: En este trabajo, investigamos el retículo de caras, la propiedad de aditividad, el f-vector y algunas conexiones con clases de matrices combinatorias de unos politopos asociados con tres conceptos de mayorización. El concepto clásico de mayorización fue introducido y caracterizado por Hardy, Littlewood y Pólya en [HLP34]; además, en el año 1959 el matemático ruso Mirsky describió geométricamente el concepto de mayorización débil en [Mir59] y, más recientemente, Roventa [Rov16] introdujo el concepto de mayorización fuerte para generalizar la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya. De otra parte, en el año 2001, Dahl estudió el ideal principal de mayorización en [Dah01], donde exploró conexiones con optimización y presentó una descripción del 1-esqueleto de este politopo. Posteriormente, en [Dah10], él estableció una generalización del teorema de Gale-Ryser usando la aditividad entera del permutaedro de mayorización, trabajo que inauguró una nueva clase de matrices combinatorias llamada $\mathscr{A}(B,S)$, la cual él y Brualdi estudiaron en [BD12]. A partir de lo anterior, en este trabajo, nosotros definimos permutaedros e ideales principales asociados con los conceptos de mayorización débil y fuerte, los cuales investigamos motivados por las fuentes anteriormente mencionadas, e inspirados por la revisión presentada en [BKL85], [BS96] y [Bar02] de algunas demostraciones del resultado ya clásico que caracteriza el retículo de caras del permutaedro mediante las particiones ordenadas de $[n]$. Aprovechando la propiedad de ser simple que tienen varios de los politopos que investigamos, damos descripciones combinatorias de sus retículos de caras. Posteriormente, encontramos expresiones para las componentes del f-vector de cada uno de los politopos estudiados. Asimismo, establecemos caracterizaciones matricial y geométrica del concepto de mayorización fuerte, las cuales complementan los trabajos de Roventa [Rov16] sobre este concepto. Finalmente, ofrecemos demostraciones de la propiedad de aditividad para permutaedros e ideales de mayorización que obtenemos mediante la aplicación de politopos de Newton. Este es un enfoque para investigar la propiedad de aditividad alternativo a los encontrados en la literatura consultada.

Abstract: In this work, we investigate the face lattice, the additivity property, the f-vector, and some connections with combinatorial matrix classes of some polytopes associated with three concepts of majorization. The classic concept of majorization was introduced and characterized by Hardy, Littlewood and Pólya in [HLP34]; besides, in 1959 the Russian mathematician Mirsky described geometrically the concept of weak majorization in [Mir59] and, more recently, Roventa [Rov16] introduced the concept of strong majorization to generalize the inequality of Hardy, Littlewood and Pólya. On the other hand, in 2001, Dahl studied the principal majorization ideal in [Dah01], where he explored connections with optimization and presented a description of the 1-skeleton of this polytope. Subsequently, in [Dah10], he established a generalization of the Gale-Ryser theorem using the integer additivity of the majorization permutahedron, work that opened a new combinatorial matrix class called $\mathscr{A}(B,S)$, which he and Brualdi studied in

[BD12]. Based on the above, in this work, we define permutahedra and principal ideals associated with the concepts of weak and strong majorization, which we study motivated by the aforementioned references, and inspired by the review presented in [BKL85], [BS96] and [Bar02] of some proofs of the already classic result that characterizes the face lattice of permutahedron by means ordered partitions of $[n]$. Taking advantage of the property of being simple that several of the polytopes that we investigate have, we give combinatorial descriptions of their face lattices. Subsequently, we find expressions for the f-vector components of each of the polytopes studied. Likewise, we establish matrix and geometric characterizations of the concept of strong majorization, which complement the Roventa's work on this concept. Finally, we offer proofs of the additivity property for majorization permutahedra and the majorization principal ideals that we obtain by applying Newton's polytopes. This is an approach to investigate the additivity property alternative to those found in the references consulted.

PALABRAS CLAVE: *Mayorización; politopos; permutaedro de mayorización; ideal principal de mayorización; retículo de caras; propiedad de aditividad.*

KEYWORDS: *Majorization; polytopes; majorization permutahedron; principal majorization ideal; face lattice; additivity property.*

DEDICATORIA

A mis padres, Stella y Miguel, quienes han estado ahí, siempre, apoyándome. Especialmente a mi madre, pues sin ella, seguramente, este documento no existiría.

A Carolina. Siempre atesoraré en mi corazón los momentos tan felices que he pasado a su lado.

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente, quiero agradecer el incondicional apoyo, afecto, respeto y tolerancia que mi familia me ha brindado a lo largo de estos años. Sin mis padres, quienes han estado acompañándome a lo largo de mi vida, no habría llegado muy lejos. Quiero agradecer especialmente a mi madre por impulsarme, animarme y apoyarme para comenzar mis estudios de posgrado. Esa decisión cambió mi vida, y estoy seguro de que no la hubiera tomado de haber estado sin ella.

De otra parte, deseo agradecer a todas esas personas que a lo largo de estos años de estudio me brindaron su más sincera amistad y con las cuales tuve y sigo teniendo la fortuna de compartir buenos momentos. Especialmente, mis sinceros agradecimientos para Julián D. Pulido y Juan S. Guerra, con quienes compartí momentos muy significativos durante los últimos años. Asimismo, deseo agradecerle a mi gran amigo de época escolar Wilson A. Gaviria, que aún después de tantos años sigue estando ahí ofreciéndome su compañía y buenos consejos.

Ha llegado el momento de agradecer a una de las mujeres más importantes en mi vida. Hace tres años, cuando recién comenzaba mis estudios de maestría, el destino me permitió encontrarme con una mujer maravillosa. Ella llegó a mi vida en aquel momento y, desde entonces, ha estado presente ofreciéndome su compañía y cariño incondicional. Estoy profundamente agradecido con Carolina por todos los momentos que hemos vivido juntos, por esa singular sensibilidad que posee, por su alegría y optimismo ante la vida, y por la influencia que ha tenido y sigue teniendo en mi apreciación del mundo.

Además, quiero agradecer a los maestros que tuve durante mi carrera. Todos y cada uno de ellos me dejaron algún aprendizaje. Especialmente, les agradezco al profesor Humberto Sarria, con quien tomé los cursos *Teoría avanzada de matrices* y *Tópicos de teoría de la Información*, por sus clases apasionadas, su amabilidad y su generosidad; al profesor Fernando Zalamea, con quien tomé el seminario de *Epistemología e historia de las matemáticas*, de quien aprendí que, no en pocas ocasiones, la belleza y grandeza de las matemáticas no se encuentra en la matemática misma, sino en sus conexiones con otros campos de la cultura; y, a la profesora Carolina Benedetti, con quien tuve la fortuna de asistir a los cursos *Combinatoria y teoría de grafos* y *Combinatoria algebraica*, no sólo porque varias de las temáticas de aquellos cursos fueron relevantes para el desarrollo del presente trabajo, sino, especialmente, por compartir su profunda convicción de que se puede construir comunidad alrededor de las matemáticas.

También agradezco al profesor Armando Reyes, quien amablemente aceptó dirigir mi trabajo final de maestría. A él, le ofrezco mis sinceros agradecimientos por darme la libertad que necesité durante el desarrollo del proyecto de investigación, por apoyar mis iniciativas matemáticas, aún cuando estas, en principio, no son su primer interés en la disciplina, así como por mantener, a lo largo del tiempo, una actitud respetuosa ante mis decisiones sobre lo que decidí incluir en este documento. Asimismo, le agradezco sus correcciones, comentarios y sugerencias durante el proceso de edición con el fin de obtener el mejor resultado, aquí presente.

Han pasado casi 10 años desde que ingresé, por primera vez, como estudiante de la Universidad Nacional. Ciertamente mi paso por la Universidad ha tenido tonos variados y mentiría si afirmase que disfrute todas y cada una de las experiencias que tuve durante mi carrera. Sin embargo, no tengo temor a equivocarme cuando expreso que el ser humano que soy ahora en gran medida se alimentó de la multitud de experiencias vividas durante los años de vida universitaria. De manera que, siempre estaré inmensamente agradecido con la Universidad por ser ese lugar donde acontecieron aquellas experiencias que contribuyeron a la formación de una visión crítica y reflexiva del mundo en el que vivimos. Especialmente, deseo agradecer a la Facultad de Ciencias por darme la oportunidad de desarrollar labores de docencia como becario auxiliar docente y, asimismo, quiero agradecer a la Dirección Académica por las experiencias tan bonitas que tuve durante el año que realicé labores de acompañamiento académico con los estudiantes de matemáticas básicas. Estas actividades no sólo contribuyeron a mi formación como profesional de las matemáticas sino, también, al desarrollo de cierta sensibilidad humana y pedagógica.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL II

ÍNDICE DE TABLAS IV

ÍNDICE DE FIGURAS V

NOTACIÓN VII

INTRODUCCIÓN VIII

1. MAYORIZACIÓN, POLITOPOS Y CLASES DE MATRICES COMBINATORIAS 1
   1.1. Mayorización 2
      1.1.1. Mayorización clásica 2
      1.1.2. Mayorización débil 5
      1.1.3. Mayorización fuerte 7
      1.1.4. Mayorización y retículos 8
   1.2. Politopos 10
      1.2.1. $\mathscr{H}$-politopos y $\mathscr{V}$-politopos 10
      1.2.2. Estructura facial de politopos 16
   1.3. Clases de matrices combinatorias 20
   1.4. Politopos de mayorización 24
      1.4.1. Permutaedros de mayorización 25
      1.4.2. Ideales principales de mayorización 27

2. POLITOPOS DE MAYORIZACIÓN 30
   2.1. Permutaedros de mayorización 30
      2.1.1. Permutaedro de mayorización 31

2.1.2. Permutaedro de mayorización débil 43
2.1.3. Permutaedro de mayorización fuerte 65
2.2. Ideales principales de mayorización 73
2.2.1. Ideal principal de mayorización 74
2.2.2. Ideal principal de mayorización débil 91
2.2.3. Ideal principal de mayorizacion fuerte 105

A. COMBINATORIA ENUMERATIVA 113

B. CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y RETÍCULOS 118

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO 126

BIBLIOGRAFÍA 128

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Caras de $M((2,1))$. 32

2.2. Caras maximales de $M((3,2,1))$. 34

2.3. Caras de $M((3,2,1))$. 35

2.4. Caras maximales de $M^w((2,1))$. 45

2.5. Caras de $M^w((2,1))$. 46

2.6. Caras maximales de $M^w((3,2,1))$. 48

2.7. Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 1) 49

2.8. Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 2) 50

2.9. Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 3) 51

2.10. Caras de $\mathbb{M}((2,1))$. 75

2.11. Caras maximales de $\mathbb{M}((3,2,1))$ 76

2.12. Caras de $\mathbb{M}((3,2,1))$. 76

2.13. Caras maximales de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ 77

2.14. Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte1) 78

2.15. Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte 2) 78

2.16. Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte 3) 79

2.17. Caras maximales de $\mathbb{M}^w((2,1))$ 92

2.18. Caras de $\mathbb{M}^w((2,1))$ 93

2.19. Caras maximales de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ 93

2.20. Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 1) 94

2.21. Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 2) 95

2.22. Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 3) 95

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Imagen tomada del trabajo de P.H. Schoute, 1911 VIII

1.1. El cubo C_3 y el octaedro $C_3^{\triangle}$. 13

1.2. El 2-simplex canónico $\triangle_2$ en $\mathbb{R}^3$. 13

1.3. C_2^u, el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ 18

1.4. $\mathscr{L}(C_2^u)$, retículo de caras del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ 19

1.5. $G(C_3)$, el grafo de un 3-hipercubo 20

1.6. Una proyección de $\mathscr{P}_3$ en $\mathbb{R}^3$ 21

2.1. $M((2,1))$, permutaedro de mayorización asociado con $(2,1)$. 32

2.2. $\mathscr{L}(M((2,1)))$, retículo de caras de $M((2,1))$. 32

2.3. $\Pi_2 \cup \{\hat{0}\}$, retículo de particiones ordenadas de $[2]$ con $\{\hat{0}\}$. 33

2.4. $M((3,2,1))$, permutaedro de mayorización asociado con $(3,2,1)$. 33

2.5. $\mathscr{L}(M((3,2,1)))$, retículo de caras de $M((3,2,1))$. 34

2.6. $\Pi_3 \cup \{\hat{0}\}$, retículo de particiones de $[3]$ con $\hat{0}$. 36

2.7. $M^w((2,1))$, permutaedro de mayorización débil asociado con $(2,1)$. 44

2.8. $G(M^w((2,1)))$, grafo del politopo $M^w((2,1))$. 44

2.9. $M^w((3,2,1))$, permutaedro de mayorización débil asociado con $(3,2,1)$. 45

2.10. $G(M^w((3,2,1)))$, grafo del politopo $M^w((3,2,1))$. 47

2.11. $Cad([2])$, retículo de cadenas anidadas basadas en $[2]$. 58

2.12. $M^s((2,1))$, permutaedro de mayorización fuerte asociado con $(2,1)$. 67

2.13. $M^s((3,2,1))$, permutaedro de mayorización fuerte asociado con $(3,2,1)$. 68

2.14. $\mathbb{M}((2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(2,1)$. 74

2.15. $\mathbb{M}((3,2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(3,2,1)$. 75

2.16. $\mathbb{M}((4,3,2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(4,3,2,1)$. 77

2.17. $Bip([2])$, retículo de biparticiones ordenadas sobre $[2]$. 85

2.18. $\mathbb{M}^w((2,1))$, ideal principal de mayorización débil asociado con $(2,1)$. 92

2.19. $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, ideal principal de mayorización débil asociado con $(3,2,1)$. 94

2.20. $\mathbb{M}^s((2,1))$, ideal principal de mayorización fuerte asociado con $(2,1)$. 105

2.21. $\mathbb{M}^s((3,2,1))$, ideal principal de mayorización fuerte asociado con $(3,2,1)$. 106

B.1. Diagrama de Hasse de $\mathbb{B}_3$. 119

B.2. Diagrama de Hasse de $\tilde{\Pi}_3$. 120

B.3. Diagrama de Hasse de Π_3. 120

NOTACIÓN

Este espacio lo destinamos a establecer el significado de algunos símbolos y expresiones que usaremos a lo largo del documento, los cuales pueden no ser de uso generalizado y, sin embargo, nosotros ocasionalmente utilizamos sin definir de manera explícita.
El conjunto de los números reales no negativos y de los números reales positivos, los notaremos mediante los símbolos $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_{++}$, respectivamente. En concordancia con esto, definimos los conjuntos $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}_+, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ y $\mathbb{R}^n_{++} := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}_{++}, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$, los cuales corresponden a los elementos de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son números reales no negativos y números reales positivos, respectivamente. De otra parte, si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $x_{[i]}$ es la **i-ésima componente más grande de** x; por ejemplo, para el vector $(3,1,2) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$, mientras que, $x_{[1]} = 3$, $x_{[2]} = 2$ y $x_{[3]} = 1$. Si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$, diremos que x es un **vector entero**. Si las componentes de x satisfacen $x_1 \geq \cdots \geq x_n$, entonces diremos que x es un **vector monótono**. De manera que, el vector $x_{\downarrow} := (x_{[1]},\ldots,x_{[n]})$ es siempre un vector monótono. Los elementos introducidos antes motivan la definición de los conjuntos $\mathbb{D}^n := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n\}$, $\mathbb{D}^n_+ := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$ y $\mathbb{D}^n_{++} := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n > 0\}$, los cuales serán muy importantes a lo largo de nuestro trabajo. Para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, el vector con la i-ésima componente igual a 1 y el resto de componentes iguales a 0, lo notaremos e_i. El vector con todas sus componentes iguales a 1 lo denotaremos por $\vec{1}$ y, el vector con todas sus componentes iguales a 0 lo denotaremos por $\vec{0}$. En cuanto a funciones, diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **creciente**, si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$, y que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **convexa**, si satisface la desigualdad $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, para cada $\lambda \in [0,1]$. Adicionalmente, definimos la función real $u^+ := \text{máx}\{u, 0\}$. A lo largo del documento, notaremos el conjunto $\{1,2\ldots,n\}$ mediante el símbolo $[n]$ y, al **grupo de permutaciones de** $[n]$ lo notaremos S_n. Asimismo, el símbolo Π_n denotará el **poset de particiones ordenadas de** $[n]$. La relación de cobertura en un retículo la simbolizaremos con $\lessdot$. Mediante $\hat{0}$ notaremos el **elemento mínimo de un retículo**, de manera que, $\Pi_n \cup \{\hat{0}\}$ es el retículo de particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$. Los **números de Stirling de segunda especie** son el conjunto de números simbolizados $S(n,k)$, donde n es un número natural y $k \in \{0,1\ldots,n\}$, los cuales cuentan el número de particiones no ordenadas de $[n]$ con k bloques. Finalmente, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos disyuntos dos a dos, su unión la representaremos mediante $\sqcup_{i\in I} A_i$.

INTRODUCCIÓN

En las lineas que siguen vamos a explorar algunos aspectos relacionados con el tema principal de este documento, a saber, los politopos de mayorización, con el único e indudablemente ambicioso propósito de provocar que el incauto que se acerque a este documento, se sumerja en la lectura del mismo. Vamos a considerar dos elementos: (i) algunos motivos que fueron dando forma al proyecto de investigación, y (ii) un panorama general de lo que podrá encontrarse a lo largo de las páginas que conforman este texto.

Quizá uno de los politopos más estudiados es el permutaedro en $\mathbb{R}^n$, simbolizado $\mathscr{P}_{n-1}$, el cual fue aparentemente investigado por vez primera por el matemático alemán P.H. Schoute en el año 1911, véase [Sch11]. La imagen que presentamos a continuación ilustra cuatro poliedros en $\mathbb{R}^3$; el último de ellos corresponde a una proyección de $\mathscr{P}_4$ en el espacio tridimensional. El

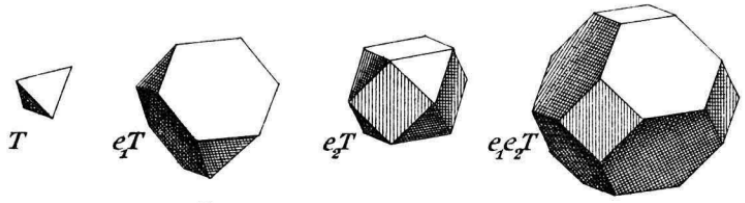


Figura 1: Imagen tomada del trabajo de P.H. Schoute, 1911

permutaedro $\mathscr{P}_{n-1}$ se define como la envolvente convexa de todas las permutaciones del vector $(1,2,\ldots,n)$; estas justamente son sus vértices. La dimensión de $\mathscr{P}_{n-1}$ es $n-1$, razón por la cual, es posible visualizar $\mathscr{P}_4$. Sin embargo, ¿qué es lo que nos resulta tan fascinante de $\mathscr{P}_{n-1}$? Hay varias cosas. Por ejemplo, la sencillez con la cual puede ser descrito como $\mathscr{V}$-politopo es una de ellas, pero lo que definitivamente resulta asombroso es la descripción combinatoria que tiene su retículo de caras mediante las particiones ordenadas de $[n]$, la cual constituye un resultado clásico sobre el permutaedro, que afirma la existencia de una correspondencia biyectiva entre las k-caras de $\mathscr{P}_{n-1}$ y las particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$. Indagar por esta correspondencia, entender en cuáles elementos está basada, buscar maneras de justificarla, conforman un primer motivo para nuestro trabajo, y en concordancia con este, iniciamos una búsqueda bibliográfica tratando de rastrear la primera vez que apareció este resultado y, asimismo, estudiar detalladamente las diversas maneras de justificarlo que fuimos encontrando. Según Billera lo menciona en [BS96], el resultado puede ser encontrado en *Polytopes, Graphs and Optimization*, véase [EKK84], aunque de manera explícita, puede ser encontrado en *Homotopy properties of*

greedoids, véase [BKL85]. A la primera publicación mencionada, que corresponde al año 1984, lamentablemente no pudimos acceder, mientras que en la segunda, del año 1985, encontramos una demostración basada en optimización lineal, donde caracterizan el retículo de caras de $\mathscr{P}_{n-1}$ en términos del retículo de cadenas anidadas ascendentes de subconjuntos propios no vacíos de $[n]$, que resulta isomorfo al retículo de las particiones ordenadas de $[n]$. Esta prueba, en particular, tiene una fuerte influencia en el lenguaje que podemos encontrar a lo largo del capítulo 2 de nuestro trabajo. A su vez, Barvinok presentó una prueba similar a la ya mencionada en el año 2002, véase [Bar02]. De su parte, Billera y Sarangarajan exhibieron una prueba en [BS96], la cual, aunque basada en funciones supermodulares, permite apreciar la presencia de las cadenas anidadas que aparecieron en las mencionadas pruebas. Algo que resaltamos de las demostraciones consultadas, es que en ninguna de ellas se usó el hecho de que $\mathscr{P}_{n-1}$ fuese un politopo simple para entender su retículo de caras, al menos no de manera explícita, razón por la cual, una de las primeras tareas que abordamos en nuestro trabajo fue la construcción de una descripción de las caras de $\mathscr{P}$ fuertemente basada en la simplicidad de este politopo.

Antes de hablar del segundo motivo, dedicaremos algunas líneas a clarificar el trasfondo de las acciones que emprendemos en nuestro trabajo, el cual, justamente alude a un resultado que relaciona la propiedad de ser simple de un politopo con la descripción de sus caras. Más exactamente, si P es un n-politopo simple, entonces existe una correspondencia biyectiva entre sus $(n-k)$-caras y la intersección de k caras maximales no vacías. El capítulo 1, entre otras cosas, aporta elementos que clarifican este resultado. De momento, notemos que esta afirmación nos ofrece una ruta de acción para el estudio de la estructura facial de politopos posiblemente simples, la cual, de hecho, organiza la estructura del capítulo 2, capítulo principal de nuestro trabajo que hemos llamado *Politopos de mayorización*. Una manera de expresar tal ruta de acción, en presencia de un politopo P, podría ser la siguiente:

(1) *Paso 1:* Encontrar o caracterizar los vértices de P, lo cual podemos realizar explorando la descripción de P como $\mathscr{H}$-politopo, o, a través de funcionales lineales.

(2) *Paso 2:* Calcular la dimensión d de P, para lo cual podemos apoyarnos en el concepto de independencia afín.

(3) *Paso 3:* Demostrar que P es efectivamente simple, lo que implicaría mostrar que cada vértice está en d caras maximales, o también, mostrar que cada vértice es incidente a d aristas. La elección de cual estrategia usar depende de los conocimientos que tengamos sobre las caras maximales o las aristas de P.

(4) *Paso 4:* Describir las caras maximales y caracterizar cuándo la intersección de un par de estas es no vacía.

(5) *Paso 5:* Caracterizar las intersecciones no vacías de k caras maximales para, posteriormente, poner estas intersecciones en biyección con algún objeto combinatorio conocido o con descripción sencilla.

El esquema general esbozado a través de los anteriores pasos es el que utilizamos para estudiar los retículos de caras de nuestros politopos de mayorización.

El segundo motivo, sin duda alguna, agrupa los conceptos de mayorización, en vista de que a partir de ellos definimos nuestros objetos de estudio. Si $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y suponemos $x_1>\cdots>x_n>0$ y $y_1>\cdots>y_n>0$, entonces x está mayorizado débilmente por y, si se cumplen las desigualdades $\sum_{i=1}^{k}x_1\leq\sum_{i=1}^{k}y_i$, para cada $k\in[n]$; si, además, se satisface la igualdad $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$, decimos que x está mayorizado por y y, si se satisfacen las desigualdades $\frac{x_1}{y_1}\leq\frac{x_2+\cdots+x_n}{y_2+\cdots+y_n}$, $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\leq\frac{x_3+\cdots+x_n}{y_3+\cdots+y_n}$,$\ldots$, $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n}\leq 1$, afirmaremos que x está mayorizado fuertemente por y, circunstancias que simbolizamos mediante $x\preceq^{w}y$, $x\preceq y$ y $x\ll y$, respectivamente. El concepto de mayorización fue introducido por Hardy, Littlewood y Pólya en el año 1934, véase [HLP34], y fue estudiado, junto con el concepto de mayorización débil, en la monumental obra *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications* de Marshall, Olkin y Arnold, véase [MOA11], la cual presentó tres caracterizaciones clásicas de cada uno de estos conceptos, que en este trabajo presentamos en el capítulo 1. De otra parte, el concepto de mayorización fuerte fue introducido recientemente en el año 2016 en [Rov16], trabajo en el cual se presentó una generalización de una desigualdad conocida como la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya. En [MOA11], se formuló el teorema de Rado, el cual afirma que $x\preceq y$ si, y sólo si, x está en la envolvente convexa de las permutaciones de y, junto con el teorema de Mirsky, que dice que $x\preceq y$ si, y sólo si, x está en la envolvente convexa del conjunto $\{(\eta_1 y_{\pi_1},\ldots,\eta_n y_{\pi_n})\mid\pi\in S_n;\eta_i\in\{0,1\},i\in[n]\}$. Este último resultado lo podemos interpretar afirmando que el politopo $\{x\in\mathbb{R}^n_+\mid x\preceq^{w}y\}$ es generado por el conjunto $\{(\eta_1 y_{\pi_1},\ldots,\eta_n y_{\pi_n})\mid\pi\in S_n;\eta_i\in\{0,1\},i\in[n]\}$, el cual resulta no ser minimal y, en consecuencia, aparece el problema de encontrar los vértices de $\{x\in\mathbb{R}^n_+\mid x\preceq^{w}y\}$. De otra parte, Roventa en su trabajo no caracterizó el concepto de mayorización fuerte, razón por la cual, encontrar una caracterización matricial o geométrica se nos mostraba como objetivo en este trabajo. Los elementos anteriores dan contenido al segundo motivo de nuestra investigación.

La discusión realizada en el párrafo anterior sugiere definir los conjuntos $M(v):=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x\preceq v\}$, $M^{w}(v):=\{x\in\mathbb{R}^n_+\mid x\preceq^{w}v\}$ y $M^{s}(v):=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x\ll v\}$, donde $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, satisfaciendo $v_1>\cdots>v_n>0$, es un vector fijo. Estos conjuntos son politopos que llamaremos permutaedros, y los cuales estudiamos en la primera parte del capítulo 2. En relación con el primero de estos politopos, Dahl [Dah10] formuló los dos resultados que comentamos a continuación:

(a) El politopo $M(v)$ satisface la igualdad $M(v+\hat{v})=M(v)+M(\hat{v})$, conocida como propiedad de aditividad. En [Dah10] se presentó una prueba usando funciones submodulares y polimatroides, y otra usando mayorización.

(b) Si el conjunto $\mathscr{A}(R,S)$ simboliza las $(0,1)$-matrices con vector suma fila R y vector suma columna S, entonces $\mathscr{A}(R,S)\neq\emptyset$ si, y sólo si, $S\preceq R^{*}$. En [Dah10] probaron este hecho, conocido como teorema de Gale-Ryser, usando una propiedad llamada aditividad entera, y dieron inicio a una nueva clase de matrices combinatorias llamadas $\mathscr{A}(B,S)$, las cuales, aunque no trabajamos aquí, vale la pena mencionar porque sugieren una estrecha conexión entre matrices combinatorias y politopos de mayorización.

El estudio de las propiedades de aditividad en los politopos de mayorización, junto con la exploración de conexiones con matrices combinatorias, configuran el tercer motivo de nuestro

trabajo. En el capítulo 2 presentamos pruebas de la aditividad, no encontradas en la literatura consultada, que se basan en politopos de Newton y, asimismo, presentamos una biyección entre los vértices de $M^w(v)$ y cierto subconjunto de las matrices $\mathscr{A}(R,S)$, la cual extiende la conocida biyección entre permutaciones de un vector y matrices de permutación.

En el año 2001, Dahl publicó un trabajo donde investigó el ideal principal de mayorización en conexión con optimización, véase [Dah01], en el cual, entre otras cosas, se describió el 1-esqueleto del politopo $\mathbb{M}(b) := M(b) \cap \mathbb{D}^n$, donde $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ satisface $b_1 > \cdots > b_n > 0$, valiéndose para ello de un retículo llamado retículo de particiones intervalo. Este trabajo nos plantea, en particular, la tarea de abordar una descripción combinatoria de toda la estructura facial de $\mathbb{M}(b)$ y, en concordancia con lo dicho a lo largo de los párrafos anteriores, por un lado, definir los ideales de mayorización $\mathbb{M}^w(b) := M^w(b) \cap \mathbb{D}^n$ y $\mathbb{M}^s(b) := M^s(b) \cap \mathbb{D}^n$ y, por otro, abordar el estudio de sus caras e investigar propiedades como la aditividad. Así pues, los ideales principales de mayorización son nuestro cuarto motivo para la investigación.

Después de la exposición de motivos, vamos a trazar un panorama de lo que encontrará el lector o lectora a lo largo de este documento.

En el capítulo 1 abordamos, en primer lugar, las caracterizaciones de la mayorización y mayorización débil, los resultados más relevantes de [Rov16] referentes al concepto de mayorización fuerte, y unos resultados que exploran aspectos reticulares de la mayorización; enseguida, presentamos conceptos y resultados de la teoría elemental de politopos acompañando la exposición con ejemplos clásicos y comentarios. Posteriormente, destinamos un espacio para introducir la clase de matrices combinatorias $\mathscr{A}(R,S)$, mostrando en la parte final una prueba del teorema de Gale-Ryser y un algoritmo para construir una matriz en $\mathscr{A}(R,S)$. Finalmente, en la última parte del capítulo, discutimos algunos resultados relativos a permutaedros e ideales de mayorización que tienen particular interés para las ideas que dieron origen a los objetivos de nuestra investigación.

En el capítulo 2, presentamos los resultados principales sobre politopos de mayorización, los cuales distribuimos en dos partes; la primera de ellas, dedicada a los permutaedros de mayorización, mientras que en la segunda nos enfocamos en los ideales principales de mayorización. En cada una de las secciones empezamos con algunos ejemplos desarrollados en detalle para motivar la teoría posterior. A continuación, comentamos brevemente lo que el lector o lectora podrá encontrarse en cada una de estas partes:

(1) *Parte 1:* estudios sobre los permutaedros de mayorización, de mayorización débil y de mayorización fuerte.

   (a) Con respecto al permutaedro de mayorización $M(v)$, hacemos una demostración de la bien conocida caracterización de su retículo de caras, pero apoyándonos expresamente en la simplicidad de este politopo, la cual, aunque se inspira en las pruebas consultadas, ofrece un enfoque alternativo de justificación y, en el proceso, caracterizamos de manera explícita los problemas de optimización lineales sobre $M(v)$ que tienen única solución o cuya solución es una arista de $M(v)$. Ofrecemos

una prueba alternativa de la propiedad aditiva basada en politopos de Newton, la cual no encontramos en la literatura consultada.

(b) Describimos combinatoriamente la estructura facial de $M^w(v)$ mediante un retículo cuyos objetos recuerdan a las cadenas anidadas, que llamamos $Cad([n])$, y con base en esta descripción, calculamos las componentes del f-vector de $M^w(v)$. Con el enfoque de politopos de Newton, establecemos una prueba de la aditividad de $M^w(v)$. La únicas referencias bibliográficas encontradas sobre $M^w(v)$ son aquellas que presentan el teorema de Mirsky, de manera que, los resultados aquí mostrados, amplían los conocimientos sobre este politopo.

(c) Establecemos las caracterizaciónes matricial y geométrica del concepto de mayorización fuerte que no fueron trabajadas en [Rov16], donde apareció por primera vez el concepto. En consecuencia, estos resultados contribuyen a una mejor comprensión de este concepto. De manera adicional, demostramos la igualdad $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$, la cual significa que el permutaedro de mayorización fuerte es una pirámide del permutaedro de mayorización y, con base en este resultado, caracterizamos su retículo de caras y calculamos los elementos de su f-vector.

(2) *Parte 2:* estudios en torno a los ideales de mayorización.

(a) Aprovechando la propiedad de ser simple que tiene $\mathbb{M}(b)$, caracterizamos la estructura facial de este politopo mediante un retículo similar al de las particiones, denominado $Bip([n])$. Con base en lo anterior, calculamos las componentes del f-vector de $\mathbb{M}(b)$. Aunque usamos el lenguaje de [Dah01], la prueba que ofrecemos de la caracterización de los vértices mediante vectores promedio es distinta a la presentada allí; además, nuestro propósito es describir la estructura facial de $\mathbb{M}(b)$ y no solamente su 1-esqueleto. También presentamos una prueba de la aditividad de $\mathbb{M}(b)$ vía politopos de Newton.

(b) En la parte inicial, dedicada a $\mathbb{M}^w(b)$, hacemos un estudio similar al realizado para $\mathbb{M}(b)$; de hecho, la descripción del retículo de caras de $\mathbb{M}^w(b)$ está soportada nuevamente en $Bip([n])$. Mostramos, asimismo, que $\mathbb{M}(b)$ y $\mathbb{M}^w(b)$ son combinatoriamente equivalentes a hipercubos.

(c) Básicamente, para el ideal principal de mayorización fuerte justificamos la igualdad $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, la cual establece que este politopo es una pirámide del ideal de mayorización. Al final, calculamos las componentes del f-vector de $\mathbb{M}^s(b)$ basada en su caracterización geométrica.

Finalmente, en la última parte, mostramos las conclusiones de nuestro trabajo y, asimismo, esbozamos posibles empresas de investigación que podrían llevarse a cabo en el futuro.

CAPÍTULO 1

MAYORIZACIÓN, POLITOPOS Y CLASES DE MATRICES COMBINATORIAS

El presente capítulo puede interpretarse como un espacio para establecer los preliminares necesarios en el estudio que emprendemos en el siguiente capítulo, el cual es sobre politopos de mayorización. Sin embargo, además del propósito ya mencionado, buscamos dar ciertas pistas o indicios, ciertamente insuficientes por sí solos, de cómo llegamos a los objetos y preguntas de investigación de lo que nos ocupamos posteriormente. Por esta razón, invitamos al lector o lectora a rastrear en las páginas que siguen algunas fuentes de inspiración de los objetos y problemas en torno a los cuales gira nuestro estudio. De nuestra parte, tratamos de sugerir, e incluso a veces somos explícitos, aquellos elementos que fueron dando forma a nuestro proyecto de investigación.

El capítulo lo hemos dividido en cuatro partes. Inicialmente, en la primera parte, exploramos los tres conceptos de mayorización que estudiamos en este trabajo, a saber, (i) el concepto clásico de mayorización, (ii) el concepto de mayorización débil, y (iii) el concepto de mayorización fuerte, enfocándonos en las distintas maneras de ver estos conceptos; adicionalmente, en el último apartado, tratamos aspectos reticulares del concepto de mayorización. Después, en la segunda parte, presentamos una discusión sobre conceptos y resultados de la teoría elemental de politopos, procurando mostrar, de manera explícita, las herramientas más relevantes en nuestra investigación, y presentando varios ejemplos interesantes. Enseguida, en la tercera parte, introducimos un conjunto de matrices, denotado $\mathscr{A}(R,S)$, consistente de $(0,1)$-matrices cuyas filas y columnas tienen sumas fijadas previamente; en particular, presentamos una prueba del teorema de Gale-Ryser, resultado que establece condiciones suficientes y necesarias para que $\mathscr{A}(R,S)$ sea no vacío. Finalmente, en la cuarta y última parte, comentamos varios de los resultados significativos sobre politopos de mayorización que fueron motivantes para la labor que emprendemos en este trabajo.

1.1. MAYORIZACIÓN

En esta parte del capítulo nos proponemos presentar los tres conceptos de mayorización presentes a lo largo del trabajo: mayorización (clásica), mayorización débil y mayorización fuerte. En [MOA11] se estudiaron ampliamente los dos primeros conceptos, no solamente sus aspectos teóricos, sino también, varias aplicaciones en otros campos de la matemática y la estadística. Sin embargo, para nuestros propósitos es suficiente presentar las caracterizaciones matricial, geométrica y usando funciones convexas que estos conceptos tienen; por consiguiente, las dos primeras secciones las dedicamos a estos aspectos. De otra parte, el concepto de mayorización fuerte fue introducido recientemente en [Rov16], razón por la cual, en la sección dedicada a la mayorización fuerte, nos enfocamos en aquellos resultados de [Rov16] que son relevantes para lo que haremos más adelante.

1.1.1. MAYORIZACIÓN CLÁSICA

En esta sección nos proponemos, en primera instancia, presentar el concepto de mayorización, el cual fue establecido por Hardy, Littlewood y Pólya en 1934 en [HLP34]. Posteriormente, presentamos algunos resultados sencillos que nos permitirán, finalmente, caracterizar el concepto de tres maneras distintas: (1) una caracterización matricial usando matrices doble estocásticas, (2) una caracterización mediante funciones continuas y convexas y (3) una caracterización geométrica.

DEFINICIÓN 1.1 ([MOA11], DEFINICIÓN 1.A.1.). Si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $x_{[i]}$, $y_{[i]}$ denotan las i-ésimas componentes más grandes de x y y, respectivamente, entonces decimos que x **es mayorizado por** y, lo cual denotamos $x \preceq y$, si se satisfacen las desigualdades $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, para cada $k \in [n]$, teniéndose la igualdad para $k = n$.

DEFINICIÓN 1.2 ([MOA11], DEFINICIÓN 2.A.1.). Una matriz $P = (p_{ij})$ de tamaño $n \times n$ es **doble estocástica** si $p_{ij} \geq 0$, $i, j \in [n]$, y se satisfacen las igualdades $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, $j \in [n]$, y $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i \in [n]$, es decir, si sus entradas son no negativas y la suma por filas y columnas es 1.

Si $\vec{1}$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ con todas sus componentes iguales a 1, entonces una manera alternativa de expresar que $P = (p_{ij})$ es una matriz doble estocástica consiste en afirmar que las entradas de P son no negativas y se cumplen las igualdades $\vec{1}P = \vec{1}$ y $P\vec{1}^t = \vec{1}^t$. De esta manera, resulta sencillo verificar que el producto de dos matrices doble estocásticas es una matriz doble estocástica. De otra parte, un subconjunto notable de las matrices doble estocásticas de tamaño $n \times n$ lo constituyen las matrices de permutación de orden n, el cual denotamos por Ω_n. El teorema de Birkhoff, que presentamos a continuación, establece que las matrices doble estocásticas de tamaño $n \times n$ conforman, precisamente, la envolvente convexa de Ω_n.

PROPOSICIÓN 1.1 (TEOREMA DE BIRKHOFF; [MOA11], TEOREMA 2.A.2.). *El conjunto de matrices doble estocásticas de tamaño $n \times n$ es la envolvente convexa del conjunto de matrices de permutación.*

Existe una estrecha relación entre el concepto de mayorización y las matrices doble estocásticas; de hecho, el siguiente resultado nos da una caracterización de la propiedad de ser doble estocástica mediante mayorización.

PROPOSICIÓN 1.2 ([MOA11], TEOREMA 2.A.4.). *Una matriz $P = (p_{i,j})$ de tamaño $n \times n$ es doble estocástica si, y sólo si, $yP \preceq y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.*

En seguida, definiremos el concepto de T-transformación de un vector y presentamos un resultado demostrado por vez primera en 1903 por el matemático escocés Robert F. Muirhead, el cual afirma que todo vector mayorizado por un vector y se puede obtener mediante un número finito de T-transformaciones.

DEFINICIÓN 1.3 ([MOA11], P. 32). Una aplicación lineal se denomina una **T-transformación**, si la matriz de esta aplicación es del tipo $T = \lambda I + (1-\lambda)Q$, donde $\lambda \in [0,1]$ y Q es una matriz de permutación que solamente intercambia dos coordenadas, es decir, xT tiene la forma $xT = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j + (1-\lambda)x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k + (1-\lambda)x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

PROPOSICIÓN 1.3 ([MOA11], LEMA 2.B.1.). *Si $x \preceq y$ entonces x puede ser obtenido de y mediante la aplicación de un número finito de T-transformaciones.*

La siguiente proposición nos da la primera caracterización del concepto de mayorización, la cual está basada en matrices doble estocásticas y cuya demostración resulta de manera sencilla apoyándonos en los resultados previos.

PROPOSICIÓN 1.4 ([MOA11], TEOREMA 2.B.2.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x \preceq y$ si, y sólo si, $x = yP$ para alguna matriz doble estocástica P.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(⇐) Si $x = yP$ para alguna matriz doble estocástica, entonces por la proposición 1.2, dado que P es doble estocástica, se sigue que $yP \preceq y$ y, en consecuencia, $x \preceq y$.

(⇒) Si $x \preceq y$ entonces, por la proposición 1.3, x puede obtenerse de y mediante la aplicación de un número finito de T-transformaciones. Por tanto, $x = yT_1 \cdots T_k$ donde $T_j = \lambda_j I + (1-\lambda_j)Q_j$, $j \in [k]$, son las matrices correspondientes a tales T-transformaciones. De manera que $x = yP$, siendo $P = T_1 \cdots T_k$ una matriz doble estocástica al ser el producto de matrices doble estocásticas.

□

A continuación, establecemos una segunda caracterización del concepto de mayorización basada en funciones continuas y convexas.

TEOREMA 1.5 ([MOA11], TEOREMA 4.B.1.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x \preceq y$ si, y sólo si, para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y convexa se satisface la desigualdad $\sum_{i=1}^n g(x_i) \leq \sum_{i=1}^n g(y_i)$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \preceq y$.

(⇒) Vamos a abordar la prueba de esta implicación mediante un par de casos:

(1) **Caso particular:** Supongamos que x puede ser obtenido a partir de y mediante la aplicación de una sola T-transformación. Es decir: $x = yT$ siendo $T = \lambda I + (1-\lambda)Q$ la matriz de una T-transformación. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa y

supongamos que Q es una matriz de permutación que intercambia las entradas j y k. Tenemos que

$$x = yT = (y_1, \ldots, y_{j-1}, \lambda y_j + (1-\lambda)y_k, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, \lambda y_k + (1-\lambda)y_j, y_{k+1}, \ldots, y_n), \tag{1.1}$$

y además, se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) &= \sum_{i\neq j,k}^{n} g(x_i) + g(x_j) + g(x_k) \\ &= \sum_{i\neq j,k}^{n} g(y_i) + g(\lambda y_j + (1-\lambda)y_k) + g(\lambda y_k + (1-\lambda)y_j) \\ &\leq \sum_{i\neq j,k}^{n} g(y_i) + \lambda g(y_j) + (1-\lambda)g(y_k) + \lambda g(y_k) + (1-\lambda)g(y_j) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i),\end{aligned}$$

donde, en la segunda igualdad usamos la identidad 1.1 y la desigualdad la tenemos debido a que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y convexa.

(2) **Caso general:** Si $x \preceq y$ entonces, por la proposición 1.3, x puede obtenerse de y mediante la aplicación de un número finito de T-transformaciones. De modo que, tenemos que $x = yT_1 \cdots T_k$, donde $T_j = \lambda_j I + (1-\lambda_j)Q_j$, $1 \leq j \leq k$, son las matrices correspondientes a tales T-transformaciones. Definiendo $x_j = yT_1 \cdots T_{k-j}$, $0 \leq j \leq k-1$, y $x_k = y$, tenemos que $x = x_0 \preceq x_1 \preceq \cdots \preceq x_{k-1} \preceq x_k = y$, en virtud de la proposición 1.2, y notamos que si $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ entonces x_j y x_{j+1} difieren en solamente un par de coordenadas, ya que $x_{j+1}T_{k-j} = x_j$ siendo T_{k-j} una matriz de una T-transformación. Aplicando el caso anterior a las parejas consecutivas de la cadena $x = x_0 \preceq x_1 \preceq \cdots \preceq x_{k-1} \preceq x_k = y$ obtenemos que la desigualdad $\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$ es válida para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y convexa.

($\Leftarrow$) Para $k \in \{1, \ldots, n\}$ fijo, definimos la función real $g(z) = (z - y_{[k]})^+$, siendo $u^+ = \max\{u, 0\}$, con $u \in \mathbb{R}$. Dado que $y_{[j]} \geq y_{[k]}$, para $1 \leq j \leq k$, y $y_{[j]} \leq y_{[k]}$, para $k \leq j \leq n$, entonces $g(y_{[j]}) = y_{[j]} - y_{[k]}$ si $1 \leq j \leq k$ y, además, $g(y_{[j]}) = 0$ si $k \leq j \leq n$. En consecuencia, se satisface la igualdad $\sum_{i=1}^{n} g(y_{[i]}) = \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} - k y_{[k]}$. En vista de que g es continua y convexa se cumple que $\sum_{i=1}^{n} g(y_{[i]}) \geq \sum_{i=1}^{n} g(x_{[i]})$, lo que junto con $g(z) \geq 0$ y $g(z) \geq z - y_{[k]}$, nos permite deducir las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{k} y_{[i]} - k y_{[k]} = \sum_{i=1}^{n} g(y_{[i]}) \geq \sum_{i=1}^{k} g(x_{[i]}) \geq \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - k y_{[k]},$$

de donde, tenemos que $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $1 \leq k \leq n$. Finalmente, tomando $g(z) = -z$ y aplicando la hipótesis conseguimos $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i$, lo que nos muestra que $x \preceq y$.

□

La desigualdad que aparece en el teorema anterior se conoce como desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya. Sin embargo, dado que este resultado fue demostrado independientemente por el matemático serbio Jovan Karamata en el año 1932, también podemos referirnos a esta

como desigualdad de Karamata. De momento, finalizamos esta sección con la caracterización geométrica de la mayorización clásica, la cual es una sencilla consecuencia de la caracterización matricial y del teorema de Birkhoff.

PROPOSICIÓN 1.6 (TEOREMA DE RADO; [MOA11], PROPOSICIÓN 4.C.1.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x \preceq y$ si, y sólo si, x está en la envolvente convexa de las permutaciones de y.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. El teorema de Birkhoff nos dice que P es una matriz doble estocástica si, y sólo si, puede ser expresada en la forma $P = \sum_{i=1}^{n!} a_i \mathscr{P}_i$, donde $\mathscr{P}_i$, $i \in [n!]$, son las matrices de permutación de tamaño $n \times n$ y la suma que aparece arriba es una combinación convexa de tales matrices. Por la caracterización matricial, tenemos que $x \preceq y$ si, y sólo si, $x = Py$ para alguna matriz doble estocástica P si, y sólo si, $x = \sum_{i=1}^{n!} a_i (y\mathscr{P}_i)$ si, y sólo si, x está en la envolvente convexa de las permutaciones de y. □

1.1.2. MAYORIZACIÓN DÉBIL

El objetivo que nos proponemos en esta sección es introducir el concepto de mayorización débil y, posteriormente, establecer algunas caracterizaciones de este concepto similares a las que fueron presentadas en la sección anterior para el concepto de mayorización.

DEFINICIÓN 1.4 ([MOA11], DEFINICIÓN 1.A.2.). Si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces decimos que x **es mayorizado débilmente por** y, lo cual denotamos $x \preceq^w y$, si se satisfacen las desigualdades $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $k \in [n]$.

De la definición anterior, es claro que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x \preceq y$, entonces $x \preceq^w y$. De otra parte, en la sección anterior vimos que el concepto de mayorización y las matrices doble estocásticas están estrechamente relacionados. No obstante, para el concepto de mayorización débil, la relación se establece con una familia de matrices denominadas matrices doble subestocásticas, las cuales definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.5 ([MOA11], P. 36). Una matriz $P = (p_{i,j})$ se denomina **matriz doble subestocástica**, si $p_{i,j} \geq 0$, $i, j \in [n]$, y se satisfacen las igualdades $\vec{1}P \leq \vec{1}$ y $P\vec{1}^t \leq \vec{1}^t$, es decir, P es doble subestocástica si sus entradas son no negativas y la suma de sus filas y columnas es menor o igual a 1.

Claramente, toda matriz doble estocástica es una matriz doble subestocástica. Los siguientes resultados nos mostrarán cómo, a partir de una matriz doble subestocástica, podemos obtener una matriz doble estocástica.

PROPOSICIÓN 1.7 ([MOA11], TEOREMA 2.C.1.). *Si $P = (p_{i,j})$ es una matriz doble subestocástica de tamaño $n \times n$, entonces existe una matriz doble estocástica $D = (d_{i,j})$ de tamaño $n \times n$ tal que $p_{i,j} \leq d_{i,j}$, $i, j \in [n]$.*

Demostración. Si $P = (p_{i,j})$ es una matriz doble subestocástica de tamaño $n \times n$, entonces existe una fila o columna de P cuya suma es menor que 1, de modo que, en cualquiera de los dos casos, se satisface la desigualdad $\sum_{1 \leq i,j \leq n} < n$ y, por lo tanto, existen i y j tales que $\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} < 1$ y $\sum_{l=1}^{n} p_{l,j} < 1$. De manera que, una matriz doble subestocástica tiene al menos una fila y una

columna con suma estrictamente menor que 1. Consideremos $\varepsilon = 1 - \max\{\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}, \sum_{l=1}^{n} p_{l,j}\} > 0$ y sea P_1 la matriz que se obtiene de P adicionando ε a $p_{i,j}$ y manteniendo el resto de entradas fijas, para la cual el número de filas y columnas con suma estrictamente menor que 1 ha disminuido al menos 1 con respecto al número que tenía P; además, cada entrada de P es menor o igual que la entrada correspondiente de P_1. Repitiendo el proceso anterior a lo más n veces, obtenemos una matriz doble estocástica $D = (d_{i,j})$ cumpliendo las condiciones del enunciado de la proposición. □

DEFINICIÓN 1.6 ([MOA11], P. 37). Si P es una matriz doble subestocástica de tamaño $n \times n$ con vector suma fila $R = (r_1, \ldots, r_n)$ y vector suma columna $S = (s_1, \ldots, s_n)$, entonces la matriz

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & I - D_r \\ I - D_s & P^t \end{bmatrix},$$

donde $D_r = diag(r_1, \ldots, r_n)$ y $D_s = diag(s_1, \ldots, s_n)$, es una matriz doble estocástica denominada la **aumentación** de P.

Notemos que la aumentación $\tilde{P}$ de una matriz doble subestocástica P de tamaño $n \times n$ es, por definición, una matriz de tamaño $2n \times 2n$. De otra parte, la aumentación de una matriz doble subestocástica nos permite establecer la versión del teorema de Birkhoff para matrices doble subestocásticas, resultado que fue probado por el matemático ruso Leonid Mirsky en el año 1959, véase [Mir59].

PROPOSICIÓN 1.8 ([MOA11], TEOREMA 2.C.2.). *El conjunto de matrices doble subestocásticas es la envolvente convexa del conjunto de matrices que tienen a lo más un 1 en cada fila y en cada columna y todas las demás entradas nulas.*

Demostración. Sean P una matriz doble subestocástica de tamaño $n \times n$ y $\tilde{P}$ la aumentación de P. Por el teorema de Birkhoff, tenemos que $\tilde{P} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \tilde{P}_i$, donde $\tilde{P}_i$, $i \in [k]$, son matrices de permutación de tamaño $2n \times 2n$ y la sumatoria que expresa a $\tilde{P}$ es una combinación convexa. Si P_i es la matriz obtenida de $\tilde{P}_i$ eliminando las últimas n filas y n columnas, entonces $P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i$, donde P_i para $i \in [k]$, son matrices de tamaño $n \times n$ que tienen a lo más un 1 en cada fila y en cada columna y todas las demás entradas nulas. Finalmente, es claro que la envolvente convexa del conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ que tienen a lo más un 1 en cada fila y en cada columna y todas las demás entradas nulas, está contenido en el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ doble subestocásticas, lo que completa la prueba. □

El siguiente resultado caracteriza la propiedad de ser doble subestocástica mediante el concepto de mayorización débil.

PROPOSICIÓN 1.9 ([MOA11], TEOREMA 2.C.3.). *Una matriz $P = (p_{i,j})$ de tamaño $n \times n$ es doble subestocástica si, y sólo si, $y \in \mathbb{R}^n_+$ implica que $yP \in \mathbb{R}^n_+$ y $yP \preceq^w y$.*

Los siguientes tres resultados corresponden, en su orden, a: (1) la caracterización matricial, (2) la caracterización mediante funciones continuas, crecientes y convexas, y (3) la caracterización geométrica, conocida como el teorema de Mirsky, para el concepto de mayorización débil. Las demostraciones pueden consultarse en [MOA11]; además, en el próximo capítulo, cuando

estudiemos el permutaedro de mayorización débil, haremos una demostración alternativa del teorema de Mirsky. Es más, refinaremos este resultado, reduciendo el conjunto generador del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w y\}$, donde $y \in \mathbb{R}^n_+$, que se propone en el enunciado del teorema.

PROPOSICIÓN 1.10 ([MOA11], TEOREMA 2.C.4.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ entonces $x \preceq^w y$ si, y sólo si, $x = yP$ para alguna matriz doble subestocástica P.*

PROPOSICIÓN 1.11 (TEOREMA DE TOMIĆ; [MOA11], PROPOSICIÓN 4.B.2.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x \preceq^w y$ si, y sólo si, para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, creciente y convexa se satisface la desigualdad $\sum_{i=1}^n g(x_i) \leq \sum_{i=1}^n g(y_i)$.*

PROPOSICIÓN 1.12 (TEOREMA DE MIRSKY; [MOA11], COROLARIO 2.C.5.). *Si $y \in \mathbb{R}^n_+$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w y\}$ es la envolvente convexa de los vectores de la forma $(\eta_1 y_{\pi_1}, \ldots \eta_n y_{\pi_n})$, donde π es una permutación y cada η_i es 0 o 1.*

1.1.3. MAYORIZACIÓN FUERTE

En esta sección presentaremos el concepto de mayorización fuerte, el cual fue introducido en [Rov16] en el año 2016. Uno de los resultados principales de esta publicación es una generalización de la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya. Este resultado lo mostramos, con su correspondiente demostración, en la parte final de esta sección.

DEFINICIÓN 1.7 ([ROV16], DEFINICIÓN 3.). Si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces decimos que x **es mayorizado fuertemente por** y, lo cual denotamos $x \ll y$, si se satisfacen las desigualdades $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \sum_{i=k+1}^n y_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]} \sum_{i=k+1}^n x_{[i]}$, $k \in [n-1]$, teniéndose, además, la desigualdad $\sum_{i=1}^n x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^n y_{[i]}$.

A continuación, presentamos una proposición que relaciona mayorización fuerte con mayorización débil. Por el momento, damos la idea principal de la demostración como aparece en [Rov16], aunque en el próximo capítulo tal idea la profundizaremos para lograr una mayor comprensión del concepto de mayorización fuerte mediante el concepto de mayorización clásico.

PROPOSICIÓN 1.13 ([ROV16], PROPOSICIÓN 1.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ entonces $x \ll y$ implica $x \preceq^w y$.*

Demostración. La idea de la prueba es mostrar que si $x \ll y$ entonces se cumplen las desigualdades $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \alpha \sum_{i=1}^k y_{[i]}$, $k \in [n-1]$, junto con la igualdad $\sum_{i=1}^n x_{[i]} = \alpha \sum_{i=1}^n y_{[i]}$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n}$, y, debido a que $\alpha \in [0, 1]$, se sigue inmediatamente que $x \preceq^w y$. □

COROLARIO 1.14. *Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ y $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = 1$ entonces $x \ll y$ es equivalente a $x \preceq y$.*

Demostración. Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ y $x \ll y$ entonces se tienen las desigualdades $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \alpha \sum_{i=1}^k y_{[i]}$, $k \in [n]$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n}$, y si adicionalmente $\alpha = 1$, entonces se sigue inmediatamente que $x \preceq y$. Recíprocamente, si $x \preceq y$ tenemos que $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$, $k \in [n]$, teniéndose la igualdad para $k = n$. Consideremos los siguientes casos:

(a) **Caso 1:** Si $x = \vec{0}$ o $y = \vec{0}$, como $\sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $x = \vec{0} = y$ y claramente $x \ll y$.

(b) **Caso 2:** Si $x, y \neq \vec{0}$ y $k \in [n-1]$ entonces se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]} \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} + \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]} \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \left(\sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} + \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \right) - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \left(\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} + \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \right) \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} \leq 0,
\end{aligned}$$

donde, en la primera igualdad hemos sumado $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$ y su inverso aditivo, en la segunda igualdad agrupamos convenientemente los factores y, finalmente, usamos las relaciones $\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}$, $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \leq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} > 0$, que tenemos debido a que $x \preceq y$ y $\vec{0} \neq x, y \in \mathbb{R}^n_+$. Lo anterior nos permite concluir que $x \ll y$.

□

Para terminar la sección, mostramos un resultado que generaliza la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya. Este es el teorema central demostrado en [Rov16].

PROPOSICIÓN 1.15 ([ROV16], TEOREMA 4.). *Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ son dos vectores tales que $x \ll y$ y $\alpha = \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n}$, entonces para cada función convexa $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad*

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq \frac{f(y_1)+\cdots+f(y_n)}{n} + (1-\alpha) f(0)$$

Demostración. Si $x \ll y$ entonces se tienen las desigualdades $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \alpha \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $k \in [n-1]$, junto con la igualdad $\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \alpha \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}$, donde $\alpha = \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n}$, lo cual implica que $x \preceq \alpha y$ y, aplicando la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya a la función convexa f, obtenemos que $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\alpha y_i)$. De otra parte, dado que f es convexa y $\alpha \in [0,1]$, entonces, para cada $i \in [n]$, se cumple la igualdad $f(\alpha y_i) = f(\alpha y_i + (1-\alpha)0) \leq \alpha f(y_i) + (1-\alpha) f(0)$. Como consecuencia de lo anterior, concluimos que

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leq \alpha(f(y_1)+\cdots+f(y_n)) + n(1-\alpha) f(0),$$

la cual es una expresión equivalente a la desigualdad del enunciado. □

Si en el anterior resultado anterior suponemos $\alpha = 1$, es decir $x \preceq y$, obtenemos la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya.

1.1.4. MAYORIZACIÓN Y RETÍCULOS

Los conceptos de mayorización $\preceq$ y mayorización débil $\preceq^w$, en general, no definen un orden parcial sobre $\mathbb{R}^n$ debido a que no se satisface la propiedad antisimétrica. Sin embargo, si nos

restringimos a $\mathbb{D}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$ entonces los conjuntos $(\mathbb{D}_+^n, \preceq)$ y $(\mathbb{D}_+^n, \preceq^w)$ son conjuntos parcialmente ordenados y, en consecuencia, resulta de interés estudiar algunas propiedades reticulares de estos objetos. En la presente sección presentamos un par de resultados demostrados por Bapat en [Bap91].

PROPOSICIÓN 1.16 ([BAP91], LEMA 3.). *Si $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ es un conjunto no vacío, entonces existe un único elemento $x \in \mathbb{D}_+^n$ tal que:*

(1) Si $y \in S$ entonces $x \preceq^w y$.

(2) Si $z \preceq^w y$ para todo $y \in S$ entonces $z \preceq^w x$.

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ un conjunto no vacío. Definamos $f_r(y) := \sum_{i=1}^r y_{[i]}$, para cada $r \in [n]$ y $y \in S$, y consideremos, además, $\alpha_r = \text{ínf}_{y \in S} f_r(y)$, $r \in [n]$. Dado que, para cada $y \in S$ se satisface $f_r(y) \geq f_{r-1}(y)$ entonces $\alpha_r \geq \alpha_{r-1}$, $r \in \{2, \ldots, n\}$, además, como $y_{[r-1]} \geq y_{[r]}$ para cada $r \in \{2, \ldots, n\}$, tenemos que $f_r(y) + f_{r-2}(y) \leq 2f_{r-1}(y)$ y, en consecuencia, $2\alpha_{r-1} \geq \alpha_r + \alpha_{r-2}$. Sea $x_r := \alpha_r - \alpha_{r-1}$, $r \in [n]$, donde asumimos que $\alpha_0 = 0$. Claramente, se satisfacen las desigualdades $x_r \geq 0$ y $x_r \leq x_{r-1}$; por consiguiente, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}_+^n$. Veamos que x satisface (1) y (2) del enunciado:

(1) Si $k \in [n]$ entonces se satisfacen las siguientes relaciones

$$\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \alpha_k = \text{ínf}_{y \in S} f_k(y) \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}.$$

Por lo tanto, concluimos que $x \preceq^w y$ para cada $y \in S$.

(2) Si $z \preceq^w y$ para todo $y \in S$, entonces $\sum_{i=1}^k z_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$ y, en consecuencia, $\sum_{i=1}^k z_{[i]} \leq \alpha_k = \sum_{i=1}^k x_i$, razón por la cual, concluimos que $z \preceq^w x$.

□

El anterior resultado nos dice que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{R}_+^n$ tiene ínfimo en el conjunto parcialmente $(\mathbb{D}_+^n, \preceq^w)$; este elemento lo denotamos mediante $\wedge S$. El siguiente resultado garantiza la existencia de supremos en $(\mathbb{D}_+^n, \preceq^w)$ para conjuntos de $\mathbb{R}_+^n$ no vacíos y acotados.

PROPOSICIÓN 1.17 ([BAP91], COROLARIO 4.). *Si $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ es un conjunto no vacío y acotado entonces existe un único elemento $y \in \mathbb{D}_+^n$ tal que:*

(1) Si $x \in S$ entonces $x \preceq^w y$.

(2) Si $x \preceq^w z$ para todo $x \in S$ entonces $y \preceq^w z$.

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ un conjunto no vacío y acotado. Consideremos, además, el conjunto $\hat{S} := \{z \in \mathbb{R}_+^n \mid x \preceq^w z \text{ para todo } x \in S\}$, el cual es no vacío debido a que S es acotado. Por la proposición anterior existe $y = \wedge \hat{S}$. Es sencillo verificar que este elemento satisface (1) y (2) del enunciado usando la construcción de y. □

Si S es un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}^n_+$ entonces su supremo en $(\mathbb{D}^n_+, \preceq^w)$, cuya existencia garantiza la proposición anterior, es denotado mediante $\vee S$. Además, si $S = \{x, y\} \subseteq \mathbb{R}^n_+$, entonces su ínfimo y supremo los denotamos $x \wedge y$ y $x \vee y$, respectivamente. Para el concepto de mayorización $\preceq$ los resultados que garantizan la existencia de ínfimo y supremo fueron establecidos en [AU82]. Estos resultados son importantes en nuestro trabajo porque dan lugar a *ideales de orden* sobre $\mathbb{D}^n$ inducidos por las relaciones de mayorización $\preceq$ y mayorización débil $\preceq^w$, los cuales estudiaremos en el próximo capítulo, aunque no como retículos sino como politopos.

1.2. Politopos

En el siguiente capítulo abordaremos un estudio detallado de unos politopos basados en el concepto de mayorización, los cuales hemos llamado politopos de mayorización, razón por la cual, resulta indispensable establecer los conceptos y resultados que usaremos frecuentemente en dicho estudio. Por lo tanto, en esta parte del presente capítulo nos enfocaremos en establecer aquellos elementos de politopos que necesitaremos posteriormente.

1.2.1. $\mathscr{H}$-politopos y $\mathscr{V}$-politopos

La teoría de politopos es la base de nuestra investigación. Esta nos provee las herramientas y algunos de sus ejemplos se tornan fuente de inspiración para nuestra labor, razón por la cual, nos resulta necesario estudiar algunos de los conceptos y resultados más importantes discutiendo en torno a ellos en el camino y, asimismo, mostrando algunos ejemplos que los ilustren. En este apartado nos proponemos esta tarea y aunque la mayor parte del material es tomado de [Zie95] y [Tho06], también consultamos otras fuentes para ahondar y contrastar ciertos elementos y, en consecuencia, poder generar discusión alrededor de los contenidos que presentamos.

Definición 1.8 ([Tho06], Definición 2.2.). Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo**, si para cualesquiera par de elementos $x, y \in K$ el **segmento de recta que une** x **e** y, definido mediante $[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda) y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$, está contenido en K.

Un **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b\}$, donde $a_i, b \in \mathbb{R}$, $i \in [n]$. El hiperplano H define dos **semiespacios** en $\mathbb{R}^n$, definidos mediante

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b\},$$
$$H^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq b\},$$

donde observamos que $H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n \leq -b\}$, de manera que, todos los semiespacios pueden ser considerados teniendo la forma de H^-. La intersección de un número finito de semiespacios la podemos expresar como

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i, i \in [m]\},$$

el cual escribimos mediante $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, donde $A = [a_{ij}]$, $i \in [m]$ y $j \in [n]$, y $b = (b_1, \ldots, b_m) \in$

$\mathbb{R}^m$. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.9 ([THO06], DEFINICIÓN 2.5.). Un **$\mathscr{H}$-poliedro** en $\mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto obtenido como la intersección de un número finito de semiespacios de $\mathbb{R}^n$, es decir, es un conjunto de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, donde A es una matriz real de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

DEFINICIÓN 1.10 ([THO06], DEFINICIÓN 2.6.). Un $\mathscr{H}$-poliedro acotado es llamado un **$\mathscr{H}$-politopo**.

PROPOSICIÓN 1.18 ([THO06], LEMA 2.8.). *Si P es un $\mathscr{H}$-poliedro entonces P es un conjunto convexo.*

Demostración. Si P es un $\mathscr{H}$-poliedro en $\mathbb{R}^n$ entonces existen A una matriz real de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Por lo tanto, si $x, y \in P$ y $\lambda \in [0,1]$ entonces se satisfacen las relaciones $A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$, donde la desigualdad la tenemos debido a que $\lambda \in [0,1]$. Por lo tanto, $\lambda x + (1-\lambda)y \in P$ y, en consecuencia, P es un conjunto convexo. □

EJEMPLO 1.1 ([THO06], EJEMPLO 2.1.). El **cubo unitario** de $\mathbb{R}^n$ lo definimos mediante $C_n^u := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_j \leq 1, j \in [n]\}$. En particular: C_1^u es el segmento de recta que une los puntos 0 y 1 en la recta real, C_2^u es el cuadrado de $\mathbb{R}^2$ con vértices en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$, mientras que, C_3^u es el cubo de $\mathbb{R}^3$ cuyo conjunto de vértices es

$$\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

Dado que C_n^u es acotado, entonces C_n^u es un $\mathscr{H}$-politopo.

DEFINICIÓN 1.11 ([THO06], DEFINICIÓN 2.11.). Una **combinación convexa** de $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}^n$ es cualquier elemento de la forma $\sum_{i=1}^t \lambda_i p_i$, donde $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in [t]$ y $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$. El conjunto de todas las combinaciones convexas de $p_1, \ldots, p_t$ es llamado la **envolvente convexa** de $p_1, \ldots, p_t$, y lo denotaremos $conv(\{p_1, \ldots, p_t\})$.

La siguiente proposición resume algunos hechos sobre la envolvente convexa de un número finito de puntos.

PROPOSICIÓN 1.19 ([THO06], P. 10,11). *Si $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}^n$ entonces:*

(1) $conv(\{p_1, \ldots, p_t\})$ es un conjunto convexo.

(2) $conv(\{p_1, \ldots, p_t\})$ es el conjunto más pequeño que contiene a los elementos $p_1, \ldots, p_t$.

(3) $conv(\{p_1, \ldots, p_t\})$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen los elementos $p_1, \ldots, p_t$.

Lo anteriores elementos sirven de antesala para la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.12 ([THO06], DEFINICIÓN 2.13.). Un **$\mathscr{V}$-politopo** en $\mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de un número finito de elementos de $\mathbb{R}^n$, es decir, es un conjunto de la forma $conv(\{p_1, \ldots, p_t\})$, donde $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}^n$.

En el siguiente ejemplo presentamos unos $\mathscr{V}$-politopos muy importantes en ciertos apartados de nuestro trabajo; específicamente, mediante estos politopos investigamos una propiedad conocida como *aditividad* para los politopos de mayorización.

EJEMPLO 1.2 (POLITOPOS DE NEWTON; [NOW16], P. 7,8.). Si K es un anillo conmutativo con unidad y $x_1,\ldots,x_n$ son variables, entonces el **anillo de polinomios de Laurent** en las variables $x_1,\ldots,x_n$ sobre K, el cual es denotado $K[x_1,\ldots,x_n,x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}]$ o simplemente $K[X,X^{-1}]$, consiste de los elementos de la forma $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f_\alpha X^\alpha$, donde $f_\alpha\in K$ y X^α denota el monomio $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ si $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$, en particular, $X^{\vec{0}}=x_1^0\cdots x_n^0=1$. De otra parte, si $f\in K[X,X^{-1}]$ entonces el **soporte de** f, denotado $\mathscr{S}(f)$, lo definimos mediante $\mathscr{S}(f):=\{\alpha\in\mathbb{Z}^n \mid f_\alpha\neq 0\}$, con lo cual, $\mathscr{S}(f)$ resulta ser un conjunto finito.
El **politopo de Newton asociado a** f, denotado $\mathscr{N}(f)$, es la envolvente convexa de $\mathscr{S}(f)$, es decir, $\mathscr{N}(f):=conv(\mathscr{S}(f))$. Este $\mathscr{V}$-politopo satisface que: Si $f,g\in K[X,X^{-1}]$ entonces $\mathscr{N}(fg)=\mathscr{N}(f)+\mathscr{N}(g)$, propiedad cuya demostración puede consultarse en [Now16] y que nosotros usaremos en el próximo capítulo.

El siguiente teorema, conocido como *teorema principal de la teoría de politopos*, nos dice que los conceptos de $\mathscr{H}$-politopo y de $\mathscr{V}$-politopo son equivalentes, es decir, que son sólo dos maneras distintas de describir a un mismo conjunto de $\mathbb{R}^n$. La prueba está basada en un proceso de reducción de variables denominado *eliminación de Fourier-Motzkin*, y esta puede consultarse en [Zie95]. En [Now16] se ofrece una prueba mucho más sencilla pero que involucra varios resultados previos.

PROPOSICIÓN 1.20 (TEOREMA PRINCIPAL DE LA TEORÍA DE POLITOPOS; [THO06], TEOREMA 2.14.). *Todo $\mathscr{V}$-politopo tiene una descripción mediante desigualdades como un $\mathscr{H}$-politopo y todo $\mathscr{H}$-politopo es la envolvente convexa de un número minimal de finitos puntos llamados* ***vértices****.*

En general, no es sencillo encontrar los vértices de un $\mathscr{H}$-politopo y, tampoco, encontrar los semiespacios que definen un $\mathscr{V}$-politopo. A continuación presentamos algunos ejemplos clásicos de politopos con sus correspondientes descripciones como $\mathscr{H}$-politopo y como $\mathscr{V}$-politopo.

EJEMPLO 1.3 ([THO06], EJEMPLO 2.15.). El **politopo cruzado** en $\mathbb{R}^n$ es el $\mathscr{V}$-politopo definido mediante $C_n^{\triangle}:=conv(\{\pm e_1,\pm e_2,\ldots,\pm e_n\})$, donde $e_1,e_2,\ldots,e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En particular, $C_1^{\triangle}$ es el segmento de recta que une los puntos -1 y 1 en $\mathbb{R}$, $C_2^{\triangle}$ el el diamante de $\mathbb{R}^2$ con vértices en los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$, mientras que, $C_3^{\triangle}$ es un octaedro de con conjunto de vértices $\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1)\}$. El politopo cruzado en $\mathbb{R}^n$ como $\mathscr{H}$-politopo queda descrito mediante la igualdad $C_n^{\triangle}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i|\leq 1\}$.

EJEMPLO 1.4 ([ZIE95], EJEMPLO 0.4.). El **hipercubo** en $\mathbb{R}^n$ es el $\mathscr{H}$-politopo definido como $C_n:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid -1\leq x_j\leq 1, j\in[n]\}$. Particularmente, C_1 corresponde a un segmento de recta, C_2 define un cuadrado de $\mathbb{R}^2$ y C_3 es un cubo. Fácilmente, comprobamos que los vértices de C_n son los $(-1,1)$-vectores de $\mathbb{R}^n$ y, en consecuencia, C_n como $\mathscr{V}$-politopo lo describimos mediante $C_n=conv(\{x\in\mathbb{R} \mid x_j\in\{-1,1\}, j\in[n]\})$.

En la figura 1.1 mostramos una ilustración de C_3 y $C_3^{\triangle}$, la cual tomamos de [Zie95].

EJEMPLO 1.5 ([ZIE95], EJEMPLO 0.3.). El ***n*-simplex canónico**, denotado $\triangle_n$, es un politopo en

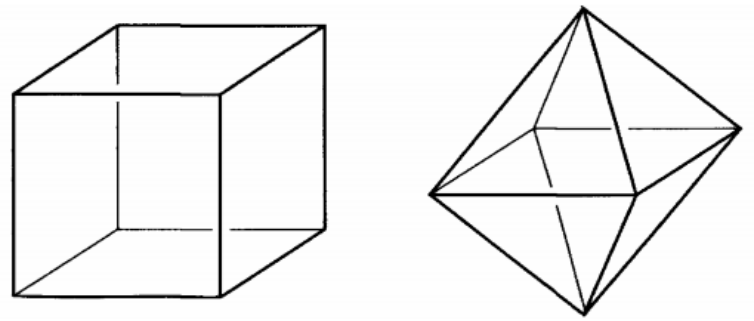


Figura 1.1: El cubo C_3 y el octaedro $C_3^{\triangle}$.

$\mathbb{R}^{n+1}$ definido mediante $\triangle_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{1}x = 1, x_j \geq 0, j \in [n+1]\}$, y para el cual su descripción como $\mathcal{V}$-politopo viene dada por $\triangle_n = conv(\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\})$, donde $e_1, \ldots, e_{n+1}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. En la figura 1.2 mostramos una ilustración de $\triangle_2$, la cual es tomada de [Zie95].

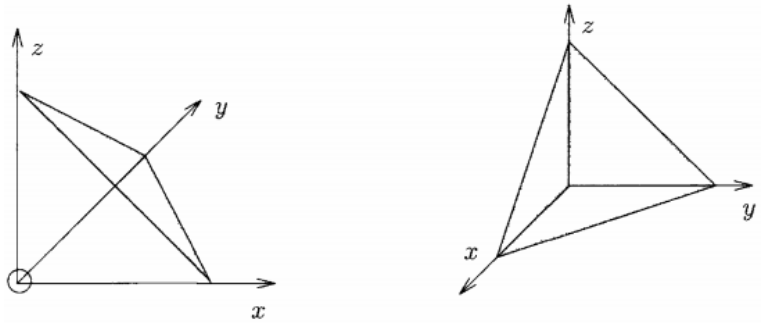


Figura 1.2: El 2-simplex canónico $\triangle_2$ en $\mathbb{R}^3$.

Lo siguiente que haremos está orientado a definir la dimensión de un politopo. Para ello tenemos que discutir algunos elementos básicos de geometría afín.

DEFINICIÓN 1.13 ([THO06], DEFINICIÓN 2.20.). Sean $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Una **combinación afín** de los elementos $p_1, \ldots, p_t$ es una combinación lineal de la forma $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i p_i$, donde $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$.

(2) La **envolvente afín** de $p_1, \ldots, p_t$, la cual denotamos $aff(\{p_1, \ldots, p_t\})$, es el conjunto de todas las combinaciones afines de $p_1, \ldots, p_t$.

(3) La envolvente afín de S, denotada $aff(S)$, es el conjunto de todas las combinaciones afines de un número finito de puntos en S.

(4) Diremos que S es un **conjunto afín** si $S = aff(S)$.

En la siguiente proposición mostramos que todo conjunto afín no vacío es la traslación de un espacio vectorial.

PROPOSICIÓN 1.21 ([LEE13], EJERCICIO 1.11). *Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, entonces S es un conjunto afín si, y sólo si, es un conjunto de la forma $x+V$, donde V es un espacio vectorial y x es un elemento de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Si S es un conjunto afín no vacío de $\mathbb{R}^n$ entonces existe $x \in S$. Definimos $V := \{s-x \mid s \in S\}$, el cual resulta ser un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ cumpliendo que $S = x+V$. En efecto, dados $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $v_1 = s_1 - x$ y $v_2 = s_2 - x$, de donde

$$v_1 + v_2 = (s_1 - x) + (s_2 - x) = [(s_1 + s_2) - x] - x = \left[(2)\left(\left(\frac{1}{2}\right)s_1 + \left(\frac{1}{2}\right)s_2\right) + (-1)x\right] - x \in V,$$

y

$$\lambda v_1 = \lambda(s_1 - x) = \lambda s_1 - \lambda x = (\lambda s_1 + x - \lambda x) - x = (\lambda s_1 + (1-\lambda)x) - x \in V,$$

lo que muestra que V es cerrado para la suma y la multiplicación por escalar, por lo tanto, V es un espacio vectorial. Además, $S = x+V$, ya que, para cada $s \in S$ tenemos que $s = x + (s-x) \in x+V$. De otra parte, si $S = x+V$, siendo V un espacio vectorial y x un elemento de $\mathbb{R}^n$, entonces, dados $s_1, \ldots, s_t \in S$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, existen $v_1, \ldots, v_t \in V$ que satisfacen $s_j = x + v_j$ para cada $j \in [t]$ y, en consecuencia

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_m s_m = \lambda_1(x+v_1) + \cdots + \lambda_m(x+v_m) = x + (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) \in S,$$

lo que nos permite concluir que todo conjunto de la forma $x+V$, donde V es un espacio vectorial y x es un elemento de $\mathbb{R}^n$, es un conjunto afín. □

El anterior resultado motiva la definición que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN 1.14 ([THO06], DEFINICIÓN 2.22.). Un **espacio afín** de $\mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$, donde A es una matriz real de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Notemos que el espacio afín $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ es un conjunto afín; además, es la traslación del espacio vectorial $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\}$.

DEFINICIÓN 1.15 ([THO06], DEFINICIÓN 2.23.). Sean $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$, donde A es una matriz real de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$, un espacio afín y P un politopo en $\mathbb{R}^n$.

(1) La dimensión de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ es la dimensión del espacio vectorial $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\}$.

(2) La dimensión de P es la dimensión de $aff(P)$. Si P tiene dimensión d escribiremos $\dim(P) = d$ o diremos que P es un d-politopo.

El concepto de independencia afín es central en la geometría afín y este tiene un papel similar al que tiene la independencia lineal en el álgebra lineal; sin embargo, estos conceptos están relacionados. Enseguida presentamos la definición de independencia afín y un par de resultados relativos a esta noción, donde se aprecia la conexión entre independencia lineal e independencia afín.

DEFINICIÓN 1.16 ([LEE13], DEFINICIÓN 1.5). El conjunto $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es **afínmente independiente**, si el sistema $\sum_{i=1}^m \lambda_1 x_i = \vec{0}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ tiene solamente la solución trivial, es decir, $\lambda_i = 0$ para cada $i \in [m]$. En otro caso, diremos que el conjunto es **afínmente dependiente**.

PROPOSICIÓN 1.22 ([LEE13], EJERCICIO 1.6). *El conjunto $S = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afínmente dependiente si, y sólo si, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que x_k puede ser escrito como una combinación afín de los elementos de $S \setminus \{x_k\}$.*

Demostración. Sea $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$. Si existe $k \in [m] := \{1, \ldots, m\}$, tal que x_k puede ser escrito como combinación afín de los elementos de $S \setminus \{x_k\}$, entonces $x_k = \sum_{i \in [m] \setminus \{k\}} \alpha_i x_i$, donde $\sum_{i \in [m] \setminus \{k\}} \alpha_i = 1$. En tal caso, el sistema $\sum_{i=1}^m \lambda_1 x_i = \vec{0}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ tiene la solución no trivial $\lambda_i = \alpha_i$, si $i \neq k$, y $\lambda_k = -1$, lo cual muestra que S es un conjunto afínmente dependiente. Recíprocamente, si S es un conjunto afínmente dependiente entonces existe una solución no trivial del sistema $\sum_{i=1}^m \lambda_1 x_i = \vec{0}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ y, en consecuencia, existe $k \in [m]$ tal que $\lambda_k \neq 0$. Por lo tanto, $x_k = \sum_{j \in [m] \setminus \{k\}} \left(\frac{-\lambda_j}{\lambda_k} \right) x_j$ es una expresión de x_k como una combinación afín de los elementos de $S \setminus \{x_k\}$. □

PROPOSICIÓN 1.23 ([LEE13], EJERCICIO 1.7). *El conjunto $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si, y sólo si, el conjunto $\{x_1 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_m$ un número finito de elementos de $\mathbb{R}^n$ y consideremos los conjuntos $S := \{x_1, \ldots, x_m\}$ y $T := \{x_1 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m\}$. Si S es afínmente independiente y $\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (x_j - x_m) = \vec{0}$ entonces, al definir $\alpha_i := \lambda_j$, $1 \leq i \leq m-1$, y $\alpha_m := -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j$, tenemos que $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \vec{0}$ y $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$, lo que nos permite concluir que $\alpha_i = 0$, para todo $i \in [m]$ y, en particular, $\lambda_j = 0$ para cada $j \in [m-1]$. Así el conjunto T resulta ser linealmente independiente. Ahora bien, si T es un conjunto linealmente independiente y tenemos las ecuaciones $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \vec{0}$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, entonces $\lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j$ y, por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j x_j + \lambda_m x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \right) x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (x_j - x_m) = \vec{0},$$

de donde, al ser T linealmente independiente, tenemos que $\lambda_j = 0$ para cada $j \in [m-1]$ y, en consecuencia, concluimos que $\lambda_m = 0$. Por lo tanto, el conjunto S es afínmente independiente. □

Consideremos P un politopo de $\mathbb{R}^n$ y $v_1, \ldots, v_{t+1} \in P$ elementos afínmente independientes; en virtud del resultado previo, concluimos que $\dim(P) \geq t$. Finalizamos esta sección presentando algunas construcciones básicas que generan politopos nuevos a partir de unos previamente dados.

DEFINICIÓN 1.17 ([ZIE95], EJEMPLO 0.5.). Sean P, Q politopos de $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $x_0 \notin aff(P)$ entonces la **pirámide** sobre P basada en x_0, la cual denotamos $Pyr(P, x_0)$, se define como $Pyr(P, x_0) := conv(P \cup \{x_0\})$.

(2) Si $x_+, x_- \notin aff(P)$ son tales que un punto interior del segmento de recta $[x_-, x_+]$ es un punto interior de P, entonces la **bipirámide** sobre P basada en los puntos x_- y x_1, denotada $Bipyr(P; x_-, x_+)$, la definimos como $Bipyr(P; x_-, x_+) := conv(P \cup \{x_-, x_+\})$.

(3) El **producto** de P y Q, denotado $P \times Q$, lo definimos como $P \times Q := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \in P, q \in Q\}$.

(4) El **prisma** sobre P, denotado $Prism(P)$, es el producto de P con un segmento.

(5) La **suma de Minkowski** de P y Q, denotada $P+Q$, la definimos mediante $P+Q := \{p+q \mid p \in P, q \in Q\}$. Denominamos **zonotopo** a un politopo que podemos obtener como la suma de Minkowski de un número finito de segmentos.

1.2.2. ESTRUCTURA FACIAL DE POLITOPOS

El propósito de la presente sección es introducir algunos elementos relevantes para nuestro trabajo sobre las caras de los politopos. Si P es un politopo de $\mathbb{R}^n$, iniciamos discutiendo en torno a la definición de un cara F de P, para lo cual requerimos introducir conceptos básicos de optimización; posteriormente, definimos el retículo de caras de P e introducimos la noción de que dos politopos sean combinatoriamente equivalentes para, finalmente, introducir el concepto de politopo simple, que es uno de los más importantes en nuestro estudio.

DEFINICIÓN 1.18 ([THO06], P. 15,16). Sean P un politopo de $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $\phi_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido mediante $\phi_c(x) := \langle c, x\rangle$.

(1) El **valor óptimo** del problema de optimización lineal $\max_{x\in P} \phi_c(x)$, denotado $m_c(P)$, es el máximo valor de $\phi_c(x)$ cuando x recorre todos los elementos de P.

(2) Para $c \neq \vec{0}$, el hiperplano $H_c(P) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_c(x) = m_c(P)\}$ es llamado un **hiperplano de soporte** de P.

(3) Para cada $m \geq m_c(P)$, la desigualdad $\phi_c(x) \leq m$ se dice **válida** para P, dado que todos los elementos de P satisfacen esta desigualdad.

Con los elementos introducidos en la definición anterior, presentamos un primer concepto de cara de un politopo, el cual es tomado de [Tho06].

DEFINICIÓN 1.19 ([THO06], DEFINICIÓN 3.4.). Sea P un politopo de $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Una **cara** de P es la intersección de P con uno de sus hiperplanos de soporte. De manera más precisa:

(1) Si $c \neq \vec{0}$ entonces la **cara de P en la dirección** c es el conjunto $F_c(P) := H_c(P) \cap P$. Las caras generadas de esta manera se denominan **caras no triviales** de P.

(2) Si $c = \vec{0}$ entonces $H_{\vec{0}}(P) = \mathbb{R}^n$ y $F_{\vec{0}}(P) = H_{\vec{0}}(P) \cap P = P$. De otra parte, el conjunto $\emptyset$ también es considerado una cara de P. Las caras P y $\emptyset$ las llamamos **caras triviales** de P.

Si P es un $\mathscr{H}$-politopo de $\mathbb{R}^n$, dado por $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, y $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, entonces se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} F_c(P) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \phi_c(x) = m_c(P)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \langle c, x\rangle = m_c(P)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \langle c, x\rangle \leq m_c(P), -\langle c, x\rangle \leq -m_c(P)\}, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $F_c(P)$ es un politopo, es decir, toda cara de un politopo P es, nuevamente, un politopo. Veamos un segundo concepto de cara de un politopo, el cual es tomado de [Zie95], y difiere ligeramente de la definición anterior.

DEFINICIÓN 1.20 ([ZIE95], DEFINICIÓN 2.1.). Si P es un politopo de $\mathbb{R}^n$ y $\langle c, x\rangle \leq c_0$ es una desigualdad válida para P, entonces una cara F de P es cualquier conjunto de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x\rangle = c_0\}$.

Las dos definiciones dadas anteriormente son equivalentes. En efecto, si P es un politopo de $\mathbb{R}^n$ entonces todo hiperplano de soporte de P proviene de una desigualdad válida para P; en consecuencia, toda cara de P, según la definición 1.19, es también una cara de P acorde a la definición 1.20. De otra parte, una desigualdad válida para P, que no induce un hiperplano de soporte de P, necesariamente es una desigualdad que satisfacen los elementos de P de manera estricta. Por consiguiente, la cara generada según la definición 1.20 es la cara trivial P, la cual también es una cara considerada en la definición 1.19. En conclusión, las definiciones 1.19 y 1.20 son equivalentes.

Si P es un $\mathscr{H}$-politopo de $\mathbb{R}^n$, descrito mediante la igualdad $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, entonces cada una de las desigualdades de $Ax \leq b$ son desigualdades válidas para P, lo cual sugiere que cada cara F de P podría obtenerse mediante la intersección de un número finito de hiperplanos inducidos por desigualdades presentes en $Ax \leq b$. Justamente, la siguiente es una tercera definición de cara de un politopo que recoge lo comentado antes y cuya equivalencia, basada en el teorema de dualidad de optimización lineal, con las ya vistas puede consultarse en [Sch86].

DEFINICIÓN 1.21 ([SCH86], P. 101). Sea P un $\mathscr{H}$-politopo de $\mathbb{R}^n$, descrito como $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Decimos que F es una **cara** de P si $F = \{x \in P \mid \tilde{A}x = \tilde{b}\}$, para algún subsistema $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ de $Ax \leq b$.

El conjunto de caras de un politopo P lo denotaremos $\mathscr{F}(P)$, mientras que, el conjunto de vértices de P lo notaremos mediante $\mathscr{V}(P)$. La dimensión de la cara de un politopo P, teniendo presente que ella es también un politopo, queda naturalmente definida. La siguiente definición precisa esta observación y, además, introduce un vector muy importante en el estudio de la estructura facial de un politopo.

DEFINICIÓN 1.22 ([THO06], DEFINICIÓN 3.5.). Sea P un politopo en $\mathbb{R}^n$ con $\dim(P) = d$.

(1) La **dimensión de una cara** de P es la dimensión de la cara vista como politopo. Las caras de P con dimensión k son llamadas sus k-caras. Las 0-caras son llamadas **vértices**, las 1-caras son llamadas **aristas** y las $(d-1)$-caras son llamadas **caras maximales**. Para $\emptyset$, la cara vacía de P, se define $\dim(P) = -1$.

(2) El número de k-caras de P es denotado por $f_k(P)$ y es conocido como el **k-ésimo número de caras** de P.

(3) El f-vector de P es el vector $f(P) := (f_0(P), f_1(P), \ldots, f_d(P))$.

Un resultado que, en cierto modo, sintetiza las ideas previas pero interpretándolas desde la descripción dada de un politopo P como $\mathscr{V}$-politopo, es el que presentamos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.24 ([ZIE95], PROPOSICIÓN 2.2. Y PROPOSICIÓN 2.3.). *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^n$.*

(1) $P = conv(\mathscr{V}(P))$, es decir, el politopo P es la envolvente convexa de sus vértices.

(2) Si $P = conv(V)$ entonces $\mathcal{V}(P) \subseteq V$.

(3) Si F es una cara de P entonces F es un politopo y $\mathcal{V}(F) = F \cap \mathcal{V}(P)$.

(4) Las caras de F son, exactamente, las caras de P contenidas en F.

(5) $F = P \cap aff(F)$.

EJEMPLO 1.6 ([THO06], EJEMPLO 3.6.). Hemos visto que el conjunto de vértices de C_2^u, el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, es el conjunto $\mathcal{V}(C_2^u) = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$; sus aristas son

$$[(0,0),(1,0)], [(0,0),(0,1)], [(1,0),(1,1)], [(0,1),(1,1)];$$

mientras que la única cara de C_2^u es C_2^u mismo. En la siguiente figura, tomada de [Zie95], apreciamos con más facilidad lo anteriormente dicho.

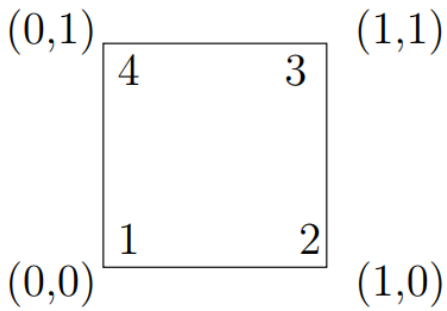


Figura 1.3: C_2^u, el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$

Algunas consecuencias, relevantes para nuestro estudio posterior, que se siguen de las discusiones anteriores son las siguientes:

Sea P un $\mathscr{H}$-politopo en $\mathbb{R}^n$ tal que $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

(1) $x \in \mathbb{R}^n$ es un vértice de P si, y sólo si, $\{x\} = \{x \in P \mid \tilde{A}x = \tilde{b}\}$ para algún subsistema $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ de $Ax \leq b$.

(2) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son vértices de P entonces, $[x,y]$ es una arista de P si, y sólo si, existe algún subsistema $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ de $Ax \leq b$ tal que x y y son los únicos vértices de P que pertenecen al conjunto $\{x \in P \mid \tilde{A}x = \tilde{b}\}$.

(3) $x \in \mathbb{R}^n$ es un vértice de P si, y sólo si, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que x es la única solución del problema de optimización lineal $\max_{x \in P} \langle c, x \rangle$.

(4) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son vértices de P entonces, $[x,y]$ es una arista de P si, y sólo si, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que x y y son los únicos vértices de P que son solución del problema de optimización lineal $\max_{x \in P} \langle c, x \rangle$.

(5) F es una cara de P si, y sólo si, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que F es la solución del problema de optimización lineal $\max_{x \in P} \langle c, x \rangle$.

(6) Si $\langle a, x\rangle \leq b_0$ es una desigualdad no redundante de $Ax \leq b$ y $F := \{x \in P \mid \langle a, x\rangle = b_0\}$ es una cara no trivial, entonces F es una cara maximal.

(7) Toda cara propia de F la obtenemos como la intersección de un número finito de caras maximales de F.

El conjunto de caras de un politopo ordenado por la relación de contenencia da lugar a un conjunto parcialmente ordenado, de hecho un retículo, el cual definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.23 ([THO06], DEFINICIÓN 3.7.). Sean P un politopo en $\mathbb{R}^n$ y $\mathscr{F}(P)$ el conjunto de caras de P. El **retículo de caras** de P, el cual denotamos $\mathscr{L}(P)$, es el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{F}(P), \subseteq)$.

DEFINICIÓN 1.24 ([THO06], DEFINICIÓN 3.9.). Dos politopos P y Q son **combinatoriamente equivalentes** si, $\mathscr{L}(P)$ y $\mathscr{L}(Q)$ son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

EJEMPLO 1.7 ([THO06], P. 19). En el ejemplo 1.6 vimos las caras no vacías del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, denotado C_2^u. A continuación mostramos un diagrama de Hasse de $\mathscr{L}(C_2^u)$, el retículo de caras de C_2^u, basado en la figura que presentamos en el mencionado ejemplo. Podemos

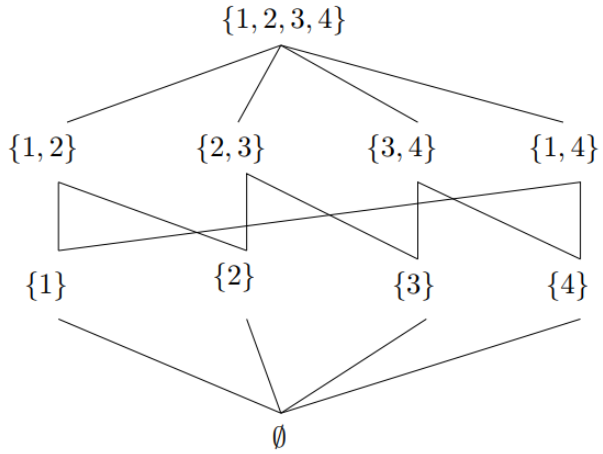


Figura 1.4: $\mathscr{L}(C_2^u)$, retículo de caras del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$

ver con facilidad que C_2^u es combinatoriamente equivalente a C_2, hipercubo en $\mathbb{R}^2$, y a $C_2^\triangle$, el politopo cruzado en $\mathbb{R}^2$, lo cual resulta evidente teniendo presente que C_2 es un cuadrado y $C_2^\triangle$ es un diamante en el plano. En general, C_2^u es combinatoriamente equivalente a cualquier cuadrilatero convexo de $\mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 1.25 ([THO06], DEFINICIÓN 3.12.). Un d-politopo P es **simple**, si todo vértice de P es incidente a d aristas de P o, equivalentemente, si todo vértice de P está en exactamente d caras maximales de P.

El k-**esqueleto** de un politopo P, tal como se referencia en [Zie95], consiste de la unión de las k-caras de P. En particular, el 1-esqueleto es la unión de las aristas de P. Una herramienta muy conveniente para representar el 1-esqueleto es la que presentamos en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.26 ([THO06], DEFINICIÓN 4.1.). El **grafo de un politopo** P es el grafo $G(P) :=$

$(V(P), E(P))$, donde $V(P) := \mathcal{V}(P)$ es el conjunto de vértices de P y $E(P)$ es el conjunto de aristas de P.

EJEMPLO 1.8 ([THO06], EJEMPLO 4.2.). En la figura siguiente mostramos el grafo de C_3, un cubo en $\mathbb{R}^3$.

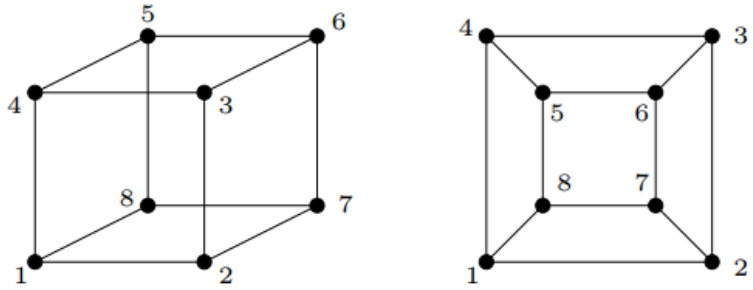


Figura 1.5: $G(C_3)$, el grafo de un 3-hipercubo

Finalizamos esta sección con dos elementos: la herramienta teórica, posiblemente más importante, para nuestro trabajo, y la cual consiste en un resultado en el cual se caracteriza la propiedad de ser simple, y, adicionalmente, un ejemplo donde presentamos el permutaedro, que fue uno de los motivos de esta investigación y, asimismo, una fuente recurrente de inspiración.

PROPOSICIÓN 1.25 ([ZIE95], PROPOSICIÓN 2.16.). *Un n-politopo P es simple si, y sólo si, toda $(n-k)$-cara de P se obtiene, de manera unívoca, como la intersección de k caras maximales de P.*

EJEMPLO 1.9 ([ZIE95], EJEMPLO 0.10.). El **permutaedro** en $\mathbb{R}^n$, el cual denotamos $\mathscr{P}_{n-1}$, consiste en la envolvente convexa de las permutaciones del vector $(1,2,\ldots,n)$, es decir, $\mathscr{P}_{n-1} := conv(\{\sigma((1,2,\ldots,n)) \mid \sigma \in S_n\})$. Este politopo ha sido ampliamente investigado y, aun recientemente, podemos encontrar muchos estudios relacionados a $\mathscr{P}_{n-1}$. Es importante mencionar que $\mathscr{P}_{n-1}$ es un $(n-1)$-politopo simple para el cual existe una sencilla descripción de su retículo de caras, a saber, sus k-caras corresponden a particiones ordenadas de $[n]$ en $n-k$ bloques. En la figura 1.6, la cual tomamos de [Zie95], se muestra una ilustración de $\mathscr{P}_3$ en el espacio tridimensional.

En el siguiente capítulo estudiaremos el permutaedro de mayorización, el cual incluye como caso particular a $\mathscr{P}_{n-1}$, y allí, quedara justificado en detalle, la descripción combinatorial del retículo de caras de $\mathscr{P}_{n-1}$ presentada en el último ejemplo.

1.3. CLASES DE MATRICES COMBINATORIAS

El objetivo principal que nos proponemos en esta sección es, inicialmente, presentar la clase de matrices combinatorias con vector suma fila R y vector suma columna S, que denotamos $\mathscr{A}(R,S)$, para, posteriormente, mostrar una prueba del teorema de Gale-Ryser, el cual nos da condiciones necesarias y suficientes para que $\mathscr{A}(R,S) \neq \emptyset$ usando el concepto de mayorización.

DEFINICIÓN 1.27 ([BRU06], P. 25). Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz no negativa de tamaño $m \times n$, $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i \in [m]$, la suma de los elementos en la fila i de A y $s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$, $j \in [n]$, la suma

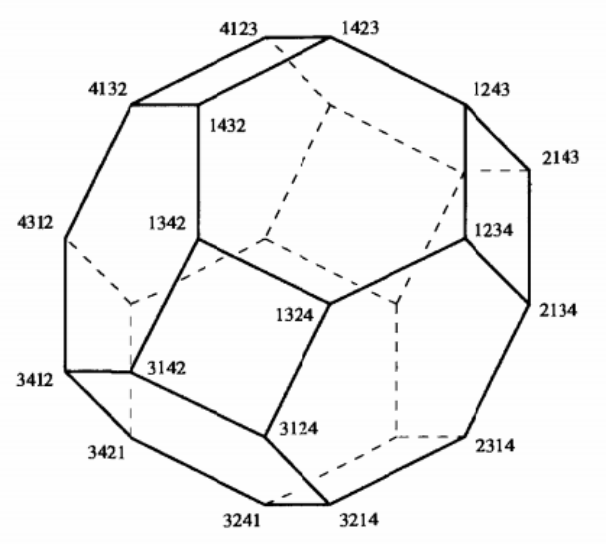


Figura 1.6: Una proyección de $\mathscr{P}_3$ en $\mathbb{R}^3$

de los elementos de la columna j de A. El vector $R := (r_1, \ldots, r_m)$ lo denominamos **vector suma fila de** A y el vector $S := (s_1, \ldots, s_n)$ lo denominamos **vector suma columna de** A.

Una consecuencia de la definición anterior es que $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ satisfacen la ecuación fundamental $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$, pues ambos miembros de esta igualdad son iguales a $\tau = \tau(A)$, la suma de los elementos de la matriz A.

DEFINICIÓN 1.28 ([BRU06], P. 26). Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores no negativos, entonces denotamos por $\mathscr{N}(R, S)$ al conjunto de matrices reales no negativas de tamaño $m \times n$ con vector suma fila R y vector suma columna S.

PROPOSICIÓN 1.26 ([BRU06], TEOREMA 2.1.1). *Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores no negativos entonces $\mathscr{N}(R, S)$ es no vacío si, y sólo si, se satisface la ecuación fundamental $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$.*

Demostración. Sean $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ vectores no negativos.

($\Rightarrow$) Si $\mathscr{N}(R, S)$ es no vacío entonces existe $A = [a_{ij}] \in \mathscr{N}(R, S)$ y, en consecuencia, $r_1 + \cdots + r_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s_1 + \cdots + s_n$.

($\Leftarrow$) Supongamos que se satisface la ecuación fundamental $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$. Presentamos, a continuación, una construcción inductiva de una matriz $A \in \mathscr{N}(R, S)$:

(1) Si $m = 1$ entonces $A = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix}$ es la única matriz en $\mathscr{N}(R, S)$.

(2) Si $n = 1$ entonces $A = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_m \end{bmatrix}^T$ es la única matriz en $\mathscr{N}(R, S)$.

(3) Supongamos que $m, n > 1$ y $\min\{r_1, s_1\} = r_1$. Sean $\tilde{R} = (r_2, \ldots, r_m)$ y $\tilde{S} = (s_1 - r_1, s_2, \ldots, s_n)$, para los cuales se tienen las igualdades

$$r_2 + \cdots + r_m = (r_1 + \cdots + r_m) - r_1 = (s_1 + \cdots + s_n) - r_1 = (s_1 - r_1) + s_2 + \cdots + s_n,$$

donde hemos usado, en la segunda igualdad, que $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$. Procediendo inductivamente, existe una matriz $\tilde{A}$ de tamaño $(m-1) \times n$ en $\mathscr{N}(\tilde{R}, \tilde{S})$. La matriz

$$\left[\begin{array}{cccc} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & \tilde{A} & \end{array}\right]$$

pertenece a $\mathscr{N}(R,S)$.

(4) Supongamos que $m, n > 1$ y mín$\{r_1, s_1\} = s_1$. Sean $\tilde{R} = (r_1 - s_1, r_2, \ldots, r_m)$ y $\tilde{S} = (s_2, \ldots, s_n)$, lo cuales satisfacen las igualdades

$$s_2 + \cdots + s_n = (s_1 + \cdots + s_n) - s_1 = (r_1 + \cdots + r_m) - s_1 = (r_1 - s_1) + r_2 + \cdots + r_m,$$

donde usamos, en la segunda igualdad, que $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$. Procediendo de manera inductiva, existe una matriz $\tilde{A}$ de tamaño $m \times (n-1)$ en $\mathscr{N}(\tilde{R}, \tilde{S})$. La matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} s_1 & \\ \\ 0 & \tilde{A} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$$

pertenece a $\mathscr{N}(R,S)$.

□

DEFINICIÓN 1.29 ([BRU06], P. 27). Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros no negativos, entonces denotamos por $\mathscr{Z}^+(R,S)$ al conjunto de matrices enteras no negativas de tamaño $m \times n$ con vector suma fila R y vector suma columna S.

PROPOSICIÓN 1.27 ([BRU06], TEOREMA 2.1.2). *Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros no negativos entonces $\mathscr{Z}^+(R,S)$ es no vacío si, y sólo si, se satisface la ecuación fundamental $r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n$.*

DEFINICIÓN 1.30 ([BRU06], P. 27). Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros no negativos, entonces denotamos por $\mathscr{A}(R,S)$ al conjunto de $(0,1)$-matrices de tamaño $m \times n$ con vector suma fila R y vector suma columna S.

DEFINICIÓN 1.31 ([BRU06], P. 16). Sean $R = (r_1, \ldots, r_m)$ es un vector entero no negativo y n un entero con $r_k \leq n$ para todo $k \in [m]$. El **conjugado de** R es el vector entero no negativo $R^* = ({r_1}^*, \ldots, {r_n}^*)$, donde ${r_k}^* = |\{i \mid r_i \geq k, i \in [m]\}|$, $k \in [n]$.

El resultado siguiente es el más importante de la sección; aquí presentamos una de las múltiples demostraciones existentes para el teorema de Gale-Ryser, la cual es tomada de [Bru06]. En la próxima sección presentamos una generalización de este resultado cuya prueba está basada en politopos.

PROPOSICIÓN 1.28 (TEOREMA DE GALE-RYSER; [BRU06], TEOREMA 2.1.3). *Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros, monótonos y no negativos entonces $\mathscr{A}(R,S)$ es no vacío si, y*

sólo si, $S \preceq R^*$.

Demostración. Sean $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ vectores enteros, monótonos y no negativos.

(⇒) Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros, monótonos y no negativos tales que $\mathscr{A}(R,S)$ es no vacío, entonces existe una $(0,1)$-matriz A de tamaño $m \times n$ con vector suma fila R y vector suma columna S. Supongamos que A es particionada como $A = [A_1 \mid A_2]$, donde A_1 es una matriz de tamaño $m \times k$, $k \in [n]$. Se sigue que el número de unos en A_1 no excede el número de unos en las primeras k columnas de la matriz obtenida de A corriendo a izquierda todos los unos en cada fila tanto como sea posible. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{k} s_i \leq \sum_{i=1}^{k} {r_i}^*$, para cada $k \in [n]$, teniéndose la igualdad para $k = n$, lo que muestra que $S \preceq R^*$.

(⇐) Supongamos que esta implicación no se satisface. Es decir, existen $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ vectores enteros, monótonos y no negativos que verifican $S \preceq R^*$ y para los cuales $\mathscr{A}(R,S) = \emptyset$. Es más, podemos escoger R y S con $m+n$ minimal y, de modo que, para ese $m+n$ el número $\tau = r_1 + \cdots + r_m$ sea minimal. Consideremos el siguiente par de casos:

(1) **Caso 1:** $\sum_{i=1}^{k} s_i < \sum_{i=1}^{k} {r_i}^*$ para algun k con $0 < k < n$. Los vectores $R_1 = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_m) := (\min\{k, r_1\}, \ldots, \min\{k, r_m\})$ y $S_1 := (s_1, \ldots, s_k)$ satisfacen que $S_1 \preceq {R_1}^*$, y para los vectores $R_2 := (r_1 - \tilde{r}_1, \ldots, r_m - \tilde{r}_m)$ y $S_2 := (s_{k+1}, \ldots, s_n)$ tenemos que $S_2 \preceq {R_2}^*$. Por minimalidad, existe una $(0,1)$-matriz A_1 con vector suma fila R_1 y vector suma columna S_1, y existe una $(0,1)$-matriz A_2 con vector suma fila R_2 y vector suma columna S_2. De modo que, la matriz $[A_1 \mid A_2]$ tiene vector suma fila R y vector suma columna S, lo cual es una contradicción.

(2) **Caso 2:** $\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} {r_i}^*$ para todo k con $0 < k < n$. Por minimalidad, $r_m \geq 1$ y $s_n \geq 1$. Sean $\tilde{R} := (r_1, \ldots, r_{m-1}, r_m - 1)$ y $\tilde{S} := (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n - 1)$, para los cuales se verifica $\tilde{S} \preceq \tilde{R}^*$. Por minimalidad, nuevamente, existe una matriz $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]$ de tamaño $m \times n$ con vector suma fila $\tilde{R}$ y vector suma columna $\tilde{S}$. Si $\tilde{a}_{mn} = 0$ entonces cambiando este 0 por un 1 obtenemos una matriz con vector suma fila R y vector suma columna S, una contradicción. Si suponemos $\tilde{a}_{mn} = 1$, dado que $r_m - 1 \leq n - 1$, existe q tal que $\tilde{a}_{mq} = 0$ y, dado que $s_q \geq s_n$, existe p tal que $\tilde{a}_{pq} = 1$ y $\tilde{a}_{pn} = 0$. Intercambiando ceros y unos en esta matriz de tamaño 2×2 obtenemos una matriz con vector suma fila $\tilde{R}$ y vector suma columna $\tilde{S}$, lo cual es, nuevamente, una contradicción.

De manera que, siempre que $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$, vectores enteros, monótonos y no negativos, verifican $S \preceq R^*$ entonces $\mathscr{A}(R,S) \neq \emptyset$.

□

EJEMPLO 1.10. Algunos casos notables en la clase $\mathscr{A}(R,S)$ son:

(1) Los vértices del conjunto de matrices doble estocásticas Ω_n, es decir, las matrices de permutación, son un caso particular de la clase $\mathscr{A}(R,S)$ tomando $R = S = \vec{1}$.

(2) Si $R = S$ y R recorre todos los $(0,1)$-vectores, entonces obtenemos aquellas matrices que tienen a lo más un 1 en cada fila y columna, es decir, obtenemos los vértices del conjunto de matrices doble subestocásticas.

ALGORITMO 1.29 (ALGORITMO DE GALE-RYSER; [BRU06], P. 46). *Si $\mathscr{A}(R,S) \neq \emptyset$ y $A(R,n)$ es la $(0,1)$-matriz de tamaño $m \times n$ con vector suma fila R que tiene todos sus entradas iguales a 1 justificadas a la izquierda, entonces realizamos lo siguiente:*

(1) Comenzamos con la matriz $A_n = A(R,n)$ de tamaño $m \times n$ y una matriz vacía $\widehat{A_n}$ de tamaño $m \times 0$.

(2) Para $k = n, n-1, n-2, \ldots, 1$ hacemos lo siguiente: pasamos a la columna k los unos finales en aquellas s_k filas de A_k con mayor suma, dando preferencia a las filas que están mas abajo (aquellas con el índice mayor) en caso de empate. Esto resulta en una matriz

$$\left[A_{k-1} \mid \widehat{A_{n-k+1}}\right]$$

donde A_{k-1} tiene $k-1$ columnas.

Salida: $\widehat{A} = \widehat{A_n}$

EJEMPLO 1.11 ([BRU06], P.46). Aquí ilustramos el algoritmo anterior con $R = (4,4,3,3,2)$ y $S = (4,3,3,3,3)$. En este caso tenemos que $R^* = (5,5,4,2,0)$ y, claramente, se satisface que $S \preceq R^*$, razón por la cual, en virtud del teorema de Gale-Ryser, concluimos que $\mathscr{A}(R,S) \neq \emptyset$. Las siguientes son las matrices obtenidas en cada iteración del algoritmo anterior.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&1&0& \\ 1&1&1&1&0& \\ 1&1&1&0&0& \\ 1&1&1&0&0& \\ 1&1&0&0&0& \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|cccc} 1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{|cccc} \hline 1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0 \end{array}\right].$$

La última matriz $\tilde{A} \in \mathscr{A}(R,S)$.

1.4. POLITOPOS DE MAYORIZACIÓN

A lo largo de nuestro trabajo estudiaremos unos politopos construidos a partir de los conceptos de mayorización introducidos previamente. Estos politopos los hemos dividido en dos familias: permutaedros de mayorización e ideales principales de mayorización. En parte, nos inspiramos por resultados encontrados en la literatura matemática alrededor de ellos que, en primera instancia, deseamos comprender a fondo y, posteriormente, nos sugieren interrogantes

para ser abordados en investigaciones futuras. Es por ello, que en la presente sección queremos presentarle al lector o lectora aquellos resultados que se tornaron motivos para emprender el presente trabajo. La mayoría de resultados los presentamos sin demostración, aunque acompañados de algunos comentarios, para no extender innecesariamente la sección y, especialmente, porque estos resultados los demostramos, usando técnicas alternativas a las usadas en las fuentes consultadas, a lo largo del siguiente capítulo.

1.4.1. PERMUTAEDROS DE MAYORIZACIÓN

En este apartado presentamos aquellos resultados relevantes para nuestro estudio asociados a los permutaedros de mayorización.

DEFINICIÓN 1.32 ([DAH10], P. 3266). Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces al conjunto $M(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \preceq v\}$ lo denominamos **permutaedro de mayorización**.

Este objeto coincide con el permutaedro clásico si tomamos $v = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$ y es combinatoriamente equivalente al permutaedro clásico si las componentes del vector v son distintas dos a dos, de manera que, este objeto ha sido ampliamente estudiado. Nuestro interés inicial por este objeto fue entender la descripción que podemos hacer del retículo de caras del permutaedro en términos de particiones ordenadas, el cual es un resultado bastante conocido pero, curiosamente, en muchos de los textos donde se enuncia tal descripción no se ofrece una demostración, razón por la cual, emprendimos una búsqueda bibliográfica tratando de rastrear este resultado en particular. Según se referencia en [BS96] el resultado puede ser encontrado en [EKK84], aunque, aparece de manera explícita en [BKL85]. En esta última publicación la prueba se hace usando la caracterización de una cara F de $M(v)$ como el conjunto solución un problema de optimización lineal de la forma $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$, no se hace referencia alguna a la propiedad de ser simple de $M(v)$ y la descripción del retículo de caras de $M(v)$ se da mediante cadenas anidadas de subconjuntos de $[n]$, las cuales están en biyección con las particiones ordenadas de $[n]$.

PROPOSICIÓN 1.30 ([BS96], PROPOSICIÓN 1.4.). *El retículo de caras de $M(v)$ es isomorfo a Π_n.*

La demostración de la proposición anterior que se hace en [BS96] está basada en funciones supermodulares y cadenas anidadas de subconjuntos de $[n]$, y en esta tampoco se hace referencia a que este politopo sea simple. De otra parte, en [Bar02] también se hace una prueba de este resultado que se apoya en funcionales lineales.
De lo anterior, y conociendo que $M(v)$ es un politopo simple, resulta natural hacer una prueba de la caracterización del retículo de caras de $M(v)$ basada en la descripción combinatoria de las intersecciones no vacías de caras maximales, aprovechando así, que existe una biyección entre las caras de $M(v)$ con dimensión $n-k$ y las intersecciones no vacías de k de sus caras no vacías, lo cual haremos en el próximo capítulo.
Ahora bien, teniendo en mente la definición de $M(v)$ y sabiendo que hay otras relaciones de mayorización distintas a $\preceq$, resulta natural definir de manera análoga politopos basados en $\preceq^w$ y $\ll$. De esta observación, definimos $M^w(v) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w v\}$ y $M^s(v) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \ll v\}$, los cuales llamamos permutaedro de mayorización débil y permutaedro de mayorización fuerte, respectivamente. En cuanto al primero de estos objetos tenemos el siguiente resultado, demostrado por

Mirsky en 1959.

PROPOSICIÓN 1.31 (TEOREMA DE MIRSKY; [MOA11], COROLARIO 2.C.5.). *Si $v \in \mathbb{R}^n_+$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w y\}$ es la envolvente convexa de los vectores de la forma $(\eta_1 y_{\pi_1}, \ldots \eta_n y_{\pi_n})$, donde π es una permutación y cada η_i es 0 o 1.*

La proposición anterior nos dice que el conjunto de vectores de la forma $(\eta_1 y_{\pi_1}, \ldots \eta_n y_{\pi_n})$, donde π es una permutación y cada η_i es 0 o 1, son un conjunto generador de $M^w(v)$; sin embargo, este conjunto no coincide con el conjunto de vértices de $M^w(v)$ y, en consecuencia, plantea el problema de describir los vértices de este politopo. Con respecto al permutaedro de mayorización fuerte, en vista de que este concepto fue introducido en [Rov16], solo contamos con los resultados consignados en [Rov16]. En consecuencia, tenemos el problema de estudiar los retículos de caras de $M^w(v)$ y $M^s(v)$.

A continuación, presentamos algunos resultados referentes a la aditividad de $M(v)$, los cuales son tomados de [Dah10].

LEMA 1.32 ([DAH10], LEMA 1). *Si a, b y z son vectores de $\mathbb{Z}^n$ con a y b monótonos y $z \preceq a+b$, entonces existen vectores enteros x y y satisfaciendo $x \preceq a$, $y \preceq b$ y $z = x+y$.*

Basados en este resultado, y definiendo $M_I(v) := M(v) \cap \mathbb{Z}^n$, podemos demostrar el resultado principal de [Dah10].

PROPOSICIÓN 1.33 ([DAH10], TEOREMA 3). *Si $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $w_1 > \cdots > w_n > 0$, entonces $M(v+w) = M(v) + M(w)$. Si, además, v y w son vectores enteros, entonces $M_I(v+w) = M_I(v) + M_I(w)$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $w_1 > \cdots > w_n > 0$, $M(v)$ y $M(w)$ los permutaedros de mayorización asociados con v y w respectivamente y, ya que $v+w$ es monótono y positivo, consideremos el permutaedro de mayorización asociado con $v+w$, es decir, el conjunto $M(v+w)$.

(1) Si $z \in M(v) + M(w)$ entonces $z = x+y$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M(v)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M(w)$. Para cada $k \in [n]$ y $T \subseteq [n]$ se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} (x+y)_{[j]} &= \max_{|T|=k} \sum_{j \in T} (x_j + y_j) \leq \max_{|T|=k} \sum_{j \in T} x_j + \max_{|T|=k} \sum_{j \in T} y_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} x_{[j]} + \sum_{j=1}^{k} y_{[j]} \leq \sum_{j=1}^{k} v_j + \sum_{j=1}^{k} w_j = \sum_{j=1}^{k} (v+w)_j, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $x \in M(v)$ y $y \in M(w)$; la igualdad final tiene presente la monotonía del vector $v+w$ y propiedades del máximo. Es claro, además, que si $k = n$ entonces la igualdad se satisface, lo cual nos permite concluir que $z = x+y \in M(v+w)$. Es decir, $M(v) + M(w) \subseteq M(v+w)$. De otra parte, si $z \in M(v+w)$ entonces $z \preceq v+w$ y, por la caracterización matricial de la mayorización, existe una matriz doble estocástica P tal que $z = (v+w)P$, de modo que, definiendo $x := vP$ y $y = wP$ tenemos $z = x+y$ con $x \in M(v)$ y $y \in M(w)$, lo que muestra que $z \in M(v) + M(w)$. Por lo tanto,

$M(v+w) \subseteq M(v) + M(w)$ y podemos concluir que $M(v+w) = M(v) + M(w)$.

(2) En este inciso suponemos que v y w son vectores enteros. Si $z \in M_I(v) + M_I(w)$ entonces existen vectores $x \in M_I(v)$ e $y \in M_I(w)$ tales que $z = x + y$. Como $M_I(v) + M_I(w) \subseteq M(v) + M(w) = M(v+w)$ entonces $z \in M(v+w)$ y, en vista de que z es suma de los vectores enteros x e y, tenemos que z es un vector entero. Así, podemos concluir que $z \in M_I(v+w)$. Ahora bien, si $z \in M_I(v+w)$ entonces $z \preceq v+w$ y, por el lema 1.32, existen vectores enteros x y y satisfaciendo $x \preceq v$, $y \preceq w$ y $z = x+y$. Por lo tanto, podemos afirmar que $z \in M_I(v) + M_I(w)$. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que $M_I(v+w) = M_I(v) + M_I(w)$.

□

COROLARIO 1.34 ([DAH10], COROLARIO 4.). *Si $a^1, a^2, \ldots, a^m \in \mathbb{R}^n$ son vectores monótonos entonces $M\left(\sum_{i=1}^m a^i\right) = \sum_{i=1}^m M(a^i)$. Si, además, cada a^i es un vector entero, entonces $M_I\left(\sum_{i=1}^m a^i\right) = \sum_{i=1}^m M_I(a^i)$.*

Del anterior corolario, se sigue como consecuencia una generalización del teorema de Gale-Ryser, la cual presentamos en seguida.

PROPOSICIÓN 1.35 ([DAH10], TEOREMA 5.). *Si $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ y S son vectores enteros, monótonos y no negativos, entonces, existe una matriz A, entera, no negativa y de tamaño $m \times n$, con vector suma columna S y tal que las filas $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ de A satisfacen $a^{(i)} \preceq b^{(i)}$, $i \in [m]$, si, y sólo si, $S \preceq \sum_{i=1}^m b^{(i)}$.*

Demostración. Sean $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ y S vectores enteros, monótonos y no negativos. Consideremos, además, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los posibles vectores suma columna para matrices enteras no negativas que satisfacen $a^{(i)} \preceq b^{(i)}$, $i \in [m]$. Así, se cumplen las siguientes igualdades $K = \sum_{i=1}^m M_I(b^{(i)}) = M_I\left(\sum_{i=1}^m b^{(i)}\right)$, donde la primera igualdad se satisface debido a que $S \in K$ si, y sólo si, $S = \sum_{i=1}^m a^{(i)}$, mientras que la segunda igualdad la obtenemos como consecuencia del corolario anterior. Por lo tanto, un vector entero $S \in K$ si, y sólo si, $S \preceq \sum_{i=1}^m b^{(i)}$. □

En el siguiente resultado mostramos que el teorema de Gale-Ryser es un caso particular de la anterior proposición, el cual se sigue escogiendo $b^{(i)}$, $i \in [m]$, como un $(0,1)$-vector adecuado.

COROLARIO 1.36 (TEOREMA DE GALE-RYSER; [DAH10], COROLARIO 6.). *Si $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ son vectores enteros, monótonos y no negativos entonces $\mathscr{A}(R,S)$ es no vacío si, y sólo si, $S \preceq R^*$.*

Demostración. Sean $R = (r_1, \ldots, r_m)$ y $S = (s_1, \ldots, s_n)$ vectores enteros, monótonos y no negativos. En el resultado anterior, escojamos $b^{(i)}$ como el $(0,1)$-vector de $\mathbb{R}^m$ que tiene sus primeras r_i componentes iguales a 1 y las demás nulas, para cada $i \in [m]$, de manera que, tenemos $\sum_{i=1}^m b^{(i)} = R^*$ y, en consecuencia, el teorema de Gale-Ryser. □

1.4.2. IDEALES PRINCIPALES DE MAYORIZACIÓN

En este apartado presentamos aquellos resultados relevantes para nuestro estudio asociados al ideal principal de mayorización. En [Dah01], se estudió este objeto en conexión con opti-

mización y se caracterizó su 1-esqueleto mediante unas particiones de $[n]$ conocidas como *particiones intervalo*. Iniciamos presentando la definición del ideal principal de mayorización para, posteriormente, introducir la terminología necesaria que nos permita enunciar el teorema principal de [Dah01].

DEFINICIÓN 1.33 ([DAH01], P. 115). Si $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n$ entonces al conjunto $\mathbb{M}(b) := \{x \in \mathbb{D}^n \mid x \preceq b\}$ lo denominamos **ideal principal de mayorización**.

A continuación, introducimos la terminología usada en [Dah01] para el estudio de $\mathbb{M}(b)$.

DEFINICIÓN 1.34 ([DAH01], P. 115,116). Si $n \in \mathbb{N}$ y $j, k \in [n]$ son tales que $j \leq k$, entonces $[i : k] := \{j, \dots, k\}$ es el **intervalo entero con extremos** j **y** k.

DEFINICIÓN 1.35 ([DAH01], P. 115,116). Sean $n \in \mathbb{N}$, $t \in [n]$ y $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t)$ una partición ordenada de $[n]$ en bloques no vacíos π_j, $j \in [t]$. Si existen enteros $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{t-1} < k_t = n$ tales que $\pi_j = [k_{j-1} + 1 : k_j]$, para todo $j \in [t]$, entonces decimos que π es una **partición intervalo de** $[n]$. Los conjuntos π_j, $j \in [t]$, se denominan bloques de la partición π y el conjunto de todas las particiones intervalo de $[n]$ es denotado por Π.

DEFINICIÓN 1.36 ([DAH01], P. 117). Sean $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_t) \in \Pi$ y $n_j := |\pi_j|$, $j \in [t]$. Al vector $b^\pi := (\underbrace{\overline{b_{\pi_1}}, \dots, \overline{b_{\pi_1}}}_{n_1}, \dots, \underbrace{\overline{b_{\pi_t}}, \dots, \overline{b_{\pi_t}}}_{n_t})$, donde $\overline{b_{\pi_j}} := \frac{1}{n_j} \sum_{j \in \pi_j} b_j$, $j \in [t]$, lo denominaremos **promedio de** b **asociado con** π.

El resultado siguiente presenta una descripción del 1-esqueleto de $\mathbb{M}(b)$, mediante la terminología anterior y el concepto de mayorización.

PROPOSICIÓN 1.37 ([DAH01], TEOREMA 2.1.). *Si* $f : \Pi \to \mathbb{D}^n$ *se define mediante* $f(\pi) := b^\pi$ *entonces:*

(1) La función f *es una biyección entre el conjunto de particiones intervalo* Π *y el conjunto de vértices de* $\mathbb{M}(b)$*. Es decir, los vértices de* $\mathbb{M}(b)$ *son los promedios de* b*.*

(2) El politopo $\mathbb{M}(b)$ *es simple, es decir, cada vértice está en exactamente* n *hiperplanos acotados para* $\mathbb{M}(b)$*.*

(3) Si $\tilde{\pi}$ *cubre a* π *entonces* $b^{\tilde{\pi}}$ *y* b^π *son vértices adyacentes sobre* $\mathbb{M}(b)$*. Recíprocamente, dos vértices adyacentes sobre* $\mathbb{M}(b)$ *son imágenes de dos particiones intervalo donde una cubre a la otra.*

(4) Si $\pi, \tilde{\pi} \in \Pi$ *entonces,* $\pi \leq \tilde{\pi}$ *en* Π *si, y sólo si,* $b^{\tilde{\pi}} \preceq b^\pi$*.*

El anterior resultado sugiere el estudio del retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$ aprovechando la condición que tiene $\mathbb{M}(b)$ de ser simple. Además, también resulta natural definir ideales principales de mayorización asociados a $\preceq^w$ y $\ll$ para, posteriormente, estudiar los politopos resultantes y, particularmente, su estructura facial. De otra parte, el estudio de la aditividad de los ideales principales de mayorización es, asimismo, de mucho interés en el presente trabajo.

Finalmente, es bien conocido que los vértices de $M(v)$ son las permutaciones del vector v y, en consecuencia, existe una biyección entre estos y las matrices de permutación de tamaño

$n \times n$, que no son otra cosa que el conjunto $\mathscr{A}(R,S)$ donde $R = S = \vec{1}$, lo cual motiva la pregunta sobre la posibilidad de construir una biyección entre los vértices de los permutaedros e ideales de mayorización con ciertos subconjuntos de $\mathscr{A}(R,S)$. Todas estas cuestiones las abordaremos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 2

POLITOPOS DE MAYORIZACIÓN

En este capítulo estudiaremos algunos politopos construidos a partir de los diferentes tipos de mayorización que estudiamos en el capítulo anterior. Varios de estos politopos ya tienen presencia en la literatura matemática y, en consecuencia, se han estudiado desde distintos puntos de vista; sin embargo, retomaremos algunos de los resultados conocidos sobre estos politopos teniendo en mente dos propósitos: de una parte, queremos mostrarle a nuestros lectores y lectoras que los estudios que hicimos en este trabajo continúan y complementan los trabajos realizados previamente por otros autores y, de otra parte, queremos mostrar un enfoque, en nuestra opinión, más natural, aunque ciertamente, menos *elegante*, para el estudio de estos objetos matemáticos. Esperamos que en la lectura de este capítulo el lector o lectora perciba y aprecie el espíritu metodológico que hemos usado para el estudio de estos bellos e interesantes objetos combinatorios llamados politopos de mayorización.
El capítulo lo dividimos en dos grandes partes. En la primera parte, nos concentramos en investigar los permutaedros de mayorización, donde los protagonistas son el permutaedro de mayorización, el permutaedro de mayorización débil y el permutaedro de mayorización fuerte; en la segunda parte, profundizamos en el estudio de los ideales principales de mayorización, que incluyen el ideal principal de mayorización, el ideal principal de mayorización débil y el ideal principal de mayorización fuerte. Aunque para cada uno de estos politopos investigamos varias propiedades, el lector o lectora notará que nuestro estudio se concentra en la estructura facial de cada uno de estos politopos y, específicamente, en nuestra motivación inicial, la cual fue describir combinatoriamente el retículo de caras de cada uno de estos objetos.

2.1. PERMUTAEDROS DE MAYORIZACIÓN

Esta es la primera parte del estudio que haremos de politopos de mayorización. Aquí estudiaremos tres permutaedros llamados permutaedro de mayorización, permutaedro de mayorización débil y permutaedro de mayorización fuerte, los cuales se asocian a las mayorizaciones $\preceq$, $\preceq^w$ y $\ll$, respectivamente, que fueron estudiadas en el capítulo anterior. Ciertamente hay un enfoque en nuestro estudio, el cual consiste en la descripción combinatoria de las estructuras faciales de estos objetos mediante retículos; sin embargo, a lo largo del estudio exploraremos

otras propiedades como la aditividad, mostraremos conexiones con problemas de optimización lineal, abordaremos relaciones con matrices combinatorias y, usando técnicas básicas de conteo, haremos el cálculo explícito de las componentes de los f-vectores de estos politopos.

2.1.1. PERMUTAEDRO DE MAYORIZACIÓN

A lo largo de esta sección nos proponemos estudiar el permutaedro de mayorición asociado con v, el cual denotamos $M(v)$. Aunque este objeto es isomorfo al permutaedro clásico, el cual es bien conocido y ha sido ampliamente estudiado, vale la pena dedicar esta sección a demostrar viejos resultados con técnicas y estrategias que extenderemos, posteriormente, al estudio de otros permutaedros de mayorización, ya que eso ofrece una suerte de continuidad al estudio que hacemos de estos politopos en el presente trabajo. Aunque a lo largo de esta sección exploramos varios elementos de $M(v)$, el objetivo principal es demostrar el resultado que caracteriza el retículo de caras de $M(v)$ mediante el retículo de particiones ordenadas de $[n]$. También demostramos la igualdad $M(v+\hat{v}) = M(v) + M(\hat{v})$ usando un enfoque con politopos de Newton, lo cual no fue encontrado en la literatura consultada y, en consecuencia, tiene cierto interés. De otra parte, encontraremos algunos resultados donde se caracterizan algunos problemas de optimización lineal relativos a $M(v)$.

DEFINICIÓN 2.1 ([DAH10], P. 3266,3267). Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, entonces el conjunto $M(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \preceq v\}$ se denomina **permutaedro de mayorización asociado con** v.

Otros términos con los que se hace referencia en la literatura a $M(v)$ es **permutaedro generalizado asociado con** v, véase por ejemplo [Zie95], o también lo encontramos bajo el nombre de **politopo de permutación asociado con** v en [Bar02].
A continuación desarrollamos en detalle ejemplos concretos que nos darán luces sobre la razón por la cual se usan los términos anteriores para el permutaedro de mayorización $M(v)$ y que, además, cumplen la importante función de ilustrar las ideas y técnicas básicas que hemos usado para investigar $M(v)$.

EJEMPLO 2.1. El permutaedro de mayorización asociado con $(2,1)$, el cual denotamos $M((2,1))$, lo conforman aquellos vectores $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la relación $x \preceq (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \leq 2$ y $x_2 \leq 1$, junto con la igualdad $x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$; esta es justamente la $\mathscr{H}$-descripción de $M((2,1))$. En la figura 2.1 mostramos una representación gráfica de $M((2,1))$, la cual nos permitirá hacer algunas observaciones sobre este politopo.

Los vértices de $M((2,1))$ son $(2,1)$ y $(1,2)$, que son precisamente las dos permutaciones del vector $(2,1)$. Aunque $M((2,1))$ es un politopo contenido en $\mathbb{R}^2$, su dimensión es 1. Cada vértice está contenido en exactamente una arista, lo cual nos muestra que $M((2,1))$ es un politopo simple. Las caras maximales de $M((2,1))$, que en este caso corresponden a los vértices, están determinados por las desigualdades de la $\mathscr{H}$-descripción de $M((2,1))$; específicamente, $(2,1)$ es el único elemento de $M(2,1)$ cumpliendo la igualdad $x_1 = 2$ y $(1,2)$ es el único elemento de $M(2,1)$ cumpliendo la igualdad $x_2 = 2$. Es más, existe una biyección entre $\mathscr{L}(M((2,1)))$, el retículo de caras de $M((2,1))$, y $\Pi_2 \cup \{\hat{0}\}$, el retículo de particiones ordenadas del conjunto $[2]$ adjuntándole un elemento mínimo, que mostramos en la tabla 2.1.

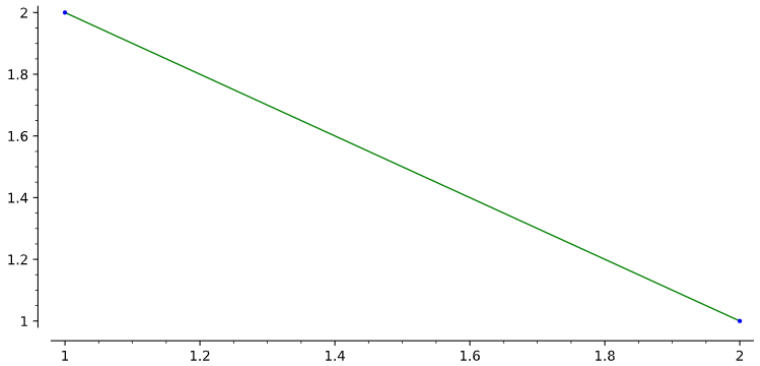


Figura 2.1: $M((2,1))$, permutaedro de mayorización asociado con $(2,1)$.

$M((2,1))$		
Caras de dimensión 1-0		
$M((2,1))$	$\emptyset \subsetneq \{1,2\}$	$(\{1,2\})$
Caras de dimensión 1-1		
$F_{\{1\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\}$	$(\{1\},\{2\})$
$F_{\{2\}}$	$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\}$	$(\{2\},\{1\})$

Tabla 2.1: Caras de $M((2,1))$.

Aquí, $F_{\{1\}} := \{(x_1,x_2) \in M((2,1)) \mid x_1 = 2\} = \{(2,1)\}$ y $F_{\{2\}} := \{(x_1,x_2) \in M((2,1)) \mid x_2 = 2\} = \{(1,2)\}$, corresponden a las caras maximales de $M((2,1))$. En las figuras 2.2 y 2.3 mostramos los diagramas de Hasse de $\mathscr{L}(M((2,1)))$ y $\Pi_2 \cup \{\hat{0}\}$, respectivamente.

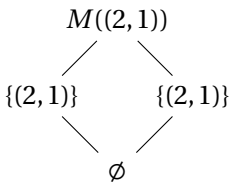


Figura 2.2: $\mathscr{L}(M((2,1)))$, retículo de caras de $M((2,1))$.

EJEMPLO 2.2. El permutaedro de mayorización asociado con $(3,2,1)$, el cual denotamos por $M((3,2,1))$, está conformado por los vectores $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la condición de mayorización $x \preceq (3,2,1)$, es decir, que cumplen con las desigualdades $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1 + x_3 \leq 5$ y $x_2 + x_3 \leq 5$, junto con la igualdad $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Estas condiciones conforman la $\mathscr{H}$-descripción del politopo $M((3,2,1))$. En la figura 2.4 mostramos un gráfico de $M((3,2,1))$, el cual usaremos posteriormente para hacer algunas observaciones sobre este politopo.

Los vértices de $M((3,2,1))$ son $(3,2,1)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(1,3,2)$ y $(1,2,3)$, es decir, corresponden a las permutaciones del vector $(3,2,1)$. A pesar de que $M((3,2,1))$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, la dimensión de este politopo es 2. Cada uno de los vértices está contenido en tantas aristas como la dimensión del politopo y, por esta razón, $M((3,2,1))$ es un politopo simple. Las

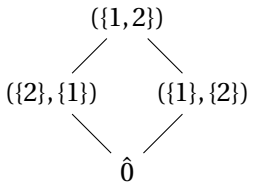


Figura 2.3: $\Pi_2 \cup \{\hat{0}\}$, retículo de particiones ordenadas de [2] con $\{\hat{0}\}$.

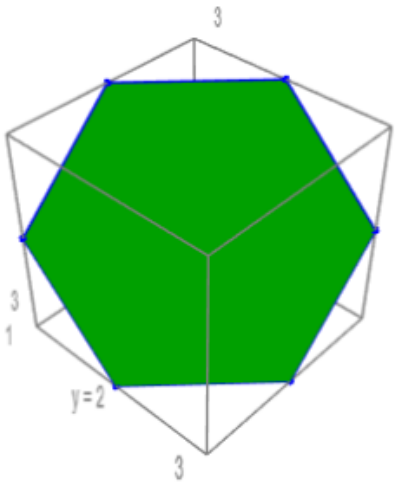


Figura 2.4: $M((3,2,1))$, permutaedro de mayorización asociado con $(3,2,1)$.

caras maximales de $M(3,2,1)$, que este caso corresponden a sus aristas, están en biyección con las desigualdades de su $\mathscr{H}$-descripción. Para precisar, presentamos las caras maximales de $M((3,2,1))$ en la tabla 2.2.

Además, existe una biyección entre $\mathscr{L}(M((3,2,1)))$, el retículo de caras de $M((3,2,1))$, y $\Pi_3 \cup \{\hat{0}\}$, el retículo de particiones ordenadas del conjunto [3] adjuntándole un elemento mínimo, la cual presentamos en la tabla 2.3.

Finalmente, en las figuras 2.5 y 2.6 mostramos los diagramas de Hasse de de $\mathscr{L}(M((3,2,1)))$ y $\Pi_3 \cup \{\hat{0}\}$, respectivamente, donde se aprecia que estos retículos son isomorfos.

2.1.1.1. VÉRTICES DE $M(v)$

Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, entonces el permutaedro de mayorización asociado con v, el cual denotamos por $M(v)$, consiste de los elementos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición $x \preceq v$, es decir, que cumplen las desigualdades $\sum_{i \in A} x_i \leq \sum_{i=1}^{|A|} v_i$, $\emptyset \subsetneq A \subsetneq [n]$, junto con la igualdad $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Estas restricciones nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $M(v)$ y, de hecho, nos permite afirmar que los hiperplanos definidos mediante $H_A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$, son los hiperplanos de soporte de $M(v)$. La intersección de $M(v)$ con un número finito de sus hiperplanos de soporte determina una cara de $M(v)$, no necesariamente propia, lo cual nos sugiere definir aquellas caras propias

Cara maximal de $M((3,2,1))$		**Desigualdad**
$F_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_1 = 3\}$ $= conv(\{(3,2,1),(3,1,2)\})$	$x_1 \leq 3$
$F_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_2 = 3\}$ $= conv(\{(2,3,1),(1,3,2)\})$	$x_2 \leq 3$
$F_{\{3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_3 = 3\}$ $= conv(\{(2,1,3),(1,2,3)\})$	$x_3 \leq 3$
$F_{\{1,2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 = 5\}$ $= conv(\{(3,2,1),(2,3,1)\})$	$x_1 + x_2 \leq 5$
$F_{\{1,3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_1 + x_3 = 5\}$ $= conv(\{(3,1,2),(2,1,3)\})$	$x_1 + x_3 \leq 5$
$F_{\{2,3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M((3,2,1)) \mid x_2 + x_3 = 5\}$ $= conv(\{(1,3,2),(1,2,3)\})$	$x_2 + x_3 \leq 5$

Tabla 2.2: Caras maximales de $M((3,2,1))$.

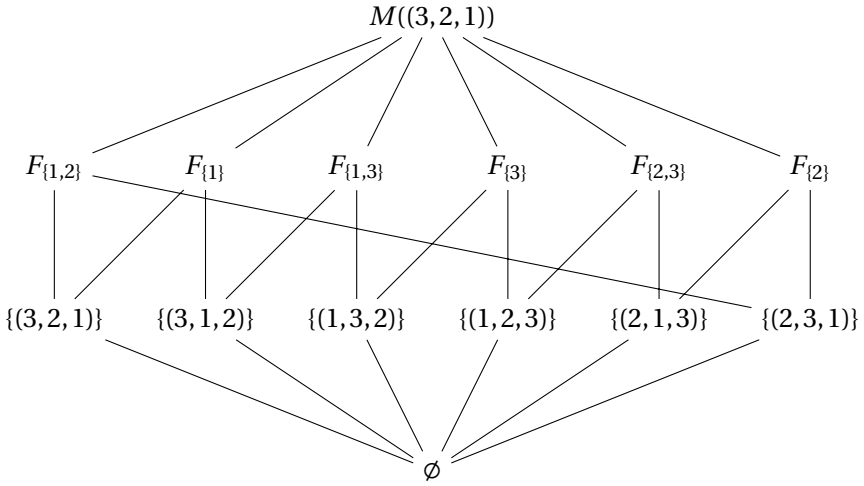


Figura 2.5: $\mathscr{L}(M((3,2,1)))$, retículo de caras de $M((3,2,1))$.

que se obtienen al intersectar $M(v)$ con un sólo hiperplano de soporte, es decir, definimos $F_A := M(v) \cap H_A$, $\emptyset \subsetneq A \subsetneq [n]$. Ahora bien, dado que toda cara se obtiene como intersección de los conjuntos anteriormente definidos, una pregunta natural es la siguiente: ¿cuándo estos conjuntos tienen intersección no vacía?

PROPOSICIÓN 2.1. *Si A y B son dos subconjuntos propios y no vacíos de $[n]$ distintos, entonces $F_A \cap F_B \neq \emptyset$ si, y sólo si, $A \subsetneq B$ o $B \subsetneq A$.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos propios y no vacíos de $[n]$ distintos. Supongamos que existe $y = (y_1,\ldots,y_n) \in F_A \cap F_B$ pero que $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que

$M((3,2,1))$		
Caras de dimensión 2-0		
$M((3,2,1))$	$\emptyset \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1,2,3\})$
Caras de dimensión 2-1		
$F_{\{1\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1\},\{2,3\})$
$F_{\{2\}}$	$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{2\},\{1,3\})$
$F_{\{3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{3\},\{1,2\})$
$F_{\{1,2\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1,2\},\{3\})$
$F_{\{1,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1,3\},\{2\})$
$F_{\{2,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{2,3\},\{1\})$
Caras de dimensión 2-2		
$F_{\{1\}} \cap F_{\{1,2\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1\},\{2\},\{3\})$
$F_{\{1\}} \cap F_{\{1,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{1\},\{3\},\{2\})$
$F_{\{2\}} \cap F_{\{1,2\}}$	$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{2\},\{1\},\{3\})$
$F_{\{2\}} \cap F_{\{2,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{2\},\{3\},\{1\})$
$F_{\{3\}} \cap F_{\{1,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{3\},\{1\},\{2\})$
$F_{\{3\}} \cap F_{\{2,3\}}$	$\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$	$(\{3\},\{2\},\{1\})$

Tabla 2.3: Caras de $M((3,2,1))$.

$|A \setminus B| = s \geq 1$ y $|B \setminus A| = t \geq 1$. Si $|A \cap B| = u$ entonces se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A \cup B} y_i &= \sum_{i \in A} y_i + \sum_{i \in B} y_i - \sum_{i \in A \cap B} y_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i + \sum_{i=1}^{|B|} v_i - \sum_{i \in A \cap B} y_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{|A \setminus B| + |A \cap B|} v_i + \sum_{i=1}^{|B \setminus A| + |A \cap B|} v_i - \sum_{i=1}^{|A \cap B|} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{s+u} v_i + \sum_{i=1}^{t+u} v_i - \sum_{i=1}^{u} v_i = \sum_{i=1}^{s+u} v_i + \sum_{i=1}^{u} v_i + \sum_{i=u+1}^{u+t} v_i - \sum_{i=1}^{u} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{s+u} v_i + \sum_{i=u+1}^{u+t} v_i > \sum_{i=1}^{s+u} v_i + \sum_{i=s+u+1}^{s+u+t} v_i = \sum_{i=1}^{s+u+t} v_i = \sum_{i=1}^{|A \cup B|} v_i,
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad tenemos presente que $y \in F_A \cap F_B$, en la segunda desigualdad usamos que $\sum_{i \in A \cap B} \leq \sum_{i=1}^{|A \cap B|} v_i$ y en la última desigualdad observamos que $v_{u+1} > v_{s+u+1}, \ldots, v_{u+t} > v_{s+u+t}$, pues $s \geq 1$. Hemos llegado a que $\sum_{i \in A \cup B} y_i > \sum_{i=1}^{|A \cup B|} v_i$, lo cual contradice que $y \in M(v)$, por lo tanto, si $F_A \cap F_B \neq \emptyset$ entonces $A \subsetneq B$ o $B \subsetneq A$.
Recíprocamente, si $A \subsetneq B$ entonces cualquier elemento $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo las condiciones $\{y_i \mid i \in A\} = \{v_1, \ldots, v_{|A|}\}$, $\{y_i \mid i \in B \setminus A\} = \{v_{|A|+1}, \ldots, v_{|B|}\}$ y $\{y_i \mid i \notin B\} = \{v_{|B|+1}, \ldots, v_n\}$ pertenece a $F_A \cap F_B$ y, en vista de que efectivamente existen elementos que satisfacen las condiciones anteriores, concluimos que $F_A \cap F_B \neq \emptyset$. Para el caso en que $B \subsetneq A$, se argumenta de manera similar. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces los vértices de $M(v)$ son las permutaciones del vector v.*

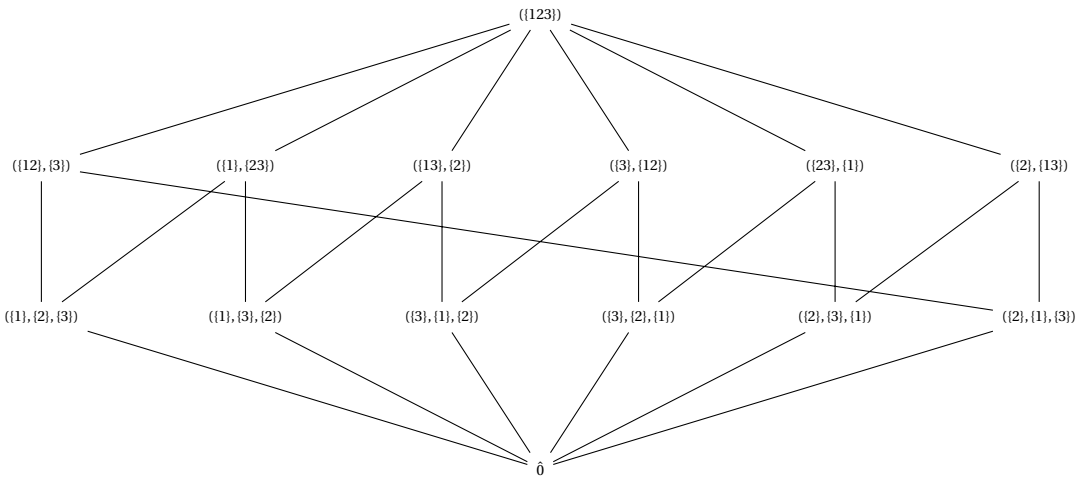


Figura 2.6: $\Pi_3 \cup \{\hat{0}\}$, retículo de particiones de $[3]$ con $\hat{0}$.

Demostración. Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y consideremos el permutaedro de mayorización asociado con v, el cual hemos denotado $M(v)$. Un elemento $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vértice de $M(v)$ si, y sólo si, existen $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos de $[n]$ satisfaciendo las condiciones $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$ y $\cap_{i=1}^{k} F_{A_i} = \{y\}$. Si en la cadena anidada $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$ existen un par de conjuntos consecutivos A y B tales que $|B| - |A| \geq 2$ entonces $\sum_{i=1}^{|B|} v_i = \sum_{i \in B} y_i = \sum_{i \in B \setminus A} y_i + \sum_{i \in A} y_i = \sum_{i \in B \setminus A} y_i + \sum_{i=1}^{|A|} v_i$, pues $y \in F_A \cap F_B$, lo cual implica que $\sum_{i \in B \setminus A} y_i = \sum_{i=1}^{|B|} v_i - \sum_{i=1}^{|A|} v_i = \sum_{i=|A|+1}^{|B|} v_i$. Como consecuencia de lo anterior, cualquier elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ que cumpla las igualdades $\{x_i \mid i \in B \setminus A\} = \{v_{|A|+1}, \ldots, v_{|B|}\}$ y $x_i = y_i$, siempre que $i \notin B \setminus A$, pertenece a $\bigcap_{i=1}^{k} F_{A_i}$, y, dado que $|B| - |A| \geq 2$, existen varios de tales elementos, afirmación que contradice que y es el único elemento de $\bigcap_{i=1}^{k} F_{A_i}$. Por lo tanto, la cadena anidada $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$ es de la forma $\emptyset \subsetneq \{j_1\} \subsetneq \{j_1, j_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}\} \subsetneq [n]$ y, consecuentemente, todo vértice de $M(v)$ es una permutación del vector v. □

PROPOSICIÓN 2.3. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces el problema de optimización lineal* $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ *tiene solución única si, y sólo si, el vector c tiene sus componentes distintas dos a dos.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. Consideremos, además, un vector $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ y el problema de optimización lineal $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$. En vista de que $M(v)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado y $\langle c, x \rangle$ es continuo, por ser un funcional lineal, entonces el problema de optimización $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ tiene solución.

(⇒) Supongamos que el problema de optimización lineal $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ tiene solución única dada por el elemento $y = (y_1, \ldots, y_n)$, el cual debe ser un vértice de $M(v)$. Si c tuviera dos componentes iguales c_i y c_j, entonces el elemento que se obtiene a partir de y intercambiando y_i con y_j resulta ser una solución de $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ distinta de y, lo cual contradice la unicidad de la solución de este problema. Por lo tanto, c debe tener todas sus componentes distintas dos a dos.

($\Leftarrow$) Si c tiene todas sus componentes distintas dos a dos entonces existen índices $i_1,\ldots,i_n \in [n]$ tales que $c_{i_k} = c_{[k]}$, para cada $k \in [n]$, y $c_{[1]} > \cdots > c_{[n]}$, en cuyo caso, la única solución del problema de optimización lineal $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$ es el elemento $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones $y_{i_k} = v_k$, para cada $k \in [n]$.

□

2.1.1.2. $M(v)$ ES UN POLITOPO SIMPLE

Una de las propiedades más importantes que tiene el politopo $M(v)$ es la propiedad de ser simple; en particular, dicha propiedad nos permitirá describir su estructura facial mediante particiones ordenadas de $[n]$. Así pues, este apartado lo dedicamos principalmente a demostrar que $M(v)$ es un politopo simple. Para ello, iniciamos mostrando que $M(v)$ es un n-politopo, es decir, que tiene dimensión n; posteriormente, caracterizamos los problemas de optimización lineal sobre $M(v)$ cuyo conjunto solución es una arista de $M(v)$ para, finalmente, y apoyados en los resultados previos, establecer y demostrar el resultado principal del apartado.

PROPOSICIÓN 2.4. *Si $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces la dimensión de $M(v)$ es $n-1$.*

Demostración. Sean $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. Consideremos, además, el hiperplano definido por $H := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n v_i\}$, el cual tiene dimensión $n-1$. Si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in M(v)$ entonces satisface la condición $x \preceq v$; en particular, cumple la igualdad $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n v_i$, es decir, tenemos que $M(v) \subseteq H$ y, en consecuencia, $\dim(M(v)) \leq \dim(H) = n-1$. Para ver que $\dim(M(v)) \geq n-1$, es suficiente mostrar que $M(v)$ contiene n vectores afínmente independientes. En concordancia con lo anterior, consideremos los n vectores definidos mediante $v^0 := v$ y v^k, $k \in [n-1]$, el vector que se obtiene a partir de v intercambiando los elementos v_k con v_{k+1}, pero dejando el resto de sus componentes iguales. Notemos que los n vectores anteriormente definidos son vértices de $M(v)$, ya que son permutaciones del vector v, y veamos que estos vectores son afínmente independientes. Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son números reales satisfaciendo $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i v^i = \vec{0}$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\left(\sum_{i\in[n]\setminus\{2\}} \lambda_i\right) v_1 + \lambda_2 v_2 = 0, \tag{2.1}$$

$$\left(\sum_{i+\in[n]\setminus\{k,k+1\}} \lambda_i\right) v_k + \lambda_k v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0, \quad 2 \leq k \leq n-1, \tag{2.2}$$

$$\left(\sum_{i\in[n]\setminus\{n\}} \lambda_i\right) v_n + \lambda_n v_{n-1} = 0. \tag{2.3}$$

Dado que $\sum_{i\in[n]} \lambda_i = 0$ entonces $\sum_{i\in[n]\setminus\{2\}} \lambda_i = -\lambda_2$ y $\sum_{i+\in[n]\setminus\{k,k+1\}} \lambda_i = -\lambda_k - \lambda_{k+1}$; además, al realizar las respectivas sustituciones en las ecuaciones 2.1 y 2.2, obtenemos que

$$\lambda_2(v_1 - v_2) = 0, \tag{2.4}$$

$$\lambda_k(v_k - v_{k-1}) + \lambda_{k+1}(v_k - v_{k+1}), \quad 2 \leq k \leq n-1, \tag{2.5}$$

por lo cual, en vista de que las componentes del vector v son distintas dos a dos, concluimos que $\lambda_j = 0$ para cada $j \in [n]$. En efecto, de la igualdad 2.4 obtenemos $\lambda_2 = 0$, al sustituir en 2.5 con $k = 2$ conseguimos $\lambda_3 = 0$, y reemplazando nuevamente en 2.5 pero con $k = 3$ llegamos a que $\lambda_4 = 0$. Continuando de manera sucesiva obtenemos que $\lambda_j = 0$, para cada $j \in [n] \setminus \{1\}$ y, finalmente, de $\sum_{i\in[n]} \lambda_i = 0$ concluimos que $\lambda_1 = 0$. Lo anterior muestra que $v^0, v^1, \ldots, v^{n-1}$ forman un conjunto de n vectores afínmente independientes contenidos en $M(v)$, de donde, concluimos que $\dim(M(v)) \geq n-1$. □

PROPOSICIÓN 2.5. *El problema de optimización lineal* $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$ *tiene como conjunto solución una arista de* $M(v)$ *si, y sólo si, el vector* c *tiene exactamente dos componentes iguales.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. Consideremos, además, un vector $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ y el problema de optimización lineal $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$. En vista de que $M(v)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado y $\langle c, x\rangle$ es continuo, por ser un funcional lineal, entonces el problema de optimización $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$ tiene solución.

(⇒) Supongamos que el problema de optimización lineal $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución una arista de $M(v)$. Por lo tanto, exactamente un par de vértices de $M(v)$ son solución del problema. Por la proposición 2.3, c no puede tener sus componentes distintas dos a dos; en consecuencia, c tiene dos o más componentes iguales. Ahora bien, si c tuviera tres o más componentes iguales dadas por $c_{i_1}, \ldots, c_{i_t}$, $t \geq 3$, y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}(M(v))$ es un elemento del conjunto solución del problema $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$, entonces todos los vectores que se obtienen a partir de y permutando las componentes $y_{i_1}, \ldots, y_{i_t}$ son también soluciones del problema, y como $t \geq 3$, hay al menos 6 vértices de $M(v)$ en el conjunto solución de $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$, suceso que es contradictorio con nuestra hipótesis. Por lo tanto, c tiene exactamente dos componentes iguales.

(⇐) Supongamos que c tiene exactamente dos componentes iguales e $i_1, \ldots, i_n \in [n]$ son índices tales que $c_{i_j} = c_{[j]}$, para cada $j \in [n]$, y $c_{[1]} > \cdots > c_{[k]} = c_{[k+1]} > \cdots > c_{[n]}$. Tenemos que $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{y} = (\hat{y_1}, \ldots, \hat{y_n}) \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $y_{i_j} = \hat{y_{i_j}} = v_j$, para cada $j \in [n] \setminus \{k, k+1\}$, junto con $y_{i_k} = \hat{y_{i_{k+1}}} = v_k$ y $y_{i_{k+1}} = \hat{y_{i_k}} = v_{k+1}$ son los únicos vértices de $M(v)$ que están en el conjunto solución del problema de optimización lineal $\max_{x\in M(v)} \langle c, x\rangle$, razón por la cual, el conjunto solución de este problema es una arista de $M(v)$.

□

PROPOSICIÓN 2.6. *Si* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *es tal que* $v_1 > \cdots > v_n > 0$ *y* $M(v)$ *es el permutaedro de mayorización asociado con* v*, entonces* $M(v)$ *es un politopo simple.*

Demostración. Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. En virtud de la proposición 2.3, dos vértices son incidentes en una arista de $M(v)$ si, y sólo si, uno de ellos se obtiene a partir del otro al intercambiar las componentes v_k y v_{k+1}, para algún $k \in [n-1]$, de donde, se sigue que cada vértice pertenece a

exactamente $n-1$ aristas de $M(v)$ y, como $M(v)$ tiene dimensión $n-1$, concluimos que este politopo es simple. □

2.1.1.3. ESTRUCTURA FACIAL DE $M(v)$

En el apartado anterior, mostramos que $M(v)$ es un politopo simple, razón por la cual, existe una correspondencia biyectiva entre las caras de $M(v)$ con dimensión $n-k$ y las intersecciones no vacías de k de sus caras maximales, para cada $k \in [n]$. De manera que, si queremos describir combinatoriamente la estructura facial de $M(v)$, inicialmente, tendremos que caracterizar las caras maximales de este politopo y, posteriormente, describir las intersecciones no vacías de estas caras maximales. Con esto en mente, en el presente apartado mostramos, como resultado principal, que $\mathscr{L}(M(v)) \cong \Pi_n \cup \{\hat{0}\}$, es decir, que el retículo de caras del permutaedro de mayorización asociado con v es isomorfo al retículo de particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$.

LEMA 2.7. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces el conjunto $F_A := \{(x \in M(v) \mid \sum_{i\in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, donde A es un subconjunto propio no vacío de $[n]$, es la envolvente convexa de los vértices de $M(v)$ que tienen en las componentes con índices en A los elementos $v_1, \ldots, v_{|A|}$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal $v_1 > \cdots > v_n > 0$, $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v, A un subconjunto propio no vacío de $[n]$ y $F_A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M(v) \mid \sum_{i\in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$. Supongamos que existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, que es vértice de F_A pero que no tiene en las componentes con índices en A los elementos $v_1, \ldots, v_{|A|}$. Por lo tanto, existe $j \in A$ tal que $y_j < v_{|A|}$, de donde, $\sum_{i\in A} y_i = \sum_{i\in A\setminus\{j\}} y_i + y_j \leq \sum_{i=1}^{|A|-1} v_{[i]} + y_j < \sum_{i=1}^{|A|-1} v_{[i]} + v_{|A|} = \sum_{i=1}^{|A|} v_{[i]}$, suceso que contradice que $y \in M(v)$. En consecuencia, tenemos que en las componentes de y con índices en A deben estar los elementos $v_1, \ldots, v_{|A|}$. □

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces los conjuntos $F_A := \{(x \in M(v) \mid \sum_{i\in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subsetneq [n]$, son las caras maximales de $M(v)$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal $v_1 > \cdots > v_n > 0$, $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v, A un subconjunto propio no vacío de $[n]$ y F una cara de $M(v)$ tal que $F_A \subseteq F$. En vista de que toda cara de $M(v)$ se obtiene como intersección de $M(v)$ con un número finito de hiperplanos de soporte de este politopo, tenemos que existen F_{A_i}, $i \in [k]$, tales que $F = \bigcap_{i=1}^{k} F_{A_i}$ cumpliéndose que $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$, de donde $F_A \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} F_{A_i} \subseteq F_{A_i}$, $i \in [k]$. De lo anterior, tenemos que $F_A \subseteq F_{A_i}$, para cada $i \in [k]$, y deseamos mostrar que $F_A = F$, para lo cual, es suficiente ver que $A = A_i$, para cada $i \in [k]$. Supongamos que existe $j \in [k]$ tal que $F_A \neq F_{A_j}$, pero, como $F_A \cap F_{A_j} = F_A \neq \emptyset$, entonces $A \subsetneq A_j$ o $A_j \subsetneq A$. En cualquier caso, existe un vértice que tiene los elementos $v_1, \ldots, v_{|A|}$ en las componentes con índices en A y, simultáneamente, tiene el elemento $v_{|A_j|}$ en un índice fuera de A_j, el cual pertenece a F_A pero no a F_{A_j}, contradiciendo que $F_A \subseteq F_{A_j}$. Por consiguiente, $A = A_i$, para cada $i \in [k]$, y, como resultado de esto, podemos afirmar que $F_A = F$, es decir, que F_A es una cara maximal. □

Teniendo presente que el número de subconjuntos propios no vacíos de $[n]$ es $2^n - 2$, como

consecuencia del resultado anterior, podemos afirmar que el número de caras maximales de $M(v)$ es 2^n-2. De otra parte, dado que $M(v)$ es un politopo simple de dimensión $n-1$, para cada $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, existe una correspondencia biyectiva entre las intersecciones no vacías de k caras maximales de $M(v)$ y las caras de dimension $(n-1)-k$ de este politopo. Con el siguiente resultado nos proponemos describir de manera combinatoria la estructura facial de $M(v)$.

TEOREMA 2.9. *Si $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $v_1>\cdots>v_n>0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces $\mathscr{L}(M(v))\cong\Pi_n\cup\{\hat{0}\}$, es decir, el retículo de caras de $M(v)$ es isomorfo al retículo de particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$.*

Demostración. Sean $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $v_1>\cdots>v_n>0$ y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. Si F es una cara propia no vacía de $M(v)$ entonces, por la proposición 2.1, existe $k\in[n-1]$ tal que $F=\bigcap_{i=1}^{k}F_{A_i}$, donde $\emptyset\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_k\subsetneq[n]$. Además, a la cadena anidada $\emptyset\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_k\subsetneq[n]$ le podemos asignar, de manera unívoca, la partición ordenada de $[n]$ dada por $(A_1,A_2\setminus A_1,\ldots,A_k\setminus A_{k-1},[n]\setminus A_k)$. Lo anterior sugiere definir $\Psi:\mathscr{L}(M(v))\to\Pi_n\cup\{\hat{0}\}$ mediante $\Psi(F):=(A_1,A_2\setminus A_1,\ldots,A_k\setminus A_{k-1},[n]\setminus A_k)$, junto con las igualdades $\Psi(\emptyset)=\hat{0}$ y $\Psi(M(v))=([n])$. Veamos que Ψ es un isomorfismo de retículos:

(a) Ψ **está bien definida:** si $F\in\mathscr{L}(M(v))$ es una cara propia no vacía, entonces existe $k\in[n-1]$ tal que $F=\bigcap_{i=1}^{k}F_{A_i}$, donde $\emptyset\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_k\subsetneq[n]$ y esta cadena queda determinada unívocamente por F. Así, tenemos que $\Psi(F):=(A_1,A_2\setminus A_1,\ldots,A_k\setminus A_{k-1},[n]\setminus A_k)\in\Pi_n\cup\{\hat{0}\}$ está bien definida. De otra parte, es claro que $\Psi(\emptyset)=\hat{0}$ y $\Psi(M(v))=([n])$ son elementos de $\Pi_n\cup\{\hat{0}\}$, con lo cual podemos concluir que Ψ es una aplicación bien definida.

(b) Ψ **es inyectiva:** sean $F_1,F_2\in\mathscr{L}(M(v))$ caras propias no vacías tales que $\Psi(F_1)=\Psi(F_2)$. Si $F_1=\bigcap_{i=1}^{k_1}F_{A_i}$, donde $\emptyset\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_k\subsetneq[n]$, y $F_2=\bigcap_{i=1}^{k_2}F_{B_i}$, donde $\emptyset\subsetneq B_1\subsetneq\cdots\subsetneq B_k\subsetneq[n]$, para algunos enteros $k_1,k_2\in[n-1]$, entonces $\Psi(F_1)$ y $\Psi(F_2)$ son particiones de $[n]$ con k_1 y k_2 bloques, respectivamente, pero, en vista de que $\Psi(F_1)=\Psi(F_2)$, necesariamente $k_1=k_2=k$ y $A_i=B_i$, $i\in[k]$, razón por la cual, concluimos que $F_1=F_2$.

(c) Ψ **es sobreyectiva:** si $\pi=(\pi_1,\pi_2\ldots,\pi_{k+1})\in\Pi_n$, para algún $k\in[n]$, entonces definimos $A_j:=\bigcup_{i=1}^{j}\pi_i$, $j\in[k]$, y $F=\bigcap_{j=1}^{k}F_{A_j}$, para los cuales se verifica que $\Psi(F)=\pi$. En efecto, en primer lugar se satisface que $\emptyset\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_k\subsetneq[n]$, debido a que todos los bloques de π son no vacíos y a la manera como se definieron los conjuntos A_j, $j\in[k]$. Por consiguiente, tenemos que $F\in\mathscr{L}(M(v))$ y se cumplen las igualdades $\Psi(F)=\Psi\left(\bigcap_{j=1}^{k}F_{A_j}\right)=(A_1,A_2\setminus A_1,\ldots,A_k\setminus A_{k-1},[n]\setminus A_k)=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k,\pi_{k+1})=\pi$. De otra parte, si $\pi=([n])$ entonces $\pi=\Psi(M(v))$ y $\hat{0}$ es la imagen mediante Ψ de la cara vacía. De lo anterior, podemos afirmar que Ψ es una aplicación sobreyectiva.

(d) Ψ **preserva coberturas:** si F y G son caras propias no vacías de $M(v)$ tales que G cubre a F, entonces F se obtiene a partir de G mediante la intersección de esta última cara con un hiperplano de soporte de $M(v)$ no considerado en la intersección que define a G, lo cual ocasiona que la cadena asociada a F se obtenga a partir de la cadena asociada a G añadiendo exactamente un conjunto. En este caso, claramente $\Psi(F)\lessdot\Psi(G)$ en Π_n. De otra parte, $M(v)$ cubre a las caras maximales, la cual es, claramente, una relación que se preserva a través de Ψ. Finalmente, los vértices de $M(v)$ cubren a la cara vacía y,

teniendo presente que $M(v)$ es un $(n-1)$-politopo simple, sus vértices se obtienen como la intersección de $n-1$ caras maximales, razón por la cual, la imagen de los vértices bajo la aplicación Ψ son particiones ordenadas de $[n]$ con n bloques unitarios, las cuales cubren a $\hat{0} = \Psi(\emptyset)$ en el retículo $\Pi_n \cup \{\hat{0}\}$.

(e) Ψ^{-1} **preserva coberturas:** si $\pi, \tilde{\pi} \in \Pi_n$ son tales que $\pi \lessdot \tilde{\pi}$ en Π_n, entonces π y $\tilde{\pi}$ son de las formas $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_j, B_{j+1}, \ldots, B_{k-1}, B_k)$ y $\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_j \cup B_{j+1}, \ldots, B_{k-1}, B_k)$, respectivamente. En consecuencia, tenemos las siguientes igualdades:

$$\Psi^{-1}(\pi) = F_{B_1} \cap F_{(B_1 \cup B_2)} \cap \cdots \cap F_{(B_1 \cup \cdots \cup B_j)} \cap F_{(B_1 \cup \cdots \cup B_j \cup B_{j+1})} \cap \cdots \cap F_{(B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})},$$
$$\Psi^{-1}(\tilde{\pi}) = F_{B_1} \cap F_{(B_1 \cup B_2)} \cap \cdots \cap F_{(B_1 \cup \cdots \cup B_j \cup B_{j+1})} \cap \cdots \cap F_{(B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})},$$

de las cuales, concluimos que $\Psi^{-1}(\pi) \lessdot \Psi^{-1}(\tilde{\pi})$ en $\mathscr{L}(M(v))$. De otra parte, si $\pi \in \Pi_n$ es tal que $\hat{0} \lessdot \pi$, entonces π es una partición ordenada de $[n]$ con n bloques. Por consiguiente, tenemos que $\Psi^{-1}(\hat{0}) = \emptyset$ y $\Psi^{-1}(\pi)$ es un vértice de $M(v)$, razón por la cual, concluimos que $\Psi^{-1}(\hat{0}) \lessdot \Psi^{-1}(\pi)$ en $\mathscr{L}(M(v))$. Por lo tanto, podemos afirmar que Ψ^{-1} preserva coberturas.

En conclusión, Ψ es un isomorfismo de retículos y, en consecuencia, $\mathscr{L}(M(v)) \cong \Pi_n \cup \{\hat{0}\}$. □

En el siguiente resultado, usamos la caracterización del retículo de caras de $M(v)$ mediante particiones ordenadas de $[n]$ para, apoyados en elementos básicos de conteo, calcular las componentes del f-vector de $M(v)$.

TEOREMA 2.10. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ es el permutaedro de mayorización asociado con v, entonces el número de caras de $M(v)$ con dimensión $n-k$, $k \in [n]$, es $k!S(n,k)$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$ el permutaedro de mayorización asociado con v. En vista de que $M(v)$ es un $(n-1)$-politopo simple existe una biyección entre el número de caras de $M(v)$ con dimensión $n-k = (n-1)-(k-1)$ y las intersecciones no vacías de $k-1$ caras maximales distintas, $k \in [n]$. Además, teniendo presente que la imagen de estas intersecciones mediante la función Ψ, utilizada en el teorema anterior, coincide con el conjunto de particiones ordenadas de n con k bloques, concluimos que el número de caras de $M(v)$ con dimensión $n-k$, $k \in [n]$, es $k!S(n,k)$. □

2.1.1.4. ADITIVIDAD DE $M(v)$

En este corto apartado mostramos una prueba alternativa de la aditividad de $M(v)$. En [Dah10] encontramos un par de pruebas: la primera de ellas, está basada en polimatroides y funciones submodulares y, la segunda, usa herramientas de mayorización. De otra parte, la prueba que nosotros ofrecemos se basa en la identificación de $M(v)$ con un politopo de Newton, asociado a cierto polinomio de Laurent. Aunque esta prueba no la encontramos en la literatura consultada, resulta muy interesante por su sencillez y, especialmente, porque la idea central la aplicaremos en la sección siguiente para estudiar la aditividad de $M^w(v)$, el permutaedro de mayorización débil asociado con v.

TEOREMA 2.11. *Si* $v=(v_1,\dots,v_n),\hat{v}=(\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_n)\in\mathbb{R}^n$ *son tales que* $v_1>\cdots>v_n>0$ *y* $\hat{v}_1>\cdots>\hat{v}_n>0$, *entonces* $M(v+\hat{v})=M(v)+M(\hat{v})$.

Demostración. Definamos los polinomios de Laurent $f(X):=\sum_{\sigma\in S_n}X^{\sigma(v)}$ y $g(X):=\sum_{\rho\in S_n}X^{\rho(\hat{v})}$, de manera que, $\mathscr{S}(f)=\{\sigma(v)\mid\sigma\in S_n\}$ y $\mathscr{S}(g)=\{\rho(\hat{v})\mid\rho\in S_n\}$. En consecuencia, tenemos que $\mathscr{N}(f)=conv(\{\sigma(v)\mid\sigma\in S_n\})=M(v)$ y $\mathscr{N}(g)=conv(\{\rho(\hat{v})\mid\rho\in S_n\})=M(\hat{v})$, razón por la cual, $M(v)+M(\hat{v})=\mathscr{N}(f)+\mathscr{N}(g)=\mathscr{N}(fg)$. Nos restaría ver que $\mathscr{N}(fg)=M(v+\hat{v})$. Observemos que se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}fg(X)=f(X)g(X)&=\sum_{\sigma\in S_n}X^{\sigma(v)}\sum_{\rho\in S_n}X^{\rho(\hat{v})}=\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\rho\in S_n}X^{\sigma(v)+\rho(\hat{v})}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}X^{\sigma(v)+\sigma(\hat{v})}+\sum_{\substack{\sigma,\rho\in S_n\\\sigma\neq\rho}}X^{\sigma(v)+\rho(\hat{v})}=\sum_{\sigma\in S_n}X^{\sigma(v+\hat{v})}+\sum_{\substack{\sigma,\rho\in S_n\\\sigma\neq\rho}}X^{\sigma(v)+\rho(\hat{v})},\end{aligned}$$

de donde, tenemos que $\mathscr{N}(fg)=conv\left(\{\sigma(v+\hat{v}),\sigma(v)+\rho(\hat{v})\mid\sigma,\rho\in S_n\text{ con }\sigma\neq\rho\}\right)$ y, en vista de que, $M(v+\hat{v})=conv(\{\sigma(v+\hat{v})\mid\sigma\in S_n\})$, concluimos que, $M(v+\hat{v})\subseteq\mathscr{N}(fg)$. De otra parte, para cualesquiera $\sigma,\rho\in S_n$, se verifica que $\sigma(v)+\rho(\hat{v})\preceq v+\hat{v}$ y, por lo tanto, se satisface la contenencia $conv\left(\{\sigma(v)+\rho(\hat{v})\mid\sigma,\rho\in S_n\text{ con }\sigma\neq\rho\}\right)\subseteq M(v+\hat{v})$, lo cual nos permite afirmar que $\mathscr{N}(fg)\subseteq M(v+\hat{v})$. En conclusión, $\mathscr{N}(fg)=M(v+\hat{v})$, de donde, $M(v+\hat{v})=M(v)+M(\hat{v})$. □

2.1.1.5. COMENTARIOS FINALES

Esta sección, la cual dedicamos al estudio de $M(v)$, el permutaedro de mayorización asociado con v, siendo $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ satisfaciendo $v_1>\cdots>v_n>0$, la hicimos con dos propósitos, los cuales comentamos a continuación.

(i) El primer propósito consiste en *presentar un tratamiento del retículo de caras de* $M(v)$ *que atienda de manera explícita a la propiedad de ser simple*, razón por la cual, realizamos un estudio detallado y lento de algunos elementos de $M(v)$ que nos permitieran, posteriormente, emprender la descripción combinatoria de las intersecciones no vacías de caras maximales de $M(v)$. En este proceso, siempre atentos a aquello que fuésemos necesitando, mostramos un par de caracterizaciones del vector c referidas al problema de optimización lineal $\max_{x\in M(v)}\langle c,x\rangle$, a saber, cuando este problema admite una o dos soluciones en $\mathscr{V}(M(v))$. El espíritu que orientó el trabajo realizado sobre $M(v)$ nos exigió mantener una visión enfocada en el detalle junto con una actitud de no admitir por dadas cosas que, no con poca frecuencia, se consideran obvias; por ejemplo, a pesar de ser bien conocido que los vértices de $M(v)$ son las permutaciones de v y que su dimensión es $\dim(M(v))=n-1$, nosotros ofrecimos una prueba de estos hechos.
Así pues, reconociendo que varios de los resultados que presentamos en esta sección son bien conocidos en la literatura pero, asimismo, siendo conscientes de que el tratamiento que dimos de ellos no carece de originalidad, queremos extender la invitación al lector o lectora a consultar el tratamiento que se le da a la estructura facial de $M(v)$ en [BKL85], [BS96] y [Bar02], para apreciar distancias y cercanías entre el tratamiento que allí se hace y el que nosotros hacemos en esta sección.

(ii) El segundo propósito fue *presentar una prueba alternativa de la aditividad de* $M(v)$. En la literatura consultada encontramos un par de pruebas: la primera, basada en propiedades del poliedro base asociado a una función submodular, y la segunda, apoyada en técnicas de mayorización, véase [Dah10] para más detalles. Desde nuestra perspectiva, la prueba que ofrecemos resulta muy interesante por su sencillez y, además, porque fue una herramienta que pudimos aplicar con facilidad para el estudio de la aditividad en otros de los politopos que estudiamos en nuestro trabajo. Nuevamente, invitamos al lector o lectora a consultar las mencionadas pruebas de la aditividad de $M(v)$ para, de esta manera, contrastar el tratamiento que en estas se realiza con aquel que llevamos a cabo en el presente trabajo.

2.1.2. PERMUTAEDRO DE MAYORIZACIÓN DÉBIL

El estudio que emprendemos en esta sección se enmarca en el mismo espíritu de aquel que realizamos en la sección anterior; es decir, nuestro objetivo principal, al igual que entonces, es la descripción combinatoria de la estructura facial del permutaedro de mayorización débil asociado con v, que denotamos $M^w(v)$, para lo cual, usaremos estrategias y técnicas similares a las utilizadas al estudiar $\mathscr{L}(M(v))$. Asimismo, mostramos una prueba alternativa de la aditividad de $M^w(v)$ usando politopos de Newton y, al final de la sección, presentamos una biyección entre los vértices de $M^w(v)$ y ciertas matrices combinatorias contenidas en $\mathscr{A}(R,S)$, biyección, que en cierto modo, extiende la existente entre los vértices de $M(v)$ y las matrices de permutación.

En el año 1959, en una publicación titulada *On a Convex Set of Matrices*, el matemático ruso Mirsky presentó resultados en torno al conjunto de matrices doble subestocásticas y al concepto de mayorización débil, véase [Mir59]. El teorema de Mirsky afirma lo siguiente: si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $x \preceq^w y$ si, y sólo si, x está en la envolvente convexa del conjunto $\{(\eta_1 y_{\pi_1}, \ldots, \eta_n y_{\pi_n}) \mid \pi \in S_n; \eta_i \in \{0,1\}, i \in [n]\}$, razón por la cual, nosotros denominamos **conjunto de Mirsky** al conjunto $\{(\eta_1 y_{\pi_1}, \ldots, \eta_n y_{\pi_n}) \mid \pi \in S_n; \eta_i \in \{0,1\}, i \in [n]\}$. Este resultado sugiere definir el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w y\}$, objeto que nosotros no encontramos definido en la literatura consultada. En consecuencia con lo anterior, empezamos presentando al lector o lectora la definición que dimos del *permutaedro de mayorización débil*, la cual construimos con base en el teorema de Mirsky y en la definición, presentada en la sección anterior, de permutaedro de mayorización.

DEFINICIÓN 2.2. Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$, entonces el conjunto $M^w(v) := \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w v\right\}$ lo denominamos **permutaedro de mayorización débil asociado con** v.

EJEMPLO 2.3. El permutaedro de mayorización débil asociado con el vector $(2,1)$, el cual denotamos $M^w((2,1))$, contiene los vectores $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ que satisfacen la condición $x \preceq^w (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 2$ y $x_1 + x_2 \leq 3$. Estas desigualdades conforman, de hecho, una $\mathscr{H}$-descripción de $M^w((2,1))$ y nos permiten obtener una representación gráfica de este politopo en el plano cartesiano, la cual mostramos en la figura 2.7, que usamos posteriormente para hacer algunas observaciones sobre $M^w((2,1))$.

El conjunto de vértices de $M^w((2,1))$ es $\mathscr{V}(M^w(2,1)) = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2)\}$; la dimensión de $M^w((2,1))$ es 2, que corresponde a la dimensión de $\mathbb{R}^2$; cada vértice de $M^w((2,1))$ está contenido en exactamente dos aristas, lo que nos muestra que $M^w((2,1))$ es un politopo

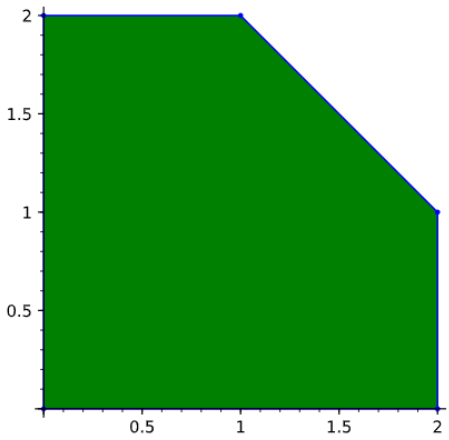


Figura 2.7: $M^w((2,1))$, permutaedro de mayorización débil asociado con $(2,1)$.

simple. En la figura 2.8 mostramos $G(M^w((2,1)))$, el grafo del politopo $M^w((2,1))$.

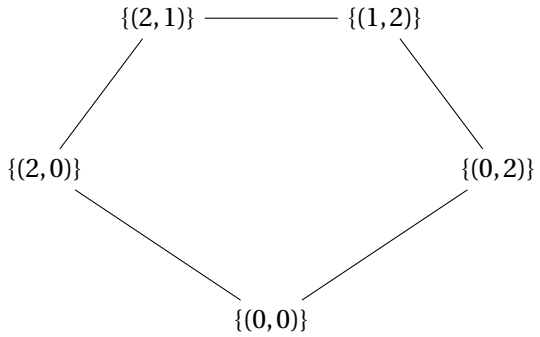


Figura 2.8: $G(M^w((2,1)))$, grafo del politopo $M^w((2,1))$.

Las caras maximales de $M^w((2,1))$ se pueden poner en correspondencia biyectiva con las desigualdades de la $\mathscr{H}$-descripción de $M^w((2,1))$. Esta correspondencia la exhibimos en la tabla 2.4.

Dado que $M^w((2,1))$ es un 2-politopo simple entonces, para cada $k \in \{0,1,2\}$, hay una biyección entre las caras de dimensión $2-k$ y las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $M^w((2,1))$. Asimismo, estas intersecciones pueden ponerse en correspondencia con parejas ordenadas, donde la primera componente es un subconjunto I de $[2]$, mientras que la segunda componente es una cadena anidada sobre $[2] \setminus I$. En la tabla 2.5 presentamos la biyección existente entre las parejas ordenadas mencionadas y las caras de $M^w((2,1))$.

EJEMPLO 2.4. El permutaedro de mayorización débil asociado con el vector $(3,2,1)$, el cual denotamos por $M^w((3,2,1))$, contiene los elementos $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ que cumplen la condición $x \preceq^w (3,2,1)$, es decir, que satisfacen las desigualdades $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 3$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1 + x_3 \leq 5$, $x_2 + x_3 \leq 5$ y $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Estas desigualdades conforman una $\mathscr{H}$-descripción de $M^w((3,2,1))$ y ellas nos permiten visualizar este politopo en $\mathbb{R}^3$. En la figura 2.9 mostramos una representación gráfica de $M^w((3,2,1))$, que usaremos después para formular algunas observaciones sobre este politopo.

Cara maximal de $M^w((2,1))$		**Desigualdad**
$F^w_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2) \in M^w((2,1)) \mid x_1 = 2\}$ $= conv(\{(2,0),(2,1)\})$	$x_1 \leq 2$
$F^w_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2) \in M^w((2,1)) \mid x_2 = 2\}$ $= conv(\{(0,2),(1,2)\})$	$x_2 \leq 2$
$F^w_{\{1,2\}}$	$:= \{(x_1,x_2) \in M^w((2,1)) \mid x_1 + x_2 = 3\}$ $= conv(\{(2,1),(1,2)\})$	$x_1 + x_2 \leq 3$
$G^w_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2) \in M^w((2,1)) \mid x_1 = 0\}$ $= conv(\{(0,0),(0,2)\})$	$x_1 \geq 0$
$G^w_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2) \in M^w((2,1)) \mid x_2 = 0\}$ $= conv(\{(0,0),(2,0)\})$	$x_2 \geq 0$

Tabla 2.4: Caras maximales de $M^w((2,1))$.

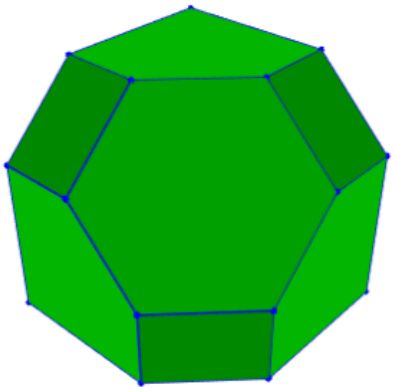


Figura 2.9: $M^w((3,2,1))$, permutaedro de mayorización débil asociado con $(3,2,1)$.

El conjunto de vértices de $M^w((3,2,1))$ es:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(M^w((3,2,1))) =& \{(0,0,0),(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(3,2,0),(2,3,0),(3,0,2),(2,0,3),\\ & (0,3,2),(0,2,3),(3,2,1),(3,1,2),(2,3,1),(2,1,3),(1,3,2),(1,2,3)\}.\end{aligned}$$

La dimensión de $M^w((3,2,1))$ es 3, que corresponde con la dimensión de $\mathbb{R}^3$; cada uno de los vértices de $M^w((3,2,1))$ está contenido en exactamente tres aristas, razón por la cual, $M^w((3,2,1))$ es un politopo simple. En la figura 2.10 mostramos $G(M^w((3,2,1)))$, el grafo del politopo $M^w((3,2,1))$, en donde apreciamos con más facilidad la propiedad de ser simple de $M^w((3,2,1))$.

Las caras maximales de $M^w((3,2,1))$ están en correspondencia biyectiva con las desigualdades de la $\mathscr{H}$-descripción de este politopo, tal como observamos en la tabla 2.6.

En vista de que $M^w((3,2,1))$ es un 3-politopo simple entonces, para cada $k \in \{0,1,2,3\}$, existe una correspondencia biyectiva entre las caras de $M^w((3,2,1))$ de dimensión $3-k$ y las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de este politopo. A su vez, estas intersecciones no vacías están en biyección con parejas ordenadas, donde la primera componente es un sub-

$M^w((2,1))$	
Caras de dimensión 2-0	
$M^w((2,1))$	$(\emptyset, \emptyset \subseteq \{1,2\} \setminus \emptyset)$
Caras de dimensión 2-1	
$F^w_{\{1\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2\} \setminus \emptyset)$
$G^w_{\{1\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subseteq \{1,2\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{2\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subseteq \{1,2\} \setminus \{2\})$
Caras de dimensión 2-2	
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2\})$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2\})$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{2\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{2\}}$	$(\{1,2\}, \emptyset \subseteq \{1,2\} \setminus \{1,2\})$

Tabla 2.5: Caras de $M^w((2,1))$.

conjunto I de $[3]$ mientras que la segunda componente es una cadena anidada sobre $[3] \setminus I$. En las tablas 2.7, 2.8 y 2.9 presentamos la biyección entre las parejas ordenadas que hemos mencionado y las caras de $M^w((3,2,1))$.

2.1.2.1. VÉRTICES DE $M^w(v)$

El permutaedro de mayorización débil asociado con el vector $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, el cual hemos denotado por $M^w(v)$, consiste de los elementos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ que satisfacen la condición $x \preceq^w v$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_j \geq 0$, $j \in [n]$, $\sum_{i \in A} x_i \leq \sum_{i=1}^{|A|} v_i$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$. Estas desigualdades nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $M^w(v)$ y, además, nos permiten afirmar que los hiperplanos de soporte de este politopo son $H_j := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\}$, $j \in [n]$, $H_A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$. En vista de que toda cara de $M^w(v)$ se obtiene como la intersección de este politopo con un número finito de hiperplanos de soporte, resulta natural definir las caras obtenidas al intersecar $M^w(v)$ con un único hiperplano de soporte, pues toda cara de $M^w(v)$ se obtiene, a su vez, intersecando estas caras más sencillas. Definimos entonces los conjuntos $F^w_A := M^w(v) \cap H_A$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$, $G^w_{\{j\}} := M^w(v) \cap H_j$, $j \in [n]$, y la primera pregunta que formulamos es ¿cuándo la intersección de estos conjuntos es no vacía?

PROPOSICIÓN 2.12. *Si A y B son subconjuntos no vacíos de $[n]$ distintos y $j \in [n]$, entonces*

(1) $G^w_{\{j\}} \cap F^w_A \neq \emptyset$ si, y sólo si, $j \notin A$.

(2) $F^w_A \cap F^w_B \neq \emptyset$ si, y sólo si, $A \subsetneq B$ o $B \subsetneq A$.

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Consideremos, además, A y B dos subconjuntos no vacíos

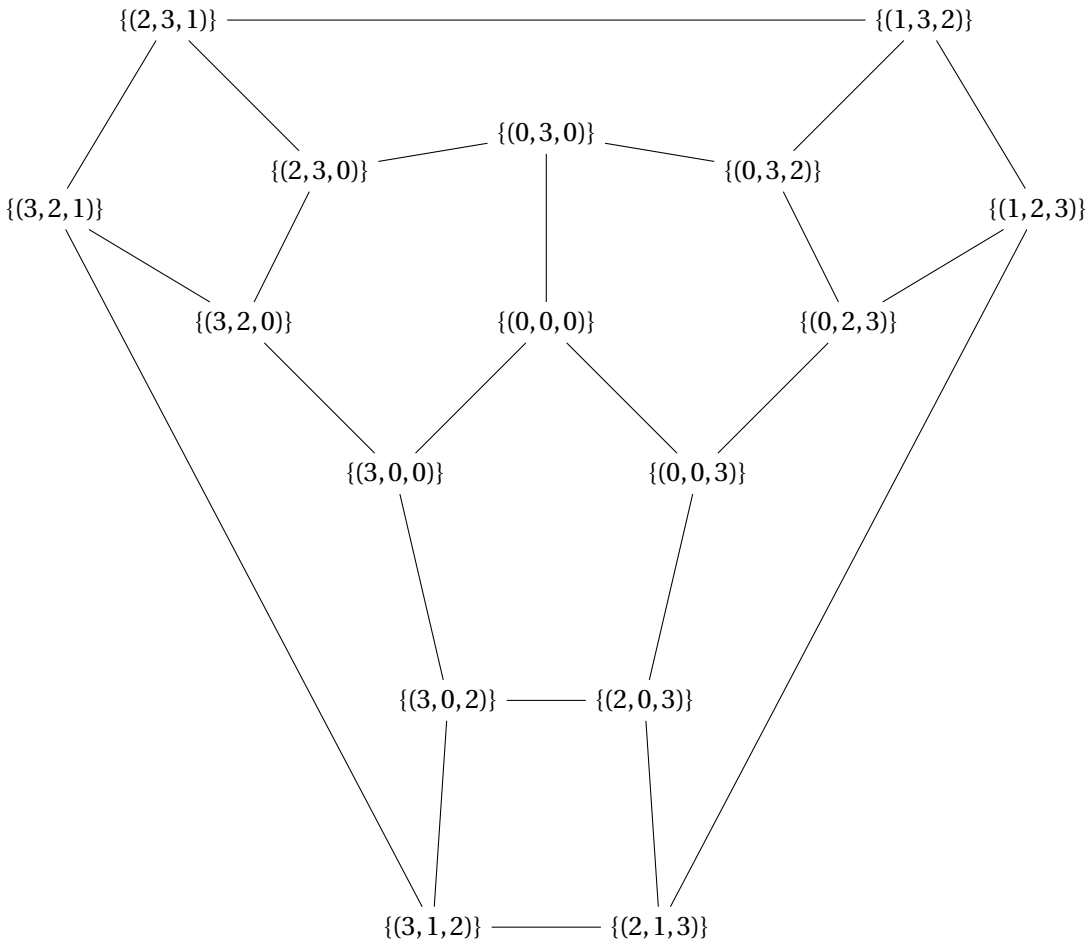


Figura 2.10: $G(M^w((3,2,1)))$, grafo del politopo $M^w((3,2,1))$.

de $[n]$ distintos y $j \in [n]$.

(1) Si $j \notin A$ entonces cualquier elemento $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo las condiciones $\{y_i \mid i \in A\} = \{v_1, \ldots, v_{|A|}\}$ y $y_i = 0$, siempre que $i \notin A$, es un elemento de $G^w_{\{j\}} \cap F^w_A$, y como existe al menos un elemento con las características descritas, concluimos que $G^w_{\{j\}} \cap F^w_A \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $j \in A$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in G^w_{\{j\}}$ entonces $y_j = 0$, asimismo, se satisfacen las relaciones $\sum_{i\in A} y_i = y_j + \sum_{i\in A\setminus\{j\}} y_i = \sum_{i\in A\setminus\{j\}} y_i \leq \sum_{i=1}^{|A\setminus\{j\}|} v_i = \sum_{i=1}^{|A|-1} v_i < \sum_{i=1}^{|A|} v_i$, teniendo presente que $y \in M^w(v)$, en la primera desigualdad, y que $v_{|A|} > 0$, en la desigualdad estricta. Por lo tanto, $y \notin F^w_A$ y, consecuentemente, $G^w_{\{j\}} \cap F^w_A = \emptyset$.

(2) Si $A \subsetneq B$ entonces cualquier elemento $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga $\{y_i \mid i \in A\} = \{v_1, \ldots, v_{|A|}\}$, $\{y_i \mid i \in B \setminus A\} = \{v_{|A|+1}, \ldots, v_{|B|}\}$ y $y_i = 0$, siempre que $i \notin B$, es un elemento de $F^w_A \cap F^w_B$, y como hay al menos uno de tales elementos, concluimos que $F^w_A \cap F^w_B \neq \emptyset$. De manera similar, para el caso $B \subsetneq A$, podemos encontrar un elemento $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F^w_A \cap F^w_B$. Ahora bien, si $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$ entonces $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$ y podemos definir los números enteros positivos $s := |A \setminus B|$, $t := |B \setminus A|$ y el entero no negativo $u := |A \cap B|$. Supongamos que existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F^w_A \cap F^w_B$, de manera que, $\sum_{i\in A} y_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i$ y

Cara maximal		Desigualdad
$F^w_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_1 = 3\}$ $= conv(\{(3,0,0),(3,2,0),(3,0,2),(3,2,1),(3,1,2)\})$	$x_1 \leq 3$
$F^w_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_2 = 3\}$ $= conv(\{(0,3,0),(2,3,0),(0,3,2),(2,3,1),(1,3,2)\})$	$x_2 \leq 3$
$F^w_{\{3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_3 = 3\}$ $= conv(\{(0,0,3),(2,0,3),(0,2,3),(2,1,3),(1,2,3)\})$	$x_3 \leq 3$
$F^w_{\{1,2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 = 5\}$ $= conv(\{(3,2,0),(2,3,0),(3,2,1),(2,3,1)\})$	$x_1 + x_2 \leq 5$
$F^w_{\{1,3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_1 + x_3 = 5\}$ $= conv(\{(3,0,2),(2,0,3),(3,1,2),(2,1,3)\})$	$x_1 + x_3 \leq 5$
$F^w_{\{2,3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_2 + x_3 = 5\}$ $= conv(\{(0,3,2),(0,2,3),(1,3,2),(1,2,3)\})$	$x_2 + x_3 \leq 5$
$F^w_{\{1,2,3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 6\}$ $= conv(\{(3,2,1),(3,1,2),(2,3,1),(2,1,3),(1,3,2),(1,2,3)\})$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$
$G^w_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_1 = 0\}$ $= conv(\{(0,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(0,3,2),(0,2,3)\})$	$x_1 \geq 0$
$G^w_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_2 = 0\}$ $= conv(\{(0,0,0),(3,0,0),(0,0,3),(3,0,2),(2,0,3)\})$	$x_2 \geq 0$
$G^w_{\{3\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in M^w((3,2,1)) \mid x_3 = 0\}$ $= conv(\{(0,0,0),(0,3,0),(3,0,0),(3,2,0),(2,3,0)\})$	$x_3 \geq 0$

Tabla 2.6: Caras maximales de $M^w((3,2,1))$.

$\sum_{i\in B} y_i = \sum_{i=1}^{|B|} v_i$, y se tienen las relaciones

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in A\cup B} y_i &= \sum_{i\in A} y_i + \sum_{i\in B} y_i - \sum_{i\in A\cap B} y_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i + \sum_{i=1}^{|B|} v_i - \sum_{i\in A\cap B} y_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{|A|} v_i + \sum_{i=1}^{|B|} v_i - \sum_{i=i}^{|A\cap B|} v_i = \sum_{i=1}^{s+u} v_i + \sum_{i=1}^{u+t} v_i - \sum_{i=i}^{u} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} v_i + \sum_{i=s+1}^{s+u} v_i + \sum_{i=1}^{u} v_i + \sum_{i=u+1}^{u+t} v_i - \sum_{i=1}^{u} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} v_i + \sum_{i=s+1}^{s+u} v_i + \sum_{i=u+1}^{u+t} v_i > \sum_{i=1}^{s} v_i + \sum_{i=s+1}^{s+u} v_i + \sum_{i=s+u+1}^{s+u+t} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{s+u+t} v_i = \sum_{i=1}^{|A\cup B|} v_i,
\end{aligned}$$

en donde hemos usado que $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B| = s + u$, $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B| = t + u$ y $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = s + u + t$, además, el hecho que $y \in M^w(v)$. La última desigualdad estricta en las relaciones anteriores la obtenemos al sumar las desigualdades $v_{u+i} > v_{s+u+i}$, $i \in [t]$, las cuales se satisfacen debido a que $s \geq 1$ y $v_1 > \cdots > v_n > 0$. De lo anterior, podemos afirmar que $\sum_{i\in A\cup B} y_i > \sum_{i=1}^{|A\cup B|} v_i$, lo cual contradice que $y \in M^w(v)$.

$M^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-0	
$M^w((3,2,1))$	$(\emptyset, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
Caras de dimensión 3-1	
$F^w_{\{1\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$G^w_{\{1\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{2\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{3\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$

Tabla 2.7: Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 1)

De modo que, $F^w_A \cap F^w_B \neq \emptyset$, con A y B subconjuntos no vacíos de $[n]$ distintos, implica que $A \subsetneq B$ o $B \subsetneq A$.

□

TEOREMA 2.13. *Si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces y es un vértice de $M^w(v)$ si, y sólo si, satisface una de las siguientes condiciones:*

(1) $y = \vec{0}$.

(2) $y \neq \vec{0}$ *y tiene exactamente k componentes no nulas ocupadas por los números reales $v_1, \ldots, v_k$, para algún $k \in [n]$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Un elemento $y = (y_1, \ldots, y_n)$ es un vértice de $M^w(v)$ si, y sólo si, existen $G^w_{\{i\}}$, $i \in I$, y $F^w_{A_j}$, $j \in [k]$, tales que

$$\left(\bigcap_{i \in I} G^w_{\{i\}}\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{k} F^w_{A_j}\right) = \{y\}, \quad \emptyset \subseteq I \subseteq [n], \quad \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus I,$$

donde $1 \leq k \leq |[n] \setminus I|$. Si $I = [n]$ entonces $y \in \bigcap_{i=1}^n G^w_{\{i\}}$ y, por lo tanto, $y = \vec{0}$. De otra parte, si $I \neq [n]$ entonces $[n] \setminus I \neq \emptyset$ y la cadena anidada $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus I$ es no vacía. Supongamos que en esta cadena anidada existen un par de conjuntos B y C consecutivos tales que $|C| - |B| \geq 2$. Como, en particular $y \in F^w_B \cap F^w_C$, entonces tenemos que $\sum_{i \in B} y_i = \sum_{i=1}^{|B|} v_i$ y $\sum_{i \in C} y_i = \sum_{i=1}^{|C|} v_i$ y, en consecuencia, $\sum_{i=1}^{|C|} v_i = \sum_{i \in C} y_i = \sum_{i \in B} y_i + \sum_{i \in C \setminus B} y_i = \sum_{i=1}^{|B|} v_i + \sum_{i \in C \setminus B} y_i$, de donde, se sigue que $\sum_{i \in C \setminus B} y_i = \sum_{|B|+1}^{|C|} v_i$. Por consiguiente, cualquier elemento $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ satisfaciendo las condiciones $\tilde{y}_i = y_i$, siempre que $i \notin C \setminus B$, y $\{\tilde{y}_i \mid i \in C \setminus B\} = \{v_{|B|+1}, \ldots, v_{|B|+t}\}$ pertenece a los mismos hiperplanos de soporte de $M^w(v)$ en los que se encuentra y; además, como $|C| - |B| \geq 2$,

$M^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-2	
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,2\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{2\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{3\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{2,3\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{3\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,3\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$
$G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$
$G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{2\}}$	$(\{1,2\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1,2\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{3\}}$	$(\{1,3\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1,3\})$
$G^w_{\{2\}} \cap G^w_{\{3\}}$	$(\{2,3\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2,3\})$

Tabla 2.8: Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 2)

hay varios elementos cumpliendo las condiciones dadas, suceso que contradice que y sea el único elemento en la intersección de los conjuntos $G^w_{\{i\}}$, $i \in I$, $F^w_{A_j}$, $j \in [k]$. Por lo tanto, si B y C son conjuntos consecutivos de la cadena anidada $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus I$ se debe tener que $|C| - |B| = 1$, razón por la cual, esta cadena debe ser de la forma $\emptyset \subsetneq \{j_1\} \subsetneq \{j_1, j_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{j_1, \ldots, j_{k-1}\} \subsetneq \{j_1, \ldots, j_k\} = [n] \setminus I$ y, en tal caso, y queda unívocamente determinado por las igualdades $y_{j_i} = v_i$, $i \in [k]$, y $y_i = 0$ si $i \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$. Es claro que $y \neq \vec{0}$ y tiene exactamente k componentes no nulas ocupadas por los números reales $v_1, \ldots, v_k$. □

COROLARIO 2.14. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces $|\mathcal{V}(M^w(v))| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!$, donde $\mathcal{V}(M^w(v))$ es el conjunto de vértices de $M^w(v)$.*

Demostración. Por el teorema 2.13, si $k \in [n]$ entonces todo vértice y de $M^w(v)$ con k componentes no nulas lo podemos obtener realizando los siguientes dos pasos consecutivos:

$M^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-3	
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,2\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,2\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{2,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2,3\}} \cap F^w_{\{1,2,3\}}$	$(\emptyset, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \emptyset)$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{2,3\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2,3\}}$	$(\{1\}, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,3\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1,3\}}$	$(\{2\}, \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2\})$
$G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$
$G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{1,2\}}$	$(\{3\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{3\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{2\}} \cap F^w_{\{3\}}$	$(\{1,2\}, \emptyset \subsetneq \{3\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1,2\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{2\}}$	$(\{1,3\}, \emptyset \subsetneq \{2\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1,3\})$
$G^w_{\{2\}} \cap G^w_{\{3\}} \cap F^w_{\{1\}}$	$(\{2,3\}, \emptyset \subsetneq \{1\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{2,3\})$
$G^w_{\{1\}} \cap G^w_{\{2\}} \cap G^w_{\{3\}}$	$(\{1,2,3\}, \emptyset \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{1,2,3\})$

Tabla 2.9: Caras de $M^w((3,2,1))$. (Parte 3)

(1) definiendo los índices de las componentes no nulas que va a tener y,

(2) asignando un lugar a cada uno de los elementos $v_1, \ldots, v_k$ en las componentes escogidas previamente.

El paso (1) puede realizarse de $\binom{n}{k}$ formas distintas y el paso (2) puede hacerse de $k!$ maneras diferentes, de modo que por el principio fundamental del conteo hay $\binom{n}{k}k!$ vértices de $M^w(v)$ con k componentes no nulas. Por el principio de la suma, concluimos que el número total de vértices de $M^w(v)$ es $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!$ □

PROPOSICIÓN 2.15. *Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$ entonces $M^w(v) = conv(\{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\})$, donde*

$$\mathscr{B} = \{\vec{0}, (v_1, 0, \ldots, 0), (v_1, v_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (v_1, \ldots, v_{n-1}, 0), v\}.$$

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Dado que $M^w(v)$ es la envolvente convexa de sus vértices, es suficiente mostrar que $\mathscr{V}(M^w(v)) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\}$. Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathscr{V}(M^w(v))$ entonces, por el teorema 2.13, $y = \vec{0}$ o $y \neq \vec{0}$ y tiene exactamente k componentes no nulas ocupadas por los elementos $v_1, \ldots, v_k$, para algún $k \in [n]$. En el primer caso, es claro que $y \in \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\}$, pues $\vec{0} \in \mathscr{B}$, y, en el segundo caso, existe $\sigma \in S_n$ tal que $y = \sigma(x)$, donde $x = (v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{B}$, y concluimos nuevamente que $y \in \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\}$. Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\}$, entonces $y = \sigma(x)$, donde $\sigma \in S_n$ y $x \in \mathscr{B}$. Si $x = \vec{0}$ entonces $y = \vec{0}$, y si existe $k \in [n]$ tal que $x = (v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0)$ entonces $y \neq \vec{0}$ y tiene k componentes

no nulas ocupadas por $v_1, \ldots, v_k$. En cualquiera de los dos casos, tenemos que $y \in \mathcal{V}(M^w(v))$. En consecuencia de lo anterior, tenemos que $M^w(v) = conv(\{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\})$, que era justamente lo que queríamos demostrar. □

Conocer los vértices de $M^w(v)$ resulta útil cuando abordamos problemas de optimización lineal con conjunto factible $M^w(v)$; en particular, podemos caracterizar todos los problemas de este tipo que admiten una única solución. El siguiente resultado, justamente, tiene como propósito dar una sencilla caracterización de aquellos funcionales lineales de $\mathbb{R}^n$ que alcanzan su máximo en un solo vértice de $M^w(v)$.

PROPOSICIÓN 2.16. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces el problema de optimización lineal de la forma* $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$*, donde $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, admite solución única si, y sólo si, c no tiene componentes nulas y sus componentes positivas son distintas dos a dos.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos, además, el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$. Empecemos mostrando que este problema de optimización lineal siempre admite solución. Definamos los conjuntos de índices I, J y K como sigue:

$$I := \{i \in [n] \mid c_i > 0\}, \quad J := \{j \in [n] \mid c_j = 0\}, \quad K := \{k \in [n] \mid c_k < 0\},$$

haciendo $t = |I|$, $u = |J|$ y $s = |K|$. Sean $i_1, \ldots, i_t, j_1, \ldots, j_u, k_1, \ldots, k_s$ los elementos de $[n]$ ordenados de modo tal que $c_{i_1} \geq \cdots \geq c_{i_t}$, $c_{j_1} \geq \cdots \geq c_{j_u}$ y $c_{k_1} \geq \cdots \geq c_{k_s}$, con la salvedad de que si alguno de los conjuntos I, J o K es vacío, entonces sus elementos no aparecen en la lista. Una solución al problema $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$ es $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^w(v)$ definido por las igualdades

$$y_{i_l} = v_1, \text{ para todo } l \in \{1, \ldots, t\}, \quad y_j = 0 \text{ si } j \in J, \quad y_k = 0 \text{ si } k \in K.$$

En efecto, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una solución de $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$ entonces las componentes con índices en el conjunto K deben ser nulas, pues en caso contrario existiría $k \in K$ tal que $x_k > 0$, y el vector $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n})$ obtenido de x anulando x_k pero dejando el resto de componentes iguales es tal que

$$\begin{aligned} \langle c, \tilde{x} \rangle &= \sum_{j \in [n]} c_j \tilde{x_j} = c_k \tilde{x_k} + \sum_{j \in [n] \setminus \{k\}} c_j \tilde{x_j} = c_k \tilde{x_k} + \sum_{j \in [n] \setminus \{k\}} c_j x_j \\ &= 0 + \sum_{j \in [n] \setminus \{k\}} c_j x_j > c_k x_k + \sum_{j \in [n] \setminus \{k\}} c_j x_j = \sum_{j \in [n]} c_j x_j = \langle c, x \rangle, \end{aligned}$$

donde, en la tercera, igualdad hemos usado que $\tilde{x_j} = x_j$, si $j \neq k$, y en la desigualdad tenemos presente que $0 = c_k \tilde{x_k} > x_k c_k$ en vista de que $x_k > 0$, $c_k < 0$ y $\tilde{x_k} = 0$. Lo anterior contradice que x es solución de $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$; por lo tanto, concluimos que las componentes de x con índices en K son necesariamente nulas. De otra parte, como $c_j = 0$ para todo $j \in J$, podemos afirmar que las componentes de x con índices en J resultan irrelevantes para el problema de optimización $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$. Finalmente, las componentes de x con índices en K deben ser tal que para todo $l \in \{1, \ldots, t\}$, x_{k_l} sea la l-ésima componente más grande de un vector en $M^w(v)$, es decir, $x_{k_l} = v_l$ para todo $l \in \{1, \ldots, t\}$.

Por lo tanto, el problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ siempre tiene solución. Abordemos ahora sí las condiciones de unicidad del enunciado.

($\Rightarrow$) Sea $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ y supongamos que el problema de optimización lineal sobre $\mathbb{M}^w(b)$ dado por $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ tiene una única solución. Así, tal solución necesariamente debe ser un vértice de $M^w(v)$. Es más, las componentes de tal vértice correspondientes a índices en I deben estar ocupadas por los números $v_1,\dots,v_t$ y las componentes correspondientes a índices en K deben ser nulas.
Si c tiene una componente nula en un índice $j\in J$ y $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{V}(M^w(v))$ es la única solución del problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ entonces tenemos dos situaciones posibles y mutuamente excluyentes: $y_i>0$ o $y_i=0$. En el caso que $y_i>0$ definimos $\tilde{y}=(\tilde{y_1},\dots,\tilde{y_n})$ mediante las igualdades $\tilde{y_i}=y_i$, si $i\notin J$, y $\tilde{y_i}=0$, si $i\in J$, y obtenemos un vértice de $M^w(v)$ distinto de y pero que también es solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$. Si se da que $y_i=0$ entonces definimos $\tilde{y}=(\tilde{y_1},\dots,\tilde{y_n})$ mediante las igualdades $\tilde{y_i}=y_i$, si $i\notin J$, $\tilde{y_j}=v_{t+1}$ y $\tilde{y_i}=0$, si $i\in J\setminus\{j\}$, con lo cual obtenemos un vértice de $M^w(v)$ distinto de y pero que también da solución al problema $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$. Es decir, en cualquiera de las dos situaciones se contradice que y es la única solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$, y esto nos permite concluir que c no tiene componentes nulas.
Si c tiene dos componentes positivas iguales en los índices $i_1,i_2\in I$ y $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{V}(M^w(v))$ es la única solución del problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$, entonces $\tilde{y}\in\mathcal{V}(M^w(v))$ obtenido a partir de y al permutar sus componentes i_1 e i_2 pero dejando el resto de componentes iguales, es una solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ distinta de y, lo cual contradice que y es la única solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ y, en consecuencia, podemos afirmar que las componentes positivas de c son distintas dos a dos.

($\Leftarrow$) Supongamos que $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ no tiene componentes nulas y sus componentes positivas son distintas dos a dos. En este caso tenemos que $|J|=u=0$ y si $i_1,\dots,i_t,k_1,\dots,k_s$ son los elementos de $[n]$ ordenados de modo tal que $c_{i_1}>\cdots>c_{i_t}>0>c_{k_1}\geq\cdots\geq c_{k_s}$ entonces tenemos dos posibles situaciones: (i) si $t>0$ entonces el único vértice que da solución al problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c,x\rangle$ es $y=(y_1,\dots,y_n)$, definido por las igualdades $y_{i_l}=v_l$, $l\in[t]$, y $y_i=0$, si $i\notin\{i_1,\dots,i_t\}$; (ii) si $t=0$ entonces la única solución al problema es $y=\vec{0}$.

□

2.1.2.2. $M^w(v)$ ES UN POLITOPO SIMPLE

Tenemos dos propósitos en este pequeño apartado: el primero de ellos consiste en caracterizar cuándo dos vértices de $M^w(v)$ son incidentes, es decir, cuando ellos están en una misma arista de $M^w(v)$; y el segundo propósito es mostrar que $M^w(v)$ es un politopo simple. Comenzamos con una proposición donde caracterizamos los funcionales lineales de $\mathbb{R}^n$ que se maximizan en exactamente dos vértices de $M^w(v)$, o equivalentemente, aquellos funcionales de $\mathbb{R}^n$ que alcanzan su máximo en exactamente una arista de $M^w(v)$.

PROPOSICIÓN 2.17. *Si $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $v_1>\cdots>v_n>0$, entonces $M^w(v)$ es un politopo de dimensión n.*

Demostración. Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$. Consideremos los politopos $M(v)$ y $M^w(v)$. Por definición, $M(v) \subseteq M^w(v) \subseteq \mathbb{R}^n$ y así $n-1 = \dim(M(v)) \leq \dim(M^w(v)) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$. De otra parte, los vectores

$$(v_1, 0, \ldots, 0), (v_1, v_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (v_1, v_2, \ldots, v_n), (0, \ldots, 0, v_1)$$

son $n+1$ elementos de $M^w(v)$ afínmente independientes. En efecto, sean α_j, $j \in [n+1]$, números reales tales que $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 0$ y

$$\alpha_1(v_1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(v_1, v_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \alpha_{n+1}(0, \ldots, 0, v_1) = \vec{0},$$

lo que conduce a las ecuaciones $\left(\sum_{j=k}^{n} \alpha_j\right) v_k = 0$, $k \in [n-1]$, y, $\alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_1 = 0$. Si $k = 1$ obtenemos $\alpha_{n+1} = 0$, puesto que $v_1 > 0$ y $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 0$; además, $\alpha_n = 0$ de la última ecuación. Tomando, de manera sucesiva, los valores $k = n-1, \ldots, 1$ obtenemos que $\alpha_k = 0$, para todo $k \in [n-1]$, lo que muestra que los $n+1$ vectores de $M^w(v)$ dados son afínmente independientes y, como consecuencia de esto, $\dim(M^w(v)) \geq n$. En conclusión, $M^w(v)$ es un politopo de dimensión n. □

PROPOSICIÓN 2.18. *Si $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces el problema de optimización lineal*

$$\text{máx}_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle, \quad c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$

tiene como conjunto solución una arista de $M^w(v)$ si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) c tiene exactamente una componente nula y sus componentes positivas son distintas dos a dos.

(2) c no tiene componentes nulas pero tiene exactamente dos componentes positivas iguales.

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v y consideremos el problema de optimización lineal $\text{máx}_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$, donde $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Definamos los conjuntos de índices I, J y K como sigue:

$$I := \{i \in [n] \mid c_i > 0\}, \quad J := \left\{j \in [n] \mid c_j = 0\right\}, \quad K := \{k \in [n] \mid c_k < 0\},$$

haciendo $t = |I|$, $u = |J|$ y $s = |K|$.

(⇒) Supongamos que el problema de optimización $\text{máx}_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución una arista $\mathscr{A}$ del politopo $M^w(v)$, y sean $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y_1}, \ldots, \tilde{y_n}) \in \mathcal{V}(M^w(v))$ los únicos vértices de $M^w(v)$ que están en $\mathscr{A}$. Vamos a mostrar que c satisface alguna de las condiciones (1) o (2) del enunciado. Para ello, consideremos los siguientes casos:

Caso 1: En este caso asumimos que c no tiene componentes nulas. Si las componentes positivas de c son distintas dos a dos, entonces se satisfacen las condiciones de la proposición 2.16 y, en consecuencia, el problema de optimización lineal $\text{máx}_{x \in M^w(v)} \langle c, x \rangle$

tendría una única solución, lo que contradice que el conjunto solución de este problema es la arista $\mathscr{A}$. En la situación en que c tuviese más de dos componentes positivas iguales, entonces existirían índices $i_1, i_2, i_3 \in I$ tales que $c_{i_1} = c_{i_2} = c_{i_3}$ y, en tal caso, al permutar las entradas de y con índices en i_1,i_2 e i_3 obtenemos seis vértices de $M^w(v)$ distintos dos a dos que son solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$, lo cual nuevamente contradice que el conjunto solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$ es la arista $\mathscr{A}$. De manera que, si c no tiene componentes nulas, entonces c debe tener exactamente dos componentes positivas iguales y, por tanto, c cumple la condición (2) del enunciado.

Caso 2: En este caso suponemos que c tiene componentes nulas. Si c tiene más de una componente nula, entonces existen índices $j_1, j_2 \in J$ tales que $c_{j_1} = 0 = c_{j_2}$, y dado que y y $\tilde{y}$ tienen sus componentes con índices en I ocupadas por $v_1, \ldots, v_t$, entonces cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que cumpla con las igualdades $x_i = y_i$ si $i \in I$, $x_i = y_i$ si $i \in K$, $x_i = 0$ si $i \in J \setminus \{j_1, j_2\}$ y, además, satisfaga la condición $(x_{j_1}, x_{j_2}) \in \{(v_{t+1}, v_{t+2}), (v_{t+2}, v_{t+1}), (v_{t+1}, 0), (0, v_{t+1}), (0,0)\}$, es un vértice de $M^w(v)$ que también es solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$, y, en vista de que hay cinco de tales vectores, esto contradice que el conjunto solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$ es la arista $\mathscr{A}$. Por lo tanto, c debe tener exactamente una componente nula. Si c tuviese componentes positivas iguales, existirían $i_1, i_2 \in I$ tales que $c_{i_1} = c_{i_2}$, y si $j \in J$ es el único índice de c tal que $c_j = 0$, entonces cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cumpliendo las igualdades $x_i = y_i$ si $i \in I \setminus \{i_1, i_2\}$, $x_i = y_i$ si $i \in K$ y que, además, satisface las condiciones $\{x_{i_1}, x_{i_2}\} = \{y_{i_1}, y_{i_2}\}$ y $x_j \in \{0, v_{t+1}\}$ es un vértice de $M^w(v)$ que también es solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$, y dado que hay cuatro de tales vectores, entonces se contradice que el conjunto solución de $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$ es la arista $\mathscr{A}$. Por lo tanto, si c tiene componentes nulas debe tener exactamente una y sus componentes positivas deben ser distintas dos a dos, es decir, c cumple la condición (1) del enunciado.

En conclusión, si el problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución una arista de $M^w(v)$, entonces c satisface (1) o (2) del enunciado.

($\Leftarrow$) Supongamos que $c = (c_1, \ldots, c_n)$ cumple alguna de las condiciones (1) o (2) del enunciado y consideremos el problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$. Sean $i_1, \ldots, i_t, j_1$ y $j_u, k_1, \ldots, k_s$ los elementos de $[n]$, ordenados de modo tal que $c_{i_1} \geq \cdots \geq c_{i_t} > 0 = c_j = \cdots = c_{j_u} > c_{k_1} \geq \cdots \geq c_{k_s}$, con la salvedad de que si alguno de los conjuntos I, J o K es vacío entonces sus elementos no aparecen en la lista.

(1) Si c tiene exactamente una componente no nula y sus componentes positivas son distintas dos a dos, entonces $J = \{j\}$ y las componentes de c ordenadas de manera no creciente son $c_{i_1} > \cdots > c_{i_t} > 0 = c_j > c_{k_1} \geq \cdots \geq c_{k_s}$. En esta situación, un vértice de $M^w(v)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, que maximice $\langle c, x\rangle$ debe satisfacer las igualdades $y_{i_l} = v_l$, si $l \in [t]$, y $y_i = 0$, si $i \in K$, pero hay sólo dos de tales vértices: aquel que tiene su j-ésima componente nula y aquel que en su j-ésima componente tiene el número v_{t+1}. Por lo tanto, si c cumple la condición (1) del enunciado entonces el problema de optimización lineal $\max_{x\in M^w(v)}\langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución una arista.

(2) Si c no tiene componentes nulas pero tiene exactamente dos componentes positivas iguales ubicadas en los índices $i_r, i_{r+1} \in I$ entonces $u = 0$ y las componentes de c

ordenadas de manera no creciente son $c_{i_1} > \cdots > c_{i_r} = c_{i_{r+1}} > \cdots > c_{i_t} > c_{k_1} \geq \cdots \geq c_{k_s}$. En tal situación, tenemos que $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}(M^w(v))$ maximiza $\langle c, x\rangle$ si cumple las condiciones $y_{i_l} = v_l$, si $l \in [t] \setminus \{r, r+1\}$, $y_i = 0$, si $i \in K$, y $\{y_{i_r}, y_{i_{r+1}}\} = \{v_r, v_{r+1}\}$, pero solamente existen dos de tales vértices: aquel que satisface $y_{i_r} = v_r$ y $y_{i_{r+1}} = v_{r+1}$ y aquel que cumple $y_{i_{r+1}} = v_r$ y $y_{i_r} = v_{r+1}$. Por consiguiente, si c cumple la condición (2) del enunciado entonces el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución una arista.

En consecuencia, si c satisface las condiciones (1) o (2) del enunciado entonces el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución una arista.

□

PROPOSICIÓN 2.19. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v entonces dos vértices de $M^w(v)$ son adyacentes si, y sólo si, uno de ellos se obtiene a partir del otro aplicando una y solamente una de las siguientes operaciones:*

(1) anulando la componente más pequeña;

(2) permutando v_j y v_{j+1} para algún $j \in [n-1]$.

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Dos vértices de $M^w(v)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\tilde{y} = (\tilde{y_1}, \ldots, \tilde{y_n})$, son adyacentes en $M^w(v)$ si, y sólo si, existe $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^w(v)} \langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución a la arista $conv(\{y, \tilde{y}\})$. En virtud de la proposición 2.18, tenemos solamente dos situaciones posibles para c:

(1) que c tenga exactamente una componente nula mientras sus componentes positivas sean distintas dos a dos, en cuyo caso y y $\tilde{y}$ satisfacen que uno de ellos se obtiene a partir del otro anulando su componente más pequeña;

(2) que c no tenga componentes nulas pero existan exactamente dos componentes positivas iguales, caso en el cual, y y $\tilde{y}$ cumplen que uno se obtiene a partir del otro permutando v_j y v_{j+1}, para algún $j \in [n-1]$.

En conclusión, dos vértices de $M^w(v)$ están en una misma arista si, y sólo si, ellos satisfacen (1) o (2) del enunciado. □

Una consecuencia de la proposición anterior y de la proposición 2.17, la cual afirma que $\dim(M^w(v)) = n$, es que el permutaedro de mayorización débil es un politopo simple. El siguiente teorema tiene como propósito establecer este hecho.

TEOREMA 2.20. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ entonces $M^w(v)$ es un politopo simple.*

Demostración. Sean $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un vértice de $M^w(v)$. Por el teorema 2.13, $y = \vec{0}$ o

$y \neq \vec{0}$ con k componentes no nulas ocupadas por $v_1, \ldots, v_k$, para algún $k \in [n]$. A continuación, abordaremos cada uno de estos casos por separado.

(1) Si $y = \vec{0}$, entonces por la proposición 2.19, los vértices de $M^w(v)$ que están en una misma arista con y son $(v_1, 0, \ldots, 0), (0, v_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, v_1, 0), (0, \ldots, 0, v_1)$.

(2) Si $y \neq \vec{0}$ y tiene k componentes no nulas ocupadas por $v_1, \ldots, v_k$, para algun $k \in [n]$, entonces tenemos dos situaciones posibles, $k = n$ o $k < n$. En la primera situación, como consecuencia de la proposición 2.19, los vértices adyacentes a y en $M^w(v)$ son aquellos que se obtienen de y intercambiando v_j y v_{j+1}, para cada $j \in [n-1]$, junto con el vértice obtenido de y al anular v_n. Para la segunda situación, los vértices de $M^w(v)$ que se encuentran en una misma arista con y son aquellos obtenidos de y al permutar v_j y v_{j+1}, para cada $j \in [k-1]$, y aquellos que se obtienen al cambiar una de las $n-k$ componentes nulas de y por v_{k+1}, y aquel obtenido al anular la entrada v_k del vértice y, tal como lo indica la proposición 2.19.

Así, de lo anterior, concluimos que todo vértice de $M^w(v)$ se encuentra en exactamente $n = \dim(M^w(v))$ aristas distintas de $M^w(v)$, lo que nos permite afirmar que $M^w(v)$ es un politopo simple. □

2.1.2.3. ESTRUCTURA FACIAL DE $M^w(v)$

En la parte final de la sección anterior mostramos que $\mathscr{L}(M(v)) \cong \Pi_n \cup \{\hat{0}\}$, es decir, que el retículo de caras del permutaedro de mayorización asociado con v se puede describir mediante el retículo de particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$. La idea general fue codificar las caras de $M(v)$ a través de cadenas anidadas y, posteriormente, establecer una correspondencia biyectiva entre dichas cadenas y los elementos de Π_n. En el mismo espíritu, nos proponemos en el presente apartado construir una biyección entre las caras de $M^w(v)$ y ciertos objetos análogos a las cadenas anidadas y, a partir de esto, describir $\mathscr{L}(M^w(v))$. Inicialmente caracterizamos las caras maximales de $M^w(v)$; enseguida, definimos un retículo cuyos objetos guardan cierta familiaridad con las cadenas anidadas usadas para el estudio de $M(v)$ y, finalmente, describimos $\mathscr{L}(M^w(v))$ mediante el retículo previamente definido.

PROPOSICIÓN 2.21. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces las caras maximales de $M^w(v)$ son los conjuntos $G_j^w := \{x \in M^w(v) \mid x_j = 0\}$, $j \in [n]$, y $F_A := \{x \in M^w(v) \mid \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Consideremos, además, los conjuntos $G_j^w := \{x \in M^w(v) \mid x_j = 0\}$, $j \in [n]$, y $F_A := \{x \in M^w(v) \mid \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$, los cuales construimos como la intersección de $M^w(v)$ con uno de los hiperplanos de soporte de este politopo y, en consecuencia, si F^w es una cara propia no vacía de $M^w(v)$ entonces F^w es la intersección de un número finito de conjuntos de los tipos F_A, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$, y G_j^w, $j \in [n]$. Por consiguiente, o bien F^w coincide con uno de estos conjuntos o bien F^w está contenido propiamente en uno de estos conjuntos. De lo anterior, concluimos que las caras maximales de $M^w(v)$ son los conjuntos $G_j^w := \{x \in M^w(v) \mid x_j = 0\}$, $j \in [n]$, y $F_A := \{x \in M^w(v) \mid \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{|A|} v_i\}$, $\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]$. □

DEFINICIÓN 2.3. Sean $\mathscr{C} := \{(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J) \mid J \subseteq [n], 0 \leq k \leq n - |J|\}$ y $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$. Diremos que C_2 cubre a C_1 en $\mathscr{C}$, lo cual denotamos $C_1 \lessdot^w C_2$, si se tiene alguna de las siguientes situaciones:

(1) Existe $i \in [n]$ tal que $C_1 = (J \cup \{i\}, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus (J \cup \{i\}))$ y $C_2 = (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$.

(2) Si $C_1 = (J, \emptyset \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k+1} \subseteq [n] \setminus J)$ y $C_2 = (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$ entonces la cadena $B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k+1}$ se obtiene a partir de la cadena $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ añadiendole exactamente un elemento.

Al retículo inducido por $\lessdot^w$ adjuntándole el $\hat{0}$, el cual denotaremos $Cad([n])$, lo llamaremos **retículo de cadenas anidadas basadas en** $[n]$. Una cadena anidada basada en $[n]$ de la forma $(J, \emptyset \subsetneq \{i_1\} \subsetneq \{i_1, i_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = [n] \setminus J)$, diremos que es una **cadena saturada**.

EJEMPLO 2.5. El retículo de cadenas anidadas basadas en [2], $Cad([2])$, lo ilustramos en el siguiente diagrama de Hasse. Apreciamos, en particular, que las cadenas anidadas basadas en

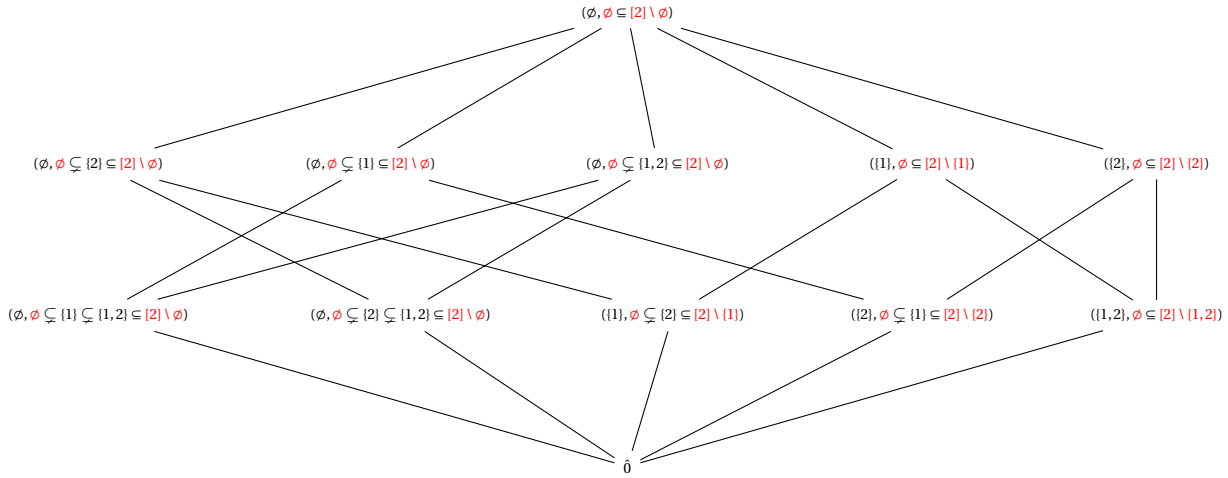


Figura 2.11: $Cad([2])$, retículo de cadenas anidadas basadas en [2].

[2] que cubren a $\hat{0}$ son saturadas, lo cual es cierto en general, es decir, las cadenas anidadas basadas en $[n]$ que cubren a $\hat{0}$ son precisamente las cadenas saturadas de $Cad([n])$.

TEOREMA 2.22. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces $\mathscr{L}(M^w(v)) \cong Cad([n])$, es decir, el retículo de caras de $M^w(v)$ es isomorfo al retículo de cadenas anidadas basadas en $[n]$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Consideremos, además, $\mathscr{L}(M^w(v))$, el retículo de caras de $M^w(v)$ y $Cad([n])$, el retículo de cadenas anidadas basadas en $[n]$. Si F^w es una cara propia no vacía de $M^w(v)$ entonces, por la proposición 2.12, existen $J \subseteq [n]$ y una cadena anidada $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ de subconjuntos no vacíos de $[n]$ tales que $A_i \cap J = \emptyset$, para cada $i \in [k]$, y $F^w = \left(\bigcap_{j \in J} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^k F_{A_i}\right)$, lo cual nos sugiere definir $\Psi^w : \mathscr{L}(M^w(v)) \to Cad([n])$

mediante $\Psi^w(F^w) := (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$, junto con las igualdades $\Psi^w(\emptyset) = \hat{0}$ y $\Psi^w(M^w(v)) = (\emptyset, \emptyset \subseteq [n] \setminus \emptyset)$. Veamos que Ψ^w es un isomorfismo de retículos:

(a) Ψ^w **está bien definida:** si $F^w \in \mathscr{L}(M^w(v))$ es una cara propia no vacía entonces existen $J \subseteq [n]$ y una cadena anidada $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ de subconjuntos no vacíos de $[n]$ tales que $A_i \cap J = \emptyset$, para cada $i \in [k]$, y $F^w = \left(\bigcap_{j\in J} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^k F_{A_i}\right)$, donde tanto J como la cadena anidada quedan determinados unívocamente por F^w y, en consecuencia, tenemos que $\Psi^w(F^w) := (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$ está bien definido. De otra parte, es claro que $\Psi^w(\emptyset) = \hat{0}$ y $\Psi^w(M^w(v)) = (\emptyset, \emptyset \subseteq [n] \setminus \emptyset)$ son elementos de $Cad([n])$, con lo cual podemos concluir que Ψ^w es una aplicación bien definida.

(b) Ψ^w **es inyectiva:** sean $F_1^w, F_2^w \in \mathscr{L}(M^w(v))$ caras propias no vacías tales que $\Psi^w(F_1^w) = \Psi^w(F_2^w)$. Si $F_1^w = \left(\bigcap_{j\in J} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k_1} F_{A_i}\right)$ donde $J \subseteq [n]$ y $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k_1}$ es una cadena anidada de subconjuntos no vacíos de $[n]$ tales que $A_i \cap J = \emptyset$, para cada $i \in [k_1]$, y $F_2^w = \left(\bigcap_{j\in \tilde{J}} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k_2} F_{B_i}\right)$, donde $\tilde{J} \subseteq [n]$ y $B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k_2}$ es una cadena anidada de subconjuntos no vacíos de $[n]$ tales que $B_i \cap \tilde{J} = \emptyset$, para cada $i \in [k_2]$, entonces, en vista de que $\Psi(F_1) = \Psi(F_2)$, se satisface la igualdad

$$(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k_1} \subseteq [n] \setminus J) = (\tilde{J}, \emptyset \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k_2} \subseteq [n] \setminus \tilde{J}),$$

la cual implica que $J = \tilde{J}$, $k_1 = k_2 = k$ y $A_i = B_i$, para cada $i \in [k]$. En consecuencia, podemos afirmar que $F_1^w = F_2^w$.

(c) Ψ^w **es sobreyectiva:** si $C = (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J) \in Cad([n])$, donde $J \neq \emptyset$ o $k \geq 1$, entonces definimos $F^w := \left(\bigcap_{j\in J} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^k F_{A_i}\right) \in \mathscr{L}(M^w(v))$, para el cual claramente se verifica que $\Psi^w(F^w) = C$. De otra parte, si $C = (\emptyset, \emptyset \subseteq [n] \setminus \emptyset)$ entonces $C = \Psi^w(M^w(v))$ y $\hat{0}$ es la imagen mediante Ψ^w de la cara vacía. En conclusión, podemos afirmar que Ψ^w es una aplicación sobreyectiva.

(d) Ψ^w **preserva coberturas:** si F^w y G^w son caras propias no vacías de $M^w(v)$ tales que G^w cubre a F^w, entonces F^w se obtiene a partir de G^w mediante la intersección de esta última cara con un hiperplano de soporte de $M^w(v)$ no considerado en la intersección que define a G^w, lo cual ocasiona que la cadena anidada basada en $[n]$ asociada a F^w se obtenga a partir de la cadena anidada basada en $[n]$ asociada a G, o bien añadiendo exactamente un elemento al conjunto de su primera componente, o bien añadiendo exactamente un conjunto a la cadena anidada de su segunda componente. En este caso, claramente $\Psi^w(F^w) \lessdot^w \Psi^w(G^w)$ en $Cad([n])$. De otra parte, $M^w(v)$ cubre a las caras maximales, la cual es, claramente, una relación que se preserva a través de Ψ^w. Finalmente, los vértices de $M^w(v)$ cubren a la cara vacía y, teniendo presente que $M^w(v)$ es un n-politopo simple, sus vértices se obtienen como la intersección de n caras maximales, razón por la cual, la imagen de los vértices bajo la aplicación Ψ^w son cadenas anidadas basadas en $[n]$ saturadas, las cuales cubren a $\hat{0} = \Psi^w(\emptyset)$ en el retículo $Cad([n])$.

(e) $(\Psi^w)^{-1}$ **preserva coberturas:** si $C_1, C_2 \in Cad([n])$ son tales que $C_1 \lessdot^w C_2$, entonces ponemos en consideración los siguientes casos:

(i) **Caso 1:** si existe $i \in [n]$ tal que $C_1 = (J \cup \{i\}, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus (J \cup \{i\}))$ y $C_2 = (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$, entonces $(\Psi^w)^{-1}(C_1) = G_i^w \bigcap (\bigcap_{j\in J} G_j^w) \bigcap (\bigcap_{t=1}^k F_{A_t})$ y $(\Psi^w)^{-1}(C_2) = (\bigcap_{j\in J} G_j^w) \bigcap (\bigcap_{t=1}^k F_{A_t})$. En consecuencia, $(\Psi^w)^{-1}(C_1) \lessdot (\Psi^w)^{-1}(C_2)$ en $\mathscr{L}(M^w(v))$.

(ii) **Caso 2:** si $C_1 = (J, \emptyset \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k+1} \subseteq [n] \setminus J)$ y $C_2 = (J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subseteq [n] \setminus J)$, donde la cadena $B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_{k+1}$ se obtiene a partir de la cadena $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ añadiendole exactamente un elemento B, entonces $(\Psi^w)^{-1}(C_1) = (\bigcap_{j\in J} G_j^w) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{k+1} F_{B_i}) = (\bigcap_{j\in J} G_j^w) \bigcap (\bigcap_{i=1}^k F_{A_i}) \bigcap F_B$ y $(\Psi^w)^{-1}(C_2) = (\bigcap_{j\in J} G_j^w) \bigcap (\bigcap_{i=1}^k F_{A_i})$. Por lo tanto, concluimos que $(\Psi^w)^{-1}(C_1) \lessdot (\Psi^w)^{-1}(C_2)$ en $\mathscr{L}(M^w(v))$.

De otra parte, si $C \in Cad([n])$ es tal que $\hat{0} \lessdot^w C$, entonces C es una cadena saturada en $Cad([n])$. En consecuencia, tenemos que $(\Psi^w)^{-1}(\hat{0}) = \emptyset$ y $(\Psi^w)^{-1}(C)$ es un vértice de $M^w(v)$, razón por la cual, concluimos que $(\Psi^w)^{-1}(\hat{0}) \lessdot (\Psi^w)^{-1}(C)$ en $\mathscr{L}(M^w(v))$. De lo anterior, podemos afirmar que $(\Psi^w)^{-1}$ preserva coberturas.

Por lo tanto, tenemos que Ψ^w es un isomorfismo de retículos y, por consiguiente, $\mathscr{L}(M^w(v)) \cong Cad([n])$. □

En el teorema que presentamos a continuación, calculamos las componentes del f-vector de $M^w(v)$. Para ello, usamos técnicas y herramientas elementales de la combinatoria enumerativa, junto con la descripción de la estructura facial de $M^w(v)$ vía el retículo $Cad([n])$, que establecimos en el teorema anterior.

TEOREMA 2.23. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ es el permutaedro de mayorización débil asociado con v, entonces el número de caras de $M^w(v)$ con dimensión $n-k$ es $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j}(k-j)!S(n-j+1, k-j+1)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^w(v)$ el permutaedro de mayorización débil asociado con v. Dado que $M^w(v)$ es un n-politopo simple, entonces existe una correspondencia biyectiva entre las caras de $M^w(v)$ con dimensión $n-k$ y las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas, para cada $k \in [n]$. Por lo tanto, si F^w es una cara de $M^w(v)$ con dimensión $n-k$, para algún $k \in [n]$, entonces $F^w := \left(\bigcap_{j\in J} G_j^w\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k-|J|} F_{A_i}\right)$, donde $J \subseteq [n]$ satisface $0 \leq |J| \leq k$ y $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|}$ es una cadena anidada de subconjuntos no vacíos tales que $A_i \cap J = \emptyset$, $i \in [k-|J|]$. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que la imagen mediante Ψ^w, el isomorfismo definido en el teorema anterior, son las cadenas anidadas basadas en $[n]$ de la forma $(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|} \subseteq [n] \setminus J)$ y, en consecuencia, el número de caras de $M^w(v)$ con dimensión $n-k$ corresponde al número de tales cadenas. Para realizar el conteo, consideremos los siguientes casos:

(1) **Caso 1:** si en la cadena anidada basada en $[n]$ de la forma $(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|} \subseteq [n] \setminus J)$ tenemos que $A_{k-|J|} = [n] \setminus J$, entonces a la cadena $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|}$ le corresponde de manera unívoca la partición de $[n] \setminus J$ dada por $(A_1, A_2 \setminus A_1, \ldots, A_{k-|J|} \setminus A_{k-|J|-1})$, la cual tiene $k-|J|$ bloques. En consecuencia, para contar el número de cadenas anidadas basadas en $[n]$ con la condición descrita, procedemos en dos fases consecutivas: en la primera, escogemos $J \subseteq [n]$ cumpliendo $0 \leq |J| \leq k$, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n}{|J|}$ maneras, y

en la segunda, construimos una partición de $[n] \setminus J$ con $k-|J|$ bloques, lo cual admite $(k-|J|)!S(n-|J|,k-|J|)$ formas diferentes de hacerse. Así, por el principio fundamental del conteo y considerando que $j = |J| \in \{0,1,\ldots,k\}$, podemos afirmar que el número de cadenas anidadas basadas en $[n]$, en este caso, es $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j)!S(n-j,k-j)$.

(2) **Caso 2:** Si en la cadena anidada basada en $[n]$ de la forma $(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|} \subseteq [n] \setminus J)$ tenemos que $A_{k-|J|} \subsetneq [n] \setminus J$ entonces a la cadena $A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|} \subsetneq [n] \setminus J$ le corresponde de manera unívoca la partición de $[n] \setminus J$ dada por $(A_1, A_2 \setminus A_1, \ldots, A_{k-|J|} \setminus A_{k-|J|-1}, ([n] \setminus J) \setminus A_{k-|J|})$, la cual tiene $k-|J|+1$ bloques. En consecuencia, para contar el número de cadenas anidadas basadas en $[n]$ con la condición descrita procedemos en dos fases consecutivas: en la primera escogemos $J \subseteq [n]$ cumpliendo $0 \leq |J| \leq k$, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n}{|J|}$ maneras, y en la segunda construimos una partición de $[n] \setminus J$ con $k-|J|+1$ bloques, lo cual admite $(k-|J|+1)!S(n-|J|,k-|J|+1)$ formas diferentes de hacerse, en consecuencia, por el principio fundamental del conteo y considerando que $j = |J| \in \{0,1,\ldots,k\}$, podemos afirmar que el número de cadenas anidadas basadas en $[n]$, en este caso, es $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j+1)!S(n-j,k-j+1)$.

Dado que los casos anteriores son mutuamente excluyentes, aplicando el principio de la suma de conteo, tenemos que el número de cadenas anidadas basadas en $[n]$ de la forma $(J, \emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{k-|J|} \subseteq [n] \setminus J)$, donde $J \subseteq [n]$ satisface $0 \leq |J| \leq k$, es

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j)!S(n-j,k-j) + \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j+1)!S(n-j,k-j+1)\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j)!\left[S(n-j,k-j) + (k-j+1)S(n-j,k-j+1)\right]\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j)!S(n-j+1,k-j+1),
\end{aligned}$$

donde usamos la identidad $S(n-j+1,k-j+1) = S(n-j,k-j) + (k-j+1)S(n-j,k-j+1)$. En conclusión, el número de caras de $M^w(v)$ con dimensión $n-k$ es $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(k-j)!S(n-j+1,k-j+1)$, expresión que es válida para $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. □

2.1.2.4. ADITIVIDAD DE $M^w(v)$

Si $v = (v_1,\ldots,v_n), \hat{v} = (\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n) \in \mathbb{R}^n$ son vectores monótonos, entonces se satisface que $M(v+\hat{v}) = M(v) + M(\hat{v})$ y $M_I(v+\hat{v}) = M_I(v) + M_I(\hat{v})$, es decir, el permutaedro de mayorización tiene las propiedades de aditividad y de aditividad entera. El propósito que tenemos en este apartado es mostrar que el permutaedro de mayorización débil asociado con v también verifica la propiedad de aditividad, pero lo haremos relacionando el permutaedro de mayorización débil con los politopos de Newton.

TEOREMA 2.24. *Si $v = (v_1,\ldots,v_n), \hat{v} = (\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $\hat{v}_1 > \cdots > \hat{v}_n > 0$, entonces $M^w(v+\hat{v}) = M^w(v) + M^w(\hat{v})$.*

Demostración. Sean $v = (v_1,\ldots,v_n), \hat{v} = (\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $\hat{v}_1 > \cdots >$

$\hat{v_n} > 0$. Consideremos los conjuntos

$$\mathscr{B}_1 := \{\vec{0}, (v_1, 0, \ldots, 0), (v_1, v_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (v_1, \ldots, v_{n-1}, 0), v\}$$

y

$$\mathscr{B}_2 := \{\vec{0}, (\hat{v_1}, 0, \ldots, 0), (\hat{v_1}, \hat{v_2}, 0, \ldots, 0), \ldots, (\hat{v_1}, \ldots, \hat{v_{n-1}}, 0), \hat{v}\}.$$

Si definimos los polinomios de Laurent $f(X) := \sum_{\sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1} X^{\sigma(x)}$ y $g(X) := \sum_{\rho \in S_n, y \in \mathscr{B}_2} X^{\rho(y)}$, entonces $\mathscr{S}(f) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1\}$, $\mathscr{S}(g) = \{\rho(y) \mid \rho \in S_n, y \in \mathscr{B}_2\}$ y, en consecuencia, $\mathscr{N}(f) = conv(\{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1\}) = M^w(v)$ y $\mathscr{N}(g) = conv\left(\{\rho(y) \mid \rho \in S_n, y \in \mathscr{B}_2\}\right) = M^w(\hat{v})$. Por lo tanto, $M^w(v) + M^w(\hat{v}) = \mathscr{N}(f) + \mathscr{N}(g) = \mathscr{N}(fg)$. Nos restaría ver que $\mathscr{N}(fg) = M^w(v + \hat{v})$. Inicialmente, observemos que se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} fg(X) = f(X)g(X) &= \sum_{\sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1} X^{\sigma(x)} \sum_{\rho \in S_n, y \in \mathscr{B}_2} X^{\rho(y)} = \sum_{\sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1} \sum_{\rho \in S_n, y \in \mathscr{B}_2} X^{\sigma(x)+\rho(y)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2}} X^{\sigma(x)+\sigma(y)} + \sum_{\substack{\sigma, \rho \in S_n \\ x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2 \\ \sigma \neq \rho}} X^{\sigma(x)+\rho(y)} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2}} X^{\sigma(x+y)} + \sum_{\substack{\sigma, \rho \in S_n \\ x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2 \\ \sigma \neq \rho}} X^{\sigma(x)+\rho(y)}, \end{aligned}$$

de donde, tenemos que $\mathscr{N}(fg) = conv\left(\{\sigma(x+y), \sigma(x) + \rho(y) \mid \sigma, \rho \in S_n, \sigma \neq \rho; x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2\}\right)$ y, en vista de que $M^w(v+\hat{v}) = conv\left(\{\sigma(x+y) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2\}\right)$, concluimos que $M^w(v+\hat{v}) \subseteq \mathscr{N}(fg)$. De otra parte, para cualesquiera $\sigma, \rho \in S_n$, $x \in \mathscr{B}_1$ y $y \in \mathscr{B}_2$, se verifica que $\sigma(x) + \rho(y) \preceq^w v + \hat{v}$, razón por la cual

$$conv\left(\{\sigma(x) + \rho(y) \mid \sigma, \rho \in S_n, \sigma \neq \rho; x \in \mathscr{B}_1, y \in \mathscr{B}_2\}\right) \subseteq M^w(v + \hat{v}),$$

lo cual nos permite afirmar que $\mathscr{N}(fg) \subseteq M^w(v + \hat{v})$. En conclusión, $\mathscr{N}(fg) = M^w(v + \hat{v})$, de donde, $M^w(v + \hat{v}) = M^w(v) + M^w(\hat{v})$. □

2.1.2.5. PERMUTAEDRO DE MAYORIZACIÓN DÉBIL Y MATRICES COMBINATORIAS

En este apartado, exploramos algunas conexiones entre el permutaedro de mayorización débil y las matrices combinatorias; específicamente, establecemos una biyección entre los vértices de $M^w(v)$ y un subconjunto muy especial de $A(R,S)$. Es bien conocido que los vértices del permutaedro clásico de dimensión $n-1$ corresponden a las permutaciones del vector $(1, 2, \ldots, n)$, y esto induce una biyección natural entre los vértices de este permutaedro y las matrices de permutacion de orden n. Las matrices de permutación de orden n coinciden con las matrices $A(R,S)$ de orden n cuando consideramos $R = \vec{1} = S$; es decir, hay una biyección entre los vértices del permutaedro clásico y un subconjunto de matrices de la clase $A(R,S)$. Esta fue la motivación principal para investigar las relaciones que podrían guardar los vértices del permutaedro de mayorización débil y la clase de matrices combinatorias $A(R,S)$.

Comenzamos recordando un resultado probado en el primer apartado de esta sección, donde caracterizamos los vértices del permutaedro de mayorización débil. Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v_1 > \cdots > v_n > 0$ entonces los vértices de $M^w(v)$ son: $y = \vec{0}$ o $y \neq \vec{0}$ con k componentes no nulas ocupadas por $v_1, \ldots, v_k$. Antes de enunciar el resultado principal, exhibiremos un par de

ejemplos que muestran que la biyección que pretendemos entre vértices de $M^w(v)$ y cierto subconjunto de la clase $A(R,S)$ es, de hecho, bastante natural.

EJEMPLO 2.6. Consideremos el permutaedro de mayorización débil $M^w(2,1)$. Su conjunto de vértices viene dado por $\mathcal{V}(M^w(2,1)) = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2)\}$, los cuales están en correspondencia con matrices binarias de la siguiente manera:

$$(0,0)\mapsto\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ (2,0)\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ (0,2)\mapsto\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ (2,1)\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ (1,2)\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 2.7. Consideremos el permutaedro de mayorización débil $M^w(3,2,1)$, cuyo conjunto de vértices es

$$\mathcal{V}(M^w(3,2,1)) = \{(0,0,0),(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(3,2,0),(2,3,0),(3,0,2),$$

$$(2,0,3),(0,3,2),(0,2,3),(3,2,1),(3,1,2),(2,3,1),(2,1,3),(1,3,2),(1,2,3)\},$$

los cuales podemos poner en correspondencia con matrices binarias como sigue:

$$(0,0,0)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ (3,0,0)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ (0,3,0)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ (0,0,3)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(3,2,0)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ (2,3,0)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ (3,0,2)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ (2,0,3)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$(0,3,2)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ (0,2,3)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ (3,2,1)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ (3,1,2)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(2,3,1)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ (2,1,3)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ (1,3,2)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ (1,2,3)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

TEOREMA 2.25. *Si $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $v_1>\cdots>v_n>0$ entonces el conjunto de vértices de $M^w(v)$ está en biyección con el conjunto de matrices binarias $\bigcup_{R\in\{0,1\}^n}\mathcal{A}(R,R)$, es decir, el subconjunto de $\mathcal{A}(R,S)$ con $R=S\in\{0,1\}^n$.*

Demostración. Sea $\psi:\mathcal{V}(M^w(v))\to\bigcup_{R\in\{0,1\}^n}A(R,R)$ definida como sigue:

(1) $\psi(\vec{0})=\mathcal{O}$, donde $\mathcal{O}$ es la matriz nula de orden n.

(2) Si $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{V}(M^w(v))$ es no nulo y tiene k componentes no nulas ocupadas por $v_1,\dots,v_k$, entonces consideremos el conjunto de índices $I:=\{i\in[n]\,|\,y_i\neq 0\}$ y supongamos que $i_1<\cdots<i_k$ son los elementos de I ordenados de manera creciente. Si $\sigma=\begin{pmatrix}v_1&\cdots&v_k\\v_{i_1}&\cdots&v_{i_k}\end{pmatrix}$ y A_σ es la matriz de permutación correspondiente a σ entonces definimos $\psi(y):=A_y$, donde A_y tiene en la submatriz cuyas filas y columnas están en I a la matriz A_σ y el resto de entradas nulas.

ψ es inyectiva, pues si y_1 y y_2 son dos vértices distintos de $M^w(v)$ tales que $\psi(y_1) = \psi(y_2)$, entonces $\psi(y_1)$ y $\psi(y_2)$ deben tener las mismas filas y columnas nulas y, por lo tanto, el conjunto de índices en los que y_1 es nulo coincide con el conjunto de índices en los que y_2 es nulo y lo mismo aplica para los índices en los que y_1 y y_2 son no nulos. Es más, si y_1 y y_2 tienen k componentes no nulas y σ_1, σ_2 son las permutaciones del vector $(v_1, \ldots, v_k)$ correspondientes a y_1 y y_2 respectivamente, entonces necesariamente $\sigma_1 = \sigma_2$, puesto que $A_{\sigma_1} = A_{\sigma_2}$, de donde $y_1 = y_2$. Sea $A \in \bigcup_{R\in\{0,1\}^n} \mathscr{A}(R,R)$. Si $A = \mathscr{O}$ entonces $A = \psi(\vec{0})$. Supongamos entonces que $A \neq \mathscr{O}$. Los índices correspondientes a filas nulas de A coinciden con los índices correspondientes a columnas nulas de A, ya que el vector suma fila de A es el mismo vector suma columna de A. Sea I el conjunto de tales índices. Por la misma razón, los índices correspondientes a filas no nulas de A coinciden con los índices correspondientes a columnas no nulas de A, y como $R \in \{0,1\}^n$, entonces las filas y columnas no nulas de A suman 1 y la submatriz correspondiente a estas filas y columnas debe ser necesariamente una matriz de permutación A_σ. Si A tiene k filas no nulas entonces $A = \psi(y)$, donde y es el vértice de $M^w(v)$ que tiene nulas las componentes con índices en I y en las componentes no nulas tiene la permutación del vector $(v_1, \ldots, v_k)$ correspondiente a la matriz A_σ. Por lo tanto, concluimos que la aplicación ψ es una biyección entre $\mathscr{V}(M^w(v))$ y el conjunto de matrices binarias $\bigcup_{R\in\{0,1\}^n} \mathscr{A}(R,R)$. □

2.1.2.6. COMENTARIOS FINALES

Como lo indicamos al principio de la presente sección, el concepto de permutaedro de mayorización débil asociado con $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, donde $v_1 > \cdots > v_n > 0$, el cual hemos denotado $M^w(v)$, no es un concepto presente en la literatura consultada. Sin embargo, para la construcción que hicimos de la definición de $M^w(v)$ nos apoyamos, de una parte, en el teorema de Mirsky, véase [Mir59], donde se caracterizó geométricamente el concepto de mayorización débil y, de otra parte, en la definición que teníamos de $M(v)$. Por lo tanto, la definición que dimos de $M^w(v)$ nos resultó muy natural. Además, en términos de $M(v)$ el teorema de Mirsky lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$x \in M^w(v) \text{ si, y sólo si, } x \in con v(\{(\eta_1 v_{\pi_1}, \ldots, \eta_n v_{\pi_n}) \mid \pi \in S_n; \eta_i \in \{0,1\}, i \in [n]\}),$$

y en virtud de la teoría de politopos presentada en el capítulo 1, podemos concluir que $\mathscr{V}(M(v)) \subseteq \{(\eta_1 v_{\pi_1}, \ldots, \eta_n v_{\pi_n}) \mid \pi \in S_n; \eta_i \in \{0,1\}, i \in [n]\}$. Lo expresado anteriormente, fue la razón principal para introducir y estudiar $M^w(v)$. En los ejemplos presentados en la sección, se evidencia que el conjunto de Mirsky no coincide con el conjunto de vértices de $M^w(v)$ y, en consecuencia, comenzamos encontrando $\mathscr{V}(M(v))$ y, de esta manera, mejoramos el resultado de Mirsky, al ofrecer un conjunto minimal de generadores para $M^w(v)$. De otra parte, aprovechando la experiencia que nos dejo el trabajo realizado con $M(v)$, logramos caracterizar la estructura facial de $M^w(v)$ mediante el retículo $Cad([n])$, el cual introdujimos para las necesidades de nuestro estudio. Así pues, los resultados que presentamos en este sección, con motivo de la descripción de $\mathscr{L}(M^w(v))$, constituyen aportes originales para la comprensión de $M^w(v)$, los cuales, de una parte, complementan los trabajos de Mirsky sobre mayorización débil pero, asimismo, dan continuidad al enfoque explorado en la descripción combinatoria de $\mathscr{L}(M(v))$. Finalmente, hemos presentado una prueba de la aditividad de $M^w(v)$, la cual resultó muy sencilla al aplicar la herramienta de los politopos de Newton y; asimismo, motivados por la conocida

biyección entre las permutaciones de un vector y las matrices de permutación, construimos una correspondencia biyectiva entre los vértices de $M^w(v)$ y cierto subconjunto de $(0,1)$-matrices pertenecientes a la clase de matrices combinatorias $\mathscr{A}(R,S)$, la cual resulta interesante porque extiende la mencionada biyección.

2.1.3. PERMUTAEDRO DE MAYORIZACIÓN FUERTE

En la presente sección, empezamos profundizando en el estudio del concepto de mayorización fuerte introducido en [Rov16]; más precisamente, nos proponemos caracterizar de manera matricial el concepto y, posteriormente, dar una descripción geométrica del mismo. En las secciones anteriores, hemos estudiado el permutaedro de mayorización y mayorización débil asociados con v, los cuales están definidos mediante $M(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \preceq v\}$ y $M^w(v) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \preceq^w v\}$, respectivamente. Esto nos sugiere definir el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v mediante $M^s(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ll v\}$, y abordar un estudio similar sobre este objeto. Así pues, en esta sección investigamos la estructura facial de $M^s(v)$, y el resultado más importantes e interesantes establece que $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$, es decir, el permutaedro de mayorización fuerte es una pirámide construida a partir del permutaedro de mayorización.

2.1.3.1. UNA CARACTERIZACIÓN MATRICIAL DEL CONCEPTO DE MAYORIZACIÓN FUERTE

En el apartado correspondiente a mayorización fuerte mostramos que si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $x \ll y$ implica $x \preceq^w y$. Es más, como consecuencia de la idea utilizada en la prueba de tal resultado, tenemos que $x \ll y$ implica $x \preceq \alpha y$, donde $\alpha = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$. El propósito de este apartado es mostrar que, de hecho, $x \ll y$ es equivalente a $x \preceq \alpha y$. La importancia de este resultado consiste en que permite caracterizar de manera matricial el concepto de mayorización fuerte.

TEOREMA 2.26. *Si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, con $y \neq \vec{0}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) $x \ll y$

(2) Existe una matriz doble estocástica A tal que $x = y(\alpha A)$, donde $\alpha = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$

Demostración. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tales que $y \neq \vec{0}$. Veamos inicialmente que $x \ll y$ si, y sólo si, $x \preceq \alpha y$, donde $\alpha = \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq 1$.
Si $x \ll y$, entonces se satisfacen las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]}, \quad k \in [n-1], \tag{2.6}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}. \tag{2.7}$$

En vista de que $y \neq \vec{0}$, tenemos que la expresión 2.7 es equivalente a $\alpha = \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq 1$, y para cada $k \in [n-1]$ se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \alpha \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \\
&= \sum_{i=i}^{k} x_{[i]} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}} \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}\right)\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{[i]}\right)\sum_{i=1}^{k} y_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} y_{[i]} + \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]}\right)\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \left(\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} + \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]}\right)\sum_{i=1}^{k} y_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} + \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \sum_{i=k+1}^{n} x_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}} \leq 0,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la expresión 2.6. Así, $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \alpha \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} \alpha y_{[i]}$, y como, además, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} \alpha y_{[i]}$, entonces podemos concluir que $x \preceq \alpha y$.
Recíprocamente, si $x \preceq \alpha y$ entonces se satisface la última desigualdad obtenida, la cual al ser multiplicada por el número positivo $\sum_{i=1}^{n} y_{[i]}$ nos da como resultado la expresión 2.6, que junto a la desigualdad $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq 1$, nos permite afirmar que $x \ll y$.
De manera que, si $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, con $y \neq \vec{0}$, entonces $x \ll y$ es equivalente a $x \preceq \alpha y$, donde $\alpha = \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n}$. Ahora bien, debido a la caracterización matricial del concepto de mayorización, $x \preceq \alpha y$ es equivalente a la igualdad $x = y(\alpha A)$, para alguna matriz doble estocástica A, lo que concluye la prueba. □

2.1.3.2. UNA CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO DE MAYORIZACIÓN FUERTE

En el presente apartado, dado $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $v_1 > \cdots > v_n > 0$, definimos un politopo de dimensión n denominado permutaedro de mayorización fuerte asociado con v y encontramos los vértices de este politopo. Una importante consecuencia de encontrar estos vértices es que nos permite dar una caracterización geométrica del concepto de mayorización

fuerte.

DEFINICIÓN 2.4. Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$, entonces al conjunto $M^s(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ll v\}$ lo denominaremos **permutaedro de mayorización fuerte asociado con** v.

EJEMPLO 2.8. El permutaedro de mayorización fuerte asociado con el vector $(2,1)$, el cual denotamos por $M^s((2,1))$, está conformado por los elementos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la condición $x \ll (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \leq 2x_2$, $x_2 \leq 2x_1$ y $x_1 + x_2 \leq 3$. Estas desigualdades, de hecho, conforman una $\mathscr{H}$-descripción de $M^s((2,1))$, y estas nos permiten representar este politopo en el plano cartesiano. En la siguiente figura mostramos una representación de $M^s((2,1))$, la cual usaremos posteriormente para hacer algunas observaciones sobre este politopo.

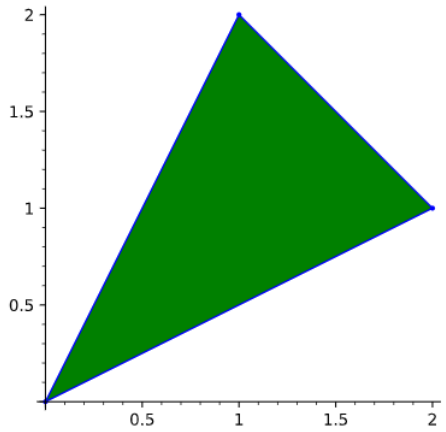


Figura 2.12: $M^s((2,1))$, permutaedro de mayorización fuerte asociado con $(2,1)$.

El conjunto de vértices de $M^s((2,1))$ es $\mathscr{V}(M^s((2,1))) = \{(2,1),(1,2),(0,0)\}$, el cual está conformado por los vértices de $M((2,1))$ junto con el elemento $(0,0)$. Además, debido a que $(0,0)$ no está en la envolvente afín de $M((2,1))$, tenemos que $M^s((2,1)) = Pyr(M((2,1)),(0,0))$.

EJEMPLO 2.9. El permutaedro de mayorización fuerte asociado con el vector $(3,2,1)$, el cual denotamos por $M^s((3,2,1))$, está conformado por los elementos $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ satisfaciendo la condición $x \ll (3,2,1)$, es decir, cumpliendo las desigualdades $(2+1)x_1 \leq 3(x_2+x_3)$, $(2+1)x_2 \leq 3(x_1+x_3)$, $(2+1)x_3 \leq 3(x_1+x_2)$, $(1)(x_1+x_2) \leq (3+2)x_3$, $(1)(x_1+x_3) \leq (3+2)x_2$, $(1)(x_2+x_3) \leq (3+2)x_1$ y $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Estas desigualdades nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $M^s((3,2,1))$, y además nos permiten representar este politopo en $\mathbb{R}^3$. En la figura 2.13 mostramos una representación de $M^s((3,2,1))$, la cual nos será de utilidad para formular algunas observaciones sobre este politopo.

El conjunto de vértices de $M^s((3,2,1))$ lo conforman las 6 permutaciones del vector $(3,2,1)$, que corresponden a los vértices de $M((3,2,1))$, junto con el elemento $(0,0,0)$. Adicionalmente, como este último elemento no pertenece a la envolvente afín de $M((3,2,1))$, concluimos que $M^s((3,2,1)) = Pyr(M((3,2,1)),(0,0,0))$.

PROPOSICIÓN 2.27. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$ es el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v, entonces $M^s(v) = \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} M(\alpha v)$, donde $M(\alpha v)$ es el*

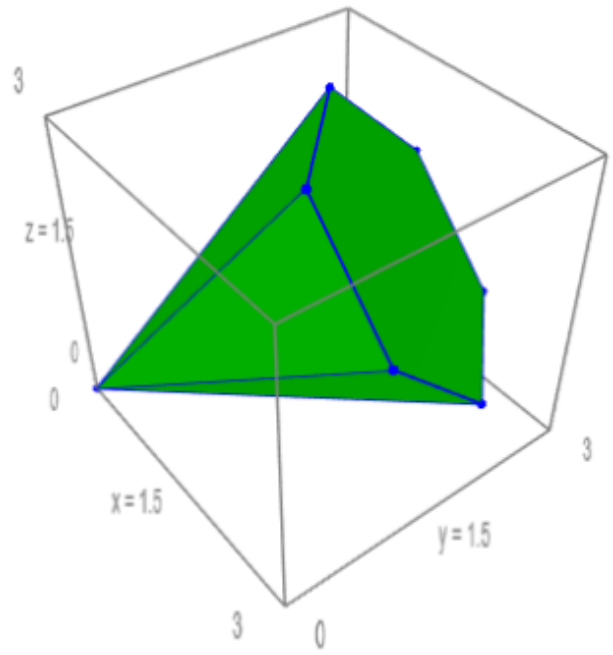


Figura 2.13: $M^s((3,2,1))$, permutaedro de mayorización fuerte asociado con $(3,2,1)$.

permutaedro de mayorización asociado con αv, es decir, $M^s(v)$ se puede expresar como unión disyunta de permutaedros de mayorización.

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$ el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v. Inicialmente, notemos que si $x \in M(\alpha_1 v) \cap M(\alpha_2 v)$, con $\alpha_i \in [0,1]$, para $i = 1,2$, entonces $x \preceq \alpha_1 v$ y $x \preceq \alpha_2 v$, lo cual implica que $\alpha_1 \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n x_i = \alpha_2 \sum_{i=1}^n v_i$, y por lo tanto, $\alpha_1 = \alpha_2$. Esto justifica por qué la unión en el enunciado de la proposición es una unión disyunta.

(⊆) Si $x \in M^s(v)$ entonces $x \in \mathbb{R}^n_+$ y $x \ll v$; luego, $x \preceq \alpha v$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{v_1 + \cdots + v_n} \in [0,1]$, y así $x \in \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} M(\alpha v)$.

(⊇) Si $x \in \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} M(\alpha v)$ entonces existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $x \preceq \alpha v$, lo cual implica en particular que $\sum_{i=1}^n x_i = \alpha \sum_{i=1}^n v_i$, con lo que $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$, y por lo tanto $x \ll v$.

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que $M^s(v) = \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} M(\alpha v)$. □

TEOREMA 2.28. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(b)$ es el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v, entonces $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$, es decir, $M^s(v)$ es la pirámide construida a partir del permutaedro de mayorización asociado con v, $M(v)$, y del vector $\vec{0}$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$ el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v. Analicemos separadamente los siguientes tres casos:

(1) **Caso 1:** $\vec{0}$ es un vértice de $M^s(v)$. En efecto, sean $\vec{x}_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n)$, $j \in [k]$, vectores no nulos en $M^s(v)$ y β_j, $j \in [k]$, números reales en $[0,1]$ tales que $\sum_{j=1}^k \beta_j = 1$ y $\vec{0} = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$. La proposición 2.27 garantiza la existencia de elementos $\alpha_j \in (0,1]$ tales que $\vec{x}_j \preceq \alpha_j v$, $j \in [k]$, lo que implica que $\sum_{i=1}^n x_j^i = \alpha_j \sum_{i=1}^n v_i$, $j \in [k]$, y en consecuencia, tenemos las igualdades

$$0 = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_1^i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_2^i + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n x_k^i = \left(\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k\right) \sum_{i=1}^n v_i.$$

Dado que $v \neq \vec{0}$, $\alpha_j \in (0,1]$ y $\beta_j \in [0,1]$, para cada $j \in [k]$, concluimos que $\beta_j = 0$ para todo $j \in [k]$. De esta manera, la única combinación convexa para $\vec{0}$ en $M^s(v)$ es la trivial, lo que nos permite afirmar que $\vec{0}$ es un vértice de $M^s(v)$.

(2) **Caso 2:** Si $x \in M(\alpha v)$, con $\alpha \in (0,1)$, entonces x no puede ser un vértice de $M^s(v)$. En efecto, si $x \in M(\alpha v)$ entonces $x \preceq \alpha v$ y, por la caracterización geométrica de la mayorización, x está en la envolvente convexa de las permutaciones de αv. Sean $\vec{v}_j$, $j \in [n!]$, las permutaciones de v y $x = \sum_{j=1}^{n!} \beta_j(\alpha\vec{v}_j)$ una combinación convexa de x. En el caso que x sea un vértice de $M(\alpha v)$ entonces existiría $j \in \{1, \ldots, n!\}$ tal que $x = \alpha\vec{v}_j$ y así $x = (1-\alpha)\vec{0} + \alpha\vec{v}_j$ sería una combinación convexa no trivial de x en $M^s(v)$, lo que muestra que x no es un vértice de $M^s(v)$. En el caso de que x no sea un vértice de $M(\alpha v)$, entonces necesariamente $x = \sum_{j=1}^{n!} \beta_j(\alpha\vec{v}_j)$ es una combinación convexa no trivial, y nuevamente concluimos que x no es un vértice de $M^s(v)$.

(3) **Caso 3:** Sea $x \in M(v)$. Claramente, en el caso de que x no sea un vértice de $M(v)$, podemos concluir que x no es un vértice de $M^s(v)$. Veamos que los vértices de $M(v)$, es decir las permutaciones de v, son vértices de $M^s(v)$: sean x una permutación de v y $x = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$ una combinación convexa de x en $M^s(v)$, donde $\vec{x}_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n) \in M(\alpha_j v)$ con $\alpha_j \in (0,1]$. Dado que x es una permutación de v y $\sum_{i=1}^n x_j^i = \alpha_j \sum_{i=1}^n v_i$, $j = 1, \ldots, k$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n v_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_1^i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_2^i + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n x_k^i = \left(\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k\right) \sum_{i=1}^n v_i,$$

lo que implica que $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k = 1$, pero como β_j, $j \in [k]$, son números reales en $[0,1]$ tales que $\sum_{j=1}^k \beta_j = 1$, entonces, necesariamente, tenemos que $\alpha_j = 1$ para todo $j \in [k]$, lo que muestra que $\vec{x}_j \in M(v)$, $j \in [k]$, además, al ser x un vértice de $M(v)$, concluimos que $x = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$ es una combinación convexa trivial. Así, x es un vértice de $M^s(v)$.

Lo anterior muestra que los vértices de $M^s(v)$ son las permutaciones de v junto con el vector $\vec{0}$ y, debido a que $\vec{0} \notin M(v)$, podemos afirmar que $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$. □

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es el siguiente resultado, el cual, de hecho, nos da una caracterización geométrica del concepto de mayorización fuerte.

TEOREMA 2.29. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ entonces $M^s(v) = conv(\{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\})$, donde $\mathscr{B} = \{\vec{0}, v\}$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$, el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v. En el teorema anterior mostramos que $\mathcal{V}(M^s(v)) = \{\sigma(v) \mid \sigma \in S_n\} \cup \{\vec{0}\}$ y, ya que todo politopo es la envolvente convexa de sus vértices, concluimos que $M^s(v) = conv(\{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n, x \in \mathscr{B}\})$, donde $\mathscr{B} = \{\vec{0}, v\}$. □

2.1.3.3. ESTRUCTURA FACIAL DE $M^s(v)$

De lo mostrado en el apartado anterior tenemos que $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$, el cual es un resultado que tiene algunas implicaciones en la descripción de la estructura facial de este politopo, las cuales abordaremos en el presente apartado. Comenzamos mostrando que cada una de las caras de $M(v)$ es también una cara de $M^s(v)$ y, enseguida, demostramos que una cara F de $M(v)$ con dimensión j, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, permite construir de manera unívoca una cara F_0^s de $M^s(v)$ con dimensión $j+1$, más precisamente, $F_0^s = conv(F \cup \{\vec{0}\})$. Finalizamos el apartado describiendo $\mathscr{L}(M^s(v))$, para lo cual hacemos uso de los elementos anteriores.

PROPOSICIÓN 2.30. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$, $M^s(v)$ son los permutaedros de mayorización y mayorización fuerte asociados con v, respectivamente, entonces toda cara de $M(v)$ es también una cara de $M^s(v)$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$, $M^s(v)$ los permutaedros de mayorización y mayorización fuerte asociados con v, respectivamente. Si F es una cara de $M(v)$ entonces existe $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución, justamente, a F. Es más, podemos elegir el vector c de modo tal que $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle = b > 0$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^s(v)$ entonces $x \ll v$ y, por el teorema 2.26, existe una matriz doble estocástica A tal que $x = v(\alpha A)$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{v_1 + \cdots + v_n} \in [0, 1]$ y, en consecuencia, se verifican las igualdades $\langle c, x \rangle = \langle c, v(\alpha A) \rangle = \alpha \langle c, vA \rangle$. Por la caracterización matricial del concepto de mayorización, tenemos que $vA \in M(v)$ y, así, $\langle c, vA \rangle \leq b$. En el caso que $\alpha = 0$, tenemos que $x = \vec{0}$ y $\langle c, x \rangle = 0 < b$, de otra parte, si se da que $\alpha \in (0, 1)$ entonces $\langle c, x \rangle \leq \alpha b < b$, y en la situación en que $\alpha = 1$ resulta que, de hecho, $x \in M(v)$ y $\langle c, x \rangle = b$ si, y sólo si, $x \in F$. Es decir, el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^s(v)} \langle c, x \rangle$ tiene también como conjunto solución a F, lo que muestra que F es también una cara de $M^s(v)$. □

TEOREMA 2.31. *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$, $M^s(v)$ son los permutaedros de mayorización y mayorización fuerte asociados con v, respectivamente, entonces, para cada $k \in [n]$, hay una biyección entre las caras de $M^s(v)$ de dimensión k que contienen a $\vec{0}$ y las caras de $M(v)$ de dimensión $k-1$.*

Demostración. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M(v)$, $M^s(v)$ los permutaedros de mayorización y mayorización fuerte asociados con v, respectivamente. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{L}_0(M^s(v)) := \{F_0 \in \mathscr{L}(M^s(v)) \mid \vec{0} \in F_0\},$$

donde $\mathscr{L}(M^s(v))$ es el retículo de caras de $M^s(v)$, y definamos, además, la función $\Psi : \mathscr{L}(M(v)) \to \mathscr{L}_0(M^s(v))$ mediante $\Psi(F) := conv(F \cup \{\vec{0}\})$. Veamos que Ψ es una biyección entre el retículo de caras de $M(v)$, $\mathscr{L}(M(v))$, y $\mathscr{L}_0(M^s(v))$.

(1) Ψ **está bien definida:** Si $F \in \mathscr{L}(M(v))$ entonces existe $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución a F. Es más, escogemos al vector c de manera tal que $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle = b > 0$.
Definamos $\tilde{c} := c - \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i} \vec{1} = \left(c_1 - \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i}, \ldots, c_n - \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i} \right)$, y consideremos el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^s(v)} \langle \tilde{c}, x \rangle$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^s(v)$ entonces, por el teorema 2.26, existe una matriz doble estocástica A tal que $x = v(\alpha A)$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{v_1 + \cdots + v_n} \in [0,1]$. Por lo tanto, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \langle \tilde{c}, x \rangle = \langle \tilde{c}, v(\alpha A) \rangle = \alpha \langle \tilde{c}, vA \rangle = \alpha \left\langle c - \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i} \vec{1}, vA \right\rangle = \alpha \left(\langle c, vA \rangle - \left\langle \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i} \vec{1}, vA \right\rangle \right) \\ = \alpha \left(\langle c, vA \rangle - \frac{b}{\sum_{i=1}^n v_i} \langle \vec{1}, vA \rangle \right) = \alpha (\langle c, vA \rangle - b), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\langle \vec{1}, Av \rangle = \sum_{i=1}^n v_i$, lo cual se tiene al ser A una matriz doble estocástica. Si $\alpha = 0$ entonces $x = \vec{0}$ y $\langle \tilde{c}, x \rangle = 0$; si $\alpha = 1$ entonces $x = vA \in M(v)$ y tenemos que $\langle \tilde{c}, x \rangle = 0$ si, y sólo si, $x \in F$; si $\alpha \in (0,1)$ entonces $x = \alpha vA + (1-\alpha)\vec{0}$ y se verifica que $\langle \tilde{c}, x \rangle = 0$ si, y sólo si, $vA \in F$; y, finalmente, si $\alpha \in (0,1]$ pero $vA \notin F$ entonces $\langle c, vA \rangle < b$, y en consecuencia $\langle \tilde{c}, x \rangle < 0$. Es decir, $\max_{x \in M^s(v)} \langle \tilde{c}, x \rangle = 0$ y su conjunto solución es $\Psi(F) = conv(F \cup \{\vec{0}\})$, lo que nos permite afirmar que $\Psi(F)$ es una cara de $M^s(v)$ que contiene a $\vec{0}$ y, por lo tanto, Ψ es una función bien definida.

(2) Ψ **es inyectiva:** sean $F_1, F_2 \in \mathscr{L}(M(v))$ tales que $\Psi(F_1) = \Psi(F_2)$. Por definición de Ψ, tenemos que $conv(F_1 \cup \{\vec{0}\}) = conv(F_2 \cup \{\vec{0}\})$, lo cual sucede si, y sólo si, $\mathscr{V}(conv(F_1 \cup \{\vec{0}\})) = \mathscr{V}(conv(F_2 \cup \{\vec{0}\}))$. Ahora bien, si $i \in \{1,2\}$ entonces $\mathscr{V}(conv(F_i \cup \{\vec{0}\}))$ corresponde al conjunto de vértices de $M^s(v)$ contenidos en $F_i \cup \{\vec{0}\}$ y, por el teorema 2.28, todo vértice de $M(v)$ es tambien un vértice de $M^s(v)$, de donde se sigue que $\mathscr{V}(conv(F_i \cup \{\vec{0}\})) = \mathscr{V}(F_i) \cup \{\vec{0}\}$, $i \in \{1,2\}$, y en consecuencia $\mathscr{V}(F_1) = \mathscr{V}(F_2)$. Así, concluimos que $F_1 = F_2$, lo que muestra que Ψ es una función inyectiva.

(3) Ψ **es sobreyectiva:** sea $F_0 \in \mathscr{L}_0(M^s(v))$, luego $\vec{0} \in F_0$ y existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in M^s(v)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución a F_0. Dado que $M(v) \subseteq M^s(v)$ entonces el problema de optimización lineal $\max_{x \in M(v)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución a $F_0 \cap M(v) = conv(\mathscr{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\})$, y así $F := conv(\mathscr{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\}) \in \mathscr{L}(M(v))$. Veamos que $\Psi(F) = F_0$.

- ($\subseteq$) si $x \in \Psi(F) = conv(F \cup \{\vec{0}\})$ entonces existen $\tilde{x} \in F$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $x = \lambda_1 \tilde{x} + \lambda_2 \vec{0}$, y en vista de que $F = conv(\mathscr{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\})$ tenemos que $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i$, donde $\{y_i \mid i \in [k]\} \subseteq \mathscr{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\}$ y los números $\beta_i \in [0,1]$, $i \in [k]$, satisfacen que $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$. De manera que, $x = \sum_{i=1}^k (\lambda_1 \beta_i) y_i + \lambda_2 \vec{0}$, la cual es una expresión para x como combinación convexa de elementos de $\mathscr{V}(F_0)$, y por lo tanto nos permite concluir que $x \in F_0$.
- ($\supseteq$) Si $x \in F_0$ entonces existen $y_i \in \mathscr{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\}$, $i \in [k]$, y números reales $\beta_i \in [0,1]$, $i \in [k+1]$, satisfaciendo $\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i + \beta_{k+1} \vec{0}$.
En el caso que $\beta_{k+1} = 0$ tenemos que $x \in F$ y, en consecuencia, $x \in conv(F \cup \{\vec{0}\}) = \Psi(F)$. Si $\beta_{k+1} = 1$ entonces $x = \vec{0}$ y así $x \in \Psi(F)$. En caso tal que $\beta_{k+1} \in (0,1)$, definimos

$\tilde{x} := \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} y_i \in conv(\mathcal{V}(F_0) \setminus \{\vec{0}\}) = F$, de donde

$$x = (1-\beta_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} y_i\right) + \beta_{k+1}\vec{0} = (1-\beta_{k+1})\tilde{x} + \beta_{k+1}\vec{0} \in conv(F \cup \{\vec{0}\}) = \Psi(F).$$

De modo que, en cualquier caso, tenemos que $x \in \Psi(F)$.

De lo anterior, se sigue que $\Psi(F) = F_0$, lo cual nos muestra que Ψ es una función sobreyectiva.

Hemos mostrado que $\Psi : \mathscr{L}(M(v)) \to \mathscr{L}_0(M^s(v))$ definida mediante $\Psi(F) := conv(F \cup \{\vec{0}\})$ es una biyección. De otra parte, si $F \in \mathscr{L}(M(v))$ es una cara de dimensión j, $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, entonces $\Psi(F) = conv(F \cup \{\vec{0}\}) \in \mathscr{L}_0(M^s(v))$ tiene dimensión $j+1$. En efecto: si existieran $\vec{y}_j = ({y_j}^1,\ldots,{y_j}^n) \in F$, $j \in [k]$, y números reales β_j, $j \in [k]$, satisfaciendo que $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1$ y $\vec{0} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{y}_j$ entonces

$$0 = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} y_1^i + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^{n} y_k^i = (\beta_1 + \cdots + \beta_k) \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i > 0,$$

donde hemos usado que la suma de las entradas de cualquier vector de F es $\sum_{i=1}^{n} v_i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\vec{0}$ no está en la envolvente afín de F y como consecuencia de esto tenemos que $\dim(\Psi(F)) = j+1$, siempre que $\dim(F) = j$, $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, lo que concluye la demostración. □

Consideremos $F_1^s, F_2^s \in \mathscr{L}(M^s(v))$. Definimos la relación de cobertura en $M^s(v)$, la cual denotamos $\lessdot^s$, mediante los siguientes casos:

(1) **Caso 1:** si $F_1^s, F_2^s \in \mathscr{L}(M(v))$ entonces $F_1^s \lessdot^s F_2^s$ si, y sólo si, $F_1^s \lessdot F_2^s$ en $\mathscr{L}(M(v))$.

(2) **Caso 2:** si $F_1^s, F_2^s \in \mathscr{L}_0(M^s(v))$ entonces existen $F_1, F_2 \in \mathscr{L}(M(v))$ tales que $F_1^s = conv(F_1 \cup \{\vec{0}\})$ y $F_2^s = conv(F_2 \cup \{\vec{0}\})$. En tal circunstancia, $F_1^s \lessdot^s F_2^s$ si, y sólo si, $F_1 \lessdot F_2$ en $\mathscr{L}(M(v))$.

(3) **Caso 3:** si $F_1^s \in \mathscr{L}(M(v))$ y $F_2^s \in \mathscr{L}_0(M^s(v))$ entonces $F_1^s \lessdot^s F_2^s$ si, y sólo si, $F_2^s = conv(F_1^s \cup \{\vec{0}\})$.

Debido a que no es posible que un elemento de $\mathscr{L}(M(v))$ cubra un elemento de $\mathscr{L}(M^s(v))$, ya que $\vec{0} \notin M(v)$, afirmamos que en los anteriores tres casos queda completamente descrito el retículo de caras de $M^s(v)$. De otra parte, aprovechando la descripción hecha de $\mathscr{L}(M^s(v))$ y teniendo presente el cálculo de las componentes del f-vector de $M(v)$, que realizamos en el teorema 2.10, a continuación encontramos el f-vector de $M^s(v)$.

TEOREMA 2.32. *Si $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$ es el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v, entonces el número de caras de $M^s(v)$ con dimensión $n-k$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, es $k!S(n+1,k+1)$.*

Demostración. Sean $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $M^s(v)$ el permutaedro de mayorización fuerte asociado con v. De los resultados anteriores tenemos que, para $k \in [n-1]$,

el número de caras de $M^s(v)$ con dimensión $n-k$ lo obtenemos adicionando el número de caras de $M(v)$ con dimensiones $n-k$ y $n-k-1$, de las cuales, en virtud del teorema 2.10, hay $k!S(n,k)$ y $(k+1)!S(n,k+1)$, respectivamente. Por lo tanto, el número de caras de $M^s(v)$ con dimensión $n-k$ es

$$k!S(n,k)+(k+1)!S(n,k+1)=k!(S(n,k)+(k+1)S(n,k+1))=k!S(n+1,k+1),$$

donde usamos la identidad $S(n+1,k+1)=S(n,k)+(k+1)S(n,k+1)$. En conclusión, el número de caras de $M^s(v)$ con dimensión $n-k$ es $k!S(n+1,k+1)$, expresión que es válida para $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. □

2.1.3.4. COMENTARIOS FINALES

El concepto de mayorización fuerte es de aparición reciente en la literatura. Más precisamente, este fue introducido en el año 2016 por Roventa, véase [Rov16]. En [Rov16], el concepto de mayorización fuerte, denotado $\ll$, es usado para establecer una generalización de la desigualdad de Hardy, Littlewood y Pólya; no obstante, algunos resultados sobre el concepto mismo son presentados. Sin embargo, muchos interrogantes en torno al concepto de mayorización fuerte quedan abiertos; por ejemplo, cuestiones sobre la posibilidad de caracterizar este concepto matricial o geométricamente.
En consecuencia, partiendo de los estudios de Roventa sobre $\ll$ e inspirados por las caracterizaciones existentes para los conceptos de mayorización y mayorización débil, véase [MOA11], en esta sección le presentamos al lector o lectora una caracterización matricial de $\ll$, la cual es muy similar a la existente para $\preceq$ y $\preceq^w$. Además, establecimos una caracterización geométrica, para la cual introdujimos, de manera natural, una definición del permutaedro de mayorización fuerte, que denotamos $M^s(v)$, y demostramos la igualdad $M^s(v)=Pyr(M(v))$. En conclusión, los resultados mostrados en esta sección aportan nuevas perspectivas sobre el concepto de mayorización fuerte, que complementan los estudios hechos en [Rov16] sobre este concepto.

2.2. IDEALES PRINCIPALES DE MAYORIZACIÓN

En esta segunda parte de nuestro estudio de politopos de mayorización, nos concentraremos en unos objetos llamados ideales principales de mayorización. En general, los conceptos de mayorización no definen órdenes parciales sobre $\mathbb{R}^n$, pues la propiedad antisimétrica no se satisface. Sin embargo, si nos restringimos a $\mathbb{D}^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1\geq\cdots\geq x_n\}$, entonces las relaciones de mayorización si definen órdenes parciales y, en consecuencia, podemos considerar los ideales generados por un elemento b en dichos órdenes. Estos objetos, además de ser ideales de orden, resultan ser politopos, y en los apartados que siguen investigaremos algunas de las propiedades que estos tienen.

2.2.1. IDEAL PRINCIPAL DE MAYORIZACIÓN

Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces definimos el ideal principal de mayorización asociado con b, denotado por $\mathbb{M}(b)$, el cual resulta ser un politopo de dimensión $n-1$. El presente apartado lo destinamos al estudio del ideal principal de mayorización, específicamente al estudio de su estructura facial. En [Dah01] se realizó un estudio de $\mathbb{M}(b)$ en conexión con optimización lineal y cuadrática y, en particular, se caracterizó el 1 - esqueleto de $\mathbb{M}(b)$ usando unas particiones ordenadas de $[n]$ denominadas particiones intervalo. Nosotros adoptamos la terminología y notación usada en [Dah01], pero hacemos unas pruebas alternativas para algunos de los resultados que allí se presentan. Asimismo, usando el hecho de que $\mathbb{M}(b)$ resulta ser un politopo simple, junto con la descripción de vértices y caras maximales de este politopo, damos una descripción combinatoria de $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

DEFINICIÓN 2.5 ([DAH01], P. 115). Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces el conjunto $\mathbb{M}(b) := \{x \in \mathbb{D}^n \mid x \preceq b\}$ se denomina **ideal principal de mayorización asociado con** b.

EJEMPLO 2.10. El ideal principal de mayorización asociado con el vector $(2,1)$, el cual denotamos por $\mathbb{M}((2,1))$, consiste de los elementos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2$ que satisfacen la condición $x \preceq (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq x_2$ y $x_1 \leq 2$ junto con la igualdad $x_1 + x_2 = 3$. Estas restricciones nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}((2,1))$, la cual nos permite visualizar este politopo en $\mathbb{R}^2$. En la figura 2.14 mostramos una representación de $\mathbb{M}((2,1))$ que usaremos posteriormente para hacer unas observaciones sobre este politopo.

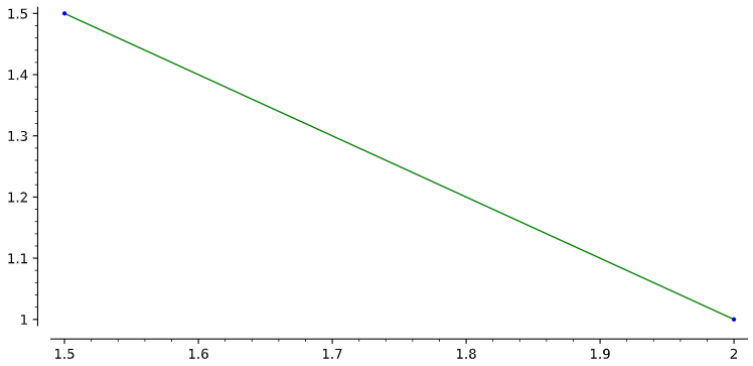


Figura 2.14: $\mathbb{M}((2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(2,1)$.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}((2,1))$ es $\mathscr{V}(\mathbb{M}((2,1))) = \{(2,1), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$, los cuales corresponden, en este caso, a las caras maximales del politopo; aunque $\mathbb{M}((2,1))$ es un politopo contenido en $\mathbb{R}^2$ su dimensión es 1; cada uno de los vértices de $\mathbb{M}((2,1))$ está en exactamente una arista, razón por la cual, podemos afirmar que $\mathbb{M}((2,1))$ es un politopo simple y, en consecuencia, existe una biyección entre las intersecciones no vacías de caras maximales de $\mathbb{M}((2,1))$ y las caras de este politopo.

Las caras maximales de $\mathbb{M}((2,1))$ son $\mathbb{F}_{\{1\}} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{M}((2,1)) \mid x_1 = 2\} = \{(2,1)\}$ y $\mathbb{G}_{\{1\}} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{M}((2,1)) \mid x_1 = x_2\} = \{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$. En la siguiente tabla presentamos una correspondencia entre las caras de $\mathbb{M}((2,1))$ y las parejas ordenadas de subconjuntos de $[1]$ cuyas componentes son disyuntas.

$\mathbb{M}((2,1))$	
Caras de dimensión 1-0	
$\mathbb{M}((2,1))$	$(\emptyset,\emptyset)$
Caras de dimensión 1-1	
$\mathbb{F}_{\{1\}}$	$(\emptyset,\{1\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\emptyset)$

Tabla 2.10: Caras de $\mathbb{M}((2,1))$.

EJEMPLO 2.11. El ideal principal de mayorización asociado con el vector $(3,2,1)$, el cual denotamos por $\mathbb{M}((3,2,1))$, contiene a los elementos $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{D}^3$ que satisfacen la condición $x\preceq(3,2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1\geq x_2$, $x_2\geq x_3$, $x_1\leq 3$, $x_1+x_2\leq 5$ junto con la igualdad $x_1+x_2+x_3=6$. Estas restricciones conforman una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}((3,2,1))$, y ellas nos permiten visualizar este politopo en $\mathbb{R}^3$. En la figura 2.15 mostramos una representación de $\mathbb{M}((3,2,1))$ en el espacio euclidiano 3-dimensional, la cual nos permitirá hacer algunas observaciones sobre este politopo.

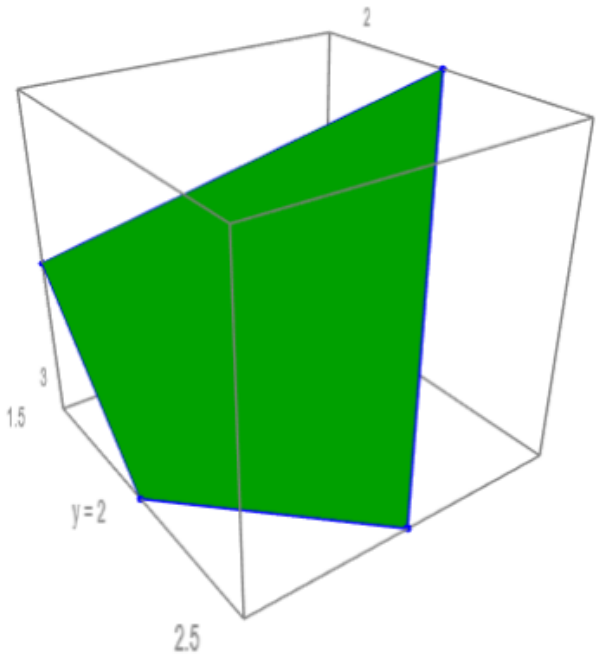


Figura 2.15: $\mathbb{M}((3,2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(3,2,1)$.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}((3,2,1))$ es $\mathscr{V}(\mathbb{M}((3,2,1)))=\{(3,2,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(2,2,2)\}$. Aunque $\mathbb{M}((3,2,1))$ es un politopo contenido en $\mathbb{R}^3$ su dimensión es 2, pues este politopo está contenido en el hiperplano $H:=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=6\}$. Cada uno de los vértices está en exactamente 2 aristas, lo que nos muestra que $\mathbb{M}((3,2,1))$ es un politopo simple. En la tabla 2.11 presentamos la correspondencia entre las caras maximales de $\mathbb{M}((3,2,1))$ y las desigualdades de su $\mathscr{H}$-descripción.

En vista de que $\mathbb{M}((3,2,1))$ es un politopo simple, existe una correspondencia biyectiva,

Cara maximal		Desigualdad
$\mathbb{F}_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}((3,2,1)) \mid x_1 = 3\}$ $= conv(\{(3,2,1),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2})\})$	$x_1 \leq 3$
$\mathbb{F}_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 = 5\}$ $= conv(\{(3,2,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1)\})$	$x_1 + x_2 \leq 5$
$\mathbb{G}_{\{1\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}((3,2,1)) \mid x_1 = x_2\}$ $= conv(\{(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(2,2,2)\})$	$x_1 \geq x_2$
$\mathbb{G}_{\{2\}}$	$:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}((3,2,1)) \mid x_2 = x_3\}$ $= conv(\{(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(2,2,2)\})$	$x_2 \geq x_3$

Tabla 2.11: Caras maximales de $\mathbb{M}((3,2,1))$

para cada $k \in \{0,1,2\}$, entre las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $\mathbb{M}((3,2,1))$ y las caras de dimension $2-k$ de este politopo. En la tabla 2.12 mostramos una correspondencia biyectiva entre las caras de $\mathbb{M}((3,2,1))$ y parejas ordenadas de subconjuntos de $[2]$ cuyas componentes son disyuntas.

$\mathbb{M}((3,2,1))$	
Caras de dimensión 2-0	
$\mathbb{M}((3,2,1))$	$(\emptyset,\emptyset)$
Caras de dimensión 2-1	
$\mathbb{F}_{\{1\}}$	$(\emptyset,\{1\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{2\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\emptyset)$
$\mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\},\emptyset)$
Caras de dimensión 2-2	
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{1,2\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\},\{1\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\{2\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{1,2\},\emptyset)$

Tabla 2.12: Caras de $\mathbb{M}((3,2,1))$.

EJEMPLO 2.12. El ideal principal de mayorización asociado con el vector $(4,3,2,1)$, el cual denotamos mediante $\mathbb{M}((4,3,2,1))$, consiste de los elementos $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{D}^4$ que cumplen con la condición $x \preceq (4,3,2,1)$, es decir, que satisfacen las desigualdades $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_3$, $x_3 \geq x_4$, $x_1 \leq 4$, $x_1+x_2 \leq 7$, $x_1+x_2+x_3 \leq 9$ junto con la igualdad $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$, las cuales conforman una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$.
Aunque $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, este politopo también está contenido en el hiperplano $H := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 10\}$, el cual tiene dimensión 3, lo que nos permite visualizar $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ en el espacio euclidiano 3-dimensional. En la figura 2.16 mostramos una representación de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ en $\mathbb{R}^3$, que usaremos para formular algunas observaciones sobre este politopo.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$, denotado por $\mathscr{V}(\mathbb{M}((4,3,2,1)))$, corresponde a

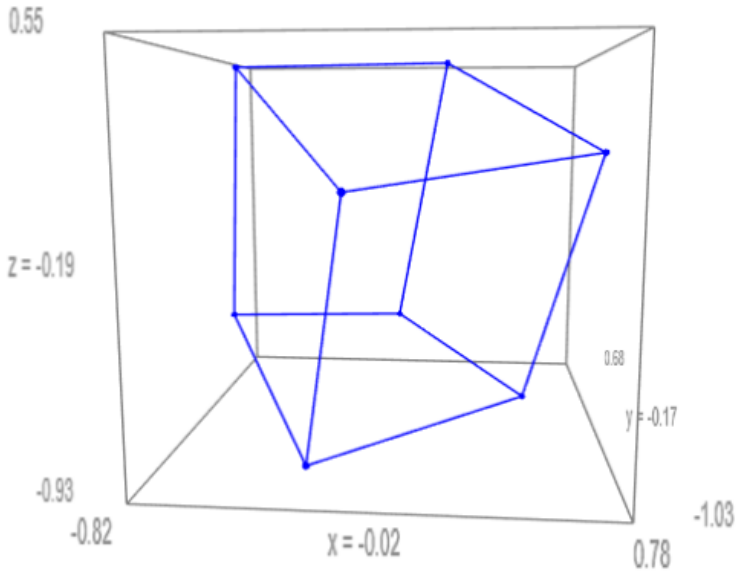


Figura 2.16: $\mathbb{M}((4,3,2,1))$, ideal principal de mayorización asociado con $(4,3,2,1)$.

$\{(4,3,2,1),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},2,1),(4,\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(4,3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(3,3,3,1),(4,2,2,2),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})\}$.
La dimensión de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ es 3 y cada uno de sus vértices está contenido en exactamente 3 aristas, lo cual nos permite afirmar que $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ es un politopo simple y, consecuentemente, existe una correspondencia biyectiva, para cada $k \in \{0,1,2,3\}$, entre las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas y las caras de dimensión $3-k$ de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. Adicionalmente, cada una de las desigualdades de la $\mathscr{H}$-descripción determina una cara maximal de este politopo, tal como mostramos en la tabla 2.13.

Cara maximal	Desigualdad
$\mathbb{F}_{\{1\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_1 = 4\}$ $conv(\{(4,3,2,1),(4,\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(4,3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(4,2,2,2)\})$	$x_1 \leq 4$
$\mathbb{F}_{\{2\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_1 + x_2 = 7\}$ $conv(\{(4,3,2,1),(4,3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},2,1),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})\})$	$x_1 + x_2 \leq 7$
$\mathbb{F}_{\{3\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 9\}$ $conv(\{(4,3,2,1),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},2,1),(4,\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(3,3,3,1)\})$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$
$\mathbb{G}_{\{1\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_1 = x_2\}$ $conv(\{(\frac{7}{2},\frac{7}{2},2,1),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(3,3,3,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})\})$	$x_1 \geq x_2$
$\mathbb{G}_{\{2\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_2 = x_3\}$ $conv(\{(4,\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(3,3,3,1),(4,2,2,2),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})\})$	$x_2 \geq x_3$
$\mathbb{G}_{\{3\}} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{M}((4,3,2,1)) \mid x_3 = x_4\}$ $conv(\{(4,3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(4,2,2,2),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})\})$	$x_3 \geq x_4$

Tabla 2.13: Caras maximales de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$

Teniendo presente que $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ es un politopo simple, podemos establecer una correspondencia biyectiva entre las caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$ y las parejas ordenadas de subconjuntos de $[3]$ con sus componentes disyuntas, la cual presentamos en las tablas 2.14, 2.15 y 2.16.

$\mathbb{M}((4,3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-0	
$\mathbb{M}((4,3,2,1))$	$(\emptyset,\emptyset)$
Caras de dimensión 3-1	
$\mathbb{F}_{\{1\}}$	$(\emptyset,\{1\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{2\})$
$\mathbb{F}_{\{3\}}$	$(\emptyset,\{3\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\emptyset)$
$\mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\},\emptyset)$
$\mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{3\},\emptyset)$

Tabla 2.14: Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte1)

$\mathbb{M}((4,3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-2	
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{1,2\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{3\}}$	$(\emptyset,\{1,3\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{F}_{\{3\}}$	$(\emptyset,\{2,3\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\},\{1\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{3\},\{1\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\{2\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{3\},\{2\})$
$\mathbb{F}_{\{3\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\},\{3\})$
$\mathbb{F}_{\{3\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\},\{3\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{1,2\},\emptyset)$
$\mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{1,3\},\emptyset)$
$\mathbb{G}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{2,3\},\emptyset)$

Tabla 2.15: Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte 2)

Como consecuencia de la definición de $\mathbb{M}(b)$, tenemos que una $\mathscr{H}$-descripción de este politopo viene dada por las relaciones $x_j \geq x_{j+1}$, $j \in [n-1]$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$, $k \in [n-1]$, y $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Cada una de las desigualdades que conforman esta $\mathscr{H}$-descripción define una cara maximal, como veremos posteriormente. A continuación, introducimos la terminología usada en [Dah01] para el estudio de $\mathbb{M}(b)$.

DEFINICIÓN 2.6 ([DAH01], P. 115,116). Si $n \in \mathbb{N}$ y $j,k \in [n]$ son tales que $j \leq k$, entonces $[i:k] := \{j,\ldots,k\}$ es el **intervalo entero con extremos** j **y** k.

DEFINICIÓN 2.7 ([DAH01], P. 115,116). Sean $n \in \mathbb{N}$, $t \in [n]$ y $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_t)$ una partición ordenada de $[n]$ en bloques no vacíos π_j, $j \in [t]$. Si existen enteros $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{t-1} < k_t = n$ tales que $\pi_j = [k_{j-1}+1 : k_j]$, para todo $j \in [t]$, entonces decimos que π es una **partición intervalo de** $[n]$. Los conjuntos π_j, $j \in [t]$, se denominan bloques de la partición π y el conjunto de todas las particiones intervalo de $[n]$ es denotado por Π.

DEFINICIÓN 2.8 ([DAH01], P. 117). Sean $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_t) \in \Pi$ y $n_j := |\pi_j|$, $j \in [t]$. Al vector $b^{\pi} :=$

$\mathbb{M}((4,3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-3	
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{F}_{\{3\}}$	$(\emptyset, \{1,2,3\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{3\}, \{1,2\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{F}_{\{3\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{2\}, \{1,3\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{F}_{\{3\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}}$	$(\{1\}, \{2,3\})$
$\mathbb{F}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{2,3\}, \{1\})$
$\mathbb{F}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{1,3\}, \{2\})$
$\mathbb{F}_{\{3\}} \cap \mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}}$	$(\{1,2\}, \{3\})$
$\mathbb{G}_{\{1\}} \cap \mathbb{G}_{\{2\}} \cap \mathbb{G}_{\{3\}}$	$(\{1,2,3\}, \emptyset)$

Tabla 2.16: Caras de $\mathbb{M}((4,3,2,1))$. (Parte 3)

$(\underbrace{\overline{b_{\pi_1}}, \ldots, \overline{b_{\pi_1}}}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\overline{b_{\pi_t}}, \ldots, \overline{b_{\pi_t}}}_{n_t})$, donde $\overline{b_{\pi_j}} := \frac{1}{n_j} \sum_{j \in \pi_j} b_j$, $j \in [t]$, lo denominaremos **promedio de** b **asociado con** π.

2.2.1.1. VÉRTICES DE $\mathbb{M}(b)$

El objetivo principal de este apartado es demostrar que si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b, entonces los promedios del vector b, que se consiguen recorriendo todas las particiones de Π, son justamente los vértices de $\mathbb{M}(b)$. Este resultado ya fue establecido en [Dah01]; sin embargo, nosotros lo demostramos siguiendo razonamientos similares a los usados para el estudio de los vértices de los permutaedros de mayorización y mayorización débil.

Teniendo presente la $\mathscr{H}$-descripción dada de $\mathbb{M}(b)$, definimos los conjuntos $\mathbb{F}_j := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, y $\mathbb{G}_k := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$, los cuales obtenemos como la intersección de $\mathbb{M}(b)$ con un único hiperplano de soporte de $\mathbb{M}(b)$. El resultado que sigue establece condiciones suficientes y necesarias para que $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 2.33. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b y $j, k \in [n-1]$, entonces $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k \neq \emptyset$ si, y sólo si, $j \neq k$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Consideremos, además, los hiperplanos de soporte de $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{F}_j$ y $\mathbb{G}_k$, donde $j, k \in [n-1]$.

($\Rightarrow$) Si $j = k$ y suponemos que existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k$, entonces $x \in \mathbb{M}(b)$ y se satisfacen las igualdades $x_k = x_{k+1}$ y $\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i$. En consecuencia, se cumplen las relaciones

$$\sum_{i=1}^{k} b_i + x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} b_i = \sum_{i=1}^{k} b_i + b_{k+1} < \sum_{i=1}^{k} b_i + b_k,$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $b_k > b_{k+1}$. Por lo tanto $x_k = x_{k+1} < b_k$, y

de aquí resultan las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} b_i + x_k < \sum_{i=1}^{k-1} b_i + b_k = \sum_{i=1}^{k} b_i,$$

lo que contradice que $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} b_i$. De manera que, si $j = k$, entonces $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Si $j \neq k$ entonces $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definido mediante las igualdades $x_i = b_i$, si $i \in [n] \setminus \{j, j+1\}$, y $x_j = x_{j+1} = \frac{b_j + b_{j+1}}{2}$ pertenece a $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k$. En efecto, en el caso que $j < k$, entonces $j + 1 \leq k$ y tenemos que

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} b_i & \text{si} \quad t < j \text{ o } t > k, \\ \sum_{i=1}^{j-1} b_i + \frac{b_j + b_{j+1}}{2} & \text{si} \quad t = j, \\ \sum_{i=1}^{j+1} b_i & \text{si} \quad t = j+1, \\ \sum_{i=1}^{k} b_i & \text{si} \quad t = k, \end{cases}$$

y como, además, se satisfacen las relaciones $b_{j-1} > b_j = \frac{2b_j}{2} > \frac{b_j + b_{j+1}}{2} > \frac{2b_{j+1}}{2} = b_{j+1}$, podemos concluir que $x \in \mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k$. En el caso que $k < j$, entonces se satisface que

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} b_i & \text{si} \quad t < j \text{ o } t > j+1, \\ \sum_{i=1}^{j-1} b_i + \frac{b_j + b_{j+1}}{2} & \text{si} \quad t = j, \\ \sum_{i=1}^{j+1} b_i & \text{si} \quad t = j+1, \end{cases}$$

y, teniendo presente las relaciones $b_{j-1} > b_j = \frac{2b_j}{2} > \frac{b_j + b_{j+1}}{2} > \frac{2b_{j+1}}{2} = b_{j+1}$, nuevamente podemos afirmar que $x \in \mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k$. En consecuencia, si $j \neq k$ entonces $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k \neq \emptyset$.

□

TEOREMA 2.34 ([DAH01], TEOREMA 2.1(I)). *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b, entonces $\mathcal{V}(\mathbb{M}(b)) = \{b^\pi \mid \pi \in \Pi\}$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Veamos que $\mathcal{V}(\mathbb{M}(b)) = \{b^\pi \mid \pi \in \Pi\}$.

($\subseteq$) Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vértice de $\mathbb{M}(b)$, entonces x es el único punto de intersección de $\mathbb{M}(b)$ con un número finito de hiperplanos de soporte y, en consecuencia, tenemos que $x \in \left(\cap_{j \in J} \mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k \in K} \mathbb{G}_k)$, donde $J, K \subseteq [n]$ satisfacen que $J \cap K = \emptyset$. Analicemos los siguientes casos:

(a) **Caso 1:** Si $J = \emptyset$ entonces $K = [n-1]$. En efecto, si suponemos que el mínimo elemento de K es un entero $k > 1$, entonces cualquier vector $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones $y_i = x_i$, $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, y $\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} b_i$ pertenece a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, como $k > 1$, hay varios de tales vectores; en consecuencia, suponer $k > 1$ contradice la unicidad de x. Por lo tanto, el elemento mínimo del conjunto K es 1. De otra parte, si $k \in K$ pero el siguiente elemento $\tilde{k} \in K$ es mayor que $k+1$ entonces $y = (y_1, \ldots, y_n)$ cumpliendo

con las condiciones $y_i = x_i$, $i \in [n] \setminus \{k+1, \ldots, \tilde{k}\}$, y $y_{k+1} + \cdots + y_{\tilde{k}} = b_{k+1} + \cdots + b_{\tilde{k}}$ pertenece a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, en vista de que $\tilde{k} > k+1$, hay varios de tales vectores, luego, nuevamente se contradice la unicidad de x. En síntesis, el mínimo elemento de K es 1 y no existen elementos en K no consecutivos, por lo tanto, $K = [n-1]$ y, en tal circunstancia, concluimos que $x = b$.

(b) **Caso 2:** Si $K = \emptyset$ entonces $J = [n-1]$. Inicialmente, si suponemos que $n-1 \notin K$ entonces consideramos las particiones intervalo $\pi = (\{1, \ldots, n\})$ y $\rho = (\{1, \ldots, n-1\}, \{n\})$, de modo que, tanto b^π como b^ρ pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x, lo cual contradice la unicidad de x. Por lo tanto, $n-1 \in K$ y, en consecuencia, tenemos que $x_{n-1} = x_n$. Ahora bien, al suponer que $n-2 \notin K$ entonces podemos considerar las particiones intervalo $\pi = (\{1, \ldots, n\})$ y $\mu = (\{1, \ldots, n-2\}, \{n-1, n\})$, de manera que, b^π y b^μ pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x, contradiciendo la unicidad de x. Luego, $n-2 \in K$ y, recopilando, tenemos que $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$. Procediendo, con argumentos similares a los anteriores, en un número finito de pasos, concluimos que $J = [n-1]$ y, en consecuencia, $x = b^\pi$.

(c) **Caso 3:** Si $J, K \neq \emptyset$ entonces $J \cup K = [n-1]$. Efectivamente, definimos una partición de J, $\mathscr{P} = \{J_1, \ldots, J_s\}$, de tal manera que los elementos de cada bloque sean enteros consecutivos y la diferencia entre el mínimo elemento de J_{i+1} y el máximo elemento de J_i sea al menos 2, para $i \in [s-1]$, es decir, organizamos los elementos de J de manera creciente y agrupando cadenas máximas de enteros consecutivos. Sea k el mínimo elemento de $[n-1] \setminus J$ y supongamos que k no pertenece a K, además, consideremos $\tilde{k}$, el mínimo elemento perteneciente a K, por lo tanto, $k < \tilde{k}$ y tenemos la igualdad $\sum_{i=1}^{\tilde{k}} x_i = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i$. En estas circunstancias, los vectores

$$\left(\underbrace{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i, \ldots, \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i}_{k}, \underbrace{\frac{1}{\tilde{k}-k}\sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} b_i, \ldots, \frac{1}{\tilde{k}-k}\sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} b_i}_{\tilde{k}-k}, x_{\tilde{k}+1}, \ldots, x_n \right)$$

y

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\tilde{k}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i, \ldots, \frac{1}{\tilde{k}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i}_{\tilde{k}}, x_{\tilde{k}+1}, \ldots, x_n \right)$$

pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, en consecuencia, se contradice la unicidad de x. De manera que $k = \tilde{k}$, es decir, el mínimo elemento de $[n-1] \setminus J$ coincide con el mínimo elemento de K, lo cual determina completamente las primeras k componentes de x. Con un argumento análogo al anterior, obtenemos que el segundo menor elemento de $[n-1] \setminus J$ coincide con el segundo menor elemento de K y, procediendo de manera sucesiva en un número finito de pasos, llegamos a mostrar que los elementos de $[n-1] \setminus J$ son elementos de K, de manera equivalente, $J \cup K = [n-1]$. Para finalizar, si $[n-1] = K_1 \cup J_1 \cup \cdots \cup K_s \cup J_s \cup K_{s+1}$,

donde $\bigcup_{i=1}^{s+1} K_i = K$ y K_1, K_{s+1} pueden ser eventualmente vacíos, entonces un elemento $x \in \left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k)$ queda completamente determinado y pertenece al conjunto $\{b^\pi \mid \pi \in \Pi\}$.

($\supseteq$) Sean $t \in [n]$, $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ una partición intervalo de $[n]$ y b^π el vector promedio de b asociado con π. Si $\pi_1 = \{1, \ldots, i_1\}, \pi_2 = \{i_1+1, \ldots, i_2\}, \ldots, \pi_t = \{i_{t-1}+1, \ldots, n\}$ son los bloques de π, entonces

$$b^\pi \in \left[\left(\bigcap_{j=1}^{i_1-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_{i_1}\right]\bigcap\left[\left(\bigcap_{j=i_1+1}^{i_2-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_{i_2}\right]\bigcap\cdots\bigcap\left[\left(\bigcap_{j=i_{t-1}+1}^{n-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_n\right].$$

Es más, b^π es el único vector en la intersección de hiperplanos de soporte de $\mathbb{M}(b)$ involucrados en la expresión anterior. En efecto, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que

$$x \in \left[\left(\bigcap_{j=1}^{i_1-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_{i_1}\right]\bigcap\left[\left(\bigcap_{j=i_1+1}^{i_2-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_{i_2}\right]\bigcap\cdots\bigcap\left[\left(\bigcap_{j=i_{t-1}+1}^{n-1}\mathbb{F}_j\right)\bigcap\mathbb{G}_n\right],$$

entonces se satisfacen las igualdades

$$x_j = x_{j+1}, j \in [1, i_1-1] \cup [i_1+1, i_2-1] \cup \cdots \cup [i_{t-1}+1, n-1],$$

y

$$\sum_{i=1}^{i_1} x_i = \sum_{i=1}^{i_1} b_i, \sum_{i=1}^{i_2} x_i = \sum_{i=1}^{i_2} b_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

así, las componentes de x, de hecho, cumplen con las igualdades

$$x_1 = \cdots = x_{i_1}, x_{i_1+1} = \cdots = x_{i_2}, \ldots, x_{i_{t-1}+1} = \cdots = x_n$$

y

$$\sum_{i=1}^{i_1} x_i = \sum_{i=1}^{i_1} b_i, \sum_{i=i_1+1}^{i_2} x_i = \sum_{i=i_1+1}^{i_2} b_i, \ldots, \sum_{i=i_{t-1}+1}^{n} x_i = \sum_{i=i_{t-1}+1}^{n} b_i,$$

las cuales nos permiten concluir que $x = b^\pi$. Es decir, b^π es el único punto de intersección de un número finito de hiperplanos de soporte de $\mathbb{M}(b)$, en consecuencia, b^π es un vértice de $\mathbb{M}(b)$.

□

PROPOSICIÓN 2.35 ([DAH01], P. 115). *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ entonces $\mathbb{M}(b)$ es un politopo de dimensión $n-1$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. En vista de que el permutaedro de mayorización asociado con b, $M(b)$, satisface que $\mathbb{M}(b) \subseteq M(b)$, podemos afirmar que $\mathbb{M}(b)$ es un politopo tal que $\dim(M(b)) \geq \dim(\mathbb{M}(b))$ y, como $\dim(M(b)) = n-1$, concluimos que $\dim(\mathbb{M}(b)) \leq n-1$. De otra parte, consideremos b^{π^1}, b^{π^2}, b^{π^3}, …, b^{π^n} los promedios del vector b asociados con las particiones ordenadas $\pi^1 := (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n\})$, $\pi^2 := (\{1,2\}, \{3\}, \ldots, \{n\})$, $\pi^3 := (\{1,2,3\}, \ldots, \{n\})$,

$\ldots$, $\pi^n := (\{1,2,3,\ldots,n\})$, respectivamente. Sean $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i b^{\pi^i} = \vec{0}$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, lo cual nos determina las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 b_1 + \lambda_2\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) + \lambda_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right) + \cdots + \lambda_n\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{n}\right) &= 0\\
\lambda_1 b_2 + \lambda_2\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) + \lambda_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right) + \cdots + \lambda_n\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{n}\right) &= 0\\
\lambda_1 b_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right) + \cdots + \lambda_n\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{n}\right) &= 0\\
&\vdots\\
\lambda_1 b_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 b_n + \cdots + \lambda_n\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{n}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Igualando la primera y segunda ecuación obtenemos $\lambda_1(b_1-b_2)=0$, de donde concluimos que $\lambda_1 = 0$, ya que $b_1 > b_2 > 0$. Similarmente, igualando la segunda y tercera ecuación conseguimos $\lambda_2\left(\frac{b_1+b_2}{2} - b_3\right) = \lambda_2\left(\frac{(b_1-b_3)+(b_2-b_3)}{2}\right) = 0$, de donde deducimos que $\lambda_2 = 0$, pues $b_1 > b_2 > b_3 > 0$. Continuando reiteradamente de esta manera obtenemos en n pasos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. Es decir, la única solución de $\sum_{i=1}^n \lambda_i b^{\pi^i} = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, es $\lambda_i = 0$ para todo $i \in [n]$, lo cual nos muestra que los vectores b^{π^1}, b^{π^2}, b^{π^3}, $\ldots$, b^{π^n} son afínmente independientes. Por lo tanto, dado que $\mathbb{M}(b)$ tiene n vectores afínmente independientes, podemos afirmar que $\dim(\mathbb{M}(b)) \geq n-1$ y, en consecuencia, $\mathbb{M}(b)$ es un politopo de dimensión $n-1$. □

2.2.1.2. $\mathbb{M}(b)$ ES UN POLITOPO SIMPLE

En este apartado, el objetivo principal es mostrar que $\mathbb{M}(b)$ es un politopo simple. Sin embargo, previamente haremos una descripción de las caras maximales de $\mathbb{M}(b)$ para, apoyados en la descripción de los vértices de $\mathbb{M}(b)$, poder aproximarnos de una manera sencilla al resultado principal.

PROPOSICIÓN 2.36. *Si $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b, entonces las caras maximales de $\mathbb{M}(b)$ son los conjuntos $\mathbb{F}_j := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, y $\mathbb{G}_k := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n-1]$.*

Demostración. Sean $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Consideremos, además, los conjuntos $\mathbb{F}_j := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, y $\mathbb{G}_k := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid \sum_{i=1}^k x_j = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$. Hemos visto que una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}(b)$ está descrita mediante las relaciones $x_j \geq x_{j+1}$, $j \in [n-1]$, $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$, $k \in [n-1]$, y $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n b_i$, de manera que, cada una de las desigualdades presentes en esta $\mathscr{H}$-descipción es una desigualdad válida de $\mathbb{M}(b)$ y se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\mathbb{F}_j = \mathbb{M}(b) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = x_{j+1}\},\ j \in [n-1].$$

$$\mathbb{G}_k = \mathbb{M}(b) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\},\ k \in [n].$$

Por lo tanto, $\mathbb{F}_j$, $j \in [n-1]$, y $\mathbb{G}_k$, $k \in [n-1]$, son caras de $\mathbb{M}(b)$. Es más, tenemos que toda cara de $\mathbb{M}(b)$ se obtiene como la intersección de $\mathbb{M}(b)$ con un número finito de hiperplanos de soporte del tipo $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, o del tipo $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$. Por consiguiente, si $\mathbb{F}$ es una cara maximal entonces $\mathbb{F} = \mathbb{F}_j$, para algún $j \in [n-1]$, o, $\mathbb{F} = \mathbb{G}_k$, para algún $k \in [n-1]$. En efecto, las caras de los tipos $\mathbb{F}_j$ y $\mathbb{G}_k$, $j,k \in [n-1]$, son caras propias no vacías de $\mathbb{M}(b)$, y si $\mathbb{G}$ es cualquier otra cara propia y no vacía de $\mathbb{M}(b)$ entonces $\mathbb{G}$ se obtiene como la intersección de este politopo con dos o más de sus hiperplanos de soporte y, en consecuencia, $\mathbb{G}$ no sería maximal. En conclusión, las caras maximales de $\mathbb{M}(b)$ son los conjuntos $\mathbb{F}_j := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, y $\mathbb{G}_k := \{x \in \mathbb{M}(b) \mid \sum_{i=1}^k x_j = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n-1]$. □

PROPOSICIÓN 2.37. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces $\mathbb{M}(b)$, el ideal principal de mayorización asociado con b, es un politopo simple.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Consideremos, además, $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$, $t \in [n]$, una partición intervalo de $[n]$ y b^π el vértice de $\mathbb{M}(b)$ asociado con π. Veamos que b^π está en exactamente $n-1$ caras maximales de $\mathbb{M}(b)$, hecho que mostraría que $\mathbb{M}(b)$ es un politopo simple. Si $|\pi_j| = n_j$, para $j \in [t]$, entonces las primeras n_1 componentes de b^π son iguales entre si, las siguientes n_2 componentes de b^π son iguales entre si, y así sucesivamente, razón por la cual, concluimos que $b^\pi \in \mathbb{F}_j$, para cada $j \in [n_1 - 1] \cup [n_1 + 1 : n_1 + n_2 - 1] \cup \cdots \cup [n_1 + \cdots + n_{t-1} + 1 : n_1 + \cdots + n_t - 1]$, donde $n_1 + \cdots + n_t = n$. De lo anterior, b^π pertenece a, al menos, $n - t$ caras maximales del tipo $\mathbb{F}_j$, $j \in [n-1]$. De otra parte, por definición de b^π, tenemos que $b^\pi \in \mathbb{G}_{n_1} \cap \mathbb{G}_{n_1+n_2} \cap \cdots \cap \mathbb{G}_{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}}$, lo que nos permite afirmar que b^π es un elemento de, al menos, $t-1$ caras maximales del tipo $\mathbb{G}_k$, $k \in [n-1]$. Por lo tanto, el vector b^π pertenece mínimo a $n-1$ caras maximales. Finalmente, en virtud de que $\mathbb{F}_j \cap \mathbb{G}_k \neq \emptyset$ si, y sólo si, $j \neq k$, concluimos que b^π solo pertenece a las $n-1$ caras maximales mencionadas antes, lo que culmina la prueba. □

2.2.1.3. ESTRUCTURA FACIAL DE $\mathbb{M}(b)$

La descripción combinatoria de la estructura facial del politopo $\mathbb{M}(b)$ requiere encontrar un retículo $\mathscr{R}$ tal que $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong \mathscr{R}$. Para el caso del permutaedro de mayorización, el retículo que permitió hacer la descripción de su estructura facial fue el retículo de particiones ordenadas de $[n]$ con $\hat{0}$, es decir, $\Pi_n \cup \hat{0}$. Sin embargo, en lo que respecta a $\mathbb{M}(b)$ nos apoyaremos en un retículo que, aunque hemos sugerido en los ejemplos mostrados al principio de la sección, no es un retículo referenciado en la literatura consultada y, por consiguiente, debemos definir al comienzo de este apartado de manera precisa.

DEFINICIÓN 2.9. Si $\mathscr{C} := \{(A,B) \mid A, B \subseteq [n] \wedge A \cap B = \emptyset\}$ y $\lessdot$ es una relación de cobertura definida sobre $\mathscr{C}$ mediante

$$(A,B) \lessdot (\tilde{A},\tilde{B}) \Leftrightarrow (\exists x \in [n] \setminus (A \cup B))\,((A = \tilde{A} \wedge B \setminus \tilde{B} = \{x\}) \veebar (B = \tilde{B} \wedge A \setminus \tilde{A} = \{x\})),$$

entonces el retículo inducido por $\lessdot$ adjuntándole el $\hat{0}$, el cual denotaremos $Bip([n])$, lo llamaremos **retículo de biparticiones ordenadas sobre** $[n]$.

EJEMPLO 2.13. El retículo de biparticiones ordenadas sobre [2], $Bip([2])$, lo representamos en el siguiente diagrama de Hasse:

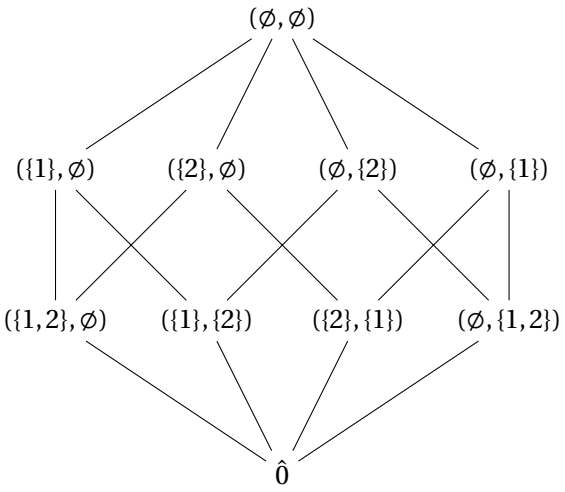


Figura 2.17: $Bip([2])$, retículo de biparticiones ordenadas sobre [2].

En el siguiente teorema presentamos la descripción combinatoria del retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$, el cual denotamos $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$, a través del retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n-1]$.

TEOREMA 2.38. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong Bip([n-1])$; es decir, el retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$ es isomorfo al retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n-1]$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Consideremos, además el retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$, $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$, y el retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n-1]$. Si $\mathbb{F}$ es una cara propia no vacía de $\mathbb{M}(b)$ entonces existen $J, K \subseteq [n-1]$ tales que $J \cap K = \emptyset$ y $\mathbb{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k)$, lo cual nos sugiere definir $\Psi : \mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \to Bip([n-1])$ mediante $\Psi(\mathbb{F}) := (K, J)$, junto con las igualdades $\Psi(\emptyset) = \hat{0}$ y $\Psi(\mathbb{M}(b)) = (\emptyset, \emptyset)$. Veamos que Ψ es un isomorfismo de retículos:

(a) Ψ **está bien definida:** si $\mathbb{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k)$, donde $J, K \subseteq [n-1]$ son tales que $J \cap K = \emptyset$, entonces $\Psi(\mathbb{F}) = (K, J) \in Bip([n-1])$. Además, claramente $\Psi(\emptyset)$ y $\Psi(\mathbb{M}(b))$ son elementos de $Bip([n-1])$.

(b) Ψ **es inyectiva:** sean $\mathbb{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k)$, donde $J, K \subseteq [n-1]$ son tales que $J \cap K = \emptyset$, y $\mathbb{G} = \left(\cap_{j\in \tilde{J}}\mathbb{F}_j\right) \cap \left(\cap_{k\in \tilde{K}}\mathbb{G}_k\right)$, donde $\tilde{J}, \tilde{K} \subseteq [n-1]$ son tales que $\tilde{J} \cap \tilde{K} = \emptyset$, caras propias no vacías de $\mathbb{M}(b)$ que satisfacen $\Psi(\mathbb{F}) = (K, J) = (\tilde{K}, \tilde{J}) = \Psi(\mathbb{G})$. Por lo tanto, $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K}$, de donde, concluimos que $\mathbb{F} = \mathbb{G}$.

(c) Ψ **es sobreyectiva:** si $(K, J) \in Bip([n-1])$ entonces $(K, J) = \Psi(\mathbb{F})$, donde $\mathbb{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k)$, siendo $J, K \subseteq [n-1]$ tales que $J \cap K = \emptyset$. Además, $\hat{0} = \Psi(\emptyset)$ y $(\emptyset, \emptyset) = \Psi(\mathbb{M}(b))$.

(d) Ψ **preserva coberturas:** si $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$ son caras propias no vacías de $\mathbb{M}(b)$ tales que $\mathbb{G}$ cubre a $\mathbb{F}$, entonces $\mathbb{F}$ se obtiene a partir de $\mathbb{G}$ mediante la intersección de esta última cara con un

hiperplano de soporte de $\mathbb{M}(b)$ no considerado en la intersección que define a $\mathbb{G}$, bien del tipo $\mathbb{F}_j$, $j \in [n-1]$, o bien del tipo $\mathbb{G}_k$, $k \in [n-1]$. En este caso, claramente $\Psi(\mathbb{F}) \lessdot \Psi(\mathbb{G})$. De otra parte, $\mathbb{M}(b)$ cubre a las caras maximales, relación que se preserva a través de Ψ. Finalmente, los vértices de $\mathbb{M}(b)$ cubren a la cara vacía y, en vista de que $\mathbb{M}(b)$ es un politopo simple con dimensión $n-1$, los vértices se consiguen como la intersección de $n-1$ caras maximales, razón por la cual, la imagen de los vértices bajo la aplicación Ψ son particiones ordenadas de $[n-1]$ de tamaño 2, las cuales cubren a $\hat{0} = \Psi(\emptyset)$ en el retículo $Bip([n-1])$.

(e) Ψ^{-1} **preserva las coberturas:** si $(K,J),(\tilde{K},\tilde{J}) \in Bip([n-1])$ son tales que $(K,J) \lessdot (\tilde{K},\tilde{J})$ en $Bip([n-1])$, entonces se presentan un par de situaciones que analizamos, de manera separada, a continuación:

(i) **Caso 1:** si $K = \tilde{K}$ y $J = \tilde{J} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n-1] \setminus (K \cup J)$, entonces $\Psi^{-1}((K,J)) = \mathbb{F}_i \cap (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$ y $\Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$. Por lo tanto, tenemos que $\Psi^{-1}((K,J)) \lessdot \Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

(ii) **Caso 2:** si $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n-1] \setminus (K \cup J)$, entonces $\Psi^{-1}((K,J)) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k) \cap \mathbb{G}_i$ y $\Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$. Por consiguiente, tenemos que $\Psi^{-1}((K,J)) \lessdot \Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

De otra parte, si $(A,B) \in Bip([n-1])$ es tal que $\hat{0} \lessdot (A,B)$ en $Bip([n-1])$, entonces $A \cup B = [n-1]$. En consecuencia, tenemos que $\Psi^{-1}(\hat{0}) = \emptyset$ y $\Psi^{-1}((A,B))$ es un vértice de $\mathbb{M}(b)$, razón por la cual, $\Psi^{-1}(\hat{0}) \lessdot \Psi^{-1}((A,B))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

Lo anterior nos permite concluir que Ψ es, efectivamente, un isomorfismo de retículos y, por consiguiente, afirmamos que $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong Bip([n-1])$. □

El siguiente resultado nos da una expresión general para el número de caras de $\mathbb{M}(b)$ de cualquier dimensión. Su prueba está fuertemente basada en el anterior teorema, en particular, en el isomorfismo Ψ.

TEOREMA 2.39. *Si $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con b, entonces el número de caras de $\mathbb{M}(b)$ con dimensión $n-k-1$ es $\binom{n-1}{k}2^k$.*

Demostración. Sean $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$ el ideal principal de mayorización asociado con b. Dado que $\mathbb{M}(b)$ es un $n-1$-politopo simple, hay una biyección entre sus caras de dimensión $n-k-1$ y las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $\mathbb{M}(b)$. Por lo tanto, la imagen mediante Ψ, el isomorfismo de retículos descrito en el teorema anterior, son aquellos elementos $(K,J) \in Bip([n-1])$ tales que $|K|+|J| = k$. Estos elementos los podemos conseguir en dos fases: en la primera fase, escogemos un subconjunto J de $[n-1]$ de tamaño j, $0 \le j \le k$, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n-1}{j}$ maneras, mientras que, en la segunda fase, escogemos el subconjunto K de $[n-1] \setminus J$ de tamaño $k-j$, lo cual podemos hacerlo de $\binom{(n-1)-j}{k-j}$ formas. De manera que, por el principio fundamental del conteo, el número

de tales elementos es $\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j}\binom{(n-1)-j}{k-j}$ y, en vista de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{j}\binom{(n-1)-j}{k-j} &= \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}\frac{(n-1-j)!}{(k-j)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \binom{k}{j}\binom{n-1}{k},\end{aligned}$$

tenemos que $\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j}\binom{(n-1)-j}{k-j} = \binom{n-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} = \binom{n-1}{k}2^k$, donde hemos usado la identidad $2^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}$. □

En particular, el número de vértices de $\mathbb{M}(b)$ es 2^{n-1}, el cual obtenemos considerando $k = n-1$ y, corresponde, al número de particiones intervalo de $[n]$, tal como se referencia en [Dah01]. Sin embargo, los teoremas anteriores, al describir de una manera sencilla el retículo $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$, extienden la descripción del 1-esqueleto de $\mathbb{M}(b)$, que es uno de los resultados principales de [Dah01] referentes a este politopo.

2.2.1.4. ADITIVIDAD DE $\mathbb{M}(b)$

En este apartado, vamos a demostrar que el ideal principal de mayorización satisface la propiedad de aditividad, es decir, si $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{b} = (\hat{b_1},\dots,\hat{b_n}) \in \mathbb{R}^n$ satisfacen que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\hat{b_1} > \cdots > \hat{b_n} > 0$, entonces se cumple la igualdad $\mathbb{M}(b) + \mathbb{M}(\hat{b}) = \mathbb{M}(b+\hat{b})$. La estrategia utilizada será la misma que hemos usado para investigar esta propiedad en los permutaedros de mayorización, a saber, los politopos de Newton. Sin embargo, el caso del ideal de mayorización demanda la justificación de algunas desigualdades, las cuales abordamos mediante un lema previo al resultado principal.

LEMA 2.40. *Si $c_1,\dots,c_t$ son números reales satisfaciendo que $c_1 > \cdots > c_t > 0$, entonces se satisface la desigualdad $s\left(\frac{\sum_{i=1}^{t} c_i}{t}\right) \leq \sum_{i=1}^{s} c_i$, para cada $s \in [t]$.*

Demostración. Sean $c_1,\dots,c_t$ números reales satisfaciendo $c_1 > \cdots > c_t > 0$. Analicemos los siguientes casos:

(1) **Caso 1:** Si $s = t$ entonces $s\left(\frac{\sum_{i=1}^{t} c_i}{t}\right) = \sum_{i=1}^{s} c_i$ y, en consecuencia, se satisface la desigualdad del enunciado.

(2) **Caso 2:** Si $s < t$ entonces tenemos las siguientes equivalencias:

$$\underbrace{s\left(\frac{\sum_{i=1}^{t} c_i}{t}\right) \leq \sum_{i=1}^{s} c_i}_{(\alpha)} \Leftrightarrow s\sum_{i=1}^{t} c_i \leq t\sum_{i=1}^{s} c_i \Leftrightarrow s\left(\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=s+1}^{t} c_i\right) \leq t\sum_{i=1}^{s} c_i$$

$$\Leftrightarrow s\sum_{i=1}^{s} c_i + s\sum_{i=s+1}^{t} c_i \leq (t-s)\sum_{i=1}^{s} c_i + s\sum_{i=1}^{s} c_i$$

$$\Leftrightarrow s\sum_{i=s+1}^{t} c_i \leq (t-s)\sum_{i=1}^{s} c_i \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{t-s}\sum_{i=s+1}^{t} c_i \leq \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} c_i}_{(\beta)},$$

razón por la cual, para justificar la desigualdad (α) es suficiente justificar la desigualdad (β), la cual se satisface debido a las relaciones

$$\frac{1}{t-s}\sum_{i=s+1}^{t} c_i \leq \frac{1}{t-s}\sum_{i=s+1}^{t} c_s = \frac{1}{t-s}(t-s)c_s = c_s = \frac{sc_s}{s} \leq \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} c_i,$$

donde, en la primera desigualdad hemos usado que $c_i \leq c_s$, para todo $s \in \{s+1,\ldots,t\}$, y la última desigualdad se basa en que $c_s \leq c_j$, para cada $j \in [s]$.

De lo anterior, concluimos que $s\left(\frac{\sum_{i=1}^{t} c_i}{t}\right) \leq \sum_{i=1}^{s} c_i$, para cada $s \in [t]$, siempre que $c_1,\ldots,c_t$ sean números reales satisfaciendo $c_1 > \cdots > c_t > 0$. □

TEOREMA 2.41. *Si $b = (b_1,\ldots,b_n), \hat{b} = (\hat{b_1},\ldots,\hat{b_n}) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\hat{b_1} > \cdots > \hat{b_n} > 0$, entonces $\mathbb{M}(b+\hat{b}) = \mathbb{M}(b) + \mathbb{M}(\hat{b})$.*

Demostración. Sean $b = (b_1,\ldots,b_n), \hat{b} = (\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\hat{b}_1 > \cdots > \hat{b}_n > 0$. Definimos los polinomios de Laurent $f(X) := \sum_{\pi\in\Pi} X^{b^\pi}$ y $g(X) := \sum_{\sigma\in\Pi} X^{\hat{b}^\sigma}$, entonces $\mathscr{S}(f) = \{b^\pi \mid \pi \in \Pi\}$, $\mathscr{S}(g) = \{\hat{b}^\sigma \mid \sigma \in \Pi\}$ y, en consecuencia, $\mathscr{N}(f) = conv(\{b^\pi \mid \pi \in \Pi\}) = \mathbb{M}(b)$ y $\mathscr{N}(f) = conv(\{\hat{b}^\sigma \mid \sigma \in \Pi\}) = \mathbb{M}(\hat{b})$. Por lo tanto, $\mathbb{M}(b) + \mathbb{M}(\hat{b}) = \mathscr{N}(f) + \mathscr{N}(g) = \mathscr{N}(fg)$. Nos restaría ver que $\mathscr{N}(fg) = \mathbb{M}(b+\hat{b})$. Inicialmente, observemos que se satisfacen las igualdades

$$fg(X) = f(X)g(X) = \sum_{\pi\in\Pi} X^{b^\pi} \sum_{\sigma\in\Pi} X^{\hat{b}^\sigma} = \sum_{\pi\in\Pi} X^{b^\pi} X^{\hat{b}^\pi} + \sum_{\substack{\pi,\sigma\in\Pi \\ \pi\neq\sigma}} X^{b^\pi} X^{\hat{b}^\sigma} =$$

$$= \sum_{\pi\in\Pi} X^{b^\pi+\hat{b}^\pi} + \sum_{\substack{\pi,\sigma\in\Pi \\ \pi\neq\sigma}} X^{b^\pi+\hat{b}^\sigma} = \sum_{\pi\in\Pi} X^{(b+\hat{b})^\pi} + \sum_{\substack{\pi,\sigma\in\Pi \\ \pi\neq\sigma}} X^{b^\pi+\hat{b}^\sigma}$$

de donde, tenemos que $\mathscr{N}(fg) = conv(\{(b+\hat{b})^\pi, b^\pi + \hat{b}^\sigma \mid \pi,\sigma \in \Pi, \pi \neq \sigma\})$ y, en vista de que $\mathbb{M}(b+\hat{b}) = conv(\{(b+\hat{b})^\pi \mid \pi \in \Pi\})$, concluimos que $\mathbb{M}(b+\hat{b}) \subseteq \mathscr{N}(fg)$. Para ver que $\mathscr{N}(fg) \subseteq \mathbb{M}(b+\hat{b})$ es suficiente mostrar que $b^\pi + \hat{b}^\sigma \preceq b+\hat{b}$, para cualesquiera $\pi,\sigma \in \Pi$. Consideremos $\pi = (\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_s)$ y $\pi = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_t)$ elementos de Π, tales que

$$\pi_1 = \{1,\ldots,k_1\}, \pi_2 = \{k_1+1,\ldots,k_2\},\ldots,\pi_s = \{k_{s-1}+1,\ldots,n\},$$
$$\sigma_1 = \{1,\ldots,j_1\}, \sigma_2 = \{j_1+1,\ldots,j_2\},\ldots,\sigma_t = \{j_{s-1}+1,\ldots,n\},$$

donde, definimos $k_0 := 0, k_s := n$ y $j_0 := 0, j_t := n$. Consideremos los vectores $b^\pi = (b_1^\pi, b_2^\pi, \ldots, b_n^\pi)$ y $\hat{b}^\sigma = (\hat{b}_1^\sigma, \hat{b}_2^\sigma, \ldots, \hat{b}_1^\sigma)$, de manera que, dado $h \in [n]$ analizamos los siguientes casos:

(1) **Caso 1:** Si $h = k_i = j_l$ para algunos $i \in [s]$ y $l \in [t]$, entonces $\sum_{i=1}^{h}(b_i^\pi + \hat{b}_i^\sigma) = \sum_{i=1}^{h}(b_i + \hat{b}_i)$.

(2) **Caso 2:** Si $h = k_i$, para algún $i \in [s]$, pero $h \neq j_l$, para todo $l \in [t]$, entonces, suponiendo que $h \in \sigma_{l^*}$, se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{h}(b_i{}^\pi + \hat{b}_i^\sigma) &= \sum_{i=1}^{h} b_i{}^\pi + \sum_{i=1}^{h} \hat{b}_i^\sigma = \sum_{i=1}^{h} b_i + \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i^\sigma + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i^\sigma \right) \\
&= \sum_{i=1}^{h} b_i + \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i^\sigma \right) \\
&= \sum_{i=1}^{h} b_i + \left[\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \left(\frac{\sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{j_{l^*}} \hat{b}_i}{j_{l^*} - j_{(l^*-1)}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{h} b_i + \left[\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + (h - j_{(l^*-1)}) \left(\frac{\sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{j_{l^*}} \hat{b}_i}{j_{l^*} - j_{(l^*-1)}} \right) \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{h} b_i + \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i \right) = \sum_{i=1}^{h}(b_i + \hat{b}_i),
\end{aligned}$$

donde, en la desigualdad hemos aplicado el lema 2.40. En efecto, si hacemos el cambio de variable $\tilde{i} = i - j_{(l^*-1)}$, obtenemos la igualdad de expresiones siguiente

$$(h - j_{l^*-1}) \left(\frac{\sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{j_{l^*}} \hat{b}_i}{j_{l^*} - j_{(l^*-1)}} \right) = (h - j_{(l^*-1)}) \left(\frac{\sum_{\tilde{i}=1}^{j_{l^*} - j_{(l^*-1)}} \hat{b}_{(j_{(l^*-1)}+\tilde{i})}}{j_{l^*} - j_{(l^*-1)}} \right),$$

la cual, teniendo presente que $j_{l^*} - j_{(l^*-1)} \geq h - j_{(l^*-1)}$, pues $h < j_{l^*}$, evidencia la aplicabilidad del lema 2.40. De otra parte, las demás igualdades están basadas en separaciones de las sumatorias o en la definición de promedio de un vector basado en una partición intervalo.

(3) **Caso 3:** Si $h = j_l$, para algún $l \in [t]$, pero $h \neq k_i$, para todo $i \in [s]$, entonces, asumiendo

que $h \in \pi_{i^*}$, se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{h}(b_i{}^{\pi}+\hat{b}_i^{\sigma}) &= \sum_{i=1}^{h} b_i{}^{\pi} + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i^{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i{}^{\pi} + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i{}^{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i{}^{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h}\left(\frac{\sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{k_{i^*}} b_i}{k_{i^*}-k_{(i^*-1)}}\right)\right] + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + (h-k_{(i^*-1)})\left(\frac{\sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{k_{i^*}} b_i}{k_{i^*}-i_{(l^*-1)}}\right)\right] + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i\right) + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i = \sum_{i=1}^{h}(b_i+\hat{b}_i),
\end{aligned}$$

donde, al igual que en el caso anterior, la argumentación que las justifica la apoyamos en el lema 2.40, en la separación de sumatorias y en la definición de promedio de un vector basado en una partición intervalo.

(4) **Caso 4:** Si $h \neq k_i$ y $h \neq j_l$, para cualesquiera $i \in [s]$ y $l \in [t]$, entonces, suponiendo $h \in \pi_{i^*}$ y $h \in \sigma_{l^*}$, se satisfacen las relaciones que presentamos enseguida

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{h}(b_i{}^{\pi}+\hat{b}_i^{\sigma}) = \sum_{i=1}^{h} b_i{}^{\pi} + \sum_{i=1}^{h}\hat{b}_i^{\sigma} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i{}^{\pi} + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i{}^{\pi}\right) + \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i^{\sigma} + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i^{\sigma}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i^{\sigma}\right) + \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i{}^{\pi}\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h}\left(\frac{\sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{j_{l^*}} \hat{b}_i}{j_{l^*}-j_{(l^*-1)}}\right)\right] + \left[\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h}\left(\frac{\sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{k_{i^*}} b_i}{k_{i^*}-k_{(i^*-1)}}\right)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + (h-j_{(l^*-1)})\left(\frac{\sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{j_{l^*}} \hat{b}_i}{j_{l^*}-j_{(l^*-1)}}\right)\right] + \left[\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + (h-k_{(i^*-1)})\left(\frac{\sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{k_{i^*}} b_i}{k_{i^*}-i_{(l^*-1)}}\right)\right] \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{j_{(l^*-1)}} \hat{b}_i + \sum_{i=j_{(l^*-1)}+1}^{h} \hat{b}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k_{(i^*-1)}} b_i + \sum_{i=k_{(i^*-1)}+1}^{h} b_i\right) = \sum_{i=1}^{h}(b_i+\hat{b}_i),
\end{aligned}$$

donde, en la desigualdad hemos aplicado nuevamente el lema 2.40 y, en las igualdades, realizamos separaciones de sumatorias o aplicamos la definición de vector promedio basado en una partición intervalo.

Lo anterior nos muestra que $\sum_{i=1}^{h}(b_i^{\pi}+\hat{b}_i^{\sigma}) \leq \sum_{i=1}^{h}(b_i+\hat{b}_i)$, para todo $h \in [n]$, de donde concluimos que $b^{\pi}+\hat{b}^{\sigma} \preceq b+\hat{b}$, para cualesquiera $\pi,\sigma \in \Pi$. Por lo tanto, tenemos que $\mathscr{N}(fg) \subseteq$

$\mathbb{M}(b)+\mathbb{M}(\hat{b})$, lo cual culmina la prueba. □

2.2.1.5. COMENTARIOS FINALES

Nuestro antecedente y motivación para el estudio de $\mathbb{M}(b)$ fueron los estudios realizados sobre este politopo en [Dah01], trabajo en el cual, en particular, se investigó el 1-esqueleto de $\mathbb{M}(b)$ mediante el retículo de particiones intervalo de $[n]$. En [Dah01] también se exploraron algunos problemas de optimización que involucran $\mathbb{M}(b)$ y, además, ciertas clases de matrices fueron investigadas allí. Por estas razones, el retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$ no fue estudiado suficientemente en [Dah01] y, en consecuencia, nosotros asumimos la labor de describir combinatoriamente $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$, para lo cual adoptamos la terminología usada en la mencionada publicación pero trabajando con la misma metodología que hemos usado para los estudios realizados sobre $\mathscr{L}(M(v))$ y $\mathscr{L}(M^w(v))$ en la primera parte de este capítulo. En una primera aproximación, buscamos encontrar una correspondencia biyectiva entre las intersecciones no vacías de caras maximales de $\mathbb{M}(b)$ y retículos similares a $\Pi_n \cup \{\hat{0}\}$ y $Cad([n])$ pero, posteriormente, nos dimos cuenta de que la codificación de estas intersecciones requería un objeto distinto y, en cierto modo, más sencillo. Por lo tanto, después de algunas semanas de reflexión construimos el retículo que hemos denominado $Bip([n])$, el cual no encontramos en la literatura consultada; no obstante, se nos presentaba como el objeto ideal para la descripción combinatoria del retículo de caras de $\mathbb{M}(b)$. En ese sentido, los resultados que presentamos en la presente sección son aportes originales que contribuyen al entendimiento de $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ desde una perspectiva combinatoria. De otra parte, teniendo presente los estudios precedentes sobre la propiedad de aditividad de $M(v)$ y $M^w(v)$, nos resultó natural cuestionarnos sobre la aditividad de $\mathbb{M}(b)$ y abordar tal cuestión usando la misma herramienta, a saber, los politopos de Newton. Este fue el origen del último resultado que le mostramos al lector o lectora en la presente sección.

2.2.2. IDEAL PRINCIPAL DE MAYORIZACIÓN DÉBIL

El ideal principal de mayorización asociado con b, denotado por $\mathbb{M}(b)$, que fue estudiado en la sección anterior satisface la igualdad $\mathbb{M}(b) = M(b) \cap \mathbb{D}^n$. Una pregunta natural que surge de esta observación es ¿cómo es el politopo resultante de la intersección de $M^w(b)$ con $\mathbb{D}^n$? Pues bien, este politopo lo llamaremos ideal principal de mayorización débil asociado con b, lo denotaremos $\mathbb{M}^w(b)$ y, en la presente sección, nos proponemos investigar algunos elementos que lo describen.

DEFINICIÓN 2.10. Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces el conjunto $\mathbb{M}^w(b) := \{x \in \mathbb{D}^n_+ \mid x \preceq^w b\}$, lo denominamos **ideal principal de mayorización débil asociado con** b.

EJEMPLO 2.14. El ideal principal de mayorización débil asociado con el vector $(2,1)$, el cual es denotado por $\mathbb{M}^w((2,1))$, consiste de los elementos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2_+$ que satisfacen la condición $x \preceq^w (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 2$ y $x_1 + x_2 \leq 3$. Estas desigualdades nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}^w((2,1))$, la cual nos permite visualizar este politopo en el plano cartesiano. En la siguiente figura mostramos una representación de $\mathbb{M}^w((2,1))$ en $\mathbb{R}^2$, que nos permitirá realizar algunas observaciones sobre este politopo.

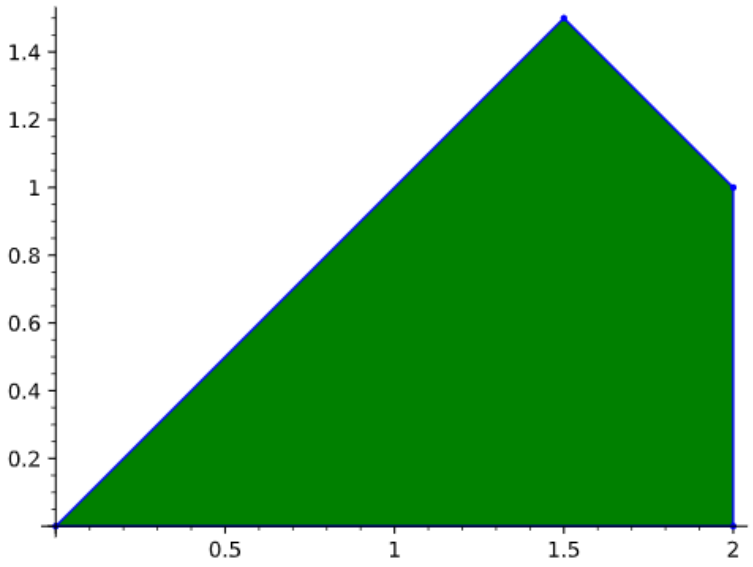


Figura 2.18: $\mathbb{M}^w((2,1))$, ideal principal de mayorización débil asociado con $(2,1)$.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w((2,1))$ es $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w((2,1))) = \{(0,0),(2,0),(2,1),(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\}$; la dimensión de $\mathbb{M}^w((2,1))$ es 2, es decir, la dimensión de $\mathbb{R}^2$; cada uno de los vértices está contenido en exactamente 2 aristas, razón por la cual, podemos afirmar que $\mathbb{M}^w((2,1))$ es un politopo simple. Existe un correspondencia biyectiva entre las desigualdades presentes en la $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}^w((2,1))$ y las caras maximales de este politopo, que en este caso corresponden a sus aristas, la cual presentamos en la siguiente tabla.

Cara maximal	**Desigualdad**
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{M}^w((2,1)) \mid x_1 = 2\}$ $= conv(\{(2,0),(2,1)\})$	$x_1 \leq 2$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{M}^w((2,1)) \mid x_1 + x_2 = 3\}$ $= conv(\{(2,1),(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\})$	$x_1 + x_2 \leq 3$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}} := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{M}^w((2,1)) \mid x_1 = x_2\}$ $= conv(\{(0,0),(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\})$	$x_1 \geq x_2$
$\mathbb{G}^w_{\{2\}} := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{M}^w((2,1)) \mid x_2 = 0\}$ $= conv(\{(0,0),(2,0)\})$	$x_2 \geq 0$

Tabla 2.17: Caras maximales de $\mathbb{M}^w((2,1))$

Dado que $\mathbb{M}^w((2,1))$ es un politopo simple, para cada $k \in \{0,1,2\}$, existe una biyección entre las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $\mathbb{M}^w((2,1))$ y las caras de dimensión $2-k$ de este politopo. En la tabla 2.18, exhibimos una correspondencia biyectiva entre las caras de $\mathbb{M}^w((2,1))$ y las parejas ordenadas de subconjuntos de $[2]$ cuyas componentes son disyuntas.

EJEMPLO 2.15. El ideal principal de mayorización débil asociado con el vector $(3,2,1)$, el cual denotamos por $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, contiene a los elementos $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{D}^3_+$ que satisfacen la condición $x \preceq^w (3,2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_3$, $x_3 \geq 0$, $x_1 \leq 3$, $x_1 + x_2 \leq 5$ y $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Estas desigualdades conforman una $\mathbb{H}$-descripción de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$

$\mathbb{M}^w((2,1))$	
Caras de dimensión 2-0	
$\mathbb{M}^w((2,1))$	$(\emptyset,\emptyset)$
Caras de dimensión 2-1	
$\mathbb{F}^w_{\{1\}}$	$(\emptyset,\{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{2\})$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\},\emptyset)$
$\mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\},\emptyset)$
Caras de dimensión 2-2	
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{1,2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\},\{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\},\{2\})$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{1,2\},\emptyset)$

Tabla 2.18: Caras de $\mathbb{M}^w((2,1))$

y nos permiten visualizar este politopo en el espacio euclidiano tridimensional. En la figura 2.19 mostramos una representación de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ en $\mathbb{R}$, la cual nos será de utilidad para formular algunas observaciones sobre este politopo.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, el cual denotamos por $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w((3,2,1)))$, corresponde al conjunto $\{(0,0,0),(3,0,0),(3,2,0),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0),(3,2,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(2,2,2)\}$; la dimensión de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ es 3, es decir, la dimensión de $\mathbb{R}^3$; cada uno de los vértices de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ está contenido en exactamente 3 aristas, hecho que nos muestra que $\mathbb{M}((3,2,1))$ es un politopo simple; existe una correspondencia biyectiva entre las desigualdades presentes en la $\mathcal{H}$-descripción de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ y las caras maximales de este politopo, la cual mostramos en la tabla 2.19.

Cara maximal	**Desigualdad**
$\mathbb{F}^w_{\{1\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_1 = 3\}$ $= conv(\{(3,0,0),(3,2,0),(3,2,1),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2})\})$	$x_1 \leq 3$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 = 5\}$ $= conv(\{(3,2,0),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0),(3,2,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1)\})$	$x_1 + x_2 \leq 5$
$\mathbb{F}^w_{\{3\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 6\}$ $= conv(\{(3,2,1),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(2,2,2)\})$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_1 = x_2\}$ $= conv(\{(0,0,0),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1),(2,2,2)\})$	$x_1 \geq x_2$
$\mathbb{G}^w_{\{2\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_2 = x_3\}$ $= conv(\{(0,0,0),(3,0,0),(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(2,2,2)\})$	$x_2 \geq x_3$
$\mathbb{G}^w_{\{3\}}$ $:= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{M}^w((3,2,1)) \mid x_3 = 0\}$ $= conv(\{(0,0,0),(3,0,0),(3,2,0),(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0)\})$	$x_3 \geq 0$

Tabla 2.19: Caras maximales de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$

Debido a que $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ es un politopo simple, para cada $k \in \{0,1,2,3\}$, existe una biyección entre las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ y las caras de

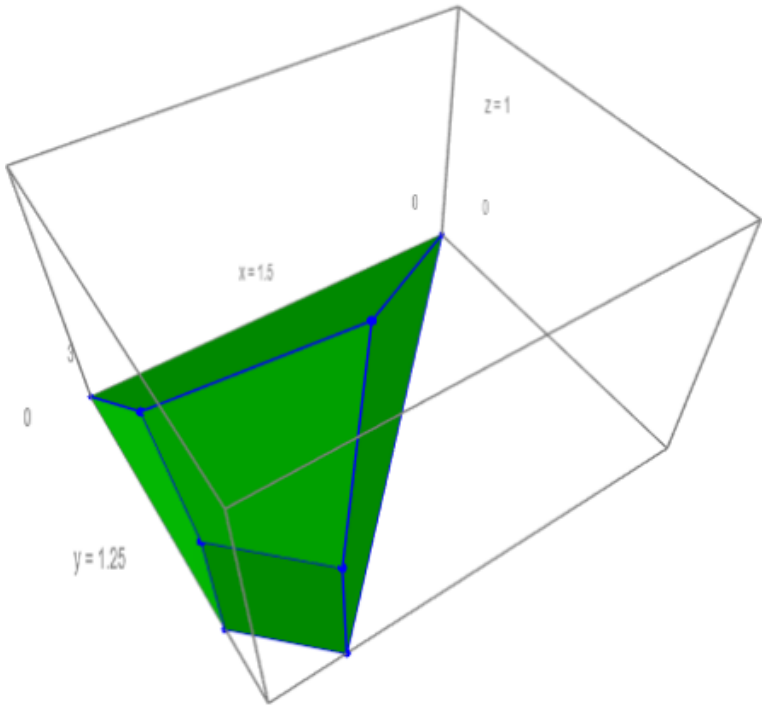


Figura 2.19: $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, ideal principal de mayorización débil asociado con $(3,2,1)$.

dimensión $3-k$ de este politopo. En la tablas 2.20, 2.21 y 2.22 exhibimos una correspondencia biyectiva entre las caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ y el conjunto de parejas ordenadas de subconjuntos de $[3]$ cuyas componentes son disyuntas.

$\mathbb{M}^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-0	
$\mathbb{M}^w((3,2,1))$	$(\emptyset,\emptyset)$
Caras de dimensión 3-1	
$\mathbb{F}^w_{\{1\}}$	$(\emptyset,\{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}}$	$(\emptyset,\{2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{3\}}$	$(\emptyset,\{3\})$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\},\emptyset)$
$\mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\},\emptyset)$
$\mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{3\},\emptyset)$

Tabla 2.20: Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 1)

2.2.2.1. VÉRTICES DE $\mathbb{M}^w(b)$

La definición de $\mathbb{M}^w(b)$ nos permite afirmar que $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathbb{M}^w(b)$ si, y sólo si, $x\in\mathbb{D}^n_+$ y $x\preceq^w b$, es decir, si se satisfacen las desigualdades $x_j\geq x_{j+1}$, para cada $j\in[n-1]$, $x_n\geq 0$ y $\sum_{i=1}^k x_i\leq\sum_{i=1}^k b_i$, para cada $k\in[n]$. Por lo tanto, estas desigualdades son

$\mathbb{M}^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-2	
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{2\}}$	$(\emptyset, \{1,2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{3\}}$	$(\emptyset, \{1,3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{3\}}$	$(\emptyset, \{2,3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\}, \{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{3\}, \{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\}, \{2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{3\}, \{2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{3\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\}, \{3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{3\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\}, \{3\})$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{1,2\}, \emptyset)$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{1,3\}, \emptyset)$
$\mathbb{G}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{2,3\}, \emptyset)$

Tabla 2.21: Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 2)

$\mathbb{M}^w((3,2,1))$	
Caras de dimensión 3-3	
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{3\}}$	$(\emptyset, \{1,2,3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{3\}, \{1,2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{3\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{2\}, \{1,3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{F}^w_{\{3\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}}$	$(\{1\}, \{2,3\})$
$\mathbb{F}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{2,3\}, \{1\})$
$\mathbb{F}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{1,3\}, \{2\})$
$\mathbb{F}^w_{\{3\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}}$	$(\{1,2\}, \{3\})$
$\mathbb{G}^w_{\{1\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{2\}} \cap \mathbb{G}^w_{\{3\}}$	$(\{1,2,3\}, \emptyset)$

Tabla 2.22: Caras de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$. (Parte 3)

válidas para $\mathbb{M}^w(b)$ y, en consecuencia, las caras de este politopo obtenidas como la intersección de $\mathbb{M}^w(b)$ con los hiperplanos de soporte inducidos por estas desigualdades corresponden a $\mathbb{F}^w_j := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n-1]$, $\mathbb{F}^w_n := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid x_n = 0\}$ y $\mathbb{G}^w_k := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$. En este apartado iniciamos estudiando las condiciones bajo las cuales la intersección finita de conjuntos de los tipos $\mathbb{F}^w_j$, $j \in [n]$, $\mathbb{G}^w_k$, $k \in [n]$, resulta no vacía y, posteriormente, caracterizaremos los vértices de $\mathbb{M}^w(b)$.

PROPOSICIÓN 2.42. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, $\mathbb{M}^w(b)$ es el ideal principal de mayorización débil asociado con b y $j, k \in [n]$, entonces $\mathbb{F}^w_j \cap \mathbb{G}^w_k \neq \emptyset$ si, y sólo si, $j \neq k$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Consideremos, además, los conjuntos $\mathbb{F}^w_j$, $\mathbb{G}^w_k$, donde $j, k \in [n]$.

($\Rightarrow$) Supongamos $j = k$ y $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_k^w \cap \mathbb{G}_k^w$. Si $k \in [n-1]$ entonces se satisfacen las igualdades $x_k = x_{k+1}$ y $\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i$ y, en consecuencia, tenemos las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i + x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} b_i = \sum_{i=1}^{k} b_i + b_{k+1} < \sum_{i=1}^{k} b_i + b_k,$$

donde en la desigualdad estricta hemos usado que $b_k > b_{k+1}$. Por lo tanto, al restar $\sum_{i=1}^k b_i$ en la primera y última expresión, obtenemos que $x_k = x_{k+1} < b_k$ y de aquí podemos expresar las relaciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} b_i + x_k < \sum_{i=1}^{k-1} b_i + b_k = \sum_{i=1}^{k} b_i,$$

las cuales contradicen que $\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i$. De modo que, si $j = k \in [n-1]$ entonces $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w = \emptyset$. Ahora bien, si $j = k = n$ entonces $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n b_i$ y $x_n = 0$, de donde, $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ y, por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i + b_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i + b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_i + b_n,$$

de donde, obtenemos que $b_n \leq 0$, hecho que contradice que $b_n > 0$. En conclusión, siempre que $j = k$, donde $j, k \in [n]$ entonces $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Si $j \neq k$, donde $j \neq n$, entonces $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definido mediante las igualdades $x_i = b_i$, si $i \in [n] \setminus \{j, j+1\}$, y $x_j = x_{j+1} = \frac{b_j + b_{j+1}}{2}$ pertenece a $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w$. En efecto, si $j < k$ entonces $j + 1 \leq k$ y tenemos que

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} b_i & \text{si} \quad t < j \text{ o } t > k, \\ \sum_{i=1}^{j-1} b_i + \frac{b_j + b_{j+1}}{2} & \text{si} \quad t = j, \\ \sum_{i=1}^{j+1} b_i & \text{si} \quad t = j+1, \\ \sum_{i=1}^{k} b_i & \text{si} \quad t = k. \end{cases}$$

Ya que se satisfacen las desigualdades $b_{j-1} > b_j = \frac{2b_j}{2} > \frac{b_j + b_{j+1}}{2} > \frac{2b_{j+1}}{2} = b_{j+1}$, podemos concluir que $x \in \mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w$. Si $k < j$ entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} b_i & \text{si} \quad t < j \text{ o } t > j+1, \\ \sum_{i=1}^{j-1} b_i + \frac{b_j + b_{j+1}}{2} & \text{si} \quad t = j, \\ \sum_{i=1}^{j+1} b_i & \text{si} \quad t = j+1, \end{cases}$$

de donde, teniendo presente las relaciones $b_{j-1} > b_j = \frac{2b_j}{2} > \frac{b_j + b_{j+1}}{2} > \frac{2b_{j+1}}{2} = b_{j+1}$, nuevamente podemos afirmar que $x \in \mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w$. En consecuencia, si $j \neq k$, siendo $k \neq n$, entonces $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w \neq \emptyset$. Finalmente, si $j = n$ entonces k necesariamente es menor que n y, en consecuencia, el elemento $x = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$ pertenece a $\mathbb{F}_n^w \cap \mathbb{G}_k^w$.

□

En el siguiente teorema caracterizamos el conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w(b)$, el cual es el objetivo principal de este apartado. Sin embargo, antes de enunciar este resultado, definimos algunos elementos que nos faciliten la descripción precisa de la forma que tienen los elementos de $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w(b))$.

DEFINICIÓN 2.11. Sea $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $b_1>\cdots>b_n>0$.

(a) Para cada $k\in[n]$, el **conjunto de particiones intervalo de** $[k]$, lo denotaremos por Π^k. En particular, $\Pi^n=\Pi$.

(b) Si $k\in[n]$ y $\pi^k\in\Pi^k$, entonces b^{π^k} denotara el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas primeras k componentes las ocupa el promedio de $b^k:=(b_1,\ldots,b_k)$ asociado con π^k, mientras que las demás componentes son nulas. En particular, si $k=n$ entonces $\pi^n=\pi$ y $b^{\pi^n}=b^\pi$. El vector b^{π^k} lo llamaremos k-**ésimo promedio de** b **asociado con** π^k.

TEOREMA 2.43. *Si $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ es el ideal principal de mayorización débil asociado con b, entonces $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w(b))=\{b^{\pi^k}\mid\pi^k\in\Pi^k,k\in[n]\}\cup\{\vec{0}\}$.*

Demostración. Sean $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Veamos que $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w(b))=\{b^{\pi^k}\mid\pi^k\in\Pi^k,k\in[n]\}\cup\{\vec{0}\}$.

(⊆) Si $x=(x_1,\ldots,x_n)$ es un vértice de $\mathbb{M}^w(b)$ entonces x es el único punto de intersección de $\mathbb{M}^w(b)$ con un número finito de hiperplanos de soporte y, en consecuencia, $x\in\left(\cap_{j\in J}\mathbb{F}_j^w\right)\cap\left(\cap_{k\in K}\mathbb{G}_k^w\right)$, donde $J\cap K=\emptyset$. Analicemos los siguientes casos:

(a) **Caso 1:** si $J=\emptyset$ entonces $K=[n]$. En efecto, si suponemos que el mínimo elemento de K es un entero $k>1$ entonces cualquier vector $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones $y_i=x_i$, $i\in\{k+1,\ldots,n\}$, y $\sum_{i=1}^k y_i=\sum_{i=1}^k b_i$ pertenece a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, como $k>1$, hay varios de tales vectores. Por consiguiente, suponer que $k>1$ contradice la unicidad de x. Por lo tanto, el elemento mínimo del conjunto K es 1. De otra parte, si $k\in K$ pero el siguiente elemento $\tilde{k}\in K$ es mayor que $k+1$ entonces $y=(y_1,\ldots,y_n)$ que cumple con las condiciones $y_i=x_i$, $i\in[n]\setminus\{k+1,\ldots,\tilde{k}\}$, y $y_{k+1}+\cdots+y_{\tilde{k}}=b_{k+1}+\cdots+b_{\tilde{k}}$ pertenece a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, ya que $\tilde{k}>k+1$, hay varios de tales vectores, en consecuencia, nuevamente se contradice la unicidad de x. En síntesis, el mínimo elemento de K es 1 y no existen elementos en K no consecutivos; por lo tanto, $K=[n]$ y, en tal circunstancia, concluimos que $x=b$.

(b) **Caso 2:** si $K=\emptyset$ entonces $J=[n]$. Ciertamente, si suponemos que $n\notin K$ y consideramos la partición intervalo $\pi=(\{1,\ldots,n\})$ entonces tanto b^π como el vector cero pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x, hecho que contradice la unicidad de x. Por lo tanto, $n\in K$ y, por consiguiente, tenemos que $x_n=0$. Ahora bien, si suponemos que $n-1\notin K$ entonces, considerando $\pi^{n-1}=(\{1,\ldots,n-1\})\in\Pi^{n-1}$, tenemos que $\vec{0}$ y $b^{\pi^{n-1}}$ pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x, contradiciendo la unicidad de x. Luego, $n-1\in K$ y, recopilando, tenemos que $x_n=x_{n-1}=0$. Procediendo, mediante un argumento similar al anterior, concluimos que $J=[n]$ y, en consecuencia, $x=\vec{0}$.

(c) **Caso 3:** si $J, K \neq \emptyset$ entonces $J \cup K = [n]$. Efectivamente, definamos una partición de J, $\mathscr{P} = \{J_1, \ldots, J_s\}$, de tal manera que los elementos de cada bloque sean enteros consecutivos y la diferencia entre el mínimo elemento de J_{i+1} y el máximo elemento de J_i sea al menos 2, para $i \in [s-1]$, es decir, organizamos los elementos de J de manera creciente y agrupando cadenas máximas de enteros consecutivos. Sea k el mínimo elemento de $[n] \setminus J$ y supongamos que k no pertenece a K, además, consideremos $\tilde{k}$, el mínimo elemento perteneciente a K; por lo tanto, $k < \tilde{k}$ y se satisface la igualdad $\sum_{i=1}^{\tilde{k}} x_i = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i$. En tales circunstancias, los vectores

$$\left(\underbrace{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i, \ldots, \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i}_{k}, \underbrace{\frac{1}{\tilde{k}-k}\sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} b_i, \ldots, \frac{1}{\tilde{k}-k}\sum_{i=k+1}^{\tilde{k}} b_i}_{\tilde{k}-k}, x_{\tilde{k}+1}, \ldots, x_n \right)$$

y

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\tilde{k}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i, \ldots, \frac{1}{\tilde{k}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}} b_i}_{\tilde{k}}, x_{\tilde{k}+1}, \ldots, x_n \right)$$

pertenecen a los mismos hiperplanos de soporte a los que pertenece x y, en consecuencia, se contradice la unicidad de x. De manera que $k = \tilde{k}$, es decir, el mínimo elemento de $[n] \setminus J$ coincide con el mínimo elemento de K, lo cual determina completamente las primeras k componentes de x. Con un argumento análogo al anterior, obtenemos que el segundo menor elemento de $[n] \setminus J$ coincide con el segundo menor elemento de K y, de manera sucesiva en un número finito de pasos, llegamos a mostrar que los elementos de $[n] \setminus J$ son elementos de K, o equivalentemente, $J \cup K = [n]$. Finalmente, si $[n] = K_1 \cup J_1 \cup \cdots \cup K_s \cup J_s \cup K_{s+1}$, donde $\cup_{i=1}^{s+1} K_i = K$ y K_1, K_{s+1} pueden ser eventualmente vacíos, entonces un elemento $x \in \left(\cap_{j\in J} \mathbb{F}_j^w\right) \cap \left(\cap_{k\in K} \mathbb{G}_k^w\right)$ queda completamente determinado y pertenece al conjunto $\{b^{\pi^k} \mid \pi^k \in \Pi^k, k \in [n]\}$.

($\supseteq$) Sea $x \in \{b^{\pi^k} \mid \pi^k \in \Pi^k, k \in [n]\} \cup \{\vec{0}\}$. Si $x = \vec{0}$ entonces x es un vértice de $\mathbb{M}^w(b)$ pues es el único elemento perteneciente al conjunto $\cap_{j=1}^{n} \mathbb{F}_j^w$. Si $x = b^{\pi_k}$, para algún $k \in [n]$, y siendo $\pi^k = (\pi_1^k, \ldots, \pi_s^k) \in \Pi^k$, donde $k_1, \ldots, k_s$ son los elementos más grande de los bloques $\pi_1^k, \ldots, \pi_s^k$, respectivamente, entonces x es el único elemento del conjunto $\left(\cap_{j\in[n]\setminus\{k_1,\ldots,k_s\}} \mathbb{F}_j^w\right) \cap \left(\cap_{i=1}^{s} \mathbb{G}_{k_i}^w\right)$, lo cual nos permite concluir que x es un vértice de $\mathbb{M}^w(b)$.

□

2.2.2.2. $\mathbb{M}^w(b)$ ES UN POLITOPO SIMPLE

El propósito principal de este apartado es demostrar que $\mathbb{M}^w(b)$ es un politopo simple. Para ello, comenzamos estableciendo que $\mathbb{M}^w(b)$ es un n-politopo; posteriormente, mostraremos que los conjuntos de los tipos $\mathbb{F}_j^w$ y $\mathbb{F}_k^w$, donde $j, k \in [n]$, son las caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$ para, finalmente, abordar el resultado principal.

PROPOSICIÓN 2.44. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces $\mathbb{M}^w(b)$ es un politopo de dimensión n.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. En vista de que $\mathbb{M}^w(b) \subseteq M^w(b)$ y $\dim(M^w(b)) = n$, podemos afirmar que $\mathbb{M}^w(b)$ es un politopo satisfaciendo la desigualdad $\dim(\mathbb{M}^w(b)) \leq n$. De otra parte, consideremos los vectores

$$b^0 := (0, \ldots, 0), b^1 := (b_1, 0, \ldots, 0), b^2 := (b_1, b_2, 0, \ldots, 0), \ldots, b^{n-1} := (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0), b^n := b,$$

y sean $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^n \lambda_i b^i = \vec{0}$ y $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$, lo cual nos conduce a las ecuaciones

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) b_1 = 0, \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i\right) b_2 = 0, \ldots, (\lambda_{n-1} + \lambda_n) b_{n-1} = 0, \lambda_n b_n = 0,$$

cuya única solución es, claramente, $\lambda_i = 0$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $b^0, b^1, \ldots, b^n$ son $n+1$ vectores de $\mathbb{M}^w(b)$ afínmente independientes y, en consecuencia, tenemos que $\dim(\mathbb{M}^w(b)) \geq n$, lo que concluye la prueba. □

PROPOSICIÓN 2.45. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ es el ideal principal de mayorización débil asociado con b, entonces las caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$ son los conjuntos $\mathbb{F}_j^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n]$, y $\mathbb{G}_k^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Consideremos, además, los conjuntos $\mathbb{F}_j^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n]$, y $\mathbb{G}_k^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$, los cuales construimos como la intersección de $\mathbb{M}^w(b)$ con los hiperplanos de soporte inducidos por las desigualdades presentes en la $\mathscr{H}$-descripción de este politopo. Asimismo, si $\mathbb{F}^w$ es una cara propia no vacía de $\mathbb{M}^w(b)$, entonces $\mathbb{F}^w$ es la intersección de un número finito de conjuntos de los tipos $\mathbb{F}_j^w$ y $\mathbb{F}_k^w$, $j, k \in [n]$. Por consiguiente, o bien $\mathbb{F}^w$ coincide con uno de estos conjuntos, o bien $\mathbb{F}^w$ está contenido propiamente en uno de estos conjuntos. De lo anterior, concluimos que las caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$ son los conjuntos $\mathbb{F}_j^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid x_j = x_{j+1}\}$, $j \in [n]$, y $\mathbb{G}_k^w := \{x \in \mathbb{M}^w(b) \mid \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k b_i\}$, $k \in [n]$. □

TEOREMA 2.46. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces $\mathbb{M}^w(b)$, el ideal principal de mayorización débil asociado con b, es un politopo simple.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$, el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Consideremos, además, un elemento $x \in \mathscr{V}(\mathbb{M}^w(b))$ y veamos que x está contenido en exactamente n caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$. Analicemos esto por casos:

(a) **Caso 1:** Si $x = \vec{0}$ entonces $x \in \mathbb{F}_j^w$ para cada $j \in [n]$ y, dado que $\mathbb{F}_j^w \cap \mathbb{G}_k^w = \emptyset$ si $j = k$, concluimos que x no puede pertenecer a ninguna otra cara maximal de $\mathbb{M}^w(b)$.

(b) **Caso 2:** Si $x \neq \vec{0}$ entonces existen $k \in [n]$ y $\pi^k \in \Pi^k$ tales que $x = b^{\pi^k}$, de manera que, si $\pi^k = (\pi^k_1, \ldots, \pi^k_s)$, donde $k_1, \ldots, k_s$ siendo los elementos más grande de los bloques $\pi^k_1, \ldots, \pi^k_s$, respectivamente, entonces $x \in \left(\cap_{j\in[n]\setminus\{k_1,\ldots,k_s\}} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{i=1}^s \mathbb{G}^w_{k_i}\right)$ y nuevamente, en vista de que $\mathbb{F}^w_j \cap \mathbb{G}^w_k = \emptyset$ si $j = k$, concluimos que x no puede pertenecer a ninguna otra cara maximal de $\mathbb{M}^w(b)$.

De lo anterior, vemos que cualquier vértice de $\mathbb{M}^w(b)$ pertenece a exactamente n de sus caras maximales y, debido a que $\dim(\mathbb{M}^w(b)) = n$, podemos afirmar que $\mathbb{M}^w(b)$ es un politopo simple. □

2.2.2.3. ESTRUCTURA FACIAL DE $\mathbb{M}^w(b)$

La descripción combinatoria de $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b))$, el retículo de caras de $\mathbb{M}^w(b)$, está íntimamente relacionada con la descripción que hicimos de $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ en la sección anterior. De hecho, ambas se apoyan en el retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n]$, que denotamos $Bip([n])$, y que introdujimos en aquella sección. Es más, al final del presente apartado mostraremos que $\mathbb{M}(b)$ y $\mathbb{M}^w(b)$ son combinatoriamente equivalentes a C_{n-1} y C_n, respectivamente, donde C_d es el hipercubo de dimensión d. Este es el resultado principal de este apartado, el cual es una consecuencia inmediata de describir de manera combinatoria las estructuras faciales de C_n y $\mathbb{M}^w(b)$.

TEOREMA 2.47. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ es el ideal principal de mayorización débil asociado con b, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \cong Bip([n])$, es decir, el retículo de caras de $\mathbb{M}^w(b)$ es isomorfo al retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n]$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Consideremos, además, el retículo de caras de $\mathbb{M}^w(b)$, denotado $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$, y el retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n]$. Si $\mathbb{F}^w$ es una cara propia no vacía de $\mathbb{M}^w(b)$ entonces existen $J, K \subseteq [n]$ tales que $J \cap K = \emptyset$ y $\mathbb{F}^w = \left(\cap_{j\in J} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{k\in K} \mathbb{G}^w_k\right)$, lo cual nos sugiere definir $\Psi^w : \mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \to Bip([n])$ mediante $\Psi^w(\mathbb{F}^w) := (K, J)$, junto con las igualdades $\Psi^w(\emptyset) = \hat{0}$ y $\Psi^w(\mathbb{M}^w(b)) = (\emptyset, \emptyset)$. Veamos que Ψ^w es un isomorfismo de retículos:

(a) Ψ^w **está bien definida:** si $\mathbb{F}^w = \left(\cap_{j\in J} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{k\in K} \mathbb{G}^w_k\right)$, donde $J, K \subseteq [n]$ son tales que $J \cap K = \emptyset$, entonces $\Psi^w(\mathbb{F}^w) = (K, J) \in Bip([n])$. Además, claramente $\Psi^w(\emptyset)$ y $\Psi^w(\mathbb{M}^w(b))$ son elementos de $Bip([n])$.

(b) Ψ^w **es inyectiva:** sean $\mathbb{F}^w = \left(\cap_{j\in J} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{k\in K} \mathbb{G}^w_k\right)$, donde $J, K \subseteq [n]$ son tales que $J \cap K = \emptyset$, y $\mathbb{G}^w = \left(\cap_{j\in \tilde{J}} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{k\in \tilde{K}} \mathbb{G}^w_k\right)$, donde $\tilde{J}, \tilde{K} \subseteq [n]$ son tales que $\tilde{J} \cap \tilde{K} = \emptyset$, caras propias no vacías de $\mathbb{M}^w(b)$ que satisfacen $\Psi^w(\mathbb{F}^w) = (K, J) = (\tilde{K}, \tilde{J}) = \Psi^w(\mathbb{G}^w)$. Por lo tanto, $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K}$, de donde, concluimos que $\mathbb{F}^w = \mathbb{G}^w$.

(c) Ψ^w **es sobreyectiva:** si $(K, J) \in Bip([n])$ entonces $(K, J) = \Psi^w(\mathbb{F}^w)$, donde $\mathbb{F}^w = \left(\cap_{j\in J} \mathbb{F}^w_j\right) \cap \left(\cap_{k\in K} \mathbb{G}^w_k\right)$, siendo $J, K \subseteq [n]$ tales que $J \cap K = \emptyset$. Además, $\hat{0} = \Psi^w(\emptyset)$ y $(\emptyset, \emptyset) = \Psi^w(\mathbb{M}^w(b))$.

(d) Ψ^w **preserva coberturas:** si $\mathbb{F}^w$ y $\mathbb{G}^w$ son caras propias no vacías de $\mathbb{M}^w(b)$ tales que $\mathbb{G}^w$ cubre a $\mathbb{F}^w$, entonces $\mathbb{F}^w$ se obtiene a partir de $\mathbb{G}^w$ mediante la intersección de esta última cara con un hiperplano de soporte de $\mathbb{M}^w(b)$ no considerado en la intersección que define a $\mathbb{G}^w$, bien del tipo $\mathbb{F}^w_j$, $j \in [n]$, o bien del tipo $\mathbb{G}^w_k$, $k \in [n]$. En este caso, claramente $\Psi^w(\mathbb{F}^w) \lessdot \Psi^w(\mathbb{G}^w)$. De otra parte, $\mathbb{M}^w(b)$ cubre a las caras maximales, la cual es, claramente, una relación que se preserva a través de Ψ^w. Finalmente, los vértices de $\mathbb{M}^w(b)$ cubren a la cara vacía y, en vista de que $\mathbb{M}^w(b)$ es simple, los vértices se consiguen como la intersección de n caras maximales, razón por la cual, la imagen de los vértices bajo la aplicación Ψ^w son particiones ordenadas de $[n]$ de tamaño 2, las cuales cubren a $\hat{0} = \Psi^w(\emptyset)$ en el retículo $Bip([n])$.

(e) $(\Psi^w)^{-1}$ **preserva las coberturas:** si $(K,J),(\tilde{K},\tilde{J}) \in Bip([n])$ son tales que $(K,J) \lessdot (\tilde{K},\tilde{J})$ en $Bip([n])$, entonces se presentan un par de situaciones que analizamos, de manera separada, a continuación:

(i) **Caso 1:** si $K = \tilde{K}$ y $J = \tilde{J} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n] \setminus (K \cup J)$, entonces $(\Psi^w)^{-1}((K,J)) = \mathbb{F}_i \cap (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$ y $(\Psi^w)^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$. Por lo tanto, tenemos que $(\Psi^w)^{-1}((K,J)) \lessdot (\Psi^w)^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b))$.

(ii) **Caso 2:** si $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n] \setminus (K \cup J)$, entonces $(\Psi^w)^{-1}((K,J)) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k) \cap \mathbb{G}_i$ y $(\Psi^w)^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathbb{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathbb{G}_k)$. Por consiguiente, tenemos que $(\Psi^w)^{-1}((K,J)) \lessdot (\Psi^w)^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b))$.

De otra parte, si $(A,B) \in Bip([n])$ es tal que $\hat{0} \lessdot (A,B)$ en $Bip([n])$, entonces $A \cup B = [n]$. En consecuencia, tenemos que $(\Psi^w)^{-1}(\hat{0}) = \emptyset$ y $(\Psi^w)^{-1}((A,B))$ es un vértice de $\mathbb{M}^w(b)$, razón por la cual, $(\Psi^w)^{-1}(\hat{0}) \lessdot (\Psi^w)^{-1}((A,B))$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b))$.

De lo anterior, nos permitimos concluir que Ψ^w es, efectivamente, un isomorfismo de retículos y, por consiguiente, afirmamos que $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \cong Bip([n])$. □

El siguiente resultado nos da una expresión general para el número de caras de $\mathbb{M}^w(b)$ de cualquier dimensión. Su prueba está fuertemente basada en el anterior teorema; en particular, nos apoyamos en el isomorfismo Ψ^w.

TEOREMA 2.48. *Si $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ es el ideal principal de mayorización débil asociado con b, entonces el número de caras de $\mathbb{M}^w(b)$ con dimensión $n-k$ es $\binom{n}{k}2^k$.*

Demostración. Sean $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^w(b)$ el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Dado que $\mathbb{M}^w(b)$ es un n-politopo simple existe una biyección entre sus caras de dimensión $n-k$ y las intersecciones no vacías de k caras maximales distintas de $\mathbb{M}(b)$. Por lo tanto, la imagen mediante Ψ^w, el isomorfismo de retículos descrito en el teorema anterior, son aquellos elementos $(K,J) \in Bip([n])$ tales que $|K|+|J| = k$. Estos elementos los podemos obtener en dos fases consecutivas: en la primera, escogemos un subconjunto J de $[n]$ de tamaño j, $0 \le j \le k$, lo cual podemos hacer de $\binom{n}{j}$ maneras, mientras que, en la segunda fase, escogemos el subconjunto K de $[n] \setminus J$ de tamaño $k-j$, lo cual podemos hacer de $\binom{n-j}{k-j}$

formas diferentes. De manera que, por el principio fundamental del conteo, el número de tales elementos es $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ y, en vista de las igualdades siguientes:

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{k}{j}\binom{n}{k},$$

tenemos que $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{k}2^k$, donde hemos usado la identidad $2^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}$. □

En particular, el número de caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$ es obtenido haciendo $k = 1$ en la expresión del teorema anterior; por lo tanto, existen $2\binom{n}{1} = 2n$ caras maximales en el ideal principal de mayorización débil asociado con b. Este número es consistente con el resultado donde mostramos que los conjuntos $\mathbb{F}_j^w$ y $\mathbb{G}_k^w$, $j,k \in [n]$, son todas las caras maximales de $\mathbb{M}^w(b)$.

PROPOSICIÓN 2.49. *Si $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1, i \in [n]\}$ es el hipercubo de dimensión n entonces $\mathscr{L}(C_n) \cong Bip[n]$, es decir, el retículo de caras del n-hipercubo es isomorfo al retículo de biparticiones ordenadas sobre $[n]$.*

Demostración. Sea $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1, i \in [n]\}$ el hipercubo de dimensión n. Una $\mathscr{H}$-descripción de C_n viene dada por las desigualdades $x_j \leq 1$, $j \in [n]$, $x_k \geq -1$, $k \in [n]$, cada una de las cuales corresponde a una desigualdad válida para C_n. Es más, las desigualdades presentes en la $\mathscr{H}$-descripción de C_n determinan las caras maximales de C_n, que corresponden a los conjuntos $\mathscr{F}_j := \{x \in C_n \mid x_j = 1\}$, $j \in [n]$, $\mathscr{G}_k := \{x \in C_n \mid x_k = -1\}$, $k \in [n]$, los cuales verifican que $\mathscr{F}_j \cap \mathscr{F}_k \neq \emptyset$ si, y sólo si, $j \neq k$. De otra parte, tenemos que $\mathscr{V}(C_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1,1\}, i \in [n]\}$ y, en consecuencia, cada vértice de C_n está contenido en exactamente n caras maximales; por lo tanto, podemos afirmar que C_n es un politopo simple. En consecuencia, existe una biyección entre las caras de C_n con dimensión $n-k$ y las intersecciones no vacías de k de sus caras maximales, por consiguiente, si $\mathscr{F}$ es una cara propia no vacía de C_n entonces $F = \left(\cap_{j\in J}\mathscr{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathscr{G}_k)$, donde $J,K \subseteq [n]$ satisfacen $J \cap K = \emptyset$, hecho que nos sugiere definir $\Psi : \mathscr{L}(C_n) \to Bip([n])$ mediante $\Psi(\mathscr{F}) = (K,J)$, junto con las igualdades $\Psi(\emptyset) = \hat{0}$ y $\Psi(C_n) = (\emptyset,\emptyset)$. Veamos que Ψ es un isomorfismo de retículos:

(a) Ψ **está bien definida:** si $\mathscr{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathscr{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathscr{G}_k)$, donde $J,K \subseteq [n]$ satisfacen $J \cap K = \emptyset$, entonces $\Psi(\mathscr{F}) = (K,J) \in Bip([n])$. Además, claramente $\Psi(\emptyset)$ y $\Psi(C_n)$ son elementos de $Bip([n])$.

(b) Ψ **es inyectiva:** sean $\mathscr{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathscr{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathscr{G}_k)$, donde $J,K \subseteq [n]$ son tales que $J \cap K = \emptyset$, y $\mathscr{G} = \left(\cap_{j\in \tilde{J}}\mathscr{F}_j\right) \cap \left(\cap_{k\in \tilde{K}}\mathscr{G}_k\right)$, donde $\tilde{J},\tilde{K} \subseteq [n]$ cumplen $\tilde{J} \cap \tilde{K} = \emptyset$, caras propias no vacías de C_n que satisfacen $\Psi(\mathscr{F}) = (K,J) = (\tilde{K},\tilde{J}) = \Psi(\mathscr{G})$. Por lo tanto, $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K}$, de donde, concluimos que $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.

(c) Ψ **es sobreyectiva:** si $(K,J) \in Bip([n])$ entonces $(K,J) = \Psi(\mathscr{F})$, donde $\mathscr{F} = \left(\cap_{j\in J}\mathscr{F}_j\right) \cap (\cap_{k\in K}\mathscr{G}_k)$, siendo $J,K \subseteq [n]$ satisfaciendo $J \cap K = \emptyset$. Además, $\hat{0} = \Psi(\emptyset)$ y $(\emptyset,\emptyset) = \Psi(C_n)$.

(d) Ψ **preserva coberturas:** si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son caras propias no vacías de C_n tales que $\mathscr{G}$ cubre a $\mathscr{F}$, entonces $\mathscr{F}$ se obtiene a partir de $\mathscr{G}$ mediante la intersección de esta última cara con

un hiperplano de soporte de C_n no considerado en la intersección que define a $\mathscr{G}$, bien del tipo $\mathscr{F}_j$, $j \in [n]$, o bien del tipo $\mathscr{G}_k$, $k \in [n]$. En este caso, claramente $\Psi(\mathscr{F}) \lessdot \Psi(\mathscr{G})$ en $Bip([n])$. De otra parte, C_n cubre a las caras maximales, la cual es, claramente, una relación que se preserva a través de Ψ. Finalmente, los vértices de C_n cubren a la cara vacía y, teniendo presente que C_n es un n-politopo simple, sus vértices se obtienen como la intersección de n caras maximales, razón por la cual, la imagen de los vértices bajo la aplicación Ψ son particiones ordenadas de $[n]$ de tamaño 2, las cuales cubren a $\hat{0} = \Psi(\emptyset)$ en el retículo $Bip([n])$.

(e) Ψ^{-1} **preserva las coberturas:** si $(K,J),(\tilde{K},\tilde{J}) \in Bip([n])$ son tales que $(K,J) \lessdot (\tilde{K},\tilde{J})$ en $Bip([n])$, entonces se presentan un par de situaciones que analizamos, de manera separada, a continuación:

(i) **Caso 1:** si $K = \tilde{K}$ y $J = \tilde{J} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n] \setminus (K \cup J)$, entonces $\Psi^{-1}((K,J)) = \mathscr{F}_i \cap (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathscr{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathscr{G}_k)$ y $\Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathscr{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathscr{G}_k)$. Por lo tanto, tenemos que $\Psi^{-1}((K,J)) \lessdot \Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(C_n)$.

(ii) **Caso 2:** si $J = \tilde{J}$ y $K = \tilde{K} \cup \{i\}$, para algún $i \in [n] \setminus (K \cup J)$, entonces $\Psi^{-1}((K,J)) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathscr{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathscr{G}_k) \cap \mathscr{G}_i$ y $\Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J})) = (\cap_{j\in\tilde{J}} \mathscr{F}_j) \cap (\cap_{k\in\tilde{K}} \mathscr{G}_k)$. Por consiguiente, tenemos que $\Psi^{-1}((K,J)) \lessdot \Psi^{-1}((\tilde{K},\tilde{J}))$ en $\mathscr{L}(C_n)$.

De otra parte, si $(A,B) \in Bip([n])$ es tal que $\hat{0} \lessdot (A,B)$ en $Bip([n])$, entonces $A \cup B = [n]$. En consecuencia, tenemos que $\Psi^{-1}(\hat{0}) = \emptyset$ y $\Psi^{-1}((A,B))$ es un vértice de C_n, razón por la cual, $\Psi^{-1}(\hat{0}) \lessdot \Psi^{-1}((A,B))$ en $\mathscr{L}(C_n)$.

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que Ψ es, en efecto, un isomorfismo de retículos y, por consiguiente, podemos afirmar que $\mathscr{L}(C_n) \cong Bip[n]$. □

En el apartado anterior y en lo que va del presente apartado, hemos investigado la estructura facial de los ideales principales de mayorización y de mayorización débil con el objetivo fundamental de encontrar una descripción combinatoria de sus retículos de caras. El siguiente teorema nos muestra que estos objetos resultan ser combinatoriamente equivalentes a hipercubos.

TEOREMA 2.50. *Si $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^w(b)$ son los ideales principales de mayorización y mayorización débil asociados con b, respectivamente, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong \mathscr{L}(C_{n-1})$ y $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \cong \mathscr{L}(C_n)$.*

Demostración. Sean $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^w(b)$ los ideales principales de mayorización y mayorización débil asociados con b, respectivamente. En los teoremas 2.38 y 2.47, y en la proposición 2.49, hemos mostrado que $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong Bip[n-1]$, $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \cong Bip[n]$ y $\mathscr{L}(C_n) \cong Bip[n]$, lo cual nos permite concluir que $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \cong \mathscr{L}(C_{n-1})$ y $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b)) \cong \mathscr{L}(C_n)$. □

2.2.2.4. ADITIVIDAD DE $\mathbb{M}^w(b)$

En el apartado referido a la aditividad de $\mathbb{M}(b)$ mostramos esta propiedad apoyados en los politopos de Newton y, en aquella ocasión, establecimos un lema que nos facilitó el análisis.

Para el caso de $\mathbb{M}^w(b)$, la investigación de la propiedad de aditividad la basamos nuevamente en politopos de Newton y, al final, la apoyamos en ciertas propiedades de la mayorización que son fácilmente verificables.

TEOREMA 2.51. *Si* $b=(b_1,\ldots,b_n), \hat{b}=(\hat{b_1},\ldots,\hat{b_n})\in\mathbb{R}^n$ *son tales que* $b_1>\cdots>b_n>0$ *y* $\hat{b_1}>\cdots>\hat{b_n}>0$, *entonces* $\mathbb{M}^w(b+\hat{b})=\mathbb{M}^w(b)+\mathbb{M}^w(\hat{b})$.

Demostración. Sean $b=(b_1,\ldots,b_n), \hat{b}=(\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_n)\in\mathbb{R}^n$ tales que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\hat{b}_1>\cdots>\hat{b}_n>0$. Definimos los polinomios de Laurent $f(X):=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{\pi^k\in\Pi^k}X^{b^{\pi^k}}\right)+1$ y $g(X):=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{\sigma^j\in\Pi^j}X^{\hat{b}^{\sigma^j}}\right)+1$, entonces $\mathscr{S}(f)=\{b^{\pi^k}\mid\pi^k\in\Pi^k,k\in[n]\}\cup\{\vec{0}\}$, $\mathscr{S}(g)=\{\hat{b}^{\sigma^j}\mid\sigma^j\in\Pi^j,j\in[n]\}\cup\{\vec{0}\}$ y, en consecuencia, $\mathscr{N}(f)=conv(\{b^{\pi^k}\mid\pi^k\in\Pi^k,k\in[n]\}\cup\{\vec{0}\})=\mathbb{M}^w(b)$ y $\mathscr{N}(f)=conv(\{\hat{b}^{\sigma^j}\mid\sigma^j\in\Pi^j\}\cup\{\vec{0}\})=\mathbb{M}^w(\hat{b})$. Por lo tanto, $\mathbb{M}^w(b)+\mathbb{M}^w(\hat{b})=\mathscr{N}(f)+\mathscr{N}(g)=\mathscr{N}(fg)$. Nos restaría ver que $\mathscr{N}(fg)=\mathbb{M}^w(b+\hat{b})$. Inicialmente, observemos que se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned}fg(X)=f(X)g(X)&=\left[\sum_{k=1}^n\left(\sum_{\pi^k\in\Pi^k}X^{b^{\pi^k}}\right)+1\right]\left[\sum_{j=1}^n\left(\sum_{\sigma^j\in\Pi^j}X^{\hat{b}^{\sigma^j}}\right)+1\right]\\&=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{\pi^k\in\Pi^k}X^{b^{\pi^k}}\right)+\sum_{j=1}^n\left(\sum_{\sigma^j\in\Pi^j}X^{\hat{b}^{\sigma^j}}\right)+\sum_{k=1}^n\left(\sum_{\pi^k\in\Pi^k}X^{(b+\hat{b})^{\pi^k}}\right)\\&+\sum_{k=1}^n\left(\sum_{\substack{\pi^k,\sigma^k\in\Pi^k\\ \pi^k\neq\sigma^k}}X^{b^{\pi^k}+\hat{b}^{\sigma^k}}\right)+\sum_{\substack{j,k\in[n]\\ j\neq k}}\left(\sum_{\substack{\pi^k\in\Pi^k\\ \sigma^j\in\Pi^j}}X^{b^{\pi^k}+\hat{b}^{\sigma^j}}\right)+1,\end{aligned}$$

de donde, tenemos que

$$\mathscr{N}(fg)=conv(\{b^{\pi^k},\hat{b}^{\sigma^j},(b+\hat{b})^{\pi^k},b^{\pi^k}+\hat{b}^{\sigma^j}\mid\pi^k,\sigma^j\in\Pi^j;j,k\in[n];\pi^k\in\Pi^k,\sigma^j\in\Pi^j\}\cup\{\vec{0}\})$$

y, en vista de que $\mathbb{M}(b+\hat{b})=conv(\{(b+\hat{b})^{\pi^k}\mid\pi^k\in\Pi^k\}\cup\{\vec{0}\})$, concluimos que $\mathbb{M}^w(b+\hat{b})\subseteq\mathscr{N}(fg)$. Para justificar que $\mathbb{M}^w(b+\hat{b})\supseteq\mathscr{N}(fg)$, es suficiente justificar las siguientes relaciones: (i) $b^{\pi^k}\preceq^w b+\hat{b}$, (ii) $\hat{b}^{\sigma^j}\preceq^w b+\hat{b}$ y (iii) $b^{\pi^k}+\hat{b}^{\sigma^j}\preceq^w b+\hat{b}$, para todo $j,k\in[n]$ y para cualesquiera $\pi^k\in\Pi^k$ y $\sigma^j\in\Pi^j$, las cuales resultan válidas, teniendo presente que $b^{\pi^k}\preceq(b_1,\ldots,b_k,0,\ldots,0)\preceq^w b$, $\hat{b}^{\sigma^j}\preceq(\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_j,0,\ldots,0)\preceq^w\hat{b}$, $b\preceq^w b+\hat{b}$ y $\hat{b}\preceq^w b+\hat{b}$, junto con la transitividad de la mayorización y el hecho de que mayorización implica mayorización débil. En consecuencia, podemos concluir que $\mathbb{M}^w(b+\hat{b})=\mathbb{M}^w(b)+\mathbb{M}^w(\hat{b})$. □

2.2.2.5. COMENTARIOS FINALES

Los estudios sobre $\mathbb{M}^w(b)$ realizados en la presente sección constituyen una suerte de continuidad a aquellos estudios que hicimos en la sección anterior. El próposito que buscamos fue la descripción combinatoria de $\mathscr{L}(\mathbb{M}^w(b))$, lo cual implicaba, inicialmente, describir de manera precisa el conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w(b)$, para lo cual fue suficiente generalizar la terminología sobre particiones intervalo de [Dah01]. Como notará el lector o lectora, el espíritu metodológico es el mismo que hemos venido usando a lo largo de nuestro trabajo. Sin embargo, algo que nos resulto sorprendente y, hasta cierto punto, inesperado, es que los ideales principales

de mayorización resultaran combinatoriamente equivalentes a hipercubos. Este fue uno de los últimos resultados que establecimos en nuestro proceso de investigación y, sin duda alguna, el elemento que resultó determinante para llegar a tal resultado fue la introducción del retículo $Bip([n])$, pues, tal como observara el lector o lectora, este objeto es el que conecta los politopos $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^w(b)$ y C_n. Finalmente, la propiedad de aditividad de $\mathbb{M}^w(b)$, que fue el resultado con el que terminamos la sección, solamente reafirma la utilidad que tienen los politopos de Newton en la investigación de la propiedad de aditividad de los politopos que fueron objeto de estudio.

2.2.3. IDEAL PRINCIPAL DE MAYORIZACION FUERTE

La presente sección está fuertemente inspirada por la sección dedicada al estudio del permutaedro de mayorización fuerte asociada con v, en la cual mostramos que $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$. Si definimos, de manera natural, el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b mediante la igualdad $\mathbb{M}^s(b) = M^s(b) \cap \mathbb{D}^n$, entonces indagamos, también de manera natural, si se satisface la identidad $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, lo cual efectivamente se cumple y en la presente sección la justificamos.

DEFINICIÓN 2.12. Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$, entonces al conjunto $\mathbb{M}^s(b) := \{x \in \mathbb{D}^n \mid x \ll b\}$ lo denominamos **ideal principal de mayorización fuerte asociado con** b.

EJEMPLO 2.16. El ideal principal de mayorización fuerte asociado con el vector $(2,1)$, el cual denotamos por $\mathbb{M}^s((2,1))$, contiene a los elementos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2$ que satisfacen la condición $x \ll (2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq x_2$, $x_1 \leq 2x_2$ y $x_1 + x_2 \leq 3$. Estas desigualdades conforman una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}^s((2,1))$ y nos permiten visualizar este politopo en el plano cartesiano. En la figura 2.20 mostramos una representación de $\mathbb{M}^w((2,1))$ en $\mathbb{R}^2$, la cual nos permitirá hacer algunas observaciones sobre este politopo.

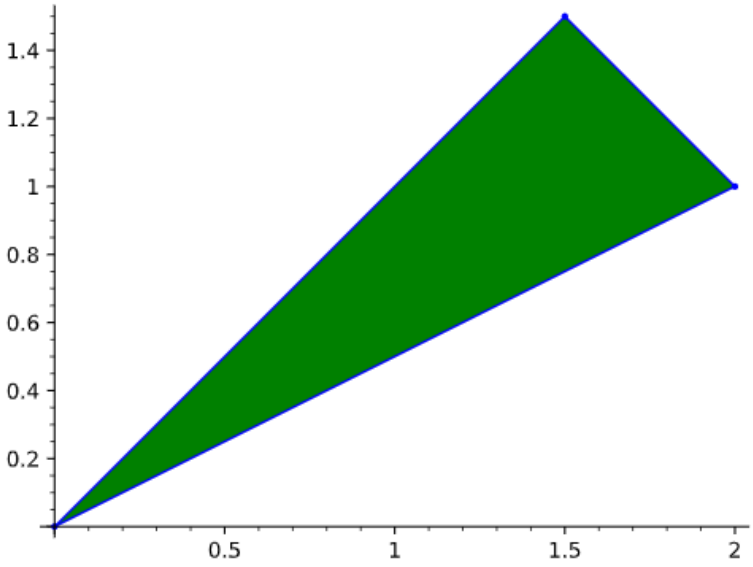


Figura 2.20: $\mathbb{M}^s((2,1))$, ideal principal de mayorización fuerte asociado con $(2,1)$.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w((2,1))$ es $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w((2,1))) = \{(2,1), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (0,0)\}$, los cuales corresponden a los vértices de $\mathbb{M}((2,1))$ junto con el elemento $(0,0)$. Dado que $(0,0)$ no pertenece a la envolvente afín de $\mathbb{M}((2,1))$, podemos concluir que $\mathbb{M}^s((2,1)) = Pyr(\mathbb{M}((2,1)), (0,0))$.

EJEMPLO 2.17. El ideal principal de mayorización fuerte asociado con $(3,2,1)$, el cual denotamos por $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, consiste de los elementos $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}^3$ que satisfacen la condición $x \ll (3,2,1)$, es decir, que cumplen las desigualdades $x_1 \geq x_2$, $x_2 \geq x_3$, $3x_1 \leq 3(x_2 + x_3)$, $x_1 + x_2 \leq 5x_3$ y $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Estas desigualdades nos dan una $\mathscr{H}$-descripción de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ y nos permiten visualizar este politopo en el espacio euclidiano tridimensional. En la figura 2.21 mostramos una representación de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$ en $\mathbb{R}^3$, la cual nos será de utilidad para formular algunas observaciones sobre este politopo.

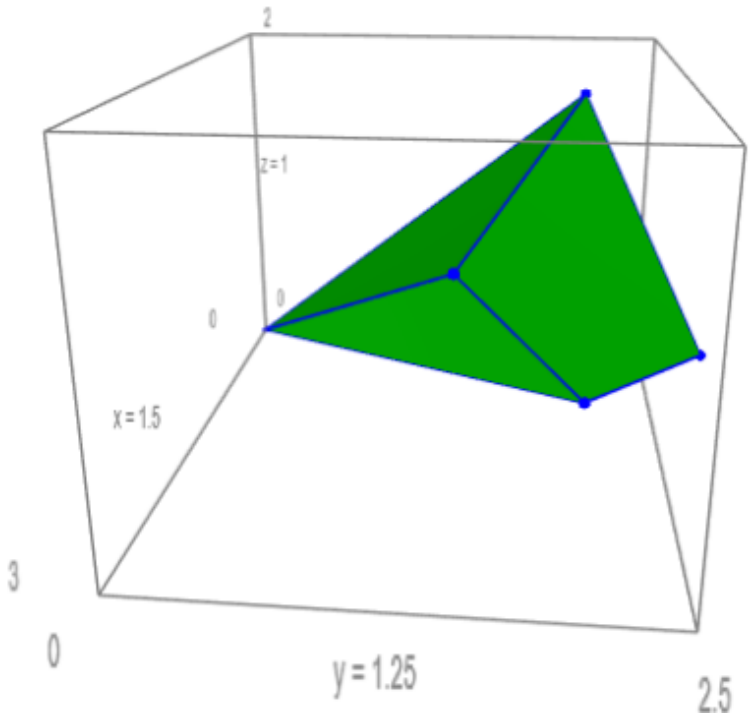


Figura 2.21: $\mathbb{M}^s((3,2,1))$, ideal principal de mayorización fuerte asociado con $(3,2,1)$.

El conjunto de vértices de $\mathbb{M}^w((3,2,1))$, el cual denotamos $\mathcal{V}(\mathbb{M}^w((3,2,1)))$, corresponde al conjunto $\{(3,2,1), (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1), (3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (2,2,2), (0,0,0)\}$. Este conjunto está conformado por los vértices de $\mathbb{M}((3,2,1))$ junto con el elemento $(0,0,0)$ y, en vista de que $(0,0,0)$ no está en la envolvente afín de $\mathbb{M}((3,2,1))$, podemos concluir que $\mathbb{M}^w((3,2,1)) = Pyr(\mathbb{M}(3,2,1), (0,0,0))$.

2.2.3.1. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE $\mathbb{M}^s(b)$

El objetivo principal que nos proponemos en este apartado es demostrar que $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, lo cual ha quedado sugerido en los ejemplos con los que comenzamos la sección. Con este propósito en mente, comenzamos estableciendo un resultado que afirma que el ideal principal de mayorización fuerte lo podemos descomponer como una unión disyunta de ideales principales de mayorización. Posteriormente, probamos el teorema principal y, finalmente,

mostramos una descripción geométrica de $\mathbb{M}^s(b)$, la cual se sigue naturalmente de aquella conexión entre hipercubos e ideales principales de mayorización que fue explorada en la sección anterior.

PROPOSICIÓN 2.52. *Si $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ es el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b, entonces $\mathbb{M}^s(b)=\bigsqcup_{\alpha\in[0,1]}\mathbb{M}(\alpha b)$, donde $\mathbb{M}(\alpha b)$ es el ideal principal de mayorización asociado con αb.*

Demostración. Sean $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ es el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b. De la proposición 2.27 tenemos que $M^s(b)=\bigsqcup_{\alpha\in[0,1]}M(\alpha b)$, donde $M(\alpha b)$ es el permutaedro de mayorización asociado con αb, hecho que nos permite establecer las siguientes igualdades

$$\mathbb{M}^s(b)=M^s(b)\cap\mathbb{D}^n=\left(\bigsqcup_{\alpha\in[0,1]}M(\alpha b)\right)\cap\mathbb{D}^n=\bigsqcup_{\alpha\in[0,1]}(M(\alpha b)\cap\mathbb{D}^n)=\bigsqcup_{\alpha\in[0,1]}\mathbb{M}(\alpha b),$$

en las cuales tenemos presente que $\mathbb{M}^s(b)=M^s(b)\cap\mathbb{D}^n$ y $\mathbb{M}(\alpha b)=M(\alpha b)\cap\mathbb{D}^n$, las cuales se siguen de las definiciones del ideal principal de mayorización y de mayorización fuerte asociados con αb y b, respectivamente. □

TEOREMA 2.53. *Si $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ es el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b, entonces $\mathbb{M}^s(b)=Pyr(\mathbb{M}(b),\vec{0})$, es decir, $\mathbb{M}^s(b)$ es la pirámide construida a partir del ideal principal de mayorización asociado con b, $\mathbb{M}(b)$, y del vector $\vec{0}$.*

Demostración. Sean $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $b_1>\cdots>b_n>0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b. Consideremos, además, el politopo $\mathbb{M}(b)$, el ideal principal de mayorización asociado con b. Vamos a demostrar que $\mathcal{V}(\mathbb{M}^s(b))=\mathcal{V}(\mathbb{M}(b))\cup\{\vec{0}\}$, para lo cual analizamos los siguientes casos:

(a) **Caso 1:** $\vec{0}$ es un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$. En efecto, sean $\vec{x}_j=(x_j^1,x_j^2,\ldots,x_j^n)$, $j\in[k]$, vectores no nulos en $\mathbb{M}^s(b)$ y β_j, $j\in[k]$, números reales en $[0,1]$ tales que $\sum_{j=1}^k\beta_j=1$ y $\vec{0}=\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+\cdots+\beta_k\vec{x}_k$. La proposición 2.52 garantiza la existencia de elementos $\alpha_j\in(0,1]$ satisfaciendo que $\vec{x}_j\preceq\alpha_j b$, $j\in[k]$, lo cual implica que $\sum_{i=1}^n x_j^i=\alpha_j\sum_{i=1}^n b_i$, $j\in[k]$ y, en consecuencia, se satisfacen las igualdades

$$0=\beta_1\sum_{i=1}^n x_1^i+\beta_2\sum_{i=1}^n x_2^i+\cdots+\beta_k\sum_{i=1}^n x_k^i=\left(\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\cdots+\beta_k\alpha_k\right)\sum_{i=1}^n b_i,$$

y, en vista de que $b\neq\vec{0}$, $\alpha_j\in(0,1]$ y $\beta_j\in[0,1]$, $j\in[k]$, podemos concluir que $\beta_j=0$ para todo $j\in[k]$. Por lo tanto, la única combinación convexa para $\vec{0}$ en $\mathbb{M}^s(v)$ es la trivial, razón por la cual, podemos afirmar que $\vec{0}$ es un vértice de $\mathbb{M}^s(v)$.

(b) **Caso 2:** Si $x\in\mathbb{M}(\alpha b)$ con $\alpha\in(0,1)$ entonces x no puede ser un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$. En efecto, si $x\in\mathbb{M}(\alpha b)$ entonces $x\preceq\alpha b$ y, usando la caracterización geométrica del concepto de mayorización, x pertenece a la envolvente convexa de las permutaciones del vector αb. Sean $\vec{b}_j$, $j\in[n!]$, las permutaciones de b y $x=\sum_{j=1}^{n!}\beta_j(\alpha\vec{b}_j)$ una combinación convexa de x. En la situación en que x sea un vértice de $\mathbb{M}(\alpha b)$ entonces existiría $j\in\{1,\ldots,n!\}$ tal que

$x = \alpha\vec{b_j}$ y, por consiguiente, $x = (1-\alpha)\vec{0} + \alpha\vec{b_j}$ sería una combinación convexa no trivial de x en $\mathbb{M}^s(b)$, lo cual nos muestra que x no es un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$. Si x no es un vértice de $\mathbb{M}(\alpha b)$ entonces, necesariamente, x lo podemos expresar como una combinación no trivial, es decir, tenemos que $x = \sum_{j=1}^{n!} \beta_j(\alpha\vec{b_j})$, donde β_j, $j \in [n!]$, no son todos nulos y, debido a esto, podemos concluir nuevamente que x no es un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$.

(c) **Caso 3:** Sea $x \in \mathbb{M}(b)$. Claramente, en el caso de que x no sea un vértice de $\mathbb{M}(b)$, concluimos que x no es un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$. Veamos que los vértices de $\mathbb{M}(b)$, es decir, aquellos vectores de la forma b^π, $\pi \in \Pi$, son vértices de $\mathbb{M}^s(b)$: sea $\pi \in \Pi$ y $b^\pi = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$ una combinación convexa de b^π en $\mathbb{M}^s(b)$, donde $\vec{x}_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n) \in \mathbb{M}(\alpha_j b)$ con $\alpha_j \in (0,1]$. Dado que b^π es el promedio de b asociado con π y se cumple la identidad $\sum_{i=1}^n x_j^i = \alpha_j \sum_{i=1}^n b_i$, $j \in [k]$, entonces se satisfacen las igualdades

$$\sum_{i=1}^n b_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_1^i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_2^i + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^n x_k^i = \left(\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k\right) \sum_{i=1}^n b_i,$$

lo que implica que $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k = 1$, debido a que β_j , $j \in [k]$, son números reales en $[0,1]$ tales que $\sum_{j=1}^k \beta_j = 1$, razón por la cual, tenemos que $\alpha_j = 1$ para cada $j \in [k]$, lo que muestra que $\vec{x}_j \in \mathbb{M}(b)$, $j \in [k]$, y al ser b^π un vértice de $M(v)$ concluimos que $b^\pi = \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_k\vec{x}_k$ es una combinación convexa trivial. Por lo tanto, b^π es un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$.

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que $\mathcal{V}(\mathbb{M}^s(b)) = \mathcal{V}(\mathbb{M}(b)) \cup \{\vec{0}\}$ y, ya que $\vec{0} \notin \mathbb{M}(b)$, podemos concluir que $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$. □

TEOREMA 2.54. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ es el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b)) \cong \mathscr{L}(Pyr(C_{n-1}, a))$, donde $a \in \mathbb{R}^n \setminus C_n$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b. Consideremos, además, el ideal principal de mayorización asociado con b, $\mathbb{M}(b)$, y el hipercubo de dimensión $n-1$, C_{n-1}. En el teorema 2.50 mostramos que $\mathbb{M}(b)$ y C_{n-1} son combinatoriamente equivalentes, por consiguiente, si a es un elemento de $\mathbb{R}^n$ no contenido en C_{n-1}, tenemos que $\mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b)) = \mathscr{L}(Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})) \cong \mathscr{L}(Pyr(C_{n-1}, a))$, en vista de que $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$ y $a \in \mathbb{R}^n \setminus C_n$. □

2.2.3.2. ESTRUCTURA FACIAL DE $\mathbb{M}^s(b)$

Como vimos en el apartado anterior, tenemos que $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, hecho que tiene algunas implicaciones para la descripción de la estructura facial de este politopo, las cuales exploraremos en el presente apartado. Inicialmente, mostramos que cada una de las caras de $\mathbb{M}(b)$ es también una cara de $\mathbb{M}^s(b)$ y, posteriormente, demostraremos que una cara $\mathbb{F}$ de $\mathbb{M}(b)$ con dimensión j, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, induce unívocamente una cara $\mathbb{F}_0^s$ de $\mathbb{M}^s(b)$ con dimensión $j+1$; es más, tenemos que $\mathbb{F}_0^s = conv(\mathbb{F} \cup \{\vec{0}\})$. En la parte final, describiremos $\mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b))$ haciendo uso de los elementos anteriores.

PROPOSICIÓN 2.55. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^s(b)$ son los ideales principales de mayorización y mayorización fuerte asociados con b, respectivamente, entonces toda cara de $\mathbb{M}(b)$ es también una cara de $\mathbb{M}^s(b)$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^s(b)$ los ideales principales de mayorización y mayorización fuerte asociados con b, respectivamente. Si $\mathbb{F}$ es una cara de $\mathbb{M}(b)$ entonces existe $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in \mathbb{M}(b)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución, precisamente, a $\mathbb{F}$. Es más, escogemos el vector c de modo tal que $\max_{x \in \mathbb{M}(b)} \langle c, x \rangle = c_0 > 0$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{M}^s(b)$ entonces $x \ll b$ y, en virtud del teorema 2.26, existe una matriz doble estocástica A tal que $x = b(\alpha A)$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{b_1 + \cdots + b_n} \in [0, 1]$ y, en consecuencia, se verifican las igualdades $\langle c, x \rangle = \langle c, b(\alpha A) \rangle = \alpha \langle c, bA \rangle$. Debido a la caracterización matricial del concepto de mayorización, tenemos que $bA \in M(b)$ y, por consiguiente, $\langle c, bA \rangle \leq c_0$. En el caso que $\alpha = 0$, tenemos que $x = \vec{0}$ y, por lo tanto, $\langle c, x \rangle = 0 < c_0$. De otra parte, si $\alpha \in (0, 1)$ entonces $\langle c, x \rangle \leq \alpha c_0 < c_0$ y, finalmente, en la situación en que $\alpha = 1$ resulta que $x \in \mathbb{M}(b)$, razón por la cual, $\langle c, x \rangle = c_0$ si, y sólo si, $x \in \mathbb{F}$. Es decir, el problema de optimización lineal $\max_{x \in \mathbb{M}^s(b)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución a $\mathbb{F}$, lo que nos muestra que $\mathbb{F}$ es también una cara de $\mathbb{M}^s(b)$. □

TEOREMA 2.56. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^s(b)$ son los ideales principales de mayorización y mayorización fuerte asociados con b, respectivamente, entonces, para cada $k \in [n]$, hay una biyección entre las caras de $\mathbb{M}^s(b)$ de dimensión k que contienen a $\vec{0}$ y las caras de $\mathbb{M}(b)$ de dimensión $k-1$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^s(b)$ los ideales principales de mayorización y mayorización fuerte asociados con b, respectivamente. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b)) := \{\mathbb{F}_0^s \in \mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b)) \mid \vec{0} \in \mathbb{F}_0^s\},$$

y definamos, además, la función $\Psi^s : \mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \to \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ mediante $\Psi^s(\mathbb{F}) := conv(\mathbb{F} \cup \{\vec{0}\})$. Veamos que Ψ^s es una biyección:

(a) Ψ^s **está bien definida:** si $\mathbb{F} \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ entonces existe $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x \in \mathbb{M}(b)} \langle c, x \rangle$ tiene como conjunto solución a $\mathbb{F}$. Es más, podemos escoger al vector c de manera tal que $\max_{x \in \mathbb{M}(b)} \langle c, x \rangle = c_0 > 0$. Definamos $\tilde{c} := c - \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i} \vec{1} = \left(c_1 - \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i}, \ldots, c_n - \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i}\right)$ y consideremos el problema de optimización lineal $\max_{x \in \mathbb{M}^s(b)} \langle \tilde{c}, x \rangle$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{M}^s(b)$ entonces, por el teorema 2.26, existe una matriz doble estocástica A tal que $x = b(\alpha A)$, donde $\alpha = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{b_1 + \cdots + b_n} \in [0, 1]$. Por lo tanto, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \langle \tilde{c}, x \rangle = \langle \tilde{c}, b(\alpha A) \rangle = \alpha \langle \tilde{c}, bA \rangle &= \alpha \left\langle c - \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i} \vec{1}, bA \right\rangle = \alpha \left(\langle c, bA \rangle - \left\langle \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i} \vec{1}, bA \right\rangle \right) \\ &= \alpha \left(\langle c, bA \rangle - \frac{c_0}{\sum_{i=1}^n b_i} \langle \vec{1}, bA \rangle \right) = \alpha (\langle c, bA \rangle - c_0), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\langle \vec{1}, Ab \rangle = \sum_{i=1}^n b_i$, lo cual se tiene al ser A una matriz doble estocástica. Si $\alpha = 0$ entonces $x = \vec{0}$ y, en consecuencia, $\langle \tilde{c}, x \rangle = 0$. Si $\alpha = 1$

entonces $x = bA \in \mathbb{M}(b)$ y tenemos que $\langle \tilde{c}, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $x \in \mathbb{F}$. Si $\alpha \in (0,1)$ entonces $x = \alpha bA + (1-\alpha)\vec{0}$ y se verifica que $\langle \tilde{c}, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $bA \in \mathbb{F}$, es más, si $\alpha \in (0,1]$ pero $vA \notin \mathbb{F}$ entonces $\langle c, bA\rangle < c_0$ y, por consiguiente, $\langle \tilde{c}, x\rangle < 0$. De lo anterior, tenemos que $\max_{x\in\mathbb{M}^s(b)}\langle \tilde{c}, x\rangle = 0$ y su conjunto solución es $\Psi^s(\mathbb{F}) = conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\})$, lo cual nos permite afirmar que $\Psi^s(\mathbb{F})$ es una cara de $\mathbb{M}^s(b)$ que contiene a $\vec{0}$ y, por lo tanto, Ψ^s es una función bien definida.

(b) Ψ^s **es inyectiva:** sean $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ tales que $\Psi^s(\mathbb{F}_1) = \Psi^s(\mathbb{F}_2)$. Por definición de Ψ^s, tenemos que $conv(\mathbb{F}_1\cup\{\vec{0}\}) = conv(\mathbb{F}_2\cup\{\vec{0}\})$, lo cual sucede si, y sólo si, $\mathscr{V}(conv(\mathbb{F}_1\cup\{\vec{0}\})) = \mathscr{V}(conv(\mathbb{F}_2\cup\{\vec{0}\}))$. Ahora bien, para $i \in [2]$, el conjunto $\mathscr{V}(conv(\mathbb{F}_i\cup\{\vec{0}\}))$ corresponde al conjunto de vértices de $\mathbb{M}^s(b)$ contenidos en $\mathbb{F}_i\cup\{\vec{0}\}$ y, por el teorema 2.53, todo vértice de $\mathbb{M}(b)$ es también un vértice de $\mathbb{M}^s(b)$, de donde se sigue que $\mathscr{V}(conv(\mathbb{F}_i\cup\{\vec{0}\})) = \mathscr{V}(\mathbb{F}_i)\cup\{\vec{0}\}$, $i \in [2]$, razón por la cual, $\mathscr{V}(\mathbb{F}_1) = \mathscr{V}(\mathbb{F}_2)$. Por lo tanto, concluimos que $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$, lo cual nos muestra que Ψ^s es una función inyectiva.

(c) Ψ^s **es sobreyectiva:** si $\mathbb{F}_0^s \in \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ entonces $\vec{0} \in \mathbb{F}_0^s$ y existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema de optimización lineal $\max_{x\in\mathbb{M}^s(b)}\langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución a $\mathbb{F}_0^s$. Dado que $\mathbb{M}(b) \subseteq \mathbb{M}^s(b)$ entonces el problema de optimización lineal $\max_{x\in\mathbb{M}(b)}\langle c, x\rangle$ tiene como conjunto solución a $\mathbb{F}_0^s \cap \mathbb{M}(b) = conv(\mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\})$ y, en consecuencia, $\mathbb{F} := conv(\mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\}) \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$. Veamos que $\Psi^s(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_0^s$.

(⊆) Si $x \in \Psi^s(\mathbb{F}) = conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\})$ entonces existen $\tilde{x} \in \mathbb{F}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $x = \lambda_1\tilde{x} + \lambda_2\vec{0}$ y, en vista de que $\mathbb{F} = conv(\mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\})$, tenemos que $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i$, donde $\{y_i \mid i \in [k]\} \subseteq \mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\}$ y los números $\beta_i \in [0,1]$, $i \in [k]$, satisfacen que $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$. De manera que, $x = \sum_{i=1}^k (\lambda_1\beta_i) y_i + \lambda_2\vec{0}$, la cual es una expresión para x como combinación convexa de elementos de $\mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)$ y, por consiguiente, concluimos que $x \in \mathbb{F}_0^s$.

(⊇) Si $x \in \mathbb{F}_0^s$ entonces existen $y_i \in \mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\}$, $i \in [k]$, y números reales $\beta_i \in [0,1]$, $i \in [k+1]$, satisfaciendo $\sum_{i=1}^{k+1}\beta_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^k \beta_i y_i + \beta_{k+1}\vec{0}$. Si $\beta_{k+1} = 0$ entonces tenemos que $x \in \mathbb{F}$ y, en consecuencia, $x \in conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\}) = \Psi^s(\mathbb{F})$. Si $\beta_{k+1} = 1$ entonces $x = \vec{0}$ y claramente $x \in \Psi^s(\mathbb{F})$. En caso tal que $\beta_{k+1} \in (0,1)$, definimos $\tilde{x} := \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} y_i \in conv(\mathscr{V}(\mathbb{F}_0^s)\setminus\{\vec{0}\}) = \mathbb{F}$, de donde

$$x = (1-\beta_{k+1})\left(\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} y_i\right) + \beta_{k+1}\vec{0} = (1-\beta_{k+1})\tilde{x} + \beta_{k+1}\vec{0} \in conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\}) = \Psi^s(\mathbb{F}).$$

De manera que, en cualquier caso se satisface que $x \in \Psi^s(\mathbb{F})$.

De lo anterior, concluimos que $\Psi^s(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_0^s$, razón por la cual, podemos afirmar que Ψ^s es una función sobreyectiva.

Hemos mostrado que $\Psi^s : \mathscr{L}(\mathbb{M}(b)) \to \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ definida mediante $\Psi^s(\mathbb{F}) := conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\})$ es una biyección. De otra parte, si $\mathbb{F} \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ es una cara de dimensión j, $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, entonces $\Psi^s(\mathbb{F}) = conv(\mathbb{F}\cup\{\vec{0}\}) \in \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ tiene dimensión $j+1$. En efecto, si existieran vectores $\vec{y}_j = (y_j{}^1, \ldots, y_j{}^n) \in \mathbb{F}$, $j \in [k]$, y números reales β_j, $j \in [k]$, satisfaciendo que $\sum_{j=1}^k \beta_j = 1$ y

$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{y}_j$ entonces

$$0 = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} y_1^i + \cdots + \beta_k \sum_{i=1}^{n} y_k^i = (\beta_1 + \cdots + \beta_k) \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i > 0,$$

donde hemos usado que la suma de las entradas de cualquier vector de $\mathbb{F}$ es $\sum_{i=1}^{n} b_i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\vec{0}$ no está en la envolvente afín de $\mathbb{F}$ y, como consecuencia de esto, tenemos que $\dim(\Psi^s(\mathbb{F})) = j+1$ siempre que $\dim(\mathbb{F}) = j$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, lo que concluye la demostración. □

Consideremos $\mathbb{F}_1^s, \mathbb{F}_2^s \in \mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b))$. Definimos la relación de cobertura en $\mathbb{M}^s(b)$, la cual denotamos $\lessdot^s$, mediante los siguientes casos:

(1) **Caso 1:** si $\mathbb{F}_1^s, \mathbb{F}_2^s \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ entonces $\mathbb{F}_1^s \lessdot^s \mathbb{F}_2^s$ si, y sólo si, $\mathbb{F}_1^s \lessdot \mathbb{F}_2^s$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

(2) **Caso 2:** si $\mathbb{F}_1^s, \mathbb{F}_2^s \in \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ entonces existen $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ tales que $\mathbb{F}_1^s = conv(\mathbb{F}_1 \cup \{\vec{0}\})$ y $\mathbb{F}_2^s = conv(\mathbb{F}_2 \cup \{\vec{0}\})$. En tal circunstancia, $\mathbb{F}_1^s \lessdot^s \mathbb{F}_2^s$ si, y sólo si, $\mathbb{F}_1 \lessdot \mathbb{F}_2$ en $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$.

(3) **Caso 3:** si $\mathbb{F}_1^s \in \mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ y $\mathbb{F}_2^s \in \mathscr{L}_0(\mathbb{M}^s(b))$ entonces $\mathbb{F}_1^s \lessdot^s \mathbb{F}_2^s$ si, y sólo si, $\mathbb{F}_2^s = conv(\mathbb{F}_1^s \cup \{\vec{0}\})$.

En vista de que no es posible que un elemento de $\mathscr{L}(\mathbb{M}(b))$ cubra un elemento de $\mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b))$, ya que $\vec{0} \notin \mathbb{M}(b)$, podemos afirmar que los anteriores tres casos describen completamente el retículo de caras de $\mathbb{M}^s(b)$. De otra parte, teniendo presente la descripción del retículo de caras de $\mathbb{M}^s(b)$ y aprovechando el estudio que realizamos, en el teorema 2.39, del f-vector de $\mathbb{M}(b)$, enseguida establecemos las componentes del f-vector de $\mathbb{M}^s(b)$.

TEOREMA 2.57. *Si $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ es el ideal principal de mayorización fuerte asociado con b, entonces el número de caras de $\mathbb{M}^s(b)$ con dimensión $n-k$, $k \in [n-1]$, es $\left[\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k}\right] 2^{k-1}$.*

Demostración. Sean $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $b_1 > \cdots > b_n > 0$ y $\mathbb{M}^s(b)$ el permutaedro de mayorización fuerte asociado con b. De los resultados anteriores tenemos que, para $k \in [n-1]$, el número de caras de $\mathbb{M}^s(b)$ con dimensión $n-k$ lo obtenemos adicionando el número de caras de $\mathbb{M}(b)$ con dimensiónes $n-k$ y $n-k-1$, de las cuales, en virtud del teorema 2.39, hay $\binom{n-1}{k-1}2^{k-1}$ y $\binom{n-1}{k}2^k$, respectivamente. Por lo tanto, el número de caras de $\mathbb{M}^s(b)$ con dimensión $n-k$ es

$$\binom{n-1}{k-1}2^{k-1} + \binom{n-1}{k}2^k = \left[\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-1}{k}\right] 2^{k-1} = \left[\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k}\right] 2^{k-1},$$

donde usamos la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. En conclusión, el número de caras de $\mathbb{M}^s(b)$ con dimensión $n-k$ es $\left[\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k}\right] 2^{k-1}$, expresión que es válida para $k \in [n-1]$. □

2.2.3.3. COMENTARIOS FINALES

Esta sección, como habrá notado el lector o lectora, se inspiró fuertemente en los estudios realizados del permutaedro de mayorización fuerte. Es más, solamente tuvimos que adaptar las

técnicas usadas en las demostraciones de la sección correspondiente a $M^s(v)$, para establecer los resultados que presentamos en la presente sección. De manera que, nuestro resultado principal en esta sección, a saber, la igualdad $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, resultó de manera natural. Algo interesante que podemos encontrar en las demostraciones de las igualdades $M^s(v) = Pyr(M(v), \vec{0})$ y $\mathbb{M}^s(b) = Pyr(\mathbb{M}(b), \vec{0})$, es que ellas se apoyan en la caracterización de los vértices de un politopo como aquellos puntos que no admiten expresión como combinación convexa no trivial. Las otras pruebas del presente trabajo donde se caracterizan vértices usan alguno de los siguientes hechos: (i) que un vértice es el único punto de intersección de un número finito de hiperplanos de soporte, o (ii) que un vértice es la única solución de un problema de optimización lineal sobre el politopo. Asimismo, los teoremas donde caracterizamos $\mathscr{L}(M^s(v))$ y $\mathscr{L}(\mathbb{M}^s(b))$ están apoyados en la caracterización de una cara F como el conjunto solución de un problema de optimización lineal, mientras que, a lo largo de nuestro trabajo usamos que una cara F es la intersección de un número finito de caras maximales. A manera de conclusión, las secciones referidas a $M^s(v)$ y $\mathbb{M}^s(b)$, además de contribuir con conocimientos sobre estos objetos, fueron una oportunidad para explorar técnicas y herramientas de la teoría de politopos que no habían sido suficientemente exploradas en las demás secciones del capítulo.

APÉNDICE A

COMBINATORIA ENUMERATIVA

En este espacio realizamos un breve recorrido por ciertas temáticas elementales de la combinatoria enumerativa. Los temas abarcados son los principios básicos de conteo, algunos números de aparición frecuente en combinatoria, las particiones de conjuntos y los números de Stirling de segunda especie. La mayor parte del material lo tomamos de [BS19], el cual complementamos con conceptos, resultados y ejemplos relevantes para nuestro trabajo.

Cuando abordamos problemas de conteo es conveniente tener ciertos principios que orienten nuestra acción y que, además, contribuyan de manera significativa a la configuración de ciertos modos de pensar la situación de conteo, los cuales faciliten la solución del problema. Aunque los principios que presentamos a continuación son intuitivamente válidos y se usan frecuentemente en problemas de conteo, aun sin hacerlo de manera explícita, es necesaria su expresión precisa y la presentación de algunos ejemplos en donde ellos apliquen.

DEFINICIÓN A.1 (PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO; [BS19], P. 6). En problemas de conteo tenemos los siguientes principios:

(1) **Principio de la suma:** Si hay p formas de realizar la tarea A y q formas de realizar la tarea B, entonces hay $p+q$ formas de realizar A o B.

(2) **Principio del producto:** Si hay p formas de realizar la tarea A e, independiente a la manera escogida para realizar A, hay q formas de realizar la tarea B, entonces hay $p \times q$ formas de realizar la tarea A y, posteriormente, la tarea B.

El principio del producto también es llamado **principio fundamental del conteo**.

El primer ejemplo nos permite introducir, para cada $n \in \mathbb{N}$, el **factorial de** n, que es un primer número de frecuente aparición en combinatoria.

EJEMPLO A.1 ([BS19], EJEMPLO 1.). Sean $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ y a_n el número de maneras de ordenar los elementos de $[n]$ en una disposición lineal. Por ejemplo, los vectores $(1,2,\ldots,n-1,n)$ y $(n,n-1,\ldots,2,1)$ simbolizan dos maneras diferentes de ordenar los elementos de $[n]$ en una disposición lineal. En general, cualquier orden de $[n]$ se puede presentar mediante un vector

$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, donde $b_1, \ldots, b_n$ son elementos de $[n]$ distintos dos a dos. Así, podemos proceder de la siguiente manera para contar el número de tales vectores: el elemento b_1 tiene n formas distintas de ser escogido; independiente a la selección de b_1, el elemento b_2 tiene $n-1$ formas distintas de ser escogido; independiente a la selección de b_1 y b_2, el elemento b_3 tiene $n-2$ formas distintas de ser escogido; si continuamos de manera sucesiva, el elemento b_{n-1} tiene 2 formas distintas de ser escogido, independiente a la selección de $b_1, \ldots, b_{n-1}$, y; finalmente, el elemento b_n puede ser escogido de una única forma, pues para entonces ya se han escogido $b_1, \ldots, b_{n-1}$. De manera que, por el principio fundamental del conteo, hay $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ formas de ordenar los elementos de $[n]$ en disposición lineal. Al número $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ lo denominamos **factorial de** n, el cual denotamos $n!$, y todo ordenamiento lineal de los elementos de $[n]$ es una **permutación de** $[n]$. En consecuencia, lo anterior nos muestra que el número de permutaciones de $[n]$ es $n!$ En general, el número de permutaciones de un conjunto A con n elementos es $n!$.

Una notación de uso frecuente para las permutaciones de $[n]$ es la **notación de una linea**. Por ejemplo, las permutaciones de [3] en notación de una linea son: 123, 132, 213, 231, 312 y 321; mientras que, las permutaciones de [4] son: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321.

DEFINICIÓN A.2 ([BS19], P. 7). Sean S un conjunto con n elementos y $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(1) El **conjunto de partes de** S, el cual denotamos 2^S o $\mathscr{P}(S)$, es el conjunto de subconjuntos de S, es decir, $\mathscr{P}(S) := \{A \mid A \subseteq S\}$.

(2) El **conjunto partes de** S **con tamaño** k, el cual denotamos $\binom{S}{k}$, es el conjunto de subconjuntos de S con tamaño k, es decir, $\binom{S}{k} := \{A \mid A \subseteq S, |A| = k\}$.

De la definición anterior, tenemos la igualdad $\mathscr{P}(S) = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{S}{k}$. A manera de ejemplo, para el conjunto [3] tenemos que $\mathscr{P}([3]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, [3]\}$. Además, tenemos que $\binom{[3]}{0} = \{\emptyset\}$, $\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\binom{[3]}{2} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ y $\binom{[3]}{3} = \{[3]\}$. En la proposición siguiente abordamos el problema de calcular el número de elementos de los conjuntos $\mathscr{P}([n])$ y $\binom{[n]}{k}$, donde $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

PROPOSICIÓN A.1 ([BS19], PROPOSICIÓN 1.). *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, *entonces* $|\mathscr{P}([n])| = 2^n$ *y* $\left|\binom{[n]}{k}\right| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Consideremos, además, los conjuntos $\mathscr{P}([n])$ y $\binom{[n]}{k}$.

(1) **Parte 1:** definamos $\phi : \mathscr{P}([n]) \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{0,1\}, i \in [n]\}$ mediante

$$\phi(A) := (x_1(A), x_2(A), \ldots, x_n(A)),$$

donde $x_i(A) = 0$, si $i \notin A$, y $x_i(A) = 1$, si $i \in A$. Claramente la aplicación ϕ es una biyección y, por consiguiente, contar el número de subconjuntos de $[n]$ es equivalente a contar el número de $(0,1)$-vectores de $\mathbb{R}^n$. Si $(a_1, \ldots, a_n)$ es uno de tales $(0,1)$-vectores, entonces a_1 tiene dos formas distintas de ser seleccionado; a_2 tiene dos formas distintas de ser seleccionado, independiente de la selección hecha para a_1. En general, cada a_i tiene

dos posibilidades: $a_i = 0$ o $a_i = 1$, para cada $i \in [n]$. Por lo tanto, en virtud del principio fundamental del conteo, el número de subconjuntos de $[n]$ es 2^n. Es decir, tenemos la igualdad $|\mathscr{P}([n])| = 2^n$.

(2) **Parte 2:** Apoyándonos en la biyección existente entre $(0,1)$-vectores de $\mathbb{R}^n$ y los subconjuntos de n, nuestro problema consiste en calcular el número de $(0,1)$-vectores con exactamente k componentes iguales a 1. Dada la tarea de definir un $(0,1)$-vector con las condiciones descritas, tenemos lo siguiente: el número de formas de asignar la primera componente igual a 1 es n; el número de formas de asignar la segunda componente igual a 1, independiente a la primera asignación, es $n-1$; continuando de manera sucesiva, el número de formas de asignar la k-ésima componente igual a 1, independiente a la asignación de las primeras k asignaciones, es $n-(k-1) = n-k+1$. Como consecuencia del principio fundamental del conteo, el número de formas de definir un $(0,1)$-vector con k componentes iguales a 1 es $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$, número que es igual a $\frac{n!}{(n-k)!}$. De otra parte, esta misma tarea puede hacerse de otra forma: inicialmente, seleccionamos un subconjunto A de $[n]$ con tamaño k, lo cual puede hacerse de $\left|\binom{[n]}{k}\right| k!$ formas y, posteriormente, asignamos el orden en que ubicaremos las k componentes iguales a 1 en el $(0,1)$-vector, seleccionando una permutación de A, lo cual puede hacerse de $k!$ maneras. Por lo tanto, debido al principio del producto, la tarea puede ser realizada de $\left|\binom{[n]}{k}\right| k!$ formas. En consecuencia, se satisface la identidad $\left|\binom{[n]}{k}\right| k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, lo que culmina la prueba.

□

DEFINICIÓN A.3 ([BS19], P. 8). Sean $n, k \in \mathbb{N}$. El número $\binom{n}{k}$ es igual a $\left|\binom{[n]}{k}\right|$, para $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, e igual a 0, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,\ldots,n\}$. Este número lo leemos n **combinado** k, y es conocido como **coeficiente binomial** o **número combinatorio**.

Una consecuencia inmediata de la igualdad $\mathscr{P}([n]) = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, en vista de que esta unión es disyunta, es la identidad $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, la cual también podemos establecer de manera sencilla usando el principio de la suma. Asimismo, mediante este principio de conteo, se puede justificar la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, la cual dejamos como un bonito ejercicio para el lector o lectora. Las pruebas de identidades que están basadas, de una parte, en interpretar los elementos que aparecen en la identidad de manera combinatoria y, de otra, en el establecimiento de biyecciones con conjuntos más sencillos de trabajar desde el punto de vista combinatorio, son llamadas pruebas combinatorias. A continuación mostramos un ejemplo en el cual planteamos un problema combinatorio que tiene particular interés para nuestro trabajo.

EJEMPLO A.2. Una **cadena anidada de** $[n]$ es una cadena de subconjuntos de $[n]$ que tiene la forma $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$, para algún $k \in [n]$, o es la cadena $\emptyset \subsetneq [n]$. Así, las cadenas anidadas de $[3]$ son las que presentamos a continuación:

$$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3],$$
$$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3],$$
$$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3],$$
$$\emptyset \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3], \quad \emptyset \subsetneq [3].$$

El problema combinatorio consiste en encontrar el número de cadenas anidadas de $[n]$.

Ahora, vamos a presentar algunos elementos referidos a particiones de $[n]$. Veremos particiones no ordenadas de $[n]$, las cuales se relacionan con los números de Stirling de segunda especie, y particiones ordenadas de $[n]$, que guardan una estrecha relación con las cadenas anidadas de $[n]$.

DEFINICIÓN A.4 ([BS19], DEFINICIÓN 4.). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$. Una **k-partición no ordenada de** $[n]$ es una colección $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de k subconjuntos de $[n]$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = [n]$.

(ii) $A_j \cap A_j = \emptyset$, para todo $i, j \in [k]$ tales que $i \neq j$.

(iii) $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in [k]$.

Los subconjuntos A_i, $i \in [k]$, se denominan **partes** o **bloques** de la partición.

A manera de ejemplo, las particiones no ordenadas de [3] son: $\{\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. De manera que, el conjunto [3] tiene una única 1-partición no ordenada, tres 2-particiones no ordenadas y solo una 3-partición no ordenada.

DEFINICIÓN A.5 ([BS19], P.13). Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$. El número de k-particiones no ordenadas de $[n]$, denotado por $S(n,k)$, se denomina **número de Stirling de segunda especie**.

Así pues, para las particiones no ordenadas de [3], tenemos que $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 2$ y $S(3,3) = 1$. Los número de Stirling de segunda especie satisfacen una relación recursiva, la cual presentamos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN A.2 ([BS19], PROPOSICIÓN 4.). *Si $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$ entonces, se satisface la igualdad $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$, donde se tienen las condiciones iniciales $S(0,0) = 1$ y $S(n,0) = S(0,n) = 0$, para $n > 0$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$. Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una k-partición no ordenada de n, tenemos un par de circunstancias mutuamente excluyentes: en la primera, $A_i = \{n\}$, para algún $i \in [k]$ y, en la segunda, el bloque de $\{A_1, \ldots, A_k\}$ al que n pertenece tiene más de un elemento. Si se da la primera circunstancia, entonces los restantes bloques conforman una $(k-1)$-partición no ordenada de $[n-1]$; mientras que, en caso de darse la segunda circunstancia, entonces al remover el elemento n de su bloque conseguimos una k-partición no ordenada de $[n-1]$. De otra parte, al adjuntar el elemento n a un bloque de una k-partición no ordenada de $[n-1]$ se construye una k-partición no ordenadas de $[n]$ y, ya que hay k bloques, podemos afirmar que cada k-partición no ordenada de $[n-1]$ induce k diferentes k-particiones no ordenadas de $[n]$. Por lo tanto, aplicando el principio de la suma y teniendo presente la discusión anterior, concluimos que $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$. □

DEFINICIÓN A.6. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$. Una **k-partición ordenada de** $[n]$ es un vector de la forma $(A_1, \ldots, A_k)$, cuyas componentes son subconjuntos de $[n]$, tales que la colección $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una k-partición no ordenada de n.

De la definición anterior, tenemos que una k-partición no ordenada de $[n]$, dada por la colección $\{A_1,\ldots,A_k\}$, induce $n!$ distintas k-particiones no ordenada de $[n]$, las cuales corresponden a las permutaciones del conjunto $\{A_1,\ldots,A_k\}$. La anterior observación nos permite afirmar que el número de k-particiones ordenadas de $[n]$ es $k!S(n,k)$.

EJEMPLO A.3. Las particiones ordenadas de $[3]$ se pueden poner en correspondencia biyectiva con las cadenas anidadas de $[3]$, tal como ilustramos a continuación:

$$\begin{aligned}
&\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3] \mapsto (\{1\},\{2\},\{3\}), \quad \emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{1\},\{3\},\{2\}),\\
&\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3] \mapsto (\{2\},\{1\},\{3\}), \quad \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{2\},\{3\},\{1\}),\\
&\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{3\},\{1\},\{2\}), \quad \emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{3\},\{2\},\{1\}),\\
&\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq [3] \mapsto (\{1\},\{2,3\}), \quad \emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq [3] \mapsto (\{2\},\{1,3\}),\\
&\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{3\},\{1,2\}), \quad \emptyset \subsetneq \{1,2\} \subsetneq [3] \mapsto (\{1,2\},\{3\}),\\
&\emptyset \subsetneq \{1,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{1,3\},\{2\}), \quad \emptyset \subsetneq \{2,3\} \subsetneq [3] \mapsto (\{2,3\},\{1\}),\\
&\emptyset \subsetneq [3] \mapsto ([3]).
\end{aligned}$$

De modo que, el número de cadenas anidadas de $[3]$, es $\sum_{k=1}^{3} k!S(n,k)$.

La función Ψ, que aplica el conjunto de cadenas anidadas de $[n]$ en el conjunto de particiones ordenadas de $[n]$, definida mediante

$$\Psi(\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]) := (A_1, A_2 \setminus A_1, \ldots, A_k \setminus A_{k-1}, [n] \setminus A_k),$$

junto con $\Psi(\emptyset \subsetneq [n]) := ([n])$, es una biyección. En consecuencia, el número de cadenas anidadas de $[n]$ es $\sum_{k=1}^{n} k!S(n,k)$.

APÉNDICE B

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y RETÍCULOS

En este espacio realizamos un breve recorrido por ciertas temáticas elementales sobre conjuntos parcialmente ordenados y retículos. Algunos de los temas tratados son: conceptos básicos de posets, el álgebra de Boole sobre $[n]$, los posets de particiones ordenas y no ordenadas de $[n]$, funciones entre conjuntos parcialmente ordenados, posets graduados y conceptos iniciales sobre retículos. La mayor parte del material lo tomamos de [CG19] y [Aco16], el cual complementamos con conceptos, resultados y ejemplos relevantes para nuestro trabajo.

DEFINICIÓN B.1 ([CG19], DEFINICIÓN 1.1.). Un **conjunto parcialmente ordenado** es un par $(P,\leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden, es decir, una relación que satisface las siguientes propiedades:

(1) **Reflexiva:** para todo $x \in P$ se satisface que $x \leq x$.

(2) **Antisimetrica:** para cualesquiera $x, y \in P$ satisfaciendo $x \leq y$ y $y \leq x$, se tiene que $x = y$.

(3) **Transitiva:** para cualesquiera $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Un conjunto parcialmente ordenado también es denominado **poset**.

Un ejemplo clásico de conjunto parcialmente ordenado es $(\mathscr{C},\subseteq)$, donde $\mathscr{C}$ es una colección de conjuntos. Es claro que en $(\mathscr{C},\subseteq)$ existen conjuntos A y B tales que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, caso en el cual diremos que A y B son incomparables.

DEFINICIÓN B.2 ([CG19], P. 2). Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in P$.

(1) Cuando $x \not\leq y$ y $y \not\leq x$ decimos que x y y son elementos **incomparables** en $(P,\leq)$.

(2) Cuando $x \leq y$ pero $x \neq y$ escribimos $x < y$.

A manera de ejemplo, para $(\mathscr{P}([3]),\subseteq)$ tenemos que los elementos $\{1,2\}$ y $\{2,3\}$ son incomparables, asimismo $\{1\} \subset \{1,2\}$.

DEFINICIÓN B.3 ([Aco16], DEFINICIÓN 2.4.). Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y Q un subconjunto de P.

(i) Decimos que Q es un **intervalo** si para todo $x, y \in Q$ y para todo $z \in P$, si $x \leq z \leq y$ entonces $z \in Q$.

(ii) Decimos que Q es una **cadena** si para todo $x, y \in Q$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.

El subconjunto $Q = \{\emptyset, \{1,2\}, [3]\}$ de $\mathscr{P}([3])$ es una cadena en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{P}([3]), \subseteq)$. Sin embargo, Q no es un intervalo, ya que $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\}$ pero $\{1\} \notin Q$. De otra parte, si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in P$ son tales que $x \leq y$, entonces los siguientes conjuntos son intervalos:

$$[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}, \quad (x] := \{z \in P \mid z \leq x\}, \quad [x) := \{z \in P \mid x \leq z\}.$$

DEFINICIÓN B.4 ([ACO16], DEFINICIÓN 2.5.). Sean $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in P$. Diremos que y **cubre** a x si $x < y$ y $[x, y] = \{x, y\}$, lo cual denotaremos $x \lessdot y$.

Si P es un conjunto finito entonces la relación de orden está completamente determinada por la relación de cubrimiento. Esta observación nos permite representar conjuntos parcialmente ordenados finitos de la siguiente manera: asignamos un punto o pequeño círculo por cada elemento de P y unimos dos elementos por un segmento de recta solamente si uno de ellos cubre al otro, siempre situando el elemento cubierto en un nivel inferior que el elemento que cubre. La representación de $(P, \leq)$ que resulta se denomina **diagrama de Hasse** de $(P, \leq)$.

EJEMPLO B.1 ([CG19], EJEMPLO 1.2.). El conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{P}([n]), \subseteq)$ lo denominamos **álgebra de Boole sobre** $[n]$, el cual denotamos mediante $\mathbb{B}_n$. A continuación presentamos el diagrama de Hasse de $\mathbb{B}_3$.

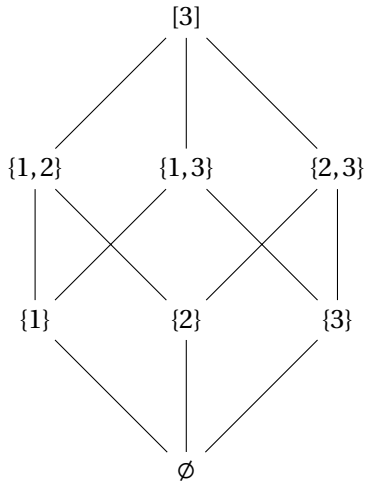


Figura B.1: Diagrama de Hasse de $\mathbb{B}_3$.

EJEMPLO B.2. Una **partición no ordenada de un conjunto** S es una colección $\{B_1, \ldots, B_k\}$ de subconjuntos disyuntos, llamados **bloques**, cuya unión es S. Sean $\tilde{\Pi}_n$ el **conjunto de particiones no ordenadas de** $[n]$ y $\pi, \tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}_n$. Decimos que π es un **refinamiento** de $\tilde{\pi}$, si para cada bloque $B \in \pi$ hay un bloque $\tilde{B} \in \tilde{\pi}$ tal que $B \subseteq \tilde{B}$. La relación de refinamiento es una relación de orden

sobre $\tilde{\Pi}_n$, la cual determina el **poset de particiones no ordenadas de** $[n]$, que denotaremos simplemente por $\tilde{\Pi}_n$. En la siguiente figura presentamos el diagrama de Hasse de $\tilde{\Pi}_3$.

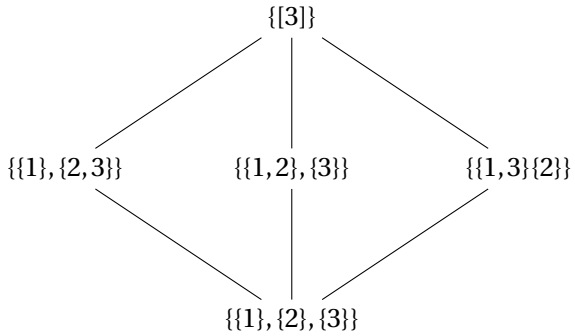


Figura B.2: Diagrama de Hasse de $\tilde{\Pi}_3$.

El conjunto parcialmente ordenado que presentamos en el siguiente ejemplo es de suma importancia en nuestro trabajo; en particular, mediante este poset, podemos describir de manera combinatoria la estructura facial del permutaedro.

EJEMPLO B.3. Una **partición ordenada de un conjunto** S es una vector $(B_1,\ldots,B_k)$, donde sus componentes son subconjuntos disyuntos, llamados **bloques**, cuya unión es S. Sean Π_n el **conjunto de particiones ordenadas de** $[n]$ y $\pi,\tilde{\pi}\in\Pi_n$, decimos que π **es cubierto por** $\tilde{\pi}$, si $\tilde{\pi}$ se obtiene uniendo dos bloques consecutivos de π. La relación de cubrimiento sobre Π_n determina el **poset de particiones ordenadas de** $[n]$, que denotaremos simplemente por Π_n. En la siguiente figura presentamos el diagrama de Hasse de Π_3.

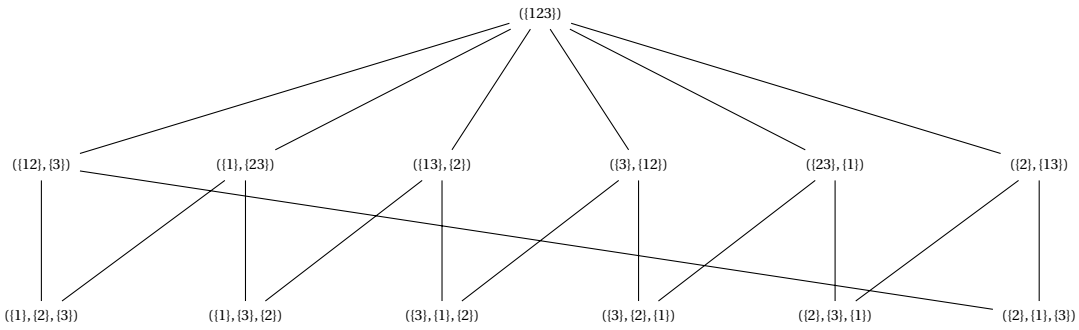


Figura B.3: Diagrama de Hasse de Π_3.

Ahora, vamos a definir funciones entre conjuntos parcialmente ordenados y, en particular, introducimos la noción de isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados.

DEFINICIÓN B.5 ([Aco16], DEFINICIONES 2.6. Y 2.7.). Sean $(P,\leq_P)$ y $(Q,\leq_Q)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f:P\to Q$ una función.

(i) Diremos que f es **isótona**, si para todo $x,y\in P$ se tiene que $x\leq_P y$ implica $f(x)\leq_Q f(y)$.

(ii) Diremos que f es un **isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados**, si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son isótonas.

Si $(P,\leq_P)$ y $(Q,\leq_Q)$ son isomorfos, escribiremos $(P,\leq_P)\cong(Q,\leq_Q)$ o, simplemente, $P\cong Q$.

Las funciones isótonas también son conocidas como **funciones monótonas**, **funciones que preservan orden** o **morfismo de posets**. Es sencillo ver que la composición de funciones isótonas es nuevamente una función isótona. Además, es inmediato que si $(P,\leq_P)$ y $(Q,\leq_Q)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f:P\to Q$ es una función biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f y f^{-1} son isótonas.

(ii) $x\leq_P y$ si, y sólo si, $f(x)\leq_Q f(y)$, para cualesquiera $x,y\in P$.

DEFINICIÓN B.6 ([CG19], DEFINICIÓN 1.15.). Sean $(P,\leq_P)$ y $Q,\leq_Q)$ conjuntos parcialmente ordenados.

(1) $(Q,\leq_Q)$ es un **subposet débil** de $(P,\leq_P)$, si $Q\subseteq P$ y para todo $x,y\in Q$ tenemos que $x\leq_Q y$ implica $x\leq_P y$. Si, además, $Q=P$ entonces P es un **refinamiento** de Q.

(2) $(Q,\leq_Q)$ es un **subposet** de $(P,\leq_P)$, si $Q\subseteq P$ y para todo $x,y\in Q$ tenemos que $x\leq_Q y$ si, y sólo si, $x\leq_P y$.

Si $(P,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $x,y\in P$ son tales que $x\leq y$, entonces el intervalo $([x,y],\leq)$ es un subposet de $(P,\leq)$.

DEFINICIÓN B.7 ([CG19], P. 6). Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathscr{C}$ una cadena finita de $(P,\leq)$.

(1) Si no existe $z\in P\setminus C$ tal que $\mathscr{C}\cup\{z\}$ es una cadena, entonces decimos que $\mathscr{C}$ es una **cadena máxima**.

(2) Si no existe $z\in P\setminus C$ tal que $x<z<y$, para algunos $x,y\in\mathscr{C}$, y $\mathscr{C}\cup\{z\}$ es una cadena, entonces decimos que $\mathscr{C}$ es una **cadena saturada**.

(3) La **longitud de** $\mathscr{C}$, la cual denotamos $l(\mathscr{C})$, se define mediante $l(\mathscr{C}):=|\mathscr{C}|-1$.

(3) La **longitud de** P, la cual denotamos $l(P)$, se define mediante $l(P):=\text{máx}\{|\mathscr{C}|\mid\mathscr{C}\subseteq P \text{ es una cadena}\}$.

(4) Si todas las cadenas máximas tienen la misma longitud n entonces diremos que $(P,\leq)$ es un **poset graduado de longitud** n.

Notemos que, acorde a la definición anterior, toda cadena máxima es una cadena saturada. En el siguiente ejemplo, ilustramos algunos de los conceptos que acabamos de presentar.

EJEMPLO B.4. Sea $(\mathbb{B}_3, \subseteq)$ el álgebra de Boole sobre [3]. La cadena $\mathscr{C} = \{\emptyset, \{1\}\}$ es una cadena saturada que no es máxima, pues tanto $\tilde{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ como $\hat{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$ son cadenas obtenidas de $\mathscr{C}$ agregando un elemento. De otra parte, las cadenas máximas de B_3 son las siguientes:

$$\mathscr{C}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, [3]\}, \quad \mathscr{C}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}, [3]\}, \quad \mathscr{C}_3 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, [3]\},$$
$$\mathscr{C}_4 = \{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, [3]\}, \quad \mathscr{C}_5 = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, [3]\}, \quad \mathscr{C}_6 = \{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, [3]\}.$$

En vista de que todas las cadenas anteriores tienen la misma longitud, igual a 3, podemos afirmar que $\mathbb{B}_3$ es un poset graduado de longitud 3

En general, tenemos que $\mathbb{B}_n$ es un poset graduado de longitud $[n]$, lo cual es consecuencia inmediata de notar que toda cadena máxima de $\mathbb{B}_n$ es de la forma

$$\{\emptyset, \{j_1\}, \{j_1, j_2\}, \ldots, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}\}, [n]\},$$

donde $j_k \in [n]$, para cada $k \in [n-1]$. Otros ejemplos de posets graduados son $\tilde{\Pi}_n$ y Π_n, cuya justificación la dejamos a cargo del lector o lectora.

DEFINICIÓN B.8 ([CG19], P. 6). Sean $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x \in P$.

(1) Si no existe $z \in P$ tal que $z < x$, decimos que x es un **elemento minimal de** P. El **conjunto de los elementos minimales de** P lo denotaremos $Min(P)$.

(2) Si no existe $z \in P$ tal que $x < z$, decimos que x es un **elemento maximal de** P. El **conjunto de los elementos maximales de** P lo denotaremos $Max(P)$.

PROPOSICIÓN B.1 ([CG19], PROPOSICIÓN 1.16.). *Si $(P, \leq)$ es un poset finito graduado, entonces existe una función bien definida $\rho : P \to \mathbb{N}$, llamada **función de grado**, tal que $\rho(x) = 0$ siempre que $x \in Min(P)$ y si $x \lessdot y$ entonces $\rho(y) = \rho(x) + 1$.*

DEFINICIÓN B.9 ([CG19], P. 6.). Sean $(P, \leq)$ es un poset graduado con función de grado ρ y $x \in P$.

(1) El **grado** de x es $\rho(x)$.

(2) La **función generadora de grados de** P es el polinomio

$$F(P, t) := \sum_{x \in P} t^{\rho(x)}.$$

EJEMPLO B.5 ([CG19], EJEMPLO 1.17.). A continuación mostramos las funciones generados de grados de algunos posets graduados.

(a) La función generadora de grados del álgebra de Boole sobre $[n]$ es $F(\mathbb{B}_n, t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (t+1)^n$.

(b) La función generadora de grados del poset de particiones no ordenadas de $[n]$ es $F(\tilde{\Pi}_n, t) = \sum_{k=0}^{n-1} S(n, n-k)$, donde $S(n, n-k)$ simboliza el número de particiones no ordenadas de $[n]$ con $n-k$ bloques.

(c) La función generadora de grados del poset de particiones ordenadas de $[n]$ es $F(\Pi_n, t) = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)!S(n,n-k)$, donde $(n-k)!S(n,n-k)$ corresponde al número de particiones no ordenadas de $[n]$ con $n-k$ bloques.

Los números $S(n,k)$, $k \in [n]$, los denominamos **número de Stirling se segunda especie**.

A continuación vamos a introducir elementos básicos de teoría de retículos, algunos de los cuales usamos a lo largo de nuestro trabajo.

DEFINICIÓN B.10 ([CG19], P. 7). Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $A \subseteq P$ y $u \in P$.

(1) Decimos que u es una **cota superior** de A, si $x \leq u$ para todo $x \in A$.

(2) Si u es cota superior de A y para cualquier otra cota superior z se cumple $u \leq z$, decimos que u es una **cota superior mínima**, **supremo** o **juntura** de A. La juntura de A la denotamos $\vee A$, además, en caso que $A = \{x, y\}$ escribiremos $x \vee y$.

(3) Decimos que u es una **cota inferior** de A, si $u \leq x$ para todo $x \in A$.

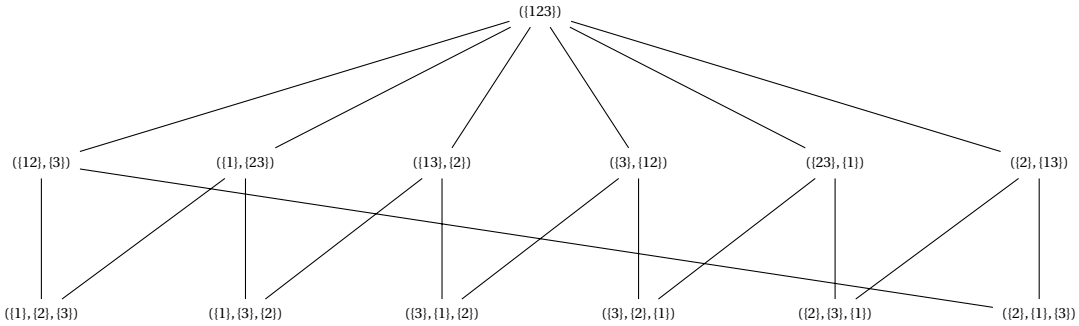
(4) Si u es cota inferior de A y para cualquier otra cota inferior z se cumple $z \leq u$, decimos que u es una **cota inferior máxima**, **ínfimo** o **concurrencia** de A. La concurrencia de A la denotamos $\wedge A$, además, en caso que $A = \{x, y\}$ escribiremos $x \wedge y$.

(5) Si $\vee P$ existe lo denotamos $\hat{1}$ y se denomina **elemento tope** de P.

(6) Si $\wedge P$ existe lo denotamos $\hat{0}$ y se denomina **elemento base** de P.

(7) Si $(P,\leq)$ tiene elemento base y elemento tope, diremos que P es un poset **acotado**.

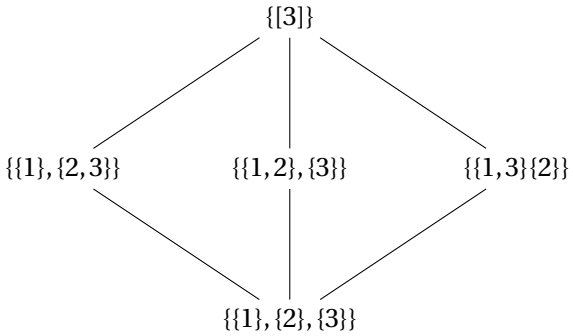
EJEMPLO B.6. Consideremos, nuevamente el diagrama de Hasse de Π_3, el cual ilustramos en la siguiente figura: En el diagrama observamos que la juntura de cualquier par de particiones



ordenadas con 2 bloques es la partición ordenada ({123}); es más, esta partición es el tope de Π_3. En consecuencia, para cualquier par de elementos de Π_3 existe una juntura. De otra parte, no es cierto que todo par de elementos de Π_3 tengan concurrencia; por ejemplo, tenemos que $(\{12\},\{3\}) \wedge (\{1\},\{23\}) = (\{1\},\{2\},\{3\})$; sin embargo, los elementos $(\{12\},\{3\})$ y $(\{1,3\},\{2\})$ no tienen concurrencia. Las particiones que se encuentran en la parte más baja del diagrama de Hasse corresponden a los elementos minimales de P; así, cualquier subconjunto de estos elementos carece de concurrencia. Además, el poset Π_3 no tiene elemento base.

DEFINICIÓN B.11 ([ACO16], DEFINICIÓN 3.1.). Un **retículo** L es un conjunto parcialmente ordenado no vacío en el cual todo par de elementos tiene una juntura y una concurrencia.

EJEMPLO B.7. El poset de particiones no ordenadas de $[3]$, que denotamos $\tilde{\Pi}_3$, es un retículo. Esto se aprecia en su diagrama de Hasse, el cual ilustramos en la siguiente figura: En general, el



poset $\tilde{\Pi}_n$ es un retículo. En efecto, si $\pi, \tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}_n$, entonces $\pi \wedge \tilde{\pi} = \{B \cap \tilde{B} \mid B \in \pi, \tilde{B} \in \tilde{\pi}\}$ y $\pi \vee \tilde{\pi}$ es la partición no ordenada más fina con la siguiente propiedad: si $B \in \pi$, $\tilde{B} \in \tilde{\pi}$ y $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$, entonces existe $X \in (\pi \vee \tilde{\pi})$ tal que $B \subseteq X$ y $\tilde{B} \subseteq X$.

Aunque Π_n, el poset de particiones ordenadas de $[n]$, no es un retículo, podemos adjuntar un elemento $\hat{0}$, tal que todo elemento minimal de Π_n cubra a $\hat{0}$. El poset resultante, el cual denotamos $\Pi_n \cup \{\hat{0}\}$, es un retículo que llamamos **retículo de particiones ordenadas de** $[n]$ **con** $\hat{0}$ o, simplemente, **retículo de particiones ordenadas de** $[n]$.

DEFINICIÓN B.12 ([ACO16], DEFINICIÓN 3.4.). Una función $\alpha : L \to M$ es un **homomorfismo**, si para todo par de elementos $x, y \in L$ se tiene $\alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$ y $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.

DEFINICIÓN B.13 ([ACO16], DEFINICIÓN 3.5.). Un homomorfismo $\alpha : L \to M$ es un **isomorfismo**, si existe un homomorfismo $\beta : M \to L$ tal que α y β son uno el inverso del otro.

Si $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ son dos retículos y $\alpha : L \to M$ es una biyección, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para todo par de elementos $x, y \in L$, se tiene $\alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$ y $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.

(ii) Para todo par de elementos $x, y \in L$, se satisface $x \leq_L y$ si, y sólo si, $\alpha(x) \leq_M \alpha(y)$.

A pesar de que la justificación de que (i) y (ii) son equivalentes es sencilla, una discusión sobre este hecho puede consultarse en [Gr1]. En nuestro trabajo, nosotros recurrimos a la condición (ii) cada vez que requerimos probar que una función entre retículos es un isomorfismo.

DEFINICIÓN B.14 ([ACO16], DEFINICIÓN 3.8.). Sea $(L, \leq)$ un retículo. Un subconjunto no vacío I de L se llama un **ideal** de L, si

(i) para todo $x, y \in I$ se tiene que $x \vee y \in I$,

(ii) para todo $x \in L$ y todo $y \in I$, si $x \leq y$ entonces $x \in I$.

EJEMPLO B.8. Si $(L, \leq)$ es un retículo y $y \in L$, entonces el conjunto $I(y) := \{x \in L \mid x \leq y\}$ es, claramente, un ideal de L, el cual es denominado **ideal principal de** L generado por el elemento y.

En la segunda parte del capítulo 2 del presente documento, nosotros estudiamos ideales principales de mayorización, los cuales son ciertamente ideales en el sentido de la definición anterior. Sin embargo, nuestro estudio de los ideales de mayorización se hace desde el punto de vista de la teoría de politopos. No obstante, es importante reconocer que su nominación proviene de la teoría de retículos y, en consecuencia, que un estudio desde esta perspectiva resulta natural.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Basados en la experiencia que hemos tenido al estudiar los politopos de mayorización, específicamente, la descripción combinatoria de los retículos de caras de estos objetos y la exploración de la propiedad de aditividad, planteamos las siguientes conclusiones:

1. Abordar la descripción del retículo de caras de los permutaedros e ideales principales de mayorización y mayorización débil, enfatizando la propiedad de ser simples que estos politopos tienen, ofrece una buena aproximación al problema al reducirlo a la caracterización combinatoria de las intersecciones no vacías de un número finito de caras maximales.

2. El hecho de que el permutaedro de mayorización fuerte $M^w(v)$ sea una pirámide del permutaedro de mayorización $M(v)$ permite concluir que $M^w(v)$ no es más interesante, desde el punto de vista combinatorio, que $M(v)$. Sin embargo, en el proceso de justificación de la identidad $M^w(v) = Pyr(M(V), \vec{0})$ se amplió la comprensión del concepto de mayorización fuerte aportando perspectivas matricial y geométrica del mismo.

3. Que los ideales principales de mayorización y mayorización débil resultarán combinatoriamente equivalentes a cubos, y que a su vez, el ideal principal de mayorización fuerte sea una pirámide del ideal principal de mayorización, muestra que estos politopos no son más ricos, desde el punto de vista combinatorio, que los cubos. Aun así, es notable la conexión de los ideales de mayorización con los cubos.

4. La estrategia de investigar la propiedad aditiva de los permutaedros e ideales de mayorización y mayorización débil mediante la propiedad $\mathcal{N}(f) + \mathcal{N}(g) = \mathcal{N}(fg)$, que tienen los politopos de Newton, resultó una alternativa efectiva distinta a las encontradas en la literatura. De esta manera, los politopos de Newton se muestran como una buena herramienta para el estudio de la propiedad aditiva.

Asimismo, nuestro trabajo tuvo algunas premisas y se enfatizaron ciertos objetos y aspectos que, indiscutiblemente, repercuten en el olvido o descuido de otros. Esto nos deja algunas cosas por explorar en el futuro que comentamos a continuación:

1. Para el estudio de los permutaedros de mayorización $M(v)$, $M^w(v)$ y $M^s(v)$ y, asimismo, para el estudio de los ideales de mayorización $\mathbb{M}(b)$, $\mathbb{M}^w(b)$ y $\mathbb{M}^s(b)$ nosotros asumimos que $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ satisfacen $v_1 > \cdots > v_n > 0$ y $b_1 > \cdots > b_n > 0$, respectivamente. Sin embargo, podríamos admitir repeticiones en las componentes de v y b, o permitir componentes negativas. De manera que, una posible exploración es el estudio de la estructura facial de los permutaedros e ideales en estas circunstancias menos restrictivas. En [BS96] se realizó un estudio combinatorio de unos politopos denominados *multipermutaedros*, que son aquellos que se obtienen como la envolvente convexa de las permutaciones de un vector v con componentes repetidas. Por lo tanto, [BS96] podría ofrecer herramientas para emprender esta empresa.

2. Nosotros estudiamos la propiedad de aditividad para permutaedros e ideales de mayorización y mayorización débil; no obstante, la propiedad de aditividad entera no la trabajamos. En [Dah10] muestran la aditividad entera de $M(v)$, es decir, la igualdad

$$M(v + \hat{v}) \cap \mathbb{Z}^n = (M(v) \cap \mathbb{Z}^n) + (M(\hat{v}) \cap \mathbb{Z}^n),$$

   cuando v y $\hat{v}$ son vectores enteros y monótonos, para lo cual ofrecen una aproximación basada en funciones submodulares y polimatroides y otra en mayorización entera. Un posible trabajo futuro es explorar esta propiedad para el ideal de mayorización débil, ya sea usando las técnicas de [Dah10] u otras herramientas como los politopos de Newton que hemos usado en nuestro trabajo.

3. Otros posibles problemas para ser investigados en el futuro son aquellos relacionados con el número de puntos enteros de los permutaedros e ideales de mayorización. Al respecto, en [DF13] se estudió el número de puntos enteros del permutaedro de mayorización y también se presentó un algoritmo para calcular este número recursivamente.

4. Finalmente, en [DM98] definieron el concepto de k-mayorización de la manera siguiente: si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $k \in [n]$, entonces x está k-mayorizado débilmente, lo cual se simboliza $x \prec_k y$, si $\sum_{i=1}^{r} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{r} y_{[i]}$, para cada $r \in [k]$. En particular, si $k = n$ obtenemos el concepto de mayorización débil. En [DM98] definieron y estudiaron el $\mathscr{H}$-poliedro $P(y,k) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \prec_k y\}$; en particular, describieron sus vértices y exploraron conexiones con optimización. Aunque $P(y,k)$, al ser no acotado, no es un politopo, podemos definir $P(y,k)_+ := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x \prec_k y\}$, obteniendo así una colección de politopos de mayorización que puede ser un interesante objeto de estudios futuros.

BIBLIOGRAFÍA

[Aco16] Lorenzo M. Acosta. *Temas de teoría de retículos*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2016. 118, 119, 120, 124

[AU82] Peter M. Alberti and Armin Uhlmann. *Stochasticy and Partial Order*. D. Reidel Publishing Company, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982. 10

[Bap91] R.B. Bapat. Majorization and singular values. iii. *Linear Algebra Appl.*, 145:59–70, 1991. 9

[Bar02] Alexander Barvinok. *A course in convexity*. Graduade Studies in Mathematics 54, American Mathematical Society, 2002. 0, 1, IX, 25, 31, 42

[BD12] R.A. Brualdi and G. Dahl. Majorization classes of integral matrices. *Linear Algebra Appl.*, 436:802–813, 2012. 0, 1

[BKL85] A. Björner, B. Korte, and L. Lovász. Homotopy properties of greedoids. *Adv. in Appl. Math.*, 6:447–494, 1985. 0, 1, IX, 25, 42

[Bru06] R.A. Brualdi. *Combinatorial matrix classes*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 108, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. 20, 21, 22, 24

[BS96] Louis J. Billera and A. Sarangarajan. The combinatorics of permutation polytopes. *Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 24:1–23, 1996. 0, 1, VIII, IX, 25, 42, 127

[BS19] C. Benedetti and N. Saavedra. Introducción a la combinatoria enumerativa. *Lect. Mat.*, 40 (2):117–147, 2019. 113, 114, 115, 116

[CG19] Jhon B. Caicedo and Rafael S. González. Conjuntos parcialmente ordenados y retículos. *Lect. Mat.*, 40 (2):149–175, 2019. 118, 119, 121, 122, 123

[Dah01] G. Dahl. Principal majorization ideals and optimization. *Linear Algebra Appl.*, 331:113–130, 2001. 0, XI, XII, 27, 28, 74, 78, 79, 80, 82, 87, 91, 104

[Dah10] G. Dahl. Majorization permutahedra and (0,1)-matrices. *Linear Algebra Appl.*, 432:3265–3271, 2010. 0, X, 25, 26, 27, 31, 41, 43, 127

[DF13] G. Dahl and Z. Fuzhen. Integral majorization polytopes. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, 5, 2013. 127

[DM98] G. Dahl and F. Margot. Weak k-majorization and polyhedra. *Math. Program.*, 81:37–53, 1998. 127

[EKK84] V.A. Emelichev, M.M. Kovalev, and M.K. Krasvtsov. *Polytopes, Graphs and Optimization*. Cambridge University Press, New York, 1984. VIII, 25

[Gr1] G.A. Grätzer. *Lattice theory*. W.H. Freeman and Company, 1971. 124

[HLP34] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934. 0, X, 2

[Lee13] Carl W. Lee. Polytopes course notes. *Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington, Kentucky*, pages 1–35, 2013. 14, 15

[Mir59] L. Mirsky. On a convex set of matrices. *Arch. Math.*, 10:88–92, 1959. 0, 6, 43, 64

[MOA11] Albert W. Marshall, Ingram Olkin, and Barry C. Arnold. *Inequalities: Theory of majorization and its applications*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 2011. X, 2, 3, 5, 6, 7, 26, 73

[Now16] Andrzej Nowicki. Convex polytopes and newton polytopes. *Nicolas Copernicus University, Faculty of Mathematics and Computer Science, 87-100 Toruń, Poland.*, pages 1–10, 2016. 12

[Rov16] I. Roventa. Hardy-littlewood-polya's inequality and a new concept of weak majorization. *Mediterr. J. Math.*, 13:573–583, 2016. 0, X, XI, XII, 2, 7, 8, 26, 65, 73

[Sch11] Pieter Hendrik Schoute. *Analytic treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes*. Verhandeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Johannes Muller, Anmsterdam, 1911. VIII

[Sch86] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1986. 17

[Tho06] Rekha R. Thomas. *Lectures in Geometric Combinatorics*. Student Mathematical Library, Park City Mathematical Subseries Vol. 33, American Mathematical Society, 2006. 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20

[Zie95] Gunter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York, 1995. 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 31