Calibración de tasas de un modelo de Markov para libro de órdenes dinámico

Andrés Santiago Gil Puerta

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2020

Rate calibration of a Markov model for dynamic order book

Andrés Santiago Gil Puerta

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2020

Calibración de tasas de un modelo de Markov para libro de órdenes dinámico

Andrés Santiago Gil Puerta

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Estadística

Director(a):
Ph.D en Matemáticas César Augusto Gómez Vélez

Línea de Investigación:
Procesos Estocásticos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2020

Dedicatoria

Dedicado a Alba, Juan Pablo, Juan Pablo, José Manuel, Inés, Clara, Genoveva, Susana y Luis; tengo la plena certeza que son las personas que más confían y esperan de mí. Y a mi tutor César por su paciencia y gran apoyo en este proceso.

"¿Cuál es el parásito más resistente? ¿Una bacteria? ¿Un virus? ¿Una tenia intestinal?
Lo que intenta decir el Sr. Cobb es... - Una idea - Resistente. Altamente contagiosa. Una vez que una idea se ha apoderado del cerebro es casi imposible erradicarla. Una idea completamente formada y entendida, que se aferra.".
El origen

Resumen

El libro de órdenes es una herramienta ampliamente usada para las negociaciones en los mercados de valores internacionales, donde compradores y vendedores mediante órdenes pueden comerciar con gran facilidad activos financieros en cualquier nivel de precios y a un volumen determinado. De acuerdo a lo anterior, se hace necesario comprender la dinámica y el funcionamiento del mismo, desde un punto de vista tanto de mercado como técnico que facilitará las decisiones y estrategias de inversión para los participantes. Se estudiará un proceso estocástico que permite el análisis de las tasas de llegada de las órdenes límite, órdenes de mercado y cancelación con datos reales de una jornada de negociación y se simulará el libro de órdenes para estimar trayectorias del precio.

Palabras clave: Libro de órdenes, órdenes, volumen, tasas, procesos.

Abstract

The order book is a widely used tool for trading in international stock markets, where buyers and sellers through orders can easily trade financial assets at any price level and at a given volume. According to the above, it is necessary to understand its dynamics and operation, from both a market and technical point of view that will facilitate investment decisions and strategies for participants. A stochastic process that allows the analysis of the arrival rates of limit orders, market orders and cancellation with real data of a trading day will be studied and finally the order book will be simulated to estimate price trajectories.

Keywords: Limit order book, orders, volume, rates, processes

Índice general

Resumen vii

Resumen viii

Lista de figuras xi

Lista de tablas 1

1. Introducción 2

2. Marco teórico 6

2.1. Dinámica de mercado . . . 6
2.2. Forma promedio del libro . . . 8
2.3. Distribuciones implementadas . . . 9
2.3.1. Distribución exponencial . . . 10
2.3.2. Distribución Poisson . . . 10
2.4. Procesos estocásticos . . . 10
2.4.1. Procesos de Markov . . . 11
2.4.2. Procesos estacionarios . . . 12
2.4.3. Procesos de Poisson . . . 15
2.4.4. Procesos de conteo . . . 15
2.4.5. Ocurrencias y tiempo entre ocurrencias . . . 17
2.4.6. Probabilidades infinitesimales . . . 20
2.4.7. Distribución Uniforme y tiempos de ocurrencia . . . 21
2.4.8. Procesos Poisson no homogéneos . . . 22
2.4.9. Estadísticas del proceso de Poisson . . . 23
2.4.10. Procesos de nacimiento y muerte . . . 25
2.5. Transformada de Laplace y tiempos de primer arribo en procesos nacimiento y muerte . . . 26
2.5.1. Dirección del cambio en el movimiento de precios . . . 28
2.6. Estado del arte . . . 30

3. Formulación del problema **32**
3.1. Descripción cualitativa 33
3.2. Descripción de un modelo estocástico para el libro de órdenes 33
3.2.1. Dinámica del libro de órdenes 34
3.3. Calibración de parámetros 36
3.4. Simulación del libro de órdenes 38

4. Resultados numéricos **40**
4.1. Descripción de los datos 40
4.2. Estimación de parámetros 40
4.3. Aplicación del modelo de simulación 41
4.4. Aproximación a la forma promedio 43
4.5. Ajuste del modelo 48

5. Conclusiones y recomendaciones **56**

A. Anexo: Nota explicatoria de la proposición 1 del artículo [Cont et al., 2010] **59**
A.1. El proceso de nacimiento - muerte 59
A.2. Criterio de ergodicidad 60
A.3. La proposición 1 en [Cont et al., 2010] 62
A.4. Funciones armónicas 64

Bibliografía **66**

Lista de Figuras

2-1. Libro de órdenes en un instante de tiempo. 7
2-2. Ejemplos de procesos estacionarios 14
2-3. Proceso de conteo 16
2-4. Tiempos de llegada $S_1, S_2, ...$ y tiempos entre llegadas $X_1, X_2, ...$ 18
2-5. Equivalencia de procesos de conteo y procesos de nacimiento y muerte. . . . 26

4-1. Precio medio observado. 42
4-2. Simulación precio medio. 43
4-3. Volumen promedio a una distancia de 1 tick. 44
4-4. Volumen promedio a una distancia de 2 tick's. 44
4-5. Volumen promedio a una distancia de 3 tick's. 45
4-6. Volumen promedio a una distancia de 4 tick's. 45
4-7. Volumen promedio a una distancia de 5 tick's. 45
4-8. Superposición de los volúmenes promedio. 46
4-9. Variograma serie promedio de órdenes. 46
4-10.Volumen promedio vs Gamma ajustada 48
4-11.Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 1 tick de distancia para las órdenes límite 51
4-12.Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 2 tick's de distancia para las órdenes límite 52
4-13.Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 3 tick's de distancia para las órdenes límite 53
4-14.Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 4 tick's de distancia para las órdenes límite 54
4-15.Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 5 tick's de distancia para las órdenes límite 55

Lista de Tablas

2-1. Libro de Órdenes en un instante de tiempo 7

4-1. Promedios *Sl*, *Sm* y *Sc* 40
4-2. *Valores para* $\hat{\lambda}$, $\hat{\theta}$ *y* $\hat{\mu}$ 41
4-3. *Valores para* $\hat{\lambda}$ 42
4-4. Coeficiente de variación y pruebas de bondad de ajuste 50

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad las alternativas de inversión y manejo de capital tienen una gran variedad de opciones que están disponibles a diferentes públicos mediante algunos instrumentos determinados, o un conjunto de ellos llamados fondos de inversión, facilitando cada vez más el acceso de personas e instituciones. La importancia de muchos de estos fondos es que a su vez que son inversores y brindan a los pequeños y medianos ahorradores la posibilidad de potenciar en conjunto su capital, son participantes de mercado con una actividad altamente dinámica y ágil en las bolsas valores y pueden actuar como formadores de precio dado los grandes volúmenes de capital inyectados al mercado [Connor and Woo, 2004].

Un fondo de inversión es un suministro de capital que pertenece a numerosos inversores, el cual es administrado por un agente intermediario de cara al mercado de valores, que por lo general viene representado por empresas que tienen el suficiente músculo financiero para realizar este tipo de operaciones.

Este capital es usado para negociar (compra y venta) valores colectivamente entre todos los participantes del mercado, inyectar liquidez y realizar operaciones estructuradas que permitan hacer cobertura de riesgos, aprovechar la diferencia en cambio (arbitraje), especular entre otras, donde cada inversor conserva la propiedad y el control de sus propios activos. El fondo es autónomo de la inversión de su capital entre los diferentes activos del mercado; los inversores individuales no toman esta decisión ya que solo eligen el fondo en función de sus preferencias. Por lo tanto, un administrador de fondos supervisa el capital de cara a los riesgos económicos que pueda enfrentar y decide qué valores debe tener, en qué cantidades y cuándo deben comprarse y venderse.

En particular, un fondo de cobertura (hedge fund) es un fondo que amplía su portafolio con activos para posibles ventas en corto, las cuales consisten en ventas de activos que no se poseen directamente y funcionan a modo de préstamo, de las que se espera suban de precio para disminuir el potencial de pérdida. Los fondos de cobertura también tienden a invertir en

activos de mayor riesgo como los derivados financieros, commodities, criptomonedas, entre otros, que también se pueden comprar con apalancamiento.

Muchas de las transacciones financieras realizadas ya sea por fondos de inversión o particulares, toman lugar en mercados electrónicos. Estas transacciones están basadas en la decisión de los comerciantes de comprar o vender acorde a sus expectativas de riesgo/beneficio y se suelen asignar a la oferta o demanda del mercado, que luego se equilibran para determinar el cambio de precio resultante [Lux and Marchesi, 1999], [Meudt et al., 2016]. Todas las órdenes pasan y quedan registradas, mediante agentes intermediarios (comisionistas), en la bolsa o bolsas de valores donde se estén negociando los activos. Por otra parte, una bolsa de valores utiliza un libro de órdenes donde los participantes pueden enviar libremente órdenes de compra o venta en cualquier nivel de precios con un volumen determinado, y en el cual queda registrado todo el movimiento tanto del lado de la oferta como de la demanda para una jornada de negociación [Clinet, 2015].

Tradicionalmente, la mecánica de los mercados financieros ha estado orientada en un sistema impulsado por la cotización de los precios de cierre. Actualmente, los canales electrónicos de comunicación (plataformas de negociación), han permitido capturar el flujo de las órdenes generado por una porción significativa de agentes del mercado, dando lugar a un sistema de negociación alternativo guiado por órdenes de compra y venta [Cont et al., 2010]. En estos mercados financieros, los precios de los activos se mueven acorde a las cotizaciones de precios de compra/venta (bid/ask) que se estén tranzando en un determinado instante de tiempo [Gu et al., 2016]. De acuerdo a esto, los participantes de un mercado (traders, agentes) pueden someter dos tipos de órdenes; de compra y de venta, las cuales a su vez pueden ser de mercado o límite.

Una orden de mercado es la que se ejerce al mejor precio disponible dependiendo de la posición que se tenga respecto al activo; una orden *límite* es la que se ejecuta hasta que el precio llegue a un determinado valor también dependiendo de la posición. Estos sistemas electrónicos permiten agregar y observar todas las órdenes límite en un *libro de órdenes límite* que está disponible para todos los participantes [Gould et al., 2013], el cual los ayudará a ejecutar órdenes al mejor precio disponible [Cont et al., 2010].

A través del libro de órdenes, LOB (por sus siglas en inglés), los mercados financieros hoy en día ofrecen una fuente antes no imaginada de información detallada del comportamiento colectivo de los agentes que interactúan. Es posible encontrar muchos patrones de carácter sistémico los cuales pueden ser reproducibles. Estas características, entre otras, justifican el interés para investigar la estadística del LOB [Bouchaud et al., 2008].

A través de la hiperconectividad se tiene la facilidad para acceder a la información a so-

lo instantes de haber sucedido el fenómeno, situación o noticia de interés sin importar la ubicación geográfica. Las múltiples fuentes de información como páginas web, redes sociales, aplicaciones, televisión entre otros, vinculadas a una conexión instantánea hacen que las decisiones que se tomen día a día estén afectadas por hechos, situaciones y sensaciones tanto individuales como de carácter colectivo. En el caso de los mercados financieros, los grandes volúmenes transados, como se menciona en el párrafo anterior, son el reflejo de las decisiones individuales basadas en información disponible al público y de un sentir colectivo que terminan sintetizados en un precio. Esto puede traer de manera intrínseca posibles riesgos sistémicos de carácter extraordinarios e impredecibles, por medio de los cuales se pueden ver afectados dichos mercados. Estos riesgos pueden derivarse de catástrofes naturales, económicos, de salud pública o sociales y pueden afectar la gestión y las decisiones de los participantes tales como fondos de inversión ya que pueden ser permeadas por sentimientos que se perciben dado el impacto de estos acontecimientos, repercutiendo en el valor de sus portafolios y en el valor bursátil de las empresas.

En el modelo de [Cont et al., 2010] se propone modelar, por ejemplo, las tasas de intensidad λ para las órdenes límite mediante es estimador

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{k}{i^{\alpha}}$$

que solo depende de i que es la profundidad respecto a la mejor cotización opuesta tanto para el bid como para el ask y se asume constante a través del tiempo para todos los niveles (en el presente trabajo $1 \leq i \leq 5$), omitiendo variables de interés, como cambios en indicadores económicos, situación local e internacional, cambios en las divisas entre otras, que afectan directamente el valor de los activos financieros.

Es por lo anterior que este trabajo, entre otros puntos, pretende entender a profundidad si asumir dicho supuesto es correcto para comprender las dinámicas del libro de órdenes y sus fluctuaciones. De no ser correcto el supuesto mediante las observaciones disponibles se pensaría para futuros trabajos, estimar una tasa $\lambda(i, T, X_1, ..., X_n)$, la cual fluctué con el tiempo, es decir, el fenómeno se modelaría con un proceso de poisson no homogéneo, donde $X_1, ..., X_n$ son señales o índices construidos sobre las variables y el sentir colectivo que se están omitiendo en la propuesta de [Cont et al., 2010], lo que llevaría a la construcción de un sistema de aprendizaje autónomo basado no solo en el análisis de la cadencia de las órdenes sino, el tiempo, análisis de sentimientos y flujo de información capturados através de las señales.

El objeto de investigación de este trabajo consiste en la implementación de un método de estimación de las tasas de un modelo de Markov para el libro de órdenes propuesto por [Cont et al., 2010] en primer instancia, donde las tasas corresponde a procesos de Poisson

independientes, posteriormente se pretende también simular dicho libro de órdenes.

El principal aporte de este trabajo consiste en ajustar las tasas de acuerdo a la "*profundidad*"del mercado teniendo en cuenta la llegada de órdenes límite, ejecución de órdenes de mercado, cancelación de órdenes y determinar si el proceso estocástico que las subyace es adecuado.

Este documento esta organizado como sigue. En el capítulo 2 se desribe todo lo inherente al marco teórico necesario para el desarrollo del problema. En el capítulo 3 se desrcibe el modelo estocástico propuesto por [Cont et al., 2010] para la estimación de las tasas de ocurrencia de la órdenes, al igual que una metodología para simular el libro de órdenes. En el capítulo 4 se muestran todos los resultados númericos asociados. Finalmente en el capítulo 5 se concluye a partir de los resultados y se dan recomendaciones en función de nuevas investigaciones asociadas al problema planteado.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Dinámica de mercado

Las bolsas de valores generalmente son mercados organizados para que todos los participantes que quieran negociar se reúnan en el mismo lugar, y puedan encontrar fácilmente los mejores precios. El estudio de su dinámica se centró tradicionalmente en cotizaciones o precio. Una ventaja de este tipo de mercado es su liquidez, ya que los creadores de mercado deben operar a sus precios cotizados. El principal inconveniente del mercado basado en precios es que no muestra transparencia en el mercado [Ladeira, 2010].

Para estudiar los precios de los activos financieros no solo basta con analizar un solo tipo de precio (apertura, cierre, máximo, mínimo o cualquier otro), dado que a través de una jornada de negociación hay una gran cantidad de información que suele perderse si solo se tiene en cuenta un solo precio; por ejemplo el de cierre.

En los últimos años, los mercados basados en precio han perdido importancia debido a los mercados basados en órdenes. En este último, el arreglo de todas las órdenes indicando su tamaño y precio se le denomina libro de órdenes límite y es accesible en tiempo real para todos los participantes del mercado [Ladeira, 2010].

Cuando se estudia el campo de las finanzas desde un punto de vista de mercado, las dinámicas de los cambios en el precio de los activos forman uno de los tópicos de mayor interés. Los participantes de mercado suelen tomar riesgos y con el suficiente conocimiento de este se pueden obtener grandes rendimientos, lo que lleva a que muchos investigadores estén concentrados alrededor de este tópico [Hendriks, 2014]. Durante las jornadas de negociación eventos como cancelación de órdenes, compra de un determinado volumen, entre otros, tienen lugar y son estos eventos los que forman en instantes de tiempo muy cortos la evolución y la profundidad del mercado. En un día promedio se pueden dar miles de cientos de eventos que constituyen el nivel 2 de los datos de mercado o del libro de órdenes, que es, como se

mencionó anteriormente, en donde reposa toda la información y registros asociados a las órdenes ya sean de mercado, límite o cancelación (estos conceptos se explican con detalle más adelante) para un determinado activo. También denominado como LOB (limit order book), permite la visualización directa, en un instante de tiempo, de todos los precios de oferta y demanda que hay disponibles para un activo financiero.

Acontinuación se da un ejemplo de la visualización del libro de órdenes en un instante de tiempo t medido en micro segundos para la acción AMZN (Amazon).

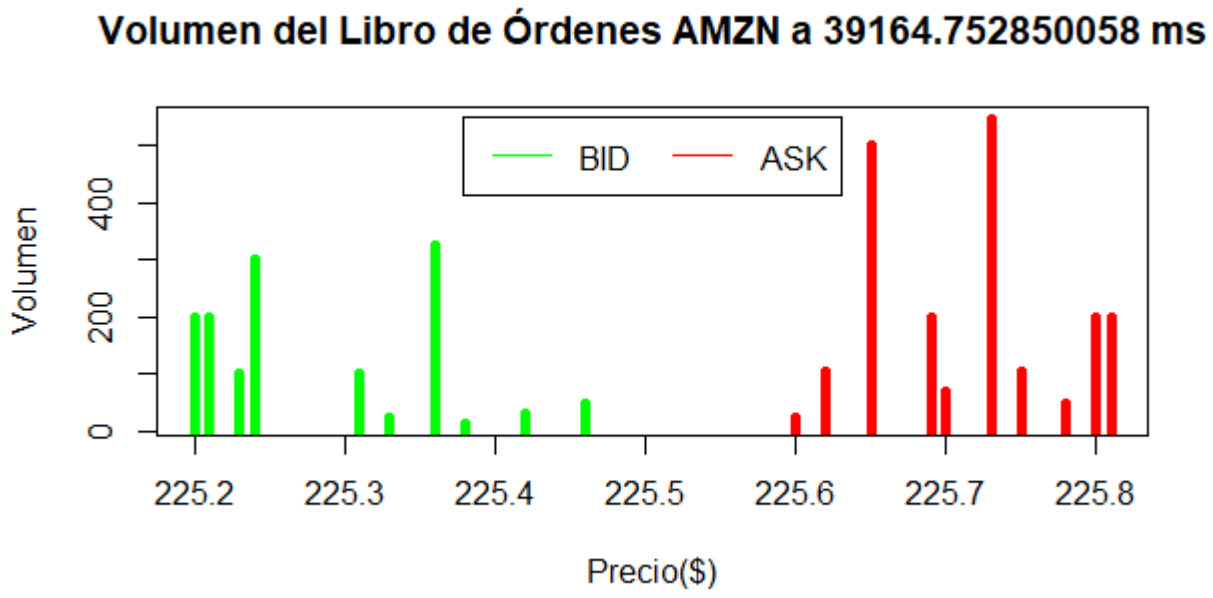


Figura 2-1: Libro de órdenes en un instante de tiempo.

Tabla 2-1: Libro de Órdenes en un instante de tiempo

Volumen BID	Precio BID	Precio ASK	Volumen ASK
50	225.46	225.60	23
31	225.42	225.62	105
15	225.38	225.65	500
325	225.36	225.69	200
25	225.33	225.70	70

Podemos ver claramente cuáles son los mejores precios de compra y venta en ese instante de tiempo, ya que están en la parte superior de sus respectivas columnas; se puede ver cual es el mejor precio de compra y venta. Las cantidades de las otras filas debajo de los precios BID/ASK ubicados en la primera es lo que se conoce como la profundidad del libro. Este

número varía entre diferentes activos, dependiendo, entre otros, de cuán volátil sea el precio del activo [Hendriks, 2014]. Otro aspecto a tener en cuenta es que los tamaños de las órdenes en la tabla **2-1** pueden ser totales combinados para todas las órdenes a ese nivel de precio, por lo que comprar 80 acciones al precio 225.60 podría significar dos cosas: primero, comprar 23 acciones de un agente que tiene en oferta sus activos a ese precio y comprar 57 acciones a otro negociante con el siguiente mejor precio disponible, es decir, 225.62. Segundo, dejar en espera la orden por 57 acciones hasta que el precio vuelva al nivel de 225.60. Diferentes intercambios también funcionan con diferentes tipos de prioridad. Como se describe en el ejemplo anterior, varias órdenes activas pueden tener el mismo precio en un momento dado. En este caso, el principio de prioridad debe establecerse para dictar qué órdenes se ejecutarán primero. La mayoría de las negociaciones utilizan una prioridad basada en el tiempo. Esto significa que las órdenes que se colocaron primero se ejecutarán antes que otras órdenes al mismo precio. Otro sistema es dar prioridad a los pedidos con el tamaño más grande [Hendriks, 2014][Gu et al., 2016].

Entender a fondo la amplitud de los precios y la dinámica del libro de órdenes trae consigo varias ventajas [Gould et al., 2013]: Obtener una visión más clara de cómo actuar mejor en determinadas situaciones de mercado [Harris and Hasbrouck, 1996]; estrategias óptimas de ejecución de órdenes [Obizhaeva and Wang, 2013]; minimización de impacto en las pérdidas que se puedan generar [Eisler et al., 2012]; diseñar mejores algoritmos de negociación [Engle et al., 2006]; y evaluar la estabilidad del mercado [Kirilenko et al., 2015].

Actualmente, varios modelos de datos a alta frecuencia se basan en un solo precio, perdiendo consigo información que puede ser importante en el momento de realizar un análisis. Al ignorar los datos contenidos en el libro de órdenes no se tienen en cuenta las tasas de llegada de las órdenes límite, tasas de llegada de órdenes de mercado y también de las órdenes de cancelación. Estudiar y calibrar estas tasas de acuerdo al modelo propuesto por [Cont et al., 2010] permitirá, entre otras cosas, por ejemplo, estudiar el efecto de mercado en los precios bid/ask y posteriormente investigar la dirección de los precios, entre otros eventos.

2.2. Forma promedio del libro

La descripción sigue textualmente a [Bouchaud et al., 2002]. $b(t)$ y $a(t)$ son los precios del bid y del ask en el instante t. Una orden al precio $b(t) - \Delta$ posee una diferencia de precio de Δ con el bid, respectivamente ask y constituyen algunas de las conclusiones de dicho trabajo. Tomando como $b(t) - \Delta$ el precio de una nueva orden límite de compra, y $a(t) + \Delta$ el precio de una nueva orden límite de venta, un primer tópico interesante es el análisis de la distribución de Δ, que corresponde a la distancia entre el precio actual y la orden límite entrante. Denotando por $P(\Delta)$ a la función de densidad de probabilidad de la cantidad Δ,

se tiene que esta es similar tanto para el lado de la demanda como de la oferta; dado lo anterior, la forma de $P(\Delta)$ está bien estimada mediante la función de potencia

$$P(\Delta) \propto \frac{\Delta_0^{\mu}}{(\Delta_1 + \Delta)^{1+\mu}}, \quad \Delta \geq 1 \tag{2-1}$$

La distribución de órdenes en la ecuación anterior tiene un máximo alrededor del precio actual. El hecho de que el parámetro μ pueda tomar valore menores a 1, quiere decir que el promedio de Δ puede ser muy grande. Es bastante sorprendente observar una distribución tan amplia de los precios de órdenes limitadas, que nos dice que la opinión de los participantes del mercado sobre el precio de las acciones en un futuro cercano podría ser cualquier cosa, desde su valor actual hasta un 50 % por encima o por debajo de este valor, Con todas las posibilidades intermedias. Esto significa que los participantes del mercado creen que siempre son posibles grandes saltos en el precio de las acciones, y someten órdenes muy lejos del precio actual para aprovechar estas grandes fluctuaciones potenciales. Un argumento ingenuo sugeriría que la probabilidad de someter una orden a distancia Δ debe ser proporcional a la probabilidad de que el precio se mueva más de Δ para cumplir con la orden. Adicional, el flujo de las órdenes tiene mayor actividad alrededor del precio actual, pero una orden muy cercana al precio actual tiene una mayor probabilidad de ejecutarse y, por lo tanto, desaparecer del libro. Por lo tanto, no está claro a priori cuál será la forma promedio del libro de órdenes. Sin embargo, por observación, el volumen de las órdenes pendientes de ejecución en el libro de órdenes es simétrico y tiene un máximo alejado del precio actual BID/ASK. Tomado textual de [Bouchaud et al., 2002].

En este trabajo [Bouchaud et al., 2002] también se sugiere que la distribución $R(V)$ del volumen a una distancia de i ticks ya sea en el lado del BID o ASK, puede ser ajustada con una distribución Gamma

$$R(V) \propto V^{\gamma-1} exp\left(-\frac{V}{V_0}\right) \tag{2-2}$$

Y por último, se recomienda de acuerdo a [Bouchaud et al., 2002] estudiar la correlación entre el volumen entrante ϕ y la distancia Δ entre la orden y el precio actual. El volumen promedio condicional $(\phi|\Delta)$ es apróximadamente independiente de Δ entre 1 y 20 ticks.

2.3. Distribuciones implementadas

A continuación se presentan las distribuciones implementadas para el proceso estocástico en línea con lo propuesto por [Cont et al., 2010], donde se relaciona los estimadores insesgados para las tasas de ocurrencia de las órdenes.

2.3.1. Distribución exponencial

Una variable aleatoria T tiene distribución exponencial [Ortega and Rivero, 2015, p. 16] con parámetro λ, $T \sim Exp(\lambda)$, si su función de distribución viene dada por:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & para \quad t \geq 0 \\ 0 & para \quad t < 0 \end{cases}$$

Equivalentemente, si T posee una función de densidad de probabilidad $f_T(t)$ dada por:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & para \quad t \geq 0 \\ 0 & para \quad t < 0 \end{cases}$$

con momentos de primer y segundo orden, respectivamente

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}; \quad \mathbb{E}[T^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

por lo tanto, la varianza de T es

$$Var(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.3.2. Distribución Poisson

Una variable aleatoria X tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, ...\}$, con distribución de probabilidad dada por:

$$P(X = k) = pk = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Donde

$$\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$$

2.4. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos son modelos matemáticos del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad del modelo se captura a través de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, es decir, un espacio muestral, o conjunto de posibles resultados, y una σ-álgebra del espacio muestral, o conjunto de eventos o sucesos relevantes [Martínez, 2008, p. 33]. Es este sentido, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$. El índice t representa el tiempo, y el conjunto $\mathcal{T}$ es el conjunto de indices del proceso. Los conjuntos de índices más comunes son $\mathcal{T}$ = 0,1,2,... que representan el tiempo discreto y $\mathcal{T} = [0, \infty]$ representando el tiempo continuo. Los procesos estocásticos de tiempo discreto

son secuencias de variables aleatorias. Los procesos de tiempo continuo son colecciones no numerables de variables aleatorias [Dobrow, 2016, p. 6]. El concepto de proceso estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes de riesgo e incertidumbre. Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc [Martínez, 2008, p. 33].

Las variables aleatorias de un proceso estocástico toman valores en un espacio de estados $\mathcal{S}$, ya sea discreto o continuo. Un proceso estocástico se especifica por su índice y espacio de estados, y por las relaciones de dependencia entre sus variables aleatorias [Dobrow, 2016, p. 6].

Formalmente se tiene: sea $T \subset \mathbb{R}$ y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico es una función

$$X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in T, X(t)$ es una variable aleatoria.

Si se fija $\omega \in \Omega$ a una función $X_t(\omega) : T \to \mathbb{R}$ se le conoce como una trayectoria del proceso.

2.4.1. Procesos de Markov

En esta sección, la exposición sigue textual a [Dobrow, 2016, p. 41]. Un proceso o cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, ...$ con la nombrada propiedad de Markov, la cual índica que la distribución del futuro X_{n+1} dado el presente X_n y el pasado X_{n-1}, X_{n-2},... solo depende del presente X_n.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto discreto. Un proceso estocástico $(X_t, t \in T)$ es una cadena de Markov si la secuencia $X_1, X_2, X_3, ...$ toma valores en $\mathcal{S}$ con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \end{aligned}$$

Para todo $x_0, ..., x_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$, y $n \geq 0$. El conjunto $\mathcal{S}$ es el espacio de estados de la cadena de Markov.

De manera descriptiva, se puede definir la cadena de Markov de la siguiente manera: si $X_n = i$, se dice que la cadena está o visito el estado i en el momento n. Una cadena de Markov es homogénea en el tiempo si las probabilidades $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ no dependen de n. Es decir,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

Para todo $n \geq 0$

Ya que en el curso de una cadena de Markov homogénea las probabilidades de transición $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ solo dependen de i y j, ellas pueden ser organizadas en una matriz $\boldsymbol{P}$, cuya entrada ijth es $P_{ij} = P(X_1 = j|X_0 = i)$. Esta es la matriz de transición, o matriz de Markov, que contiene las probabilidades de transición de pasar de un estado a otro. Si el espacio $\mathcal{S}$ de estados tiene k elementos, entonces la matriz de transición es una matriz cuadrada $k \times k$. Si el espacio de estados es infinitamente contable, la matriz de transición es infinita.

Las entradas de cada matriz de transición de Markov P son no negativas, y cada fila suma 1, como,

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} P_{ij} = \sum_{j\in\mathcal{S}} P(X_1 = j|X_0 = i) = \sum_{j\in\mathcal{S}} \frac{P(X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \frac{P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = 1,$$

para todas las i filas. Una matriz no negativa cuyas filas suman 1 es llamada un matriz estocástica.

Matriz Estocástica

Una matriz estocástica es una matriz cuadrada $\boldsymbol{P}$, que satisface:

1. $P_{ij} \geq 0$ para todo i, j.
2. Para cada fila i,

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

2.4.2. Procesos estacionarios

En esta sección, se sigue textual la presentación en [Giraldo, 2016, p. 55]. Los procesos estacionarios son procesos estocásticos que describen fenómenos que se encuentran en estado de equilibrio. En este sentido, el concepto de equilibrio del mercado ha cobrado gran relevancia en campos como la economía y las finanzas. La clase correspondiente de procesos estocásticos para modelar dichos fenómenos son los procesos estacionarios, ya que nos permiten expresar probabilísticamente una forma de estabilidad. Por ejemplo, las tasas de interés, las tasas de dividendos, las tasas de inflación, las volatilidades, las tasas de consumo, las tasas de riesgo y los diferenciales de crédito pueden ser modelados mediante procesos estacionarios. Formalmente se consideran las siguientes definiciones.

Definición 1

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ se dice que es estacionario en covarianza si cumple:

1. $E(X_t) = c, \quad t \in T$, es decir la media es constante.

2. Existe una función $R(t)$ donde, $\quad t \in \mathbb{R}$ y $R(-t) = R(t)$, con $R(0) > 0$ tal que

$$Cov(X_s, X_t) = R(t-s)$$

La condición anterior expresa que la autocovarianza entre X_s y X_t depende únicamente de la distancia $|t-s|$ y no de t y s individualmente.

De esto se obtiene que $Var(X_t) = R(0)$, es decir, la varianza es constante y la autocorrelación se puede expresar como una función de $|t-s|$

$$\rho_{t-s} = Corr(X_s, X_t) = \frac{R(t-s)}{R(0)}$$

Definición 2

Fluctuación cuadrática media. Dado un proceso estacionario en covarianza X_t, se define la función de fluctuación cuadrática media como:

$$\begin{aligned} V(h) &= \mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2) \\ &= \mathbb{E}(X_{t+h}^2) + \mathbb{E}(X_t^2) - 2\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) \\ &= 2(R(0) - R(h)) \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}(X_t)$ es constante entonces $\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t) \equiv 0$, y por tanto $Var(X_{t+h} - X_t) = \mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2) = V(h)$.

Algunas características de las funciones de autocorrelación y fluctuación cuadrática media están relacionadas con la forma de las trayectorias del proceso.

Considere un proceso $X = \{X_t, t \in T\}$ estacionario en covarianza con función de autocovarianza $R(h)$.

Suponiendo primero que $R(h)$ decrece lentamente a cero cuando $h \to \infty$, esto implicaría

$$R(h) \approx R(0)$$

para $h \approx 0$. Con lo cual $\rho_h = \frac{R(h)}{R(0)} \approx 1 \quad para \quad h \approx 0$. Las trayectorias muestrales están autocorrelacionadas y deben mostrar fluctuaciones lentas, o también con bajas oscilaciones.

Por tanto, $V(h) \approx 0$ cuando $h \approx 0$.

De otra forma, si $R(h)$ decrece rápidamente a cero entonces $R(h) \approx 0$ cuando $h \approx 0$. Luego $\rho_h = \frac{R(h)}{R(0)} \approx 0 \quad para \quad h \approx 0$. Al aumentar h la autocorrelación disminuye y es el proceso presenta oscilaciones rápidas, fluctúa rápidamente. De manera equivalente las variables X_t correspondientes en el tiempo relativamente pequeñas tendrán un correlación pequeña, por tanto, se tiene que $V(h) \approx 2R(0)$ cuando $h \approx 0$.

En la gráfica **2-2** se puede apreciar lo antes descrito.

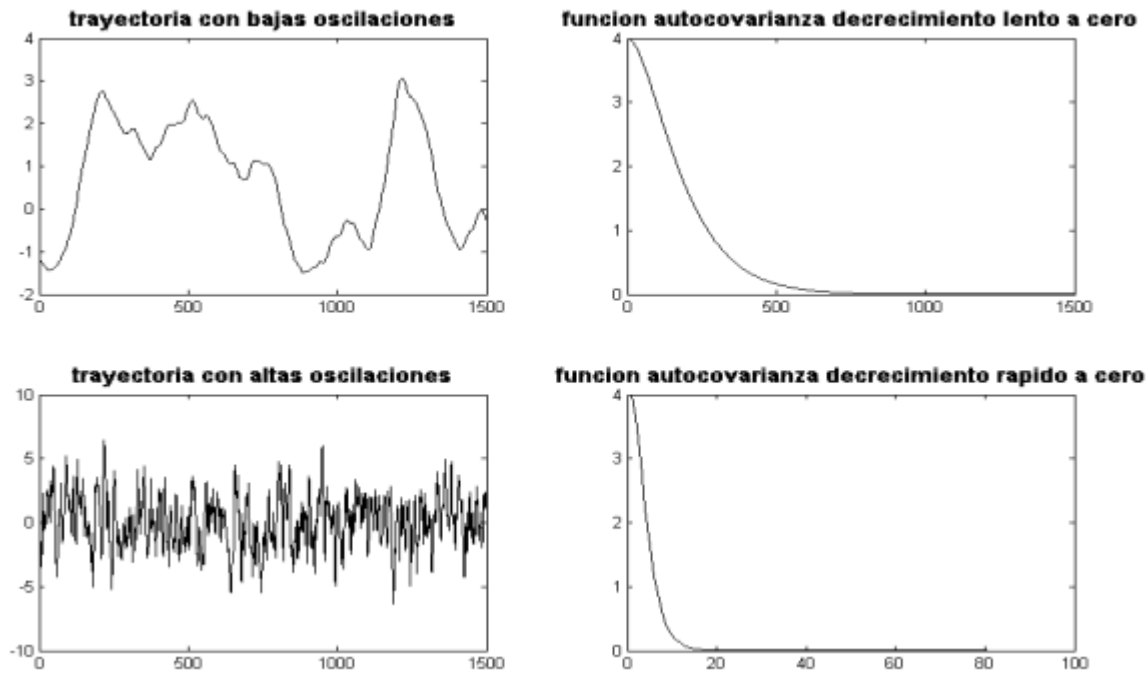


Figura 2-2: Ejemplos de procesos estacionarios
[Giraldo, 2016, p. 57]

Estimadores de autocorrelación

Definición 3

Función de autocorrelación muestral. Suponga que $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso estacionario en covarianza con función de autocovarianza $R(k), k = 0, 1, ...$ y una muestra de tamaño N. Se define un estimador de $R(k)$ como el estadístico:

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-k} (x_j - \overline{x})(x_{j+k} - \overline{x}) \quad para \quad k = 0, 1, \cdots, m$$

y un estimador de la función de autocorrelación consiste en el estadístico

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \overline{x})(x_{j+k} - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{N-k}(x_j - \overline{x})^2} \quad para \quad k = 0, 1, \cdots, m$$

El valor $1 < m < N$ es el número de rezagos que se utilizan en el estimador.

Definición 4

Variograma. Un estimador de la fluctuacióm media cuadrática es el variograma, definido como el estadístico

$$\hat{V}(k) = \frac{\hat{R}(0) - \hat{R}(k)}{\hat{R}(0) - \hat{R}(1)} = \frac{1 - \hat{\rho}(k)}{1 - \hat{\rho}(1)}, \quad para \quad k = 0, 1, \cdots, m$$

Suponga un proceso $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ estacionario en covarianza con función de autocovarianza $R(k), k = 0, 1, ...$, entonces se cumple que:

Si $R(k)$ converge a cero cuando $k \to \infty$ entonces $\hat{V}(k)$ converge a

$$V_k = \frac{R(0) - R(k)}{R(0) - R(1)} \to \frac{R(0)}{R(0) - R(1)}, \quad k \to \infty$$

En conclusión, la gráfica de $\hat{V}(k)$ en el caso de un proceso estacionario en covarianza, debe mostrar una tendencia hacía un valor constante.

2.4.3. Procesos de Poisson

Se siguen las definiciones expuestas en [Dobrow, 2016, p. 223]. El proceso de Poisson es un proceso estocástico utilizado para modelar la ocurrencia de eventos de un tipo determinado en el tiempo. Un proceso de Poisson es un tipo especial de proceso de conteo. Dada una secuencia de eventos que llegan en momentos aleatorios que comienzan en $t = 0$, por N_t se denota el número de eventos que ocurren hasta el tiempo t, es decir, el número de eventos en $[0, t]$. Para cada $t \geq 0$, N_t es una variable aleatoria. La colección de variables aleatorias $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico en tiempo continuo, denominado proceso de conteo. Como N_t cuenta los eventos en $[0, t]$, a medida que t aumenta, el número de eventos N_t aumenta.

2.4.4. Procesos de conteo

Un proceso de conteo $(N_t)_{t\geq 0}$ es una colección de variables aleatorias no negativas con valores enteros tales que si $0 \leq s \leq t$, entonces $N_s \leq N_t$.

La figura **2-3** muestra la realización o trayectoria de un proceso de conteo en el cual los eventos ocurren en los momentos t_1, t_2, t_3, t_4, t_5. Como se muestra, la realización de un proceso de conteo luce como una función de paso continuo a la derecha. Si $0 \leq s \leq t$, entonces $N_t - N_s$ es el número de eventos en el intervalo $(s, t]$.

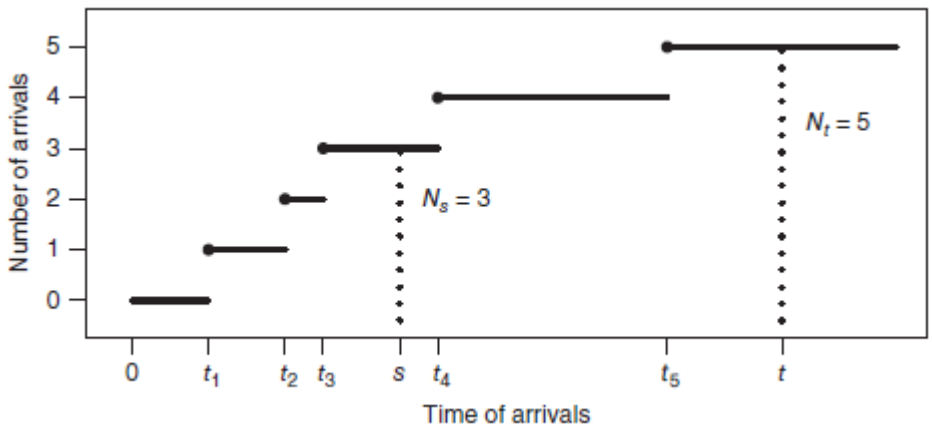


Figura 2-3: Proceso de conteo
[Dobrow, 2016, p. 224]

Hay varias formas de caracterizar un proceso de Poisson. Se puede caracterizar (i) según el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo fijos, (ii) los tiempos entre los eventos, o (iii) el comportamiento probabilístico de eventos individuales en intervalos infinitesimales. Esto lleva a tres definiciones equivalentes de un proceso de Poisson, cada una de las cuales proporciona información especial sobre el modelo estocástico.

Proceso de Poisson - Definición 1

Un proceso de Poisson con parámetro λ es un proceso de conteo $(N_t)_{t \geq 0}$ con las siguientes propiedades:

1. $N_0 = 0$
2. Para todo $t > 0$, N_t tiene una distribución Poisson con parámetro λt.
3. Incrementos estacionarios: Para todo $s, t > 0$, $N_{t+s} - N_s$ tiene la misma distribución que N_t. Esto es,

$$P(N_{t+s} - N_s = k) = P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad para \quad k = 0, 1, ...$$

4. Incrementos independientes: Para $0 \leq q < r \leq s < t$, $\quad N_t - N_s \quad y \quad N_r - N_q$ son variables aleatorias independientes.

La propiedad de incrementos estacionarios implica que la distribución del número de ocurrencias en un intervalo solo depende de la duración del intervalo. Y la propiedad de incrementos independientes se traduce en que el número de llegadas en intervalos disjuntos son variables aleatorias independientes.
Ya que N_t tiene una distribución de Poisson, con $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$. Esto es, se espera alrededor de λt ocurrencias en t unidades de tiempo. Entonces la tasa de ocurrencias es $\mathbb{E}(N_t)/t = \lambda$, es decir, el número medio de ocurrencias por unidad de tiempo es constante e igual a λ.

2.4.5. Ocurrencias y tiempo entre ocurrencias

Considere un proceso de Poisson con parámetro λ, si X denota el tiempo de primera ocurrencia, entonces, $X > t$ si y solo si no hay ocurrencias en $[0, t]$, por lo tanto, se tiene que,

$$P(X > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad para \quad t > 0$$

Así, X tiene una distribución exponencial con parámetro λ. La distribución exponencial juega un papel central en relación al proceso de Poisson. Lo que es cierto para el momento de la primera ocurrencia también es cierto para el tiempo entre la primera y la segunda ocurrencia, y en general para todos los tiempos entre ocurrencias consecutivas. Un proceso de Poisson es un proceso de conteo para el cual los tiempos entre ocurrencias son variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas [Dobrow, 2016, p. 227].

Proceso de Poisson - Definición 2

Sea $X_1, X_2...$ una secuencia i.i.d de variabales aleatorias exponenciales con parámetro λ. Para $t > 0$, sea:

$$N_t = \text{máx}\{n : X_1 + \cdots + X_n \leq t\},$$

Con $N_0 = 0$. Entonces $(N_t)_{t \geq 0}$ define un proceso Poisson con parámetro λ.
Sea,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad para \quad n = 1, 2, ...$$

$S_1, S_2, ...$ los tiempos de ocurrencia, donde S_k es el tiempo de la *k-ésima* ocurrencia. Más aún:

$$X_k = S_k - S_{k-1} \quad para \quad k = 1, 2, ...$$

Es el tiempo entre la $(k-1)$-*ésima* y la *k-ésima* ocurrencia, con $S_0 = 0$
A continuación se ilustra la relación entre los tiempos entre ocurrencias de un proceso de Poisson.

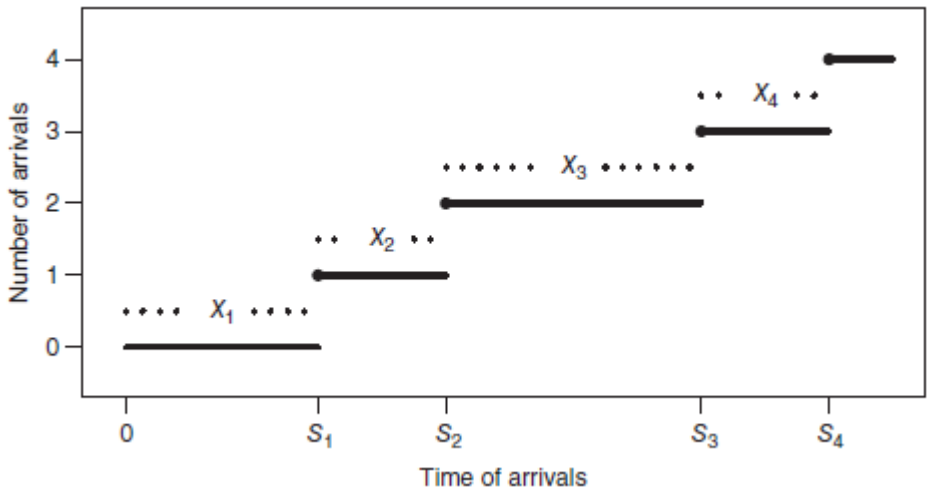


Figura 2-4: Tiempos de llegada $S_1, S_2, ...$ y tiempos entre llegadas $X_1, X_2, ...$ [Dobrow, 2016, p. 228]

Recuerde que las definiciones 1 y 2 son equivalente, sin embargo, la definición 2 tiene una ventaja y es que conduce a un método directo para construir y simular un Proceso de Poisson.

Algoritmo para simular un proceso de Poisson

1. Sea $S_0 = 0$
2. Generar i.i.d variables aleatorias exponenciales $X_1, X_2, ...$
3. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad para \quad n = 1, 2, ...$
4. Para cada $k = 0, 1, ...$, sea $N_t = k$, para $S_k \leq t < S_{k+1}$.

La importancia de la distribución exponencial para el proceso de Poisson radica en su propiedad única de no memoria. La distribución exponencial es la única distribución continua que no posee memoria.

Propiedad de no memoria de la distribución exponencial

Una variable aleatoria X exponencial no tiene memoria, es decir, para todo s, $t > 0$,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

Los resultados para el mínimo de variables aleatorias exponenciales independientes son particularmente útiles cuando se trabaja con el proceso de Poisson. Se destaca dos propiedades que surgen en con frecuencia en la aplicaciones.

Mínimo de variables aleatorias exponenciales independientes

Sean $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ y $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ variables independientes. Se tiene en primer lugar:

$$P(\text{mín}(X_1, X_2) > t) = e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)})$$

Es decir, $\text{mín}(X_1, X_2)$ tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda_1+\lambda_2$ [Ortega and Rivero, 2015, p. 124].

El resultado anterior se generaliza para una colección de $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias exponenciales independientes con parámetros $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(\text{mín}(X_1, ..., X_n) > t) &= P(X_1 > t, ..., X_n > t) \\ &= e^{-t(\lambda_1+...+\lambda_n)} \end{aligned}$$

En consecuencia, sea $M = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$.

1. Para $t > 0$,

$$P(M > t) = e^{-t(\lambda_1+...+\lambda_n)}$$

Esto es: M, que es el mínimo de varias variables independientes con distribuciones exponenciales tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda_1+...+\lambda_n$ [Ortega and Rivero, 2015, p. 124].

Ahora, la probabilidad de que una variable exponencial sea menor que otra viene dada por: sean $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ y $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ variables independientes. Se tiene:

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Para varias variables, el resultado es el siguiente:

$$P(X_k = \text{mín}(X_1, ..., X_n)) = P(X_k < X_1, ..., X_k < X_{k-1}, X_k < X_{k+1}, ..., X_k < X_n)$$

2. Por lo tanto para $k = 1, ..., n$,

$$P(M = X_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

donde $M =\text{mín}(X_1, ..., X_n)$.

Para un proceso de Poisson, cada tiempo de ocurrencia S_n es una suma de n i.i.d. tiempos exponenciales entre llegadas. Una suma de variables exponenciales i.i.d tiene una distribución gamma.

Tiempos de ocurrencia y distribución Gamma

Teorema 1. Sean $T_1, T_2...$ variables aleatorias i.i.d con distribución exponencial de parámetro λ. La suma $\tau_n = T_1 + \cdots + T_n$ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$, es decir, la densidad esta dada por:

$$f_{\tau_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad para \quad t \geq 0$$

De acuerdo al teorema anterior se tiene: para $n = 1, 2, ...$, sea S_n el momento de la enésima ocurrencia en un proceso de Poisson con parámetro λ. Entonces, S_n tiene una distribución gamma con los parámetros n y λ. La función de densidad de S_n es:

$$f_{s_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \quad para \quad t > 0$$

La media y la varianza de S_n son:

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \quad y \quad Var(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

2.4.6. Probabilidades infinitesimales

Una tercera forma de definir el proceso de Poisson se basa en una descripción infinitesimal de la distribución de puntos (por ejemplo, eventos) en pequeños intervalos. Usando la notación *"o"-pequeña*. La notación $f(h) = o(h)$ indica que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Es decir, la función $f(h)$ decrece más rápido hacia cero que la función lineal. De forma general, se dice que la función f es *"o"-pequeña de g*, y se escribe $f(h) = o(g(h))$, lo cual indica que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

Lo que indica que $f(h)$ decrece hacia cero más rápido que $g(h)$. Cabe resaltar que si dos funciones f y g son de notación *"o"-pequeña* de h cada una, es decir, $f(h) = g(h) = o(h)$, entonces $f(h) + g(h) = o(h)$, ya que $(f(h) + g(h))/h \to 0$. De manera similar, si $f(h) = o(h)$, entonces $cf(h) = o(h)$, para cualquier constante. Si $f(h) = o(1)$, entonces $f(h) \to 0$, como $h \to 0$.

Proceso de Poisson - Deifinción 3

Un proceso de Poisson con parámetro λ es un proceso de conteo $(N_t)_{,t \geq 0}$ con las siguientes propiedades:

1. $N_0 = 0$.
2. El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes.
3. $P(N_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$.
4. $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$.
5. $P(N_h > 1) = o(h)$.

Según la propiedad 4, la probabilidad de 1 evento en un intervalo pequeño es proporcional a la longitud del intervalo, con constante proporcional λ. De acuerdo a la propiedad 5, la probabilidad de 2 eventos o más en un intervalo es despreciable.

2.4.7. Distribución Uniforme y tiempos de ocurrencia

Es común pensar que un proceso de Poisson modela una distribución completamente aleatoria de eventos o puntos en la recta real positiva. Aunque no es posible tener una distribución uniforme en $[0, \infty)$, o cualquier intervalo ilimitado, existe una fuerte conexión entre un proceso de Poisson y la distribución uniforme. Si un proceso de Poisson cuenta exactamente n eventos en un intervalo $[0, t]$, entonces las posiciones o tiempos no ordenados de esos eventos se distribuyen uniformemente en el intervalo [Dobrow, 2016, p. 243].

Para el caso de un evento, la afirmación se muestra fácilmente. Considere la distribución del tiempo de la primera ocurrencia, condicional a que haya una ocurrencia por tiempo t. Para $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
P(S_1 \leq s | N_t = 1) &= \frac{P(S_1 \leq s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{P(N_s = 1, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{P(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{P(N_s = 1, N_{t-s} = 0)}{P(N_t = 1)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} = \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

que es la función de distribución acumulada de la distribución uniforme en $[0, t]$. Para analizar el caso de más de un evento en $[0, t]$, se consideran los estadísticos de orden. Sea $U_1 ... U_n$ una secuencia i.i.d. de variables aleatorias distribuidas uniformemente en $[0, t]$. Su función de densidad conjunta es,

$$f_{U_1,...,U_n}(u_1, ..., u_n) = \frac{1}{t^n}, \quad para \quad 0 \leq u_1, ..., u_n \leq t$$

Ordenando las variables U_i de forma creciente $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$. Donde las $U_{(k)}$ es el *k-ésimo* valor más pequño de las U_i. La secuencia ordenanda $(U_{(1)}, ..., U_{(n)})$ se denomina los estadísticos de orden asociados a la secuencia original $(U_{(1)}, ..., U_{(n)})$.

La función de densidad conjunta de los estadísticos de orden es,

$$f_{U_{(1)},...,U_{(n)}}(u_1, ..., u_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad para \quad 0 \leq u_1, ..., u_n \leq t$$

Pues hay $n!$ formas distintas de ordenar un conjunto de n elementos. Ahora se puede describir la distribución conjunta de los tiempos de ocurrencia de un proceso de Poisson, condicionado al número de ocurrencias.

Sea S_1, S_2,..., los tiempos de llegada de un proceso de Poisson con parámetro λ. Condicionado a $N_t = n$, la distribución conjunta de $(S_1, ..., S_n)$ es la distribución del estadístico de orden de n i.i.d variables aleatorias unifomes sobre $[0, t]$. Esto es, la función de densidad conjunta de $S_1, ..., S_n$ es,

$$f(s_1, ..., s_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad para \quad 0 < s_1 < \cdots < s_n < t$$

Equivalentemente, sea $U_1, ...U_n$ una secuencia i.i.d de variables aleatorias uniformes distribuidas en $[0, t]$. Entonces, condicionado a $N_t = n$, los vectores

$$(S_1, ..., S_n) \quad y \quad (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$$

tienen la misma distribución.

2.4.8. Procesos Poisson no homogéneos

En un proceso de Poisson, los eventos ocurren a una tasa constante, independiente del tiempo. Sin embargo, para muchas aplicaciones este es un supuesto poco realista. Tales fenómenos se pueden modelar con procesos de Poisson no Homogéneos con tasa $\lambda(t)$, la cual depende del tiempo. Esta función de tasa también es denominada función de intensidad. De acuerdo a lo anterior, se tiene lo siguiente,

Un proceso de conteo $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de **Poisson no homogéneo** con función de intensidad $\lambda(t)$, si

1. $N_0 = 0$
2. Para todo $t > 0$, N_t tiene una distribución Poisson con media

$$m(t) := E(N_t) = \int_0^t \lambda(x)dx$$

3.Para $0 \leq q < r \leq s < t, \quad N_r - N_q$ y $N_t - N_s$ son variables aleatorias independientes.

De acuerdo a [Bosq and Limnios, 2012, p. 172] un proceso de Poisson es no homogéneo si tiene incrementos independientes y si:

1.
$$\lim_{h \to 0} \frac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{P(N_{t+h} - N_t = 1)} = 0, \quad t \geq 0.$$

Es decir, teniendo en cuenta la notación o pequeña

$$\begin{aligned} f(h) &= P(N_{t+h} - N_t \geq 2) \\ &= o(g(h)) \end{aligned}$$

donde

$$g(h) = P(N_{t+h} - N_t = 1)$$

2.
$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P(N_{t+h} - N_t = 0)}{h} = \lambda(t), \quad t \geq 0.$$

Pero no necesariamiente tiene incrementos estacionarios.

A medida que cambia el tiempo, (N_t) se puede transformar en un proceso de Poisson homogéneo. Para esto, se tiene:

$$M_t = N_{m^{-1}(t)}$$

Donde $m^{-1}(t)$ es la inversa generalizada de m definida por:

$$m^{-1}(t) = \text{ínf}\{u : m(u) \geq t\}, \quad t \geq 0$$

(M_t) es entonces un proceso de Poisson Homogéneo con intesidad 1.

2.4.9. Estadísticas del proceso de Poisson

Vamos a denotar por T_i, $i = 1, ...$ el instante del i-ésimo evento de un proceso de Poisson homogéneo y por $\mathcal{L}(T_1, ..., T_k)$ la ley de distribución conjunta de las variables T_1 a T_k.

Teorema. Si (N_t) es un proceso de Poisson con parámetro λ, entonces:

$$\mathcal{L}(T_1, ..., T_k | N_t = k) = \mathcal{L}(U_{(1)}, ..., U_{(k)}), \quad k \geq 1$$

De acuerdo al teorema anterior [Bosq and Limnios, 2012, p. 174], la distribución conjunta de los tiempos de ocurrencia T_1 a T_k condicional en el evento $N_t = k$ es igual a la distribución conjunta de los estadísticos de orden de k variables uniformes independientes e idénticamente distribuidas en el intervalo $[0, t]$.

La observación de un proceso de Poisson puede llevarse a cabo de varias maneras. Por ejemplo, los tiempos de llegada en un intervalo $[0, t]$ pueden ser observados, o el proceso puede ser observado hasta que n eventos hayan ocurrido.

En el primer caso, las observaciones pueden ser escritas como $T_0, T_1, ..., T_n$.

Sin embargo, dado el teorema anterior, la distribución condicional de las observaciones dado N_t no depende del parámetro desconocido λ. Esto quiere decir que N_t contiene toda la información sobre λ, y por lo tanto es un estadístico suficiente.

Ahora, si $T_1, ..., T_n$ han sido obervados, la igualdad

$$\mathcal{L}(T_1, ..., T_{n-1}|T_n = t) = \mathcal{L}(U_{(1)}, ..., U_{(n-1)})$$

muestra que T_n, es un estadístico suficiente.

Por lo tanto es suficiente conocer N_T, el total de eventos ocurridos hasta T o T_n, el tiempo de ocurrencia del último evento para obtener toda la información contenida en los datos.

De lo anterior, λ puede ser estimado de la siguiente manera. Suponiendo que solo N_T o T_n es observado.

La función de verosimilitud de N_T esta dada por:

$$L(\lambda, N_t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{N_t}}{N_t!}$$

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{\lambda}_t = \frac{N_t}{t}$$

Este estimador es insesgado, esto es, $E_\lambda \hat{\lambda}_t = \lambda$ y es el único estimador con esta propiedad [Bosq and Limnios, 2012]. En efecto, si existiera algún $\psi(N_t)$ tal que:

$$E_\lambda \psi(N_t) = \lambda, \quad \lambda > 0$$

se tendría:

$$E_\lambda\left(\psi(N_t) - \frac{N_t}{t}\right) = 0, \quad \lambda > 0$$

Haciendo explícito este valor esperado, se podría deducir que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\psi(n) - \frac{n}{t}\right)\frac{(\lambda t)^n}{n!} = 0, \quad \lambda > 0$$

que define una serie de potencia en λ, la cual tiene radio infinito de convergencia y es identicamente cero [Bosq and Limnios, 2012]. Consecuentemente,

$$\psi(n) = \frac{n}{t}, \quad n \geq 0.$$

2.4.10. Procesos de nacimiento y muerte

Un proceso de nacimiento-muerte es una cadena de Markov en tiempo continuo que cuenta el número de partículas en un sistema a lo largo del tiempo. Cada partícula puede dar origen al nacimiento de otra partícula o morir, y la tasa de nacimientos y muertes en cualquier momento depende de la cantidad de partículas existentes [Wrenn, 2012, p. 4].

Considere un cadena de Markov en tiempo continuo $X_t, t \geq 0$ con espacio de estados $\mathcal{S} = 0, 1, 2...$ con probabilidades de transición homogéneas $p_{ij}(t) = P[x(t+s) = j|x(s) = i]$

$p_{ij}(t)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0$
2. $P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i \geq 1$
3. $P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0$
4. $P_{ij}(h) = \delta_{ij} \quad si \quad j \neq i-1, i, i+1$
5. $\mu_0 = 0, \quad \lambda_0 > 0, \quad \mu_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, ...$

El termino $o(h)$ en cada caso depende de i. Los parámetros λ_i y μ_i son las tasas de nacimiento y muerte respectivamente. En los postulados 1 y 2 se asume que si el proceso comienza en el estado i, entonces, en un pequeño intervalo de tiempo, las probabilidades de que la población aumente o disminuya en 1 (recuerde la definición 3 del proceso de Poisson) son esencialmente proporcionales a la duración del intervalo. A veces se permite una transición de cero a algún estado ignorado.

Ya que $p_{ij}(t)$ son probabilidades, $p_{ij}(t) \geq 0$ y

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$$

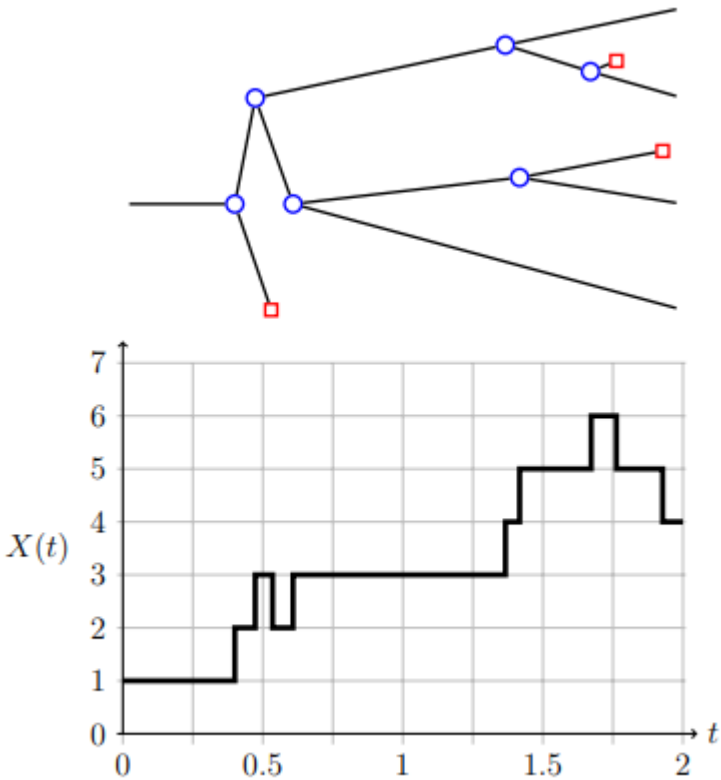


Figura 2-5: Equivalencia de procesos de conteo y procesos de nacimiento y muerte. [Wrenn, 2012, p. 6]

Para obtener la probabilidad de que $X(t) = n$, se debe especificar dónde comienza el proceso o, más generalmente, la distribución de probabilidad para el estado inicial. Se tiene

$$P\left[X(t) = n\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P\left[X(0) = i\right] p_{in}(t)$$

2.5. Transformada de Laplace y tiempos de primer arribo en procesos nacimiento y muerte

Siguiendo de manera textual el trabajo de [Cont et al., 2010], se explicará el contenido de esta sección. Se hará referencia a la transformada bilateral de Laplace, simplemente transformada de Laplace, a la transformación de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

donde s es un número complejo. Cuando f es la función de densidad de probabilidad (fdp) de algúna varible aleatoria X, su transformada de Laplace se puede escribir como

$$\hat{f}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sX}\right]$$

En este caso, $\hat{f}$ es la transformada bilateral de Laplace de la variable aleatoria misma. La razón de considerar la transformada de Laplace bilateral se debe a que la función f generalmente corresponderá a la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria con soporte positivo y negativo. Cuando se expresa la transformada de Laplace condicional de la variable aleatoria X condicionada al evento A, se refiere a la transformada de Laplace de la fdp condicional de X dado A.

Si X y Y son variables aleatorias independientes con transformadas de Laplace difinidas, entonces

$$\hat{f}_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-s(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-sX}\right]\mathbb{E}\left[e^{-sY}\right] = \hat{f}_X(s)\hat{f}_Y(s) \tag{2-3}$$

Si para algún $\sigma \in \mathbb{R}$ se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\sigma + i\omega)| d\omega < \infty$ y $f(t)$ es continua en t, entonces la transformada inversa está dada por la integral de contorno

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts}\hat{f}(s)ds \tag{2-4}$$

Se verá que la distribución de primer arribo a cero de un proceso de nacimiento y muerte se caracteriza por medio de su transformada de Laplace que puede ser representada por medio de fracciones continuas que son las funciones de las tasas λ_i y μ_i.

La fracción continua asociada con una secuencia $\{a_n, n \geq 1\}$ de numeradores parciales y $\{b_n, n \geq 1\}$ de denominadores parciales, que son números complejos con $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, es la secuencia $\{w_n, n \geq 1\}$, donde

$$w_n = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n(0), \quad n \geq 1$$

$$w_n = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + b_n}}}$$

$$t_k(u) = \frac{a_k}{b_k + u}, \quad k \geq 1$$

Si $w \equiv \lim_{n\to\infty} w_n$, entonces se dice que la fracción continua es convergente y el límite w es el valor de la fracción continua [Abate and Whitt, 1999]. En este caso, se escribe

$$w \equiv \Phi_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{2-5}$$

Considerando ahora un proceso de nacimiento - muerte con tasa constante de nacimiento λ y tasas de muerte μ_i en el estado $i \geq 1$, y sea σ_b el tiempo de primer arribo de este proceso a 0 dado se que comienza en el estado $b > 0$. Escribiendo σ_b como la suma

$$\sigma_b = \sigma_{b,b-1} + \sigma_{b-1,b-2} + \cdots + \sigma_{1,0}, \tag{2-6}$$

donde $\sigma_{i,i-1}$ denota el tiempo de primer arribo del proceso de nacimiento y muerte al estado $i-1$ comenzando en el estado i, para $i = 1, ..., b$. Los terminos del lado derecho en 2-6 son todos independientes. Si $\hat{f}_b$ denota la transformada de Laplace de σ_b y $\hat{f}_{i,i-1}$ denota la transformada de Laplace de $\sigma_{i,i-1}$, para $i = 1, ..., b$, aplicando 2-4, se tiene

$$\hat{f}_b(s) = \prod_{i=1}^{b} \hat{f}_{i,i-1}(s). \tag{2-7}$$

Por lo tanto, para calcular $\hat{f}_b$, es suficiente calcular las transformadas de Laplace $\hat{f}_{i,i-1}$ para $i = 1, ..., b$. De acuerdo a [Abate and Whitt, 1999], teniendo en cuenta la notación en 2-5 la transformada se puede escribir como

$$\hat{f}_{i,i-1}(s) = -\frac{1}{\lambda} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda\mu_k}{\lambda + \mu_k + s} \tag{2-8}$$

El cálculo es basado en una relación recursiva entre las $\hat{f}_{i,i-1}, i = 1, ..., b$, que se deriva al considerar la primera transición del proceso de nacimiento-muerte. Combinando 2-7 y 2-8, se obtiene

$$\hat{f}_b(s) = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^b \left(\Pi_{i=1}^{b} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda\mu_k}{\lambda + \mu_k + s}\right) \tag{2-9}$$

2.5.1. Dirección del cambio en el movimiento de precios

El primer movimiento en el precio medio $P_m(t) = \frac{P_A(t)+P_B(t)}{2}$ ocurre en el tiempo de primer arribo del precio de oferta o demanda a cero o, si el spread es mayor que uno, la primera vez que llega una orden límite dentro del spread.

Sea $X_A \equiv X_{PA(\cdot)}(\cdot)$ y $X_B \equiv |X_{PB(\cdot)}(\cdot)|$ y se σ_A y σ_B los tiempos de primer arribo X_A y X_B a cero, respectivamente. Sea $W_B \equiv \{W_B(t), \quad t \geq 0\}$ ($W_A \equiv \{W_A(t), \quad t \geq 0\}$) el número de órdenes en espera al precio BID/ASK en el tiempo t de la órdenes iniciales $X_B(0)(X_A(0))$ y sea $\epsilon_B(\epsilon_A)$ los tiempos de primera pasada de $W_B(W_A)$ a 0. Además, sea T el tiempo del primer cambio en el precio medio:

$$T \equiv inf\left\{t \geq 0, \quad p_M(t) \neq p_M(0)\right\}.$$

El cálculo de la probabilidad condicional de que el precio medio aumente antes de disminuir, viene dado por:

$$P\left[p_M(T) > p_M(0) | X_A(0) = a, X_B(0) = b, s(0) = S\right], \tag{2-10}$$

donde $S > 0$. La idea principal de calcular 2-10 es observar que X_A y X_B se comportan como procesos independientes nacimiento-muerte, W_A y W_B se comportan como procesos independientes puros de muerte para $t \leq T$. Puntualmente:

Lemma Sea $s(0) = S$. Entonces

1. Existen procesos $\tilde{X}_A$ y $\tilde{X}_B$ de nacimiento y muerte independientes con tasa de nacimiento $\lambda(S)$ y tasa de muerte $\mu + i\theta(S)$ en etado $i \geq 1$, tal que para $0 \leq t \leq T$, $\tilde{X}_A = X_A(t)$ y $\tilde{X}_B = X_B(t)$.

La probabilidad condicional 2-10 puede ser calculada así:

Probabilidad de incremento en el precio medio

Sea $\hat{f}_{j,S}$ que viene dada por

$$\hat{f}_{j,S}(s) = \left(-\frac{1}{\lambda(S)}\right)^j \left(\Pi_{i=1}^{b} \Phi_{k=i}^{\infty} \frac{-\lambda(S)(\mu + k\theta(S))}{\lambda(S) + \mu + k\theta(S) + s}\right), \tag{2-11}$$

Para $j \leq 1$, y sea $\Lambda_S \equiv \Sigma_{i=1}^{S-1} \lambda(i)$. Entonces 2-10 está dada por la transformada inversa de Laplace de

$$\hat{F}_{a,b,S}(s) = \frac{1}{s}\left(\hat{f}_{b,S}(s + \Lambda_S) + \frac{\Lambda_S}{\Lambda_S + s}(1 - \hat{f}_{b,S}(s + \Lambda_S))\right)\left(\hat{f}_{a,S}(\Lambda_S - s) + \frac{\Lambda_S}{\Lambda_S - s}(1 - \hat{f}_{a,S}(\Lambda_S - s))\right) \tag{2-12}$$

evaluada en 0. Cuando S=1, 2-12 se reduce a

$$\hat{F}_{a,b,1}(s) = \frac{1}{s}\hat{f}_{a,1}(s)\hat{f}_{b,1}(-s) \tag{2-13}$$

Método COS para el cálculo de probabilidades condicionales

Siguiendo la metodología expuesta en[Ladeira, 2010] para calcular las probabilidades condicionales en el cambio de precio, se describe a continuación el método de COS.

Escribiendo la integral de contorno 2-4 como

$$f(t) = \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \Re\left\{\hat{f}(\sigma + iu)\right\} \cos utdu$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Usando la regla trapezoidal con longitud de paso h, se obtiene

$$f(t) \approx f_h(t) = \frac{he^{\sigma t}}{\pi}\Re\left\{\hat{f}(\sigma)\right\} + \frac{2he^{\sigma t}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Re\left\{\hat{f}(\sigma + ikh)\right\}\cos(kth)$$

Un requerimiento para que el método de COS sea satisfactorio, es que la integral infinita en 2-4 pueda ser truncada de modo que

$$\hat{f_1}(\tau) = \int_a^b e^{i\tau t} f(t)dt \approx \int_0^{\infty} e^{i\tau t} f(t)dt = \hat{f}(\tau) \tag{2-14}$$

Escogiendo a y b tal que 2-14 sea evaluada y reemplazando $h = \pi/(b-a)$ y $\gamma = 0$, se define

$$f_h(t) = \frac{1}{b-a}\Re\left\{\hat{f}(0)\right\} + \frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\Re\left\{\hat{f}\left(\frac{ik\pi}{b-a}\right)\right\}\cos\left(k\pi\frac{t-a}{b-a}\right) \tag{2-15}$$

Truncando la suma infinita, se encuentra la siguiente aproximación numérica de f en t

$$f_h(t) = \frac{1}{b-a}\Re\left\{\hat{f}(0)\right\} + \frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{N-1}\Re\left\{\hat{f}\left(\frac{ik\pi}{b-a}\right)\right\}\cos\left(k\pi\frac{t-a}{b-a}\right)$$

Para utilizar este método para recuperar la función de distribución acumulada (fda) de su inversa, calculamos el valor de $f_h(t)$ para un rango de t, y tomamos la suma acumulativa. La aproximación para la fda se convierte en

$$F_h(t) = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{1}{b-a}\Re\left\{\hat{f}(0)\right\} + \frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{N-1}\Re\left\{\hat{f}\left(\frac{ik\pi}{b-a}\right)\right\}\cos\left(k\pi\frac{jdt}{b-a}\right)\right) \tag{2-16}$$

donde $dt = (b-a)/M$ y M es el número de discretizaciones.

2.6. Estado del arte

Los avances que se han realizado respecto al tema son diversos de acuerdo a la naturaleza del del mismo abarcando diferentes metodologías, haciendo énfasis en una rama de las finanzas como son las cuantitativas. Se evidencia un gran esfuerzo por parte de la comunidad científica que ha abordado estos tópicos en su investigación, no solo a nivel de generar conocimiento de calidad y confiable, sino también a nivel de abstracción del pensamiento y notación estadístico - matemática. El estudio del libro de órdenes ha tomado una gran variedad de puntos de partida, ilustrando ideas desde la economía, física, psicología, matemáticas y estadística sin llegar a un debate claro sobre cuál es la mejor aproximación [Gould et al., 2013]. Muchos resultados interesantes han sido obtenidos a raíz de dichas invetigaciones y en la actualidad son utilizadas en tres principales frentes: ejecución óptima de órdenes, creación de mercado

y arbitraje [Huang, 2015].

Intentar capturar las diferentes características del libro de órdenes en jornadas consecutivas de negociación propone un gran reto, no solo por su funcionamiento en sí, sino también porque hay emociones involucradas por parte de los participantes del mercado y esto puede impulsar subas, bajas o comportamientos inesperados en los precios.

En el esfuerzo de enfocar el análisis técnico de los mercados desde el área de las finanzas cuantitativas, se han desarrollado modelos muchos más estructurados en cuanto a las tasas de llegada secuenciales de compradores y vendedores como es el caso de [Parlour, 1998], [Foucault et al., 2005], [Roşu, 2009], [Meudt et al., 2016] donde proponen modelos de equilibrio basados en el precio para el libro de órdenes. Estos modelos dan lugar a ideas interesantes sobre la formación de los precios, sin embargo, hay parámetros que tiene un grado alto de dificultad en su estimación y en su posterior aplicación [Cont et al., 2010].

Otros modelos basados en la observación empírica de que los negociantes cambian sus envíos de órdenes a medida que cambian las condiciones del mercado son los propuestos por: [Bouchaud et al., 2002], [Doyne Farmer 5 et al., 2004] y [Hollifield et al., 2004] los cuales estudian estas propiedades de carácter empírico del libro de órdenes. La investigación de estas observaciones provee una vasta cantidad de características estadísticas de la dinámica del libro de órdenes.

Otro enfoque que también se basa en observaciones empíricas sobre los mercados financieros, y que resalta la importancia de la memoria larga en las fluctuaciones de oferta y demanda, es presentado en los trabajos realizados por [Bouchaud et al., 2008], [Smith et al., 2003], [Luckock et al., 2003], [Maslov and Mills, 2001] [Bovier et al., 2006] donde además se proponen modelos estocásticos para el libro de órdenes, haciendo énfasis en distribuciones incondicionales [Cont et al., 2010].

Esencialmente, las partes que intervienen e interactúan en un mercado lo hacen a través de sistemas de negociación. Entender la dinámica de como los movimientos de precios de un activo están determinados por la evolución del libro de órdenes a través del tiempo y la comprensión de la estructura estocástica de estos es una cuestión fundamental [Clinet, 2015]

Capítulo 3

Formulación del problema

Un administrador de fondos supervisa el capital de cara a los riesgos económicos a los que se enfrenta, por lo tanto la decisión de someter una orden en el momento más oportuno en los sistemas de transacción electrónicos a un determinado valor y volumen del contrato tiene gran incidencia en los resultados y en una gestión eficiente del capital, ésta tiene que ver con el respaldo o provisión establecida para manejar la fluctuaciones del mercado. De acuerdo a lo anterior, entender las frecuencias a la cual llegan dichas órdenes se hace de vital importancia para la debida ejecución del plan de inversión, gestión del riesgo y crear estrategias rentables.

Se realizará un backtesting sobre una muestra de datos con la acción de Amazon (AMZN) para un día de negociación, en el cual se simulará la dinámica del libro de órdenes, con el fin de corroborar que el modelo propuesto por [Cont et al., 2010] tiene replicabilidad y mejora la gestión monetaria del riesgo

En este capítulo se establecerá un modelo para la dinámica del libro de órdenes. Se presenta en primera instancia las definiciones que permitan el entendimiento adecuado del libro de órdenes, luego se presentará el modelo propuesto por [Cont et al., 2010] para el modelamiento de la dinámica del mismo.

Razonando que la dinámica del libro se asemeja a la de un sistema de colas, se propone que el número de órdenes por nivel de precio se modele como un proceso de Markov continuo en el tiempo. Las propiedades deseables de este modelo son las que pueden estimarse fácilmente a partir de datos de alta frecuencia, satisfacen las características empíricas del libro y son analíticamente manejables [Cont et al., 2010].

3.1. Descripción cualitativa

Los participantes de un mercado pueden someter dos tipos de órdenes; de compra y de venta. Una orden límite, es una orden para negociar un cierto monto de un activo financiero por un precio determinado. Estas órdenes, son sometidas por los sistemas electrónicos de negociación y permiten visualizar de manera resumida, las órdenes límite que están pendientes, indicando las cantidades presentes en cada nivel de precios: este conjunto de registros es el que se conoce como el libro de órdenes. El precio más bajo para el que hay una orden límite de venta en circulación se le conoce como ASK price y el precio más alto para el cual hay una orden límite de compra activa se conoce como BID price [Cont et al., 2010].

Una orden de mercado es una orden que puede ser de compra o de venta de una cierta cantidad de un activo al mejor precio disponible en el libro de órdenes. Cuando llega una orden de mercado esta se contrasta o empareja con el mejor precio disponible en el libro de órdenes y se ejecuta dando origen a la transacción. En consecuencia, las cantidades disponibles en el libro de órdenes se actualizan. Una orden límite se enfila en el libro de órdenes hasta que se ejecuta contra una orden de mercado o se cancele. Una orden límite se puede ejecutar muy rápidamente si se ajusta con un precio cerca del BID/ASK, pero puede tardar mucho tiempo si el precio de mercado se aleja del precio solicitado o si el precio solicitado está demasiado lejos del BID/ASK. Como alternativa, una orden límite se puede cancelar en cualquier momento [Cont et al., 2010].

3.2. Descripción de un modelo estocástico para el libro de órdenes

Acá, se sigue textualmente la presentación del modelo propuesto por [Cont et al., 2010].
Se considera un mercado en el que las órdenes límite se pueden colocar en una malla de precios $\{1,....,n\}$ que representan múltiplos de un tick de precio. Se modela el estado del libro de órdenes por medio de un proceso de Markov en tiempo continuo, de la siguiente forma:

$$X_{(t)} \equiv (X_1(t), ..., X_n(t))_{(t\geq 0)} \tag{3-1}$$

Acá $|X_p(t)|$ es el número de órdenes límite pendientes al precio p, $1 \leq p \leq n$. Si $X_p(t) < 0$, entonces hay $-X_p(t)$ órdenes de compra al precio p, si $X_p(t) > 0$, en tonces hay $X_p(t)$ órdenes de oferta al precio p.

El precio de venta, ask price, $p_A(t)$ en instante de tiempo t esta definido por:

$$p_A(t) = \text{ínf}\{p = 1, ..., n, X_p(t) > 0\} \wedge (n + 1)$$

de manera similar, el precio de compra, bid price, $p_B(t)$ esta definido por:

$$p_B(t) = \sup\{p = 1, ..., n, X_p(t) < 0\} \vee 0$$

donde $a \wedge b = \text{mín}\ (a, b)$ y $a \vee b = \text{máx}\ (a, b)$.

Por otro lado el precio medio, *mid price* $p_M(t)$ y el diferencial *bid-ask* $s(t)$ están definidos respectivamente por:

$$p_M(t) \equiv \frac{(p_B(t) + p_A(t))}{2} \tag{3-2}$$

$$s(t) \equiv p_A(t) - p_B(t) \tag{3-3}$$

Dado que la mayor parte de las negociaciones tienen lugar en la vecindad de los precios de oferta y demanda, es útil para realizar un seguimiento del número de órdenes pendientes a una distancia determinada de la oferta/demanda (bid/ask), definir:

$$Q_i^B(t) = \begin{cases} X_{p_A(t)-i}(t) & 0 < i < p_A(t) \\ 0 & p_A(t) \leq i < n, \end{cases} \tag{3-4}$$

$Q_i^B(t)$ corresponde al número de órdenes de compra a una distancia i del precio de venta, ask price, en el instante t, y,

$$Q_i^A(t) = \begin{cases} X_{p_B(t)+i}(t) & 0 < i < n - p_B(t) \\ 0 & n - p_B(t) \leq i < n, \end{cases} \tag{3-5}$$

$Q_i^A(t)$ corresponde al número de órdenes de venta a una distancia i del precio de compra, bid price, en el instante t.

A pesar de que $X_{(t)}$ y $(p_A(t), p_B(t), Q^A(t), Q^B(t))$ poseen la misma información, la segunda representación resalta la forma o profundidad del libro de órdenes en relación a los mejores precios.

3.2.1. Dinámica del libro de órdenes

Ahora, se describirá cómo el libro de órdenes se actualiza por la entrada de nuevas órdenes o cancelación de órdenes existentes. Para un estado $x \in Z^n$ y $1 \leq p \leq n$, donde Z^n es el conjunto de todas las n-tuplas de números enteros, se define:

$$x_{p\pm1} \equiv x \pm (0, ..., 1, ..., 0)$$

Donde el 1 en el vector del lado derecho se encuentra en el *p-ésimo* componente. En lo que sigue todas las órdenes son de medida unitaria.

- Una orden límite de compra a un nivel de precio $p < p_A(t)$ aumenta la cantidad de órdenes límite de compra al nivel p en una unidad, es decir, el estado pasa de x a x_{p-1}, $x \longrightarrow x_{p-1}$

- Una orden límite de venta a un nivel de precio $p > p_B(t)$ aumenta la cantidad de órdenes límite de venta al nivel p en una unidad, es decir, el estado pasa de x a x_{p+1}, $x \longrightarrow x_{p+1}$

- Una orden de compra de mercado disminuye la cantidad de órdenes al precio de venta (ask price), es decir, el estado pasa de x a $x_{pA(t)-1}$, $x \longrightarrow x_{pA(t)-1}$

- Una orden de venta de mercado disminuye la cantidad de órdenes al precio de compra (bid price), es decir, el estado pasa de x a $x_{pA(t)+1}$, $x \longrightarrow x_{pB(t)+1}$

- La cancelación de una orden límite de compra pendiente a un nivel de precio $p < p_A(t)$ disminuye la cantidad de órdenes al nivel p, es decir, el estado pasa de x a x_{p+1}, $x \longrightarrow x_{p+1}$

- La cancelación de una orden límite de venta pendiente a un nivel de precio $p > p_B(t)$ disminuye la cantidad de órdenes al nivel p, es decir, el estado pasa de x a x_{p-1}, $x \longrightarrow x_{p-1}$

Por lo tanto, evolución del libro de órdenes es guiada por el flujo de entrada de órdenes de mercado, órdenes límite y cancelaciones en cada nivel de precios, cada uno de los cuales se puede representar como un proceso de conteo [Cont et al., 2010]. De acuerdo a [Bouchaud et al., 2002] se observa que la entrada de órdenes llegan con más frecuencia en las proximidades de los precios de compra/venta y la tasa de llegada de estas órdenes depende de la distancia a dichos precios.

Para capturar estas características empíricas en un modelo que sea analíticamente tratable y permita calcular las cantidades de interés (probabilidades condicionales de los eventos de interés). Se propone un modelo estocástico donde los acontecimientos señalados anteriormente se modelan mediante procesos de Poisson independientes. Más precisamente, se asume que, para $i \geq 1$,

- Órdenes límite de compra (respectivamente de venta) que llegan a una distancia de i tick's desde la mejor cotización opuesta de forma independiente, llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda(i)$,

- Órdenes de compra de mercado (respectivamente de venta) llegan de manera independiente y de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa μ,

-Las cancelaciones de órdenes límite a una distancia de i tick's de la mejor cotización opuesta se producen a una razón proporcional a la cantidad de órdenes pendientes: si el número de órdenes pendientes en ese nivel es x entonces la tasa de cancelación es $\theta(i)x$. Esta suposición puede entenderse de la siguiente manera: si se tiene un lote de órdenes pendientes x, cada uno de los cuales puede ser cancelado en un tiempo exponencial con el parámetro $\theta(i)$, entonces la tasa global de cancelación para el lote es $\theta(i)x$.

- Los eventos antes mencionados son independientes entre sí.

Por lo general, las tasas de llegada $\lambda : \{1, ..., n\} \longrightarrow [0, \infty)$ son funciones decrecientes de la distancia de la compra/venta: la mayoría de las órdenes son puestas cerca del precio actual. Estudios empíricos sugieren una ley de potencia [Bouchaud et al., 2002]:

$$\lambda(i) = \frac{k}{i^{\alpha}} \tag{3-6}$$

Dados los anteriores supuestos, $X_{(t)} \equiv (X_1(t), ..., X_n(t))_{(t\geq 0)}$ es una cadena de Markov de tiempo continuo con espacio de estados Z^n, que representa el estado del libro de órdenes con tasas de transición dadas por:

$$\begin{gathered}
x \longrightarrow x_{p-1} \text{ con tasa } \lambda(p_A(t) - p) \text{ para } p < p_A(t), \\
x \longrightarrow x_{p+1} \text{ con tasa } \lambda(p - p_B(t)) \text{ para } p > p_B(t), \\
x \longrightarrow x_{p_B(t)+1} \text{ con tasa } \mu, \\
x \longrightarrow x_{p_A(t)-1} \text{ con tasa } \mu, \\
x \longrightarrow x_{p+1} \text{ con tasa } \theta(p_A(t) - p)|x_p| \text{ para } p < p_A(t), \\
x \longrightarrow x_{p-1} \text{ con tasa } \theta(p - p_B(t))|x_p| \text{ para } p > p_B(t)
\end{gathered}$$

La siguiente proposición es tomada de [Cont et al., 2010]

PROPOSICIÓN 1

$X_{(t)}$ es un proceso de Markov ergodico. En partícular, $X_{(t)}$ posee una distribución estacionaria. Ver apéndice A.

La ergodicidad de $X_{(t)}$ es una característica deseable: permite comparar promedios de tiempo de varias cantidades (forma promedio de la libro de órdenes, impacto de precio promedio, etc.) con los valores esperados de estas cantidades calculadas en el modelo.

3.3. Calibración de parámetros

De acuerdo al proceso de estimación en [Cont et al., 2010], las órdenes son de tamaño unitario. Dicha unidad será tomada como la media del tamaño de las órdenes. En el conjunto de

datos, primero calculamos el tamaño promedio de las órdenes de mercado Sm, de las órdenes límite Sl y de las órdenes canceladas Sc y elegimos la unidad como el tamaño promedio de una orden límite Sl, es decir, se cuenta un bloque de órdenes de tamaño Sl como un evento, la tasa de llegada de órdenes límite para $1 \leq i \leq 5$ se puede estimar, cómo se vio en el capítulo anterior, mediante:

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_l(i)}{T} \tag{3-7}$$

Donde $N_l(i)$ es el numero total de órdenes límite que llegan a una distancia i tick's desde la mejor cotización opuesta y T el tiempo total de negociación. El estimador 3-7 es insesgado, ya que se definió la tasa de llegada como la cantidad de órdenes que llegan por unidad de tiempo [Hendriks, 2014]. $N_l(i)$ se obtiene contando el numero de veces que la cantidad (volumen) incrementa en tamaño a una distancia de $1 \leq i \leq 5$ ticks desde la mejor cotización opuesta. Luego extrapolamos esta tasa de llegada de órdenes límite ajustando una función de potencia de la forma:

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{k}{i^{\alpha}} \tag{3-8}$$

Para estimar los parámetros anteriores k y α, se usará el método de ajuse de mínimos cuadrados:

$$\underset{k,\alpha}{min} \sum_{i=1}^{5} \left(\hat{\lambda}(i) \quad - \quad \frac{k}{i^{\alpha}} \right)^2 \tag{3-9}$$

Para estimar el parámetro μ se procede de manera similar. Nuevamente, como definimos que se trata de una tasa de llegada, será la cantidad de órdenes de mercado durante una unidad de tiempo. Aún así, también debemos mantener nuestra unidad de tamaño Sl, lo que da como resultado el siguiente estimador:

$$\hat{\mu} = \frac{N_m}{T} \frac{S_m}{S_l} \tag{3-10}$$

Donde N_m es la cantidad total de órdenes de mercado durante el periodo de tiempo T

Dado que las tasas de cancelación en el modelo son proporcionales a la cantidad de órdenes presentes a un nivel de precio particular, para estimar dichas tasas primero se necesita estimar la forma promedio libro de órdenes Q_i, que es el número medio de órdenes a un distancia de i ticks desde la mejor cotización opuesta, para $1 \leq i \leq 5$. Si M es el número de registros a lo largo del tiempo y $S_i^B(j)$ el número de acciones en oferta a una distancia de i ticks del precio de demanda en la *j-ésima* fila, para $1 \leq j \leq M$, se tiene:

$$Q_i^B = \frac{1}{S_l} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} S_i^B(j) \tag{3-11}$$

El vector Q_i^A se obtiene de forma análoga y Q_i es el promedio de Q_i^A y Q_i^B. Un estimador para la tasa de cancelación $\theta(i)$ viene dado por:

$$\hat{\theta}(i) = \frac{N_c(i)}{TQ_i}\frac{S_c}{S_l} \quad para \quad i \leq 5 \tag{3-12}$$

$N_c(i)$ se calcula contando el número de veces que una cotización disminuye en tamaño a una distancia de $1 \leq i \leq 5$ ticks desde la mejor cotización opuesta.

3.4. Simulación del libro de órdenes

De acuerdo a la simulación expuesta por [Hendriks, 2014] para la simulación del libro de órdenes, se empieza por generar una matriz R con tasas de llegada utilizando los vectores λ, θ y μ. Se crea una matriz 4 x n que se denotará R, donde:

- La primera fila de R esta dispuesta de modo que *R(1,i)* es el tiempo de llegada para el evento asociado a la siguiente orden límite a una distancia de i ticks desde mejor cotización opuesta BID/ASK.
- En la segunda fila de R solo se toma en cuenta *R(2,1)* que es el tiempo de llegada para el evento asociado a una orden de mercado.
- La tercer y cuarta fila están constituidas de modo que *R(3,i)* y *R(4,i)* representan el tiempo de llegada de la próxima cancelación de una orden de venta y una orden de compra a una distancia i del precio BID/ASK opuesto respectivamente.

Siguiendo los lineamientos en [Hendriks, 2014] debe tenerse en cuenta que en esta construcción de R se tiene solo una fila para las órdenes de límite y de mercado, mientras que para las cancelaciones de las órdenes de compra y venta se tienen dos. La razón de esto es que la tasa de llegada de las órdenes límite y las órdenes de mercado funcionan de manera idéntica si son órdenes de compra o venta, ya que solo dependen de los parámetros. Sin embargo, este no es el caso para las tasas de cancelación, ya que también dependen de la cantidad de órdenes (volumen) para el nivel de precio al que se le esta calculando la tasa de llegada.

Dado que los tiempos de llegada son exponencialmente distribuidos, por ejemplo $T = R(1,1) \sim Exp(\lambda(1))$, se utilizará la variable aleatoria uniforme *U(0,1)* para generar las tasas de llegada. Si *F(t)* es la función de distribución exponencial (o sea *F(t)* es la función de distribución de T), se tiene:

$$\{U \leq F(t)\} = \{F^{-1}(U) \leq t\} \tag{3-13}$$

Ya que *U(0,1)* se tiene que $P(U \leq x) = x \quad para \quad x \quad \in \quad [0,1]$, por lo tanto $P(U \leq F(t)) = F(t)$ de 3-13, se obtiene:

$$P(F^{-1}(U) \leq t) = F(t)$$

Lo anterior quiere decir que la varibale aleatoria $F^{-1}(U)$ tiene la misma distribución de *F(t)*. Para encontrar F^{-1} se considera:

$$F(T) = U \Leftrightarrow T = F^{-1}(U)$$

Por lo tanto para la distribución exponencial $Exp(\lambda)$, con $F(t) \quad = \quad 1 - e^{-\lambda t}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} F(T) = U &\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda T} = U \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda T} = 1 - U \\ &\Leftrightarrow \lambda T = -ln(1 - U) \\ &\Leftrightarrow T = -ln(1 - U)/\lambda \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que *1-U* posee una distribución de la forma *U(0,1)*, se puede reescribir de la siguiente manera: $-ln(U)/\lambda$. Como $R(1,1) \sim Exp(\lambda(1))$, se pueden generar tiempos de llegada con $-ln(U(0,1))/\lambda(1)$. Lo anterior lleva a generar la matriz R con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} R(1,i) &= -\log(U)/\lambda(i) \\ R(2,1) &= -\log(U)/\mu \\ R(3,i) &= -\log(U)/(\theta(i)|x_{bp+i}|) \\ R(4,i) &= -\log(U)/(\theta(i)|x_{ap-i}|) \end{aligned}$$

Donde U es un numero aleatorio generado con distribución *U(0,1)*. Lo siguiente de acuerdo a [Hendriks, 2014] es encontrar el mínimo de todos los valores generados; la fila y columna *(i,j)* en la matriz R de estos valores minimos.

$$m = min(R) = R(x,p)$$

Capítulo 4

Resultados numéricos

4.1. Descripción de los datos

El libro del órdenes con el cual se trabajó proporciona datos para la acción de Amazon durante la jornada de negociación del día 21 de junio del año 2012, que empezo actividad a las 9:30 a.m y finalizo, apróximadamente, a las 4:00 p.m; donde el tiempo entre evento y evento es medido en microsegundos y el contiene 269.747 registros, que son los movimientos asociados a la evolución del libro causados por las órdenes límte, mercado o cancelación de ese día puntual. Este, contiene una profundidad de 10 ticks tanto para el lado del BID como del ASK, con sus repectivos volumenes. Las observaciones de ese día muestran una rueda de negociación con bajas ejecuciones de órdenes de mercado respecto a las órdenes límite o de cancelación, con un oscilación en el precio entre los 220 y 230 dólares.

4.2. Estimación de parámetros

Todos los datos requeridos del libro de órdenes se pueden encontrar en los registros de la evolución del mismo para un tiempo T, donde cada vez que se ejecuta una órden, se actualiza el libro, se forma el precio y se puede obtener un nuevo estado del libro.

Para los estimar los parámetros λ, μ, θ y los tamaños promedio de las órdenes , como se vio en la sección 3.3, primero calculamos el tamaño promedio de las órdenes de mercado Sm, de las órdenes límite Sl y de las órdenes canceladas Sc.

Tabla 4-1: Promedios Sl, Sm y Sc

Medida	Sl	Sm	Sc
Promedio	98.72	71.00	97.26

luego, se estima λ mediante la ecuación 3-7

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_l(i)}{T}$$

Para estimar μ se aplica la ecuación 3-10,

$$\hat{\mu} = \frac{N_m}{T}\frac{S_m}{S_l}$$

Donde N_m es la cantidad total de órdenes de mercado durante el periodo de tiempo T

Para estimar θ se utilizará 3-12.

$$\hat{\theta}(i) = \frac{N_c(i)}{TQ_i}\frac{S_c}{S_l} \quad para \quad i \leq 5$$

Donde $N_c(i)$ se calcula contando el número de veces que una cotización disminuye en tamaño a una distancia de $1 \leq i \leq 5$ ticks desde la mejor cotización opuesta.

Con lo cual se obtienen las siguientes estimaciones:

Tabla 4-2: $Valores \quad para \quad \hat{\lambda}, \quad \hat{\theta} \quad y \quad \hat{\mu}$

i	1	2	3	4	5
$\hat{\lambda}(i)$	0.036	0.040	0.044	0.036	0.047
$\hat{\theta}(i)$	0.226	0.136	0.086	0.043	0.040
$\hat{\mu}(i)$	0.351				

El valor de $\hat{\lambda}$ no es completamente correcto dada la función de ley de potencia. Entonces se utiliza la ecuación 3-9

$$\min_{k,\alpha} \sum_{i=1}^{5} \left(\hat{\lambda}(i) \quad - \quad \frac{k}{i^{\alpha}} \right)^2$$

para encontrar los valores de k y α para la función de ley de potencia que se encuentra más cerca de la estimación. Se tiene:

$$k = 0{,}15 \quad \alpha = 0{,}34$$

4.3. Aplicación del modelo de simulación

Ya se pueden determinar de manera aleatoria las órdenes que necesitan ser agregadas al libro a través del valor de x. Si *x=1*, se agrega una orden límite a una distancia de i ticks desde la mejor cotización opuestas BID/ASK; si *x=2* se agrega una orden de mercado; si *x=3* ó *x=4* se agrega una orden de cancelación. El valor m será entonces los tiempos de pasada

entre la orden previa y la actual. El modelo empieza con *t=0*, por lo tanto *t=t+m*. Dado que las llegadas de las órdenes siguen un proceos de Poisson los tiempos de llegada son independientes. Por lo tanto, se extrae m de la matriz dinámica R y se genera un nuevo tiempo de llegada para la siguiente orden similar al último. Este proceso es iterativo encontrando el mínimo valor de R, añadiendo de manera aleatoria la correspondiente orden, incrementando el valor de t y de nuevo extrayendo m y así sucesivamente.

Teniendo en cuenta los valores de la tabla **4-2** para θ, μ y $k = 0{,}15 \quad , \alpha = 0{,}34$ con la función de potencia 1 se obtienen los valores:

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{0{,}15}{i^{0{,}34}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Tabla 4-3: *Valores para* $\hat{\lambda}$

i	1	2	3	4	5
$\hat{\lambda}$	0.15	0.11	0.10	0.09	0.08

Se simulará una jornada de negociación donde con un timepo inicial de 23.400 segundos correpondientes a 6 horas y media de negociación.

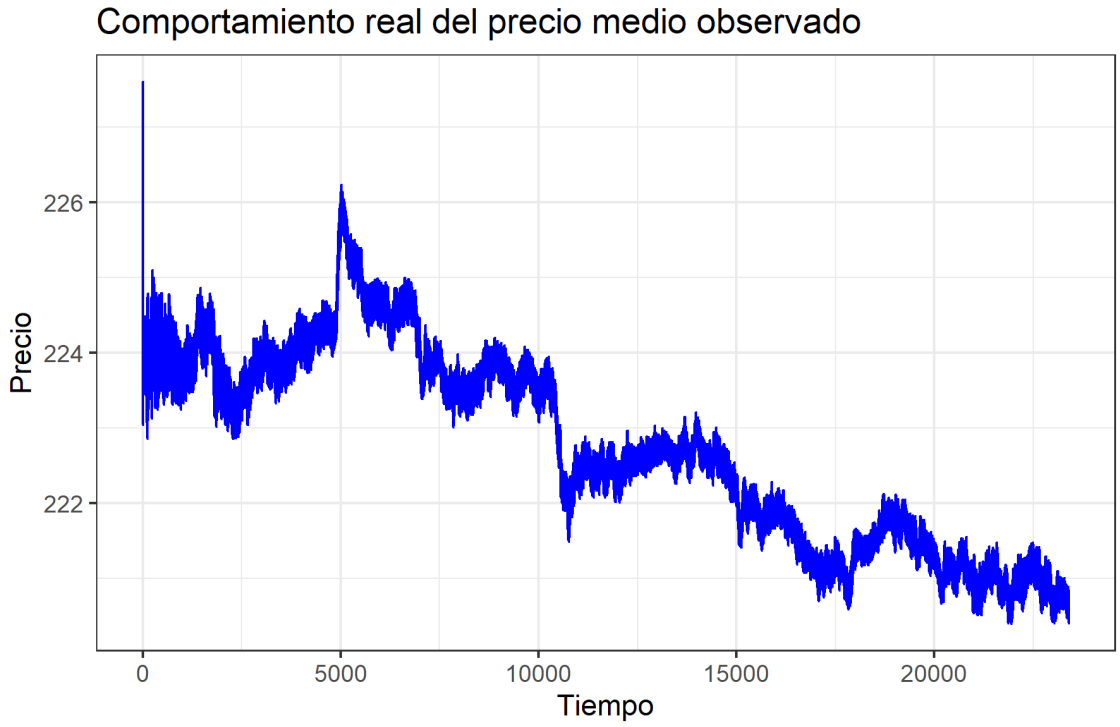


Figura 4-1: Precio medio observado.

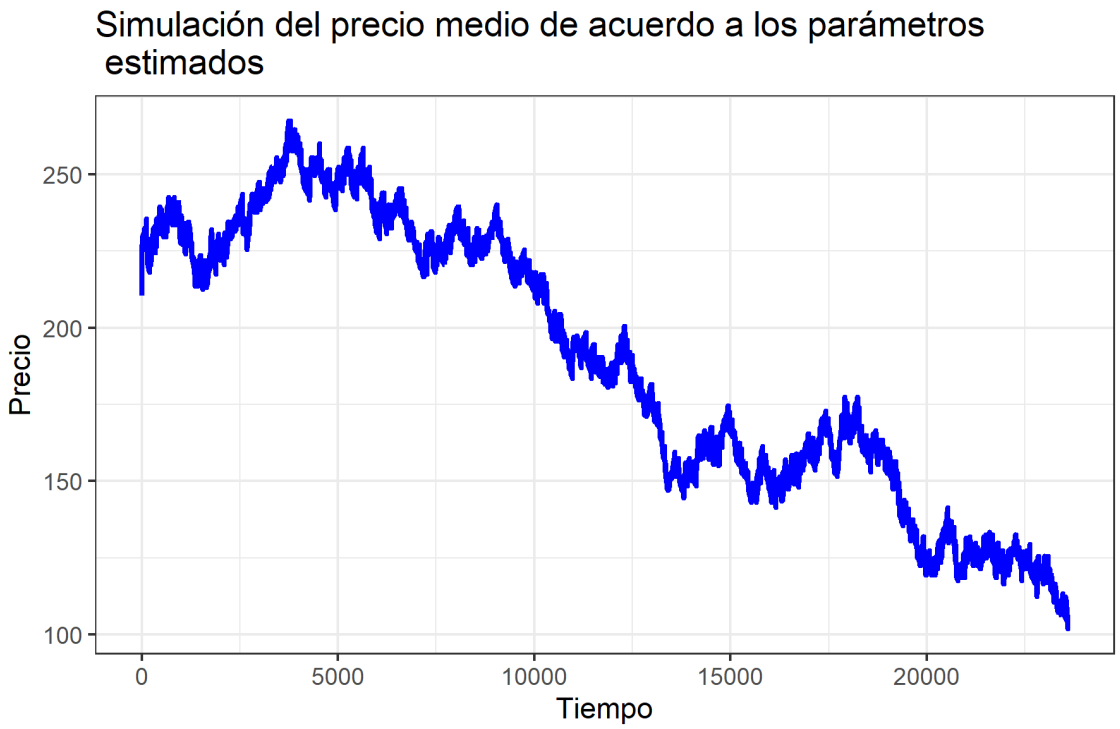


Figura 4-2: Simulación precio medio.

La gráfica **4-2** para el precio medio se asemeja a un proceso de precios real. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, dados los parámetros estimados, los cuales asumen tasas constantes en el transcurso del tiempo, se debería obtener estimación acorde a dichos cálculos. Puntualmente la trayectoria estimada esta influencia por tasas más alta de órdenes de mercado y cancelación que de órdenes límite, lo que podría llevar de manera apresurada a subvalorar el precio del activo.

4.4. Aproximación a la forma promedio

Como se mencionó en la sección 2.2.1, de acuerdo a [Bouchaud et al., 2002] hay evidencia de que el libro de órdenes sigue una forma promedio en el comportamiento del volumen de transacciones dado un determinado precio. De manera descriptiva, para darle fuerza a esta evidencia, se procedió a graficar la evolución de los primeros 5 precios ASK para observar su comportamiento en el tiempo. Como se puede evidenciar en las gráficas **4-3** a **4-7**, hay picos muy marcados en tiempos particularmente similares, donde llama la atención los grandes volúmenes para el precio ASK1 y el ASK2 finalizando la jornada de negociación.

Esto puede ser debido a la incidencia de los fondos de inversión y grandes participantes que funcionan como creadores de mercado, y los cuales dejan órdenes límite activas con cantida-

des considerables de acciones culminando las ruedas de negociación para que en el periodo de no actividad estas queden pendientes de ejecución y logren cierta ventaja sobre el precio en la rueda de negociación del siguiente día. Por otro lado, pasados los 50.000 microsegundos, se presenta un pico para los 5 niveles. Dado lo anterior y siguiendo a [Bouchaud et al., 2002] a priori no hay una forma clara o estable del libro como consecuencia del flujo de órdenes, sin embargo las gráficas para los 5 niveles dejan ver un comportamiento similar en todas, llevando a concluir que muy posiblemente el volumen en los primeros niveles del precio presenten una forma estacionaria, en el sentido de su evolución y similitud. En la gráfica **4-8** se superponen estas cantidades, donde se puede ver de manera más clara su semejanza.

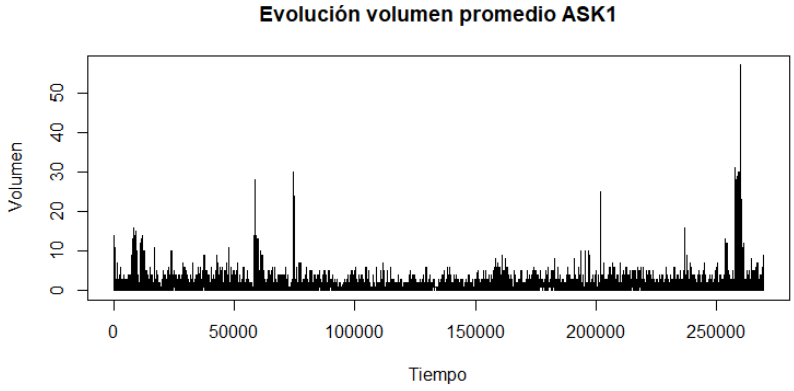


Figura 4-3: Volumen promedio a una distancia de 1 tick.

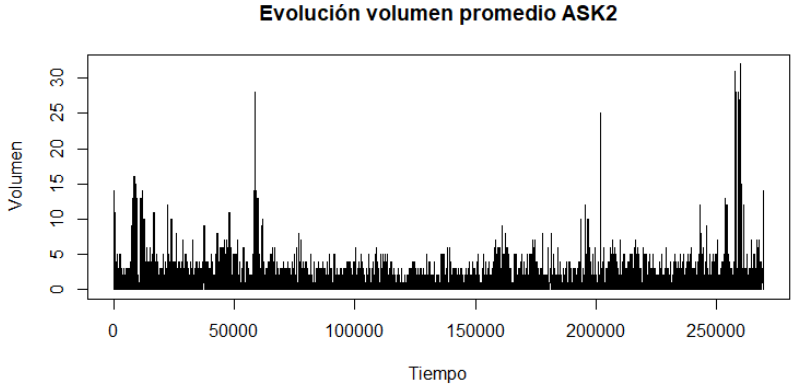


Figura 4-4: Volumen promedio a una distancia de 2 tick's.

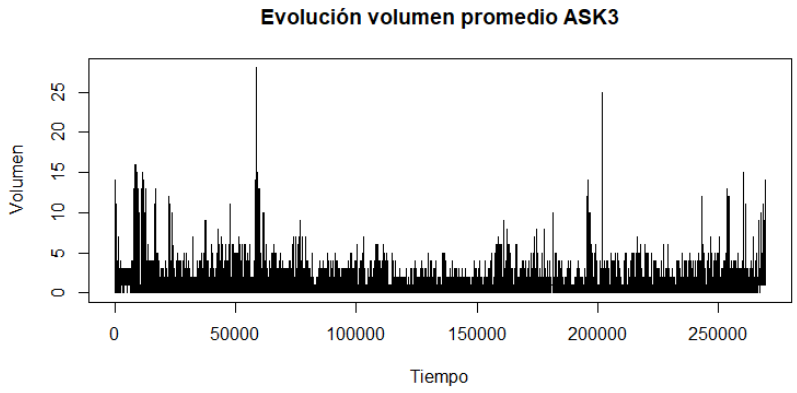


Figura 4-5: Volumen promedio a una distancia de 3 tick's.

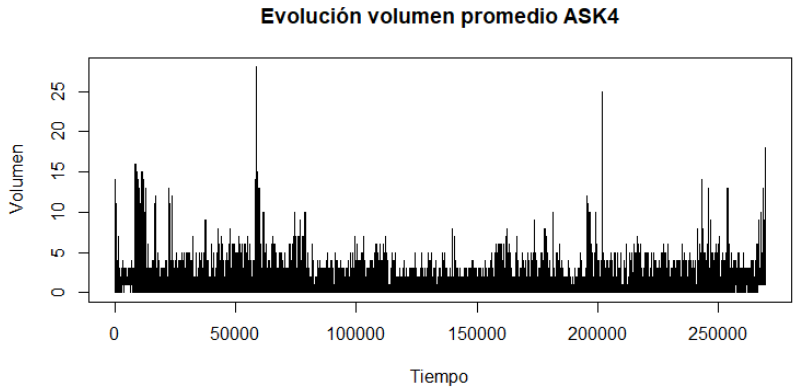


Figura 4-6: Volumen promedio a una distancia de 4 tick's.

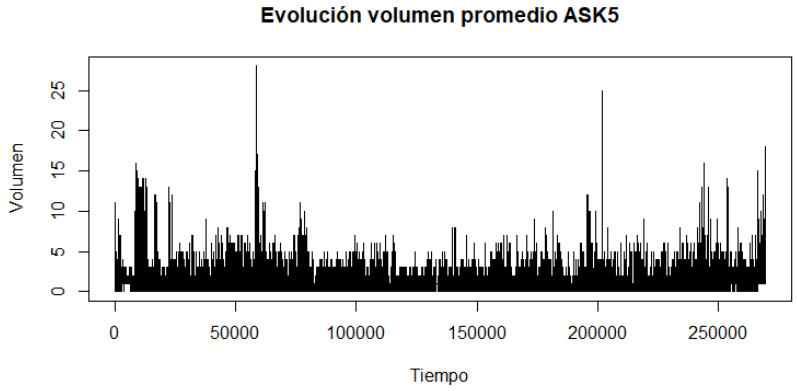


Figura 4-7: Volumen promedio a una distancia de 5 tick's.

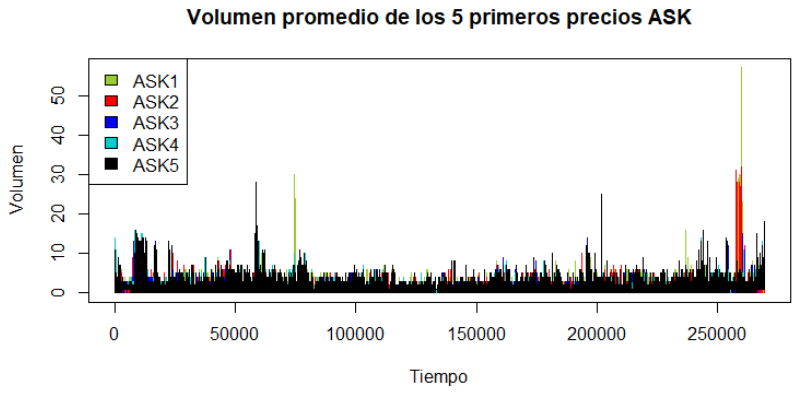


Figura 4-8: Superposición de los volúmenes promedio.

Por otro lado, revisando la gráfica del variograma $\hat{V}(k)$ ver gráfico **4-9** se presenta el caso de un proceso estacionario en covarianza, donde se evidencia una tendencia hacía un valor constante. El desfase temporal es de 8 ticks y no hay relación lineal en estos ticks para la formación del volumen

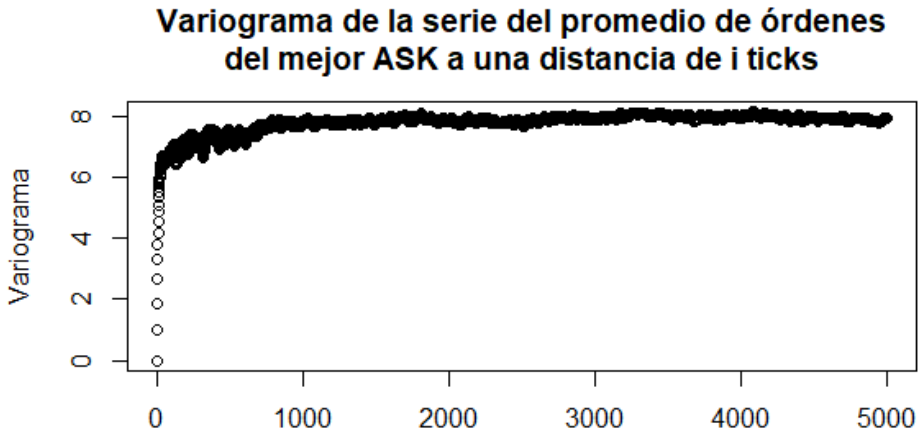


Figura 4-9: Variograma serie promedio de órdenes.

Correlación entre el volumen y la distancia

Como indica [Bouchaud et al., 2002] es de gran interés estudiar la correlación entre el volumen entrante ϕ y la distancia Δ entre la orden y el precio actual. El volumen promedio condicional $(\phi|\Delta)$ es apróximadamente independiente de Δ entre 1 y 20 ticks.

Verificando lo anterior, ajustado a la datos, se obtienen los siguientes resultados

Correlación entre el volumen y la distancia para $1 \leq i \leq 20$ ticks

$$\hat{\rho} \approx -0{,}1060$$

y la correlación para todos los ticks

$$\hat{\rho} \approx -0{,}0917$$

Los resultados anteriores son consecuentes, es decir, no hay relación directa entre el volumen y la distancia , por lo menos para los primeros 20 ticks.

Ajuste de la distribución del volumen

Recuerde que una distribución Gamma viene dada por:

$$f\left(x\right) \propto x^{\alpha-1} exp^{-\beta x}$$

con parámetros $\alpha, \beta > 0$
De acuerdo a lo anterior, la expresión 2-2, que denota la distribución $R(V)$ del volumen ya sea en el lado del BID o ASK, puede ser ajustada con una distribución Gamma de la forma

$$R(V) \propto V^{\gamma-1} \exp\left(-\frac{V}{V_0}\right)$$

con parámetros $\alpha = \gamma, \beta = \frac{1}{V_0}$, donde los estimadores de máxima verosimilitud de α y β para la distribución del volumen son

$$\hat{\alpha} = 6{,}78 \quad y \quad \hat{\beta} = 0{,}3$$

en la gráfica **4-10** se puede evidenciar el ajuste a la distribución real. Por lo tanto, el volumen podría ser modelado de acuerdo a dicha distribución.

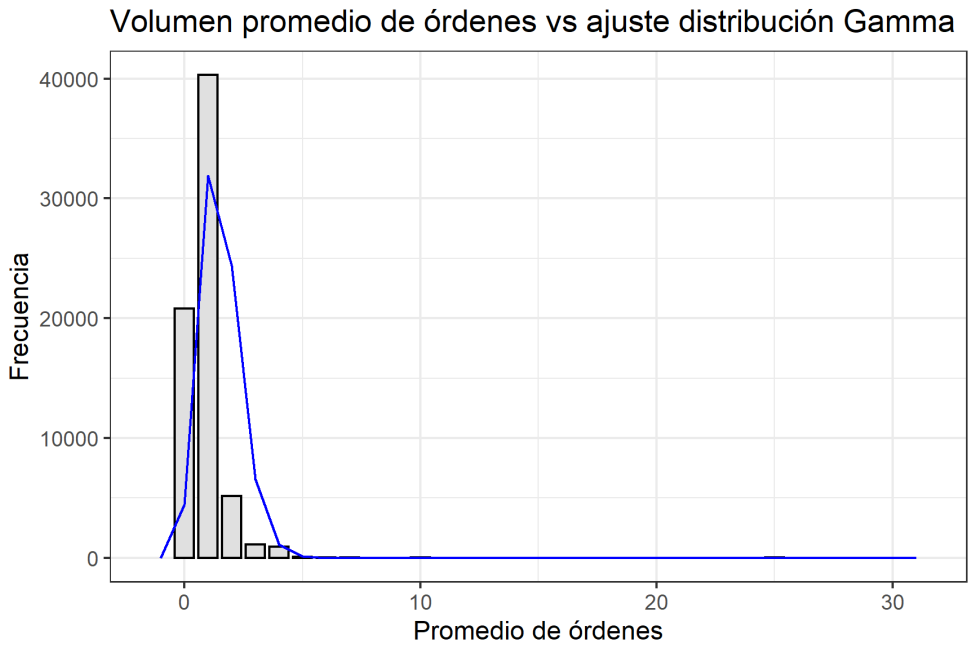


Figura 4-10: Volumen promedio vs Gamma ajustada

4.5. Ajuste del modelo

Acá se intentará verificar vía gráfica que los datos observados se ajusten al modelo propuesto por [Cont et al., 2010] de acuerdo a los supuestos y a la naturaleza del estimador de la tasa de ordenes límite lambda para una profundidad de i tick's, $i = 1, .., 5$. También se harán pruebas de bondad de ajuste para fortalecer los resultados de dichos gráficos.

Se extraen los tiempos entre arribos de órdenes límite para una profundidad de i tick's, $i = 1, .., 5$ y se analizan estas series para cada caso de acuerdo a los siguientes gráficos:

a. Gráfico de la función de autocorrelación: para cada profundidad se encuentran rezagos importantes la gráfica de la función de autocorrelación, lo que lleva en primera instancia a concluir a priori que existe dependencia en los datos, esto es, estos tiempos entre arribos nos son del todo independientes e idénticamente distribuidos y puede que algún efecto de mercado o de ese día de negociación puntualmente estén permeando dicho comportamiento.

b. Función de distribución acumulada empírica vs distribución teórica, de acuerdo al λ estimado para cada profundidad: para cada profundidad, no se encuentra similitud en el ajuste entre estas dos curvas donde la línea negra es de los datos observados y la línea roja la distribución teórica de acuerdo a la estimación de la tasa λ y que están en la tabla **4-2**.

c. Gráfico de menos el logaritmo de la función de supervivencia: de acuerdo a la definición de la función de distribución para una variable aleatoria que se distribuye exponencial con parámetro λ dada en la sección 2.3.1 es:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad para \quad t \geq 0$$

como se está trabajando con datos observados, se denota la distribución cumulada empírica por:

$$\hat{F_T}(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad para \quad t \geq 0$$

y la distribución de la función de supervivencia viene dada por:

$$\hat{R_T}(t) = 1 - \hat{F_T}(t)$$

por lo tanto:

$$\hat{R_T}(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

tomando el menos logaritmo de la función anterior, se obtiene:

$$-\log \hat{R_T}(t) = P(T > t) = \lambda t$$

De acuerdo a lo anterior, si se grafica este resultado debería de mostrar un patrón lineal. Para cada profundidad, se puede observar que no hay patrón de linealidad claro dado este resultado para cada nivel, lo que llevaría a pensar que los datos no provengan de una distribución exponencial.

d. Gráfico cuantil - cuantil: se muestra diferencias notables entre la función distribución para cada nivel de profundidad y la distribución exponencial. Adicional, los ejes no conservan la misma escala, lo que indica que la pendiente de la recta no tiene una pendiente pronunciada.

e. Gráfico de 21 submuestra para la tasa λ: para cada muestra de tiempos entre arribos a una profundidad i con $i = 1, ..,5$, se fraccionó dicha muestra en 21 submuestras de igual magnitud y para cada una de estas últimas se calculó una tasa λ proporcional al tiempo, es decir, se obtienen 21 tasas por cada tick de profundidad. Esto con el fin de verificar que estas tasas λ de acuerdo al modelo propuesto por cont se mantienen constantes en el tiempo para cada tick en el tiempo, es decir, de acuerdo a la ecuación 3-7

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_l(i)}{T}$$

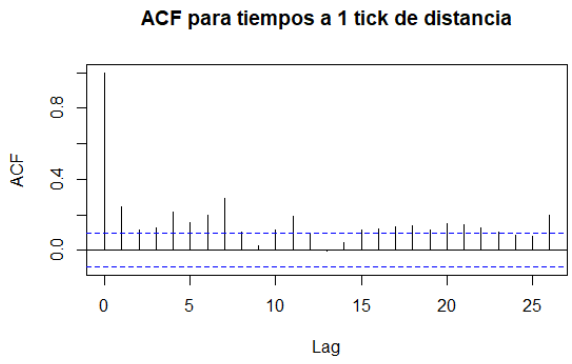
se asume que esta estimación no tiene variaciones en el tiempo, es decir, el proceso es Poisson homogéneo, y al graficar estas 21 tasas que se derivan de las submuestras para cada nivel debería mostrar un valor constante cercano a los valores estimados en la tabla **4-2**. En las gráficas para cada profunfidad se aprecia que estas tasas no son constantes y por el contrario muestran punto atípicos, donde hubo un gran volumen de transacciones en esos periodos específicos. Sin embargo, para una profundidad de 1 tick se ve hasta el λ 12 se ve un patrón constante, incluso se podría asumir también constante después del 13 que es donde está el punto atípico.

Todos los resultados anteriores (a-e) están en los gráficos **4-11**, **4-12**, **4-13**, **4-14**, **4-15**, los cuales corresponden a cada tick i de profundidad con $i = 1, ..., 5$.

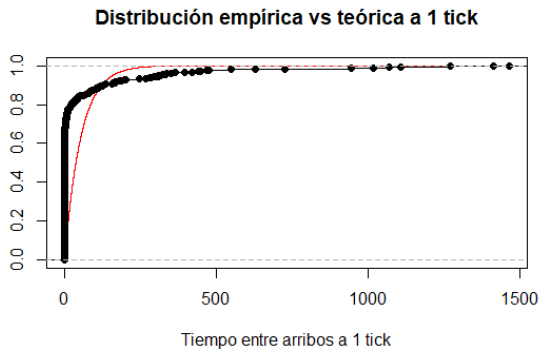
Adicional a las evidencias gráficas, se procede a calcular el coeficiente de variación y las pruebas Kolomgorov – Smirnov y Handerson – Darling para cada nivel de profundidad, donde los resultados están en la tabla **4-4**. De acuerdo a estos resultados, en los cuales los valores p son menores a un valor de significancia de 0.05 en ambas pruebas para todos los niveles de profundidad y los coeficientes de variación no son cercanos a 1, se determina que los tiempos entre arribos para cada nivel no provienen de una distribción exponencial para la muestra observada objeto de análisis.

Tabla 4-4: Coeficiente de variación y pruebas de bondad de ajuste

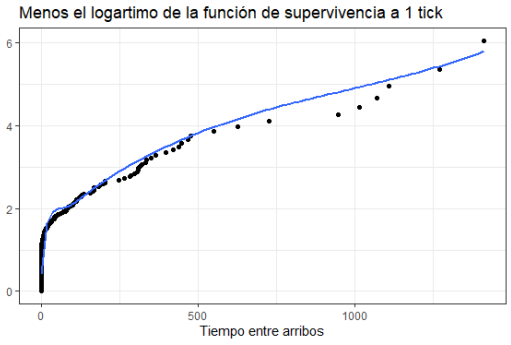
Profundidad	Coeficiente de variación	K - S	A - D
1	3.3124	2.2e-16	1.399e-06
2	2.4568	2.2e-16	1.449e-06
3	2.5835	2.2e-16	1.181e-06
4	2.7649	2.2e-16	9.174e-07
5	2.5121	2.2e-16	6.772e-07



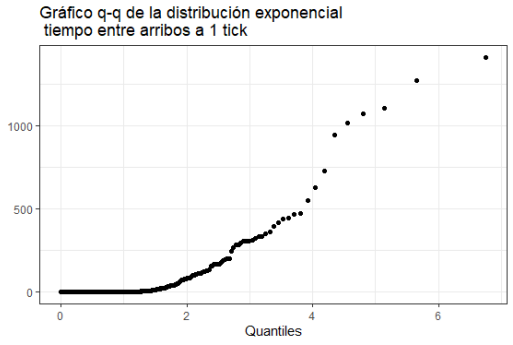
(a) ACF



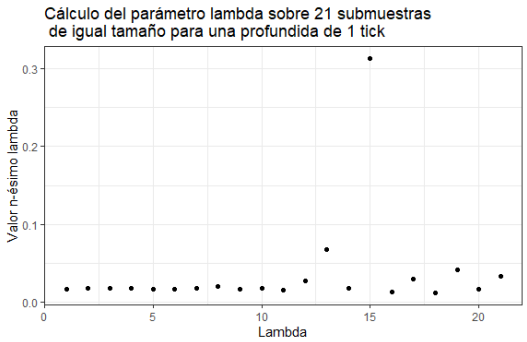
(b) FDA



(c) -log(R(X))

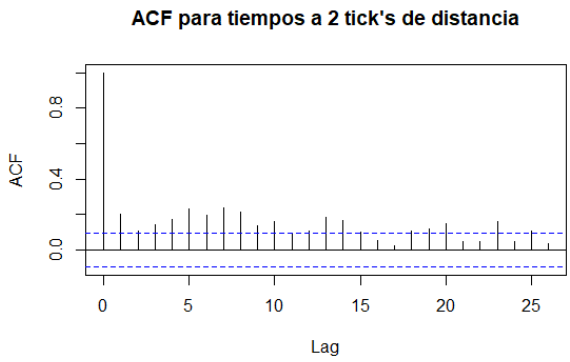


(d) qqplot

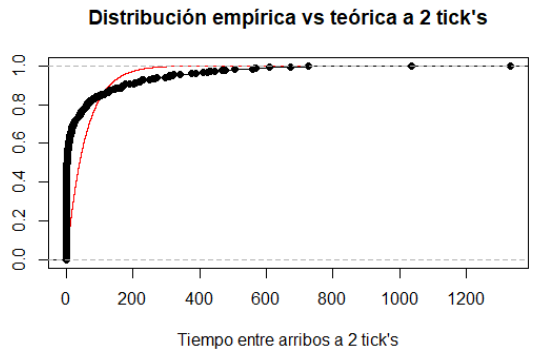


(e) Partición λ

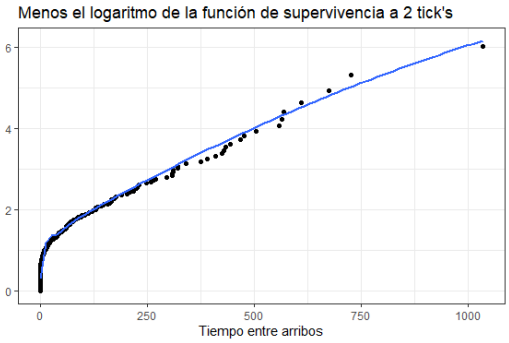
Figura 4-11: Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 1 tick de distancia para las órdenes límite



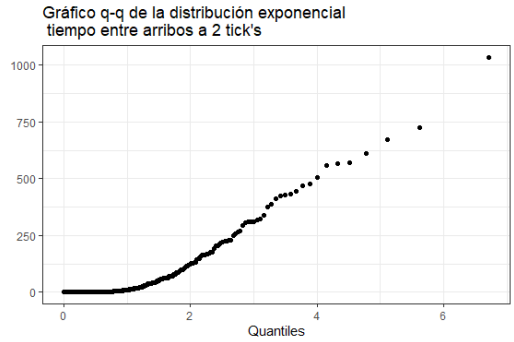
(a) ACF



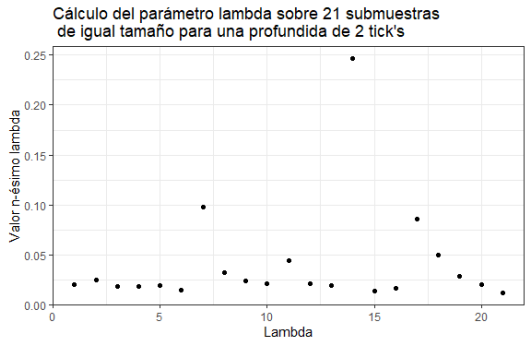
(b) FDA



(c) -log(R(X))

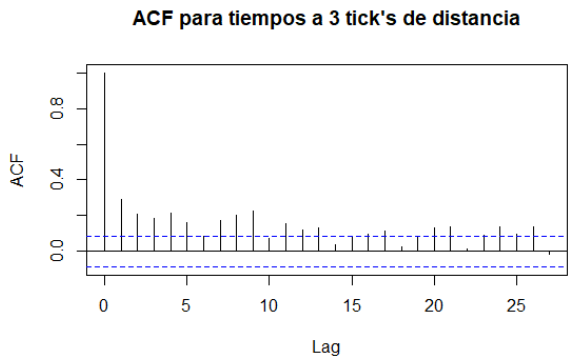


(d) qqplot

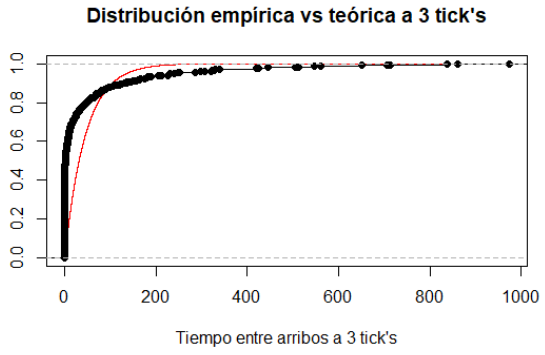


(e) Partición λ

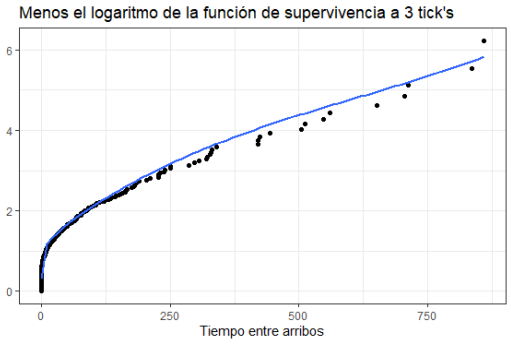
Figura 4-12: Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 2 tick's de distancia para las órdenes límite



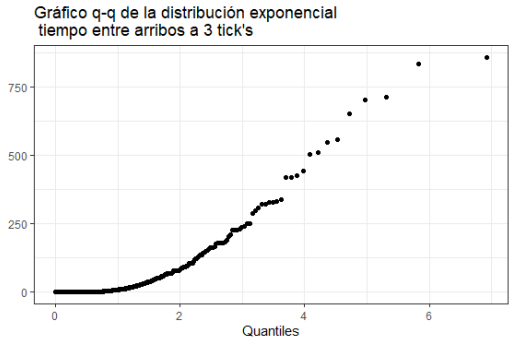
(a) ACF



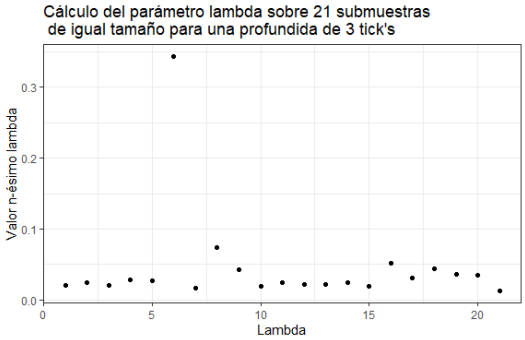
(b) FDA



(c) -log(R(X))

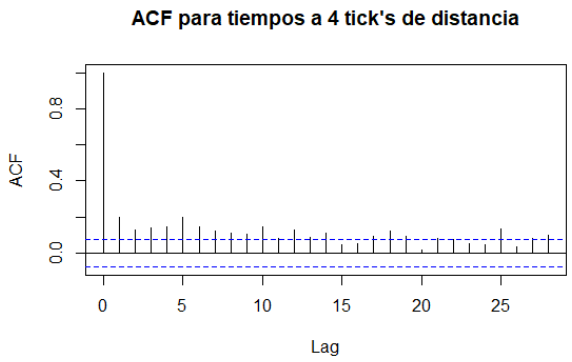


(d) qqplot

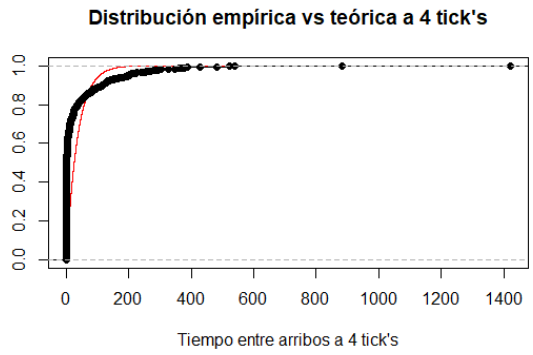


(e) Partición λ

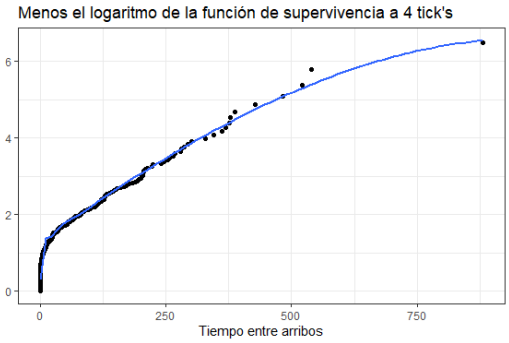
Figura 4-13: Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 3 tick's de distancia para las órdenes límite



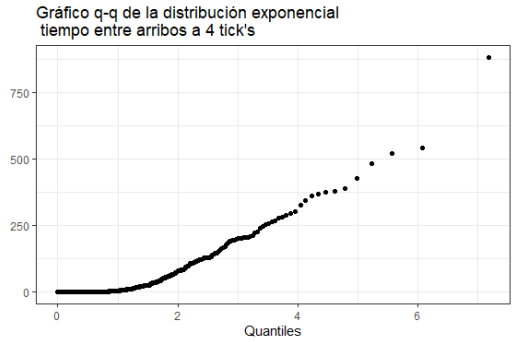
(a) ACF



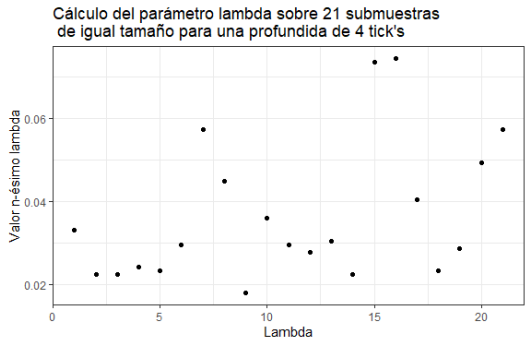
(b) FDA



(c) -log(R(X))

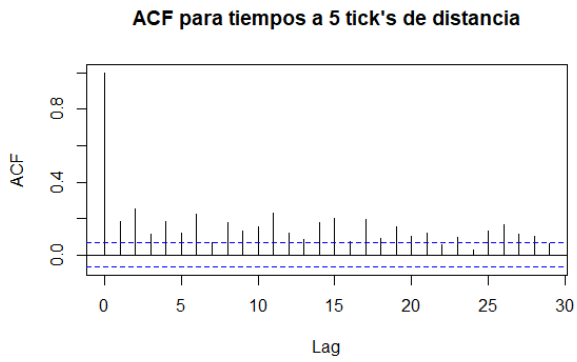


(d) qqplot

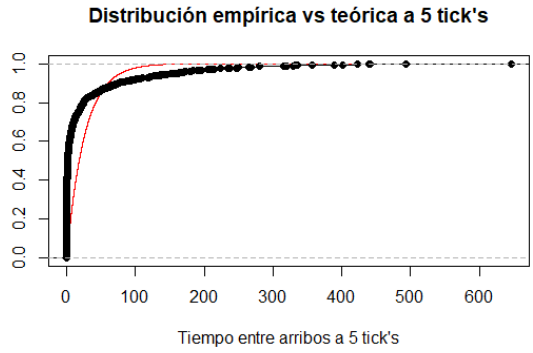


(e) Partición λ

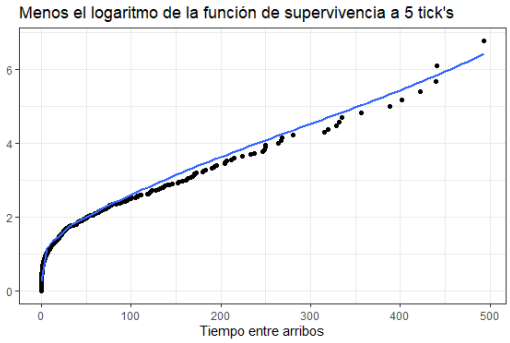
Figura 4-14: Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 4 tick's de distancia para las órdenes límite



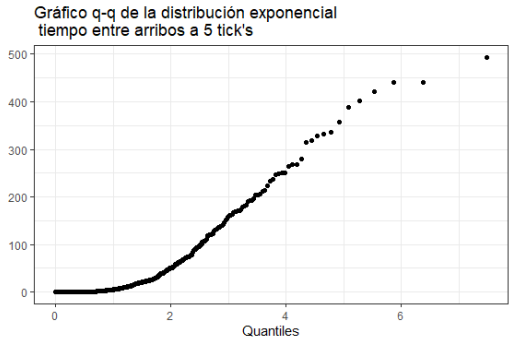
(a) ACF



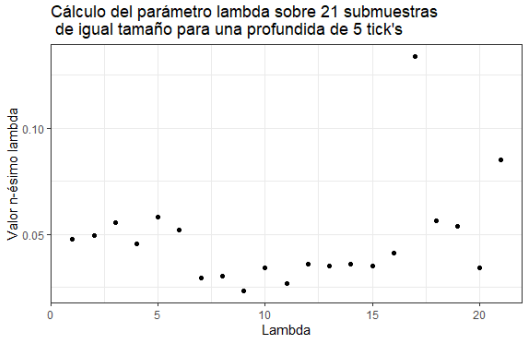
(b) FDA



(c) -log(R(X))



(d) qqplot



(e) Partición λ

Figura 4-15: Ajuste del modelo de acuerdo a los datos observados a 5 tick's de distancia para las órdenes límite

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

- La globalización de los mercados financieros, lo grandes volúmenes de negociación transados, la rápida conexión a la red, la diversidad de productos de inversión a cualquier nivel de riesgo y la gran variedad de inversores (fondos o individuales), hacen que la dinámica del mercado sea cada vez más acelerada y ágil. Lo anterior, hace imprescindible el conocimiento del libro de órdenes, la tasa a la cual llegan éstas y la dirección que presumiblemente pueda tomar el precio medio.

- Una ventaja del libro de órdenes con el cual se trabajo es que muestra el desarrollo tick por tick y no en unidades de tiempo resumidas (minutos, horas, días, etc.), permitiendo así tener una visualización más clara a todos los niveles de profundidad disponibles. Sin embargo, una limitante que se encuentra en la base de datos para la calibración de la tasas λ, μ y θ es que el libro de órdenes está disponible solo para un día. Lo anterior puede ocasionar ruido en la estimación dependiendo del comportamiento de la jornada de negociación para ese día puntual. En los trabajos por ejemplo de [Cont et al., 2010], [Ladeira, 2010] las muestras son datos para meses completos y tienen en cuenta todos los días de negociación, llevando así a mejores estimaciones de los parámetros.

- Específicamente, el libro de órdenes que se analizó, presentó en ese día más actividad en órdenes de cancelación que de mercado, lo que puede llevar a sobre estimar, por ejemplo, en la tasa de cancelación.

- A partir de resultados estimados en la capítulo 4 se puede evidenciar que el modelo propuesto por [Cont et al., 2010] es una buena aproximación teórica para la calibración de tasas, en ausencia de todos los parámetros posibles que puedan influenciar en el comportamiento del libro de órdenes. Dado lo anterior, el modelo de simulación presentado en el capítulo 3 muestra una trayectoria acorde a lo que podría ser el comportamiento de esta acción dados los parámetros calculados.

- Los promedios de los volúmenes de órdenes para los 5 primeros precios ASK muestran un comportamiento similar en el tiempo. Este efecto conduce a una forma promedio que se podría mantener para varios niveles de precios, siempre y cuando en los niveles más alejados no tengan lugar alteraciones atípicas como manipulación de precios o pánicos financieros. Lo anterior da indicios de la no correlación entre el volumen y el nivel de precio al cual se somete las órdenes; esto se confirma mediante el variograma y el coeficiente de correlación.

- El análisis del ajuste del modelo lleva a pensar, como se menciona en la primera parte de este trabajo, en un modelamiento donde las tasas varíen con el tiempo, es decir, en modelar intensidades, ya que si bien el modelo expuesto en [Cont et al., 2010] puede ser una buena aproximación teórica, tiene supuestos muy amplios como por ejemplo establecer las tasas de órdenes límite constantes sin tener en cuenta los picos de alta negociación ya sea del lado de la oferta o demanda. Por otro lado, una limitante durante el desarrollo de este trabajo fue la muestra con la cual se hicieron los análisis, la cual solo toma un día de negociación, sin embargo, en consideración propia, los análisis gráficos para el ajuste del modelo arrojan resultados consecuentes con la realidad de cualquier mercado financiero, donde la alta volatilidad, las dinámicas macroeconómicas e interacción entre los agentes hace necesario que se implementen modelos más robustos.

Recomendaciones

- Un aspecto importante que se recomienda abordar es la volatilidad del activo. Para los inversionistas que deseen administrar su exposición al riesgo, la volatilidad es importante cuando se considera invertir en determinado activo. En particular, la volatilidad intra-día de las cotizaciones BID y ASK y del precio medio son útiles para estimar probabilidad de cambios grandes en el precio para un día determinado [Gould et al., 2013] y entender como esta volatilidad afecta, de manera condicional, a las tasas de llegada de la órdenes. Lo anterior es de gran importancia para los inversionistas enfocados en la especulación.

- La estimación de los parámetros para la tasas de ocurrencias de las órdenes límite, órdenes de cancelación y de mercado en un periodo determinado de tiempo ofrece amplias posibilidades para mejorar la gestión monetaria. Sin embargo, estas no tienen en cuenta otro tipo de órdenes como son las iceberg, las cuales son volúmenes considerables de activos que se dividen a su vez en volúmenes más pequeños de igual tamaño, para posteriormente estas órdenes ser enviadas al libro. Dado lo anterior, se recomienda la forma de calibrar los parámetros teniendo en cuenta este último tipo de orden.

- Como objeto de una próxima investigación, se recomienda utilizar la metodología ex-

puesta en el capítulo 2 para calcular probabilidades de cambio en el precio, la cual es de gran utilidad para las negociaciones de corto y mediano plazo (especuladores).

Apéndice A

Anexo: Nota explicatoria de la proposición 1 del artículo [Cont et al., 2010]

Las siguientes anotaciones están basadas en [Asmussen, 2003].

A.1. El proceso de nacimiento - muerte

Un proceso de nacimiento-muerte $N(t)$ es una cadena de Markov en $\mathbb{N}$ con matriz- de probabilidad

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{t\boldsymbol{Q}}, \tag{A-1}$$

donde la matriz $\boldsymbol{Q}$, es el generador infinitesismal de $X(t)$ que viene dada por

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix} \tag{A-2}$$

La cadena de Markov en tiempo discreto $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ que resulta de atender solo a los estados visitados por la cadena en tiempo continuo $N(t)$ se denomina la cadena *inmersa* asociada a la cadena $N(t)$. Se tiene que la matriz de transición de la cadena Y_n, vienen dadas por

$$\boldsymbol{P}_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix} \tag{A-3}$$

donde

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}, \quad q_i = 1 - p_i = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i}, \tag{A-4}$$

por el momento se asume que p_n no puede tomar ninguno de los valores 0 o 1, lógicamente esto implica irreducibilidad.
Una distribución estacionaria $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ del proceso de nacimiento-muerte es una función (vector) que satisface

$$\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\nu}^T \tag{A-5}$$

$$\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{1} = 1. \tag{A-6}$$

$$\tag{A-7}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (A-1)

$$\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\nu}^T e^{t\boldsymbol{Q}}, \tag{A-8}$$

$$= \boldsymbol{\nu}^T [\boldsymbol{I} + t\boldsymbol{Q} + \frac{1}{2!} t^2 \boldsymbol{Q}^2 + \cdots], \tag{A-9}$$

$$\tag{A-10}$$

Ahora bien de (A-9) vemos que esto último será igual a $\boldsymbol{\nu}^T$ si y solo si

$$\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}. \tag{A-11}$$

A.2. Criterio de ergodicidad

Si una cadena Y_n irreducible y recurrente posee una distribución estacionaria con masa finita se denomina *ergódica* y se tiene el sigueinte resultado

Proposición 1 *Un proceso de Markov con saltos $N(t)$ irreducible y recurrente, es ergódico si y solo si existe una solución (vector) $\boldsymbol{\pi}$ de $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$.*[1] *Tal que $\boldsymbol{\pi}$ es una probabilidad $\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{1} = 1$, en cuyo caso la distribución estacionaria es $\boldsymbol{\pi}$.*

Lema 1 *Irrespectivamente de recurrencia o trancendencia, salvo una constante de proporcionalidad, hay una y solo una solución $\boldsymbol{\nu} = (\nu)_{i\in\mathbb{N}}$ de la ecuación $\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$, dada por*

$$\nu_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \nu_0, \tag{A-12}$$

Dem 1

[1] $\boldsymbol{Q}$ es la matriz de intensidades o generador infinitesimal de $N(t)$, tal que la matriz de probabilidad de $N(t)$ es $\boldsymbol{P}(t) = e^{t\boldsymbol{Q}}$.

Observese que $\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$ es equivalente a las ecuaciones

$$\lambda_0\nu_0 = \lambda_1\nu_1, \quad (\mu_n + \lambda_n)\nu_n = \lambda_{n-1}\nu_{n-1} + \mu_{n+1}\nu_{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{A-13}$$

Ahora, dado el valor de ν_0, se puede verificar por sustitución de (A-12) que estas ecuaciones determinan de forma univoca a ν_n.

■

Ahora defina

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, \tag{A-14}$$

Proposición 2 (Corolario 2.5 en [Asmussen, 2003]) *Una cadena de Markov en tiempo continuo $N(t)$ es ergódica si y solo si se cumple (A-17) y*

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} < \infty, \tag{A-15}$$

en cuyo caso la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$ viene dada por

$$\pi_0 = \frac{1}{S}, \quad \pi_n = \frac{1}{S}\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, \tag{A-16}$$

Proposición 3 *La recurrencia de $N(t)$ o equivalentemente de Y_n es equivalente a la siguiente condición*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty. \tag{A-17}$$

Dem 2

Se aplica el criterio de transitoriedad de la proposición (6) con $i = 0$ (recuerdese que se está asumiendo ya la irreducibilidad $p_i \neq 0, 1$) a $\{Y_n\}$, se deberá buscar $h(k), k \geq 1$, que satisface $h(j) = \sum_{k\neq 0}^{\infty} q_{jk}h(k), j \neq 0$, es decir

$$\begin{aligned}
h(1) &= p_1 h(2), \\
h(2) &= q_2 h(1) + p_2 h(3), \\
&\vdots \\
h(n) &= q_n h(n-1) + p_n h(n+1), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

si se reescriben los lados izquierdos de las ecuaciones como $h(n) = (q_n + p_n)h(n)$ y se resuelve para $h(n) - h(n-1)$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
h(2) - h(1) &= \frac{q_1}{p_1} h(1), \\
h(3) - h(2) &= \frac{q_2}{p_2} h(2) = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} h(1), \\
&\vdots \\
h(n+1) - h(n) &= \frac{q_n}{p_n} h(n) = \cdots = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} h(1), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observese que $h(j)$ sería una función creciente, debido a

$$
h(n+1) = h(1) + \sum_{m=1}^{n} [h(m+1) - h(m)] = h(1) + h(1) \sum_{m=1}^{n} \frac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m}, \tag{A-18}
$$

entonces es claro que salvo una constante de proporcionalidad hay una y solo una función no nula acotada, si y solo si

$$
\sup_n h(n) = h(1) + h(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m} < \infty. \tag{A-19}
$$

■

A.3. La proposición 1 en [Cont et al., 2010]

La siguiente proposición es tomada de [Cont et al., 2010] y $X(t)$ sigue el modelo de proceso de Markov propuesto por los autores del citado artículo.

Proposición 4 *$X(t)$ es un proceso de Markov ergódico. En particular, $X(t)$ posee una distribución estacionaria*

Dem 3

Se demostrará en varios pasos

1. Definase $N \equiv (N(t); t \geq 0)$, donde $N(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} |X_i(t)|$. Ahora $X(t) = (0, \ldots, 0)$ si y solo si $N(t) = 0$. N es un proceso de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento acotada desde arriba por $\lambda \equiv 2 \sum_{i=0}^{n} \lambda(i)$ y tasa de muertes en el estado i, igual a $\mu_i \equiv 2\mu + i\theta$.

2. La demostración consiste en mostrar que el estado cero de X es decir $X = (0, 0, \ldots, 0)$ es un estado recurrente, como claramente $X(t)$ es irreducible se sigue que todos los

estados de la cadena X son recurrentes y por lo tanto la cadena $X(t)$ es ergódica. Ahora $N(t) = 0 \iff X(t) = (0, 0, \ldots, 0)$, por lo que ahora la prueba depende de mostrar que el estado cero de $N(t)$ es recurrente.

Primero se verificará la condición que garantiza una distribución estacionaria de masa **finita**, la condición (A-15)

se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\mu_1 \cdots \mu_i}, \tag{A-20}$$

pero

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\mu_1 \cdots \mu_i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^i = e^{\frac{\lambda}{\theta}} - 1 < \infty,$$

con esta desigualdad se garantiza que la distribución estacionaria posee medida finita, ver la proposición (2).

Ahora se verificará la condición de recurrencia (A-17).

Por la proposición (3) vasta con verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \infty \tag{A-21}$$

ahora bien con $\lambda \equiv 2 \sum_{i=0}^{n} \lambda(i)$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda^i}, \tag{A-22}$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda^i} > \sum_{i=1}^{M} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda^i} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \left(\frac{2\mu + M\theta}{\lambda}\right)^i = \infty,$$

para $M > 0$, suficientemente grande, de tal modo que $2\mu + M\theta > \lambda$. Ahora por el corolario 2.5 en [Asmussen, 2003] el estado cero de $N(t)$ es recurrente

A.4. Funciones armónicas

Si Y_n es una cadena de Markov con espacio de estados E, la distribución estacionaria de la cadena $(\boldsymbol{\pi})_{i\in E}$ es una función (vector) que cumple

$$\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^T, \tag{A-23}$$

la matriz $\boldsymbol{P} = (q_{ij})_{i,j\in E}$ es la matriz de transición de Y_n. Claramente (A-23) explicitamente es

$$\boldsymbol{\pi}(j) = \sum_{i\in E} \boldsymbol{\pi}(i) q_{ij} \tag{A-24}$$

Existe un concepto "dual" relacionado al de distribución estacionaria, a saber, el de un función armónica $\boldsymbol{h}$ definida como un vector propio derecho de P correspondiente al valor propio 1. El requisito $\boldsymbol{Ph} = \boldsymbol{h}$ significa[2]

$$h(i) = \sum_{j\in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i[h(Y_1)] = \mathbb{E}[h(Y_{n+1})|Y_n = i], \quad \text{para cada } i \in E, \tag{A-25}$$

O sea $h(Y_n)$ es una *martingala*.
De forma similar una función $h(i)$ se dice es *sub-armónica* si $\boldsymbol{Ph} \geq \boldsymbol{h}$ en cuyo caso $\{Y_n\}$ es una *sub-martingala*.
Una función $h(i)$ se dice *super-armónica* cuando $\boldsymbol{Ph} \leq \boldsymbol{h}$ en cuyo caso $\{h(Y_n)\}$ es una *super-martingala*

Proposición 5 *Si una cadena de Markov Y_n es irreducible y recurrente, entonces cualquier función $h(i)$ super-armónica no nula es necesariamente constante. Similarmente cualquier función $h(i)$ sub-armónica no nula es necesariamente constante.*

Dem 4

Se demostrará que $h(i) = h(j), \quad i \neq j$. Ahora debido a que una super-martingala no negativa siempre converge se tiene que el límite $Z = \lim h(Y_n)$ siempre existe $\mathbb{P}_i$ -a.s. Como el estado i es recurrente $\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ i.o}) = 1$ (...i.o significa infinitamente frecuente) por lo que se debe tener que $h(i) = Z$. El estado j también es recurrente por lo que debido al mismo argumento $h(j) = Z$.
En el caso de una función sub-armónica se procede de la misma forma utilizando en vez el hecho de que toda sub-martingala acotada converge.

■

[2]Para facilitar la notación, se identificará la función $h(\cdot)$ con las componentes del vector $\boldsymbol{h}_\cdot$, o sea simplemente se considera $h(i) = \boldsymbol{h}_i$.

Proposición 6 *Sea Y_n una cadena de Markov en tiempo discreto, irreducible. Sea i un estado fijo. Entonces la cadena es transitoria si y solo si existe una función no nula acotada $h : E\backslash\{i\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga*

$$h(j) = \sum_{k \neq i} q_{jk} h(k), \quad j \neq i. \tag{A-26}$$

Dem 5

Considerese la función $h(j) \equiv \mathbb{P}_j(\tau(i) = \infty)$, se verifica que $h(j)$ asi definida satisface (A-26) en efecto, "para ir del estado j al estado i es posible pasar en el intermedio por cualquier otro estado k", esto se expresa como

$$\mathbb{P}_j(\tau(i) = \infty) = \sum_{j \neq i} q_{jk} \cdot \mathbb{P}_k(\tau(i) = \infty). \tag{A-27}$$

También si i es transitorio, entonces $h(\cdot) \neq 0$.
Supongase reciprocamente que existe una función $h(\cdot)$ con las propiedades enunciadas, se verá que la cadena debe ser transitoria.
Definase la función $\tilde{h}(\cdot)$ como

$$\tilde{h}(j) = \begin{cases} h(j) & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{para } j = i. \end{cases} \tag{A-28}$$

Como la función $h(\cdot)$ cumple (A-26), se tiene que la función $\tilde{h}$ como vector satisface $\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{h}} \geq \tilde{\boldsymbol{h}}$ por tanto la función $\tilde{h}(\cdot)$ es sub-armónica y si la cadena es recurrente entonces por la proposición (5) la función $\tilde{h}$ es constante por lo que $h(j) = \tilde{h}(j)\tilde{h}(i) = 0$ para $j \neq i$ en contradicción con el supuesto inicial de que $h(\cdot)$ es no nula. Por lo tanto la cadena debe ser transitoria.

■

Bibliografía

[Abate and Whitt, 1999] Abate, J. and Whitt, W. (1999). Computing laplace transforms for numerical inversion via continued fractions. *INFORMS Journal on Computing*, 11(4):394–405.

[Asmussen, 2003] Asmussen, S. (2003). *Applied Probability and Queues*. Applications of mathematics : stochastic modelling and applied probability. Springer.

[Asmussen, 2008] Asmussen, S. (2008). *Applied probability and queues*, volume 51. Springer Science & Business Media.

[Bosq and Limnios, 2012] Bosq, D. and Limnios, N. (2012). *Mathematical statistics and stochastic processes*. Wiley Online Library.

[Bouchaud et al., 2008] Bouchaud, J.-P., Farmer, J. D., and Lillo, F. (2008). How markets slowly digest changes in supply and demand. *Fabrizio, How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand (September 11, 2008)*.

[Bouchaud et al., 2002] Bouchaud, J.-P., Mézard, M., Potters, M., et al. (2002). Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative finance*, 2(4):251–256.

[Bovier et al., 2006] Bovier, A., Černỳ, J., and Hryniv, O. (2006). The opinion game: Stock price evolution from microscopic market modeling. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9(01):91–111.

[Clinet, 2015] Clinet, S. (2015). Statistical inference for ergodic point processes and applications to limit order book.

[Connor and Woo, 2004] Connor, G. and Woo, M. (2004). An introduction to hedge funds.

[Cont et al., 2010] Cont, R., Stoikov, S., and Talreja, R. (2010). A stochastic model for order book dynamics. *Operations research*, 58(3):549–563.

[Dobrow, 2016] Dobrow, R. P. (2016). *Introduction to stochastic processes with R*. John Wiley & Sons.

[Doyne Farmer 5 et al., 2004] Doyne Farmer 5, J., Gillemot, L., Lillo, F., Mike, S., and Sen, A. (2004). What really causes large price changes? *Quantitative finance*, 4(4):383–397.

[Eisler et al., 2012] Eisler, Z., Bouchaud, J.-P., and Kockelkoren, J. (2012). The price impact of order book events: market orders, limit orders and cancellations. *Quantitative Finance*, 12(9):1395–1419.

[Engle et al., 2006] Engle, R. F., Ferstenberg, R., and Russell, J. R. (2006). Measuring and modeling execution cost and risk.

[Foucault et al., 2005] Foucault, T., Kadan, O., and Kandel, E. (2005). Limit order book as a market for liquidity. *Review of Financial Studies*, 18(4):1171–1217.

[Giraldo, 2016] Giraldo, N. (2016). *Econometría financiera aplicada a series de tiempo*. Universidad Nacional de Colombia.

[Gould et al., 2013] Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J., and Howison, S. D. (2013). Limit order books. *Quantitative Finance*, 13(11):1709–1742.

[Gu et al., 2016] Gu, G.-F., Xiong, X., Zhang, Y.-J., Chen, W., Zhang, W., and Zhou, W.-X. (2016). Stylized facts of price gaps in limit order books. *Chaos, Solitons & Fractals*, 88:48–58.

[Harris and Hasbrouck, 1996] Harris, L. and Hasbrouck, J. (1996). Market vs. limit orders: the superdot evidence on order submission strategy. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 31(02):213–231.

[Hendriks, 2014] Hendriks, S. (2014). Building a model for the limit order book.

[Hollifield et al., 2004] Hollifield, B., Miller, R. A., and Sandås, P. (2004). Empirical analysis of limit order markets. *The Review of Economic Studies*, 71(4):1027–1063.

[Huang, 2015] Huang, W. (2015). *Dynamics of limit order book: statistical analysis, modelling and prediction*. PhD thesis.

[Kirilenko et al., 2015] Kirilenko, A. A., Kyle, A. S., Samadi, M., and Tuzun, T. (2015). The flash crash: The impact of high frequency trading on an electronic market. *Available at SSRN 1686004*.

[Ladeira, 2010] Ladeira, J. (2010). Stochastic modeling of order book dynamics.

[Luckock et al., 2003] Luckock, H. et al. (2003). A steady-state model of the continuous double auction. *Quantitative Finance*, 3(5):385–404.

[Lux and Marchesi, 1999] Lux, T. and Marchesi, M. (1999). Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, 397(6719):498–500.

[Martínez, 2008] Martínez, F. V. (2008). *Riesgos financieros y economicos/Financial and economical risks: Productos derivados y decisiones economicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning Editores.

[Maslov and Mills, 2001] Maslov, S. and Mills, M. (2001). Price fluctuations from the order book perspective—empirical facts and a simple model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1):234–246.

[Meudt et al., 2016] Meudt, F., Schmitt, T. A., Schäfer, R., and Guhr, T. (2016). Equilibrium pricing in an order book environment: Case study for a spin model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 453:228–235.

[Obizhaeva and Wang, 2013] Obizhaeva, A. A. and Wang, J. (2013). Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, 16(1):1–32.

[Ortega and Rivero, 2015] Ortega, J. and Rivero, V. (2015). *Modelos Estocásticos*. Cimat A.C.

[Parlour, 1998] Parlour, C. A. (1998). Price dynamics in limit order markets. *Review of Financial Studies*, 11(4):789–816.

[Roşu, 2009] Roşu, I. (2009). A dynamic model of the limit order book. *Review of Financial Studies*, 22(11):4601–4641.

[Smith et al., 2003] Smith, E., Farmer, J. D., Gillemot, L. s., Krishnamurthy, S., et al. (2003). Statistical theory of the continuous double auction. *Quantitative finance*, 3(6):481–514.

[Wrenn, 2012] Wrenn, F. (2012). General birth-death processes: probabilities, inference, and applications.