UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Determinación de la cinética de molienda SAG considerando la influencia reológica de finos en pulpa

Fernando Tulio Valencia Guaricela

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas, CIMEX
Medellín, Colombia
2025

Determinación de la cinética de molienda SAG considerando la influencia reológica de finos en pulpa

Fernando Tulio Valencia Guaricela

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Doctor en Ingeniería - Ciencia y Tecnología de Materiales

Director:

Prof. Moisés Oswaldo Bustamante Rúa Ph.D.

Línea de Investigación:

Mineralurgia – Procesamiento de Minerales

Grupo de Investigación:

IM-CIMEX

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, CIMEX

Medellín, Colombia

2025

Dedicatoria

A mi esposa y mis hijos, fuente de inspiración, apoyo, acompañamiento, comprensión, tolerancia, impulso, admiración, nobleza, consecuencia paciencia y sobre todo amor, gracias siempre.

Agradecimientos

Un agradecimiento muy especial al profesor Moisés Oswaldo Bustamante Rúa, Director del CIMEX, docente investigador de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, por todo el bagaje de conocimiento que con su calidad profesional y humana supo compartir durante el proceso de formación doctoral, para él, mi sincero agradecimiento. Para los compañeros y amigos del CIMEX con quienes se han compartido todo tipo de experiencias y fortalecido el proceso de formación doctoral, y un reconocimiento especial para todo el cuerpo docente de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

Resumen

Determinación de la cinética de molienda SAG considerando la influencia reológica de finos en pulpa

En este estudio se presentan los resultados experimentales obtenidos a escala de laboratorio, donde bajo condiciones de molienda semiautógena SAG controlada, se procedió a la molienda de un monotamaño de mena silícea de 1.25 cm a la que se le añadió una pulpa preparada del mismo material con diferentes concentraciones de fino por debajo de malla 200, considerada ésta una fase contaminante. La investigación determinó la influencia en la cinética de fractura de las partículas gruesas bajo la premisa de que la presencia de finos en una pulpa modifica el comportamiento reológico de un fluido inicialmente de tipo newtoniano como el agua a otro no newtoniano como han mostrado las pulpas minerales. Los resultados obtenidos muestran una relación inversamente proporcional entre la presencia de finos y las velocidades específicas de fractura de las partículas gruesas. Esto permitió desarrollar modelos de función de fractura considerando diferentes escenarios de viscosidad aparente en la pulpa contaminante.

Palabras clave: Molienda SAG, reología, pulpa, velocidad específica de fractura.

Abstract

Determination of Sag Grinding Kinetics Considering the Rheological Influence of Fines in Slurry

The experimental results obtained in the laboratory are presented, where, under conditions of controlled SAG semi-autogenous grinding, a monosize of siliceous ore of 2.54 cm was milled to which a pulp prepared of the same material was added with different concentrations of fine below mesh 200. The objective of the investigation aims to determine the influence on the fracture kinetics of the coarse particles under the premise that the presence of fines in a pulp modifies the rheological behavior of an initially type fluid Newtonian as water to another not Newtonian as mineral pulps have shown. The results obtained show an inversely proportional relationship between the presence of fines and the specific breakeage rate of the coarse particles.

Keywords: SAG grinding, specific breakeage rate, slurry, rheology.

Contenido

Pág.

Resumen ..... **V**

Abstract ..... **VI**

Lista de figuras ..... **IX**

Lista de tablas ..... **XII**

Lista de Símbolos y abreviaturas ..... **XIII**

Introducción **1**

1. Capítulo 1 Marco Teórico y Revisión Sistemática de la Literatura **5**
1.1 Marco Teórico 5
1.1.1 Procesos de Conminución de Materiales 5
1.1.2 La Molienda SAG 12
1.1.3 Fractura 14
1.1.4 Hipótesis de Molienda de Primer Orden 16
1.1.5 Función de Distribución de Fractura Primaria 19
1.1.6 Velocidad de rotación del molino 22
1.1.7 Reología de las suspensiones 25
1.1.8 Clasificación reológica de fluidos 32
1.1.9 Las suspensiones minerales como fluidos 35
1.1.10 Viscosidad relativa de una suspensión 36
1.1.11 Efecto de la adición de partículas a la suspensión 36
1.2 Revisión Sistemática de la Literatura 38

2. Capítulo 2 Desarrollo de Objetivos **45**
2.1 Objetivos de la Investigación 45
2.1.1 Determinar la influencia de la presencia de material fino en la pulpa sobre las principales variables de operación. 45
2.1.2 Correlacionar experimentalmente el consumo energético del molino SAG con la variación reológica de la pulpa. 46
2.1.3 Hipótesis de investigación. 46
2.2 Planteamiento del experimento 46
2.3 Materiales y equipos 47
2.4 Características y preparación del material 47
2.4.1 Preparación de la pulpa contaminante 48
2.5 Diseño experimental 49

2.5.1 Parámetros operacionales de molienda 50

3. Capítulo 3 Resultados 52
3.1 Resultados 52
3.1.1 Condiciones reológicas de la pulpa contaminante 52
3.1.2 Parámetros de modelo de función de fractura 57
3.1.3 Comportamiento de n_1 57
3.1.4 Comportamiento de k 61
3.1.5 Comportamiento de n_2 66
3.1.6 Comportamiento de $n3$ 70
3.1.7 Comportamiento general del modelo de función de fractura 74
3.1.8 Consumo de potencia 76

4. Conclusiones y trabajo futuro 80
4.1 Conclusiones 80
4.2 Trabajo futuro 83

Referencias 85

Lista de figuras

Pág.

Figura 1- 1 Perturbaciones y variables que inciden en procesos de fragmentación..... 8

Figura 1- 2 Configuración típica de circuitos de trituración – molienda convencional 13

Figura 1- 3 Configuración típica de circuitos de trituración – molienda semiautógena.... 14

Figura 1- 4 Ejemplo de gráfico de primer orden; antracita de 16x20 mallas US en un molino de 0.6 m de diámetro. 18

Figura 1- 5 Modelo de función de fractura bimodal..... 20

Figura 1- 6 Trayectorias y efectos de partículas al interior de la cámara de molienda.... 22

Figura 1- 7 Variación típica de la distribución de fractura primaria para partículas grandes (D=0.6 m, d=26.4 mm)..... 23

Figura 1- 8 Variación de la velocidad específica de fractura del tamaño máximo (cuarzo de 20x30 mallas), con el tiempo para varias densidades de pulpa (D=200 mm, d=25 mm, J=0.3, U=1.0). 24

Figura 1- 9 Esquema de cizalla simple..... 26

Figura 1- 10 Gradiente de velocidad entre dos placas. 27

Figura 1- 11 Reograma para un fluido newtoniano de viscosidad (1 Pa s)..... 28

Figura 1- 12 Curvas de flujo y concepto de viscosidad aparente de la suspensión. 30

Figura 1- 13 Viscosidad aparente de una suspensión cizalle adelgazante..... 31

Figura 1- 14 Disipación de energía mecánica por la deformación permanente del fluido. 32

Figura 1- 15 Curvas de flujo de tipos de fluidos..... 33

Figura 1- 16 Viscosidad aparente de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos 35

Figura 1- 17 Variación de la curva de flujo a medida que se adiciona partículas a una suspensión mineral..... 37

Figura 2- 1 Esquema de ejecución de ensayos..... 50

Figura 3-1 Resultados de ensayos reológicos a la pulpa contaminante a diferentes valores de ϕV 53
Figura 3-2 Velocidad específica de fractura S_j con respecto al tiempo para diferentes condiciones de alimento. 54
Figura 3-3 Comportamientos de S_j bajo diferentes valores de ϕV y tiempo de molienda. 55
Figura 3-4 Ajuste exponencial de S_j para datos a 15 minutos. 56
Figura 3-5 Curvas granulométricas de los ensayos en condición seca para diferentes tiempos de molienda. 57
Figura 3-6 Variación de n_1 respecto al tiempo para diferentes condiciones de alimento. 58
Figura 3-7 Ajuste de n_1 sobre los valores medios en función del tiempo. 58
Figura 3-8 Ajustes de n_1 en el tiempo para diferentes condiciones de ϕV. 59
Figura 3-9 Ajuste de n_1 para los valores medios incluido el ensayo en seco. 60
Figura 3-10 Comportamiento de n_1 respecto a ϕV para 10 y 15 minutos, en azul interpuntado la media entre los dos. 60
Figura 3-11 Valor medio de n_1 respecto a la ϕV y su ajuste exponencial. 61
Figura 3-12 Comportamiento del parámetro *k* en la (Ecuación (1.9)) en el tiempo para diferentes condiciones de alimento. 62
Figura 3-13 Ajuste del parámetro *k* sobre valores medios en el tiempo, sin considerar el ensayo SECO. 62
Figura 3-14 Ajuste logarítmico del parámetro *k* en el tiempo para las diferentes condiciones de alimento. 63
Figura 3-15 Ajuste logarítmico de *k* en el tiempo para las diferentes condiciones de alimento, incluye el ensayo SECO. 64
Figura 3-16 Variación de *k* respecto a ϕV para 10 y 15 minutos, en color azul el valor medio de los dos. 65
Figura 3-17 Ajuste exponencial sobre valores medios de *k* (10 y 15 min) 65
Figura 3-18 Comportamiento de n_2 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento. 66
Figura 3-19 Comportamiento medio de n_2 en el tiempo y ajuste logarítmico. 67
Figura 3-20 Ajuste logarítmico de n_2 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento. 67

Figura 3-21 Comportamiento de n_2 respecto a ϕV para diferentes tiempos. 68
Figura 3-22 Ajuste logarítmico para valores medios de n_2 respecto a ϕV..... 69
Figura 3-23 Ajuste logarítmico de n_2 respecto a ϕV para 10 y 15 minutos. 70
Figura 3-24 Comportamiento de n_3 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento. 71
Figura 3-25 Valores de n_3 medio en el tiempo y ajuste lineal. 71
Figura 3-26 Ajuste lineal para los comportamientos de n_3 en el tiempo bajo diversas condiciones de alimento. 72
Figura 3-27 Comportamiento de n_3 respecto a ϕV para diferentes tiempos. 73
Figura 3-28 Ajuste exponencial de n_3 en función de ϕV para la media 10 y 15 minutos.73
Figura 3-29 Comportamiento de parámetros n respecto a ϕV 74
Figura 3-30 Gráfico de doble entrada, muestra el comportamiento de B_{ij} y $S_{j.}$ para variaciones de ϕV..... 75
Figura 3-31 Modelos de función de fractura construidos para diferentes condiciones de ϕV..... 75
Figura 3-32 Fracción de sólidos *wi(t)* para diferentes condiciones de ϕV..... 76
Figura 3-33 Variación de la potencia *mp* suministrada al molino en función del tiempo para diferentes condiciones de alimento..... 77
Figura 3-34 Contraste de la variación de potencia y la velocidad específica de fractura S_j. 78
Figura 3-35 Ajuste del consumo de potencia *mp* en función de ϕV para los valores de 10 y 15 minutos..... 79

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1: Postulados empíricos de aproximación de energía de fractura. 15
Tabla 1-2: Unidades de viscosidad. 28
Tabla 2-1: Valores de Viscosidad. 48
Tabla 2-2: Parámetros operacionales del molino de laboratorio..... 50
Tabla 3-1: Relaciones volumétricas y másicas de la pulpa contaminante. 53

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
A	Área de contacto de la bola en la carga activa	m^2	Anexo A
B	Número de bolas en la carga activa	u	Anexo A
$B_{i,j}$	Distribución fractura primaria	-	Ec. 1. 6, 1. 8, 1. 9 Figura 1-7
$b_{i,j}$	Fracción en peso de los tamaños de fractura	-	Ec. 1. 6
d_b	Diámetro de la bola	m	Anexo A Ec. 1. 11
D_m	Diámetro interior del molino	m	Ec. 1. 11
dN	Pérdida promedio de la velocidad de rotación por cada capa	rpm	Anexo A
dU	Promedio de la velocidad relativa entre capas	m/s	Anexo A
k	Fracción de productos secundarios que contribuyen a la fracción más fina		Ec. 1. 8, 1. 9, 3. 3 Figura 3-13, 3-14, 3-15, 3-16, 3-17, 3-18
F	Flujo másico de mineral que se alimenta al molino	-	Punto 1.1.1
F	Fuerza	N	Ec. 1. 14
J	Fracción de llenado de bolas	-	Anexo A
G	Constante de gravitación universal	m/s^2	Anexo A
h	Espesor del fluido	cc	Figura 1-10
n_i	Funciones de la energía de impacto	-	Figura 3-11, 3-18, 3-19, 3-20, 3-21, 3-22, 3-

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
			23, 3-24, 3-25, 3-26, 3-27, 3-28, 3-29
N_m	Velocidad de rotación del molino	rpm	Anexo A
L	Largo del molino	m	Anexo A
Ñ	Valor medio de la tasa de rotación	rpm	Anexo A
$\bar{r}$	Posición radial de la carga activa	m	Anexo A
r_m	Radio lineal interior del molino	m	Anexo A
S_j	Tasa o velocidad específica de fractura del material de tamaño *j*	-	Ec. 1. 4, 1. 5, 1. 7, 3. 1, Figura 3-2, 3-3, 3-4
t	Tiempo	min	Anexo A
U	Fracción de huecos	-	Anexo A
V_c	Velocidad crítica	rpm	Ec. 1. 10
V_m	Volumen del molino	m^3	Anexo A
v_0	Velocidad del fluido en determinación de la tasa de cizalladura	ms^{-1}	Ec. 1. 13
V_s	Volumen neto de suspensión en la carga activa	m^3	Anexo A
W	Cantidad de masa disponible para fragmentarse en el molino		Ec. 1. 2, 1. 3
w	Fracción de tamaño 1		Ec. 1. 2
w_j	Masa de material de tamaño *j*	-	Ec. 1. 4
xm	Espesor promedio de capa de material al interior del molino	m	Anexo A
z	Función de llenado del molino	-	Anexo A

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\dot{\gamma}$	Tasa de cizalla	s^{-1}	Ec. 1. 12, 1. 13, 1. 15, 1. 16, 1. 17 Figura 1-11, 1-14, 1-15
ε	Intersticios de bolas	-	Anexo A
ξ_t	Fracción de la carga activa	-	Anexo A
η	Viscosidad	Pa s	Ec. 1. 15
θ_S	Ángulo de hombro	rad	Anexo A
θ_T	Ángulo del dedo del pie	rad	Anexo A
τ	Esfuerzo de cizalladura	N/m^2	Ec. 1. 14, 1. 16, 1. 17, 1. 18 Figura 1-11
Φ_v	Fracción volumétrica de finos en pulpa.	-	Figura 3-3, 3-4, 3-10, 3-11, 3-12, 3-15, 3-16, 3-17, 3-20, 3-21, 3-22, 3-23, 3-26, 3-27, 3-28, 3-29, 3-30, 3-31, 3-32, 3-35. Ec. 3-4 Tabla 2- 1
φ_c	Fracción de velocidad teórica critica	-	Anexo A
μ	Parámetro viscoso	-	Ec 1. 16, 1. 17, 1. 19

Abreviaturas

Abreviatura	Término
AG	Autogenous Grinding
DEM	Discrete Element Method
DTP	Distribución de tamaño de partículas
FAG	Full Autogenous Grinding

Abreviatura	**Término**
HCF20	Húmedo con finos con 20% de fracción de sólido en peso
HCF40	Húmedo con finos con 40% de fracción de sólido en peso
HCF50	Húmedo con finos con 50% de fracción de sólido en peso
HSF	Húmedo sin finos
JKMRC	Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre
SAG	Semi-Autogenous Grinding
SHP	Smoothed Particle Hydrodynamics

Introducción

La creciente demanda de materias primas minerales ha generado el crecimiento en la explotación minera a nivel mundial, ligado a ella los procesos de concentración y beneficio conforman una industria altamente demandante en cuanto a energía se refiere. A manera de referencia, la Comisión Chilena de Cobre COCHILCO ha reportado la participación de los procesos de concentración en consumo de energía del 28% para el 2022, en cuanto al consumo de electricidad particularmente las plantas de concentración participan en 52.5% del consumo global y de ellos el 68% lo demandan los procesos de trituración y molienda (COCHILCO, 2016).

Un análisis histórico de producción de cobre para el caso chileno desde 1991, muestra un crecimiento medio anual de 0.6% alcanzando en 2022 una producción de 5.33×10^6 TM de cobre fino, mientras que el consumo de energía se ha incrementado en el mismo período en 115.7%, explicado esto por el empobrecimiento de los yacimientos, lo que obliga a procesar menas de baja ley y en mayores volúmenes.

Debido a la baja eficiencia energética asociada a los procesos de conminución de minerales, en donde apenas una fracción de la energía entregada al proceso es utilizada en fragmentación del mineral propiamente (Góralczyk et al., 2020), se puede considerar que la optimización de estos procesos es muy protagónico en los encadenamientos minero-metalúrgicos de un proyecto minero, y por ello, uno de los principales objetivos identificados desde sus inicios, está en el mejoramiento y optimización de los procesos de trituración y molienda de minerales en procesos mineralúrgicos.

Considerando la gran cantidad de factores que inciden en los procesos de conminución desde las características mineralógicas y petrográficas de los minerales involucrados tales como; dureza (Chitalov, 2018), tamaño de liberación (Lynch, 1977) hasta las tecnológicas como el equipo utilizado (Baldassarre *et al.*, 2020), se podría decir que varios e importantes avances se han logrado a través del desarrollo de la base teórica, desde los postulados

clásicos que estiman la aproximan la energía específica de fractura, pasando por la teoría de fallas de Griffith y finalmente; el efecto del comportamiento viscoelástico de los materiales antes de la fractura, y la propia mecánica de fractura (Austin & Concha, 1994) que explica el comportamiento de los materiales y su fractura, como un mecanismo termomecánico de transferencia energética, proponiendo diferentes teorías que integran campos como la termodinámica, mecánica de rocas, de fluidos, reología, etc. (Bustamante et al., 2016).

Es justamente en el campo de interpretaciones reológicas, en donde en los últimos años se ha considerado el comportamiento mecánico de una pulpa mineral como un posible factor incidente en el proceso de fractura de los sólidos que forma parte de las suspensiones, ya que un comportamiento viscoelástico ante la presencia de esfuerzos mecánicos genera disipación de energía retardando los mecanismos de fractura y favoreciendo los de deformación, tales como se menciona en ‑molienda convencional (F. Shi & Napier-Munn, 1996), (Osorio, 2015), (Porras, 2016), entre otros.

Para la molienda semiautógena (SAG del inglés “*Semi-Autogenous Grinding*”), proceso usado actualmente en plantas de beneficio de proyectos de mediana y gran minería metálica, la incidencia de la humedad y de la fracción de finos en cámara de molienda, es un aspecto recientemente estudiado (Osorio, 2015) respecto a la incidencia que tiene sobre la fragmentación y la cinética de formación de la progenie, de aquí la importancia de profundizar su estudio.

La hipótesis relacionada con las características reológicas de las suspensiones con partículas relativamente más finas que están mezcladas con las colpas que van a ser fragmentadas en molienda SAG influye sobre la cinética de fractura de minerales frágiles, se evalúa desde el incremento de la desviación de la cinética de orden uno y la disminución de los procesos de nacimiento-muerte de fractura convencional. Visto así, el objetivo principal de la investigación fue estudiar la cinética de la molienda SAG de un mineral silíceo considerando la alteración reológica de la pulpa conformada por finos en el alimento.

La hipótesis planteada en la investigación declara que “la condición reológica de la pulpa en molienda SAG influye sobre la cinética de molienda SAG de materiales silíceos, incrementando la desviación de la cinética de orden uno y disminuyendo los procesos de nacimiento-muerte de fractura convencional”. Los objetivos específicos pretenden por su parte, determinar la influencia de la presencia de material fino en la pulpa sobre las principales variables de operación y correlacionar experimentalmente el consumo energético del molino SAG con la variación reológica de la pulpa.

El experimento se llevó a cabo utilizando una cámara de molienda SAG a escala de laboratorio, operada en modalidad "batch". Se evaluaron diferentes condiciones de humedad y contenido de finos en el alimento con el objetivo de generar variaciones reológicas al inicio del proceso, utilizando material de monotamaño en las pruebas. Las condiciones de operación de los equipos e instrumentos de laboratorio permitieron un control de las variables operacionales garantizando estabilidad del proceso en las mismas y por ende en confiabilidad de los resultados alcanzados.

Los resultados alcanzados en este trabajo pueden servir como partida para profundizar el estudio del comportamiento reológico y su incidencia en la mecánica de fractura en molienda SAG.

La principal dificultad de trabajar de forma experimental sobre procesos de molienda en general y específicamente en molinos SAG, se relaciona a la escala sobre la cual los ensayos se identifican como representativos de los fenómenos y mecanismos esperados a escala industrial, por ejemplo la energía potencial alcanzada por una colpa mineral en un molino de 6.0 m de diámetro que genere un impacto eficaz sobre una partícula mineral desencadenando los mecanismos de fractura correspondientes, no tendrían por qué ser proporcionales hacia un modelo escala de laboratorio. De ahí la necesidad de tomar los resultados de este estudio como partida hacia el entendimiento y comprensión o posible desarrollo posterior de modelos de escalamiento.

Este informe presenta la sistematización de las actividades desarrolladas hasta la consecución de los objetivos planteados, inicialmente se presenta la base teórica de

referencia en la que se incluyen fundamentos sobre el proceso de conminución, aspectos cinéticos y termo mecánicos de la fractura y reología de pulpas. Luego se aborda la revisión sistemática de la literatura en el que se han considerado aportes significativos referidos a molienda SAG, reología de pulpas, modelación y optimización de procesos de molienda.

.

1. Capítulo 1 Marco Teórico y Revisión Sistemática de la Literatura

1.1 Marco Teórico

1.1.1 Procesos de Conminución de Materiales

Los procesos de conminución engloban actividades enfocadas en reducir el tamaño de los fragmentos de material procesado. En este contexto, se distinguen dos fases principales: trituración y molienda.

- ***Trituración***. Proceso de reducción de tamaño de fragmentos provenientes de voladura de frentes de explotación, cuyos tamaños característicos que alimentan este proceso son del orden de metros (1.00 a 0.60 m), mientras las descargas son del orden de centímetros (2.00 a 0.50 cm), entendemos que este proceso requiere equipos grandes y robustos capaces de transmitir esfuerzos considerables mediante impactos principalmente, dependiendo del tipo de material (prestaciones mecánicas) y sus condiciones de humedad especialmente, pueden utilizarse trituradoras de mandíbulas, conos, de martillo, rotatorias entre otras (Lynch, 1977).
- ***Molienda***. Proceso de fragmentación fina en que los medios moledores colisionan y atricionan para generar fractura de partículas relativamente finas menores a 0.5 cm y alcanzan tamaños hasta el orden de micrón. Se ha clasificado en función de los equipos utilizados: molienda convencional y la no-convencional, la primera utiliza los conocidos molinos de bolas y de barras, mientras que los segundos los denominados molinos autógenos FAG (del inglés; Full-Autogenous Grinding) y semiautógenos SAG (del inglés; Semi-Autogenous Grinding”). Básicamente su diferencia radica en la fracción de llenado aparente de carga de medios moledores en el molino, mientras que en molienda

convencional esta fracción está entre el 35 y 45% en volumen, en molinos SAG hasta un 15% (Magne, Titichoca, Campi, Valderrama, 2001) mientras que en molinos FAG no se incluye medios moledores. Los molinos AG o SAG se definen por la relación de aspecto del diseño del cilindro y los mecanismos de descarga del producto, la relación de aspecto se define como la relación entre el diámetro y la longitud, tendiendo en éstos a ser valores mayores a la unidad. (Napier-Munn & Wills, 2005)

Es comprensible que los procesos de conminución configuran esquemas con el uso de varias etapas de trituración - molienda y clasificación que permitan el tratamiento requerido, en el mismo se pueden combinar diversos equipos.

La molienda SAG y FAG ha ido cobrando especial importancia considerando algunos aspectos principalmente (Morrell, 2008):

- Capacidad de procesamiento de grandes volúmenes de material,
- Reducir el consumo de medios moledores, como bolas de acero,
- Usar favorablemente la dureza de algunas rocas de caja de yacimientos minerales que promuevan la autofractura, entendida esta como la interacción por transferencia de momentum entre dos fragmentos de roca que genera fragmentación, astillamiento o abrasión (Austin & Concha, 1994).

Los fundamentos teóricos que aproximan la energía de conminución se explican por los fenómenos de deformación y fractura de partículas en molienda de materiales y se inician con las teorías clásicas de Rittinger (1867), Kick (1883) y Bond (1952) (Lynch & Rowland, 2005) y de hecho, las relaciones empíricas desarrolladas por Bond para el diseño de molinos convencionales son preferidas como metodología de cálculo hasta hoy en día. Sin embargo, para sistemas no convencionales como la molienda semiautógena, no da buenos resultados.

El proceso de fractura de minerales en molinos rotatorios es un evento de transferencia energética, mediante el cual energía mecánica de medios moledores (bolas, placas, barras, etc..) se transfiere a las partículas minerales por acción del movimiento rotacional de la cámara de molienda, lo que genera impactos y fricción de los cuerpos moledores con

el material a moler que requiere un comportamiento elástico-frágil para desarrollar fractura. Está transferencia energética finalmente concluye en la fragmentación del material cuando los esfuerzos transferidos sobrepasan la resistencia de las partículas (Austin & Concha, 1994).

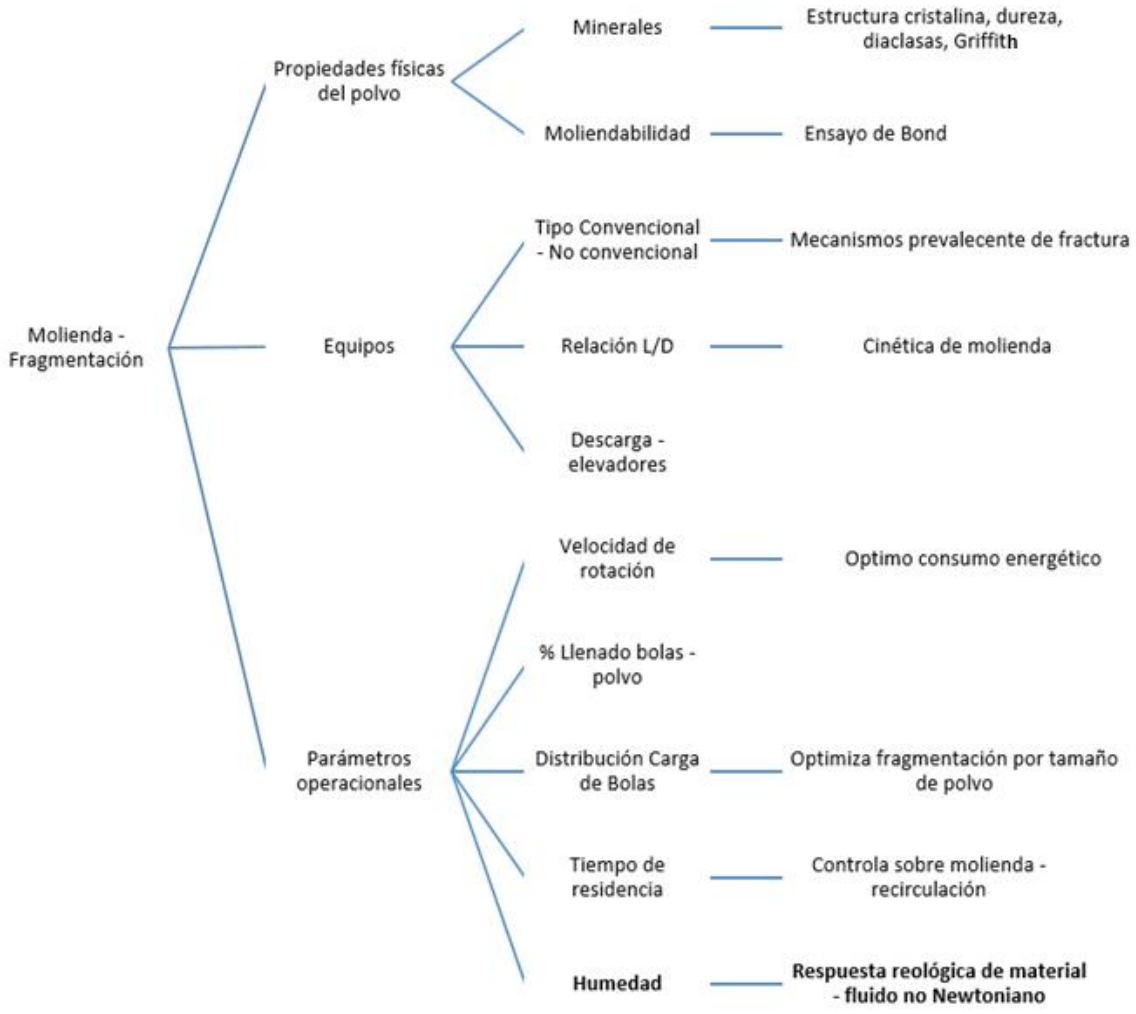
Claro está también que, en el proceso descrito tanto por los equipos utilizados como por las condiciones de operación al interior de la cámara de molienda, la transferencia indicada es poco eficiente, de hecho, resulta fácil intuir que mucha de la energía utilizada en mover los molinos, es disipada en forma de: (Austin & Concha, 1994).

- Calor por la fricción de los elementos mecánicos, la fricción entre cuerpos moledores, polvo y la cámara del molino.
- Ruido por el impacto y la fricción al interior de la cámara de molienda.
- Deformación elástica de materiales.
- Deformación plástica que no alcanza para generar la rotura del material.
- Desgaste de medios moledores.

(Lowrinson, 1974), refiere que aproximadamente del 100% de energía entregada al eje de un molino, apenas el 1% es utilizada efectivamente en la fracturación del material. De aquí la necesidad de comprender la fenomenología de los procesos de molienda en función de generar operaciones energéticamente más eficientes.

Intuitivamente podemos entender que, el proceso de fragmentación de un mineral al interior de un molino es muy complejo (Austin & Concha, 1994), y sobre el cual podemos identificar varios factores influyentes relacionados unos con la naturaleza del material y podemos definirlos como perturbaciones y otros relacionados al proceso mismo de transformación, los podemos modificar y son las variables operacionales, ver **Figura 1- 1**.

Figura 1- 1 Perturbaciones y variables que inciden en procesos de fragmentación.



Nombre de fuente: Elaboración propia.

A continuación, se describen las principales perturbaciones influyentes en la fractura (Napier-Munn & Wills, 2005):

Propiedades físicas de las partículas.- Relacionadas directamente con la naturaleza mineralógica del material a moler, en función de su estructura cristalina, y su configuración micro y macroscópica; los minerales adquieren propiedades físico-químicas diferentes lo que implica diferentes respuestas a los esfuerzos mecánicos, podemos referir esta respuesta a la dureza (escala de Mohs) y en aplicación a procesos de conminución

influenciada por imperfecciones cristalinas (irregularidades de red – fallas de Griffith, por ejemplo) o planos de diaclasamiento por esfuerzos tectónicos. En general, se requiere que el mineral posea comportamiento mecánico frágil, y en este caso Bond propuso el ensayo normalizado de moliendabilidad, el “Work Index” sería un parámetro de conminución que estima la energía específica de fractura en una cámara de molienda donde la fractura es asistida con bolas.

Equipos.- El tipo de molienda utilizada influye también en los resultados del proceso, de forma general en la industria, especialmente la minera ha venido utilizando casi exclusivamente la molienda convencional (molinos de bolas principalmente). Sin embargo, dadas las exigencias de procesamiento de grandes volúmenes de material, en función de las ventajas comparativas consideradas en su conjunto (costos de operación por reposición de bolas de acero), cada vez es más común encontrar, en grandes plantas de tratamiento, molinos semiautógenos de gran capacidad (30000 t/día proyecto Mirador en Ecuador, por ejemplo).

La configuración de los circuitos de conminución (trituración – molienda - clasificación) Se establecen en función de conseguir de forma rápida la mayor cantidad de material que cumpla los requerimientos granulométricos limitando la sobremolienda. Vale indicar que, en todas las configuraciones aplicadas, se encuentra los molinos SAG sustituyen los procesos de trituración secundaria o terciaria en configuraciones anteriores en circuito a molinos de barras, es decir la molienda SAG o FAG sustituye estas etapas de trituración y molienda de barras, preparado el material para la molienda convencional, siendo el principal mecanismo de fractura para esta molienda el impacto y astillamiento/abrasión. Hay que considerar que se trata de molinos de gran diámetro, lo que aporta una considerable energía potencial inicialmente y cinética al momento del choque de las partículas.

Dentro de los variables operacionales encontramos a parámetros susceptibles de ser ajustados en función de optimizar el proceso:

- **Velocidad de rotación**. (Makgoale, 2019), Caracterizada metalúrgicamente como la fracción de la velocidad crítica que a su vez se determina bajo la condición de equilibrio entre la fuerza centrífuga generada en el molino y el peso de los medios moledores, el trabajar con velocidades inferiores a la crítica, evita que el material al interior de la cámara centrifugue y se adhiera a la pared del cilindro. Vale indicar que velocidades muy bajas, no generan los efectos de cascada que disipen suficiente energía mecánica buscados para generar el principal mecanismo de fractura que es el impacto.

- **Volumen de carga de bolas y material particulado**. - Se reconoce que la potencia suministrada a un molino de bolas convencional está dirigida a mover la carga de bolas, mientras que el mineral se asume que llena los poros del lecho de bolas configurando una masa de mineral dispuesta a ser fracturada definida como *"hold up"* W.

  Para el caso de molienda SAG, debido a que la fracción de llenado de bolas es tan pequeña, la potencia entregada no está relacionada directamente a la carga de bolas y según (Kawatra & Kawatra, 1997) es la carga de mineral.

- **Distribución de carga de bolas**. - considerando la variedad granulométrica del alimento cargado al molino, una correcta distribución de tamaños de bolas optimiza el proceso de conminución, bajo la región normal de fractura (bolas grandes fracturan eficientemente fragmentos grandes, similar para otros tamaños). (Austin & Concha, 1994).

- **El tiempo promedio de residencia. -** entendido como la edad o intervalo de tiempo en que permanecen diversas clases granulométricas al interior de la cámara de molienda, estimada mediante la relación.

$$t = \frac{W}{F}$$

Siendo W el "Hold up" y F el flujo másico de mineral que se alimenta al molino

El tiempo promedio de residencia de las partículas en la cámara de molienda es el parámetro cinético elegido como representativo, describiendo el movimiento de éstas mediante la función de distribución de tiempos de residencia (Austin & Concha, 1994), los autores indican que el conocimiento estadístico del tiempo de permanencia de las diversas "partículas" en el molino es suficiente para completar el modelo de la molienda continua.

- **Humedad**.- el régimen de molienda en estado seco o húmedo (en pulpa) se define en principio por las características y necesidades de los procesos subsiguientes, en la industria del cemento por ejemplo molienda seca para Clinker por evidentes razones, mientras que para la formulación de barbotinas molienda húmeda (pulpa con fracción de sólidos alrededor del 35%). Respecto a la eficiencia de la molienda se ha establecido la molienda húmeda como más eficiente que la molienda seca al incrementarse la probabilidad de colisión bola – partícula.

Una pulpa mineral se configura como una mezcla de un medio continuo (generalmente agua) y un sistema particulado discreto que permanece en suspensión, y en el caso de la molienda húmeda este escenario se réplica al interior del tambor. Bajo estas condiciones las pulpas minerales mecánicamente se comportan como fluidos no newtonianos en donde la viscosidad aparente varía en función de la gradiente de deformación generada al interior de la cámara. (Osorio, 2015)

Por el complejo movimiento de la carga al interior de un molino resulta muy difícil medir o estimar tasas de cizalladura efectivas y/o gradientes de velocidad, desarrollándose hasta el momento algunos modelos (F. N. Shi & Napier-Munn, 1999) que tratan de aproximar estos valores apoyados en simuladores. Ahora, resulta claro también que el comportamiento reológico de la pulpa incidirá en disipación de energía mecánica por la transferencia de momento, así como los mecanismos de transporte de masa afectando la eficiencia de molienda.

Dado que la viscosidad de una suspensión es una medida o indicador de la energía mecánica disipada en deformación de las suspensiones, resulta compresible asumir que pueden existir una relación entre el comportamiento reológico de las suspensiones y la

transferencia de momento de un sistema particulado colisionando que provoque la fractura. (Bustamante-Rua *et al*., 2016)

1.1.2 La Molienda SAG

La molienda semiautógena (SAG) es un proceso no convencional de conminución, caracterizado por un llenado parcial de medios de molienda (principalmente bolas), con una fracción que generalmente varía entre el 4% y el 14% del volumen interno del molino (Tapia, 2013). En comparación con la molienda convencional, este proceso se ha consolidado como uno de los más utilizados en circuitos industriales, especialmente debido a su capacidad para manejar grandes volúmenes de material.

El consumo de energía global en kWh/t tiende a ser un mayor para sistemas SAG, pero el costo de operación es menor que el sistema convencional (Magne *et al*., 1992) debido principalmente a los menores costos de mantención al contar con menos equipos, como también una menor dotación asociada (Gong *et al*., 2018) (Silva & Casali, 2015).

Por su geometría y características operativas, los molinos SAG pueden procesar mayores volúmenes de material y prácticamente aceptan descargas de trituración primaria, limitando los requerimientos de fases posteriores (Garrido, 2004), bajo esta característica podríamos entender que la labor esperada de un molino SAG se enfoca principalmente en la fragmentación de partículas con distribución de tamaños gruesas, producto de las trituradoras primarias, acondicionando una corriente mineral y preparando así el producto para su tratamiento en molinos convencionales de bolas.

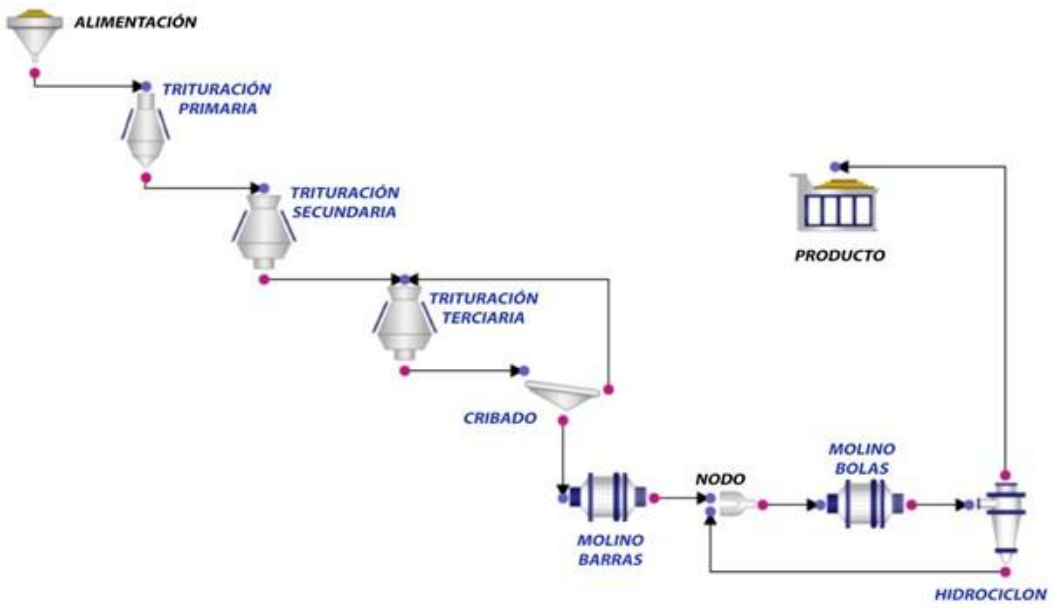
Como se puede observar en la Figura 1-2 y Figura 1-3, en las configuraciones de circuitos de trituración - molienda, las etapas secundaria y terciara de trituración y molienda convencional de barras se han sustituido por la molienda SAG.

Las ventajas de la implementación de la molienda semiautógena han sido evaluadas desde mediados del siglo pasado, se ha referido que, aunque el consumo energético del molino SAG es menos eficiente que los convencionales, si se considera la inversión inicial, el coste

de producción y mantenimiento general, especialmente en lo referente al consumo de bolas de acero, los sistemas semiautógenos resultan más convenientes.

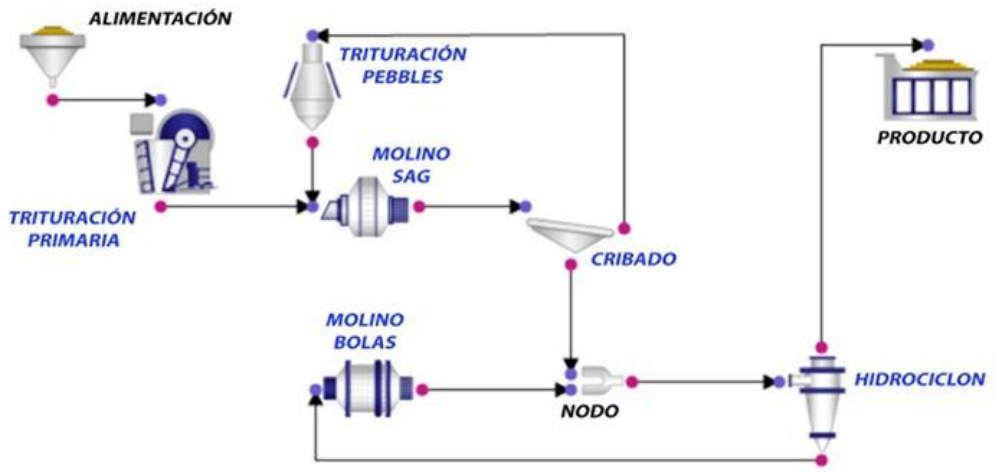
Por otro lado, la autofractura admite la propagación de fracturas en las rocas sometidas a este proceso, principalmente por fronteras de grano de las partículas, disponiendo un escenario de destrucción, en el cual las colisiones entre partículas con fuerte daño ocasionado por las colisiones y de partículas que recién ingresan al molino generan distribuciones de tamaño gobernadas por los proceso de astillamiento-abrasión y de fractura convencional, denominado como nacimiento -muerte (Austin *et al.,* 1982)

Figura 1- 2 Configuración típica de circuitos de trituración – molienda convencional



Nombre de fuente: Adaptado de Napier-Munn & Wills, 2005

Figura 1- 3 Configuración típica de circuitos de trituración – molienda semiautógena.



Nombre de fuente: Adaptado de Napier-Munn & Wills, 2005

1.1.3 Fractura

El fenómeno de fractura de una partícula y generación de una distribución de fragmentos de tamaños inferiores conocidos como la progenie, es un proceso complejo ya que involucra una disipación energética importante que lleva al material de un estado de equilibrio inicial a otra configuración energética, entendiendo entonces que este fenómeno es un proceso termo-mecánico. (Maugin, 2006).

La energía entregada al molino que efectivamente genera fractura es comparativamente más baja que otros eventos que también ocurren durante la molienda, los procesos que disipan energía en la cámara se refieren a (Austin & Concha, 1994):

- Deformaciones elásticas de las partículas antes de fracturarse.
- Deformaciones plásticas de las partículas que desencadenan posteriormente a la fragmentación de estas.
- Fricción entre las partículas.

- Vencer la inercia de las piezas de la máquina.
- Deformaciones elásticas de la máquina y desgastes.
- Producción de ruido, calor y vibraciones de la instalación.
- Generación de electricidad.
- Atricción entre partículas y piezas de la máquina.
- Pérdidas de la eficiencia en la transmisión de la energía mecánica.

La energía involucrada en la fragmentación de un sistema particulado ha sido estudiada desde el siglo XIX destacándose los postulados de: Rittinger que en 1867 propone que la energía de fractura es proporcional a la nueva área superficial, Kick en 1883 refiere que la energía es proporcional al cambio de volumen, mientras que Bond en 1952 sugiere un comportamiento intermedio entre los postulados anteriores.

Tabla 1-1: Postulados empíricos de aproximación de energía de fractura.

Autor	Criterio	Postulado
Rittinger	$\Delta E \rightarrow \Delta \begin{bmatrix} AREAS\ NUEVAS \\ GENERADAS\ POR \\ FRACTURA \end{bmatrix}$	$E = K_R \left[\frac{1}{x_{final}} - \frac{1}{x_{inicial}} \right]$
Kick	$\Delta E \rightarrow \Delta \begin{bmatrix} VARIACIÓN \\ DE\ VOLUMEN \end{bmatrix}$	$E = K_K \ln \left[\frac{x_{inicial}}{x_{final}} \right]$
Bond	Comportamiento intermedio entre los postulados anteriores	$E = 2K_B \left[-\frac{1}{\sqrt{x_{inicial}}} \right]$
Charles	Generalización en función de un modelo matemático de DTP	$dE = -K_{Ch} \frac{dx}{x^n}$

Los postulados anteriores expresan de manera resumida que la energía disipada en fractura se puede aproximar a la ecuación general (Austin & Concha 1994).

$$dE = -K \frac{dx}{x^n} \tag{1. 1}$$

Donde, *n* es un parámetro material constitutivo que depende fuertemente de la forma como se disipe la energía mecánica en la fractura, será constante dependiendo del escenario de fragmentación o aproximación que se emplee, tales como:

- **n=2** Aproximación de Rittinger
- **n=1** Aproximación de Kick
- **n=1,5** Aproximación de Bond
- **n** Aproximación de Charles (n siendo el parámetro de la DTP de Schuhmann)

El signo negativo expresa por convención la ganancia de energía por pérdida de tamaño.

1.1.4 Hipótesis de Molienda de Primer Orden

Si se realiza la analogía entre un reactor y un molino, los reactivos son las partículas gruesas que ingresan al molino y los productos son las partículas finas que salen, es decir que la velocidad específica de ruptura de un tamaño es equivalente a una constante de velocidad de reacción química de primer orden (Austin & Concha, 1994). Del mismo modo que en un reactor, si las condiciones de operación del molino cambian (carga de cuerpos moledores, velocidad de rotación, granulometría de alimentación, entre otras), la velocidad de ruptura también cambiará.

La velocidad de desaparición de partículas de determinado tamaño es proporcional a la masa de partículas de ese tamaño presentes en el molino en determinado tiempo. Si se considera W como la cantidad de masa disponible para fragmentarse en el molino y $w_1(t)$ es la fracción de tamaño 1, la velocidad de desaparición de la masa de la fracción de tamaño i en un intervalo de tiempo es (Austin & Concha, 1994), (ver Ecuación (1. 2)).

$$\frac{d[w_1(t)W]}{dt} \quad \alpha \quad -w_1(t)W \tag{1. 2}$$

Como la masa retenida en el molino W constante, es posible plantear la ecuación anterior como (ver Ecuación (1. 3)):

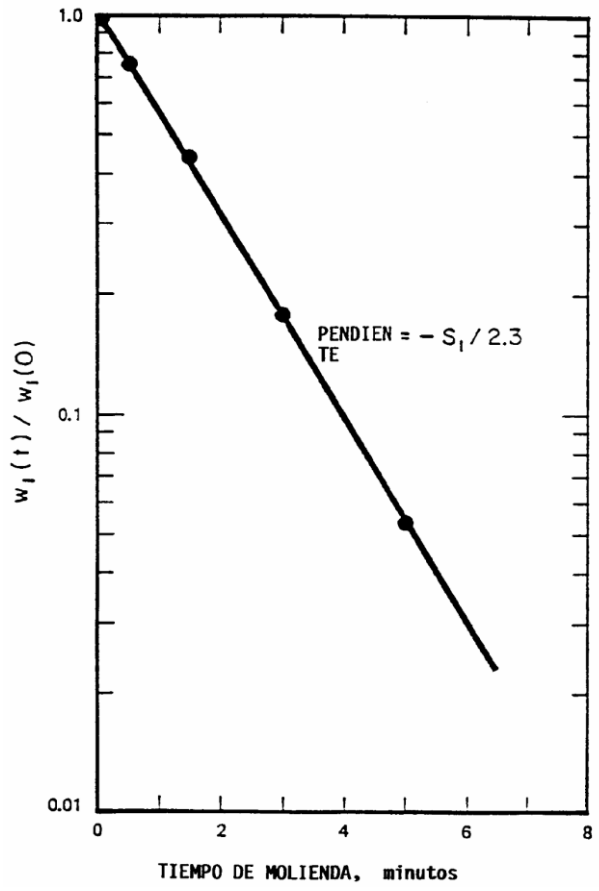
$$\frac{dw_1(t)}{dt} = -S_1 w_1(t) \tag{1. 3}$$

Donde S_1 es la de velocidad específica de fractura y puede ser determinado mediante la técnica de monotamaño para unas condiciones de molienda y un W fijo.

La velocidad de producción de un tamaño es posible representarla en términos de S_j y $b_{i,j}$, ya que ésta depende de la velocidad de aparición de tamaño *i* por la fractura de tamaños mayores y de la velocidad de desaparición de los tamaños *i* por fractura.

La correlación entre las condiciones de operación óptimas y la cinética de fractura permitirán conocer las variables que mayor influencia tienen en el proceso de reducción de tamaño y así, determinar las acciones de control para disminuir la variabilidad del proceso y estabilizar el consumo específico de energía.

Figura 1- 4 Ejemplo de gráfico de primer orden; antracita de 16x20 mallas US en un molino de 0.6 m de diámetro.



Nombre de la fuente: Tomado de (Austin & Concha, 1994).

Austin y Concha definen la velocidad específica de fractura S_j como un parámetro que sigue un comportamiento de primer orden, Integrando la ecuación (1.3) sujeta a la condición inicial $w_1(0)$ se obtiene (ver Ecuación (1.4)).

$$w_j(t) = w_j(0)\, exp\left[-S_j t\right] \tag{1. 4}$$

Donde:

$w_j(t)$ es la masa de material de tamaño j en un tiempo t, $w_j(0)$ es la masa de material de tamaño j al inicio de la molienda y S_j es la tasa o velocidad específica de fractura del material de tamaño j

Linealizando la ecuación (1.4), podemos determinar el valor de S_j, (ver Ecuación (1. 2)).

$$log\left[w_j(t)\right] = log\left[w_j(0)\right] - (S_j/2.3)t \qquad (1.\ 5)$$

1.1.5 Función de Distribución de Fractura Primaria

La comprensión razonablemente detallada del funcionamiento fenomenológico de la fragmentación en molinos rotatorios, involucra el conocimiento de la distribución de tamaño de la progenie B, esto es, la función de distribución de fractura primaria que fue identificada desde tiempo atrás por (Austin & Concha, 1994), (Fuerstenau & Abouzeid, 1991), como elemento termomecánico, mientras la descripción de la rapidez con que un determinado tamaño se fractura y en qué tamaño aparece su producto, constituye la descripción cinética del procesos, asumiendo cinéticas de primer orden. Lo anterior admite el planteamiento elemental del balance de masa por tamaños o balance de población del molino (Austin & Concha, 1994).

Una forma de caracterizar la distribución de tamaño de la progenie es, si el material de tamaño *1* es fracturado, la fracción en peso del producto que aparece en el intervalo de tamaño *i* es llamado $b_{i,1}$. El conjunto de números $b_{i,1}$, en que *i* varía desde 2 a n, describe entonces la distribución de fragmentos producidos por el tamaño *1*, en general, se requiere una matriz de números $b_{i,j}$ para describir la fractura de todos los tamaños de interés, esto es, el conjunto $b_{i,1}$ con $n \leq i \leq 2$, más el conjunto $b_{i,2}$ con $n \leq i \leq 3$, etc. (Austin & Concha, 1994). Otra forma es representar los valores acumulados de b desde el intervalo inferior y hacer que $B_{i,1}$ represente la fracción en peso acumulativa del material fracturado de tamaño *1*.

$$B_{i,j} = b_{n,j} + b_{n-1,j} + b_{i,j} = \sum_{k=i}^{n} b_{kj} \quad \text{o también}$$

$$b_{i,j} = B_{i,j} - B_{i+1,j} \qquad (1.\ 6)$$

El balance de masa por tamaño puede expresarse por los valores de velocidad específica *S* y la distribución de fractura primaria b_{ij}, (ver Ecuación (1. 2)).

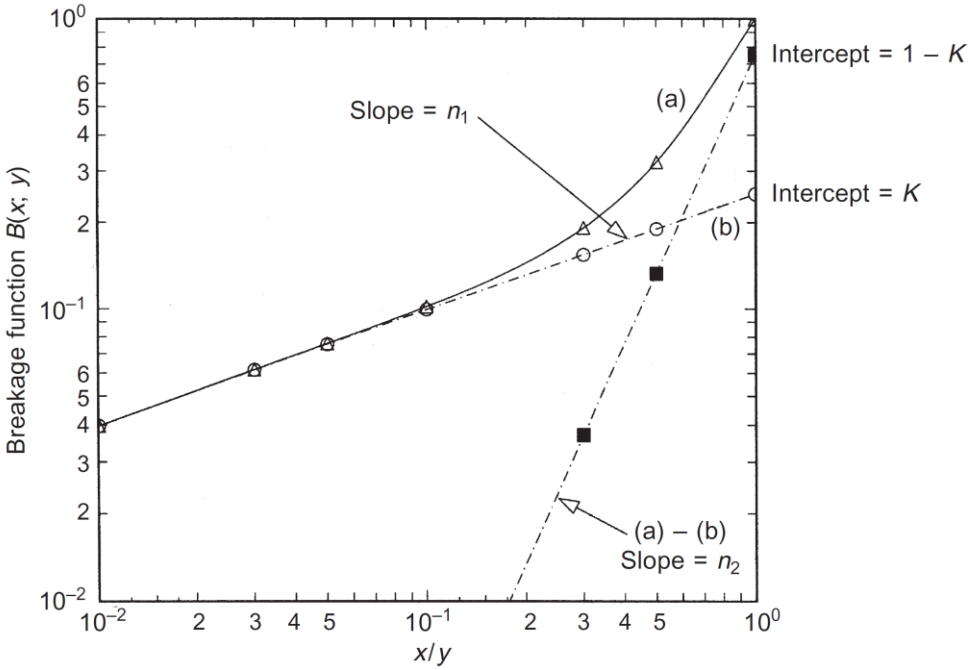
$$d\frac{dw_1(t)}{dt} = -S_1 w_1(t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j\, w_j(t) \qquad (1.\ 7)$$

Un análisis de los complejos sistemas de fractura dentro de un molino SAG involucran también estos dos conceptos: La distribución de tamaño de la “progenie” o fractura primaria, esto es; la distribución de tamaños de las partículas resultantes de la reducción de un fragmento. (Austin & Concha, 1994) definen la fractura primaria de la siguiente manera: “si un material se rompe y los fragmentos producidos se mezclan de nuevo con la masa de polvo en el molino, y si esta distribución de fragmentos pudiese ser medida antes que algunos de ellos sean fracturados, entonces el resultado obtenido sería la distribución de fractura primaria”. (Austin & Concha, 1994) proponen que los valores de $B_{i,j}$ pueden ser ajustados por una función empírica constituida por la suma de dos líneas rectas en un papel log-log,

$$B_{ij} = k\left(\frac{x}{y}\right)^{n1} + (1-k)\left(\frac{x}{y}\right)^{n2} \quad \text{para i} > j \qquad (1.\ 8)$$

El primer término en la (Ecuación (1.8)) representa la distribución de tamaños de la fracción fina en la población de partículas de progenie y *k* es la fracción de productos secundarios que contribuyen a la fracción más fina.

Figura 1- 5 Modelo de función de fractura bimodal



Nombre de la fuente: Tomado de (King, 2001).

A medida que las partículas parentales son demasiado grandes para ser fragmentadas convencionalmente por las demás colpas, la función de rotura es bimodal, generada por el astillamiento en lugar de una fragmentación nacimiento-muerte, fenómeno típico de la molienda SAG (King, 2001). En estas circunstancias, la función de rotura se vuelve bimodal como se muestra en la **Figura 1- 5**, comportamiento que puede ser modelado así:

$$B_{ij} = k\left(\frac{x_i}{y_0}\right)^{n3}\left(\frac{x_i}{y}\right)^{n1} + (1-k)\left(\frac{x_i}{y}\right)^{n2} \quad \text{para i} > j \qquad (1.\ 9)$$

En donde y_0 es el tamaño de chip más grande que debe ser más pequeño que el tamaño padre y los parámetros k, n_1, n_2 y n_3 son funciones de la energía de impacto cuya dependencia exacta nunca se ha investigado sistemáticamente. (King, 2001)

1.1.6 Velocidad de rotación del molino

La velocidad de rotación del molino de bolas suele expresarse como una fracción de la velocidad de rotación critica φ, (ver Ecuación (1.10)).

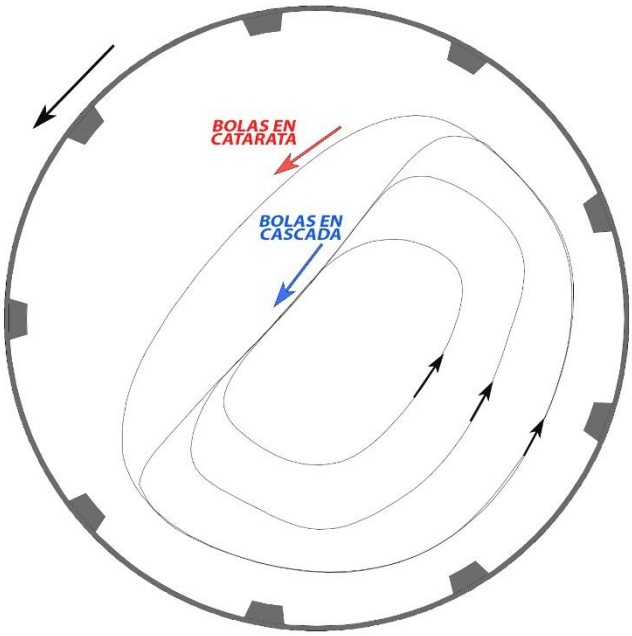
$$\varphi = \frac{V_{actual}}{V_c} \tag{1. 10}$$

$Donde\ V_{actual}$ es la velocidad de rotación del molino y V_c se calcula empleando la (Ecuación (1.11)) (Austin & Concha, 1994).

$$V_c = \frac{42{,}2}{\sqrt{D_m - d_b}}\ rpm \tag{1. 11}$$

Dónde, D_m: diámetro interior del molino, d_b: diámetro máximo de la bola, ambos expresados en metros.

Figura 1- 6 Trayectorias y efectos de partículas al interior de la cámara de molienda.

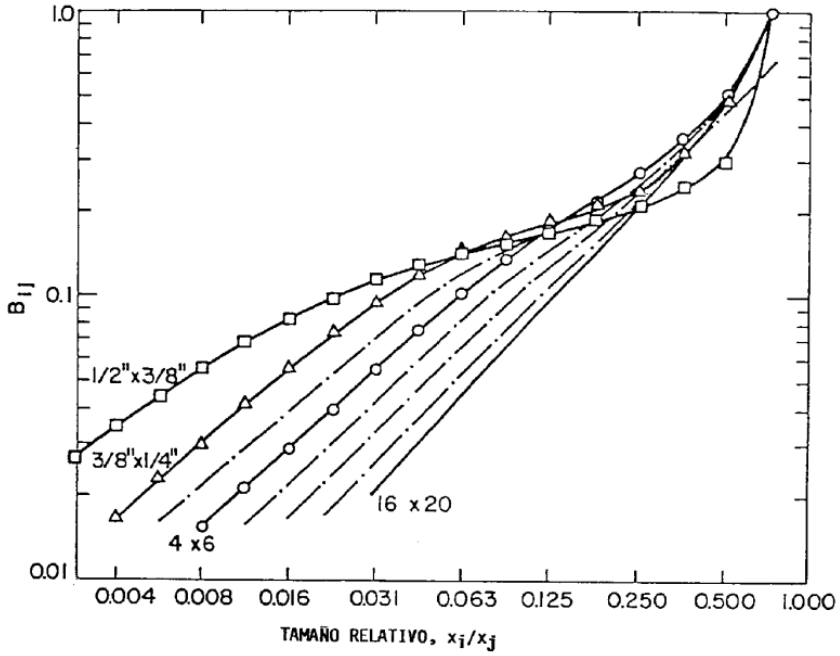


Nombre de la fuente: Adaptado de Austin & Concha, 1994

El movimiento de cascada en un molino rotatorio genera la fractura a través de colisiones continuas de las bolas con el material, el mismo es levantado por la rotación del tambor y la ayuda de barras levantadoras (“lifters”). (Austin & Concha, 1994).

Es conocido que la molienda húmeda en molino de bolas produce capacidades superiores que la molienda en seco, con la condición de que la proporción de sólido a agua sea tan alta como para que la dinámica de la carga del molino sea controlada por el movimiento de las partículas. Es por ello, que el modelo de diseño de molinos por el método de Bond indica que la energía que se debe entregar a un molino en molienda seca es del orden de 1.3 veces respecto a un molino operando en húmedo, lo que impacta directamente en la capacidad de los molinos rotatorios. La distribución granulométrica de la progenie para la región de la fractura normal tiene la forma de la siguiente gráfica.

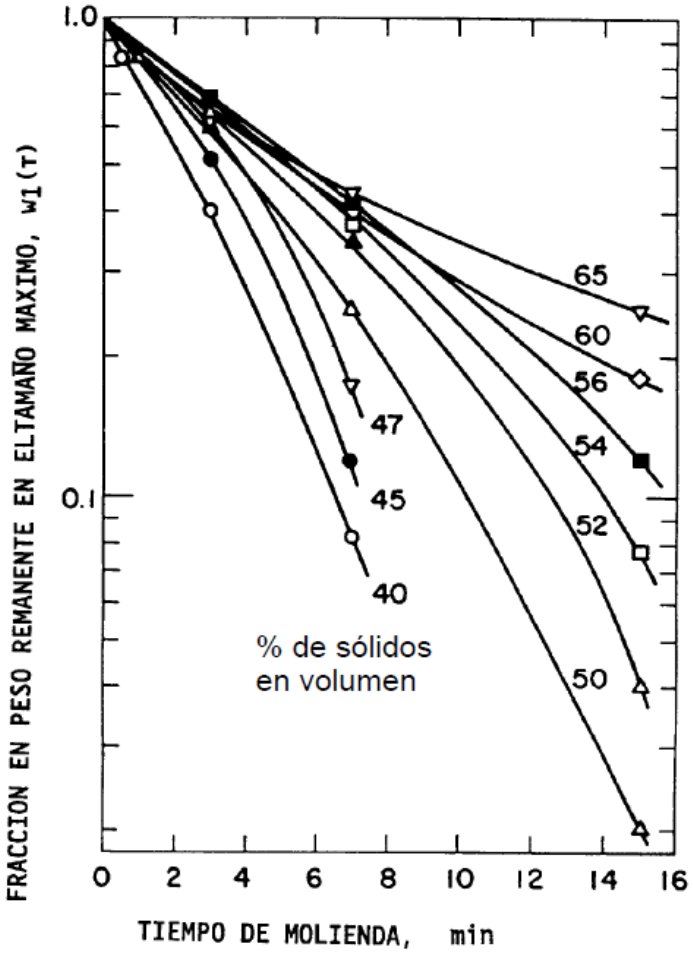
Figura 1- 7 Variación típica de la distribución de fractura primaria para partículas grandes (D=0.6 m, d=26.4 mm).



Nombre de la fuente: Tomado de (Austin & Concha, 1994).

La gráfica muestra que los valores de B_{ij} pueden ajustarse por una función empírica diferenciando dos zonas, la de aporte de gruesos y otra de finos.

Figura 1- 8 Variación de la velocidad específica de fractura del tamaño máximo (cuarzo de 20x30 mallas), con el tiempo para varias densidades de pulpa (D=200 mm, d=25 mm, J=0.3, U=1.0).



Nombre de la fuente: Tomado de (Austin & Concha, 1994).

1.1.7 Reología de las suspensiones

Etimológicamente reología proviene del griego *reos* fluir y *logos* estudio, es la ciencia del flujo y deformación de la materia, siendo aplicable a todos los materiales, (Mezger, 2006).

La reología de fluidos es usada para describir el comportamiento mecánico de los fluidos, generalmente mediante dos componentes, la viscosidad y la elasticidad.

Un fluido se caracteriza por sus velocidades de deformación como la relación entre el esfuerzo de cizalladura aplicado y la tasa de deformación producida. La deformación del fluido en un punto material puede expresarse mediante un tensor de deformación que muestran las variaciones vectoriales de un elemento cúbico al ser sometido a esfuerzos tangenciales o cizalle.

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

Siendo su velocidad la relación entre esta deformación y el tiempo.

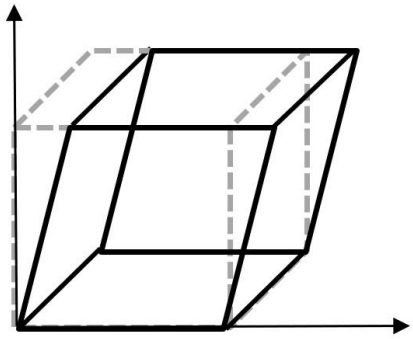
$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma_{ij}}{dt} \tag{1. 12}$$

De forma similar el esfuerzo aplicado sobre el punto material puede expresarse mediante un tensor esfuerzo, que muestra los componentes de la fuerza que actúa sobre el cuerpo por unidad de área donde se aplica.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Vale indicar que, si la deformación es uniforme, los tensores esfuerzo y deformación no varían con la posición, esta condición se conoce como cizalla simple y se ejemplariza al desplazar una de dos caras paralelas, ver figura siguiente.

Figura 1- 9 Esquema de cizalla simple.



Nombre de fuente: Elaboración propia.

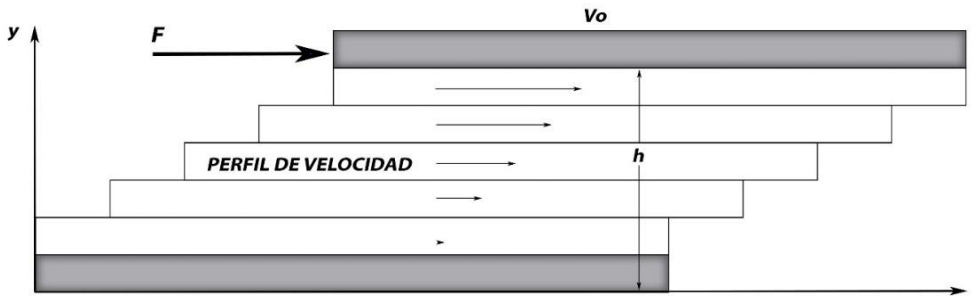
Este esquema de cizalla simple facilita definir los tensores de esfuerzo cortante. Deformación y gradiente de velocidad que describe la variación de la velocidad de deformación respecto a la posición en la dirección perpendicular a las caras que deslizan.

Viscosidad

Se conoce como viscosidad la resistencia ejercida por el fluido a deslizarse y es proporcional a la velocidad a la que las partes de un fluido son separadas entre sí. Se establece entonces la proporcionalidad entre el esfuerzo por unidad de área requerido para generar una gradiente de velocidades en un fluido, representando la viscosidad una constante de proporcionalidad que se relaciona con la capacidad de deslizamiento de un fluido. Puede definirse también a la viscosidad como es una medida de la fricción interna con la cual un fluido se opone al movimiento (Pal, 2023).

Para ilustrar la definición de viscosidad se puede desarrollar el siguiente esquema: se cuenta con dos placas paralelas de área A en medio de las cuales existe un fluido con espesor h, si la placa superior es deslizada en dirección del plano de la placa, por aplicación de una fuerza F que genera una velocidad constante v_0.

Figura 1- 10 Gradiente de velocidad entre dos placas.



Nombre de fuente: Elaboración propia.

Fluidos newtonianos

Para un fluido newtoniano, en estado estacionario, el perfil de velocidades es lineal, aquí la tasa de cizalladura ($\dot{\gamma}$) es la velocidad de deformación del fluido por la condición de resistencia en las láminas del fluido.

$$\frac{dv_x}{dy}^{\cdot} = \dot{\gamma} = \frac{v_0}{h} \qquad [s^{-1}] \tag{1. 13}$$

La fuerza F aplicada de forma tangencial mantiene la lámina superior a velocidad v_0, esfuerzo de cizalladura es la relación entre la fuerza total actuante dividida por la superficie.

$$\tau = \frac{F}{A} \qquad [Pa, N/m^2] \tag{1. 14}$$

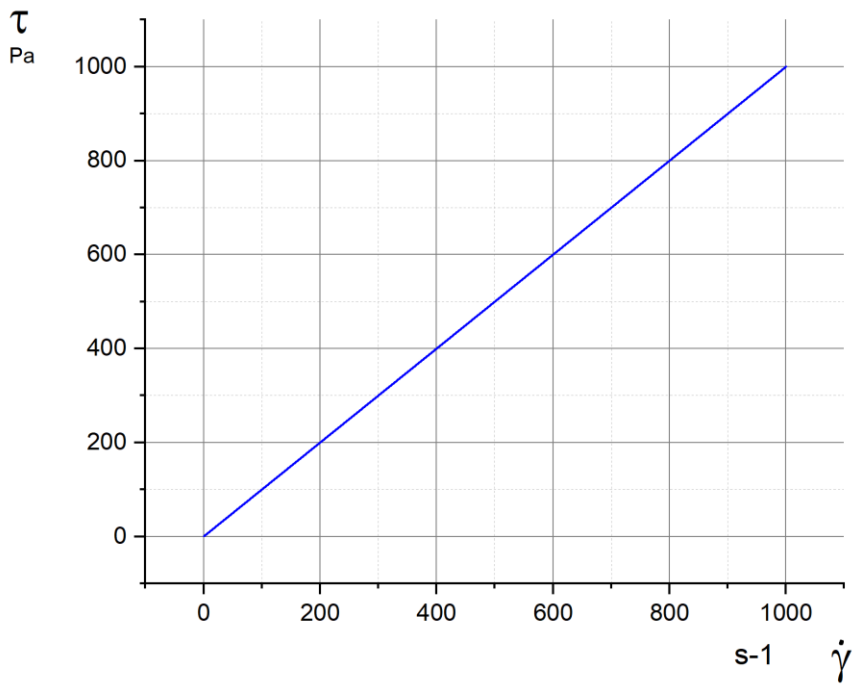
Al ser un fluido newtoniano el esfuerzo cortante es proporcional a la tasa de cizalladura con un comportamiento lineal, así se puede expresar:

$$\tau = \eta * \dot{\gamma} \tag{1. 15}$$

La constante de proporcionalidad (η) es denominada viscosidad, de esta manera podemos definir a un fluido newtoniado como aquel material cuya viscosidad bajo condiciones de presión y temperatura dadas se mantiene constante a cualquier tasa de cizalladura. Para

un fluido newtoniano, la gráfica de esfuerzo cortante vs tasa de cizalladura mostrará una línea recta en donde su pendiente es la viscosidad.

Figura 1- 11 Reograma para un fluido newtoniano de viscosidad (1 Pa s).



Nombre de fuente: Elaboración propia.

Dimensionalmente la viscosidad presenta η (=) $ML^{-1}\ T^{-1}$

Tabla 1-2: Unidades de viscosidad.

Sistema	Unidad	Forma
CGS	Poise	dina s cm^{-2}
CGS	Centipoise (cP)	1 Poise = 100 centiPoise
SI	Pa s	Pa-s = 10 Poise

Fluidos no newtonianos

Si la respuesta mecánica del fluido al ser sometido a cizalle difiere del comportamiento newtoniano se dice que se trata de fluidos no newtonianos, generalmente se trata de sistemas dispersos (dispersiones) son una mezcla de dos o más sustancias que se produce cuando una sustancia se distribuye en el seno de otra u otras, pueden clasificarse

en tres tipos: soluciones, coloides y suspensiones. El tamaño de la partícula de la fase dispersa es el criterio que se utiliza para efectuar la clasificación. En estas sustancias la aplicación de esfuerzos pueden generar una respuesta no newtoniana, así la viscosidad como propiedad intrínseca del material cambia por lo que se denomina viscosidad aparente (Maestro, 2002). Así se puede expresar una ecuación de la forma:

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}) * \dot{\gamma} \tag{1. 16}$$

Donde μ es un parámetro viscoso y es función en general de la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$.
Según (Bustamante, 2002), se conoce que al agregar partículas rígidas a un medio fluido se altera el campo de flujo, esta perturbación hidrodinámica fue primero calculada por Einstein en 1956, para el caso singular de partículas esféricas y relativamente pequeñas en una suspensión diluida; encontrando una expresión bastante simple para la viscosidad de la suspensión respecto a la viscosidad del fluido Newtoniano. Si las partículas son muy pequeñas (< 1 micrón), las fuerzas coloidales entre las partículas comienzan a controlar fuertemente el campo de flujo, y aún a bajas concentraciones y con pequeños cambios de la fracción volumétrica de sólidos se generan cambios muy grandes de la viscosidad de la mezcla.

Se puede definir la razón entre el esfuerzo de cizalladura aplicado τ y la tasa de cizalladura generada por la deformación permanente en la suspensión, como la viscosidad aparente de la suspensión μ_a:

$$\mu_a = \frac{\text{Esfuerzo de Cizalladura}}{\text{Tasa de Cizalladura}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{1. 17}$$

La figura 1-12 detalla el concepto de viscosidad aparente μ_a en una curva de flujo de una suspensión cizalle adelgazante o pseudoplástica, mientras la figura 1-13 perfila la variación de la viscosidad aparente μ_a para una suspensión cizalle-adelgazante.

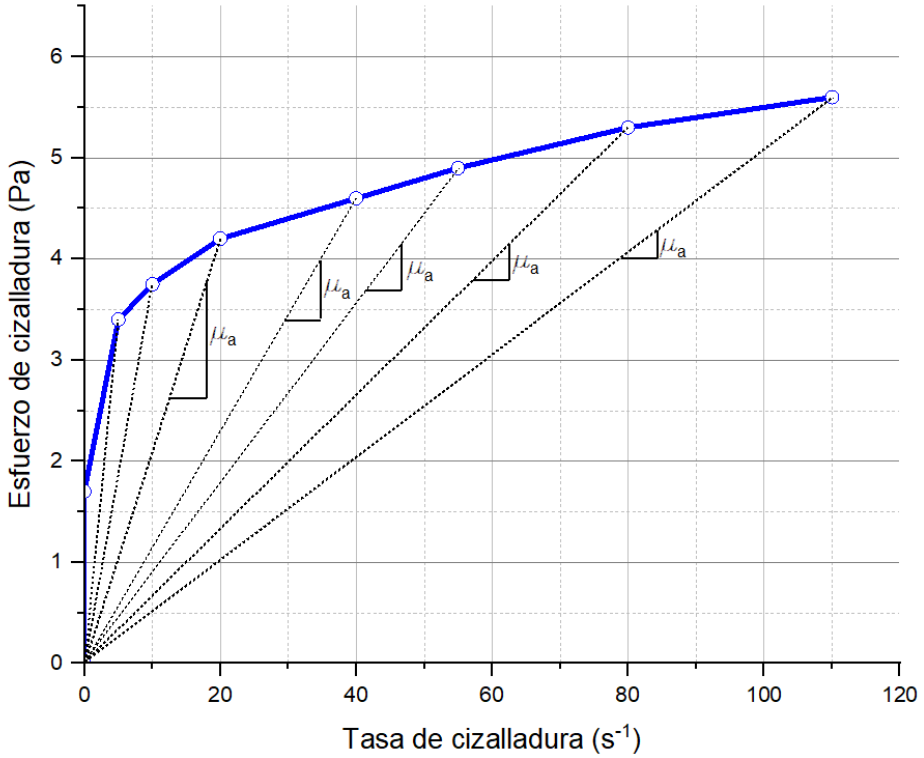
Lo anterior implica que para cada par de valores:

$\left(\tau, \dot{\gamma}\right)$ existe un valor de $\mu_a\left(\dot{\gamma}\right)$

$\mu_a\left(\dot{\gamma}\right)$ debe leerse como viscosidad aparente que depende de la tasa de cizalladura.

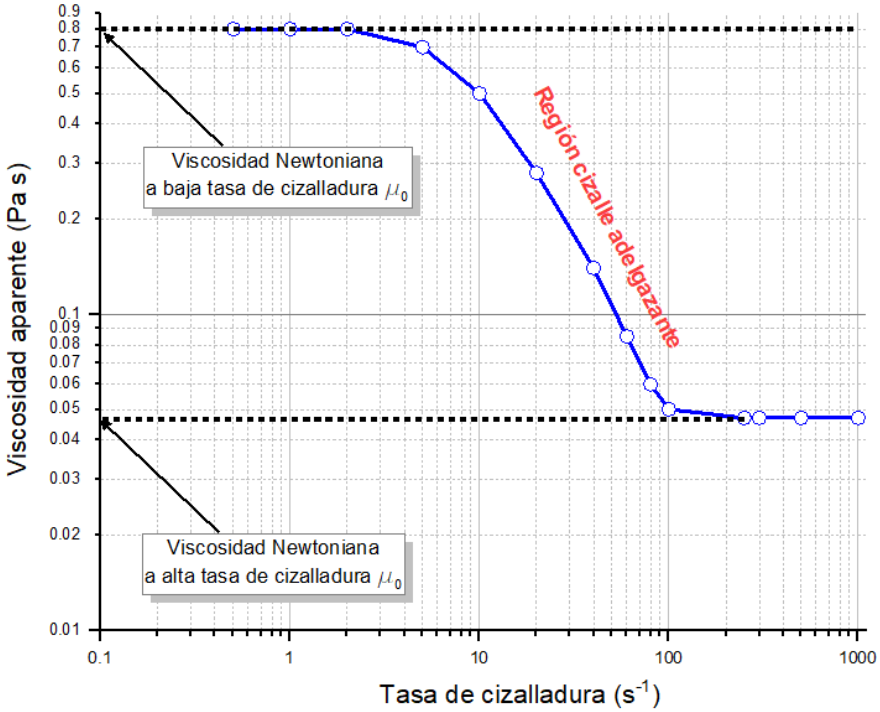
Se ha encontrado también que tanto a tasas de cizalladura muy bajas ($\dot{\gamma} \to 0$), como tasas de cizalladura relativamente altas $\dot{\gamma} \to \infty$ la suspensión mantiene constante la viscosidad aparente μ_a, y son llamadas viscosidad Newtoniana a baja tasa y viscosidad Newtoniana a alta tasa de cizalladura respectivamente ver figura 1-13.

Figura 1- 12 Curvas de flujo y concepto de viscosidad aparente de la suspensión.



Nombre de fuente: Adaptado de (Bustamante, 1999).

Figura 1- 13 Viscosidad aparente de una suspensión cizalle adelgazante.



Nombre de fuente: Adaptado de (Bustamante, 1999).

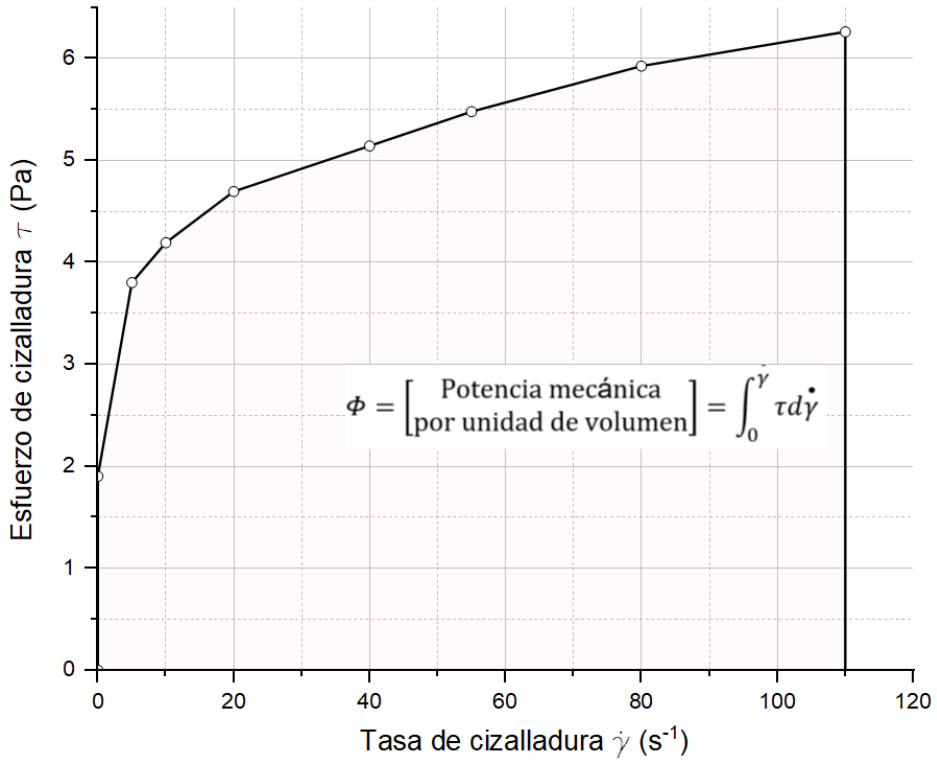
Función de disipación energía mecánica

La figura 1-13 muestra una curva de flujo de una suspensión cizalle adelgazante. El área debajo de la curva, la cual se puede calcular mediante la (Ecuación (1.18)), representa la función de disipación de energía mecánica por unidad de volumen Φ o potencia mecánica por unidad de volumen necesaria para genera una deformación permanente; así:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \text{Potencia mecánica} \\ \text{por unidad de volumen} \end{bmatrix} = \int_0^{\dot{\gamma}} \tau d\dot{\gamma} \qquad (1.\ 18)$$

El parámetro Φ es un escalar y a la vez es una propiedad intensiva del fluido, por lo que este término es fundamental en el cálculo de la energía que se debe entregar a los sistemas de transporte, moldeo, etc. que operan con pastas y suspensiones.

Figura 1- 14 Disipación de energía mecánica por la deformación permanente del fluido.

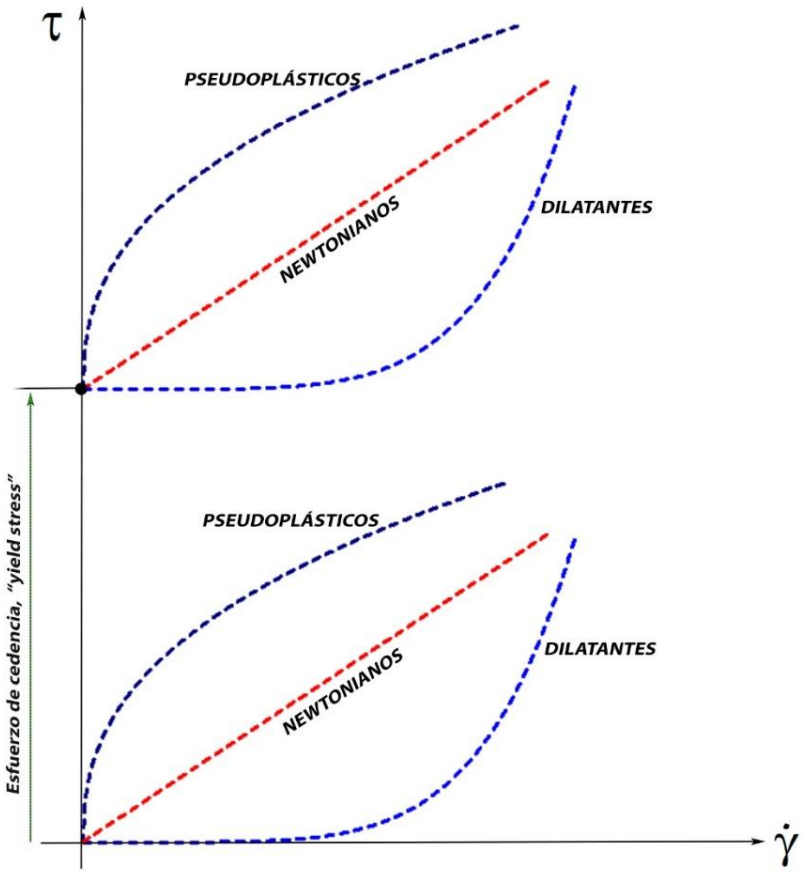


Nombre de fuente: Adaptado de (Bustamante, 1999).

1.1.8 Clasificación reológica de fluidos

La figura 1-15 muestra esquemáticamente curvas de flujo típicas con y sin esfuerzo de cedencia (“yield stress”). La viscosidad aparente μ_a se define según la definición de la (Ecuación (1.17)).

Figura 1- 15 Curvas de flujo de tipos de fluidos.



Nombre de fuente: Elaboración propia.

Se define que un fluido es Newtoniano cuando en la (Ecuación (1.15)), la viscosidad posee un valor constante, esto es, cuando la viscosidad aparente μa para todos los pares ordenados ($\tau, \dot{\gamma}$). Sin embargo, para un fluido no-Newtoniano, la (Ecuación (1.16)) desarrolla diferentes valores de la viscosidad aparente μa para los diferentes pares ordenados ($\tau, \dot{\gamma}$).

Lo anterior implica que un fluido Newtoniano queda plenamente definido conociendo tan sólo un par ($\tau, \dot{\gamma}$), mientras que un fluido no-Newtoniano requiere de un conjunto de pares

($\tau, \dot{\gamma}$) para ser definido plenamente, lo que a su vez implica la determinación de un conjunto de viscosidades aparentes μ_a, dependientes de $\dot{\gamma}$.

Por lo tanto, como una consecuencia del uso de la definición de la (Ecuación (1.16)), se puede considerar que un fluido no-Newtoniano se comporta reológicamente como la superposición de muchos fluidos Newtonianos con diferentes viscosidades μ_a, y por lo tanto, la disipación de la energía mecánica global, es la sumatoria de la energía mecánica que disipa cada fluido Newtoniano para una determinada tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$.

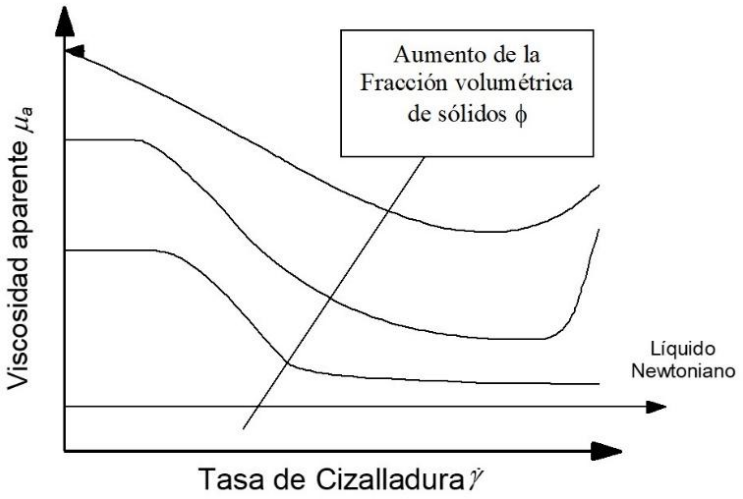
De esta manera se puede definir a los fluidos no-Newtonianos como fluidos Newtonianos generalizados, dado que la ecuación constitutiva formulada en la ecuación (1.16), es lineal para cualquier fluido no-Newtoniano, siempre y cuando la viscosidad aparente μ_a sea una función de la tasa de cizalladura.

Es importante especificar que el conjunto de valores de viscosidad aparente μ_a para un fluido no Newtoniano puede ser monótonamente decreciente o creciente a medida que aumenta la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ y casi siempre acotada por dos límites uno cuando $\dot{\gamma} \to 0$ y otro límite cuando $\dot{\gamma} \to \infty$.

Cuando la viscosidad aparente μ_a es monótonamente decreciente con aumento de la tasa de cizalladura, es equivalente a decir que la tasa de cizalladura se incrementa más rápidamente que el esfuerzo de cizalladura en el proceso de deformación permanente. A este tipo de fluido se le denomina pseudoplástico, pero con mayor precisión sería un fluido cizalle-adelgazante ("*shear thinning*").

De manera inversa, cuando la viscosidad aparente μ_a es monótonamente creciente a medida que aumenta la tasa de cizalladura, se define el comportamiento dilatante, ver figura 1.15, o de fluido cizalle-espesante ("*shear-thickening*").

Figura 1- 16 Viscosidad aparente de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos



Nombre de fuente: Tomado de (Bustamante, 1999).

Normalmente, las suspensiones minerales se han caracterizado por tener un comportamiento reológico cizalle-adelgazante tanto para dispersiones en las cuales los tamaños de partícula de los sólidos que forman parte de la pulpa son relativamente gruesos como en dispersiones coloidales, así como a diferentes fracciones volumétricas de sólidos ϕ_V en las pulpas.

1.1.9 Las suspensiones minerales como fluidos

La evaluación reológica de las suspensiones minerales (Bustamante et al. 2004) permite suponer que estas dispersiones mecánicamente poseen intervalos muy amplios de comportamiento tipo líquido. Lo anterior conduce a promover el estudio de suspensiones minerales como fluidos de composición heterogénea, con características muy diferentes desde el punto de vista mecánico a sus componentes aislados.

1.1.10 Viscosidad relativa de una suspensión

Dado que una suspensión está compuesta por una fase líquida o continúa y una fase discreta o de partículas, la viscosidad de las suspensiones suele expresarse mediante el uso de un número adimensional (Barrientos *et al.,* 1994) llamado viscosidad relativa μ_r, el cual se define como:

$$d\mu_r = \frac{\mu_s}{\mu_f} \tag{1. 19}$$

Donde μ_s es la viscosidad aparente de la suspensión a una determinada tasa de cizalladura y μ_f es la viscosidad del fluido que forma parte de la dispersión.

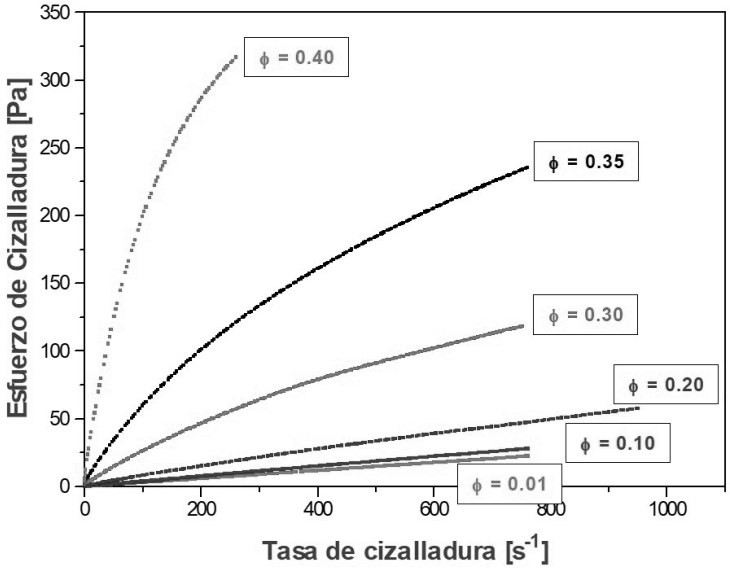
1.1.11 Efecto de la adición de partículas a la suspensión

La adición de partículas, o lo que es equivalente un incremento de la fracción volumétrica de sólidos en la suspensión genera fuertes cambios en la curva de flujo de la suspensión, como se aprecia en la figura 1-17. Equivalentemente, la viscosidad aparente μ_a sufre fuertes cambios en su magnitud, incrementándose exageradamente.

Por otro lado, se ha encontrado que suspensiones con elevadas fracciones volumétricas de sólidos ϕ_V y tasas de cizalladura tendiendo a cero, desarrollan una viscosidad Newtoniana μ_0 muy grande y en algunas suspensiones este parámetro tiende a infinito, propiciando las condiciones bajo las cuales la curva de flujo tiende a confundirse con el eje vertical que representa el esfuerzo de cizalladura ver figura 1-17, generando el concepto de Esfuerzo de Cedencia τ_0.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, la disipación de energía mecánica, encontrado en términos de la potencia disipada por unidad de volumen se incrementa fuertemente a medida que la suspensión incrementa el porcentaje de partículas suspendidas en la suspensión, debido a que es evidente que, para alcanzar una tasa de cizalladura determinada, el área bajo la curva es substancialmente más grande.

Figura 1- 17 Variación de la curva de flujo a medida que se adiciona partículas a una suspensión mineral.



Nombre de fuente: Tomado de (Bustamante, 1999).

1.2 Revisión Sistemática de la Literatura

Se realizó una revisión bibliográfica de estudios recientes y relevantes relacionados con la reología de pulpas y su impacto en procesos de molienda, particularmente en molienda semiautógena (SAG), consumo energético y funciones de fractura. A continuación, se destacan los avances más significativos de manera cronológica.

- (Magne *et al*., 1995), presentaron un modelo simplificado para la molienda SAG basado en consideraciones fenomenológicas. Este modelo propone una ecuación para describir el transporte de pulpa a través del molino, en donde la clasificación interna se ajusta mediante una ecuación dependiente del porcentaje de sólidos presentes. http://revistademetalurgia.revistas.csic.es (MODELIZACIÓN DINÁMICA DE MOLIENDA SEMIAUTOGENA BASADA EN UN MODELO FENOMENOLÓGICO SIMPLIFICADO).
- (F. Shi & Napier-Munn, 1996), desarrollaron un modelo capaz de predecir la viscosidad de la pulpa a partir de sus propiedades disponibles y fáciles de medir. (A MODEL FOR SLURRY RHEOLOGY).
- (Latchireddi & Morrell, 1997), investigaron en la molienda SAG la incidencia en la capacidad de procesamiento de materiales por la acción de elevadores y tipo descarga en pulpas. (A LABORATORY STUDY OF THE PERFORMANCE CHARACTERISTICS OF MILL PULP LIFTERS)
- (F. N. Shi & Napier-Munn, 1999), trabajaron un modelo para determinar la gradiente de velocidad de la pulpa para los movimientos en un molino cascada y catarata. (ESTIMATION OF SHEAR RATES INSIDE A BALL MILL)
- (Bustamante, 1999), desarrolla un modelo para la viscosidad de suspensiones considerando elementos de la termomecánica basados en los cambios de la energía interna ocasionados por la aplicación de esfuerzos de cizalladura sobre un volumen determinado de suspensión. Muestra la teoría de disipación de energía mecánica para el cálculo de la viscosidad.
- (Morrell & Valery, 2001), estudian la influencia del tamaño de la alimentación en el rendimiento del molino SAG, aquí verifican la sensibilidad que este tipo de molienda tiene a ese factor. (INFLUENCE OF FEED SIZE ON AG/SAG MILL PERFORMANCE)
- (F. N. Shi & Napier-Munn, 2002), investigaron sobre el efecto de la reología de la pulpa

en molienda industrial, encontrando que el Índice de molienda depende del comportamiento de las suspensiones, si son dilatantes o pseudoplásticas mostrando altos o bajos esfuerzos de fluencia. (EFFECTS OF SLURRY RHEOLOGY ON INDUSTRIAL GRINDING PERFORMANCE)

- (He & Forssberg, 2007), estudiaron el efecto de la reología de la suspensión en la molienda de cuarcita con medios agitados, determinada mediante la variación de parámetros de molienda, como la densidad y el tamaño de las bolas, la adición de productos químicos, la concentración de sólidos, la velocidad de rotación del agitador y el efecto combinado de estos factores. (INFLUENCE OF SLURRY RHEOLOGY ON STIRRED MEDIA MILLING OF QUARTZITE)
- (Morell, 2008), desarrolla un modelo utilizando dos parámetros del material para gruesos y finos para determinar y ajustar la energía específica de molienda SAG. (A METHOD FOR PREDICTING THE SPECIFIC ENERGY REQUIREMENT OF COMMINUTION CIRCUITS AND ASSESSING THEIR ENERGY UTILISATION EFFICIENCY)
- (Tavares & de Carvalho, 2009), modelaron la tasa de rotura de partículas gruesas en un molino de bolas, el modelo puede predecir tasas de rotura de partículas gruesas que no son de primer orden en molinos de bolas. (MODELING BREAKAGE RATES OF COARSE PARTICLES IN BALL MILLS)
- (Benretem et al., 2010), determinan la variedad de comportamientos reológicos de una pulpa de fosfatos según la fracción de sólidos, tamaño de partículas y tipo de fosfato, encuentran que tamaños relativamente grandes de partícula no modifican la reología de la suspensión. (FACTORS INFLUENCING SLURRY RHEOLOGY)
- (Cleary & Morrison, 2012), utilizando DEM – SHP desarrollaron un modelo predictivo para estudiar el movimiento y transporte de la pulpa, así como su descarga para molinos SAG. (PREDICTION OF 3D SLURRY FLOW WITHIN THE GRINDING CHAMBER AND DISCHARGE FROM A PILOT SCALE SAG MILL)
- (Bueno et al., 2013), desarrollaron un ajuste del modelo JKMRC de componentes múltiples en molienda AG/SAG simulando la molienda para mezcla de materiales duros y blandos. (MULTI-COMPONENT AG/SAG MILL MODEL)
- (Delaney et al., 2013), trabajaron la predicción de la rotura y la evolución de las distribuciones de tamaño y forma de roca en molinos AG y SAG utilizando DEM¸ los

resultados mostraron predicciones razonables para la tendencia general en la reducción del tamaño de las partículas en el molino AG, pero no para el SAG. (PREDICTING BREAKAGE AND THE EVOLUTION OF ROCK SIZE AND SHAPE DISTRIBUTIONS IN AG AND SAG MILLS USING DEM)

- (Salazar et al., 2014), desarrollaron un modelo de control para operación de molienda SAG, el consumo de energía, nivel de llenado volumétrico y el porcentaje de reducción de tamaño fueron las variables controladas, mientras que la tasa de alimentación de mineral fresco, la tasa de alimentación de agua dulce y la velocidad de rotación fueron las variables manipuladas. (MODEL PREDICTIVE CONTROL OF SEMIAUTOGENOUS MILLS (SAG))
- (Silva & Casali, 2015) desarrollan modelos de molienda SAG, para predecir potencias o consumos energéticos específicos, incluyendo a parte de las variables habituales de diseño (tamaño del molino; nivel de carga de bolas, concentración de sólidos en la alimentación del molino SAG, % de velocidad crítica), una variable que representa la distribución del tamaño de la alimentación. (MODELLING SAG MILLING POWER AND SPECIFIC ENERGY CONSUMPTION INCLUDING THE FEED PERCENTAGE OF INTERMEDIATE SIZE PARTICLES)
- (F. Shi & Xie, 2015) han desarrollado un modelo específico basado en energía calcula el índice de rotura en función de la energía específica del tamaño, y luego calcula la distribución del tamaño del producto. El modelo incluye una función de rotura específica del mineral y dependiente del tamaño, cuyos parámetros se miden de forma independiente. (A SPECIFIC ENERGY-BASED SIZE REDUCTION MODEL FOR BATCH GRINDING BALL MIL)
- (Osorio et al., 2014), estudian el comportamiento del regulador reológico poliacrilamida en molienda de pulpa de cuarzo. (EVALUACIÓN DEL USO DE POLIACRILAMIDA COMO MODIFICADOR REOLÓGICO EN LA MOLIENDA DE PULPAS DE CUARZO)
- (Bustamante et al., 2016), estudiaron el efecto de las partículas finas en la reología de una pulpa de caolín, encontraron que la viscosidad de la suspensión aumenta en proporción logarítmica al aumentar el contenido de sólidos de la suspensión, sin embargo, para suspensiones con contenidos de sólidos mayores a 60%, también aumenta el valor de su viscosidad sin importar el contenido de sólidos. (FINE MATERIAL EFFECT ON KAOLIN SUSPENSIONS RHEOLOGY)
- (Morrell, 2016), desarrolla un modelo que justifica la disminución del consumo de

energía para molienda SAG FAG y en molino de bolas por efecto de la geometría de la cámara, tipo de descarga y los elevadores de pulpa. (MODELLING THE INFLUENCE ON POWER DRAW OF THE SLURRY PHASE IN AUTOGENOUS (AG), SEMI-AUTOGENOUS (SAG) AND BALL MILLS)

- (Cleary et al., 2018), utilizan modelos acoplados DEM+SHP (Hidrodinámica de partículas suavizadas) para predecir el movimiento de las partículas gruesas y la pulpa en un molino SAG, una extensión del modelo permite la predicción de la distribución de tamaño residente del componente rocoso de la carga, incluida la progenie más gruesa. (INCLUSION OF INCREMENTAL DAMAGE BREAKAGE OF PARTICLES AND SLURRY RHEOLOGY INTO A PARTICLE SCALE MULTIPHASE MODEL OF A SAG MIL)
- (Cleary et al., 2018), estudian sobre el daño incremental en partículas que es modelado mediante DEM para un proceso de molienda SAG en planta piloto. (INCREMENTAL DAMAGE AND PARTICLE SIZE REDUCTION IN A PILOT SAG MILL: DEM BREAKAGE METHOD EXTENSION AND VALIDATION)
- (Xu et al., 2018), trabajaron sobre un modelo predictivo del desgaste al interior de la cámara de molienda para molinos SAG, encontrando que la velocidad de operación es un factor principal para tal efecto. (NUMERICAL PREDICTION OF WEAR IN SAG MILLS BASED ON DEM SIMULATIONS)
- (Asghari et al., 2019) Analizan la relación entre parámetros operativos, las características del mineral y las propiedades de forma de los productos en un molino SAG industrial en una planta de cobre. Los resultados muestran que minerales duros generan productos más finos mediante abrasión, mientras que minerales blandos producen partículas más elongadas y menos redondeadas, se determinó que la dureza del mineral afecta los mecanismos de rotura.
- (Cleary & Owen, 2019), modelando con DEM el movimiento de bolas y partículas de material relacionaron el flujo transporte y la energía disipada por colisiones de partículas. Su modelo muestra además que la variación de velocidad del molino tiene poca incidencia en la distribución de energía de colisión, otros factores considerados en el modelamiento fueron el nivel de llenado de carga y la relación carga – bola. (EFFECT OF OPERATING CONDITION CHANGES ON THE COLLISIONAL ENVIRONMENT IN A SAG MIL)

- (Becerra & Magne, 2020), presentaron un modelo de molienda SAG basado en la tasa de molienda efectiva y el concepto de clasificación interna en tres etapas, derivado a partir de la observación de los resultados de pruebas a escala piloto. Se indica que, comparado con otros modelos desarrollados, el modelo presentado tiene el potencial de ser utilizado a escala industrial con enfoque simplificado para describir el proceso de molienda enfatizando el proceso de clasificación interna. (SEMI-AUTOGENOUS GRINDING MODEL BASED ON EFFECTIVE GRINDING RATE AND THREE STAGES INTERNAL CLASSIFICATION – PART I)
- (Cleary et al., 2020), utilizando DEM – SHP desarrollaron un modelo predictivo para estudiar la molienda en pulpa por la interacción medios – y los fragmentos gruesos en planta piloto SAG. (PREDICTION OF SLURRY GRINDING DUE TO MEDIA AND COARSE ROCK INTERACTIONS IN A 3D PILOT SAG MILL USING A COUPLED DEM + SPH MODEL)
- (Jiang et al., 2021), analizan la influencia de los parámetros operativos del molino semiautógeno (SAG) en la eficiencia de molienda, el consumo de energía y la energía de contacto acumulada tangencial, se propone un nuevo método de diseño y optimización de parámetros de revestimientos.
- (Xie et al., 2021), utilizando DEM investigan sobre el efecto del contacto entre el mineral (forma poliédrica) y los medios de molienda (esféricas), encuentran que el consumo de energía aumenta al igual que el desgaste de recubrimientos. (DEM INVESTIGATION OF SAG MILL WITH SPHERICAL GRINDING MEDIA AND NON-SPHERICAL ORE BASED ON POLYHEDRON-SPHERE CONTACT MODEL)
- (Owusu et al., 2022), investigaron la relación entre las emisiones acústicas y la dureza de diferentes tipos de rocas (modelo de cuarzo, modelo de calcita y mineral de hierro real) junto con las proporciones de mezcla binaria de modelo de cuarzo y mineral de hierro en un molino AG/SAG de laboratorio, El estudio demuestra que la integración de técnicas de detección acústica en molinos AG/SAG puede servir como indicador para la medición en línea de diferentes durezas de rocas y minerales.
- (Xie et al., 2022), utilizando DEM investigan sobre el efecto del nivel de llenado en el desgaste y vibración de un molino SAG. (INVESTIGATION OF THE EFFECT OF FILLING LEVEL ON THE WEAR AND VIBRATION OF A SAG MILL BY DEM)
- (Zeng et al., 2023), en el marco de procesos de flotación y molienda revisan la aplicación actual e importancia de la reología en el procesamiento de minerales finos,

refiere que cada vez más investigadores están prestando atención a mejorar la eficiencia de molienda y flotación mediante el control de los parámetros reológicos de la pulpa y la espuma a través del ajuste de las variables del proceso.

- (Cleary et al., 2023), analizan el escalamiento de los modelos desarrollados con DEM – SHP, en los que se incluyen varios parámetros hacia plantas piloto en industriales, el modelo muestra que, a pesar de similitudes cualitativas razonables, muchos aspectos de la estructura de carga, el transporte de lodo, las partículas gruesas y la descarga de lodo a través de las rejillas y los espectros de energía de colisión varían de manera importante. (SCALE-UP INVESTIGATION OF A PILOT AND INDUSTRIAL SCALE SEMI-AUTOGENOUS MILL USING A PARTICLE SCALE MODEL)
- (Quintanilla et al., 2024), desarrollan un modelo denominado gemelo digital para la optimización en tiempo real de un molino semiautógeno (SAG) controlado por un sistema experto, el modelo predice el comportamiento del molino con un horizonte de 2,5 minutos y errores máximos de predicción del 5%. (DIGITAL TWIN WITH AUTOMATIC DISTURBANCE DETECTION FOR REAL-TIME OPTIMIZATION OF A SEMI-AUTOGENOUS GRINDING (SAG) MILL)
- (Beloglazov & Plaschinsky, 2024), analizan el proceso de molienda de roca en un molino SAG y el desgaste de los elevadores, utilizando el método de elementos discretos (DEM) para simular la molienda de mineral de apatita-nefelina en un molino utilizando diferentes tipos de revestimientos y determinando los parámetros del proceso, encontraron que los revestimientos dependiendo de la zona sufren predominantemente desgaste por impacto o por abrasión.
- (Ghasemi, Neumann, et al., 2024), realizan un estudio comparativo de seis modelos de aprendizaje autónomo para predecir la productividad de molinos SAG utilizando datos industriales. Los resultados destacan a las redes neuronales recurrentes (RNN) como el modelo más preciso. Además, se identifica la importancia de la velocidad de giro y el agua de entrada como variables críticas en la predicción. (A COMPARATIVE STUDY OF PREDICTION METHODS FOR SEMI-AUTOGENOUS GRINDING MILL THROUGHPUT)
- (Ghasemi, Neshat, et al., 2024), analizan varios parámetros y su configuración en molienda SAG en función de optimizar el proceso, el modelo desarrollado reconoce la presencia de finos y la reología de la pulpa en molienda húmeda como uno de los

factores incidentes en la eficiencia del proceso. (A HYBRID INTELLIGENT FRAMEWORK FOR MAXIMISING SAG MILL THROUGHPUT: AN INTEGRATION OF EXPERT KNOWLEDGE, MACHINE LEARNING AND EVOLUTIONARY ALGORITHMS FOR PARAMETER OPTIMISATION)

- (Altun et al., 2024), evaluó diversas funciones de distribución de rotura basadas en energía dentro del modelo de balance poblacional (PBM) para un molino de medios agitados operado continuamente, encontró que las funciones de distribución de rotura basadas en parámetros ajustados y regenerados afectan significativamente la precisión de las predicciones para *Bij*, los resultados destacan la importancia de seleccionar cuidadosamente los métodos para ajustar y generar funciones de distribución en el diseño y simulación de procesos de molienda industrial.

Varias investigaciones han corroborado la incidencia de la granulometría de la alimentación sobre el proceso de fractura, (Morrell & Valery, 2001) en la molienda SAG, mientras que (F. N. Shi & Napier-Munn, 2002) investigaron la relación entre el comportamiento reológico de las suspensiones y el índice de molienda. Similares investigaciones (Zeng *et al*., 2023) para escenarios de molienda húmeda con diferentes materiales y parámetros operacionales han corroborado el rol de la reología de la pulpa con el proceso de fractura. Recientes investigaciones (Cleary *et al.,* 2020) basadas en simulaciones con métodos de elementos discretos DEM complementadas con el método de hidrodinámica de partículas suavizadas han permitido, según Cleary et. al. entre 2018 y 2022, generar modelos de molienda que suponen una mejora respecto a los anteriores que no consideraban el transporte de masa y el efecto de la reología de la pulpa.

2. Capítulo 2 Desarrollo de Objetivos

2.1 Objetivos de la Investigación

El objetivo general de la investigación fue estudiar la cinética de la molienda SAG de un mineral silíceo considerando la alteración reológica de la pulpa por presencia de finos en el alimento, sus resultados permitirán conocer una aproximación teórica del proceso lo que posibilitará optimizar procesos con mejor precisión. Los objetivos específicos se declaran a continuación.

2.1.1 Determinar la influencia de la presencia de material fino en la pulpa sobre las principales variables de operación.

Este objetivo pretende demostrar que una relativamente pequeña cantidad de material fino en forma de pulpa presente en la cámara de molienda influye significativamente en la cinética de molienda SAG. Este particular ha sido ya aproximado por otras investigaciones (Porras, 2016), (Osorio, 2015) para molienda convencional, sin embargo para las condiciones de molienda SAG esta influencia no ha sido estudiada.

Se ha considerado como principales variables operacionales la velocidad específica de fractura S_j y el modelo de función de fractura B_{ij} que se proponen estudiar mediante ensayos batch con monotamaño de una mena silícea en laboratorio bajo condiciones de molienda SAG y bajo diferentes condiciones de fino húmedo en el alimento.

La condición reológica de finos en pulpa puede ser caracterizada por su viscosidad aparente establecida para diferentes condiciones de fracción volumétrica de sólidos ϕ_V,

aproximada mediante modelos empíricos, aquí se puede demostrar el carácter no newtoniano de una pulpa mineral.

2.1.2 Correlacionar experimentalmente el consumo energético del molino SAG con la variación reológica de la pulpa.

Paralelamente a la cinética de molienda, la variación en el consumo energético puede ser también aproximado correlacionándolo con las condiciones de finos húmedos en el alimento. Sobre el mismo enfoque del experimento planteado para el objetivo anterior, se puede verificar los registros de consumo de potencia para diferentes condiciones de finos húmedos en el alimento.

Al ser el experimento en molienda tipo batch se puede considerar la cámara de molienda termodinámicamente como un sistema cerrado en donde no hay intercambio de masa, en donde en principio no esperaríamos variaciones en el consumo energético, sin embargo, ante la variación de la condición reológica del sistema el mismo será también alterado.

2.1.3 Hipótesis de investigación.

La condición reológica de la pulpa en molienda SAG influye sobre la cinética de molienda SAG de materiales silíceos, incrementando la desviación de la cinética de orden uno y disminuyendo los procesos de nacimiento-muerte de fractura convencional.

2.2 Planteamiento del experimento

Los ensayos realizados se enmarcan en la experimentación de un proceso de molienda semiautógena batch de un material silíceo de alimentación grueso (monotamaño) (+ 9500 - 12500 µm) el cual fue contaminado con una pulpa del mismo mineral formulada con partículas finas (-75µm), esta pulpa contaminante se formuló con tres fracciones diferentes de finos, la fracción máxima de finos contaminantes en relación con la carga del material fue del 5.88%.

Los demás parámetros operacionales se mantuvieron constantes de forma que las variaciones en los resultados obtenidos puedan ser operativamente relacionados a la variación de las condiciones de la pulpa contaminante adicionada al grueso de alimento.

2.3 Materiales y equipos

Los requerimientos de materiales y equipos utilizados se enlistan a continuación:

- Para los ensayos con monotamaño (+ 9500µm - 12500µm) se utilizó grava silícea con un contenido de 94% de SiO_2 previamente preparada en trituración y clasificación, del mismo material se preparó la fracción fina (-75µm).
- Trituradora de mandíbulas tipo Blake.
- Molino de laboratorio, diámetro de 0.6 m, longitud de 0.22 m.
- Carga moturante de bolas de acero de 2.5 in de diámetro, volumen aparente de carga 15%, carga de sólidos para todos los ensayos 31.77 kg (agua, finos, gruesos).
- Dispositivo toma muestras adaptado a la tapa del molino.
- Control electrónico de la velocidad mediante variador de frecuencia.
- Sistema de registro (data loger) de potencia entregada al molino.
- Serie de tamices Normalizada U.S.A Certificate Standard Testing Sieve ASTM E 11/01, roll tap.
- Viscosímetro Brookfield RVDV-II+P, con accesorios RV y UL Adapter.
- Utensilios varios (recipientes, balanza, etc.).

2.4 Características y preparación del material

El material utilizado corresponde a rocas silíceas seleccionadas de un yacimiento aurífero ubicado en el municipio de Buriticá departamento de Antioquia, estas rocas son desechadas como estéril y dispuesto en escombreras. Una muestra fue sometida a análisis por fluorescencia de rayos X obteniéndose un contenido de 94 % SiO2.

El material recolectado en fragmentos de entre 5 a 15 cm fue sometido a una primera fase de trituración para obtener el monotamaño de alimento deseado (+ 9500µm - 12500µm), el producto fue clasificado en un vibro tamiz en donde se retuvo el material de granulometría adecuada para el ensayo, vale indicar que el porcentaje de material que cumplía con el tamaño fue aproximadamente del 30%. Una porción del material triturado fue molido y tamizado por malla 200 para ser utilizado posteriormente en la formulación de la pulpa contaminante, todo el tratamiento descrito fue realizado en condiciones secas.

2.4.1 Preparación de la pulpa contaminante

Por tamizaje del material molido se obtuvieron alrededor de 7 kg de material fino inferior a 75 µm, suficientes para los ensayos planificados, este material fue homogenizado y cuarteado.

Inicialmente y por requerimiento de conocer la respuesta reológica de la pulpa contaminante se formularon 7 muestras con un volumen de 500 cm^3 con fracciones de fino como se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 2-1: Valores de Viscosidad.

FRACCIÓN PESO	**FRACCION VOLUMÉTRICA**	**VISCOSIDAD *mPas***
ϕ	ϕ_V	μ_s
0,10	0,042070	0,904014
0,20	0,089928	1,046091
0,30	0,144858	1,283727
0,40	0,208551	1,650545
0,50	0,283286	4,04586364
0,60	0,372208	20,2709091
0,70	0,479781	704,436364

Los valores de viscosidad fueron obtenidos a partir de ensayos realizados considerando una tasa de cizalladura de 22 s-1.

2.5 Diseño experimental

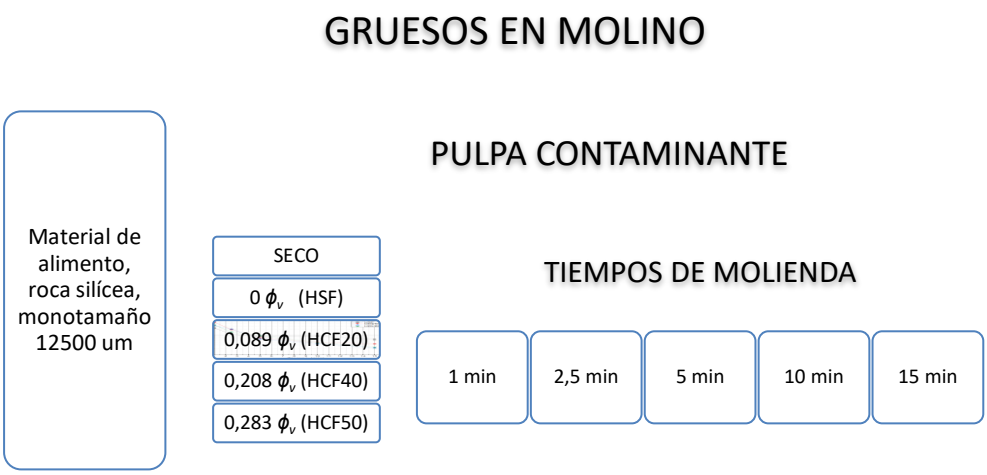
Los ensayos se idearon para comprobar la incidencia de la presencia de material fino húmedo (pulpa contaminante) en la cinética de molienda SAG de un monotamaño en alimento, en este sentido se consideraron las condiciones operacionales del proceso manteniéndolas invariantes.

- Equipo utilizado
- Carga de bolas (Hold up de bolas) 38.82 kg, diámetro 0.09 m y una densidad del acero de 7.8 g/cm^3 que equivale a una fracción de llenado de medios moledores de 0.08.
- Carga de material (monotamaño y pulpa) 31.77 kg
- Velocidad de rotación 40 rpm

La pulpa contaminante fue preparada con 1870 cm^3 de agua a la que se le adicionó polvo pasante malla 200 del mismo material para formar las concentraciones como las indicadas en la (tabla 2-1), la masa de grueso fue ajustada en cada ensayo para asegurarnos que la carga de sólidos se mantenga constante.

Al tratarse de una prueba cinética se planteó el siguiente esquema de ejecución de ensayos:

Figura 2- 1 Esquema de ejecución de ensayos.



Se escogieron los tiempos de 1, 2.5, 5, 10 y 15 minutos para la toma de muestras del molino, como se muestra en el esquema se desarrollaron ensayos también en condiciones secas, sin presencia de finos o humedad al interior de la cámara.

2.5.1 Parámetros operacionales de molienda

Vale indicar que varios ensayos de prueba y ajustes se realizaron con el propósito de afinar el protocolo, durante estas pruebas se decidió la adaptación de un sistema muestreador acoplado a la compuerta de carga y descarga del molino, este sistema permite la recolección en volumen de hasta 1500 cm^3 de material, en la práctica se tomaron muestras de hasta 700 cm^3.

Los parámetros operacionales se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 2-2: Parámetros operacionales del molino de laboratorio

PARÁMETRO	VALOR	UNIDAD
Longitud efectiva	0.22	m

PARÁMETRO	VALOR	UNIDAD
Diámetro efectivo	0.6	m
Volumen	0.062	m^3
Factor de llenado (J)	0.3	
Volumen de carga (Vc)	18.66	litros
Factor de llenado de bolas (Jb)	0.08	
Volumen bolas (Vb)	4.98	litros
Volumen agua (Va)	1.87	litros
Carga de material total (Wm)	29.90	kg
Carga de bolas, acero al manganeso (Wb)	38.82	kg

3. Capítulo 3 Resultados

3.1 Resultados

3.1.1 Condiciones reológicas de la pulpa contaminante

Básicamente para los diferentes ensayos las condiciones del material en alimento (monotamaño) fueron alteradas mediante la adición de una pulpa, la misma fue caracterizada en su comportamiento reológico, esta pulpa preparada con agua de red pública y material fino (d100 = 0.75 µm), bajo diferentes condiciones de fracción volumétrica de sólidos ϕ_V. La respuesta reológica de la “pulpa contaminante” fue medida a una taza de cizalladura de 21 s^{-1}, generando diferentes respuestas en el sistema.

La Figura 3-1 muestra un incremento exponencial de la viscosidad aparente de la pulpa en función de la fracción volumétrica de finos, el comportamiento de la pulpa mostró que para elevados valores de fracción volumétrica ϕ_V por encima de 0.2 la viscosidad crece rápidamente lo que vuelve con consistencia pastosa a la pulpa.

Figura 3-1 Resultados de ensayos reológicos a la pulpa contaminante a diferentes valores de ϕ_V.

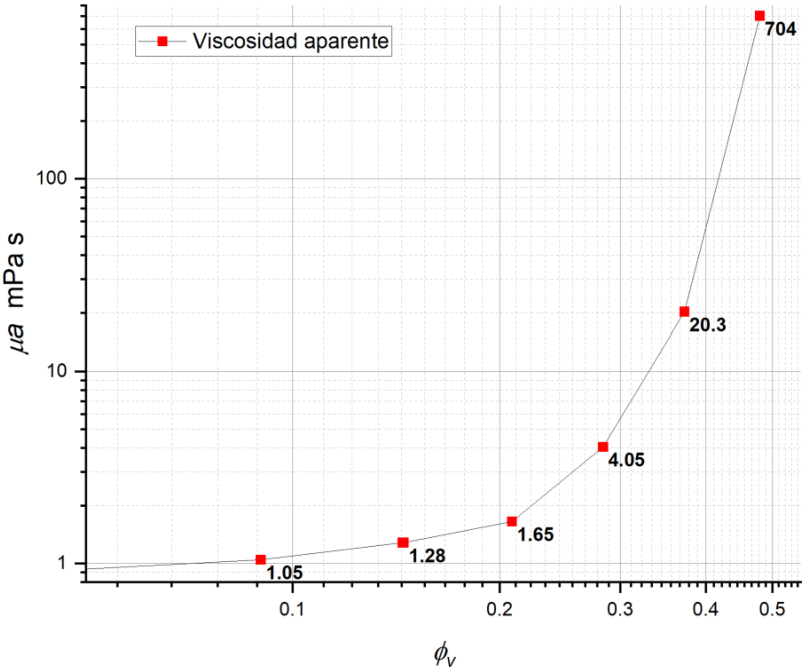


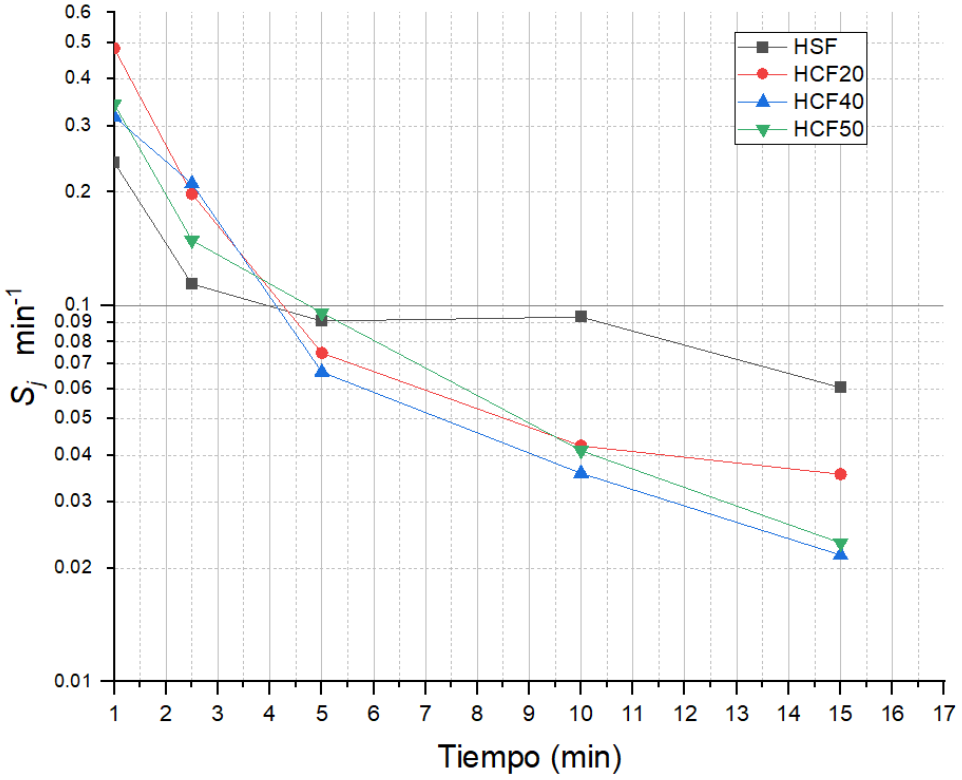
Tabla 3-1: Relaciones volumétricas y másicas de la pulpa contaminante.

Fracción de sólidos en peso ϕ	Facción volumétrica de sólidos ϕ_V
0.10	0.042
0.20	0.089
0.30	0.144
0.40	0.208
0.50	0.283
0.60	0.372
0.70	0.479

Velocidad específica de fractura S_j

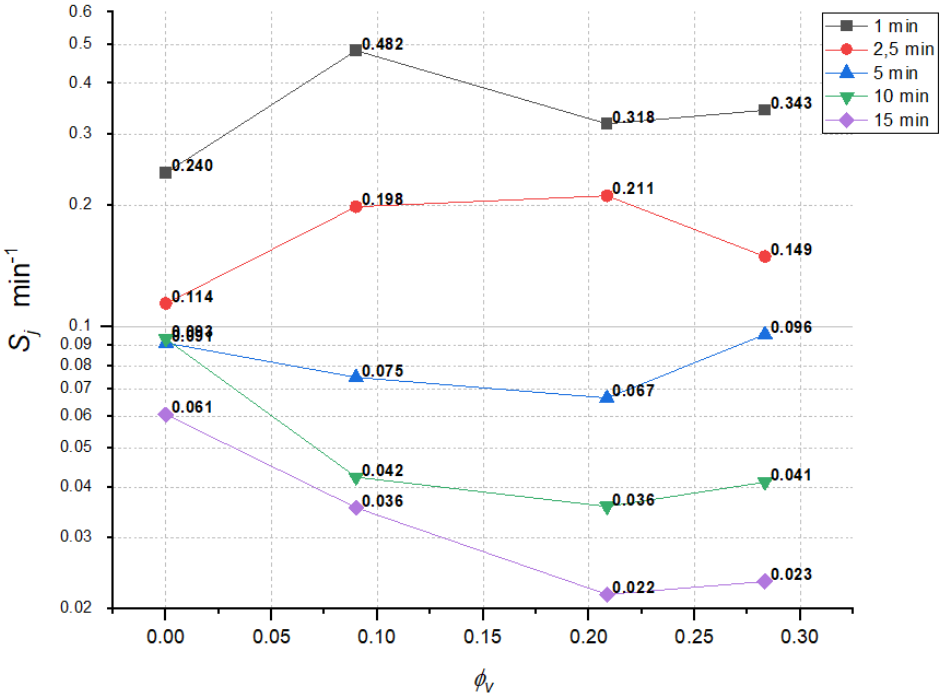
A partir de las pruebas granulométricas obtenidas de los diferentes ensayos y utilizando la (ver Ecuación (1.5)), para la determinación de la velocidad especifica de fractura se ha podido establecer que este parámetro disminuye con el tiempo para todas las condiciones de fino en alimento.

Figura 3-2 Velocidad específica de fractura S_j con respecto al tiempo para diferentes condiciones de alimento.



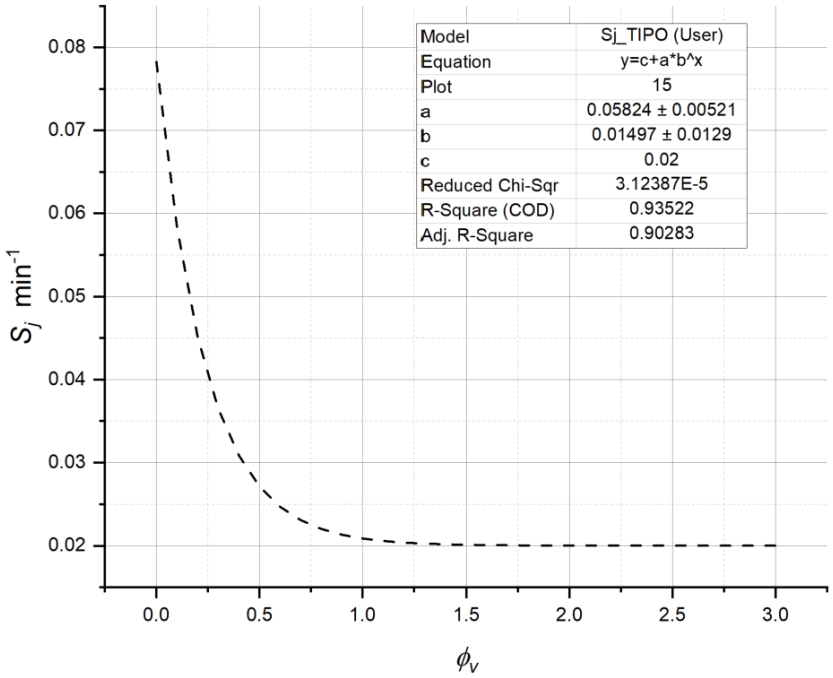
La (Figura 3-2) muestra el comportamiento de S_j de los diferentes ensayos bajo distintas condiciones de alimento en el tiempo. Vale indicar que la disminución de S_j es rápida durante los 5 primeros minutos tendiendo luego a asintotizarse hacia un valor mínimo.

Figura 3-3 Comportamientos de S_j bajo diferentes valores de ϕ_V y tiempo de molienda.



La (Figura 3-3) muestra los comportamientos de S_j bajo diferentes condiciones de ϕ_V y tiempo de molienda, evidentemente la sensibilidad de la variación de S_j en 10 y 15 minutos es mayor que a tiempos iniciales.

Figura 3-4 Ajuste exponencial de S_j para datos a 15 minutos.

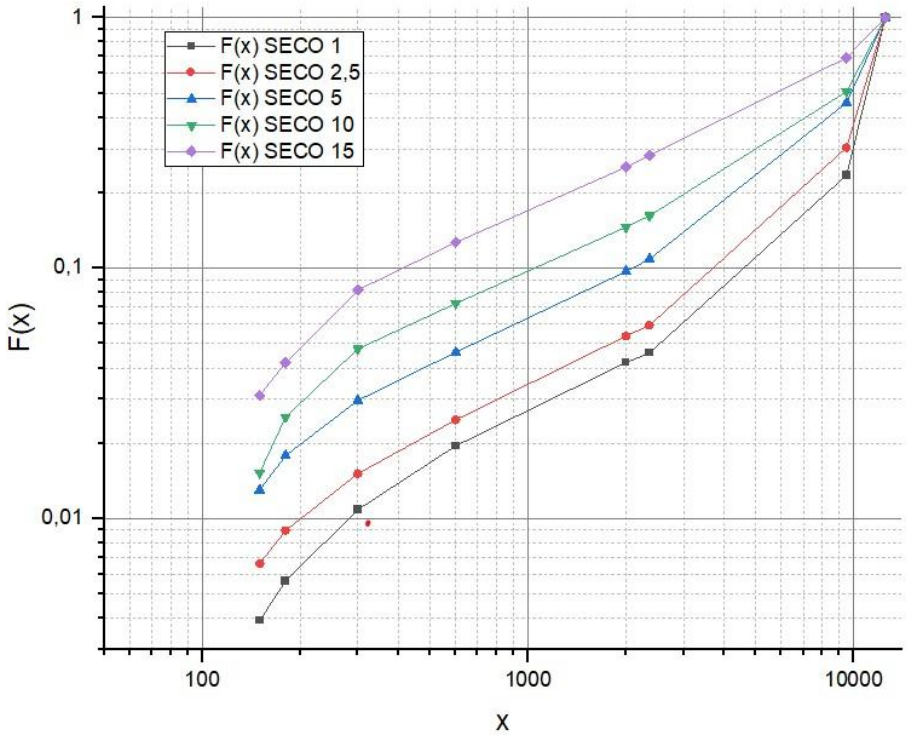


La (Figura 3-4), muestra el comportamiento de S_j considerando las diferentes condiciones de la fase contaminante del alimento considerado a los 15 minutos. Este primer modelo puede ser utilizado para predecir los valores de S_j bajo diferentes condiciones de finos en el alimento.

$$S_j = 0.02 + 0.05824 * 0.01497^{\phi_v} \qquad \text{Para t} = 15 \text{ min} \tag{3. 1}$$

Al graficar las DTP de los productos de molienda bajo las condiciones indicadas se ha podido corroborar algunas características del producto de la molienda SAG, principalmente un comportamiento bimodal en las distribuciones de tamaños, justificado por la operación del molino bajo condiciones en donde prevalece el "*chipping-abrassion*" como mecanismo de fractura sobre el impacto, (ver Figura 3-5).

Figura 3-5 Curvas granulométricas de los ensayos en condición seca para diferentes tiempos de molienda.



3.1.2 Parámetros de modelo de función de fractura

Se consideró el modelo de función de fractura de la (Ecuación (1.9)), el comportamiento de los parámetros se estableció por su variación temporal y de variación de ϕ_V.

3.1.3 Comportamiento de n_1

La evolución del parámetro n_1 a lo largo del tiempo, bajo distintas condiciones de alimentación (Figura 3-6), refleja un comportamiento que puede ajustarse de manera consistente a un modelo logarítmico - exponencial, como se ilustra en la (Figura 3-7).

Figura 3-6 Variación de n_1 respecto al tiempo para diferentes condiciones de alimento.

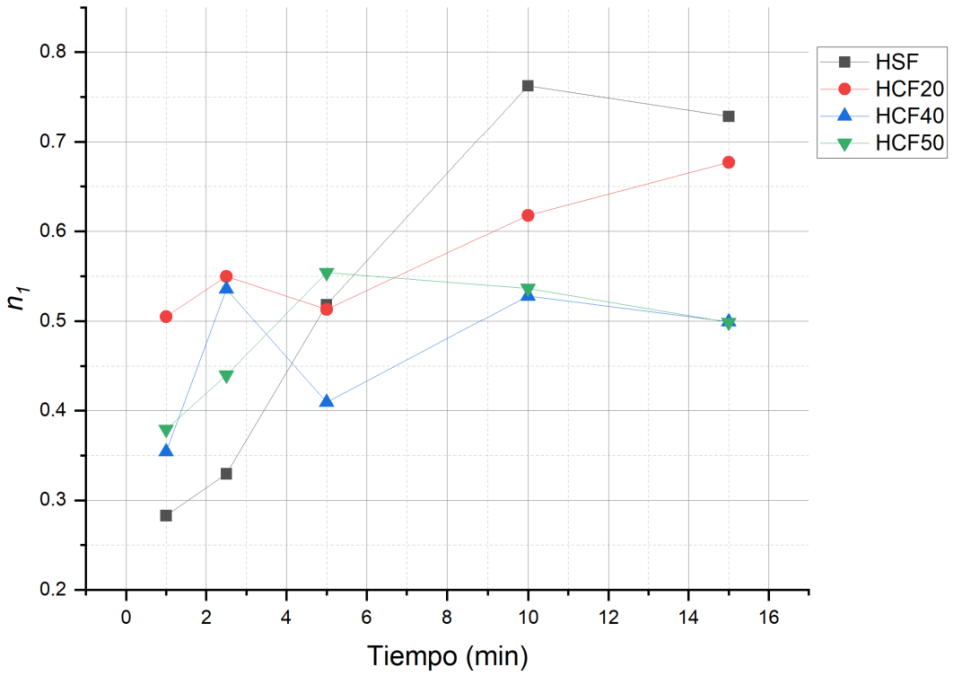
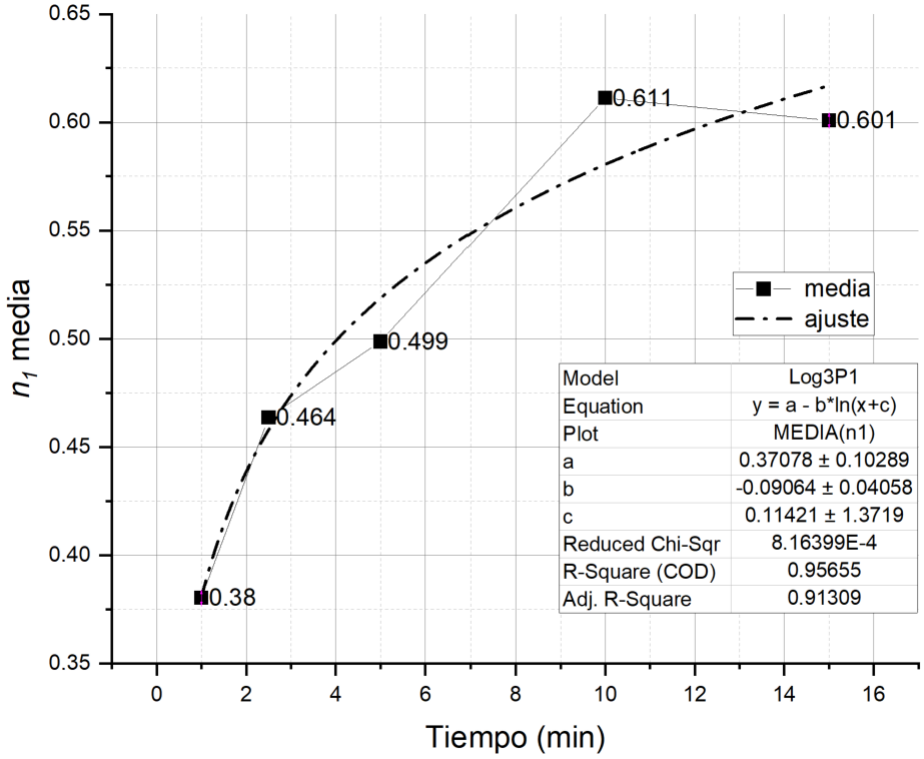
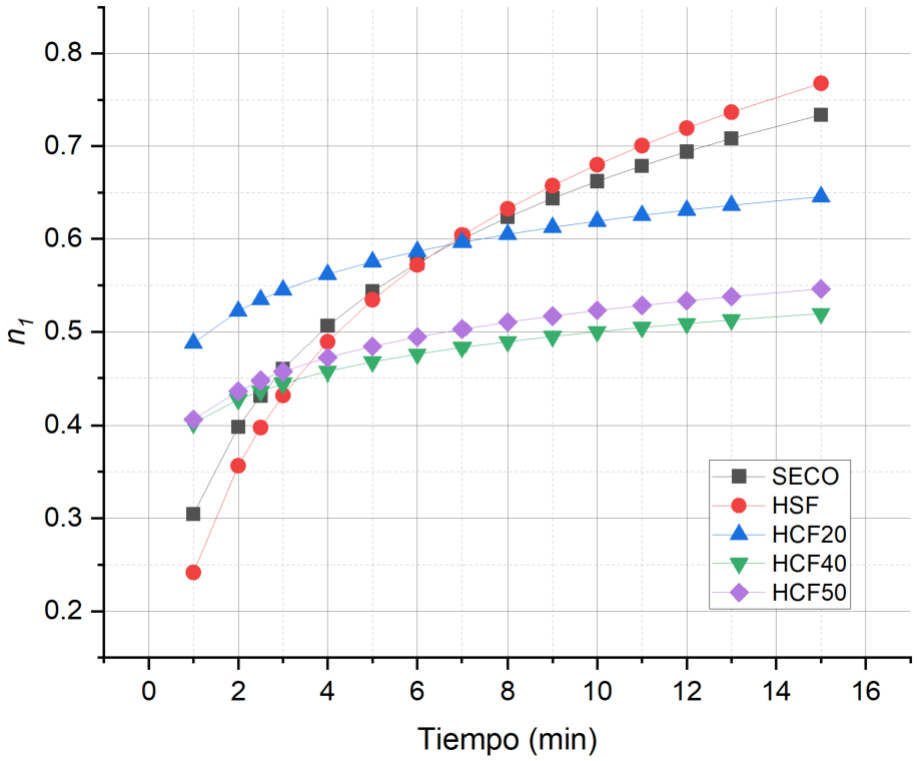


Figura 3-7 Ajuste de n_1 sobre los valores medios en función del tiempo.



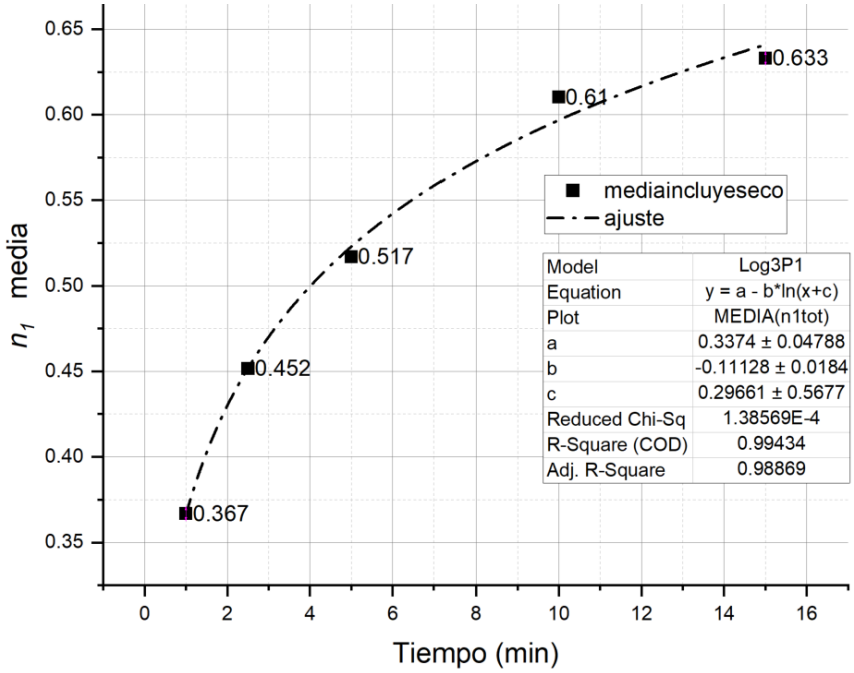
Con este ajuste se ha particularizado también el comportamiento para diferentes condiciones de alimento.

Figura 3-8 Ajustes de n_1 en el tiempo para diferentes condiciones de ϕ_V.



Considerando que el objetivo principal de esta investigación es determinar la influencia de húmedos finos sobre la cinética de fractura, los análisis realizados no han considerado los resultados con alimento seco, sin embargo, resulta interesante su inclusión y su comportamiento medio que se muestra en la (Figura 3-9).

Figura 3-9 Ajuste de n_1 para los valores medios incluido el ensayo en seco.



Al evaluar n_1 respecto a las condiciones de alimento se ha verificado que su variación se muestra significativa para los 10 y 15 minutos, como se muestra en la (Figura 3-10).

Figura 3-10 Comportamiento de n_1 respecto a ϕ_V para 10 y 15 minutos, en azul interpuntado la media entre los dos.

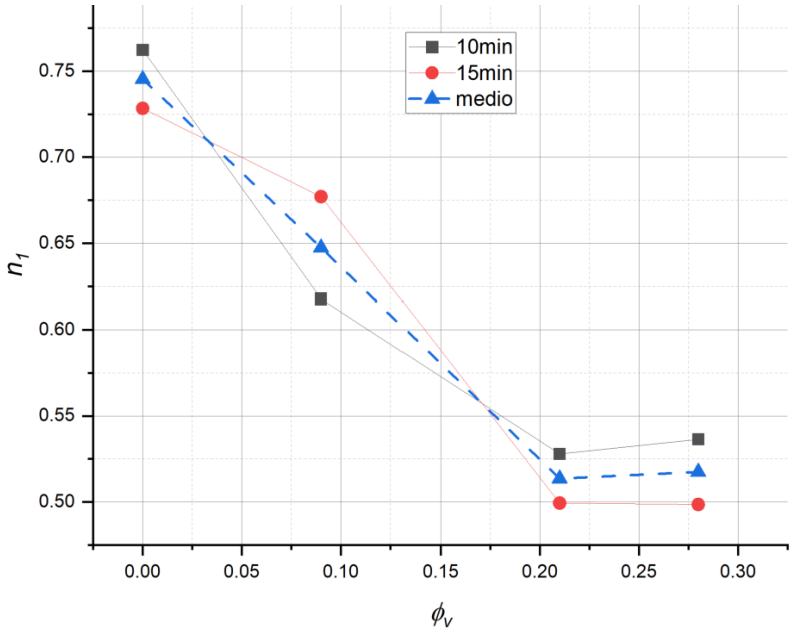
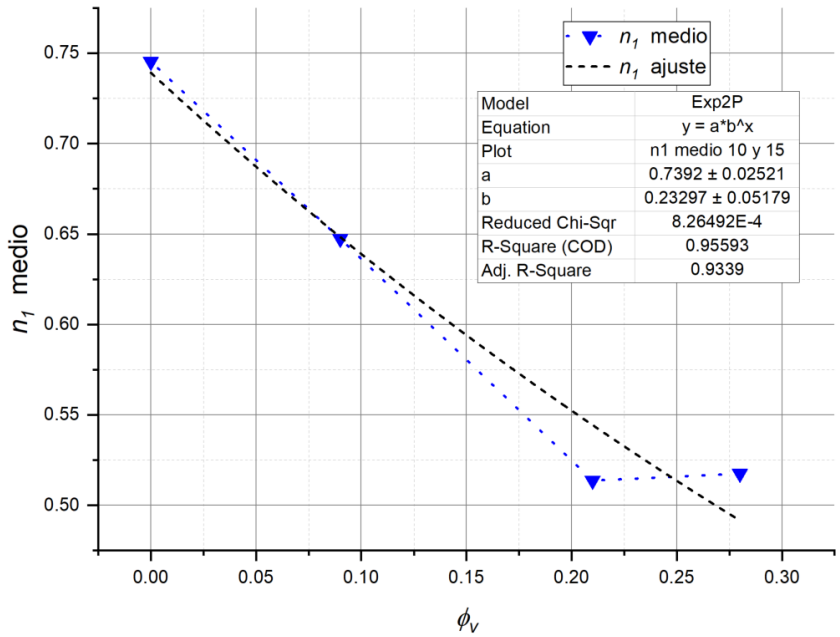


Figura 3-11 Valor medio de n_1 respecto a la ϕ_V y su ajuste exponencial.



Se ha realizado un ajuste de tipo exponencial de los valores medios indicados para modelizar el comportamiento, que nos muestra el descenso de los valores de n_1 al aumentar la fracción volumétrica de sólidos de la pulpa contaminante, el modelo de ecuación para n_1 se muestra a continuación.

$$n_1 = 0.7392 * 0.23297^{\emptyset_v} \qquad \text{Para } 10 < t < 15 \text{ min} \qquad (3.\ 2)$$

3.1.4 Comportamiento de *k*

Con respecto al parámetro *k* sus resultados muestran un comportamiento similar a los del parámetro n_1, de igual manera se ha realizado ajustes hacia las curvas de los valores medios considerando tanto variaciones en las condiciones del alimento como el tiempo. Las gráficas siguientes muestran su comportamiento.

Figura 3-12 Comportamiento del parámetro *k* en la (Ecuación (1.9)) en el tiempo para diferentes condiciones de alimento.

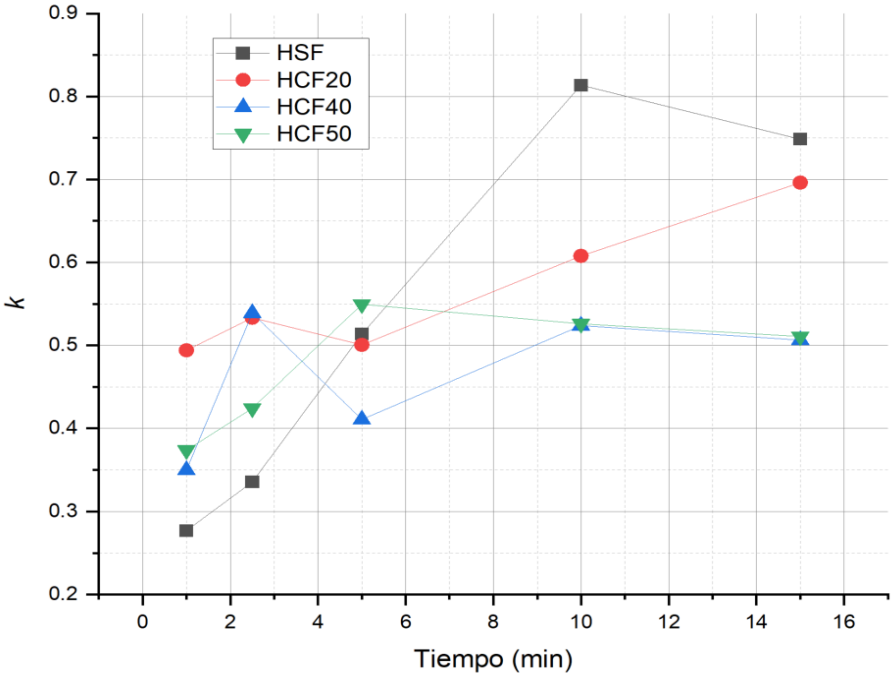


Figura 3-13 Ajuste del parámetro *k* sobre valores medios en el tiempo, sin considerar el ensayo SECO.

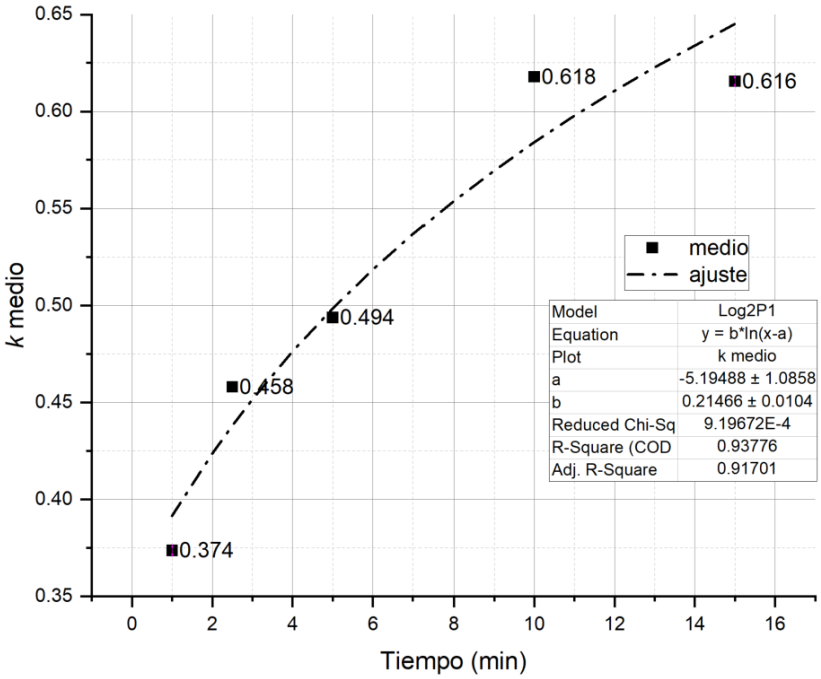
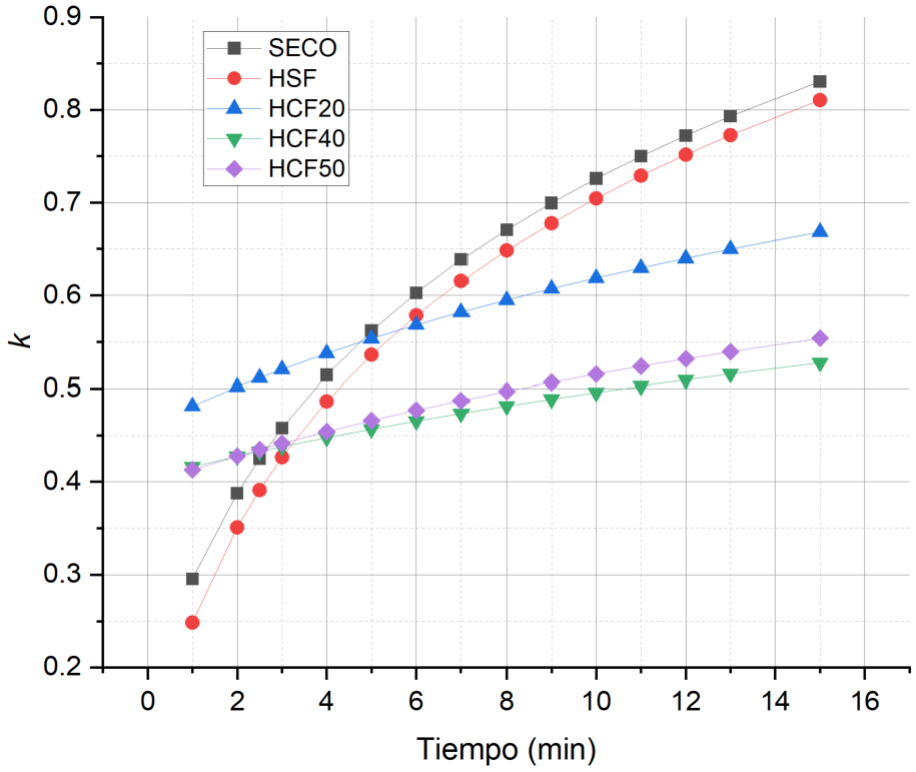
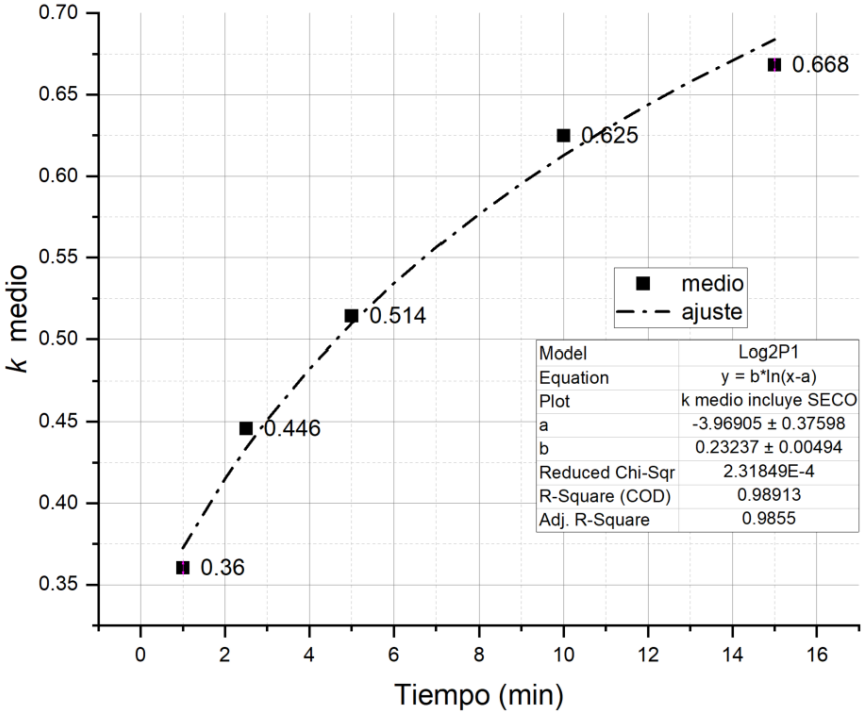


Figura 3-14 Ajuste logarítmico del parámetro *k* en el tiempo para las diferentes condiciones de alimento.



En el modelo de función de fractura utilizado *k* es un parámetro que relaciona la masa de material disponible para generar finos, siendo lógico suponer que su valor irá incrementándose al pasar el tiempo dado que un proceso de molienda tiene por objetivo disminuir el tamaño de partículas.

Figura 3-15 Ajuste logarítmico de *k* en el tiempo para las diferentes condiciones de alimento, incluye el ensayo SECO.



Luego, considerando las variaciones en el alimento, los valores de *k* disminuyen conforme se incrementa ϕ_V de sólidos en pulpa (Figura 3-16).

Figura 3-16 Variación de *k* respecto a ϕ_V para 10 y 15 minutos, en color azul el valor medio de los dos.

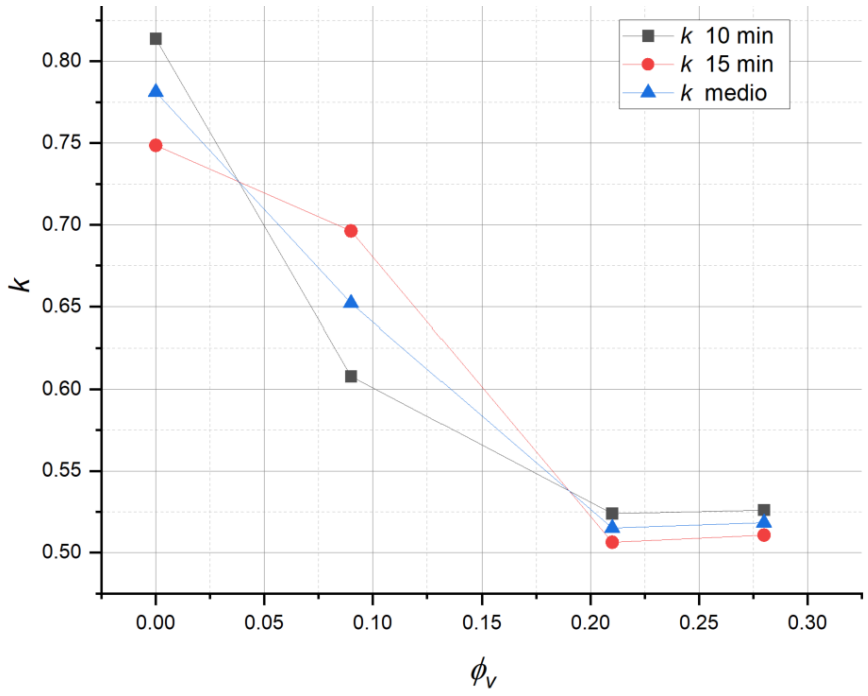
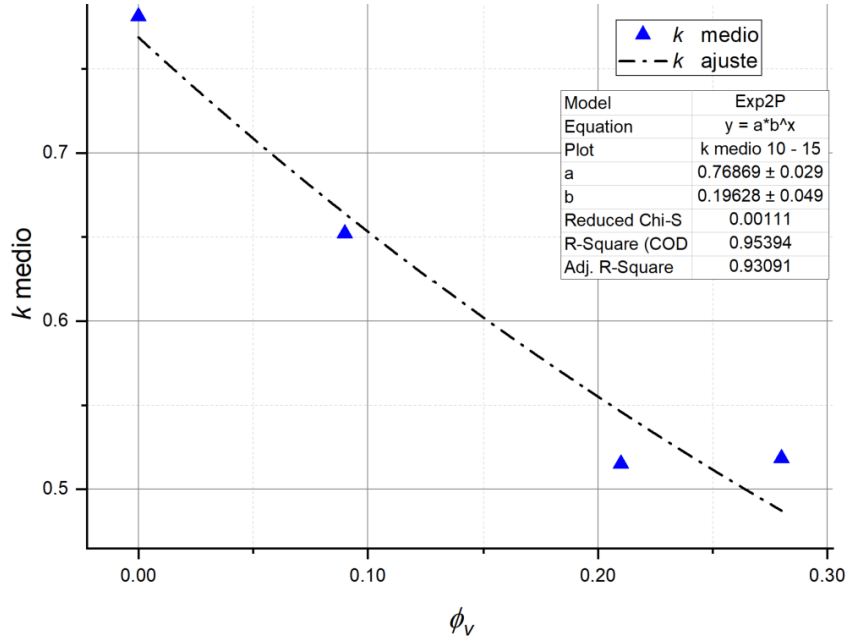


Figura 3-17 Ajuste exponencial sobre valores medios de *k* (10 y 15 min)



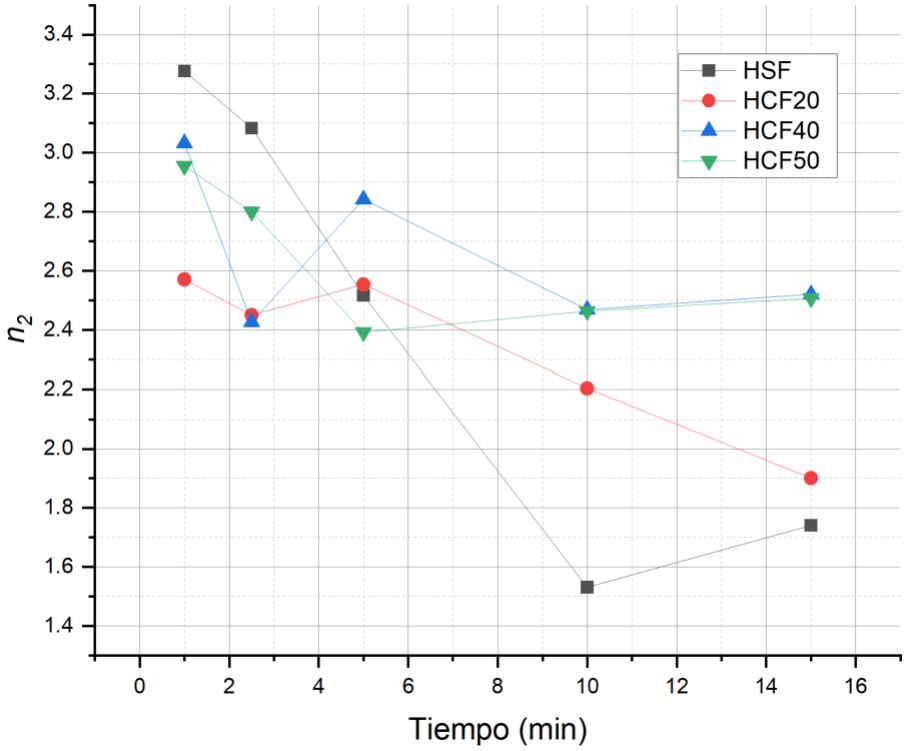
El modelo propuesto para *k* (Figura 3-17) se muestra sensible para tiempos altos (10 y 15 minutos), su ecuación se muestra a continuación.

$$k = 0.76869 * 0.19628^{\emptyset_v} \qquad \text{Para } 10 < t < 15 \text{ min} \qquad (3.\ 3)$$

3.1.5 Comportamiento de n_2

Este parámetro en el modelo de la (Ecuación (1.9)) de función de fractura se relaciona con la cantidad de gruesos, que se mantiene en la distribución de tamaños, naturalmente se espera que su valor vaya disminuyendo con el tiempo, comportamiento que muestran los resultados de los ensayos y se indican en la (Figura 3-18).

Figura 3-18 Comportamiento de n_2 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento.



Se ha realizado un ajuste tipo logarítmico a los valores medios de este parámetro, comportamiento que se muestra en la (Figura 3-19), también el ajuste se ha aplicado a los datos de los experimentos bajo diferentes condiciones de alimento, aquí vemos como n_2 disminuye con el tiempo y lo hace más rápidamente en las condiciones seco y HSF, situación que evidencia la incidencia de la pulpa contaminante sobre la fractura del monotamaño.

Figura 3-19 Comportamiento medio de n_2 en el tiempo y ajuste logarítmico.

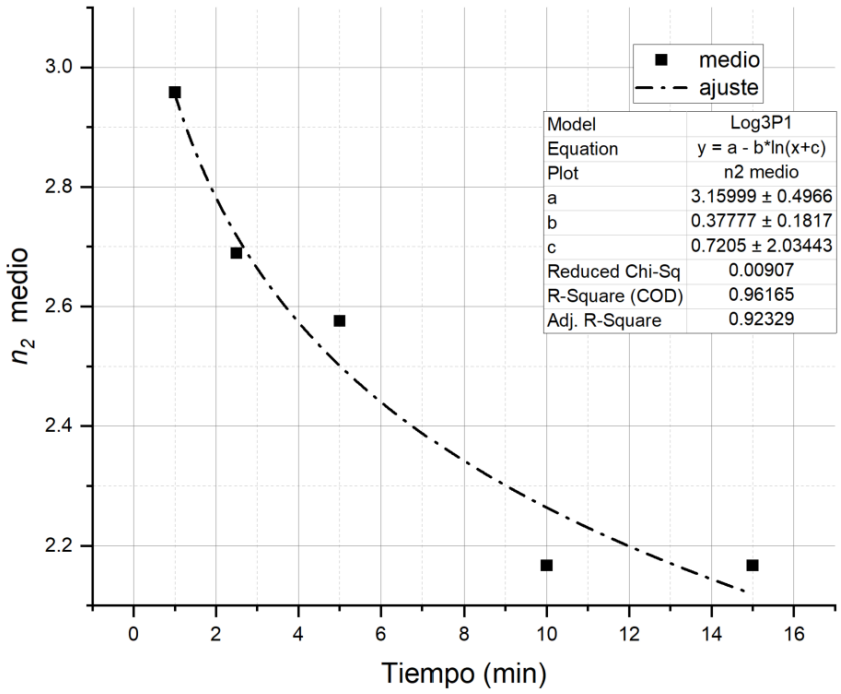
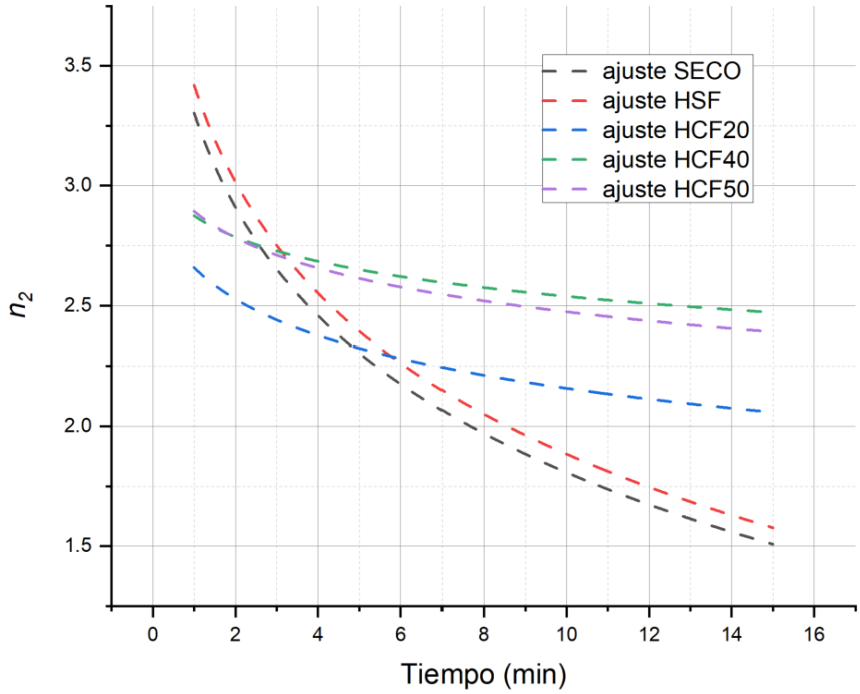


Figura 3-20 Ajuste logarítmico de n_2 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento.



La variación de n_2 respecto a la fracción de sólidos en pulpa contaminante es significativa para los 10 y 15 minutos, sobre sus valores medios se ha realizado un ajuste logarítmico modelizando su comportamiento que se muestran en las siguientes figuras.

Figura 3-21 Comportamiento de n_2 respecto a ϕ_V para diferentes tiempos.

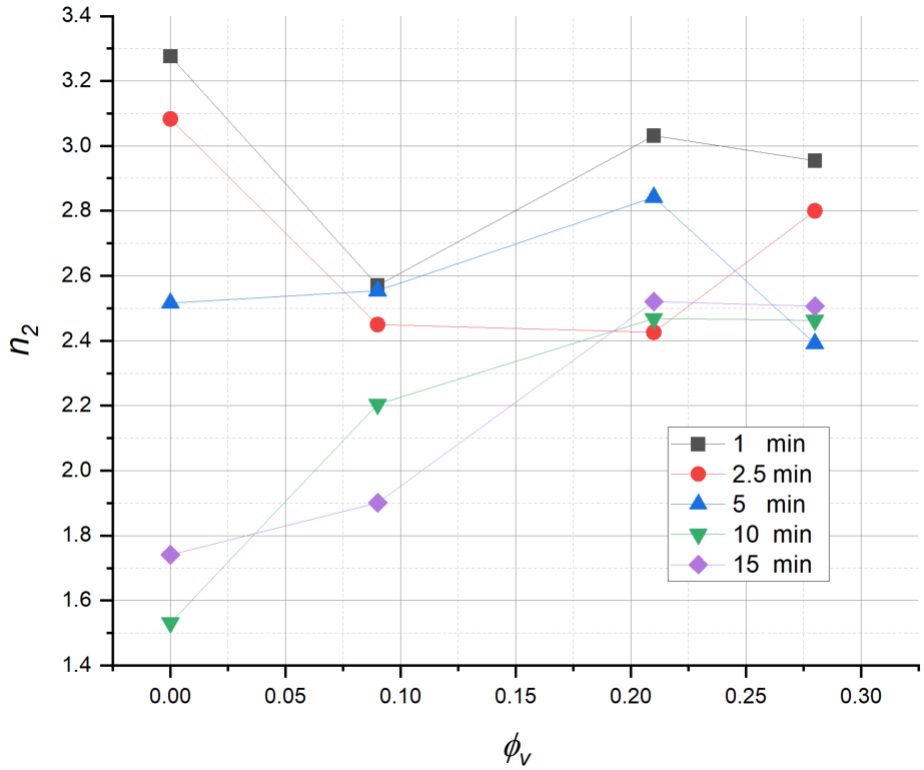
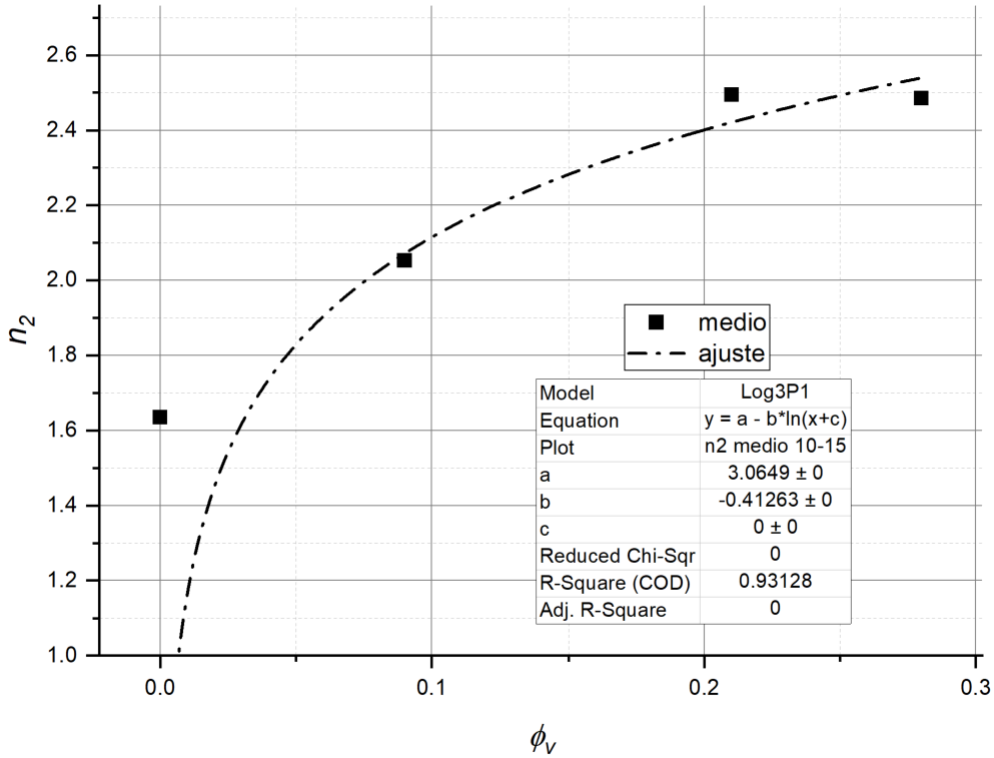


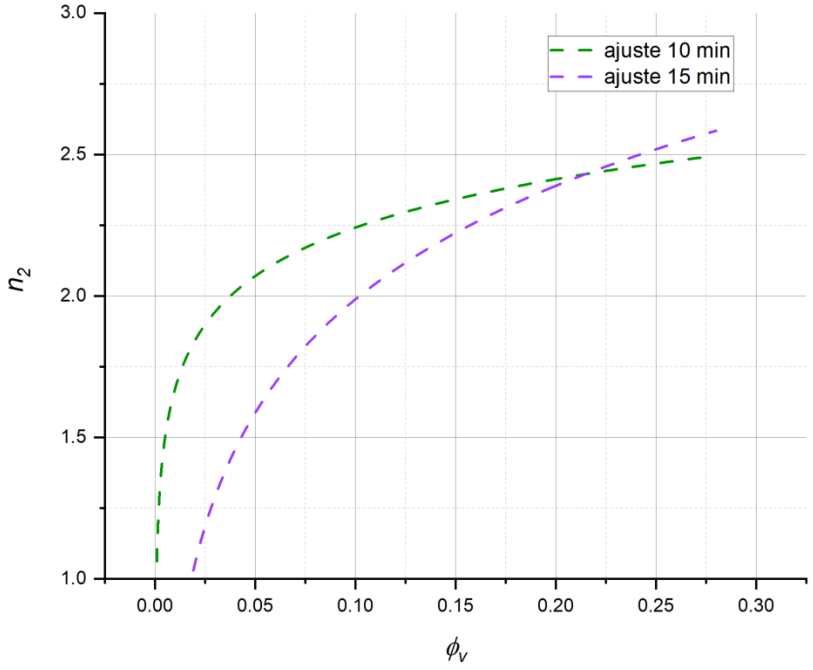
Figura 3-22 Ajuste logarítmico para valores medios de n_2 respecto a ϕ_V.



El modelo de ajuste logarítmico propuesto para n_2 se muestra a continuación.

$$n_2 = 3.0649 + 0.41263\, Ln(\phi_V) \qquad \text{Para } 10 < t < 15 \text{ min} \tag{3. 4}$$

Figura 3-23 Ajuste logarítmico de n_2 respecto a ϕ_V para 10 y 15 minutos.



3.1.6 Comportamiento de n_3

Este parámetro se relaciona con la cantidad de medios y finos presentes en el modelo de función de fractura vinculado con el proceso de chipping (astillamiento), de similar manera a los parámetros anteriores se ha realizado ajustes en sus comportamientos medios en el tiempo utilizando modelos lineales que se muestran en las siguientes figuras.

Figura 3-24 Comportamiento de n_3 en el tiempo para diferentes condiciones de alimento.

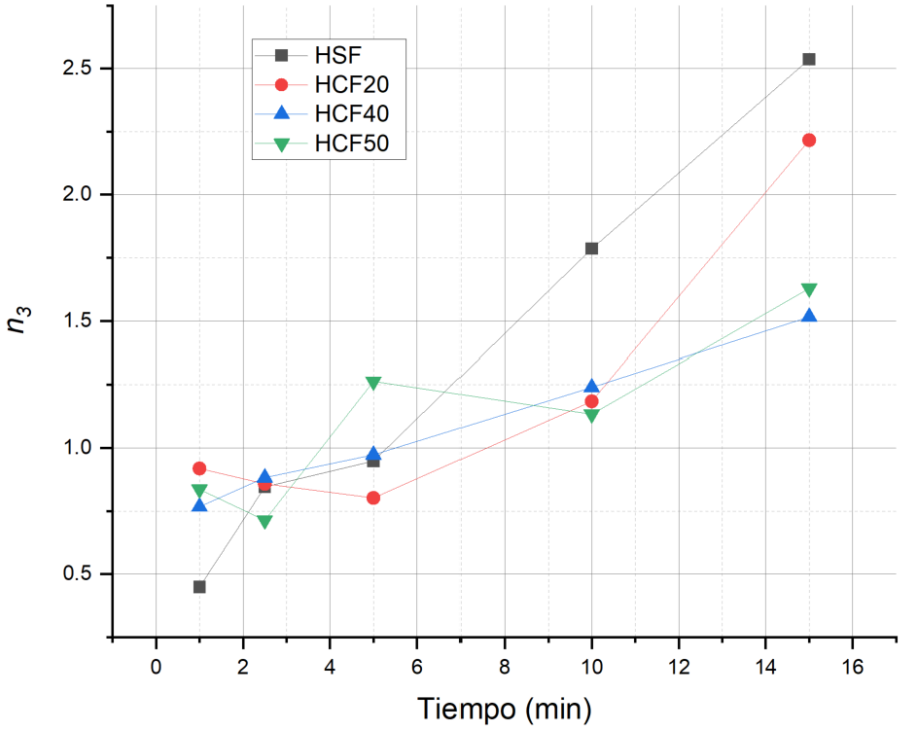


Figura 3-25 Valores de n_3 medio en el tiempo y ajuste lineal.

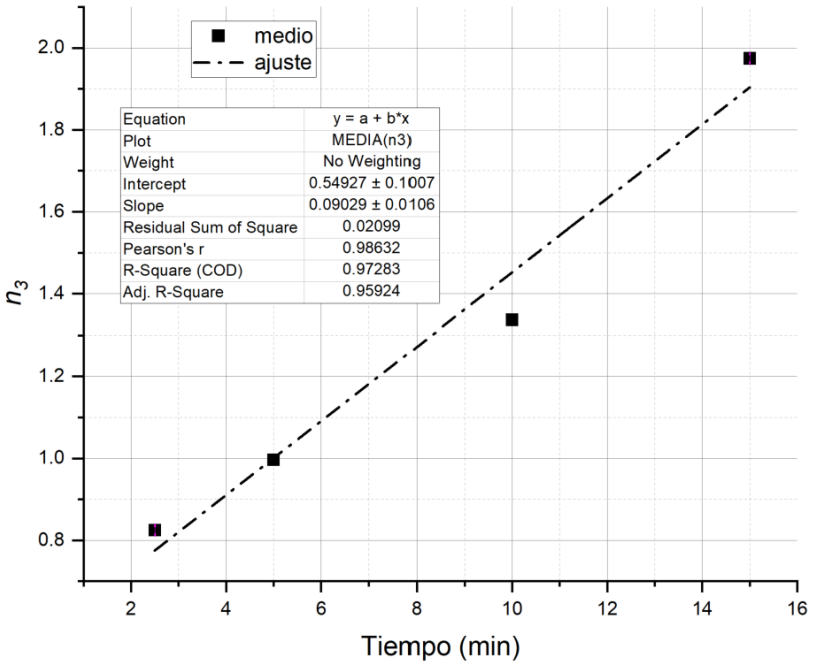
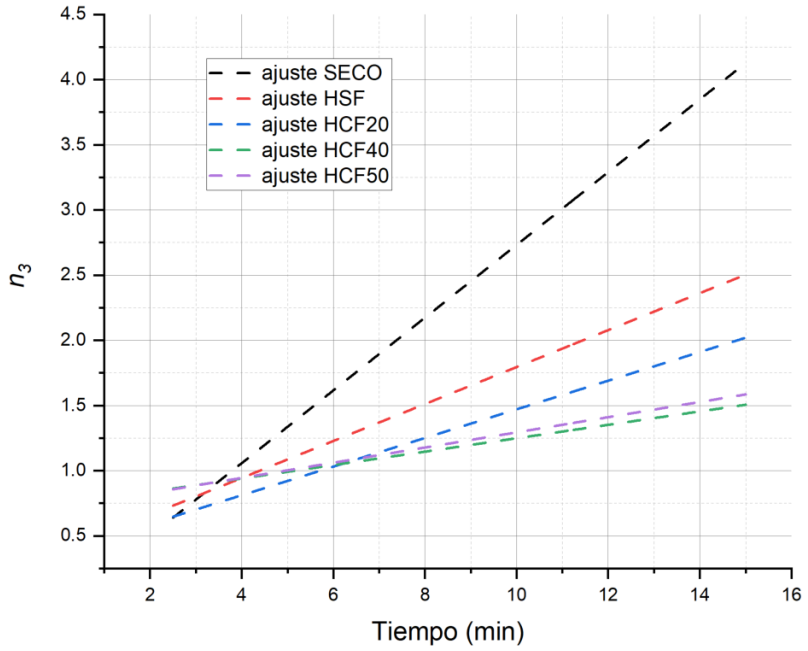


Figura 3-26 Ajuste lineal para los comportamientos de n_3 en el tiempo bajo diversas condiciones de alimento.



Respecto a ϕ_V de similar manera que los anteriores parámetros, la variación de n_3 es significativa para los 10 y 15 minutos en donde disminuye cuando la fracción de sólidos se incrementa.

Figura 3-27 Comportamiento de n_3 respecto a ϕ_V para diferentes tiempos.

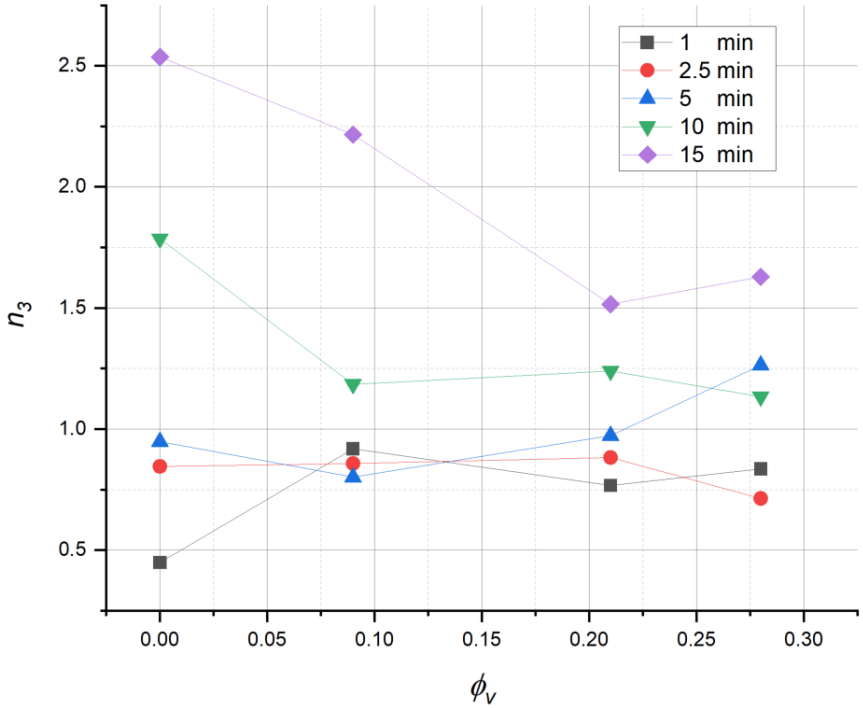
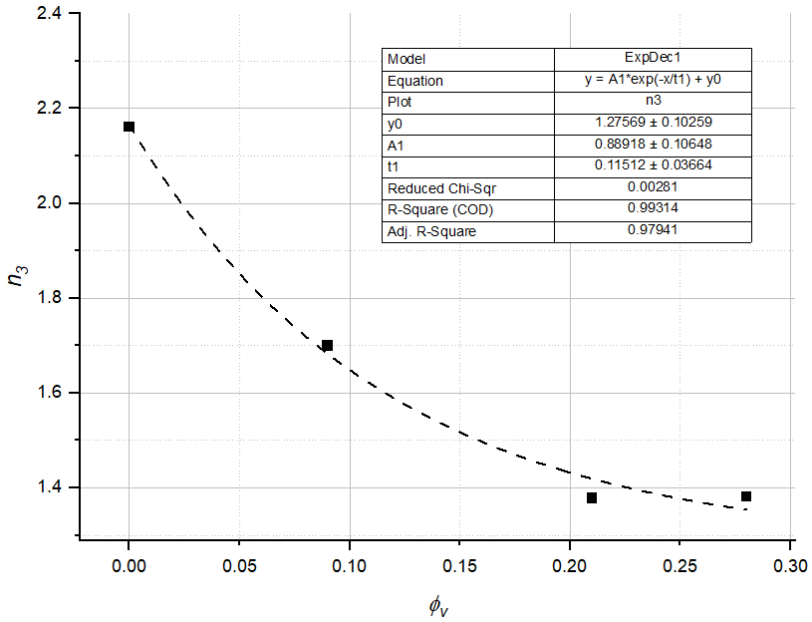


Figura 3-28 Ajuste exponencial de n_3 en función de ϕ_V para la media 10 y 15 minutos.



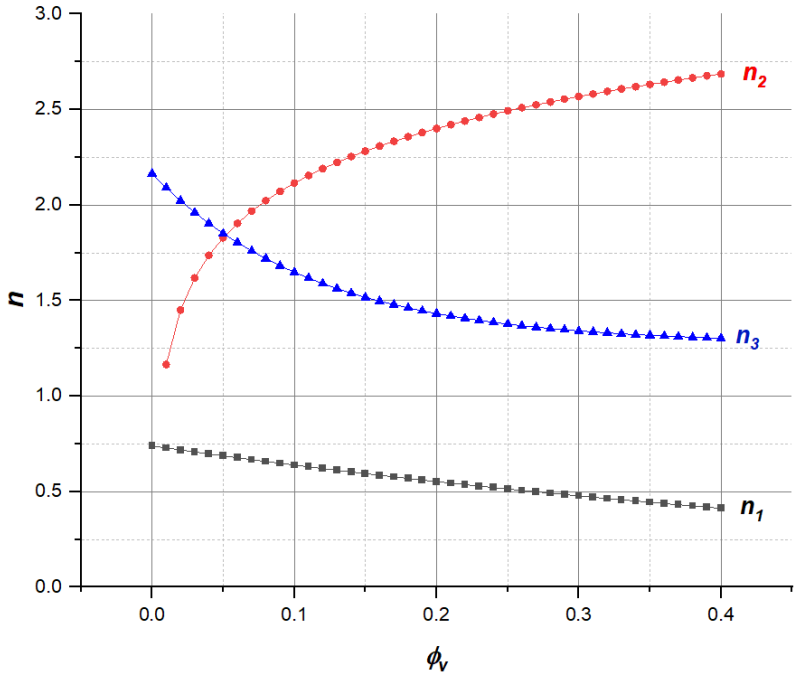
Acorde a los resultados, los valores de n_3 se muestran sensibles para tiempos altos (10 – 15 minutos), un modelo de ajuste exponencial se ha propuesto para la media de los tiempos indicados, su ecuación se muestra a continuación.

$$n_3 = 0.88918 * \exp\left(-\frac{\phi_V}{0.11512}\right) + 1.27569 \quad \text{Para } 10 < t < 15 \text{ min} \tag{3. 5}$$

3.1.7 Comportamiento general del modelo de función de fractura

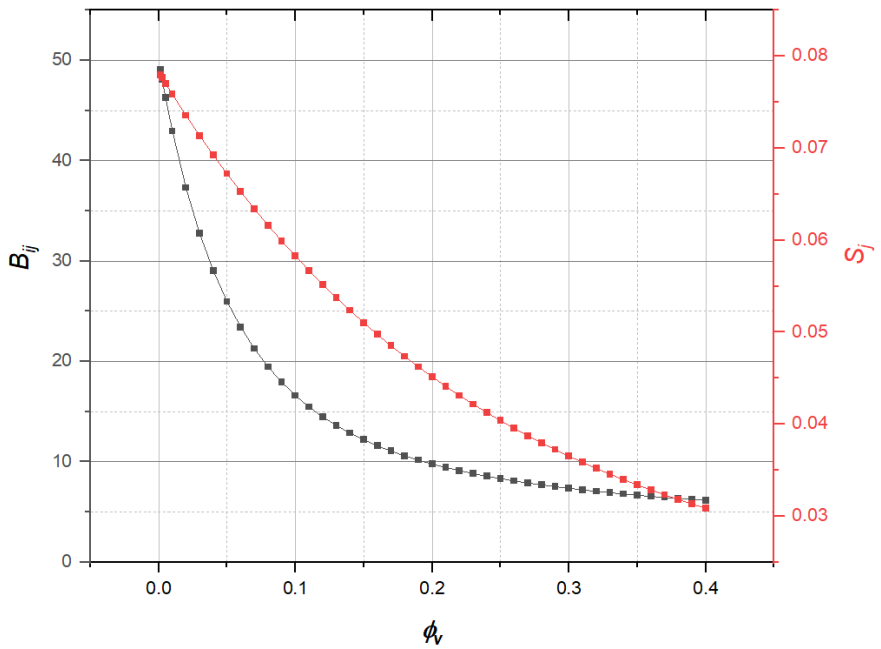
Las variaciones determinadas para los parámetros que configuran el modelo de función de fractura se muestran consistentes en función de la hipótesis planteada en la investigación, para diferentes ϕ_V, las variaciones de los n_1, n_2 y n_3 se muestran en la (Figura 3-29).

Figura 3-29 Comportamiento de parámetros n respecto a ϕ_V



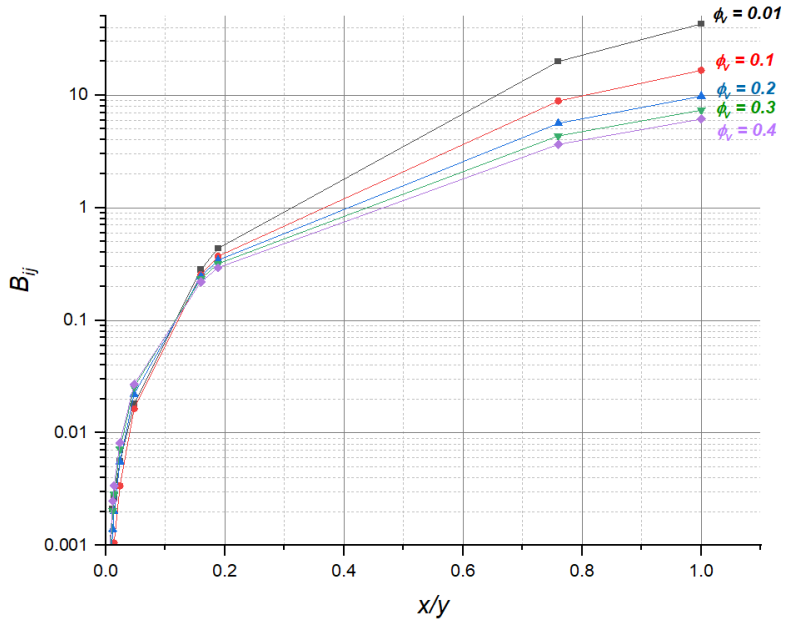
Evaluando la función de fractura B_{ij} para el tamaño máximo se obtiene el comportamiento que se muestra en la (Figura 3-30), aquí contrastado en doble eje con el valor de Sj obtenido a partir de la (Ecuación (3.1)) se verifica un descenso tanto en la fracción acumulada B_{ij} como en S_j por incremento en el fino húmedo en el alimento.

Figura 3-30 Gráfico de doble entrada, muestra el comportamiento de B_{ij} y $S_{j.}$ para variaciones de ϕ_V.



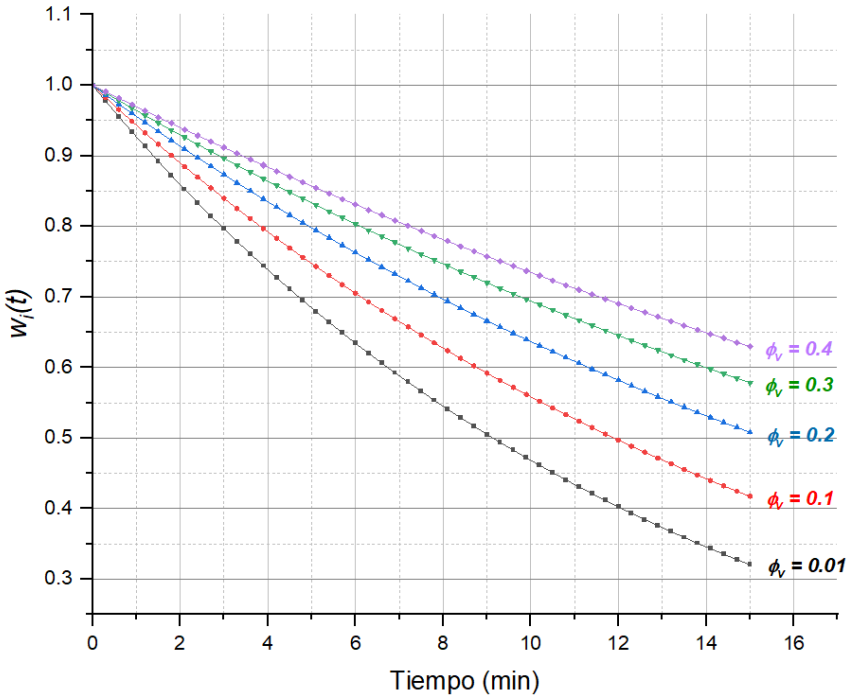
El modelo de función de fractura B_{ij} resultante ha sido construido para diferentes ϕ_V, en la siguiente figura se muestra su comportamiento.

Figura 3-31 Modelos de función de fractura construidos para diferentes condiciones de ϕ_V.



La solución de la (Ecuación (1.7)) de balance de masa proporciona la fracción de sólido esperada para diferentes tiempos y corresponde a la (Ecuación (1.4))

Figura 3-32 Fracción de sólidos *wi(t)* para diferentes condiciones de ϕ_V.

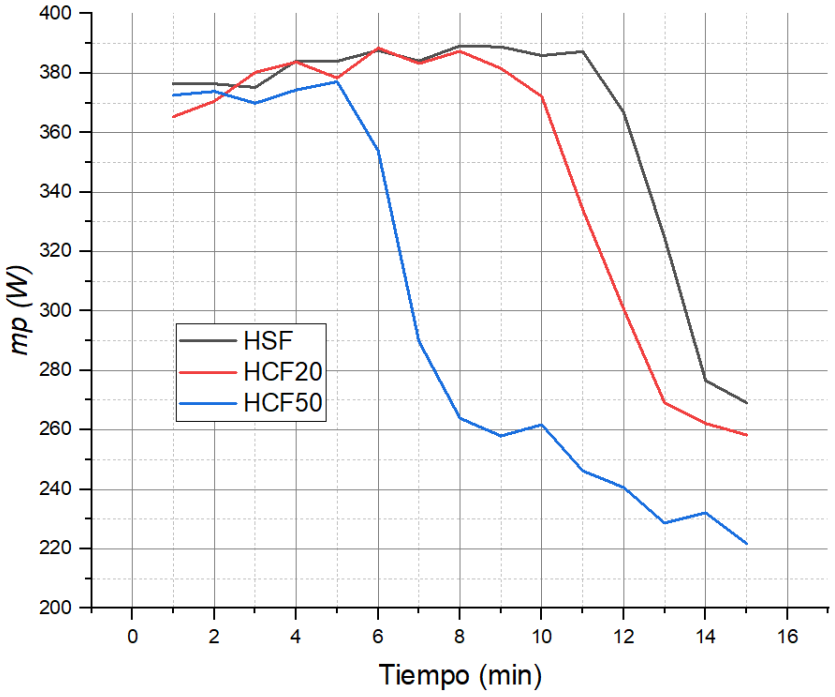


3.1.8 Consumo de potencia

El consumo de potencia *mp* en los ensayos se determinó utilizando un data loger que registró información de la potencia suministrada al motor con intervalos de 0.2 segundos para los ensayos HSF, HCF20 y HCF50.

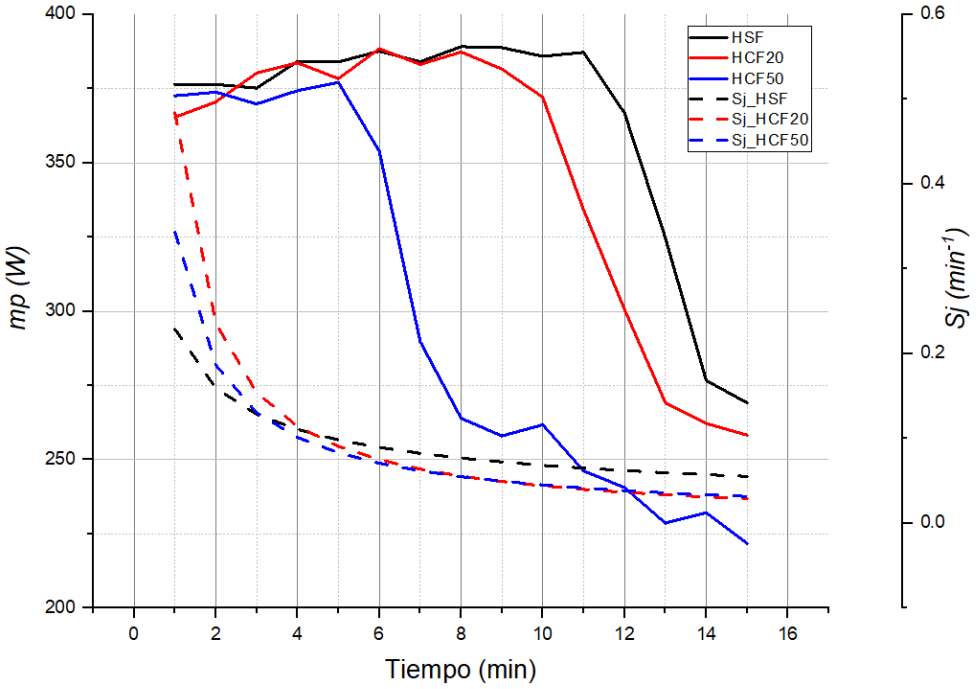
Se evidencia que a partir del minuto 5 aproximadamente el comportamiento del material HCF50 inicia un descenso en el consumo de potencia, comportamiento similar ocurre con el material HCF20 a los 9 minutos y en el HSF a los 11 minutos.

Figura 3-33 Variación de la potencia *mp* suministrada al molino en función del tiempo para diferentes condiciones de alimento.



La (Figura 3-33) muestra que la potencia *mp* sufre una brusca disminución debido a la variación reológica que sufre el material al interior de la cámara, este fenómeno demora más en la condición HSF debido justamente a que no contiene finos, entendiéndose la presencia de estos como los responsables de la alteración de la respuesta reológica de la pulpa, contrariamente el material que contiene más finos en el alimento, el HCF50 genera una pérdida de potencia de manera rápida a los 6 minutos. La rapidez del descenso en la potencia para todas las condiciones sugiere una condición límite reológica en la cual se desencadena la pérdida de potencia.

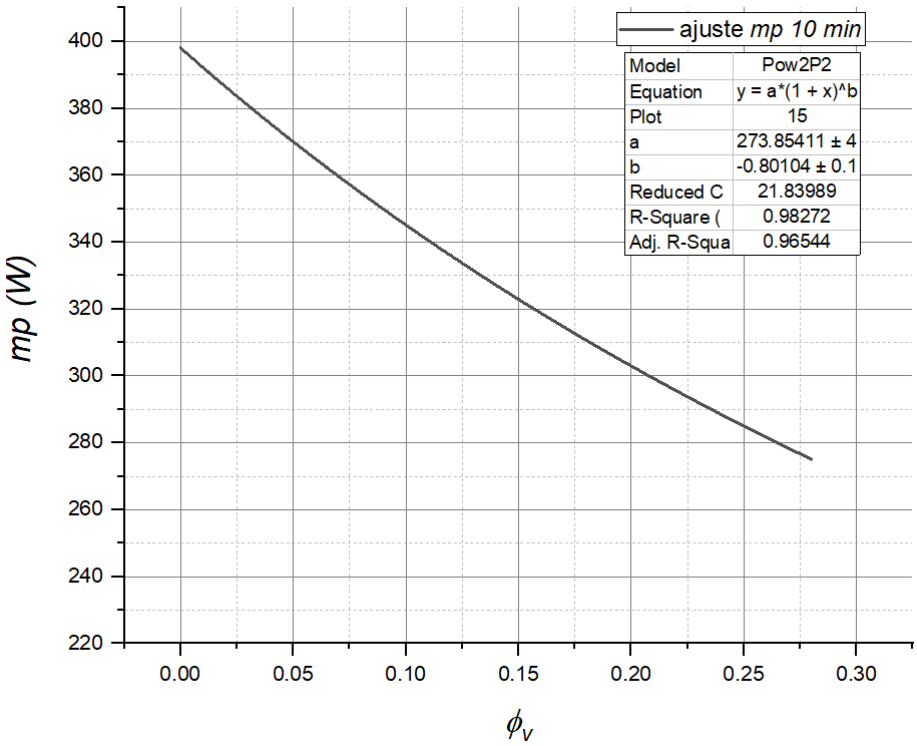
Figura 3-34 Contraste de la variación de potencia y la velocidad específica de fractura S_j.



La (Figura 3-34) de doble entrada muestra el contraste de la variación de *mp* con los modelos de S_j obtenidos respecto al tiempo.

Considerando la fracción volumétrica de sólidos ϕ_V, se han considerado los valores de potencia evaluados a 10 minutos, para realizar el modelo de ajuste respectivo (ver Figura 3-35).

Figura 3-35 Ajuste del consumo de potencia *mp* en función de ϕ_V para los valores de 10 y 15 minutos.



Los resultados para los valores de potencia *mp* se muestran sensibles para tiempos altos, un modelo de ajuste exponencial se ha propuesto para la respuesta a 15 minutos, su ecuación se muestra a continuación.

$$mp = 273.854 * (1 + \emptyset_v)^{-0.80104} \qquad \text{Para } t = 10 \text{ min} \tag{3. 6}$$

4. Conclusiones y trabajo futuro

4.1 Conclusiones

La investigación sobre la cinética de molienda semiautógena (SAG), considerando la influencia reológica de los finos en la pulpa, es crucial en el contexto de la minería moderna debido a la alta demanda energética asociada a los procesos de conminución. Los molinos SAG, esenciales en operaciones de gran minería, enfrentan desafíos como la eficiencia energética y la optimización de la fragmentación de materiales. Este estudio aporta al entendimiento del comportamiento reológico de las pulpas minerales y su impacto en la cinética de fractura, un área con limitadas investigaciones previas, pero de gran relevancia para mejorar la eficiencia operativa de los molinos.

Los resultados expuestos ponen de manifiesto la influencia de la presencia de finos y humedad (efecto reológico) en el alimento de la molienda SAG sobre la cinética de la fractura del material, siendo la velocidad específica de fractura $S_j = 0.02 + 0.05824 * 0.01497^{\emptyset_v}$ inversamente proporcional a la presencia de finos contaminantes en el alimento ϕ_V , lo que puede deducir a que S_j se muestra inversamente proporcional a la viscosidad aparente de la fase contaminante, efecto similar al encontrado por la investigaciones de (Porras, 2016) y (Osorio, 2015) para molienda húmeda convencional.

Durante los minutos iniciales la presencia de finos aparentemente no muestra incidencia sobre S_j ya que no se verifican variaciones significativas, lo que podría justificarse por la relativamente baja cantidad inicial de finos en alimento y/o que el mecanismo de fractura

predominante en molienda SAG, el "*chiping abrassion"* resulta insensible a la variación reológica de la pulpa.

Pasados los cinco minutos la incidencia se muestra significativa, utilizando un modelo de ajuste exponencial se ha propuesto una ecuación de variación de S_j en función de la fracción de sólidos finos presentes en el alimento para molienda SAG.

La variación temporal de S_j muestra valores relativamente altos para los primeros minutos en el alimento con bajo contenido de finos, pasados los 5 minutos la velocidad tiende a asintotizarse, una función de ajuste exponencial de dos parámetros ha permitido modelizar el comportamiento de S_j en función del tiempo de molienda.

Al graficar las DTP de los productos de molienda, se ha corroborado algunas características del producto de la molienda SAG, principalmente un comportamiento bimodal en las distribuciones de tamaños, justificado por la operación del molino bajo condiciones en donde prevalece el "chipping-abrassion" como mecanismo de fractura sobre el impacto, esto bajo la premisa de la escala de trabajo en laboratorio y la mayor influencia de discontinuidades (fallas de Griffith) en molinos industriales.

Utilizando el modelo de función de fractura de comportamiento bimodal, (Ecuación (1.9)), se han podido establecer los modelos de variación de los parámetros n_1, n_2, n_3 y k en función del tiempo y de la fracción volumétrica de la pulpa contaminante, (Ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5)). En general la incidencia de ϕ_V sobre los parámetros del modelo de función de fractura son más definidos para tiempos de 10 y 15 minutos, lo que resulta lógico al entender que, por el proceso de molienda la presencia de finos aumenta con el tiempo y por tanto la variación en su comportamiento reológico.

El modelo propuesto para los parámetros n_1, k, n_2 y n_3, son de la forma:

$$n_1 = 0.7392 * 0.23297^{\emptyset_v}\ ,\ \ k = 0.76869 * 0.19628^{\emptyset_v},\ \ n_2 = 3.0649 + 0.41263\ Ln(\emptyset_v) \quad \text{y}$$

$$n_3 = 0.88918 * \exp\left(-\frac{\phi_V}{0.11512}\right) + 1.27569\ .$$

Respecto a la potencia de operación en los experimentos, se evidencia que a partir del minuto 6 aproximadamente el comportamiento del material con mayor fino contaminante HCF50 inicia un brusco descenso en el consumo de potencia, comportamiento similar ocurre con el material HCF20 a los 9 minutos y en el HSF a los 11 minutos. La rapidez del descenso en la potencia sugiere una condición límite reológica en la cual se desencadena este proceso que impacta negativamente en la eficiencia de la molienda. Se desarrolla un modelo (Ecuación (3.6)) para *mp* en función de $\emptyset_v$ en base a los resultados a los 15 minutos con la ecuación $mp = 273.854 * (1 + \emptyset_v)^{-0.80104}$.

Este estudio confirma que la molienda SAG, operando bajo condiciones de reología controlada, puede modelarse de manera efectiva para optimizar los procesos de conminución. Se logró establecer una correlación entre la presencia de finos en la pulpa y las variables cinéticas de fractura.

La investigación demuestra que la presencia de finos en una pulpa altera significativamente su comportamiento reológico, modificando el fluido de un estado newtoniano a no newtoniano. Esto impacta directamente en la velocidad específica de fractura de las partículas gruesas.

Se identificó una relación inversamente proporcional entre la concentración de finos y la velocidad de fractura. Este hallazgo permitió el desarrollo de modelos matemáticos para predecir comportamientos bajo diferentes escenarios de viscosidad aparente.

Los modelos generados contribuyen a una comprensión más profunda del impacto de la reología en los procesos de molienda, integrando variables clave como el consumo energético y las propiedades del material.

Los resultados pueden ser implementados en plantas de beneficio mineral para ajustar las condiciones de operación de los molinos SAG, mejorando la eficiencia energética y la calidad del producto final previa validación y escalamiento de los modelos propuestos a los escenarios industriales. Al correlacionar el comportamiento reológico con el consumo

energético, las plantas pueden identificar configuraciones óptimas para minimizar el desgaste de los equipos y el gasto en insumos.

4.2 Trabajo futuro

Los resultados alcanzados circunscriben su validez para las condiciones experimentales utilizadas al igual que el material utilizado, como se indicó anteriormente existe una limitante importante relacionada a la condición de escala de laboratorio manejada con las de operación industrial de molienda SAG, por lo que deben considerarse como criterios de partida para futuras investigaciones y/o profundizar investigaciones a nivel de planta piloto lo que permitiría mejores ajustes para posibles escalamiento de modelos.

Es importante, considerando la complejidad de la conminución como proceso de fractura que involucra una gran cantidad de factores incidentes, recomendar que se profundicen fenomenológicamente la relación de incidencia de fenómenos reológicos generados al interior de la cámara de molienda con parámetros como humedad y granulometría de alimento, sistemas de descarga más eficientes, tiempos de residencia, velocidad de molienda, etc.

Resulta evidente la incidencia de la condición reológica de la presencia de finos en el alimento en molienda SAG, industrialmente el control de la presencia de finos y la humedad resulta importante para mejorar la eficiencia en el proceso.

A nivel de capacidades locales y nacionales en las instituciones de educación superior es importante recalcar la necesidad de actualizar y fortalecer los centros de investigación que parte de la necesidad inicial de dedicar mayores recursos para este fin, particularmente en el caso ecuatoriano en donde la actividad minera se presenta como alternativa emergente de gran potencial de aporte al erario nacional se halla particularmente limitada, siendo importante reconocer que resulta gratamente satisfactorio en si poder contar con esta posibilidad en el alma mater colombiana.

Aprovechando el auge de sistemas de modelamiento basado en simuladores, redes neuronales, minería de datos, etc., se puede complementar los resultados de la investigación realizada en molienda SAG con las metodologías indicadas que pueden ofrecer beneficios significativos en términos de análisis, predicción y optimización.

Específicamente se esperaría potencialmente realizar:

- Análisis de variables críticas (velocidad de rotación, viscosidad de la pulpa, porcentaje de finos) que maximizan la eficiencia de molienda.
- Construir modelos que predigan el comportamiento de las variables clave, como el consumo energético y la tasa de fractura, a partir de los datos experimentales recolectados. Entrenar redes neuronales con datos experimentales para predecir variables de salida, como el consumo energético y la eficiencia de molienda, en función de las condiciones operativas.
- Simular el comportamiento de la pulpa dentro del molino SAG para observar fenómenos difíciles de medir experimentalmente, como la distribución de esfuerzos o las tasas de cizalladura.

Referencias

Altun, O., Toprak, A., Altun, D., & Bilgili, E. (2024). Assessment of different energy-based breakage distribution functions in population balance model of an industrial scale continuously operated wet stirred media mill. *Minerals Engineering*, *218*, 109054. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2024.109054

Asghari, M., Vandghorbany, O., & Nakhaei, F. (2019). Relationship among operational parameters , ore characteristics , and product shape properties in an industrial SAG mill. *Particulate Science and Technology*, *38*(4), 482–493. https://doi.org/10.1080/02726351.2018.1482977

Austin, L., & Concha, F. (1994). *Diseño y Simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación* (Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología (ed.); 1st ed.).

Baldassarre, G., Baietto, O., & Marini, P. (2020). Comminution effects on mineral-grade distribution: The case of an mvt lead-zinc ore deposit. *Minerals*, *10*(10), 1–18. https://doi.org/10.3390/min10100893

Barrientos, A., Concha, F., & J.L, L. (1994). A mathematical model of solid-liquid suspensions. *IV Meeting of the Southern Hemisphere on Mineral Technology*, 189–202.

Becerra, M., & Magne, L. (2020). Semi-autogenous grinding model based on effective grinding rate and three stages internal classification – Part i. *Minerals Engineering*, *157*, 106543. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2020.106543

Beloglazov, I., & Plaschinsky, V. (2024). Development MPC for the Grinding Process in SAG Mills Using DEM Investigations on Liner Wear. *Materials (Basel, Switzerland)*, *17*(4). https://doi.org/10.3390/ma17040795

Benretem, A., Benidir, M., & Chaib, R. (2010). Factors influencing slurry rheology. *World Pumps*, *2010*(7), 30–32. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0262-

1762(10)70199-1

Bueno, M. P., Kojovic, T., Powell, M. S., & Shi, F. (2013). Multi-component AG/SAG mill model. *Minerals Engineering*, *43–44*, 12–21. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2012.06.011

Bustamante-Rua, M. O., Rojas-Reyes, N. R., & Quitian-Chila, G. R. (2016). Efecto del material fino en la reología de suspensiones de caolín. *DYNA (Colombia)*, *83*(195), 105–111. https://doi.org/10.15446/dyna.v83n195.48855

Bustamante, M. O. (1999). *Reología de suspensiones: Viscosidad de suspensiones minerales bajo una aproximación termodinámica*. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21766

Bustamante, M. O. (2002). *Modelación matemática del tensor de esfuerzo y de la viscosidad de una suspensión mineral*. Universidad de Concepción, Chile.

Bustamante, M. O., Rojas, N. R., & Quitian, G. R. (2016). Fine material effect on kaolin suspensions rheology. In *DYNA* (Vol. 83, pp. 105–111). scieloco.

Chitalov, L. (2018). Different ways of the ball Bond work index determining. *Scientific Reports on Resource Issues*, *10*(03), 172–181.

Cleary, P. W., Delaney, G. W., Sinnott, M. D., & Morrison, R. D. (2018). Inclusion of incremental damage breakage of particles and slurry rheology into a particle scale multiphase model of a SAG mill. *Minerals Engineering*, *128*, 92–105. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.08.026

Cleary, P. W., & Morrison, R. D. (2012). Prediction of 3D slurry flow within the grinding chamber and discharge from a pilot scale SAG mill. *Minerals Engineering*, *39*, 184–195. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2012.05.019

Cleary, P. W., Morrison, R. D., & Sinnott, M. D. (2020). Prediction of slurry grinding due to media and coarse rock interactions in a 3D pilot SAG mill using a coupled DEM + SPH model. *Minerals Engineering*, *159*. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2020.106614

Cleary, P. W., & Owen, P. (2019). Effect of operating condition changes on the collisional environment in a SAG mill. *Minerals Engineering*, *132*, 297–315. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.06.027

Cleary, P. W., Sinnott, M. D., & Morrison, R. D. (2023). Scale-Up Investigation of a Pilot and Industrial Scale Semi-Autogenous Mill Using a Particle Scale Model. *Minerals*, *13*(12). https://doi.org/10.3390/min13121490

COCHILCO. (2016). Informe de actualización del consumo energético de la minería del cobre al año 2015. In *Informe de actualización del consumo energético de la minería del cobre al año 2015*. https://www.cochilco.cl/Mercado de Metales/Informe de Consumo de Energía 2015 RBA versión final.pdf

Delaney, G. W., Cleary, P. W., Morrison, R. D., Cummins, S., & Loveday, B. (2013). Predicting breakage and the evolution of rock size and shape distributions in Ag and SAG mills using DEM. *Minerals Engineering*, *50–51*, 132–139. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2013.01.007

Fuerstenau, D. W., & Abouzeid, A. Z. M. (1991). Effect of fine particles on the kinetics and energetics of grinding coarse particles. *International Journal of Mineral Processing*, *31*(3–4), 151–162. https://doi.org/10.1016/0301-7516(91)90024-D

Garrido, C. (2004). Control Predictivo con Restricciones para una Planta de Molienda SAG. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 88.

Ghasemi, Z., Neshat, M., Aldrich, C., Karageorgos, J., Zanin, M., Neumann, F., & Chen, L. (2024). *A Hybrid Intelligent Framework for Maximising SAG Mill Throughput: An Integration of Expert Knowledge, Machine Learning and Evolutionary Algorithms for Parameter Optimisation*. *Ml*, 1–21. https://ssrn.com/abstract=4735140

Ghasemi, Z., Neumann, F., Zanin, M., Karageorgos, J., & Chen, L. (2024). A comparative study of prediction methods for semi-autogenous grinding mill throughput. *Minerals Engineering*, *205*, 108458. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2023.108458

Gong, D., Nadolski, S., Sun, C., Klein, B., & Kou, J. (2018). Optimization of the energy distribution of SABC circuits. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, *54*(4), 1245–1252. https://doi.org/10.5277/ppmp18177

Góralczyk, M., Krot, P., Zimroz, R., & Ogonowski, S. (2020). Increasing Energy Efficiency and Productivity of the Comminution Process in Tumbling Mills by Indirect Measurements of Internal Dynamics—An Overview. *Energies*, *13*(24). https://doi.org/10.3390/en13246735

He, M., & Forssberg, E. (2007). Influence of slurry rheology on stirred media milling of quartzite. *Int. J. Miner. Process*, 240–251.

Jiang, R., Wang, G., Li, J., Sun, K. K., & Hou, Y. (2021). PARAMETER OPTIMIZATION OF LARGE SAG MILL LINER BASED ON DEM AND KRIGING MODEL. *Journal of*

Mining Science, *57*(1), 32–44. https://doi.org/10.1134/S1062739121010051

Kawatra, S. K., & Kawatra, S. K. (1997). *Comminution Practices*. Society of Mining, Metallurgy, and Exploration. https://books.google.com.ec/books?id=EYYQAQAAMAAJ

King, R. P. (Ronald P. (2001). *Modeling and simulation of mineral processing systems*. Butterworth-Heinemann.

Latchireddi, S. R., & Morrell, S. (1997). A laboratory study of the performance characteristics of mill pulp lifters. *Minerals Engineering*, *10*(11), 1233–1244. https://doi.org/10.1016/S0892-6875(97)00109-X

Lowrinson, G. . (1974). Crushing and Grinding. In *Butterworths*.

Lynch, A. J. (1977). Mineral Crushing and Grinding Circuits. *Developments in Mineral Processing*, *1*, 195–225.

Lynch, A. J., & Rowland, C. A. (2005). *The History of Grinding*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:136546412

Maestro, A. (2002). DEPARTAMENT D ' ENGINYERIA QUÍMICA I METAL · LÚRGIA TESIS DOCTORAL REOLOGÍA DE ESPESANTES CELULÓSICOS PARA PINTURAS AL AGUA : MODELIZACIÓN Y MECANISMO DE ESPESAMIENTO ASOCIATIVO Alicia Maestro Garriga Barcelona , Diciembre de 2002. *Macromolecules*.

Magne, L., Amestica, R., Barría, J., & Menacho, J. (1992). Evaluación de variables de operación en molienda semiautógena. *REMETALLICA*, *II*, 34–42. https://revistas.usach.cl/ojs/index.php/remetallica/article/download/1701/1581/

Magne, L., Amestica, R., Barría, J., & Menacho, J. (1995). Modelización dinámica de molienda semiautógena basada en un modelo fenomenológico simplificado. *Revista de Metalurgia*, *31*(2), 97–105.

Makgoale, D. M. (2019). *EFFECTS OF MILL ROTATIONAL SPEED ON THE BATCH GRINDING KINETICS OF A UG2 PLATINUM ORE*. file:///C:/Users/Lenovo/Downloads/EFFECTS OF MILL ROTATIONAL SPEED ON THE BATCH GRINDING OF A UG2 PLATINUM ORE.pdf

Maugin, G. A. (2006). On the thermomechanics of continuous media with diffusion and/or weak nonlocality. *Archive of Applied Mechanics*, *75*(10), 723–738. https://doi.org/10.1007/s00419-006-0062-4

Mezger, T. G. (2006). The Rheology Handbook. In C. Compendia (Ed.), *The Rheology*

Handbook (2nd ed.). https://doi.org/10.1515/9783748600367-009

Morell, S. (2008). A method for predicting the specific energy requirement of comminution circuits and assessing their energy utilisation efficiency. *Minerals Engineering*, *21*(3), 224–233. https://doi.org/10.1016/J.MINENG.2007.10.001

Morrell, S. (2008). A method for predicting the specific energy requirement of comminution circuits and assessing their energy utilisation efficiency. *Minerals Engineering*, *21*(3), 224–233. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2007.10.001

Morrell, S. (2016). Modelling the influence on power draw of the slurry phase in Autogenous (AG), Semi-autogenous (SAG) and ball mills. *Minerals Engineering*, *89*, 148–156. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2016.01.015

Morrell, S., & Valery, W. (2001). Influence of Feed Size on AG/SAG Mill Performance. *Sag 2001*, 203–214.

Napier-Munn, T., & Wills, B. A. (2005). Wills' Mineral Processing Technology. In *Wills' Mineral Processing Technology* (Issue October). https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-4450-1.X5000-0

Osorio, A. (2015). *Efecto del escenario reológico en la cámara de molienda sobre la cinética de fractura en un Molino de bolas*. Universidad de Antioquia Medellín.

Osorio, A., Bustamante, O., Marin, J. M., & Restrepo, G. (2014). EVALUACIÓN DEL USO DE POLIACRILAMIDA COMO MODIFICADOR REOLÓGICO EN LA MOLIENDA DE PULPAS DE CUARZO. *Revista Colombiana De Materiales*, *5*, 244–249.

Owusu, K. B., Skinner, W., & Asamoah, R. (2022). Feed hardness and acoustic emissions of autogenous/semi-autogenous (AG/SAG) mills. *Minerals Engineering*, *187*, 107781. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2022.107781

Pal, R. (2023). Recent Progress in the Viscosity Modeling of Concentrated Suspensions of Unimodal Hard Spheres. *ChemEngineering*, *7*(4). https://doi.org/10.3390/chemengineering7040070

Porras, M. (2016). *ESTUDIO DEL CONSUMO DE ENERGÍA EN MOLIENDA HUMEDA DE UN MINERAL CONSIDERANDO REOLOGÍA DE SUSPENSIONES*. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/58344

Quintanilla, P., Fernández, F., Mancilla, C., Rojas, M., Estrada, M., & Navia, D. (2024). *Digital twin with automatic disturbance detection for real-time optimization of a semi-autogenous grinding (SAG) mill*. https://arxiv.org/abs/2407.06216

Salazar, J. L., Valdés-González, H., Vyhmesiter, E., & Cubillos, F. (2014). Model predictive control of semiautogenous mills (sag). *Minerals Engineering*, *64*, 92–96. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2014.03.029

Shi, F. N., & Napier-Munn, T. J. (1999). Estimation of shear rates inside a ball mill. *International Journal of Mineral Processing*, *57*(3), 167–183. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0301-7516(99)00016-2

Shi, F. N., & Napier-Munn, T. J. (2002). *Effects of slurry rheology on industrial grinding performance*. *65*, 125–140.

Shi, F., & Napier-Munn, T. J. (1996). A model for slurry rheology. *International Journal of Mineral Processing*, *47*(1), 103–123. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0301-7516(95)00101-8

Shi, F., & Xie, W. (2015). A specific energy-based size reduction model for batch grinding ball mill. *Minerals Engineering*, *70*, 130–140. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2014.09.006

Silva, M., & Casali, A. (2015). Modelling SAG milling power and specific energy consumption including the feed percentage of intermediate size particles. *Minerals Engineering*, *70*, 156–161. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2014.09.013

Tavares, L. M., & de Carvalho, R. M. (2009). Modeling breakage rates of coarse particles in ball mills. *Minerals Engineering*, *22*(7), 650–659. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mineng.2009.03.015

Xie, C., Ma, H., Song, T., & Zhao, Y. (2021). DEM investigation of SAG mill with spherical grinding media and non-spherical ore based on polyhedron-sphere contact model. *Powder Technology*, *386*, 154–165. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.03.042

Xie, C., Zhao, Y., Song, T., & Zhao, Y. (2022). Investigation of the effect of filling level on the wear and vibration of a SAG mill by DEM. *Particuology*, *63*, 24–34. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.partic.2021.04.009

Xu, L., Luo, K., & Zhao, Y. (2018). Numerical prediction of wear in SAG mills based on DEM simulations. *Powder Technology*, *329*, 353–363. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.02.004

Zeng, G., Zhu, Y., & Chen, W. (2023). A Brief Review of Micro-Particle Slurry Rheological Behavior in Grinding and Flotation for Enhancing Fine Mineral Processing Efficiency. *Minerals*, *13*(6). https://doi.org/10.3390/min13060792

A. Anexo: Cálculo de la tasa de cizalladura aplicando el método Shi & Napier-Munn

Parámetros	Unidad	Abreviatura	Valor
Cálculo de la velocidad relativa			
Pérdida promedio de la velocidad de rotación por cada capa	rpm	dN	7.70
Velocidad de rotación del molino	rpm	N_m	43.00
Fracción de llenado de bolas	-	J	0.3
Fracción de huecos	-	U	1.1
Función de llenado del molino	-	z	0.60
Diámetro de la bola	m	d_b	0.09
Espesor promedio de capa	m	xm	0.050
Diámetro interior del molino	m	D_m	0.6
Radio lineal interior del molino	m	r_m	0.3
Largo del molino	m	L	0.22
Volumen del molino	m^3	V_m	0.06220202
Fracción de velocidad teórica critica	-	φ_c	0.75
Distancia radial de la carga de la superficie interior desde el eje de rotación	m	r_i	0.224
La fracción de la carga activa de la carga total, que se relaciona con el tiempo tomado por una bola para moverse entre el dedo del pie y el hombro de la carga	-	ε_t	0.841
Tiempo tomado por una bola para moverse entre el dedo del pie y el hombro de la carga	s	t_c	1.599
Valor medio de la tasa de rotación	rpm	Ñ	21.500
Tiempo tomado por una bola para moverse entre el hombro y el dedo del pie	-	t_f	0.302

Constante de gravitación universal	m/s^2	g	9.8
Posición radial de la carga activa	m	$\bar{r}$	0.254
Constante de calculo que depende de J	-	Φ	1.0724
Ángulo del dedo del pie	rad	θ_T	4.050
Ángulo de hombro	rad	θ_S	1.366661
Promedio de la velocidad relativa entre cáscaras	m/s	dU	0.212
Cálculo de la distancia entre carcasas adyacentes			
Intersticios de bolas	-	ε	0.4
Volumen neto de suspensión en la carga activa (sin volumen de drenado porque es en batch)	m^3	V_s	0.00628
# de bolas en la carga activa	u	B	25
Área de contacto de la bola en la carga activa	m^2	A	0.628
Distancia promedio entre capas adyacentes	m	dx	0.01000
Cálculo de la tasa de cizalla para el movimiento de cascada			
Tasa de cizalla	s^{-1}	$\dot{\gamma}$	**21**