AVANCES EN RECURSOS HIDRÁULICOS, NÚMERO 07, PÁGINAS 102-116, NOVIEMBRE DE 2000

ESTABILIZACION DE ESQUEMAS POR MOLIFICACION DISCRETA

Luis J. Montoya[1] y Mauricio Toro[2]

1. Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
2. Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

RESUMEN La molificación discreta es un procedimiento bien conocido para la regularización de problemas mal condicionados. En este artículo, mostramos que también es una técnica promisoria para la estabilización de esquemas explícitos inestables para varios problemas unidimensionales. Más precisamente, el éxito del método como estrategia estabilizadora se muestra al ponerlo en práctica con esquemas explícitos inestables típicos para una ecuación de Burger no lineal y para tres ecuaciones lineales que son parabólica, hiperbólica y de convección-difusión respectivamente.

ABSTRACT Discrete mollification is a well known procedure for the regularization of ill-posed problems. In this paper, we show that discrete mollification is also a promising technique for the stabilization of unstable explicit schemes for a variety of one-dimensional problems. More precisely, the success of the method as stabilization strategy is shown by dealing with typical explicit unstable schemes for a nonlinear Burger's equation and for three linear equations which are parabolic, hyperbolic and convection-difusion respectively.

1 INTRODUCCION

Los esquemas explícitos son muy utilizados para solucionar distintos tipos de ecuaciones diferenciales. Entre sus principales ventajas se pueden mencionar su fácil y rápida implementación que hace que este tipo de esquemas sean muy utilizados. Sin embargo, son bien conocidas las restricciones que estos métodos tienen para su estabilidad. Se encuentra que el tamaño de la malla espacial y el intervalo de cálculo temporal deben estar relacionados entre si para cumplir con la restricción necesaria de estabilidad, conocida como la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Estas restricciones hacen que en algunos casos la solución numérica de las ecuaciones diferenciales requiera un gran número de pasos de cálculo, limitados por la restricción en el paso temporal. De esta manera el avance de la solución en el tiempo es lento.

Estos problemas han sido solucionados con la utilización de esquemas implícitos o semi-implícitos, que logran independizar el paso temporal de la malla espacial. Sin embargo, estos métodos tienen una mayor dificultad en su implementación y exigen un gran esfuerzo computacional.

El método de la molificación es un procedimiento regularizante, que puede ser utilizado para la estabilización de esquemas inestables. Recientemente ha sido utilizado para la estabilización de problemas mal propuestos como presentan Murio (1993), Zhan y Murio (1999), Mejía (1996), Murio, Mejía y Zhan (1998) y Mejía y Murio (1996). También ha sido utilizado en estabilización de problemas parabólicos inestables bien propuestos como lo presentan Murio y Zhan (1999). El trabajo de Murio y Zhan (1999), al lograr estabilizar esquemas explícitos inestables usando la molificación, inspira este trabajo. Se busca reproducir los resultados obtenidos por Murio y Zhan y extenderlos a otro tipo de problemas utilizados en la ingeniería, en los cuales las restricciones de estabilidad son aún más severas, como los

problemas de tipo hiperbólico. Se busca estabilizar también la ecuación de transporte en la que, además de la restricción de estabilidad, aparece una restricción adicional relacionada con la física del problema y asociada con el carácter advectivo o difusivo de la ecuación. Finalmente se aplica la molificación a un problema no lineal, usando el esquema de diferencia central aplicado a la ecuación de Burger.

Una diferencia importante entre el trabajo de Murio y Zhan y éste, es que además de la estabilización de las derivadas espaciales hechas por ellos, aquí se intentará la estabilización de las derivadas temporales mediante la molificación, lo cual constituye un aporte original y un avance en la aplicación de la molificación como herramienta regularizante.

2 CONDICIONES DE ESTABILIDAD PARA DISTINTAS ESQUEMAS

Es importante presentar la causa de las inestabilidades en los esquemas explícitos que se van a utilizar, para de esta forma entender con mayor claridad la forma en la que actúa la molificación como herramienta regularizante. En el desarrollo que se presenta a continuación, se define la molificación y se presentan sin demostración algunas de sus propiedades útiles para el presente estudio. Posteriormente se presenta la aplicación de la molificación a distintos problemas unidimensionales, a ecuaciones de tipo parabólico, hiperbólico, de transporte (convección-difusión) y a la ecuación de Burger.

2.1 ECUACIONES PARABOLICAS

Teorema: Si se considera un esquema explícito, con discretización adelante en el tiempo y central en el espacio para la ecuación parabólica $u_t = bu_{xx}$ de la forma

$$v_i^{n+1} = (1-2\gamma)\, v_i^n + \gamma\left(v_{i+1}^n + v_{i-1}^n\right)$$

con $\gamma = b\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$, una condición necesaria para la estabilidad es $\gamma \leq \frac{1}{2}$.

La demostración de este teorema se encuentra en Murio y Zhan (1999), Abbott y Basco (1989) y en Strikwerda (1989).

A diferencia de las ecuaciones hiperbólicas, en las que no es posible encontrar esquemas explícitos consistentes con la ecuación e incondicionalmente estables, para las ecuaciones parabólicas si es posible hacerlo y un ejemplo de esto lo constituye el esquema de Du Fort-Frankel. Sin embargo, en estos problemas se requiere $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ que tienda a cero cuandoΔt y Δx tiendan a cero para que el esquema sea consistente.

2.2 ECUACIONES HIPERBOLICAS

Teorema: Para un esquema explícito de una ecuación hiperbólica $u_t + au_x = 0$ de la forma

$$v_i^{n+1} = A_1 v_{i-1}^n + A_2 v_i^n + A_3 v_{i+1}^n$$

con $a\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$ con λ constante, una condición necesaria para la estabilidad es la condición (CFL) (ver detalles en Strikwerda, 1989).

Adicionalmente, se ha podido demostrar que no existen esquemas explícitos consistentes con una ecuación hiperbólica que sean incondicionalmente estables (ver, por ejemplo, Strikwerda, 1989).

2.3 ECUACION DE TRANSPORTE (CONVECCION-DIFUSION) ESQUEMA QUICKEST

Considerando la ecuación de convección-difusión $u_t + au_x = bu_{xx}$ se pueden encontrar diferentes discretizaciones que resultan de interés. La primera de ellas es la discretización central, en la que la derivada temporal se discretiza adelante y las derivadas espaciales se discretizan centrales así:

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= (1-2\gamma)\, v_i^n + \gamma\,(1-\kappa)\, v_{i+1}^n + \\ &\quad \gamma\,(1+\kappa)\, v_{i-1}^n \end{aligned}$$

con $\gamma = b\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ y $\kappa = \dfrac{\Delta x a}{2b}$. Haciendo un análisis de estabilidad de Von Newman, se obtiene el siguiente factor de estabilidad,

$$g(\theta) = (1-2\gamma) + 2\gamma\cos\theta - i\sin\theta$$

con $C = 2\gamma\kappa = a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, el número de Courant.

La máxima restricción se obtiene que para $\theta = \pi$, el máximo ángulo de fase posible y se encuentra que $\gamma \leq \dfrac{1}{2}$.

Sin embargo, esta no es la única condición necesaria para la estabilidad. Un análisis detallado de la estabilidad en este tipo de discretización, junto con el planteamiento de los métodos QUICK y QUICKEST como una posible solución a los problemas de estabilidad resultantes, se encuentra en Leonard (1979).

Aparece, entonces, otra condición de estabilidad mas restrictiva, dada por el número de Peclet, $P_e = \dfrac{a\Delta x}{b}$ o $P_e = \dfrac{C}{\kappa} = 2\kappa$. Para la estabilidad (ver Abbott y Basco, 1989, Leonard, 1979 y Gresho y Lee, 1981) se requiere $P_e \leq 2$.

Usando un esquema contracorriente se puede sobrepasar la anterior restricción, pero a costa de introducir una gran dispersión numérica.

Leonard (1979) encuentra que la diferencia en los órdenes de aproximación entre las derivadas de primero y segundo orden y la insensibilidad de la aproximación de la primera derivada a cambios en el nodo central son las principales causas de estos problemas. Adicionalmente, Gresho y Lee (1981) encuentran problemas adicionales propios de la aproximación numérica, asociados a la misma naturaleza del problema, en cercanías a la restricción de Peclet antes mencionada.

Por las anteriores razones se presenta el análisis con el método QUICKEST, que tiene mejores rangos de estabilidad. Un estudio de la estabilidad de este esquema se puede encontrar en Leonard (1979) y Abbott y Basco (1989).

La discretización que hace el método QUICKEST es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left[\gamma(1-C_r) - \frac{C_r}{6}\left(C_r^2 - 3C_r + 2\right)\right] \\
\Omega_2 &= -\left[\gamma(2-3C_r) - \frac{C_r}{2}\left(C_r^2 - 2C_r - 1\right)\right] \\
\Omega_3 &= \left[\gamma(1-3C_r) - \frac{C_r}{2}\left(C_r^2 - C_r - 2\right)\right] \\
\Omega_4 &= \left[\gamma(C_r) - \frac{C_r}{6}\left(C_r^2 - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Omega_1 v_{j+1}^n + \Omega_2 v_j^n + \Omega_3 v_{j-1}^n + \Omega_4 v_{j-2}^n$$

2.4 ECUACION DE BURGER

La ecuación unidimensional de Burger es:

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0$$

Esta ecuación es no lineal, lo que la hace aún mas compleja.

Para su solución se utiliza una discretización adelante en el tiempo y central en el espacio:

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_j^n \left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t v}{2\Delta x^2}\left(v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n\right)
\end{aligned}$$

Para este caso no se puede hacer con absoluto rigor un análisis de estabilidad de Von Neumann, ya que éste es para ecuaciones lineales. Sin embargo, se asume como condición de estabilidad $\left|v_{\max}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$ (ver Fletcher, 1990).

3 DEFINICION Y PROPIEDADES DE LA MOLIFICACION

Los anteriores esquemas suministran la solución aproximada de la ecuación diferencial en una serie discreta de puntos. Debido a que la solución que se quiere estabilizar esta dada como una función discreta, se presenta la definición de la molificación para funciones discretas. Para la definición de la molificación para funciones continuas el lector puede consultar Murio (1993), Zhan y Murio (1999), Mejía (1996), Murio, Mejía y Zhan (1998) y Murio y Zhan (1999).

Sea I un intervalo dividido en n valores x_i, $i = 1, 2, ..., n$ ordenados en forma ascendente tal que $x_1 < x_2 < .... < x_n$ y en los cuales se conoce el valor de la función . En dichos puntos la función discreta será $F = \{f_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Además se definen $\Delta x = \max\limits_{j=1,..,n-1} (x_{j+1} - x_j)$ y $s_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$; $j = 1, 2, ..., n$.

El filtro de la molificación para dicha función discreta se define como:

$$J_\alpha F = f_\delta(x) = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s)\,ds\right) f_j\right]$$

El núcleo para la anterior convolución se define de la siguiente forma:

$$\rho_\delta(x) = \begin{cases} A_p\delta^{-1}\exp\left(-\frac{t^2}{\delta^2}\right) \text{ si } |t| < p\delta \\ 0 \text{ si } |t| \geq p\delta \end{cases}$$

donde $p > 0$, $\delta > 0$ y $A_p = \left(\int_{-p}^{p}\exp\left(-s^2\right)ds\right)^{-1}$.

Debido a que A_p varía muy poco para valores de p mayores que 3, se asume, en este trabajo, $p = 3$. El anterior núcleo es conservativo ya que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s)\,ds\right) = 1$$

El parámetro δ se conoce como el radio de molificación. La molificación discreta satisface conocidos estimados de consistencia y estabilidad como puede verse en Murio (1993) y en Murio, Mejía y Zhan (1998).

Las principales dificultades que se encuentran al implementar la molificación son el tratamiento de las fronteras y la selección del radio de molificación. La primera dificultad se soluciona, en este trabajo, ajustando el parámetro p en cercanía a las fronteras de tal forma que sólo se utiliza información "dentro del dominio". La segunda dificultad se soluciona mediante la selección, por tanteo manual, del parámetro δ. Una discusión más amplia de estos aspectos técnicos de implementación puede encontrarse en Montoya (2000). Es sabido que cuando δ tiende a cero, el error de regularización disminuye pero el error de perturbación crece. La selección automática de δ es por tanto un procedimiento deseable sobre el cual se trabaja actualmente. Dos métodos promisorios de selección automática, aparecen explicados e implementados en Acosta (2000). La práctica indica que en caso de mallas regulares, es suficiente tomar el valor del parámetro δ del orden de una a dos veces el parámetro de discretización Δx. En mallas irregulares, el utilizar la anterior recomendación puede generar dispersión numérica y "amortiguación" en las zonas de menor espaciamiento.

4 ESTABILIZACION DE ESQUEMAS NUMERICOS UNIDIMENSIONALES MEDIANTE LA MOLIFICACION

Se presenta a continuación la aplicación de la molificación a una serie de problemas de los tipos antes mencionados.

Se tantean mediante experimentación numérica los beneficios y dificultades de la aplicación de la molificación en la regularización de ecuaciones diferenciales. Para ello se aplica la molificación a los anteriores esquemas en los que se tiene alguna idea de la restricción de estabilidad y se viola dicha restricción para comprobar hasta donde es posible, con el uso de la molificación, relajar dichas condiciones de estabilidad. Queda pendiente un análisis más general del problema, donde se cuantifique con certeza la capacidad de regularización que tiene la molificación.

Para hacer real la cuantificación, se han seleccionado problemas simples que tengan soluciones analíticas para hacer una comparación. En caso de no disponer de soluciones analíticas, la comparación se hace contra soluciones obtenidas por aplicación de esquemas numéricos implícitos.

4.1 ECUACIONES PARABOLICAS

Para una mejor comprensión del efecto de la molificación considérese la solución numérica del siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}\ 0 < x < 10,\ t > 10 \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\ 0 \leq x \leq 10 \\ u(0,t) &= u(10,t) = 0\ t > 10 \end{aligned}$$

Cuya solución analítica es la siguiente:

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{x^2}{100}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$$

4.2 ECUACIONES HIPERBOLICAS

Considérese la siguiente ecuación hiperbólica:

$u_t = au_x \; 0 < x < 10, \; t > 10$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_a \\ \frac{x-x_a}{x_b-x_a} + 1 & \text{si } x_a \leq x \leq x_b \\ \frac{x_c-x}{x_c-x_b} + 1 & \text{si } x_b \leq x \leq x_c \\ 1 & \text{si } x > x_c \end{cases}$$

con $x_a = \dfrac{x_n + 3x_0}{4}$, $x_b = \dfrac{x_n + x_0}{2}$ y $x_c = \dfrac{3x_n + x_0}{4}$, y $x_0 = 0.0$, $x_n = 10.0$, $a = 1.0$.

La solución del anterior problema puede obtenerse mediante el uso del método de las características con las que se obtiene que, para este caso, la solución inicial se translada en el espacio sin dispersarse una distancia at.

La solución numérica de la ecuación se obtiene usando el esquema de Lax-Wendroff

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\Delta t} + \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 k}{2}\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

4.3 ECUACION DE TRANSPORTE, ESQUEMA QUICKEST

Se analizará el siguiente problema:

$c_t + uc_x - K_x c_{xx} = 0 \; 0 < x < 10, \; t > 10$

$$c(x,0) = \begin{cases} c_0 = 1 & \text{si } x < x_a = \frac{x_n+x_0}{4} \\ 0 & \text{si } x < x_a = \frac{x_n+x_0}{4} \end{cases}$$

$x_0 = 0.0$, $x_n = 10.0$, $u = 1.0$, $K_x = 0.01$.

Cuya solución analítica es (Zoppou y Knight, 1997):

$$c = \frac{c_0}{2}\operatorname{erf c}\left[\frac{x-x_a-ut}{2\sqrt{K_x t}}\right] + \frac{c_0}{2}\exp\left[\frac{u(x-x_a)}{K_x}\right]\operatorname{erf c}\left[\frac{x-x_a-ut}{2\sqrt{K_x t}}\right]$$

4.4 ECUACION DE BURGERS

Para aplicar la molificación al anterior esquema, se escribe de la siguiente forma

$$u_j^{n+1} = J_\delta u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} J_\delta u_j^n \left(J_\delta u_{j+1}^n - J_\delta u_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t v}{2\Delta x^2}\left(J_\delta u_{j-1}^n - 2J_\delta u_j^n + J_\delta u_{j+1}^n\right)$$

En este caso no se dispone de soluciones analíticas, por lo que sólo se presenta a manera de ilustración.

5 RESULTADOS Y ANALISIS

Las Figuras 1 y 2 presentan la solución del problema parabólico descrito en el numeral 4.1. Se presentan las comparaciones con distintos valores del factor de estabilidad $\lambda = 0.5$, 0.75, 1.0 y 1.25. Como se puede ver, solamente en el primer caso el esquema es estable. Se toman distintos radios de molificación $\delta = \alpha(\Delta x)$ (con $\Delta x = 0.1$) para $\alpha = 1.0$ y 3.0. Se logra apreciar claramente el efecto estabilizador de la molificación para este caso. Obsérvese también la dispersión numérica originada al "usar la molificación en exceso".

Las Figuras 3 y 4 presentan las soluciones estabilizadas para los problemas hiperbólicos enunciados en el numeral 4.2. Nue-vamente se presenta la solución con distintos factores de estabilidad, $C = 1.0$, 1.5, 2.0 y 2.5 y se utilizan dos radios de molificación distintos $\delta = \alpha(\Delta x)$, $\Delta x = 0.1$ y se presentan los resultados para $\alpha = 1.0$ y 2.0. Si se tiene en cuenta el carácter no dispersivo del problema, se puede observar fácilmente el error en el que se incurre con el esquema molificado. Nuevamente, se observa el efecto regularizante y dispersivo del filtro.

Las Figuras 5 y 6 muestran los resultados para el problema de convección-difusión. Presentan el problema, con distintos factores de estabilidad $C = 1.0$, 1.5, 2.0 y 2.5 y con dos radios de molificación $\delta = \alpha(\Delta x)$, $(\Delta x = 0.1)$ $\alpha = 2.0$ y 3.0. En este caso es importante señalar, que además de la restricción de estabilidad aparece una restricción asociada al número de Peclet. Los casos presentados, $P_e = 10$, superan también la restricción requerida para el esquema central.

Las Figuras 7 y 8 ilustran la solución de la ecuación de Burger. Nuevamente se tienen distintos parámetros de estabilidad $\lambda = 1.0$, 1.5, 2.0 y $2.5\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$con $\nu = 0.000001$. Tomando distintos radios de molificación $\delta = \alpha(\Delta x)$, $\Delta x = 0.1$, se presentan los resultados para $\alpha = 1.5$ y 2.5. En estos dos últimos ca-

sos se ha introducido, además, el problema de la discontinuidad introducida por la onda de choque inicial, que hace más difícil la solución numérica y aumenta la necesidad del efecto regularizador del filtro de la molificación.

6 CONCLUSIONES

- El método de la molificación se presenta como una buena herramienta para estabilizar esquemas numéricos. En este sentido se presenta como una buena herramienta para el control de las oscilaciones.
- La molificación ha mostrado que ofrece buenos resultados para estabilizar esquemas numéricos unidimensionales en los que se viola la restricción de estabilidad. Ha mostrado resultados satisfactorios en problemas parabólicos en una dimensión, en problemas hiperbólicos unidimensionales, en la ecuación unidimensional de transporte mediante el esquema QUICKEST y en la ecuación de Burger. Además, en algunos de los casos anteriores es posible demostrar analíticamente que la restricción al efectuar el proceso de molificación cambia y es posible encontrar una nueva restricción para la estabilidad.
- Buscar esquemas numéricos generales infalibles al problema de las oscilaciones es bastante difícil, sobre todo si se requiere tratar distintos tipos de problemas con un mismo modelo. Por ello es recomendable para cada caso de estudio buscar el método que mejor responda a la situación.
- Aunque los filtros matemáticos, en algunos casos, pueden ocultar ciertos resultados o distorsionar los mismos, usarlos con cuidado puede ser una buena alternativa para solucionar problemas de oscilaciones numéricas espúreas. En todo caso, se debe ser consciente de que estos filtros regularizan la información y con ello dificultan un poco la aparición de irregularidades, sobre todo si estas se encuentran muy localizadas. Sin embargo, facilitan la determinación de información más general, sin tener que detenerse en los problemas particulares y tener que prestar una especial atención a pequeñas zonas donde pueden aparecer las irregularidades. Aparece entonces un problema, asociado a la escala en que trabaja el filtro y a la escala en que se desea conocer la información. De esta forma si la información requerida es de una escala menor que la del filtro, este puede resultar inadecuado. Por ello, es recomendable poder ajustar la escala del filtro de tal forma que se ajuste al nivel de información requerida.
- Se ha podido observar que al aumentar mucho el radio de molificación, éste tiene un efecto dispersivo; por otro lado, si el radio de molificación es muy pequeño, puede ser insuficiente para controlar las oscilaciones. Se puede intuir, entonces, la existencia de un punto óptimo para el radio de molificación. La demostración rigurosa de la existencia y unicidad de dicho punto óptimo para la estabilización de esquemas de solución de ecuaciones diferenciales se deja como recomendación para posteriores trabajos al respecto.
- La molificación es un filtro conservativo, con el que se evitan los problemas asociados a la violación de principios físicos que gobiernan ciertas ecuaciones: la ley de conservación de masa, por ejemplo. Esta es una enorme ventaja sobre otros filtros matemáticos que puedan ser mas eficientes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a COLCIENCIAS por el soporte económico ofrecido durante esta investigación.

REFERENCIAS

Murio D. A. The mollification method and the numerical solution of ill posed problems, John Wiley & Sons Inc., 254 p., 1993

Zhan, S. y Murio D. A. Surface Fitting and Numerical Gradient Computations by Discrete Mollification, Computers and Mathematics with Applications, 37, 85-102, 1999.

Mejía, C. E. Aplicaciones del método de la molificación, Lecturas Matemáticas, Vol. 17, No. 1, 49-74, 1996.

Murio, D. A., Mejía C. E. y ZHAN S. Discrete mollification and automatic numerical differentiation, Computers and Mathematics with Applications, 35 (5), 1-16, 1998.

Mejía, C. E. y Murio D. A. Numerical Solution of Generalized IHCP by discrete molification, Computers

and Mathematics with Applications, 32 (2), 33-50, 1996.

Mario, D. A. y Zhan S. Stabilization by Discrete Mollification, pre-print 1999.

Abbott, M. B. y Basco V. R. Computational Fluid Dynamics an introduction for engineers, Longman Scientific & Technical, 425 p., 1989.

Strikwerda, J. Finite difference Schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

Leonard, B. P. A stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19, 59-98, 1979

Gresho, P. M., Lee R L. Don't suppress the wiggles - they're telling you something, Computers and fluids, Vol 9, pp 223-253, 1981.

Fletcher, C. A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Springer-Verlag, 2ª. Ed., 1990.

Montoya, L. J. Control de las oscilaciones numéricas en la solución de las ecuaciones de aguas poco profundas y en la ecuación de transporte de contaminantes. La molificación y el método QUICKEST, Trabajo de Grado de Maestría en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Universidad Nacional, Medellín, 2000.

Acosta, C.D. La molificación como estimador lineal, Trabajo de Grado de Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional, Medellín, 2000.

Zoppou, C. y Knight J. H. Analytical Solutions for Advection and Advection-Diffusion Equations with Spatia-lly Variable Coefficients, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 123, No. 2, 144-148, 1997.

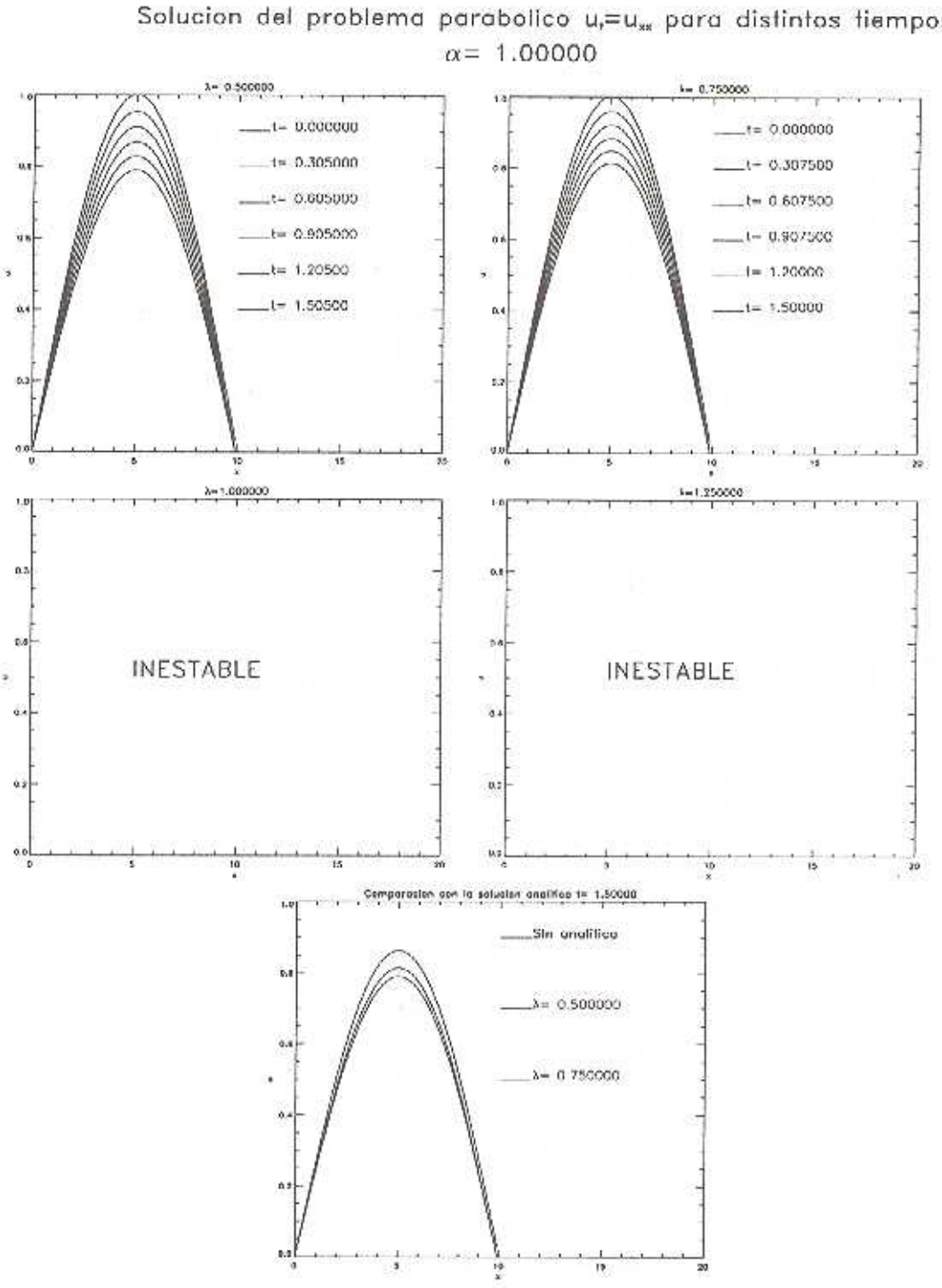
Solucion del problema parabolico $u_t=u_{xx}$ para distintos tiempos
$\alpha=$ 1.00000
λ= 0.500000
t= 0.000000
t= 0.305000
t= 0.605000
t= 0.905000
t= 1.20500
t= 1.50500
λ= 0.750000
t= 0.000000
t= 0.307500
t= 0.607500
t= 0.907500
t= 1.20000
t= 1.50000
λ=1.000000
INESTABLE
λ=1.250000
INESTABLE
Comparacion con la solucion analitica t= 1.50000
Sol analitica
λ= 0.500000
λ= 0.750000

Figura 1

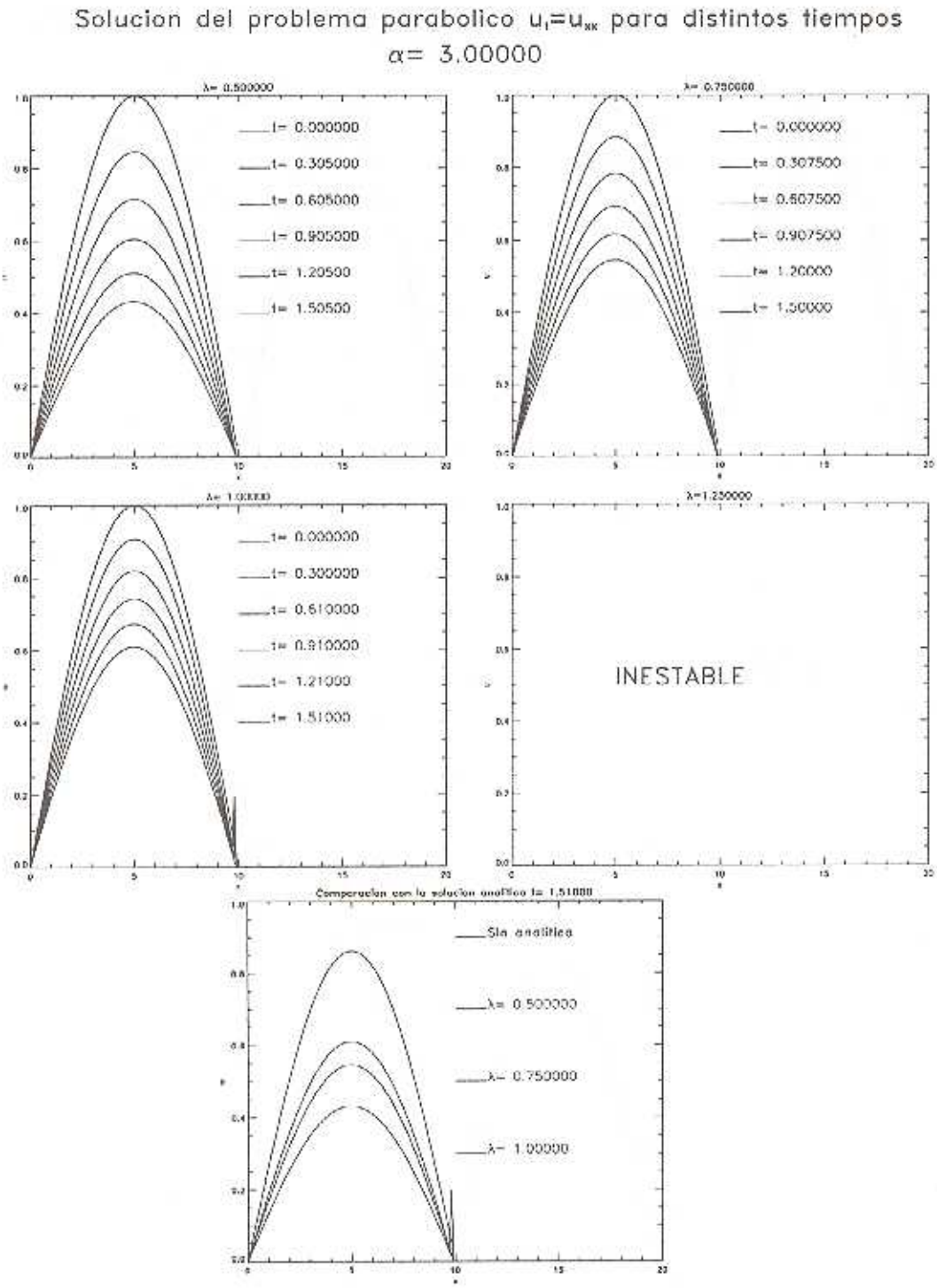
Solucion del problema parabolico $u_t=u_{xx}$ para distintos tiempos
α= 3.00000
λ= 0.500000
t= 0.000000
t= 0.305000
t= 0.605000
t= 0.905000
t= 1.20500
t= 1.50500
λ= 0.750000
t= 0.000000
t= 0.307500
t= 0.607500
t= 0.907500
t= 1.20000
t= 1.50000
λ= 1.00000
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.610000
t= 0.910000
t= 1.21000
t= 1.51000
λ=1.250000
INESTABLE
Comparacion con la solucion analitica t= 1.51000
Sln analitica
λ= 0.500000
λ= 0.750000
λ= 1.00000

Figura 2

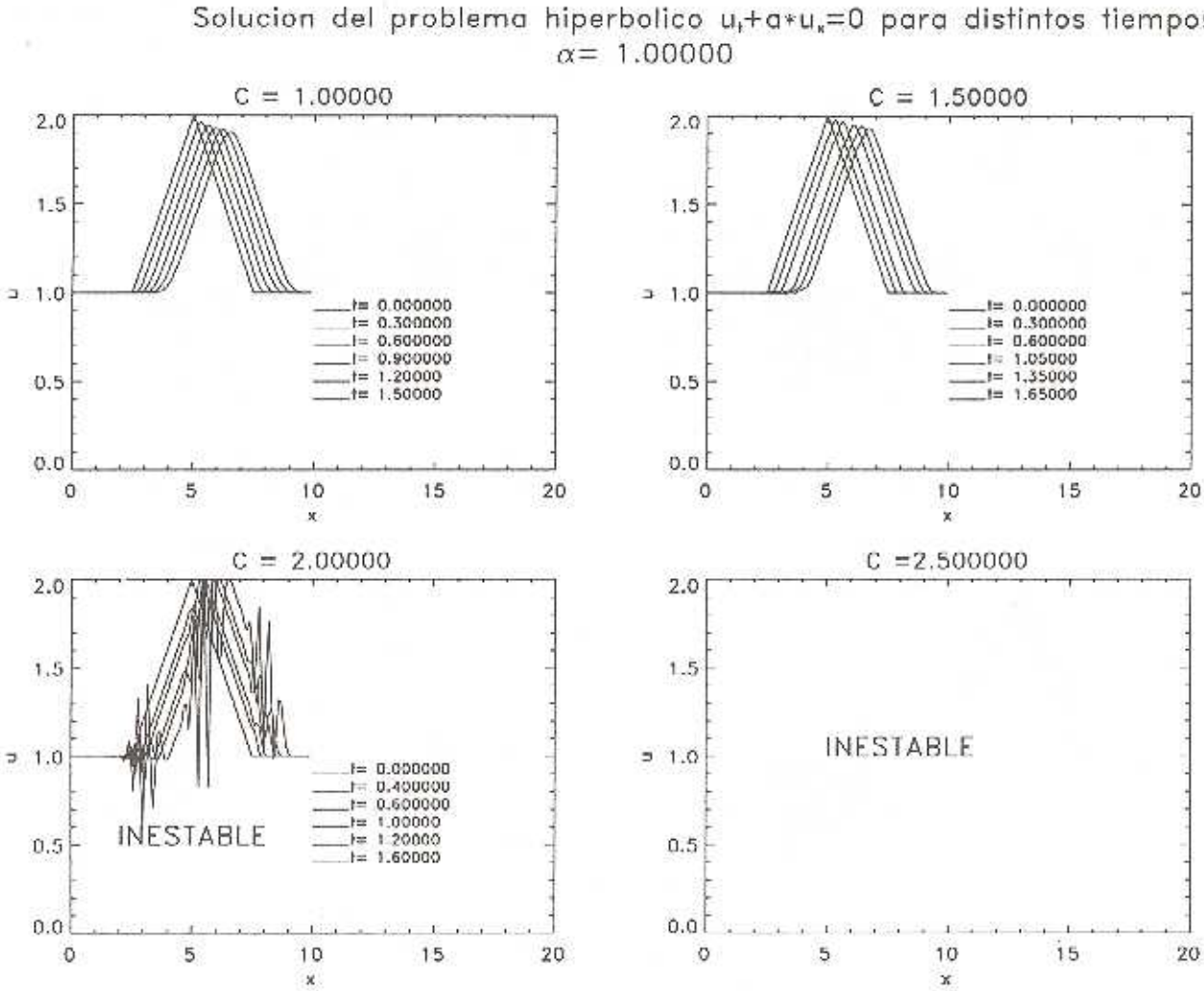
Solucion del problema hiperbolico $u_t+a*u_x=0$ para distintos tiempos
α= 1.00000
C = 1.00000
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.20000
t= 1.50000
C = 1.50000
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 1.05000
t= 1.35000
t= 1.65000
C = 2.00000
INESTABLE
t= 0.000000
t= 0.400000
t= 0.600000
t= 1.00000
t= 1.20000
t= 1.60000
C =2.500000
INESTABLE
x

Figura 3

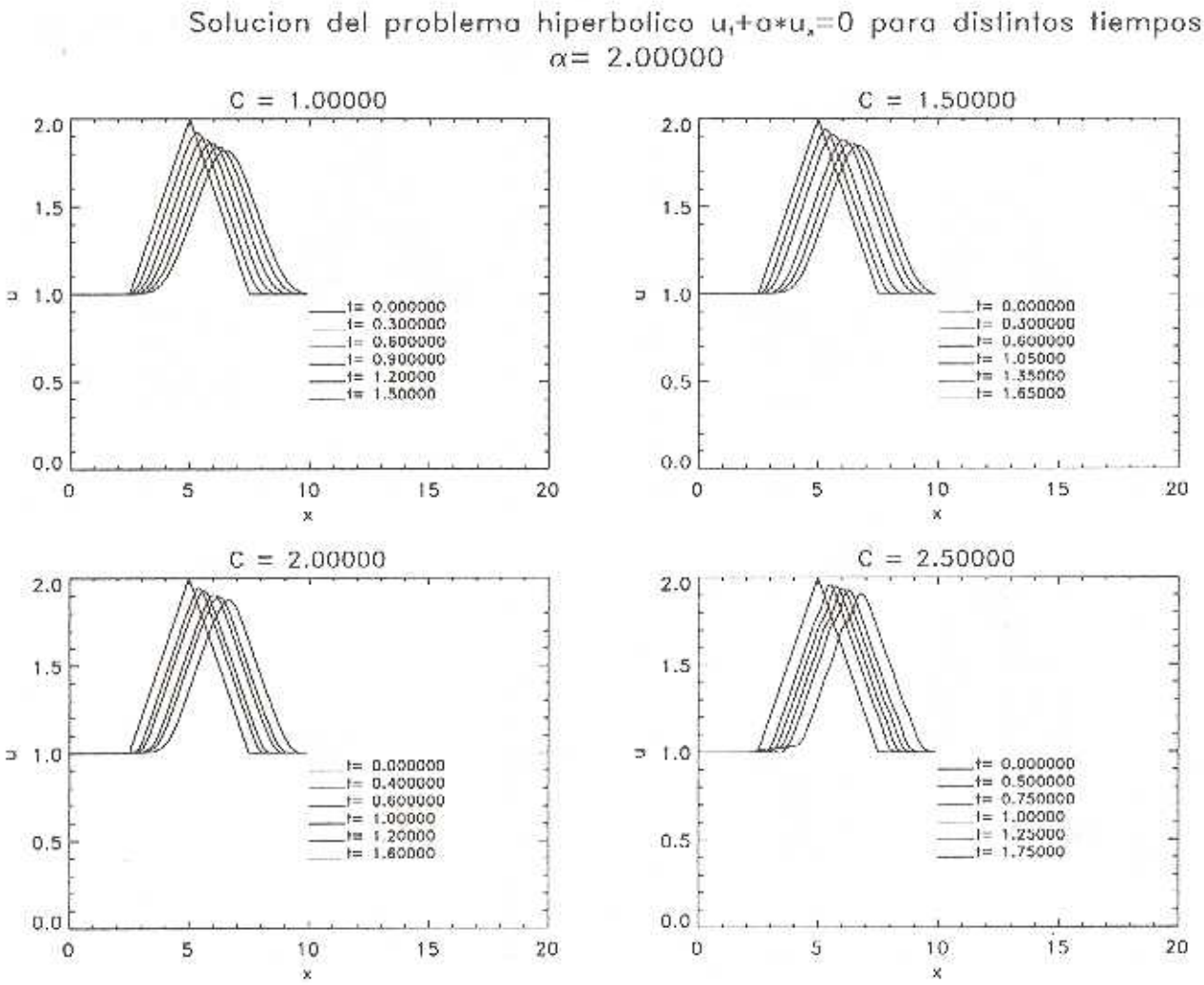
Solucion del problema hiperbolico u_t+a*u_x=0 para distintos tiempos
α= 2.00000
C = 1.00000
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.20000
t= 1.50000
C = 1.50000
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 1.05000
t= 1.35000
t= 1.65000
C = 2.00000
t= 0.000000
t= 0.400000
t= 0.600000
t= 1.00000
t= 1.20000
t= 1.60000
C = 2.50000
t= 0.000000
t= 0.500000
t= 0.750000
t= 1.00000
t= 1.25000
t= 1.75000
u
x

Figura 4

Solucion del problema de transporte unidimensional $u_{,t}+a*u_{,x}-K_{,x}*u_{,xx}=0$ para distintos tiempos

$\alpha=$ 2.00000

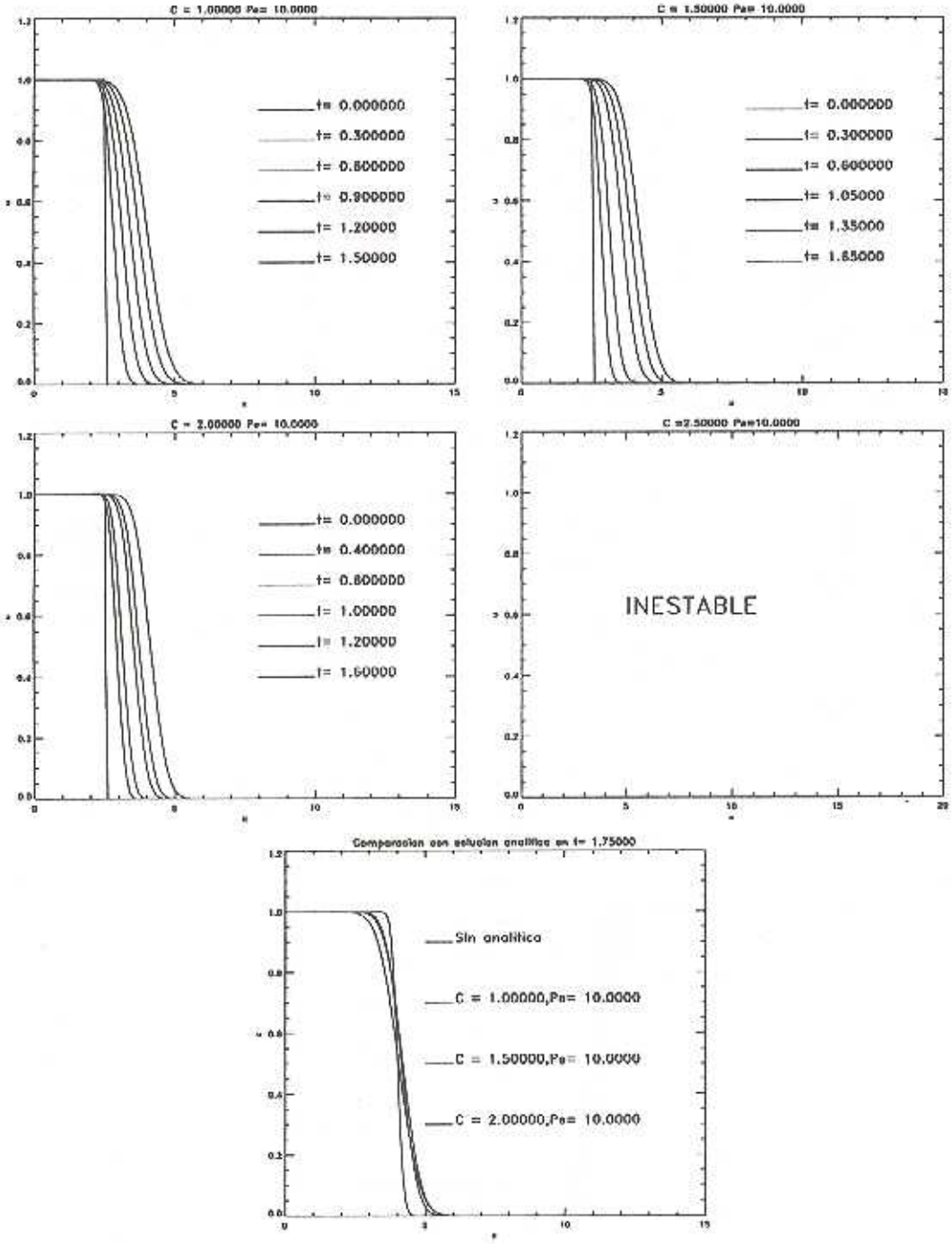

Figura 5

Solucion del problema de transporte unidimensional $u_t+a*u_x-K_x*u_{xx}=0$ para distintos tiempos
$\alpha=$ 2.00000

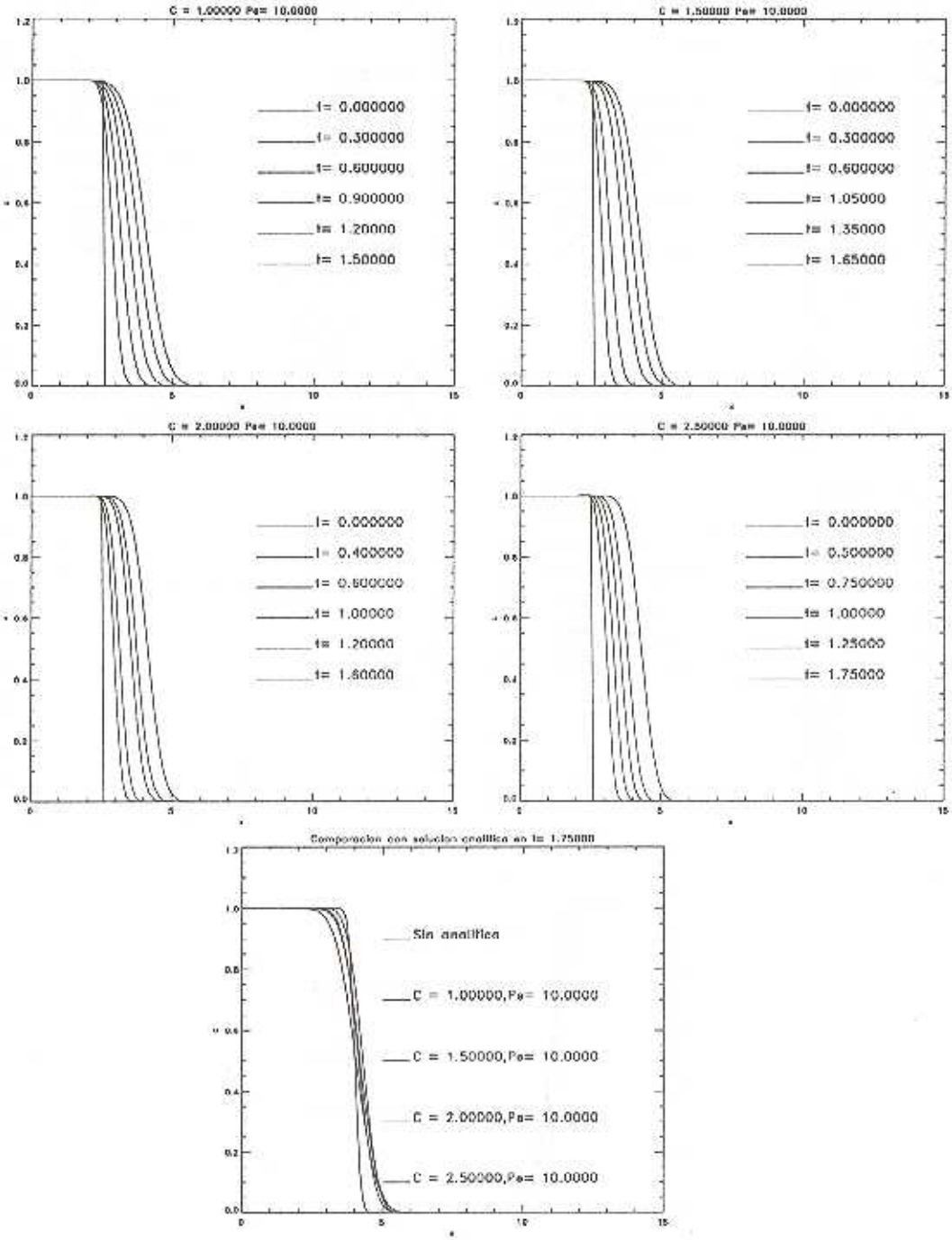

Figura 6

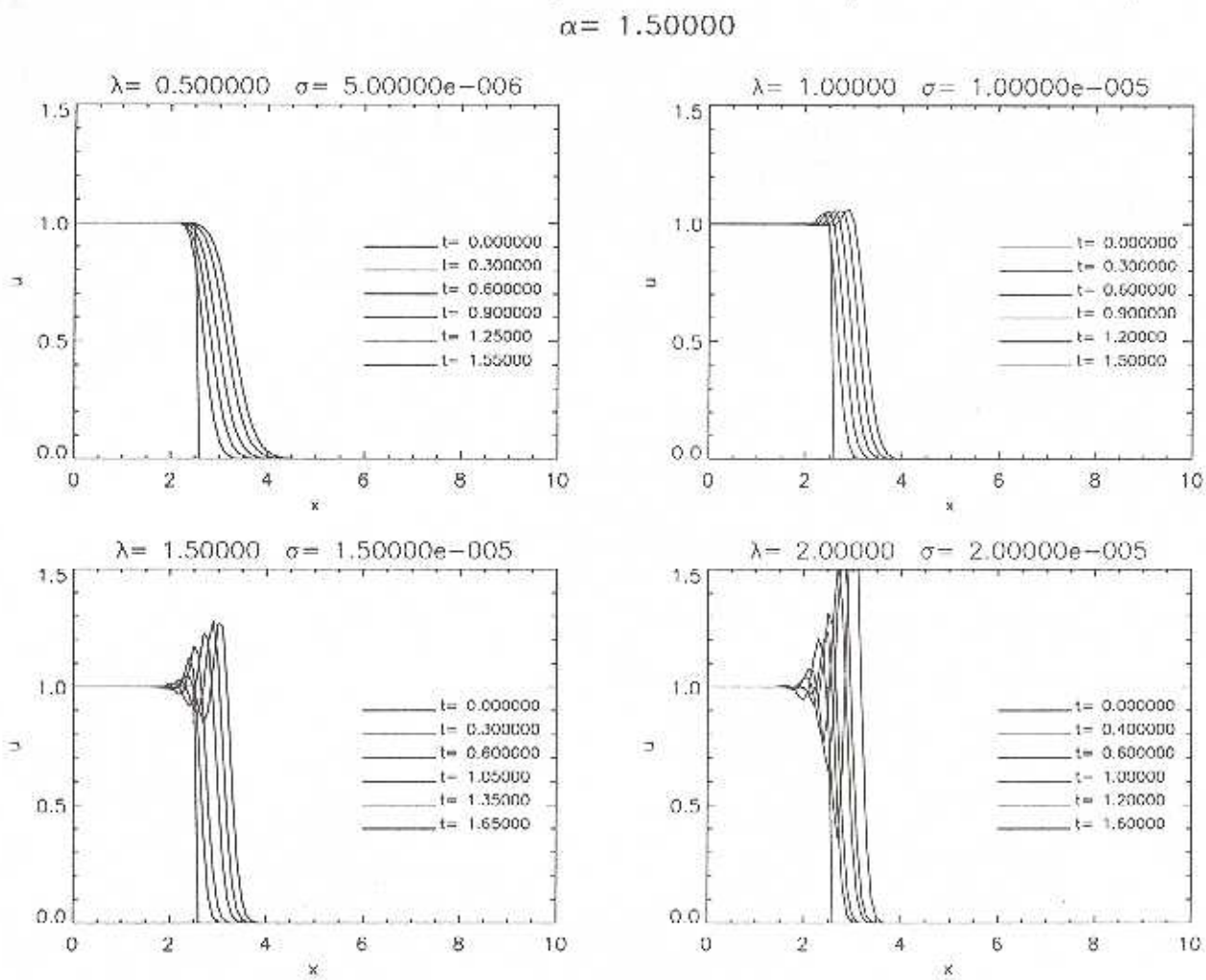
Solucion de la ecuacion de Burger $u_t+u*u_x-\nu u_{xx}=0$ para distintos tiempos
α= 1.50000
λ= 0.500000 σ= 5.00000e−006
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.25000
t= 1.55000
λ= 1.00000 σ= 1.00000e−005
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.20000
t= 1.50000
λ= 1.50000 σ= 1.50000e−005
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 1.05000
t= 1.35000
t= 1.65000
λ= 2.00000 σ= 2.00000e−005
t= 0.000000
t= 0.400000
t= 0.600000
t= 1.00000
t= 1.20000
t= 1.60000
u
x

Figura 7

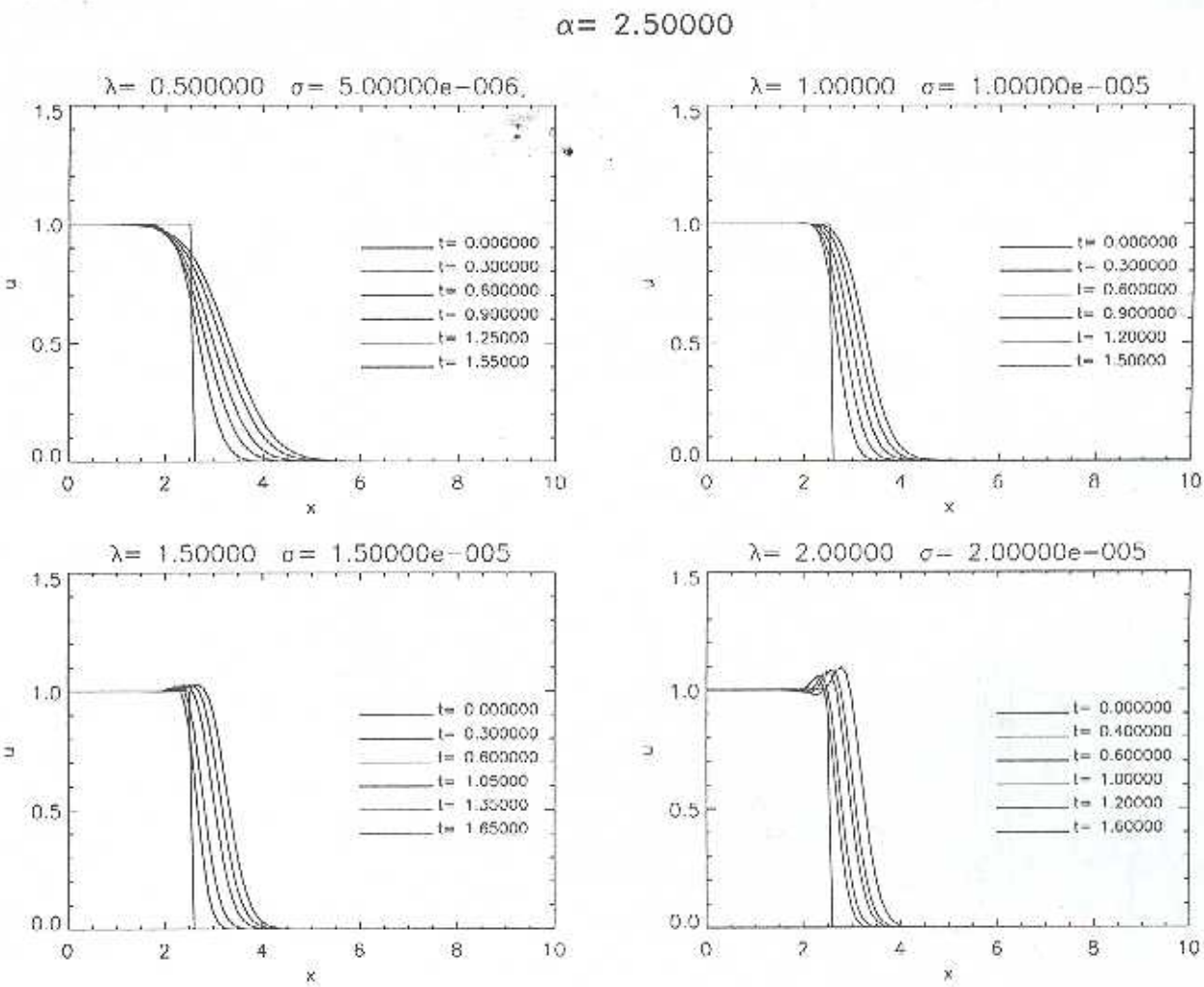
Solucion de la ecuacion de Burger $u_t+u*u_x-\nu u_{xx}=0$ para distintos tiempos
α= 2.50000
λ= 0.500000 σ= 5.00000e−006
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.25000
t= 1.55000
λ= 1.00000 σ= 1.00000e−005
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 0.900000
t= 1.20000
t= 1.50000
λ= 1.50000 σ= 1.50000e−005
t= 0.000000
t= 0.300000
t= 0.600000
t= 1.05000
t= 1.35000
t= 1.65000
λ= 2.00000 σ= 2.00000e−005
t= 0.000000
t= 0.400000
t= 0.600000
t= 1.00000
t= 1.20000
t= 1.60000
u
x

Figura 8