UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

LA CIRCUNFERENCIA. UNA PROPUESTA DIDACTICA USANDO MODELO DE VAN HIELE Y GEOMETRIA DINAMICA

Jhon Willy Carmona Moreno

Código: 01186517

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2011

LA CIRCUNFERENCIA. UNA PROPUESTA DIDACTICA USANDO MODELO DE VAN HIELE Y GEOMETRIA DINAMICA

Jhon Willy Carmona Moreno

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Director:

Crescencio Huertas Campos

Matemático, Magister en Educación

Línea de Investigación:

Didáctica de las Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2011

"Oculto en el cambiante esquema de las cifras, en lo más recóndito del número irracional, se hallaba un círculo perfecto, trazado mediante unidades dentro de un campo de ceros. El universo había sido creado ex profeso, manifestaba el círculo. En cualquier galaxia que nos encontremos, tomamos la circunferencia de un círculo, la dividimos por su diámetro y descubrimos un milagro: otro círculo que se remonta kilómetros y kilómetros después de la coma decimal. (…).. Por encima del hombre, de los demonios, de los guardianes y constructores de túneles, hay una inteligencia que precede el Universo. El círculo se ha cerrado. Eleanor encontró, por fin, lo que buscaba."

"Contact", Carl Sagan (s. XX)

A mi familia, ejemplo de humildad y fraternidad.
A mis colegas, constructores y constructoras
de conocimiento en bien de la colectividad.
A mis estudiantes que anhelan un futuro
de paz y libertad.
A mi pueblo y los pueblos del mundo,
que firmes luchan por dignificar
la condición humana.

Agradecimientos

Al pueblo de Colombia que defiende su justo derecho a una educación pública de alto nivel académico y comprometida, a mi Alma Mater: la Universidad Nacional de Colombia conciencia crítica de la nación, a la Facultad de Ciencias por garantizar la formación docente de calidad, a los Profesores y Profesoras de la Maestría que la orientan con saber y disciplina, a los compañeros-estudiantes que aportaron con sus conocimientos a mi crecimiento académico y personal, al Maestro Crescencio Huertas Director de la propuesta, cuya paciencia, comprensión y orientación hicieron posible la realización del trabajo. A mi madre, ejemplo de tenacidad y sencillez.

Resumen

El círculo ha sido posiblemente la figura geométrica plana que más ha seducido a los matemáticos y al mundo a través del tiempo. Su importancia en la enseñanza de la Geometría en la educación básica y media en nuestras escuelas se ve limitada por aspectos curriculares y pedagógicos. El presente trabajo se fundamenta en una propuesta didáctica que utiliza la geometría dinámica, la visualización y el Modelo de Van Hiele para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula de clases para la apropiación del concepto de circunferencia por parte de los estudiantes y un aporte a la profundización del tema para los docentes. El desarrollo del enfoque utiliza la geometría sintética como base para abordar la circunferencia, sus nociones, proposiciones y teoremas básicos. La construcción del concepto se realiza desde una perspectiva histórico-epistemológica y disciplinar, fortaleciéndolo con la aplicación de teorías y Modelos didácticos que facilitan el desarrollo del pensamiento geométrico, convirtiéndose es una herramienta didáctica para que los docentes potencien e innoven las prácticas pedagógicas en la escuela.

PALABRAS CLAVE: Circunferencia, historia circunferencia, pensamiento geométrico, Visualización, Modelo Van Hiele, Geometría Dinámica, Unidad Didáctica**.**

Abstract

The circle has been the most seductive plane geometric figure for mathematicians and the rest of the world across the time. Its importance in geometry teaching in basic and middle education in our schools is limited by curricular and pedagogical matters. This work is based on a didactical proposal, which use the dynamic geometry, visualization and the Van Hiele model in order to improve the teaching-learning process in the classroom to get the appropriation of the circumference concept by the students and a contribution for a deep study of the topic for the interested teachers. The development of the approach uses the synthetic geometry as base for addressing the circumference, their notions, proposals and basic theorems. The construction of the concept is done from an historic-epistemological and disciplinary perspective, improving by the application of theories and didactical models which facilitate the development of the geometric thinking, becoming in a didactical tool for teachers who enhance and innovate their pedagogical act in the school.

KEY WORDS
Circumference, history Circumference, geometric thinking, visualization, Van Hiele Model, Dynamic Geometry, teaching unit.

Contenido

Pág.

Resumen……VII

Lista de Figuras……XI

Lista de Tablas……XII

Introducción ……1

1. Componente Histórico-Epistemológico……6

2. Componente Disciplinar……17

2.1 De la Geometría Sintética……17

2.2 De la Geometría Analítica……25

3. Propuesta Pedagógica……28

3.1 Lineamientos en Matemáticas Ministerio de Educación Nacional..28

3.1.1 Desarrollo del Pensamiento Geométrico……29

3.2 El Modelo de Van Hiele……30

3.2.1 Niveles de Razonamiento……31

3.2.2 Fases de Aprendizaje ……32

3.3 La Geometría Dinámica y la Visualización……33

3.4 Software Regla y Compás: Herramienta Didáctica para el Aprendizaje de la Geometría……35

4. **Diseño e Implementación de una Unidad Didáctica sobre propiedades de la circunferencia utilizando el Modelo de Van Hiele y la Geometría Dinámica.**36

4.1 Actividad 1. De Exploración. ……36

4.1.1 Análisis implementación de la Actividad Exploratoria……..39

4.2 Construyendo los Niveles de Razonamiento. Actividades 2-6……..40

4.2.1 Análisis implementación Construyendo los Niveles de Razonamiento. ……41

5. Conclusiones y Recomendaciones……46

5.1 Conclusiones……46

5.2 Recomendaciones…….....48

A. ANEXO: Actividad 1. Elementos de la Circunferencia.....49

B. ANEXO: Actividad 2. Construyendo los Niveles de Razonamiento……55

C. ANEXO: Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, Actividad Exploratoria…….....64

D. ANEXO: Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, Actividad Construyendo los Niveles de Razonamiento. 69

E. ANEXO: Manual de trabajo con el software de Geometría Dinámica Regla y Compás…….....77

F. Bibliografía…….....87

Lista de figuras

Pág.

Figura 2.1. Teorema (11.1 en Pogorélov). ……18
Figura 2.2. Euclides Proposición 3. ……18
Figura 2.3. Teorema (11.2 en Pogorélov). ……19
Figura 2.4. Euclides Proposición 15. ……19
Figura 2.5. Euclides Proposición 18. ……20
Figura 2.6. Teorema (11.2 en Pogorélov). ……20
Figura 2.7. Euclides Proposición 19. ……20
Figura 2.8. TEOREMA 1, construcción en Regla y Compás. ……21
Figura 2.9. TEOREMA 3, construcción en Regla y Compás. ……22
Figura 2.10. TEOREMA 4, construcción en Regla y Compás. ……23
Figura 2.11. TEOREMA 5, construcción con Regla y Compás. ……23
Figura 2.12. TEOREMA 6, construcción con Regla y Compás. ……24
Figura 2.13. La circunferencia……25
Figura 2.14. Exterior de la Circunferencia……26
Figura 2.15. Tangente de la Circunferencia……27
Figura 2.16. Arco de la Circunferencia……27

Lista de Tablas

Pág.

Tabla 3.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.
Octavo a noveno. MEN 2002……..……..…27
Tabla 3.2. Estructura recursiva del Modelo de Van Hiele. (MEN, 2000)……...32
Tabla 3.3 Fases de Aprendizaje del Modelo de Van Hiele…….33
Tabla 4.1. Niveles de Razonamiento de Van Hiele. Actividad exploratoria……36
Tabla 4.2 Análisis implementación de la actividad exploratoria……..36
Tabla 4.3. Construyendo los Niveles de Razonamiento de Van Hiele…….37
Tabla 4.4. Análisis implementación de la actividad
Exploratoria..……..……39
Tabla 4.5. Análisis implementación de la actividad Construyendo los Niveles de
Razonamiento……..……45

Introducción

Actualmente la enseñanza de las matemáticas está condicionada por el enfoque establecido en el currículo, diferenciando los tipos de pensamiento matemático, que en la práctica se traduce en la fragmentación de la disciplina en ramas de aprendizaje como el Algebra, la Estadística, la Geometría, la Trigonometría, el Cálculo, siendo un problema disciplinar y didáctico la relación entre éstas.

En la escuela básica y media en Colombia la Geometría constituye un aspecto relevante de estudio, dado que el pensamiento geométrico está estrechamente vinculado a los otros tipos de pensamiento matemático y de manera particular el pensamiento variacional. Los métodos tradicionales como la clase magistral y la investigación en fuentes bibliográficas de textos guía presentan deficiencias en el proceso enseñanza-aprendizaje, hecho que puede mejorarse de manera sustancial si se utilizan herramientas y métodos pedagógicos-didácticos que enriquezcan el ambiente de aprendizaje, estableciendo normas o protocolos acordados entre el docente y sus estudiantes, regulando esta interacción mediante un *"contrato didáctico"* o un *"contrato pedagógico"* siendo indispensables para mejorar los ambientes de aprendizaje.

En el desarrollo del pensamiento geométrico toma particular importancia el estudio de la circunferencia como lugar geométrico, su representación, relaciones, propiedades y Teoremas, permitiendo afianzar en los educandos dichos conceptos para potenciar las relaciones espaciales. La enseñanza de los elementos de la circunferencia en el aula presenta dificultades para su apropiación y vinculación en diferentes contextos matemáticos, limitándose en algunos casos a representaciones mediante regla y compás. Por otro lado, la metodología (que incluye al docente y su saber) utilizada en su enseñanza produce errores que se traducen en dificultades en el momento de aplicar el concepto en geometría analítica, el reconocimiento de sus propiedades para resolución de situaciones-problema, las características de lugar geométrico, entre otras. Es necesario establecer estrategias en el aula que permitan dar el salto de la enseñanza tradicional a la utilización de Modelos Computacionales y herramientas didácticas que

permitan afianzar el concepto y potenciar su aplicación de manera significativa desarrollando competencias y habilidades matemáticas.

El Modelo de Van Hiele como Herramienta didáctica permite la interrelación del saber disciplinar y su apropiación por parte del estudiante, partir de los conocimientos concretos y mediante unas estructuras conceptuales jerárquicas dar saltos en la construcción del pensamiento geométrico. Comprender el concepto de circunferencia a través de los Niveles de razonamiento de Van Hiele, empezando con el reconocimiento de las figuras (visualización), avanzando hacia el descubrimiento de sus propiedades y atributos principales (análisis y deducción), llegando a niveles de demostración (rigor), optándose por la construcción conceptual en forma recursiva, las Fases de Aprendizaje permiten secuenciar y orientar al estudiante y permitir su salto cognitivo al siguiente nivel.

El software de Geometría Dinámica Regla y Compás (R y C) de uso gratuito es sencillo de utilizar, sus comandos permiten un trabajo rápido y eficaz para representar y visualizar propiedades geométricas de Objetos Virtuales de Trabajo, en el caso específico de la circunferencia algunas de sus propiedades y Teoremas, permitiendo el uso de herramientas didácticas para experimentar, analizar, inferir, refutar resultados, hacer demostraciones desde situaciones geométricas que permitan la relación entre la definición y su salto epistemológico en situaciones que involucran sistemas computacionales (software geométrico) , encuentran como vehículos de expresión a los llamados micromundos computacionales (Balacheff & Kaput, 1996), utilizando herramientas modernas que superen la Regla y el Compás incorporando al aula y al proceso de aprendizaje la Geometría Dinámica y las potencialidades de la Visualización.

Ampliando el conocimiento de los docentes, estructurando y consolidando las potencialidades de los estudiantes mediante las herramientas tecnológicas, se fortalece el trabajo de la Geometría euclidiana de regla y el compás usando los últimos avances de los software dinámicos (Bartolini y Bussi 2000), la utilización de la Unidad Didáctica como herramienta pedagógica debe permitir que la enseñanza este orientada en la adquisición de conceptos y propiedades, el aprendizaje significativo en contextos reales, el desarrollo de habilidades y competencias en el estudiante, permitiendo el reconocimiento y apropiación de la teoría en los diferentes tipos de pensamiento matemático.

JUSTIFICACION

La Geometría ha sido históricamente base fundamental para el desarrollo de las matemáticas, recordemos que la Matemática Moderna intentó desaparecer casi por completo del currículo la Geometría en la década de los años 60 y 70 del siglo XX. Posteriormente se le relego al igual que la Estadística, a una simple Unidad de contenidos en los libros de Matemáticas. En Colombia, las experiencias internacionales de trabajos con sistemas computacionales se desarrollo paralelo al impulso del pensamiento geométrico desde el enfoque de sistemas.

La Ley General de Educación de Colombia (115/94) en su artículo 78 solicita orientar el currículo en la escuela sobre la base de los lineamientos curriculares, ratificando la matemática como asignatura básica. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) le dan la importancia y peso pedagógico a la Geometría, específicamente en lo referente al pensamiento espacial y sistemas geométricos, esto ha generado que la investigación del proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría sea uno de los campos de mayor interés en la Educación Matemática, aclarando que existen problemas de orden curricular, epistemológicos en la formación y práctica docente, así como la disposición de los estudiantes hacia la aprehensión del conocimiento.

En el orden curricular, pese a que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2002) reafirman el pensamiento espacial y los sistemas geométricos como un proceso general de las matemáticas, su implementación en las escuelas ha sido deficiente, evidenciado con la baja o nula intensidad horaria a la geometría como asignatura y en su defecto limitándola a una o varias unidades temáticas al final del curso. Por otro lado, la formación de los docentes y su práctica pedagógica se enfrentan a los cambios e innovaciones de orden curricular, generando en muchos casos resistencia a la implementación de las nuevas tendencias, ya sea por cuestiones de orden personal como sus creencias, métodos o enfoques pedagógicos o por falta de formación y capacitación para entender y aplicar dichas innovaciones. Romberg y Price (1983) sustentan las repercusiones de las innovaciones, tanto las *"mejoradas"* como las *"radicales"* que cuestionan las tradiciones pedagógicas y culturales en la escuela, y esto se traduce en la forma como se construye el conocimiento.

Consistente con lo anterior, el eje de éste trabajo, la circunferencia presenta serios inconvenientes en la planificación curricular, ya sea como contenido de la asignatura de Matemáticas o de Geometría. Los Estándares Básicos de Matemáticas no hacen

referencia al estudio de sus propiedades y los libros de texto en su gran mayoría limitan a una unidad temática muy reducida, otros textos asumen sus propiedades desde la Geometría Analítica dentro de las secciones cónicas, pasando por alto las definiciones y teoremas básicos sobre la circunferencia, importantes en el estudio de la geometría euclidiana. La utilización de herramientas didácticas y Modelos de enseñanza innovadores y creativos en el aula, son elementos de estimulación de actitudes y competencias tanto en docentes como en estudiantes, en éste campo existen amplias investigaciones de la incidencia del Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de la Geometría, estos niveles proponen describir el dominio y comprensión de nociones espaciales (Godino y Ruíz 2004).

En lo referente a las posibilidades de la Geometría dinámica y la integración de las TIC´S al aula de clases, permiten afianzar y potenciar habilidades y destrezas mediante la interacción de la geometría de forma dinámica, así como la actividad y la individualización del proceso (Batanero y Díaz 1985), de la misma manera sirven como elementos mediadores de en el aprendizaje de los estudiantes, en la construcción de conocimientos y en la comprensión de lo que hacen (MEN, *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia* 2000). Visualizar los elementos y conceptos fundamentales de la circunferencia, construirlos de manera interactiva mediante el software de Regla y Compás, realizar conjeturas de los teoremas básicos y establecer una conexión didáctica entre el procedimiento y su visualización en entornos computacionales, generando la transposición didáctica entre la geometría y la informática (Balacheff 1994), deben permitir mejoras en el proceso enseñanza-aprendizaje.

OBJETIVO GENERAL

Revisar conceptos, relaciones y propiedades básicas de la circunferencia desde la geometría euclidiana diseñando una Unidad Didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele y el uso de geometría dinámica.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Profundizar en conceptos básicos relacionados con la circunferencia desde un análisis histórico y epistemológico.
2. Analizar el modelo de Van Hiele e investigaciones recientes relacionadas con su implementación para la enseñanza de la geometría.
3. Estudiar el software regla y compas e investigaciones relacionadas con su uso para trabajar conceptos relacionados con la circunferencia.

4. Diseñar e implementar una unidad didáctica fundamentada en el Modelo de Van Hiele utilizando herramientas del programa Regla y Compás para trabajar conceptos relacionados con la circunferencia.

METODOLOGIA

En la enseñanza de la geometría es fundamental el enfoque didáctico aplicado que permita el desarrollo del pensamiento geométrico. Desarrollar un concepto, en éste caso la circunferencia, sus elementos y propiedades desde el punto de vista disciplinar requiere una serie de acciones que permitan lograr lo planteado en el objetivo.

FASE 1: Revisión bibliográfica histórica, epistemológica y del componente disciplinar de la circunferencia. Debido a la importancia histórica del concepto y los saltos en la construcción del pensamiento geométrico, se profundizó en el estudio de la circunferencia permitiendo elaborar los capítulos correspondientes al componente histórico-epistemológico, el de componente disciplinar y brindó herramientas necesarias para la elaboración de la Unidad Didáctica.

FASE 2: Una revisión y análisis a los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos y Estándares Curriculares para el desarrollo del pensamiento geométrico y la incorporación de las tecnologías de la Información en el aula, específicamente la Geometría Dinámica. En el componente pedagógico se hizo énfasis en las teorías del Modelo de Van Hiele con sus respectivos Niveles de Razonamiento y Fases de aprendizaje aplicadas a los elementos y propiedades de la circunferencia. La geometría dinámica como herramienta didáctica y la teoría de la visualización potenciaron el dominio conceptual y la adquisición de habilidades de razonamiento como fruto de las experiencias propias. El software Regla y Compás es de fácil adaptabilidad a las necesidades planteadas en la propuesta.

FASE 3: Se diseñó la Unidad Didáctica dividiéndola en varias actividades que dieron cuenta del avance logrado por los estudiantes en la construcción del concepto de circunferencia, sus elementos y propiedades. Se aplicó una prueba diagnóstica para establecer los Niveles de razonamiento en un grupo de 35 estudiantes de grado 9° haciéndose su respectivo análisis. Sobre la base de la clasificación del grupo según Niveles de razonamiento, se diseñaron los talleres y actividades utilizando R y C de manera que la orientación dirigida como Fase de aprendizaje, permitiera el avance gradual dentro del Modelo de Van Hiele. Una vez aplicados los talleres a 5 estudiantes seleccionados de manera aleatoria, se hizo el respectivo análisis, permitiendo establecer los saltos cognitivos generados por la aplicación de las herramientas didácticas.

1. REVISIÓN HISTORICA Y EPISTEMOLOGICA

De las figuras geométricas planas el círculo es la más regular, hecho notoriamente conocido y desarrollado por los matemáticos a través de la historia, no solo por su seducción y propiedades sino por sus aplicaciones prácticas. La circunferencia es el perímetro más corto que encierra una superficie plana. La esfera es la menor superficie que encierra un volumen, la perfección, armonía y belleza del círculo, la circunferencia y la esfera han incidido de manera fundamental, inclusive en la concepción de las formas del universo y del mundo.

Sobre el análisis epistemológico de objetos matemáticos, Castañeda (2008), escribió: *Los estudios de carácter epistemológico, ofrecen explicaciones de la naturaleza de los objetos matemáticos al analizar su origen y desarrollo de los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica, entre otras (Albert, 1998). Para los matemáticos educativos (Sierpinska y Lerman, 1996) este tipo de estudios provee explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones de desarrollos pasados, los momentos en los que se negocian y agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas y nociones asociadas a los conceptos en cuestión. (P 868).*

Posiblemente uno de los descubrimientos más importantes en la historia de la humanidad ha sido la rueda, inicialmente los rodillos y los trineos sirvieron a los Sumerios (8.000 a.n.e.) para desplazar objetos de gran peso, con el tiempo entendieron que el rodillo podía ser sustituido por un eje que uniera las ruedas. Se encuentran diagramas en tablilla en la región de Ur (3.500 a.n.e.) y los Egipcios junto a la cultura Andronovo mejoraron su técnica (2.000 a.n.e.) expandiendo su uso a la India y a Europa (1.400 a.n.e.).

Las máquinas construidas durante y después de la Revolución Industrial en el siglo XVIII utilizan en diferentes grados de complejidad la rueda y en la actualidad los sistemas mecánicos utilizan componentes simétricos circulares desplazándose alrededor de un

eje. Por algún tiempo se compararon los aportes de las culturas Mesopotámicas y Egipcias dando un rango mayor a la última, sin embargo las tablillas de Susa encontradas en 1936 darían cuenta de los aportes de los Mesopotámicos, específicamente para los babilonios la razón del perímetro del hexágono regular a la longitud de la circunferencia circunscrita era tan aceptable como la de los egipcios, es más, también daban valores con dos cifras decimales correctas en algunas de las comparaciones entre las áreas y los cuadrados de los lados de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados. (Maza 2001). Los Babilonios obtuvieron la apotema a partir de la cuerda y el radio de la circunferencia, con el uso de la Astronomía aproximaron el año solar a 360 días y dividieron la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo el grado sexagesimal. Los Egipcios trazaban las circunferencias mediante una cuerda atada a un punto fijo, a mayor cuerda mayor era la circunferencia obtenida así como el área del círculo que está delimitada. Tomaron la longitud de la cuerda y la superpusieron sobre la circunferencia y aproximaron cuantas veces cabía en ella, llegando a la conclusión de más de 6 y un cuarto de veces, independientemente de la circunferencia y su cuerda. Plantearon un valor aproximado de la longitud de la circunferencia de 6.28 veces mayor que el radio. En cuanto al área del círculo tomaron como base el área de un cuadrado que ya conocían y observaron cuantas veces cabía en el área del círculo, con la condición que el lado del cuadrado coincidiera con el radio de la circunferencia, llegando a una aproximación entre 3 y 4, más exactamente 3 y un séptimo, es decir, más o menos 3,14 veces. Concluyendo entonces que el área de un círculo equivale al área de un cuadrado construido sobre la longitud del radio multiplicado por 3,14.

Los griegos no escaparon al encanto de la circunferencia y se dejaron atrapar no solo en las discusiones de orden matemático sino trascendieron al plano filosófico y teológico. Le dieron a la Astronomía una importancia científica, los filósofos griegos tenían una concepción geocéntrica del Universo construyendo un modelo cosmológico completo en el que la Tierra estaba rodeada concretamente de ocho esferas concéntricas donde se engarzaban la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter, Saturno, la esfera del Zodíaco y las estrellas fijas.

La escuela Pitagórica (Pitágoras de Samos, siglo VI a.n.e.), sustentaba la esfericidad de la tierra, en su modelo las estrellas estaban fijas en una esfera de cristal que daba una vuelta diaria en torno a su eje y que los 7 planetas conocidos en esa época-Sol, Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno- poseían cada uno su propia esfera móvil, idea

que sería tomada en el siglo XVI en la teoría del movimiento de los cuerpos celestes.

En el siglo V a.n.e., Enópides de Quíos habría, según Heath y Szabó entre otros estudiosos del tema, establecido el uso de la regla y compás como el idóneo en las construcciones geométricas, adjudicando a sí el rango de figuras elementales, de elementos básicos, a la recta y al círculo. (Montesinos, 2000).

Anaxágoras (siglo V a.n.e.) contemporáneo de Pericles, Eurípides y de otros tantos filósofos de la escuela jónica no sólo se intereso en su planteamiento filosófico *"la razón gobierna el mundo",* adelantó investigaciones en matemáticas que lo llevarían a escribir sobre el problema de la cuadratura del círculo, uno de los 3 grandes problemas de los matemáticos griegos. Proveniente de Jonia, en Grecia revolucionó la época con sus planteamientos, sustentó que el Sol, no era una deidad sino una enorme piedra calentada al rojo y que la luna era una tierra deshabitada que recibió su luz del sol, a raíz de esto fue puesto en prisión, Pericles intercedió para su liberación. Las escuelas Griegas estaban motivadas por el deseo del saber, hecho fundamental para el desarrollo de las ciencias en diferentes áreas.

Hipócrates de Quíos (siglo V a.n.e.) intento hallar la primera solución al problema geométrico de la cuadratura del círculo usando una construcción plana para encontrar un cuadrado con área igual a la de una figura con lados circulares, construyo semicírculos en los tres lados de un triángulo recto isósceles y mostró que la suma de las lunas así formadas es igual al área del triángulo mismo: las famosas "lúnulas de Hipócrates" (Morales, 2002).

Los Sofistas contemporáneos de Hipócrates plantearon el problema desde otra perspectiva. Antifanes planteó el siguiente raciocinio: *"si se inscribe en un círculo un cuadrado y después, bisectando los arcos respectivos, se inscribe un octágono y así sucesivamente se llegará a un polígono cuyos lados serán tan pequeños que el polígono podrá confundirse con el círculo y, como todo polígono puede transformarse en un cuadrado equivalente, queda demostrada la posibilidad de encontrar un cuadrado equivalente al círculo".*

Brisón (450 a.n.e.), tomó como base el argumento de Antifanes agregó y lo mejoró inscribiendo polígonos en un círculo y también circunscribiéndolos, concluyendo que el círculo es mayor que todos los polígonos inscritos y menor que los circunscritos, por lo tanto el área del círculo está comprendida entre la de los polígonos inscritos y circunscritos. A él se atribuye el agregado erróneo de que el área del círculo estaba dada

por el valor medio proporcional entre las áreas de los cuadrados inscrito y circunscrito; esto equivale a adoptar para π la grosera aproximación de 2 √2=2.828 (Morales, 2002)

Aryabhata Nació en Pataliputra (actualmente Patna) en el 476, y murió en el 550; fue astrónomo y matemático indio. Sus escritos ejercieron una influencia considerable sobre la ciencia árabe. En su obra el *Aryabhatiya*, plantea una serie de reglas y propuestas astronómicas y matemáticas escritas en sánscrito; es uno de los textos matemáticos hindúes más antiguos que se conocen. El área del círculo se calcula correctamente como la mitad del producto de la circunferencia por la mitad del diámetro, pero el volumen de una esfera viene expresado incorrectamente como el producto del área de un círculo máximo por la raíz cuadrada de esta área. (Sánchez, 2004). *"La esfera de las estrellas es inmóvil; la Tierra, haciendo una revolución, produce el nacimiento y el ocaso cotidiano de las estrellas y de los planetas."*

Hipias de Elis, Peloponeso (siglo IV a.n.e.) y Dinostrato (siglo IV a.n.e.) hermano de Menecmo y discípulo de Platón se asocian para resolver el problema de la cuadratura del círculo utilizando una curva mecánica llamada *Cuadratriz*. Sin embargo, esta curva se construye con métodos mecánicos y fue también muy criticada por suponer, en primer lugar, como conocida la propiedad buscada, ya que se requería saber la relación entre una línea y un arco de círculo. Está claro que Dinostrato nunca proclamó que la cuadratriz fuera un método plano para cuadrar el círculo.

Aristóteles (siglo IV a.n.e.) en su obra *De Caelo* sustenta el porqué de la esfericidad de la tierra y cita un valor muy cercano al real, en sus palabras "*Además, todos deben ser similares a uno de ellos, y a simple vista se comprueba que la luna es esférica: si no, en efecto, no crecería ni menguaría adoptando la mayor parte de las veces forma de lúnula o biconvexa, y una sola vez, de semicírculo. …….De modo que, si uno de los astros lo es, está claro que también los otros serán esféricos."*

Euclides (300 a.n.e.) en su Libro *Los Elementos* en el volumen III trata los Teoremas relativos a la circunferencia, las cuerdas, las tangentes y la medición de ángulos. Consta de 11 definiciones y 37 proposiciones, 5 de las cuales son problemas y las otras teoremas. Sólo por citar algunos de los Teoremas: Encontrar el centro de un círculo dado, la línea trazada entre dos puntos, tomados sobre la periferia del círculo, caerá dentro del círculo, si una recta por el centro del círculo divide a otra (que) no (pasa) por el centro en dos partes iguales, también la corta en ángulos rectos, y, si la corta en ángulos rectos, también la corta en dos partes iguales, si en un círculo se cortan dos rectas que no pasan por el centro, no se cortan en dos partes iguales, si dos círculos se cortan entre

sí, no tienen el mismo centro. El Libro IV tiene 16 proposiciones. Aquí hay figuras inscritas y circunscritas en círculos.

Para Platón (siglo IV a.n.e.), en el *Timeo*, la esfera es la figura más perfecta y más uniforme, porque todos los puntos de la superficie equidistan del centro; *Olof Gigon (Ursprung der griechischen Philosophie, 183)* (Borges, 1952), para él todos los astros son esferas que se mueven en círculos perfectos asignándole inclusive a Dios una forma esferoide por la perfección del sólido. *"La figura y el movimiento del mundo contribuyen a darle armonía; la figura, porque siendo esférica y semejante a sí misma en todos sentidos puede encerrar en sí todas las demás figuras regulares; el movimiento, porque describe eternamente un círculo".*

Parménides (siglo IV a.n.e.) fortaleció las posturas filosóficas de Platón afirmando *"El Ser es semejante a la masa de una esfera bien redondeada, cuya fuerza es constante desde el centro en cualquier dirección.".* A pocos años de su muerte, el siciliano Empédocles de Agrigento (siglo IV a.n.e.) urdió una laboriosa cosmogonía; hay una etapa en que las partículas de tierra, de agua, de aire y de fuego, integran una esfera sin fin, *"el Sphairos redondo, que exulta en su soledad circular".* (Borges, 1952).

Una obra anónima de la época Han en China, *"Kieu chang suan chu",* (*"El arte de calcular en nueve capítulos"),* nos da los conocimientos matemáticos de la época. Sobre superficies: cálculo exacto de las superficies de rectángulos, trapecios, triángulos, y círculo, por cierto, con un valor para pi de 3, y las reglas de las cuatro operaciones. Lieu Huei, matemático chino calculó por medio de un polígono inscrito de 3092 lados el valor de pi, 3,14159, e indicó que se podía seguir. Para Ptolomeo (siglo II a.n.e.) *"Cuando sigo a mi capricho la apretada multitud de las estrellas en su curso circular, mis pies ya no tocan la Tierra."*, ya se ha sustentado como Platón le da forma a la primera teoría física formulada con precisión que contenía premisas falsas que nadie pudo demostrar durante siglos. Recordemos los planteamientos en Timeo, los cuerpos celestes se mueven con movimiento circular uniforme, se les denominó *astros errantes,* siguiendo la tradición pitagórica esos movimientos son *"apariencias"* de una realidad perfecta de orden divino, siendo el circulo la figura perfecta se supuso entonces que dichos movimientos aparentes y erráticos eran circulares y uniformes, esta suposición fue la base de todas las cosmologías desde Platón a Kepler. Dichos movimientos deberían ser homocéntricos y tener como centro común la Tierra.

Eudoxio (siglo IV a.n.e.), discípulo de Platón, sienta las bases del Modelo cosmológico de las esferas afirmando que cada astro es llevado en su movimiento por una esfera, tuvieron que pasar 19 siglos para que Kepler descubriera el movimiento elíptico de los planetas. Recordemos que Aristóteles enuncia los primeros *"axiomas"* que dominaran toda la astronomía antigua; la esfera celeste es eterna, incapaz de alteración o de corrupción y solo puede mantener un movimiento, el de rotación uniforme (García, 2002). Argumentó que si la tierra no permaneciera en el centro del Universo y se desplazara como los cuerpos celestes se producirían cambios en la posición de las estrellas fijas, lo cual no ocurre, la ausencia del paralaje de las estrella fue el principal argumento para oponerse a un posible desplazamiento de la tierra fuera del centro del universo. El mismo Ptolomeo explico el movimiento diurno del cielo mediante la rotación de las estrellas fijas en torno a la tierra, de esta manera la ciencia de la Edad Media y del Renacimiento asumieron la teoría Geocéntrica formulada por Platón, Aristóteles y Ptolomeo.

Arquímedes (siglo II a.n.e.) en su libro sobre la *Medida del Círculo* en el Teorema I de esa obra nos ofrece una bella *"cuadratura"* del círculo con su método de exhaución; y en el Teorema III obtiene la famosísima aproximación del número pi, la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, la fracción 22/17. La enorme influencia que la obra arquimediana ejerció sobre la comunidad científica a lo largo de la Edad Media árabe y latina, así como en el Renacimiento italiano, tuvo en la Medida del círculo el representante más eficaz e iniciático, tanto por la fascinación de lo circular, como por la sencillez de los enunciados de sus teoremas y el magistral desarrollo de sus demostraciones. (Montesinos, 2009). En su obra "*De la esfera y el cilindro"* afirma que la superficie de la esfera equivale a cuatro veces la superficie de su círculo máximo y que el volumen es el mismo que el de un cono cuya base es la superficie de la esfera y cuya altura es el radio de la misma. (Aranda. 2006).

En el siglo XII, en el *Libro de la Proposiciones o Reglas de la Teología* atribuido al filosofo Termegistus la segunda de las 24 proposiciones justifica la máxima de Empedócles *"Dios es una esfera inteligible, cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna".* En el siglo XVI, en el último capítulo del último libro de Pantagruel se refirió a *"esa esfera intelectual, cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna, que llamamos Dios".* (Borges, 1952).

En la Edad Media el Algebra y la Trigonometría son impulsadas por los matemáticos Indios y árabes, en la cultura Occidental la Geometría es una de las siete Artes Liberales compuestas por dos grupos de estudio: el *Trivium* compuesta por la gramática, la

retorica, la dialéctica (o lógica) y el Quadrivium de orden matemático: la aritmética, la geometría, astronomía y la música, las escuelas y universidades se limitaron a enseñar *Los Elementos* de Euclides. En Grecia, se desarrollaron y estudiaron otras curvas planas, como la cuadratriz de Hipias (siglo V a.n.e.) y Dinostrato (siglo IV a.n.e.).), la concoide de Nicomedes (entre el siglo II y el I a.n.e.), la cisoide de Diocles (siglo II a.n.e.).), destinadas a resolver problemas particulares, como la trisección del ángulo o la duplicación del cubo. Por otra parte, las cónicas, sistematizadas por Apolonio, eran bien conocidas desde el siglo IV a.n.e. por Menecmo.

Con la llegada de diferentes intelectuales a Italia y con la posibilidad de la amplia reproducción de los textos antiguos gracias a la imprenta, las ciencias retoman un papel fundamental de la sociedad, específicamente la geometría tuvo una fuerte relación con el arte y la técnica, destacándose los artistas Paciolo, Durero, Da Vinci, Alberti, desarrollando la perspectiva y las secciones sientas las bases de lo que se llamaría Geometría Proyectiva, posteriormente desarrollada por Desargues en el siglo XVII.

Tartaglia (1499-1557) en sus *"Quesiti et Inventioni Diverse"*, sustenta que las trayectorias de los proyectiles de las piezas de artillería no son rectas en ninguna de sus partes, contra la opinión de que primero eran rectas y luego se volvían bruscamente curvas en el momento de la caída. Galileo estableció en sus *"Discursos y Demostraciones acerca de dos Nuevas Ciencias"* (1638), que prescindiendo de la resistencia del aire, tales trayectorias eran parábolas.

Copérnico (1473-1543) en su obra *"De Revolutionibus orbium Caelestium"* (1543), destrona el sistema geocéntrico de Ptolomeo, sentando la teoría de que los planetas describen orbitas alrededor del sol (o de un punto muy cercano al mismo), pero esas órbitas para Copérnico, siguen siendo circunferencias. (Roit, 1989).

Giordano Bruno buscó palabras para declarar a los hombres el espacio copernicano y en una página famosa estampó: *"Podemos afirmar con certidumbre que el universo es todo centro, o que el centro del universo está en todas partes y la circunferencia"* (De la causa, principio de uno, V).(Borges, 1952).

Kepler en su *"Astronomia Nova"* (1609), expone como, estudiando la órbita de Marte y usando las cuidadosas y numerosas observaciones de Tycho Brahe (1546-1601) establece su primera y fundamental ley: *"Los planetas describen elipses, de las cuales el sol ocupa uno de los focos"*. La segunda ley dice: *"Los radios vectores del sol a los planetas, describen áreas iguales en tiempos iguales"*. Seria esta una ley evidente si las

trayectorias fueran circulares, pero siendo elípticas, prueba que la velocidad de los planetas no es uniforme, cosa inconcebible para Aristóteles. La tercera ley es igualmente sorprendente: "*Los cuadrados de los tiempos que tardan los planetas en recorrer su órbita, son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de las elipses que describen".*(Roit, 1989). Kepler en su *"Mysterium Cosmographicum"* (1596) acude a la Geometría para describir el movimiento de los planetas, en su época se conocían solamente seis planetas (Saturno, Júpiter, Marte, Tierra, Venus y Mercurio) y por tanto había cinco distancias entre ellos, fue tentadora la idea de buscar la aplicación mediante los cinco poliedros regulares ya conocidos por Platón. Siguiendo a los pitagóricos, vincula las velocidades angulares de los planetas con series armónicas de acordes musicales, justificando las excentricidades de las orbitas como una necesidad para mantener la armonía de los sonidos producido por los movimientos. La necesidad de la "*vía geométrica"* para comprender la Naturaleza fue expuesta claramente por Galileo en *"Il Saggiatore"* (1623): *"El libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin los cuales no es posible entender una sola palabra y se andará siempre como en un oscuro laberinto".* (Roit, 1989).

Desde los griegos, los matemáticos intentaron explicar los fenómenos naturales por medio de relaciones numéricas, centrándose en la recta y la circunferencia. Kepler posicionó a las cónicas y los poliedros buscando la armonía del Universo. Descartes (1637) con su *"Discours de la Methode",* (Discurso del Método) y su apéndice *Geometría Analítica*, así como Fermat (1679) con su obra *"Ad locos plano et solidos isagoge"* (Introducción a los lugares planos y sólidos) aportan las bases sólidas de la Geometría Analítica ampliando la variedad de objetos matemáticos en la modelación de los fenómenos naturales mediante ecuaciones, Fermat utilizando el lenguaje algebraico de Vieta estudia las curvas que se pueden expresar mediante ecuaciones de primero y segundo grado y establece que son precisamente la recta y las cónicas. También establece que, en general, una curva tiene una ecuación y que una ecuación algebraica representa siempre una curva. (Viader, 2000), además encontró la ecuación de una circunferencia centrada en el origen.

Descartes desarrolla un método que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x,y) = 0$, donde f representa una función. En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 y las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2. Esto convertía toda la

Geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados 1 y 2. (Euclides.org, 2007). La circunferencia, en cambio, quedaba en pie de igualdad con las demás cónicas, representadas todas por ecuaciones de segundo grado. Con ello fue más fácil comprender las elipses planetarias que tanto desconcertaron a Kepler y a sus contemporáneos. (Roit, 1989).

Se tuvieron entonces todos los elementos para que, juntando Geometría con procesos de paso al límite, o con especulaciones filosóficas, Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) crearan el cálculo diferencial y con él pudiera Newton formular su famosa ley de gravitación que explicaba, con un solo enunciado, las tres leyes de Kepler y otros muchos fenómenos de la mecánica celeste. Los poliedros regulares y las armonías musicales de Kepler cayeron de golpe ante una nueva intuición, la de una fórmula matemática que expresaba una fuerza directamente proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Con la Geometría Analítica y su método algebraico sustituyen el método sintético que consistía en establecer axiomas y definiciones y de ellos deducir teoremas volviendo a abordarse hasta el siglo XX en la investigación geométrica.

Con la Geometría Diferencial, Gauss (1777-1855) establece las relaciones entre el Análisis Matemático y la Geometría, estudiando el espacio, las curvas y las superficies, establece la noción de curvatura de una superficie, abriendo el terreno para la aparición de las geometrías no euclideas. La representación de puntos por coordenadas y de las curvas y superficiales por ecuaciones, permitió avanzar en. A su vez, la unión de la Geometría con el Algebra y el Análisis, fue de primordial importancia para la Física. Las leyes de la Naturaleza aparecieron representadas por ecuaciones que vinculaban las coordenadas de espacio. Los epiciclos, deferentes, ecuantes y excéntricas de Ptolomeo, todo ello combinación de circunferencias, pasaron a ser ecuaciones diferenciales obtenidas por combinación de gradiente, divergencia, rotor y laplaciano. (Roit, 1989).

Euler (1707-1783) estudiaba las superficies como limite o contorno como limite o contorno de cuerpos sólidos, su principal memoria se titula *"De superficiebus corporum"*, (1748). La geometría descriptiva, desarrollada inicialmente por Gaspard Monge (1746-1818) en la memoria *Géométrie Descriptive*, publicada en 1799. Monge es también considerado el padre de la geometría diferencial debido a su obra *Application de l'analyse à la géométie*, en la que introduce el concepto de líneas de curvatura de una superficie en el espacio euclidiano tridimensional. En 1822, Jean Victor Poncelet (1788-

1867) publicó *Traité des propriétés projectives des figures*, que es un estudio de aquellas propiedades geométricas que permanecen invariantes ante proyecciones. Este trabajo contiene las ideas fundamentales de la geometría proyectiva, tales como los conceptos de razón cruzada, involución y puntos circulares al infinito. (García, 2002).

A principios del siglo XIX, con Lobatchewsky (1793-1856), Bolyai (1802-1860) y el mismo Gauss, aparecen las Geometrías no-euclidianas. Se dispone, con ellas, de nuevos modelos para interpretar la naturaleza. Desde el punto de vista matemático y filosófico, el descubrimiento fue trascendental, pues se vio que la Geometría euclidiana basada en nuestra intuición del mundo exterior, no era una verdad a priori, como creía Kant (1724-1804), sino tan solo una entre otras Geometrías posibles.

Riemann (1826-1866) en su clásica memoria "*Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde Liegen"* (Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría), (1854) muestra la posibilidad de espacios multidimensionales de curvatura variable, de los cuales el espacio euclidiano ordinario sería tan solo un caso particular en cuanto a la dimensión (tres) y en cuanto a la curvatura (cero).

En 1862, Lindemann demuestra que el número *Pi* es trascendente, es decir, no puede ser raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Esto implica que no es un número que pueda construirse con regla y compás, y demuestra que no es posible construir con sólo estos instrumentos un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

Klein es la otra gran pieza clave de la Geometría en el siglo XIX. En 1871 descubrió que la geometría euclidiana y las no euclidianas pueden considerarse como casos particulares de la geometría de una superficie proyectiva con una sección cónica adjunta. Esto implicaba dos cosas: la primera es que la geometría euclidiana y las no euclidianas podían considerarse como casos particulares de la geometría proyectiva (o mejor dicho, de la geometría de una superficie en un espacio proyectivo). La segunda, que la geometría euclidiana es consistente, es decir, no puede llevar a contradicciones si y sólo si lo son las geometrías no euclidianas. (euclides.org).

Desde el punto de vista epistemológico, la teoría del conocimiento da saltos en la construcción del concepto, en éste caso de objetos matemáticos según las circunstancias históricas y el desarrollo de las ciencias en su conjunto, a manera de ejemplo el desarrollo de la Física ha estado ligado al desarrollo de las matemáticas en sus diferentes formas, la geometría particularmente ha jugado papel fundamental al proporcionar sus conceptos y modelos a los fenómenos naturales. Al sustituir el sistema geocéntrico por el heliocéntrico y las circunferencias por elipses, desaparecieron las

complicaciones del sistema ptolemaico, para dar lugar al mucho más simple sistema copernicano. Este, a su vez, se complico con poliedros regulares y esferas musicales para poder explicar ciertas anomalías, complicaciones que desaparecieron al aparecer el cálculo infinitesimal y expresar la gravitación por la simple ley de Newton de la atracción universal o, más tarde, por la ecuación de Laplace, la más simple de segundo orden que es invariante por movimientos del espacio ordinario. Cuando se conoció la geometría de los espacios multidimensionales y el cálculo tensorial, al considerar el espacio-tiempo como una variedad de Riemann, las ecuaciones más simples para la determinación del tensor métrico fundamental son las de la Relatividad General y la ley más simple para el movimiento es la ley de inercia. (Roit, 1989).

En 1872, Klein escribió una memoria conocida como *El Programa de Erlangen*, allí aporta elementos para la diferenciación de dos niveles de distinciones: por un lado, la de las geometrías no euclidianas y la geometría euclidiana, por otro lado, la distinción entre el método sintético, el algebraico y el analítico. Klein introduce el concepto algebraico de grupo en la Geometría, definiéndolo como el conjunto en el que hay una operación definida, es decir, posibilitando la operación entre rectas, por ejemplo el punto medio, a cada par de puntos se le asigna el punto medio del segmento que une los dos primeros puntos. Toman relevancia en esta época los modelos de geometría hiperbólica: el de Poincaré, el del semi-plano superior y el de Klein-Beltrami. Estas son estructuras inmersas en el espacio euclidiano de dimensión dos. Los modelos de Klein-Beltrami y de Poincaré son modelos finitos y el del semiplano superior es infinito.

David Hilbert (1862-1943) expresa de un modo claro y brillante la axiomatización, evitando todo recurso a imágenes concretas, introduce los básicos elementos de puntos, rectas y planos. Estos objetos, cuya naturaleza no se precisa, cumplen ciertas relaciones expresadas por 21 axiomas, clasificados en 5 grupos: axiomas de pertenencia (8), de orden (4), de congruencia (6), axioma de las paralelas (1), y de continuidad (2), constituyendo una base suficiente para una entera reconstrucción de todo el edificio geométrico a partir de ellos y sin más ayuda que las reglas de la Lógica y de la aritmética. (Pérez, 2004). En los últimos 20 o 30 años del Siglo XX, se dio un renacimiento de la geometría del Siglo XIX. La geometría hiperbólica renació ligada a la topología en dimensiones bajas; la geometría proyectiva revivió como fundamento para desarrollar la visualización por computadora; los grupos geométricos encontraron excitantes aplicaciones en la física (Bracho, 2003).

2. COMPONENTE DISCIPLINAR

La propuesta pedagógica y disciplinar debe sustentarse en un estudio claro y organizado del concepto de circunferencia, fundamentalmente en las propiedades de éste objeto matemático desde el enfoque de la Geometría Sintética y la Geometría Analítica. Se tomará como referencia apartes del *Libro III* de Euclides y se compararán las definiciones referentes a las propiedades de la circunferencia con textos de Geometría euclidiana y de Geometría analítica, principalmente los libros: *Geometría elemental* A. V. Pogorélov., el Curso de Geometría de Landaverde, Circulando por el Círculo de Fernández, la Geometría del Siglo XXI de Flores y textos de Geometría y de matemáticas Universitarios que se citarán en la bibliografía.

2.1 De la Geometría Sintética.

Propiedades generales de la circunferencia. 1.1. Definición. Una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P tales que $|\overline{OP}| = r$ También llamamos *radio* a cualquier segmento que une un punto sobre la circunferencia con O. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Si la cuerda contiene al origen la llamamos *diámetro* (de la circunferencia o círculo). También llamamos *diámetro* al valor común de las longitudes de los diámetros (que es $2r$).

1.2. Teorema (11.1 Pogorélov). *En una circunferencia, una recta que contiene un diámetro es eje de simetría y el centro de la circunferencia es centro de simetría.* Demostración. Sea a el diámetro de la circunferencia y sea x un punto cualquiera de la misma (figura 2.1). Construyamos el punto x_1 simétrico del punto x respecto al diámetro a los triángulos rectángulos OAx y OAx_1 son iguales. Tienen el cateto OA común y los catetos Ax y Ax_1 son iguales por definición de simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $Ox_1 = Ox$. Pero esto significa que el punto x_1 se halla en la circunferencia. O

sea, la simetría respecto al diámetro transforma la circunferencia en sí misma, es decir, el diámetro es el eje de simetría de la circunferencia. Construyamos ahora el punto x_2 simétrico del punto x respecto al centro O de la circunferencia. Según la definición de la simetría respecto al punto, se tienen $Ox_2 = Ox$, o sea, el punto x_2 se halla en la circunferencia. Por consiguiente, el centro de la circunferencia es el centro de simetría. Demostrado el Teorema.

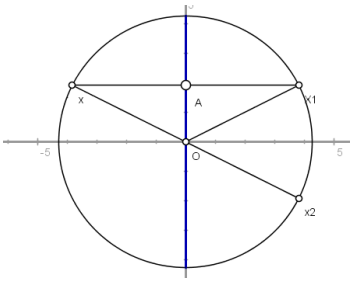


Figura 2.1. Teorema (11.1 en Pogorélov).

1.3. Proposición. *Si en la circunferencia de centro O y radio r el diámetro AB corta a la cuerda PQ en R, entonces $<ARP$ = 90° si y sólo si R es el punto medio de PQ.* **Esto es Euclides III.3**. **Proposición 3**. Si en un círculo una recta dibujada a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no dibujada a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

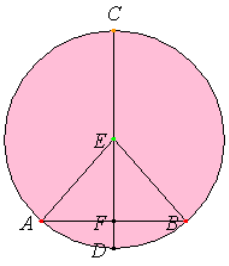


Figura 2.2. Euclides Proposición 3.

Teorema 11.2 Pogorélov. *El diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.* Demostración: Sea AB la cuerda dada y sea C su punto medio (figura 2.3). Tracemos el diámetro que pasa por el punto C. Los triángulos OCA y OCB son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Tienen iguales los lados OA y OB que son radios, el lado OC es común y $|\overline{AC}| = |\overline{CB}|$ porque C es el punto medio del segmento AB. La igualdad de estos triángulos implica que sus ángulos de vértice C, iguales y

adyacentes, son rectos. El diámetro OC es perpendicular a la cuerda AB y la divide por la mitad. No existe otro diámetro perpendicular a la cuerda AB ya que desde el punto O se puede trazar sólo una recta perpendicular a la recta AB. Demostrado el Teorema.

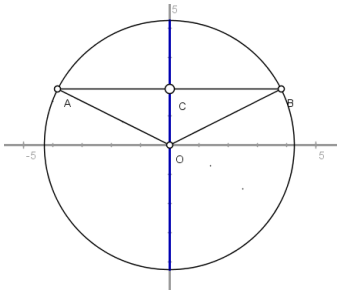


Figura 2.3. Teorema (11.2 en Pogorélov).

1.4. Teorema (11.3 Pogorélov). *Ninguna cuerda es mayor que el diámetro, y sólo puede ser igual si es diámetro.* Aquí hablamos de «el» diámetro como el valor que es el doble del radio. **Euclides III.15. Proposición 15**. En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana.

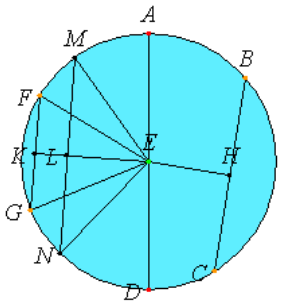


Figura 2.4. Euclides Proposición 15.

2. Tangente a una circunferencia

2.1. Definición. Una recta que corta a una circunferencia en exactamente un punto se llama *tangente* a la circunferencia por ese punto. Observar que esta definición difiere de la de Pogorélov. El próximo resultado muestra que la definición «clásica» de tangente es equivalente a la de Pogorélov.

2.2. Corolario (de la proposición 1.5). *Sean A un punto de la circunferencia de centro O y ℓ una recta por A. Entonces $\ell \perp OA$ si y sólo si ℓ es tangente a la circunferencia por A.*

Euclides III.18 y III.19. Comparar con el **teorema 11.4 en Pogorélov.** Llamando c a la circunferencia y r a su radio, usamos 1.5 con $B \in \ell$ tal que dist(O, ℓ) = OB. Si $\ell \perp OA$, debe ser $A = B$, dist(O, ℓ) = $OB = |OA| = r$ y hay un único punto en $c \cap \ell$ (que es A), i.e., ℓ es tangente a c por A. Recíprocamente, si $\ell \not\perp OA$, entonces dist(O, ℓ) = $OB < OA$ y ℓ corta a c en dos puntos, por lo que no puede ser tangente.

Proposición 18. Si una recta toca a un círculo, y se dibuja una recta des del centro hasta el punto de contacto, la recta dibujada será perpendicular a la tangente.

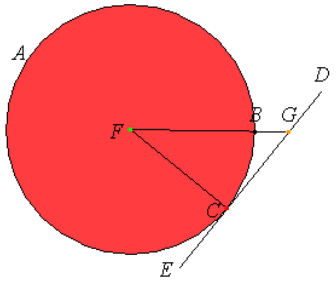


Figura 2.5. Euclides Proposición 18.

Teorema 11.4 Pogorélov. *Toda tangente tiene sólo un punto común con la circunferencia, el punto de tangencia.* Demostración: Sea B otro punto cualquiera de la tangente diferente del punto de tangencia A (Figura 2.6). Por su propiedad respectiva de perpendicular y de oblicua $OB > OA$, o sea, la distancia entre el punto B y el centro es mayor que el radio. El punto B no pertenece a la circunferencia. Demostrado el Teorema.

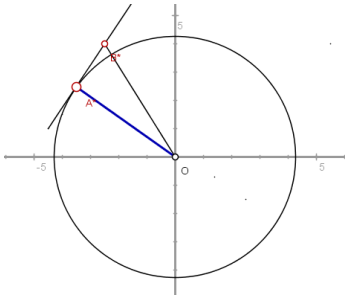


Figura 2.6. Teorema (11.2 en Pogorélov).

Proposición 19. Si una recta toca a un círculo, y des del punto de contacto se dibuja una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará contenido en la recta dibujada.

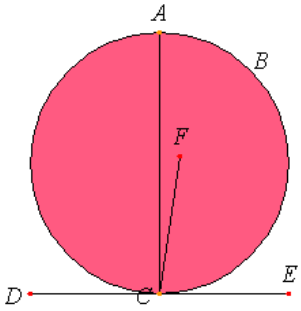


Figura 2.7. Euclides Proposición 19.

TEOREMA 1. *Toda recta del plano de una circunferencia, tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.* Figura 2.8

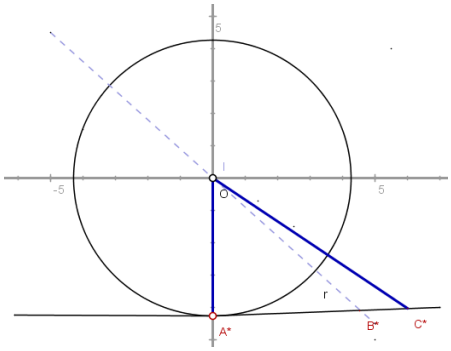


Figura 2.8. TEOREMA 1, construcción en Regla y Compás.

Hipótesis: recta r, $C(0,r)$ del plano α, r tangente a la circunferencia en A., $\overline{OA}$ radio

Tesis: $\overline{OA} \perp r$, *Demostración:* Existen dos posibilidades:

1) $\overline{OA} \perp r$, 2) $\overline{OA}$ no es perpendicular a r, Supongamos 2). Existe una recta l que pasa por O y es perpendicular a r. Sea B el punto de intersección de las rectas l y r. Se toma un punto C sobre r al lado opuesto de A con respecto a B, tal que $\overline{BC} \cong \overline{AB}$

1) $l \perp r$ Construcción

2) $\widehat{OBA} \cong \widehat{OBC}$ Rectos

3) $\overline{OB} \cong \overline{OB}$ Reflexiva

4) $AOB \cong COD$ Construcción

5) $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COB$ Cateto-cateto

6) $\therefore OA \cong OC$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

Como $|0A| = r$, entonces $\left|\overline{OC}\right| = r$ y C está sobre la circunferencia y la recta r corta a la circunferencia en dos puntos (A y C) que va contra lo supuesto ya que la recta r es tangente a la circunferencia. Por lo tanto $\overline{OA} \perp r$

Colorario: Si una recta que se encuentra en el plano de una circunferencia, es perpendicular a una recta tangente a la circunferencia en el punto de tangencia, dicha recta pasa por el centro de la circunferencia.

TEOREMA 2. Si una recta, coplanaria con una circunferencia, es perpendicular a un radio en su extremo exterior, entonces la recta es tangente a la circunferencia.

TEOREMA 3. *En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son congruentes entonces los arcos menores subtendidos por ellas, son congruentes.* Figura 2.9

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas de $C(0,r)$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tesis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$, *Demostración:* Se trazan los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.

1). $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$ Radios de una misma circunferencia.

2). $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ Hipótesis

3) $\Delta AOB = \Delta COD$ L-L-L de 1) y 2)

3) $\overset{\frown}{AOB} \cong \overset{\frown}{COD}$ Elementos correspondientes a triángulos congruentes

5) $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes

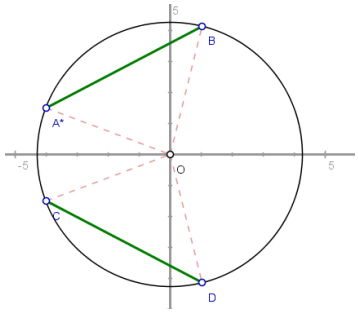


Figura 2.9. TEOREMA 3, construcción en Regla y Compás.

TEOREMA 4: *La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos.* Figura 2.10.

Hipótesis: $\overline{AB}$ cuerda de $C(0,r)$, l recta que pasa por O, $l \perp \overline{AB}$ en C, D y E puntos de intersección de l con la circunferencia., Tesis: $\begin{matrix}\overline{AC} \cong \overline{CB} \\ \overline{AD} \cong \overline{BD} \\ \overline{AE} \cong \overline{EB}\end{matrix}$, *Demostración:* Se trazan los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

1) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ Radios de una misma circunferencia

2) $\widehat{ACC} \sim \widehat{BCC}$ Rectos por Hipótesis

3) $\overline{OC} \cong \overline{OC}$ Propiedad Reflexiva

4) $\Delta ACO \cong \Delta BOC$ L.A.L, de 1), 2) y 3)

5) $\therefore \overline{AC} \cong \overline{CB}$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

6) $\therefore \widehat{AOE} \cong \widehat{BOE}$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

7) $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes, y 6)

8) $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOD}$ de 6) y suplemento de ángulos

9) $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes, y 8).

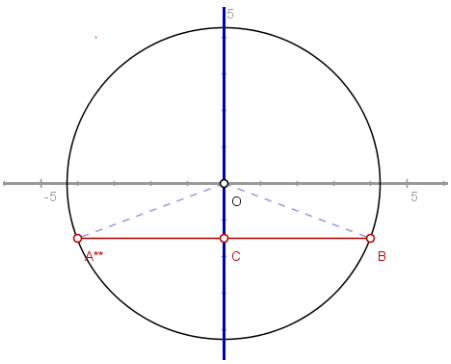


Figura 2. 10. TEOREMA 4, construcción en Regla y Compás.

TEOREMA 5: *En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, cuerdas congruentes equidistan del centro.* Figura 2.11

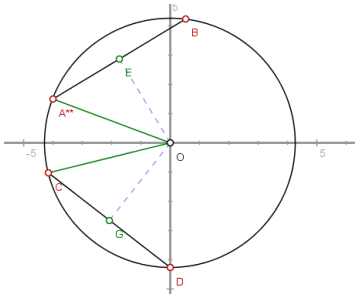


Figura 2.11. TEOREMA 5, construcción con Regla y Compás.

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas de $C(0,r)$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OG} \perp \overline{CD}$

Tesis: $\overline{OE} \cong \overline{OG}$, *Demostración:* Se trazan los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$

1) $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ Radios de la misma circunferencia

2) $\widehat{AEO} \cong \widehat{CGO}$ Rectos

3) $AE = EB = \frac{AB}{2}$, $CG = GD = \frac{CD}{2}$ Teorema: *La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos,* e Hipótesis.

4) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ Hipótesis.

5) $\overline{AE} \cong \overline{CG}$ de 3) y 4)

6) $\Delta AEO \simeq \Delta CGO$ L-A-L de 1), 2) y 5)

7) $\therefore \overline{OE} \cong \overline{OG}$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes.

TEOREMA 6: *Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes.* Figura 2.12

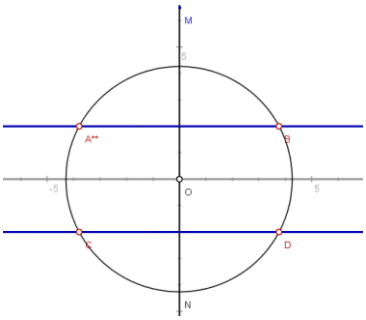


Figura 2.12. TEOREMA 6, construcción con Regla y Compás.

I. Las rectas paralelas son secantes

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ secantes a la $C(0,r)$, $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$, A, B, C y D puntos de la circunferencia.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, *Demostr:* Por O se traza $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (M,N puntos de la circunferencia)

1) $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ Perpendiculares, Hipótesis.

2) $\overline{MC} \cong \overline{MD}$ Teorema: *La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos*

3) $m(\overline{MC}) \cong m(\overline{MD})$ De 2), definición

4) $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ Teorema: *La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos,* y

5) $m(\overline{AM}) \cong m(\overline{BM})$ de 4), definición

6) $m(\overline{AC}) \cong m(\overline{BD})$ de 3) y 5), resta

7) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ de 6)

II. Las rectas paralelas son una tangente y la otra secante: Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ secante y $\overleftrightarrow{ED}$ tangente (E punto de tangencia) de la $C(0,r)$, Tesis: $\overline{AE} \cong \overline{BE}$

II. Las rectas paralelas son dos tangentes: Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{ED}$ tangentes a la $C(0,r)$, A y D puntos de tangencia, Tesis: $\overline{AMD} \cong \overline{AND}$

2.2 Geometría Analítica.

DEFINICIONES PRELIMINARES

Definición. 1 (La circunferencia). *Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano, al punto fijo se le llama el centro de la circunferencia y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia.*

Notación: la circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r (Figura 2.13), se denota por C(O, r), en la notación de conjuntos $C(O, r) = \{X \in \pi / OX = r, O, X \in \pi\}$

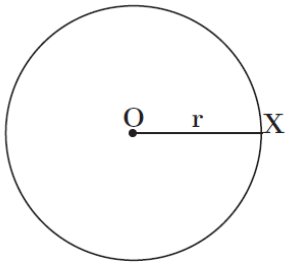


Figura 2.13. La circunferencia

Como sucedió con la recta en el plano, que dividió el plano en dos regiones disjuntas, lo mismo sucede con la circunferencia, la cual nos divide el plano en dos regiones, una de ellas la llamamos el interior y la otra el exterior de la circunferencia.

Definición 2 (Interior de la Circunferencia). *Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es menor que el radio, se le llama el interior de la circunferencia.* **Notación:** el interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por IntC(O, r), por lo tanto $IntC(O, r) = \{X \in \pi / OX < r, X, O \in \pi\}$

Definición 3 (Exterior de la Circunferencia). *Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es mayor que el radio, se le llama el exterior de la circunferencia.* **Notación:** el exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por ExtC(O, r), por lo tanto $ExtC(O, r) = \{X \in \pi / OX > r, X, O \in \pi\}$

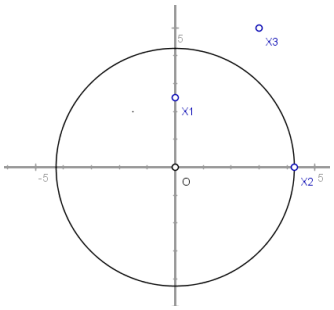


Figura 2.14. Exterior de la Circunferencia

En la Figura 6.14 los puntos X_1, X_2, X_3 están en el mismos plano de la C(O, r).

Como $OX_1 < r$ entonces $X_1 \in$ IntC(O, r), Como $OX_3 > r$ entonces $X_1 \in$ ExtC(O, r).

Como $OX_2 = r$ entonces $X_1 \in$ C(O, r).

Definición 4 (Círculo). *La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo.*

Notación: el círculo de centro O y radio r se denota por C(O, r), por lo tanto

C(O, r) = C(O, r) ∪ IntC(O, r)

Definición 5 (Cuerda). *Es un segmento cuyos extremos son dos puntos diferentes de la circunferencia. Cuando el centro de la circunferencia es un punto interior de la cuerda, entonces a la cuerda la llamamos cuerda diametral y a su medida la llamamos diámetro.*

Por ldefinición de circunferencia, podemos concluir que el diámetro es dos veces el radio.

Definición 6 (Secante). *La recta que intercepta la circunferencia en al menos dos puntos distintos se le llama secante.*

Definición 7 (Tangente). *Si una recta en el plano de la circunferencia la intercepta en un único punto, entonces decimos que la recta es tangente a la circunferencia; al punto de contacto entre la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.*

Nota: en tres dimensiones puede ocurrir que la recta intercepta la circunferencia en un único punto y la recta no ser tangente a la circunferencia.

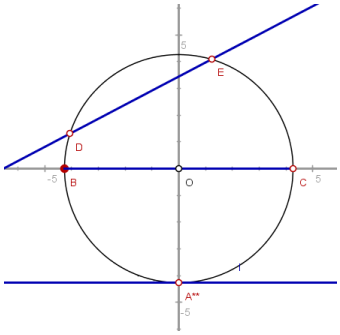


Figura 2.15. Tangente de la Circunferencia

En la Figura 2.15 se puede ver que: l es tangente a la circunferencia C(O, r) en A. La cuerda $\overline{BC}$ es diámetro. La recta $\overleftrightarrow{DE}$ es secante a la circunferencia.

Definición 8 (Arco). *Dados dos puntos distintos de una circunferencia entonces la circunferencia queda dividida en dos conjuntos a los cuales llamaremos arcos.*

Notación: si los puntos son A y B (Figura 2.16), los arcos son arco AMB y arco ANB, los cuales denotamos por $A\overset{\frown}{M}B$ y $A\overset{\frown}{N}B$ y como la cuerda $\overline{AB}$ está asociada a cada uno de estos arcos entonces decimos que el arco $A\overset{\frown}{M}B$ (o el arco $A\overset{\frown}{N}B$) está sub-tendido por la cuerda $\overline{AB}$ o que la cuerda $\overline{AB}$ sub-tiende al arco $A\overset{\frown}{M}B$ (o al arco $A\overset{\frown}{N}B$).

A los puntos A, B se les llama los extremos del arco. Si al arco le quitamos los extremos, a este nuevo conjunto lo llamamos el Interior del arco y lo denotamos por Int($A\overset{\frown}{M}B$).

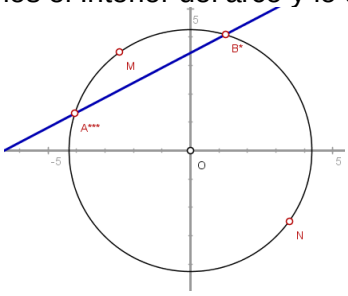


Figura 2.16. Arco de la Circunferencia

Definición 9. **Arco Principal***: si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco principal.*

3. Propuesta Pedagógica

3.1 Lineamientos en Matemáticas Ministerio de Educación Nacional

Los intentos de algunos sectores académicos a mediados del siglo XX de sistematizar las matemáticas en torno a la Teoría de Conjuntos y de la lógica matemática dieron frutos al cooptar a amplios sectores en torno a esta propuesta. Es precisamente en EE.UU. en medio de la confrontación académica y tecnológica con la URSS que surge la *"Matemática Moderna"* o "Nueva Matemática", enfocándose en: Énfasis en las estructuras abstractas y Profundización en el rigor lógico, lo que trajo consigo la pérdida de interés en la geometría elemental y pensamiento espacial, así como la sustitución de problemas de la vida cotidiana por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres (MEN, 1998).

En Colombia, se impulsó el movimiento de Renovación Curricular, centrándose en el planteamiento de *"enfoque de sistemas"* desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. Con la implementación de la Ley General de Educación en 1994 se mantuvieron los elementos fundamentales de la Renovación Curricular para Matemáticas, estructurándose los Lineamientos Curriculares para Matemática, El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana (MEN, 1998 *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*).

Ha sido importante en este cambio de concepción, el reconocer que el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares y que, además, es en el sistema escolar donde tiene lugar gran parte de la formación

matemática de las nuevas generaciones y por ello la escuela debe promover las condiciones para que ellas lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos. (MEN 1998 *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*).

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Octavo a noveno	
PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	
1	Conjetura y verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
2	Reconoce y contrasta propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
3	Aplica y justifica criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
4	Usa representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Tabla 3.1. Estándares Básicos Competencias Matemáticas. 8° a 9°. MEN 2002.

3.1.1 Desarrollo del Pensamiento Geométrico

Desde la antigüedad la Geometría ha tenido relevante importancia en las Matemáticas e históricamente se ha reconocido su importancia, como lo planteara Jean Dieudonné en el ICME 4 (Berkeley, 1980), la geometría *"exclamando desde sus estrechos confines tradicionales ha revelado sus poderes ocultos y su extraordinaria versatilidad y adaptabilidad, transformándose así en una de las herramientas más universales y útiles en todas las partes de las matemáticas"*.

Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar (MEN 1998 *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*).

Desde el año 2000, el Ministerio de Educación Nacional ha venido implementando el Proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia*, para aprovechar los recursos tecnológicos computacionales en el aula. La manera de razonar en geometría elemental no difiere tampoco, desde el punto de vista formal, de la manera de razonar en otros capítulos de la matemática. (Piaget J., 1986). Existen sin embargo factores psicológicos en el tratamiento de las estructuras matemáticas, que conducen a distinguir objetivos especiales en la enseñanza de la geometría. Se pueden señalar los siguientes: Simple sistematización del espacio físico y aplicaciones directas de ello, iniciación en el estudio de las estructuras de la matemática y el refinamiento de la intuición geométrica y la iniciación a los aspectos formales del razonamiento matemático.

3.3 El Modelo de Van Hiele

A menudo es común escuchar entre los docentes de Matemáticas las dificultades que presentan los estudiantes frente al *razonamiento* de problemas de orden geométrico, en muchos casos pueden resolver problemas concretos con creatividad y rapidez, sin embargo cuando es necesario avanzar a sistemas más formales de abstracción, conjeturas o rigor presentan serias dificultades y en caso formal de las demostraciones, estas se memorizan perdiendo su carácter riguroso y deductivo.

Este problema, en geometría no es nuevo. A mediados de 1950 una pareja de profesores de matemáticas holandeses, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof iniciaron trabajos con grupos pilotos sustentando lo que entonces era una teoría: El Modelo de Razonamiento de Van Hiele, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El Modelo consta de dos componentes: una es descriptiva, identificando tipos de razonamiento denominados *"Niveles de Razonamiento",* que van progresando desde la visualización hasta el rigor. El otro componente da pautas para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento, se conocen como *"fases de aprendizaje".* A raíz de sus planteamientos, no sólo los esposos Van Hiele sino múltiples matemáticos y sicólogos han aportado elementos para ir mejorando el Modelo, particularmente (Gutiérrez, J. 1989) y (Senk, 1985), enlutándolo básicamente a la Geometría, es decir, un modelo que se pensó para las matemáticas en su conjunto, se particularizo a la Geometría.

3.3.1 Niveles de Razonamiento

En la teoría de Van Hiele se afirma que para conocer en qué nivel de razonamiento se encuentra un alumno es necesario atender tanto a sus estrategias de resolución de problemas como a su forma de expresarse y al significado que le da al vocabulario que escucha, lee o utiliza para expresar sus conocimientos. Desde este punto de vista resulta relevante detenerse en la comprensión y uso que los alumnos muestran de lo que para ellos significan los términos *"definir"* y *"demostrar".* Las concepciones de los alumnos sobre el significado de estos términos son dos valiosas pistas, para que el docente comprenda con qué nivel de razonamiento matemático los alumnos están operando. (Bressan, 2000, 2006. p.76)

NIVEL 1. RECONOCIMIENTO: Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

- ✓ Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen.
- ✓ No suelen reconocer explícitamente las partes de las que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Gutiérrez (2000).
- ✓ Reconocen las figuras solamente por su aspecto, comparándolos con un prototipo conocido. Las propiedades de una figura no se perciben. En este nivel, toman decisiones basadas en la percepción, no el razonamiento.

NIVEL 2. ANALISIS: Se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas, pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.

- ✓ Pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

- ✓ No relacionan unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. Gutiérrez (2000).
- ✓ Pueden ver figuras como las colecciones de propiedades. Pueden reconocer y nombrar las propiedades de figuras geométricas, pero no ven las relaciones entre estas propiedades.

NIVEL 3. CLASIFICACION: Comienza el razonamiento formal, reconocen que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades.

- ✓ Describen las figuras de manera formal, dan definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y sus requisitos
- ✓ Aplican pasos individuales para el razonamiento lógico-formal, pero sin concatenarlos, no se entiende la estructura de la demostración.
- ✓ No se entiende la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 4. (DEDUCCION FORMAL). Realizan razonamientos lógicos formales.

- ✓ Las demostraciones adquiere sentido.
- ✓ Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
- ✓ Entienden la equivalencia de definiciones del mismo concepto conceptos.
- ✓ Se tiene una visión globalizadora del área de estudio.

	TIPO DE ELEMENTOS EXPLICITOS	ELEMENTOS IMPLICITOS
1.	Percepción global de la figura	Partes y características de los componentes de la figura
2.	Partes y características de los componentes de las figuras	Establecimiento de relaciones entre las partes constitutivas de la figura
3.	Establecimiento de relaciones entre las partes constitutivas de la figura	Formulación de relaciones teniendo en cuenta las propiedades de la figura, determinación de cuándo una relación implica otra
4.	Formulación de relaciones teniendo en cuenta las propiedades de la figura, determinación de cuándo una relación implica otra	Abstracción de la teoría. Los objetos son ideales, se apartan de la representación física

Tabla 3.2. Estructura recursiva del Modelo de Van Hiele. (MEN, 2000)

3.2.1 Fases de Aprendizaje

El aprendizaje es un acumulado como resultado de una serie de experiencias adecuadas, existe entonces la posibilidad de alcanzar los diferentes Niveles de razonamiento, incluyendo los superiores, inclusive fuera de la enseñanza escolar si se vivencian las experiencias pertinentes (Van Hiele). En la escuela, el docente debe diseñar e implementar actividades que potencien el razonamiento de tal manera que la experiencia permita el salto cognitivo. Las Fases de Aprendizaje son etapas graduales y organizadas que deben permitir el avance al interior de cada Nivel, a través de experiencias significativas lo llevan al Nivel Superior de razonamiento. Se parte de conceptos previos y luego, mediante las experiencias se aplican, combinan, relacionan, construyendo el razonamiento

FASE I. (INFORMACION)	**FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA)**
✓ Se da cuenta del campo de estudio en geometría a trabajar ✓ Materiales a trabajar y adquisición conocimientos básicos. ✓ El docente hace diagnóstico de conocimientos previos. (Nivel de Razonamiento)	✓ Descubren, aprende, comprende las propiedades y conceptos de los objetos de estudio ✓ Las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior. (Van Hiele, 1986).

FASE III. (EXPLICITACION)	**FASE IV. (ORIENTACION LIBRE)**	**FASE V. (INTEGRACION)**
✓ Se identifican regularidades en los objetos de estudio ✓ Intercambio de experiencias y saberes	✓ Se plantean actividades diferentes a las iniciales, el estudiante aplica los conceptos y lenguaje adquiridos	✓ No se aportan nuevos conceptos, se construye sobre la base de lo previo y lo adquirido. Un elemento diferenciador destacado son los tipos de problemas que se deben plantear en cada fase (Van Hiele, 1986).

Tabla 8.2. Fases de Aprendizaje del Modelo de Van Hiele.

3.4 La Geometría Dinámica y la Visualización

Los Programas que utilizan Geometría Dinámica han abierto amplias posibilidades para el estudio y enseñanza de la Geometría. Permiten, entre muchas otras aplicaciones, pasar de la regla y el compás, el lápiz y el papel de forma estática a experiencias en las

cuales los elementos de construcción de los objetos geométricos pueden modificarse sin perder en esencia las condiciones iniciales, por ejemplo, mover un punto sobre una circunferencia sin que ésta cambie en lo fundamental sus elementos. Las ventajas de la aplicación en el aula en los siguientes aspectos:

1. Por los alumnos que hacen las matemáticas utilizando el ordenador como si fuera una herramienta de dibujo para resolver problemas, desarrollar proyectos de investigación o seguir lecciones diseñadas previamente.
2. Por el profesor para realizar presentaciones de conceptos o procedimientos con el apoyo de un cañón de proyección conectado a un ordenador. Mora (2002).

El diseño e implementación de situaciones-problema deben generar en el estudiante situaciones más allá de la visualización, la conjetura y la relación entre los elementos del objeto geométrico, deben permitir la construcción de un razonamiento geométrico, mediado por una herramienta computacional, específicamente la GD, deben garantizar un salto en la interpretación de las propiedades o elementos de una figura o una construcción. *"Es especialmente eficaz presentar a los alumnos tempranamente resultados en los que las explicaciones (demostraciones) posibilitan generalizaciones posteriores sorprendentes (usar la demostración como herramienta de descubrimiento). En lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como herramienta de verificación en geometría."* (De Villiers, 1996; p. 3). La **visualización** integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992). La *visualización* matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado. (Hitt 2002, p. viii). Por otro lado, Cantoral y colaboradores (2000, p. 146), describen: *"... se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico".* Duval (Sección II) distingue entre procesos visuales y procesos de razonamiento, y parece sugerir que son categorías diferentes de pensamiento. Él propone que una función principal de los procesos visuales es el de la *verificación subjetiva*. Como es propuesto en Dreyfus

(1991), parece que el razonamiento visual tiene un bajo estatus. Este es referido principalmente como un estadio intuitivo, de apoyo, global y preliminar en los procesos de razonamiento en general, el cual en algunas ocasiones apoya razonamientos posteriores, y algunas veces los obstruye. Pero implícitamente la visualización en geometría guarda relación estrecha con la actividad cognitiva, se trata de avanzar más allá de *"mirar"* los objetos geométricos en determinado entorno, llevando a la exploración visual en un contexto, mediado por definiciones y conceptos geométricos. Cabe apuntar que, se debe hacer una diferenciación entre ver y visualizar, de tal suerte que el **ver** se reduce a una capacidad fisiológica, mientras que la **visualización** es un proceso cognoscitivo -propio del ser humano- que está vinculado con la cultura del sujeto: historia, ideología, tradiciones, costumbres, valores, etc. Cantoral (2002).

3.5 Software Regla y Compás: Herramienta Didáctica para el Aprendizaje de la Geometría. Propósito del programa

R.y.C. es un software para realizar construcciones de geometría escolar en el computador. La ventaja de este programa frente a la construcción con papel y lápiz consiste en la posibilidad de modificar la construcción. Al mover un punto toda la construcción cambiará, e incluso durante el desplazamiento del punto se irá actualizando. Incluso se pueden dibujar lugares de puntos durante el desplazamiento. Otras cosas que pueden hacerse con el computador y no con papel y lápiz son:

Variaciones rápidas de los puntos de base para observar cómo cambia la construcción, Dibujo de Lugares geométricos, Cambio de colores, estilos, grosor o nombres, Posibilidad de enviar la construcción por Email o de publicarla en Internet, de manera que el lector puede cambiarla de manera interactiva, Macros, con los cuales pueden automatizarse las construcciones, Descripción de una construcción.

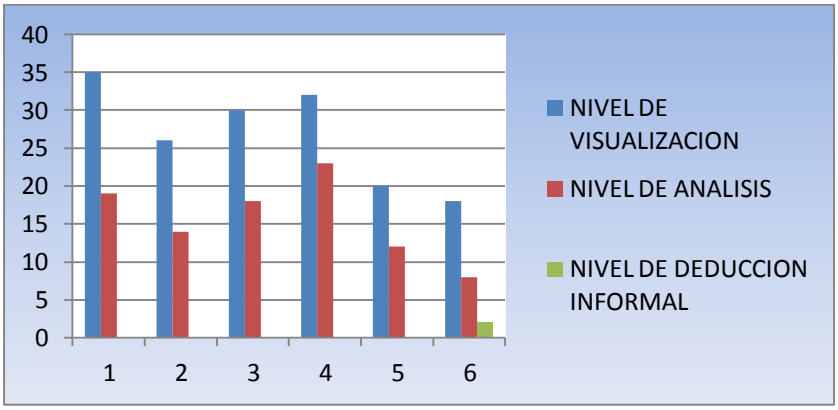
Objetivos: La principal funcionalidad del programa es el dinamismo, que consiste en que las construcciones geométricas pueden variarse moviendo los puntos de base. También es posible trazar el lugar geométrico de un punto cuando otro es desplazado, lo cual puede servir para lograr una mejor comprensión de conceptos geométricos. Otra funcionalidad es la construcción textual, como alternativa a la construcción visual. El botón izquierdo del ratón servirá para construir junto con los botones de herramientas, mientras el botón derecho servirá para desplazar los objetos o editar sus propiedades. Otro objetivo es lograr respuestas automáticas.

4. Diseño e Implementación de una Unidad Didáctica sobre propiedades de la circunferencia utilizando el Modelo de Van Hiele y la Geometría Dinámica

4.1 Actividad 1. De Exploración.

Con el objetivo de identificar el Nivel de Razonamiento de los estudiantes según el Modelo de Van Hiele se diseñó la Actividad 1 **(ANEXO 1)** que dió cuenta de los conceptos manejados así como el diagnóstico para el diseño de las demás actividades de la Unidad Didáctica. Se aplicó en un grupo piloto de 35 estudiantes de Grado 9° del Colegio Ciudadela Educativa Bosa IED, dado que según lo estipulado en los Lineamientos Curriculares y los Estándares para matemáticas, es en éste grado que se debe orientar el concepto de circunferencia, sus elementos, propiedades y Teoremas. Los estudiantes en general descubren, aprenden, comprenden las propiedades y conceptos de circunferencia, cuerda, diámetro, radio, arco y centro, sin embargo es necesario reforzar conceptos que deben ser incluidos en la Actividad Exploratoria o explicados por el profesor en clase, tales como:

- ✓ Circunferencia, círculo, longitud de la circunferencia, área de un círculo.
- ✓ Rectas secantes y tangentes
- ✓ Puntos externos e internos de un círculo.



Gráfica 4.1. Niveles de Razonamiento de Van Hiele. Actividad exploratoria

Los conceptos trabajados fueron: circunferencia, centro, cuerda, diámetro, radio y arco. Para el análisis de los Niveles de razonamiento de Van Hiele, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios, representados en la tabla.

NIVEL RAZONAMIENTO	DESCRIPCION ELEMENTOS Y CARACTERISTICAS	FASE DE APRENDIZAJE
NIVEL ANALISIS (2). Derivar empíricamente (mediante el estudio de muchos ejemplos) *"reglas y generalizaciones"* Descubrir propiedades de una clase familiar de objetos	**Compara** segmentos de cuerda de acuerdo a las propiedades que las caracterizan. **Clasifica** y **reclasifica** cuerdas con base a un atributo particular (diámetro, secante). **Identifica y traza** cuerdas, puntos medios, perpendiculares, tangentes, dada una descripción oral o escrita de sus propiedades Identifica cuerdas, radios, diámetros, segmentos equidistantes con pistas visuales **Deriva** empíricamente (mediante el estudio de muchos ejemplos) "reglas y generalizaciones" sobre cuerdas iguales, radios, diámetros. **Descubre** propiedades de las cuerdas, las tangentes, las secantes. **Utiliza** y **usa** vocabulario y símbolos apropiados para la representación de los elementos de la circunferencia	**FASE III. (EXPLICITACION)** Se identifican regularidades respecto a segmento, punto medio, recta perpendicular. Mediante la Geometría Dinámica medir y comparar longitudes de segmentos equidistantes a un punto fijo, el centro de la circunferencia Explicaciones formales sobre radio, distancia del centro a una cuerda (verificación de su longitud), identificación y medida del diámetro comprobando ser la cuerda más larga, Enriquecimiento semántico, definición de secante, tangente, punto de tangencia (conceptos, definiciones), cuerdas equidistantes.
NIVEL DEDUCCION INFORMAL (3) Desarrollar y usar definiciones, seguir y Presentar	**Identifica** los datos y qué va a probar en la demostración de cuerdas iguales, distancias de la circunferencia al centro (radio), longitud del diámetro.	**FASE IV. (ORIENTACION LIBRE)** Se plantean actividades diferentes a las iniciales, el estudiante aplica los conceptos y lenguaje adquiridos (circunferencia, centro, cuerda, arco, radio, diámetro)

argumentos informales, Argumentos deductivos	**Demuestra** el teorema de la tangente perpendicular al radio. **Demuestra** el Teorema de las dos tangentes. Compara diferentes pruebas con un teorema de la tangente perpendicular al radio.	Se plantean problemas que permitan por parte del estudiante establecer diferentes posibles soluciones y combinación de estas: 1. centrándonos: Sobre el centro. 2. Muy cuerdos y cuerdas: Sobre cuerdas iguales. 3. La cuerda más larga. 4. De ladito: Sobre tangentes y secantes. 5. Sobre el Teorema de las dos tangentes. 6. Sobre diámetro perpendicular a una cuerda 7. Sobre cuerdas equidistantes del centro 8. Radio perpendicular a una cuerda. distancia del centro a cuerdas iguales 9. Relación entre la tangente y el Radio. 10. Demostrando el Teorema del Radio y la tangente. FASE V. (INTEGRACION) ✓ los estudiantes adquirieron conocimientos y habilidades nuevos, mediante la Geometría Dinámica comprueban, verifican los postulados, nociones y teoremas planteados.

Tabla 4.3. Construyendo los Niveles de Razonamiento de Van Hiele.

4.1.1 Análisis implementación de la Actividad Exploratoria.

ELEMENTO	RESULTADOS
CIRCUNFERENCIA	Identificación del lugar geométrico con puntos que equidistan
NIVEL (1) DE	de un punto fijo llamado centro.
VISUALIZACION	Centro como punto fijo, confusión de si pertenece a la
FASE I. (INFORMACION).	circunferencia.
	No distinción entre círculo y circunferencia.
	No se interpreta el concepto de circunferencias concéntricas.
	Trazan circunferencias semejantes, no varían el radio (no el claro éste elemento).
CUERDA-DIAMETRO	Identifican el segmento de línea recta como cuerda, uniendo
NIVEL (1) DE	dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
VISUALIZACION	Identifican que el centro no pertenece a la circunferencia, por
FASE II. (ORIENTACION	lo tanto el segmento trazado desde el centro a la
DIRIGIDA)	circunferencia no es cuerda (se tiene una noción más clara
NIVEL (2) ANALISIS	del concepto de radio).
FASE III.	Noción preliminar de la tangente, visualizan e interpretan un
(EXPLICITACION)	solo punto de corte con la circunferencia.
	Trazan cuerdas que pasan por el centro, identificando el diámetro.
	Relacionan el radio y la circunferencia, identificando que el diámetro equivale al doble de la longitud del radio, y la condición de pasar o contener el centro.
ARCO, NIVEL (1) DE	Establecen la relación entre cuerda y arco.
VISUALIZACION, NIVEL	Visualizan y diferencian el segmento de arco (línea curva) y el
(2) ANALISIS	segmento de cuerda (línea recta).
FASE II. (ORIENTACION	Confunden el arco con el área generada entre la cuerda y el
DIRIGIDA)	arco.
ELEMENTOS DE LA	Identifican los elementos de la circunferencia, utilizando
CIRCUNFERENCIA	símbolos y lenguaje relacionados con los conceptos.
NIVEL (1)	La representación de los elementos evidencia apropiación del
VISUALIZACION,ANALISIS	concepto y su diferenciación.

Tabla 4.4 Análisis implementación de la actividad exploratoria.

En el caso de el círculo y la circunferencia es necesario realizar un trabajo anterior para afianzar los conceptos, los aprendizajes vinculados a los conceptos de círculo y circunferencia son complejos y abarcan varios años de escolaridad (Sadovsky, 1998), otros autores la establecen la diferencia argumentando que la circunferencia es el número que mide la longitud del círculo (Clements,1998), o definen a la circunferencia como la curva y el círculo como la superficie encerrada por la circunferencia (Roanes,1980). La pregunta 6 tiene como objetivo indagar si el estudiante aplica los diferentes Niveles de Razonamiento y las Fases de Aprendizaje, se introduce el sistema cartesiano, los ejes de referencia y los diferentes elementos y propiedades de la circunferencia trabajadas en las preguntas anteriores. Se espera que el estudiante establezca las relaciones entre los elementos, ya sea circunferencia, cuerda, diámetro, radio, arco. (Nivel 1). Si el estudiante establece comparaciones explicitas de formas, reconoce las propiedades y describe las propiedades. (Nivel 2). Si combina las propiedades para construir la figura, acepta definiciones equivalentes, construye y corrobora el concepto. (Nivel 3). Las evidencias del proceso de trabajo con los estudiantes se muestran en el **ANEXO 3**.

4.2 Construyendo los Niveles de Razonamiento. Actividades 2-6.

Se diseñaron e implementaron las Actividades 2, 3,4, 5 y 6 utilizando el Software Regla y Compás y los Niveles de Van Hiele para evidenciar el avance en la apropiación de los conceptos. (**ANEXO 2**). Aplicando el Modelo de Van Hiele mediante la Visualización y la Geometría Dinámica, se seleccionaron de manera aleatoria 5 de los 35 estudiantes del grupo de la actividad exploratoria y se aplicaron en el Aula las 5 guías, evidenciando los siguientes resultados en la construcción de los conceptos de circunferencia, cuerda, arco, diámetro, secante, tangente, paralelismo, perpendicularidad, centro, equidistantes, demostración de Teoremas, así como los atributos de los objetos matemáticos con el Software Regla y Compás, tamaño, color, longitud, etiqueta, texto, apariencia, grosor.

Debe aclararse que en medio de la aplicación se halló que algunas de las instrucciones para las construcciones eran confusas o no daban la suficiente información para que el estudiante hiciera un razonamiento correcto, situación que debió corregirse en medio de la puesta en marcha al grupo de estudiantes a los que se le aplicó la prueba para la construcción de los Niveles de Razonamiento.

Para el análisis de los Niveles de razonamiento de Van Hiele, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

4.2.1 Análisis implementación Construyendo los Niveles de Razonamiento

NIVEL RAZONAMIENTO	ANALISIS RESULTADOS , FASES DE ORIENTACION
NIVEL ANALISIS (2) **ESTUDIANTE 1** **Centrándonos: Sobre el centro.**	FASE I. (INFORMACION): Reconoce los comandos básicos del software R y C. Interpreta correctamente las instrucciones. Identifica en centro como punto fijo. Reconoce que el centro no hace parte de la circunferencia. FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA): Identifica el punto medio de la cuerda, no hay claridad del concepto perpendicularidad, lo resuelve aplicando el comando de recta perpendicular a un punto. Descubre trazando perpendiculares a las cuerdas, que las primeras pasan siempre por el centro. FASE III. (EXPLICITACION): Al trazar perpendiculares a las diferentes cuerdas y medir las distancias del centro a dichas cuerdas, halla la regularidad de que pasan por el centro. Intercambia conceptos con sus compañeros, específicamente la perpendicularidad y su trazado. Define con sus propias palabras el centro.
NIVEL ANALISIS (2) **ESTUDIANTE 1** **Muy cuerdos y cuerdas: Sobre cuerdas iguales.**	FASE I. (INFORMACION): Utiliza correctamente los comandos del software R y C. Identifica cuerdas congruentes y asigna los atributos de longitud de un segmento. FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) Define cuerda, mide su longitud como atributo apoyándose en el software. FASE III. (EXPLICITACION): Comprende el concepto de perpendicularidad, punto medio, concluyendo que la menor distancia entre el centro y la cuerda es la perpendicular. Compara la longitud de diferentes cuerdas, evidenciando la relación de cuerdas congruentes y su distancia al centro. FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Sigue de manera coherente las instrucciones, identificando los elementos de

	cuerda, punto medio, perpendicularidad y distancia. FASE V. (INTEGRACION): Establece semejanza entre cuerdas y congruencia. Identifica que cuerdas iguales equidistan del centro.
NIVEL ANALISIS (2) **ESTUDIANTE 2** **Sobre tangentes y secantes**	FASE I. (INFORMACION): Identifica los dos puntos de intersección de la secante con la circunferencia. Asignando el atributo “mover punto” verifica que la secante siempre corta en dos puntos. FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) : Reconoce la secante, identificando los dos puntos de intersección con la circunferencia. Reconoce la tangente, identificando un punto de intersección con la circunferencia. FASE III. (EXPLICITACION): Relaciona punto de tangencia con la recta tangente (no es claro el concepto de recta, lo confunde con segmento). Diferencia secantes de tangentes. FASE IV. (ORIENTACION LIBRE):Intercambia formas de diferentes de hacer la construcción con sus compañeros. FASE V. (INTEGRACION): Utilizando el atributo de “mover punto” y sobre la construcción de la recta tangente con el punto de tangencia, deduce que efectivamente solo cortara en un punto a la circunferencia.
NIVEL DEDUCCION FORMAL (4) **ESTUDIANTE 2**	FASE I. (INFORMACION):Identifica la propiedad de la tangente a la circunferencia y su perpendicularidad con el radio Pese a la ayuda de las instrucciones en la construcción, no garantiza que las dos tangentes sean congruentes. FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) :Existe bastante confusión en la explicitación de las instrucciones, los procedimientos indicados en la guía no muy claros, hecho que generó en el estudiante incertidumbre al momento de inferir el resultado. FASE III. (EXPLICITACION): No puede trazar las tangentes a la circunferencia, se le dificulta ubicar el punto de

Sobre el Teorema de las dos tangentes.	contacto, de manera errónea ubica un punto por fuera y no puede verificar que la longitud de los radios perpendiculares a la tangente sean iguales. FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Indaga con sus compañeros e intercambian propuestas, pero aplica de manera incorrecta la propuesta de ellos para garantizar que la distancia del centro a la tangente sea igual. FASE V. (INTEGRACION): Al no poder corroborar mediante la construcción las distancias del centro al punto de tangencia (radio), se le dificulta llegar a una conclusión frente al teorema. No identifica las propiedades, llega a conjeturas aisladas por las instrucciones dadas en la guía de trabajo.
NIVEL ANALISIS (2)	FASE I. (INFORMACION): Reconoce el diámetro como la cuerda más larga, incluyendo que necesariamente para por el centro. Sigue correctamente las instrucciones de la guía, identificando el concepto de perpendicularidad. FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) : Identifica el concepto de perpendicularidad, lo traza correctamente, no utiliza el concepto de mediatriz, traza la perpendicular al segmento $\overline{AB}$ utilizando el comando recta perpendicular a un segmento desde un punto.
ESTUDIANTE 3 Sobre diámetro perpendicular a una cuerda	FASE III. (EXPLICITACION): Utiliza de manera acertada los conceptos de cuerda, diámetro, perpendicularidad, segmentos congruentes. Mide correctamente los segmentos congruentes de la cuerda cortada por la mediatriz (aclarando que no trabajó el concepto de mediatriz sino el de recta perpendicular del centro al punto medio de la cuerda $\overline{AB}$). FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Encuentra el centro como referencia para la trazar la perpendicular al punto medio de la cuerda. FASE I. (INFORMACION): Intenta seguir las instrucciones, se le dificulta ubicar los puntos de centro de las semicircunferencias, no garantiza que sean equidistantes al centro de la circunferencia.
NIVEL ANALISIS (2)	FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA) : Conoce los conceptos de semicircunferencia, de cuerda, medida de la longitud de la cuerda pero no garantiza una correcta construcción.

ESTUDIANTE 3

Sobre cuerdas equidistantes del centro

FASE III. (EXPLICITACION): No puede interpretar el concepto de distancia de un punto (en éste caso el centro) a un segmento (las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$) como la medida de la distancia de la perpendicular al punto medio de la cuerda.

FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): No llega a la conclusión esperada, al no garantizar una construcción adecuada, las longitudes de las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, son diferentes, por la tanto la distancia del centro a éstas también lo es, no puede verificar el enunciado.

FASE I. (INFORMACION): Identifica los conceptos perpendicular, cuerda y el segmento $\overline{OP}$,que une el centro con la cuerda perpendicular al radio, es la ***distancia centro-cuerda.***

Identifica el radio de la circunferencia, como distancia del centro a cualquier punto sobre la circunferencia.

NIVEL ANALISIS (2)

ESTUDIANTE 4

Radio perpendicular a una cuerda.

FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA): Con el cuadrado inscrito en la circunferencia, identifica los puntos medios de los lados del cuadrado y mide correctamente las distancias de dichos puntos al centro.

FASE III. (EXPLICITACION):Puede demostrar mediante la construcción y la medida de los segmentos que las distancias d_1, d_2, d_3 y d_4 son iguales.

Verifica que los segmentos $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$, utilizando los atributos del segmento y los comandos del software

FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Reconoce que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son congruentes.

Verifica que la distancia del centro a cuerdas iguales es la misma.

FASE I. (INFORMACION): Identifica el punto de tangencia, la tangente, el radio de contacto (radio que tiene por extremo exterior el punto de contacto P).

FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA): Sigue de manera correcta las instrucciones, aplicando de manera ordenada

NIVEL ANALISIS (2)	los comandos del software, identifica que solo existe un radio perpendicular a una recta tangente a la circunferencia definida. FASE III. (EXPLICITACION): Reconoce que una vez trazado el radio de contacto con la tangente, no es posible trazar otro radio a la recta tangente a la circunferencia.
ESTUDIANTE 4 Relación entre la tangente y el Radio	FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Demuestra que el menor segmento que une un punto con una recta es el que es perpendicular a ella, utilizando los comandos del software y los atributos de los elementos, mide la distancia del centro a la recta perpendicular verificando que es el radio, visualiza la perpendicularidad radio-tangente, no mide dichos ángulos, pues no se le solicita. Mediante construcción verifica que las tangentes a diámetro son paralelas.
DEDUCCION FORMAL (4)	FASE I. (INFORMACION): Reconoce el Teorema de la suma interna de los ángulos de un triángulo. Identifica los triángulos isósceles. Se familiariza con el lenguaje de la proposiciones para demostrar el Teorema FASE II. (ORIENTACION DIRIGIDA): Sigue de manera secuenciada las instrucciones y los comandos del software Aplica el comando “mover punto” al punto asignado y arrastra dicho vértice. FASE III. (EXPLICITACION): Tiene la capacidad de visualizar y verificar como cambian los ángulos internos del triángulo isósceles manteniendo la congruencia de dos de sus lados y ángulos.
ESTUDIANTE 5 Demostrando el Teorema del Radio y la tangente.	Identifica el punto de tangencia, así como la perpendicularidad del radio y la recta tangente a la circunferencia. FASE IV. (ORIENTACION LIBRE): Intercambia con sus compañeros las suposiciones frente a lo que sucedería con los ángulos una vez se arrate el vértice al que se le asigno la propiedad de “mover punto”. FASE V. (INTEGRACION): Siguiendo el procedimiento y las instrucciones de manera inductiva establece conjeturas, visualiza los ángulos, mide su amplitud, identifica la perpendicularidad entre la tangente de la circunferencia y el ángulo, demostrando mediante construcción el Teorema.

Tabla 4.5. Análisis implementación de la actividad Construyendo los Niveles de Razonamiento.

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

- El diseño de la Unidad Didáctica tenía como objetivo identificar el Nivel de Razonamiento de Van Hiele en los estudiantes mediante la visualización y la geometría dinámica, transitando del Nivel de Visualización hacia el Nivel de Análisis y de Deducción, desarrollando los elementos básicos de la circunferencia: cuerda, radio, diámetro, secante, recta tangente, perpendicularidad, teorema de las tangentes y Teorema de la perpendicular radio-tangente. Se concluyen los siguientes aspectos a tener en cuenta:
  1) En la actividad exploratoria se manifiesta un Nivel de Visualización elevado, reconocen los objetos matemáticos y los comparan.
  2) El Nivel de Análisis es deficiente, no se establecen nociones o definiciones, elementos empíricos y pobreza en el lenguaje matemático.
  3) No parece evidenciado claramente el Nivel de Deducción, salvo en un par de estudiantes que se esfuerzan por sustentar una definición de manera coherente matemáticamente y con lenguaje y símbolos matemáticos.

- En la actividad de construcción de los Niveles de Razonamiento se evidencia el trabajo previo para el manejo de los comandos del software en la construcción de los conceptos, sin embargo es evidente que las instrucciones facilitan el proceso de asimilación de los conceptos, en aquellos casos en los que el protocolo no era claro o confuso, los estudiantes presentaron serias deficiencias pese a la herramienta didáctica de la geometría dinámica. Aquellas instrucciones coherentes y ordenadas permitieron el tránsito de Nivel de Visualización al de Análisis, aumentando los conocimientos de los estudiantes frente a los conceptos y permitiendo la inferencia de otros gracias a la práctica y a la posibilidad del tanteo del error según la construcción solicitada. En cuanto al Nivel de Deducción Informal, del grupo piloto de 5 estudiantes, dos de ellos presentaron habilidades muy superiores a las reflejadas en la actividad exploratoria, la

herramienta didáctica de R y C permitió conjeturar hipótesis y al mismo tiempo corregir posibles intuiciones al hora de realizar la construcción.

- La utilización del Modelo de Van Hiele permitió hacer un seguimiento de los niveles de interpretación de los objetos matemáticos y sus propiedades (circunferencia y elementos básicos), diferenciando según las habilidades y competencias de cada estudiante, pero a su vez integrando una serie de actividades que les facilitan el tránsito entre Niveles de Razonamiento y Fases de Aprendizaje. Es claro que la geometría dinámica permite la manipulación de los objetos y sus atributos, de tal manera que el estudiante puede establecer hipótesis y verificarlas en la práctica, permitiendo inclusive que el error sea reto para el avance en el conocimiento del objeto y su definición.
- Tanto los Lineamientos como los Estándares en Matemáticas orientan el desarrollo del pensamiento espacial mediante la construcción y manipulación de las representaciones mentales de los objetos del espacio, sus relaciones y las diversas transformaciones en la interacción de dichos elementos, sin embargo la fragmentación del pensamiento matemático en el currículo limita la potencialidad de la geometría para construir razonamiento matemático. Es necesario generar la discusión para recuperar y darle el papel fundamental de la geometría en la escuela, dentro del Plan de Estudios y su relación con otras formas de pensamiento matemático.

- Apoyarse en los recursos informáticos, específicamente en el software Regla y Compás da relevancia a los aspectos visuales y su necesario Proceso de Visualización convierte el espacio didáctico en un aprendizaje significativo que potencia habilidades y competencias matemáticas. Utilizando la Geometría Dinámica y activa se puede acercar el conocimiento geométrico a los estudiantes, desarrollando los contenidos curriculares, resolviendo situaciones-problema e inclusive profundizando conocimientos que permitan el desarrollo de habilidades y competencias no solo argumentativas sino propositivas.

- La importancia del círculo y la circunferencia no sólo es propiedad exclusiva de la geometría en sus diferentes formas de clasificación a través de la historia y según los avances en la teoría del conocimiento (epistemología), ha sido importante inclusive para el desarrollo de avances tecnológicos o la forma de ver el mundo. Ninguna de las grandes culturas o épocas de la humanidad se ha escapado a la seducción y armonía de estos dos elementos, desde el terreno filosófico hasta el religioso, el círculo y la circunferencia han estado siempre en el centro de la controversia, la visión Aristotélica del mundo, Platón y su modelo de Universo, Ptolomeo y sus aportes, Copérnico y su transformación del modelo cosmológico, Kepler y sus leyes, las discusiones del siglo XIX entre los defensores de la geometría y sus contradictores. Cada avance en el concepto de la circunferencia, permitió saltos en la forma de interpretar la geometría, inclusive en ocasiones, el mundo.
- En el aspecto disciplinar se evidenció que la propuesta pedagógica del trabajo más allá de generar un sistema axiomático riguroso, genero las estrategias didácticas para inducir al estudiante al descubrimiento de las propiedades y elementos de la circunferencia, según los diferentes Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele.

5.2 Recomendaciones

- Luego del Análisis de los resultados obtenidos se recomienda para futuras implementaciones en la Unidad Didáctica lo siguiente:

1) Destinar mayor tiempo para el seguimiento del proceso, tanto del grupo inicial en la actividad exploratoria, como del grupo piloto al que se le aplico la actividad de Construcción de los Niveles de Van Hiele.

2) Replantear algunas de las instrucciones de las dos actividades, es necesario ajustar el lenguaje y en algunos casos la coherencia entre cada instrucción, algunas generaron confusión entre los estudiantes por falta de claridad.

3) Implementar en el currículo de la asignatura de Geometría un eje temático transversal de geometría dinámica que permita su manipulación y manejo cotidiano, no sólo en la circunferencia, sino en diferentes elementos de la geometría plana.

4) Se hace necesario el trabajo en el aula respecto a la forma de orientar geometría axiomática que permita construir formas de razonamiento más formales, como ejemplo en las actividades se evidencia que los estudiantes manejan el comando de medir algún elemento, cuerdas iguales por ejemplo, sin embargo el comando genera el resultado, pero el estudiante no es capaz de demostrar o inferir de manera formal el porqué son elementos congruentes.

5) El trabajo invita a la comunidad académica, específicamente a los docentes con trabajo en aula, a que desarrollen propuestas innovadoras, didácticamente acordes a los Niveles de Razonamiento de nuestros estudiantes. La construcción de guías exige bastante conocimiento frente al tipo de pregunta o actividad a explorar, se demostró que algunas de las guías presentaban falencias en la forma de inducir al descubrimiento, hecho que se corrigió en medio la práctica y la aplicación de las guías didácticas, aprender del error también es de maestros.

A. Anexo: Actividad 1. Elementos de la Circunferencia

COLEGIO CIUDADELA EDUCATIVA BOSA IED

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS. GRADO 9°

ACTIVIDAD 1. ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVO: Identificar los Niveles de Razonamiento de Van Hiele en los elementos de una circunferencia

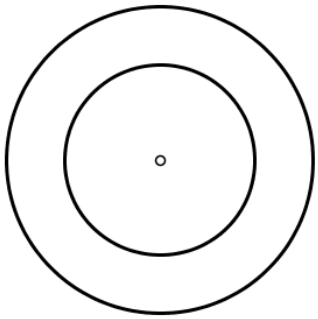
DESCRIPCION: Las actividades propuestas destacan la capacidad del estudiante en el reconocimiento y análisis de los elementos de una circunferencia
MATERIALES: Lápiz, Regla, Compás
NOMBRE:_____CURSO_____

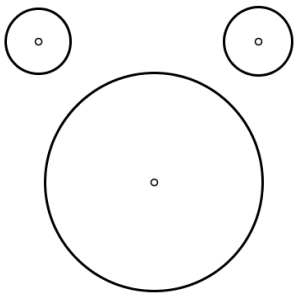
INSTRUCCIONES

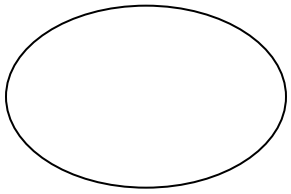
1. Una circunferencia cumple con la siguiente condición:
   Una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P tales que $|OP| = r$

a. Dibuje tres circunferencias diferentes que cumplan con la condición

b. Las siguientes figuras cumplen con la condición planteada?, porqué?



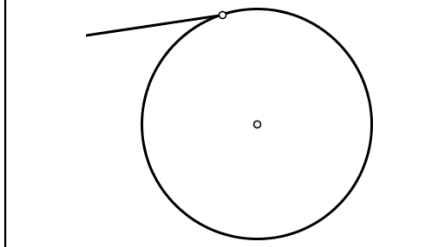


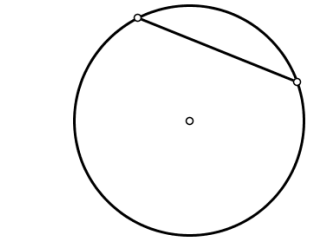


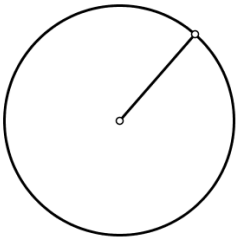
2. Se llama cuerda al segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

a. Dibuje varias **cuerdas** que cumplan con la condición

b. Las siguientes figuras cumplen con la condición de ser **cuerdas**?





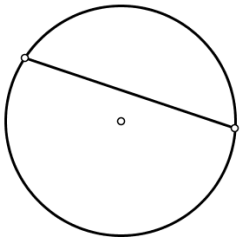


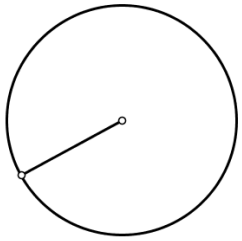
3. Una circunferencia cumple las siguientes condiciones:

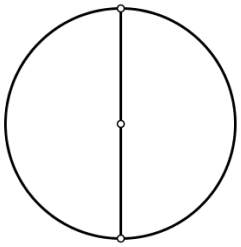
- Posee una cuerda denominada Diámetro que pasa por su centro
- Posee un segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia llamado radio.

a. Dibuje varias **cuerdas** que cumplan con la condición de ser **Diámetro**

b. Las siguientes figuras cumplen con la condición de Diámetro?, porqué?



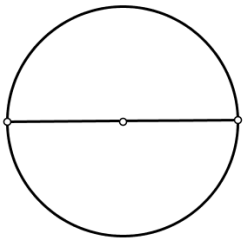


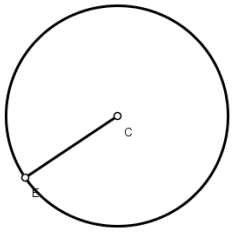


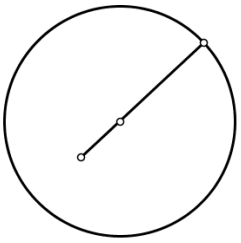
4. Se llama radio al segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia

a. Dibuje varios **segmentos** que cumplan con la condición de ser **radio**

b. Las siguientes figuras cumplen con la condición de **radio**?, porqué?

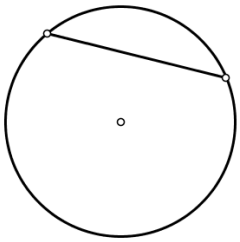


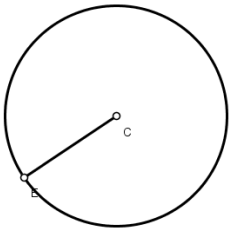


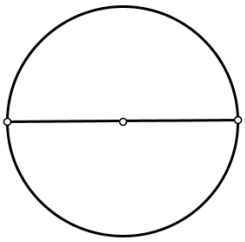


5. Se llama arco a cada una de las partes en las que una cuerda divide a la circunferencia.
   a. Dibuje varios **arcos** en las siguientes **circunferencias**

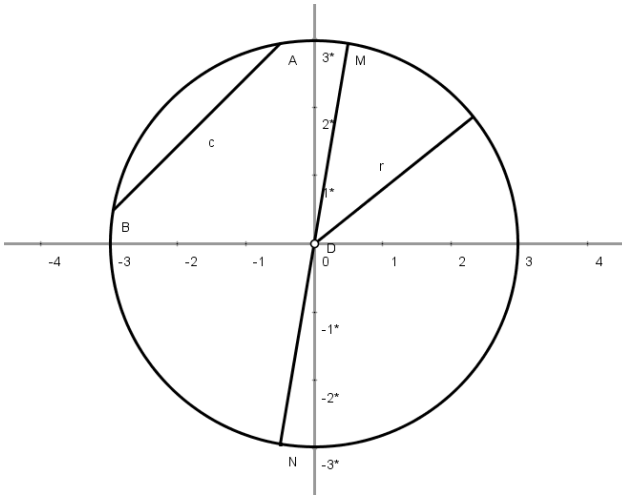
b. Las siguientes figuras cumplen con la condición de tener **arcos**?, porqué?







6. Qué elementos nuevos identifica en el siguiente objeto?



B. Anexo: Actividad 2. Construyendo los Niveles de Razonamiento

COLEGIO CIUDADELA EDUCATIVA BOSA IED
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS. GRADO 9°
ACTIVIDAD 2. SOBRE CENTROS, RADIOS, DIAMETROS, TANGENTES Y PERPENDICULARES EN LA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVO: Comprobar mediante el software Regla y Compás la construcción de algunas propiedades de la circunferencia.

DESCRIPCION: Mediante la visualización y la geometría dinámica, deducir propiedades de la circunferencia que involucran cuerda, radios, diámetros, perpendicularidad, tangencia y centro.

MODELO VAN HIELE. NIVEL ANALISIS (2)
Derivar empíricamente (mediante el estudio de muchos ejemplos) "reglas y generalizaciones"
Descubrir propiedades de una clase familiar de objetos

INSTRUCCIONES

CENTRANDONOS: Sobre el centro

1. Trace una circunferencia con centro en O. Trace una cuerda $\overline{AB}$, luego trace una perpendicular por el punto medio de dicha cuerda.

Por cuales puntos pasa la recta perpendicular?

_____
_____

Los conoce?, como puede definir el centro.

2. Trace dos cuerdas, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, y trace las perpendiculares por los puntos medios de dichas cuerdas.

Dónde se interceptan las dos rectas perpendiculares, como se llama ese punto?

_____

Llame a dicho punto O, nombre los puntos de intersección de las rectas perpendiculares con la circunferencia A y B respectivamente. Mida la distancia de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$. Qué puede inferir? _____

Tome cualquier punto sobre la circunferencia, llámelo C, trace el segmento $\overline{CO}$. Tiene el mismo valor de $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$?_____

Defina el punto O

_____
_____

MUY CUERDOS Y CUERDAS: Sobre cuerdas iguales

1. Trace una circunferencia con centro en O. Trace las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, de la misma magnitud.
2. Mida la distancia del centro O a dichas cuerdas. ¿equidistan del centro?_____
3. La distancia del centro O a la cuerda se puede hacer sobre cualquier punto de ésta?_____
4. Cuál es la menor distancia entre un punto y una recta?_____
5. represéntela como $\overline{MO}$ y mida su distanc_____

Con sus propias palabras, cuál es la menor distancia de un punto cualquiera a una_____

LA CUERDA MAS LARGA:

1. Defina el centro O de la circunferencia.
2. Trace la cuerda $\overline{AB}$ en el cuarto cuadrante, mida su magnitud_____
3. Defina puntos D en el primer cuadrante, E en el segundo cuadrante, F en el tercer cuadrante
4. Asigne la propiedad "mover punto" al punto B
5. Desplace el punto B hasta el punto D, mida la cuerda $\overline{AD}$ _____
6. Desplace el punto B hasta el punto E, mida la cuerda $\overline{AE}$ _____
7. Desplace el punto B hasta el punto F, mida la cuerda $\overline{AF}$ _____
8. Trace una cuerda de A pasando por el centro O hasta interceptar la circunferencia en el punto M, mida la cuerda $\overline{AM}$ _____
9. Cuál de las cuerdas tiene mayor magnitud?_____

Porque?_____ Como se llama la cuerda de mayor longitud de una circunferencia que pasa por el centro_____

Anexo B. **Construyendo los Niveles de Razonamiento**

COLEGIO CIUDADELA EDUCATIVA BOSA IED
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS. GRADO 9°
ACTIVIDAD 3. SOBRE TANGENTES, SECANTES Y PERPENDICULARES EN LA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVO: Comprobar mediante el software Regla y Compás la construcción de algunas propiedades de la circunferencia.

DESCRIPCION: Mediante la visualización y la geometría dinámica, deducir propiedades de la circunferencia que involucran perpendicularidad, construcción de la tangentes a partir del movimiento de las secantes, movimiento de un punto y una recta
MATERIALES: software Regla y Compás.

MODELO VAN HIELE. NIVEL ANALISIS (2)
Identificar y trazar una figura dada una descripción oral o escrita de sus propiedades
Identificar una figura con pistas visuales

INSTRUCCIONES

DE LADITO: Sobre tangentes y secantes

1. Trace una circunferencia con centro en O.
2. Trace una recta que corte en un solo punto a la circunferencia, llame a dicho punto P
3. Asigne a dicho punto la propiedad “mover punto”.
4. Desplace el punto P por la circunferencia. Qué sucede con la recta?_____
   _____

Es posible que corte a la circunferencia en otro punto?_____

5. Trace las cuerda $\overline{AB}$, defina los puntos A y B, extremos del segmento $\overline{AB}$
6. Asigne a dichos puntos la propiedad “mover punto”.
7. Desplace el punto B hacia A y observe el movimiento de la cuerda sobre la circunferencia. En cuantos puntos corta a la circunferencia?_____
   _____
8. Las secantes tocan a la circunferencia en
   _____
9. Las tangentes tocan a la circunferencia en_____
10. Las cuerdas son segmentos de secantes o de tangentes?_____
    _____
11. ¿y los diámetros?_____
12. ¿ y los radios?_____

Sobre el Teorema de las dos tangentes.

1. Trace una circunferencia con centro en O.
2. Trace una recta horizontal que pase por O.
3. Defina el punto P sobre la recta horizontal externo a la circunferencia
4. Trace una semirecta con origen en P que pase por el centro O.
5. Trace una tangente a la circunferencia desde P, por encima de la semirecta horizontal, llame a dicho punto A
6. Trace una tangente a la circunferencia desde P, por debajo de la semirecta horizontal, llame a dicho punto B.
7. Observe y mida los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, trazados desde los puntos de contacto A y B ¿ cuánto miden?_____
8. Observe, compare y mida los ángulos formados por ambas tangentes y el radio_____
9. Observe el triángulo ΔAOP y el triángulo ΔBOP. Mida sus catetos e hipotenusas, sus ángulos internos. Existe alguna semejanza entre los elementos de los dos triángulos?_____

Sobre diámetro perpendicular a una cuerda

1. Trace una circunferencia con centro en O.
2. Trace una cuerda $\overline{AB}$.
3. Trace un diámetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$.
4. Observe y mida los ángulos formados entre la cuerda $\overline{AB}$ y el diámetro $\overline{CD}$
   _____
   _____
   _____
5. Llame E al punto de intersección entre cuerda y diámetro.
6. Observe y mida los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$
   _____
   _____
7. Puede concluir que: un diámetro perpendicular a una cuerda la_____
   _____

COLEGIO CIUDADELA EDUCATIVA BOSA IED
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS. GRADO 9°
ACTIVIDAD 5. RADIO PERPENDICULAR A UNA CUERDA. DISTANCIA DEL CENTRO A CUERDAS IGUALES

OBJETIVO: Construir y medir mediante el software Regla y Compas cuerdas, diámetros y perpendiculares sobre una circunferencia.

DESCRIPCION: Mediante la visualización y el análisis deducir propiedades de la circunferencia que involucran perpendicularidad, cuerdas, radios, distancias.
MATERIALES: software Regla y Compás

MODELO VAN HIELE. NIVEL ANALISIS (2)
Identificar propiedades que pueden ser usadas para caracterizar o contrastar diferentes clases de figuras
Descubrir propiedades de una clase familiar de objetos

INSTRUCCIONES

RADIO PERPENDICULAR A UNA CUERDA. DISTANCIA DEL CENTRO A CUERDAS IGUALES

1. La figura adjunta representa un radio perpendicular a una cuerda. La medida del segmento $\overline{OP}$,que une el centro con la cuerda perpendicular al radio, es la ***distancia centro-cuerda.***

2. Observe los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, cuál de las siguientes opciones es válida?, porqué?
$|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$; $|\overline{AP}| < |\overline{PB}|$; $|\overline{AP}| > |\overline{PB}|$? _____

3. Trace dos cuerdas de igual longitud que $\overline{AB}$, mida las distancias al centro. ¿ Son iguales las distancias de las cuerdas al punto O?_____
_____

4. Utilizando el software Regla y Compas construya la figura 2, con las siguientes condiciones:
a). $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DA}\right|$

b). ¿qué relación existe entre las longitudes d_1, d_2, d_3 y d_4 ?_____ cuanto miden_____
cómo se llama esa distancia?_____
$d_1 + d_3 =$ _____

$d_2 + d_4 =$ _____

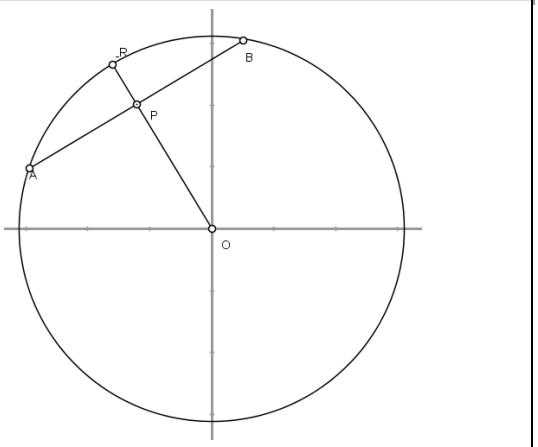
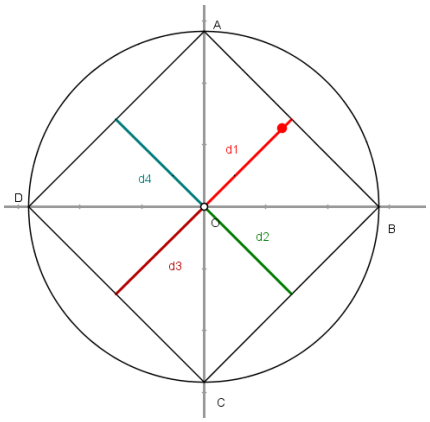


Figura 2



Enuncie con sus propias palabras una propiedad de las cuerdas que siempre se cumpla para toda circunferencia en que se dibujen.

_____

_____

COLEGIO CIUDADELA EDUCATIVA BOSA IED
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS. GRADO 9°
ACTIVIDAD 6. FORMALIZANDO, SOBRE TANGENTES, RADIOS, CUERDAS

OBJETIVO: Formalizar y deducir el Teorema de tangente perpendicular al radio

DESCRIPCION: aplicando las propiedades, nociones y definiciones de la circunferencia, deducir el Teorema de tangente perpendicular al radio
MATERIALES: software Regla y Compás

MODELO VAN HIELE. NIVEL DEDUCCION INFORMAL (3)
Desarrollar y usar definiciones, seguir y Presentar argumentos informales, Argumentos deductivos

INSTRUCCIONES

Relación entre la tangente y el Radio.

1. Trace una circunferencia con centro en O.
2. Trace una recta tangente a la circunferencia y llame P al punto de tangencia.
3. Trace el radio de contacto (radio que tiene por extremo exterior el punto de contacto P)
4. Pueden trazarse más radios de la circunferencia que lleguen a P? porqué de su respuesta?

_____
_____

5. Determine tres puntos Q, R, S de la tangente y trace los segmentos $\overline{O\,Q}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$
6. Cuál de ellos es de menor longitud ? Si los comparamos contra el radio $\overline{OP}$ cuál es el menor?. ¿Existirá otro segmento de recta que una el centro con la tangente que tenga longitud menor al radio $\overline{OP}$?_____

_____

_____

7. Sabemos de geometría básica que:
"el menor segmento que une un punto con una recta es el que es perpendicular a ella". Podemos, entonces según la construcción inferir que:

TEOREMA: El radio es _____*a la*
_____

8. Si trazamos un diámetro, como son entre sí las tangentes de sus extremos?_____
_____

Demostrando el Teorema del Radio y la tangente.

1. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°*
2. Dada la figura 1, el triángulo ΔAOB , isósceles , porqué_____ _____
3. De 1. Y 2. Podemos establecer:
$\angle A+\angle B+\angle AOB=180°$, por ser isósceles
$\angle 2A+\angle AOB=180°$ (1), Diviendo en dos, nos queda

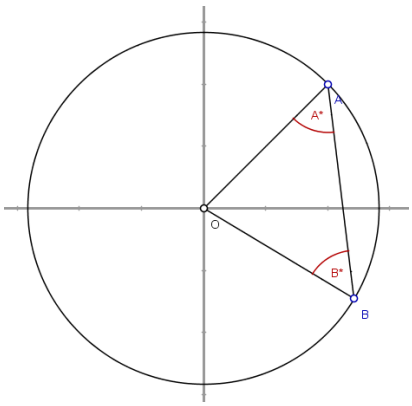
$$\angle A+\frac{\angle AOB}{2}=90° \text{ (2)}$$

4. Asigne la propiedad de "mover punto" a B .
5. Realice tres (3) aproximaciones de B hacia A . Qué sucede con los ángulos $\angle A$ y $\angle B$
_____
_____
6. Qué sucede con la recta secante $\overline{AB}$
_____
_____
7. Cuando el punto B coincida con A , existirá un solo punto de contacto, el A . La longitud $\overline{OB}$ se llama_____y es_____
_____a la tangente.
la medida del ángulo <AOB a qué valor se apróxima?_____
_____
_____
Cuánto vale el $\angle AOB$ en el punto A ?_____
_____
Si reemplazamos $\angle AOB=0°$ en (1), resulta $\angle A=90°$, DEMOSTRANDO:
LA PERPENDICULARIDAD ENTRE LA TANGENTE DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL RADIO .
8. Trace una circunferencia con centro en O .9. Trace una recta que corte en un solo punto a la circunferencia (tangente), llame a dicho punto P
9. Trace el radio de contacto (radio que tiene por extremo exterior el punto de contacto P)

Puede trazar otros radios a la recta tangente_____, porqué?_____
_____

10. Trace los segmentos, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$ que unan el centro y la tangente. De los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$, cual es el menor?_____
11. Sabemos de geometría básica que:

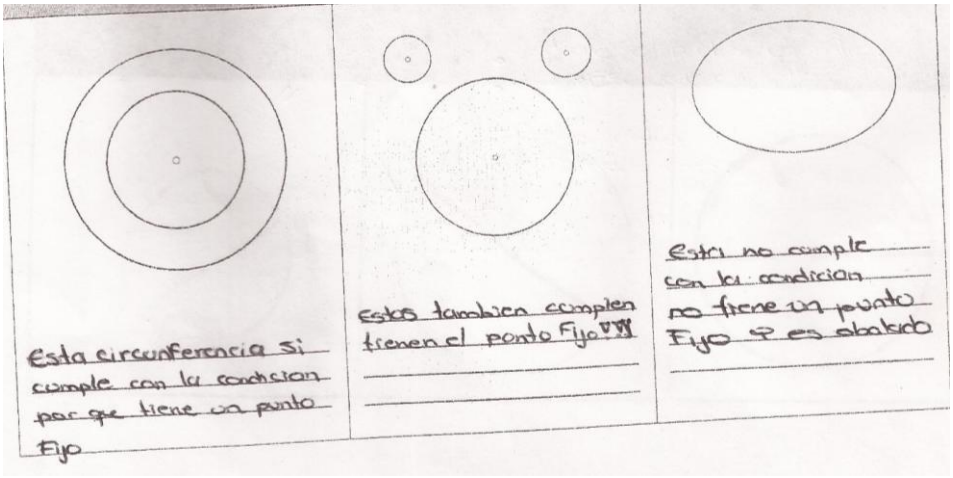
"el menor segmento que une un punto con una recta es el que es perpendicular a ella". Podemos, entonces según la construcción inferir que:
TEOREMA: El radio es _____*a la* _____
_____



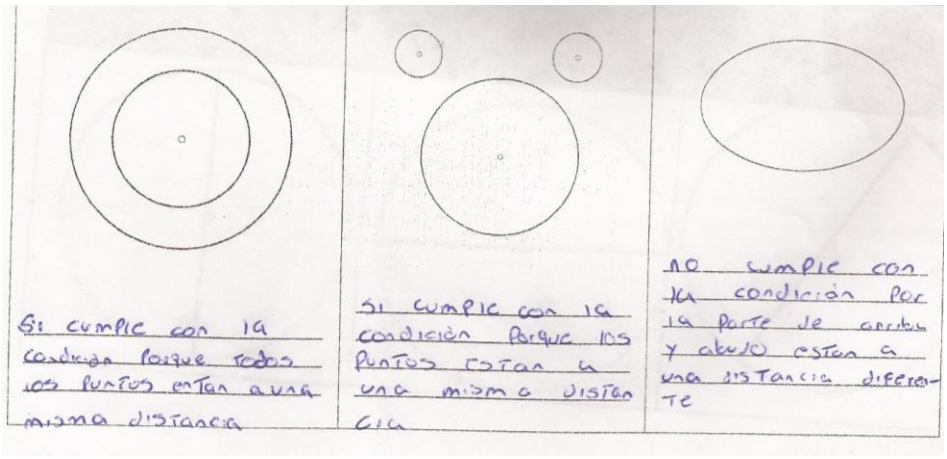
C. Anexo: Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, Actividad Exploratoria

1. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CENTRO

-

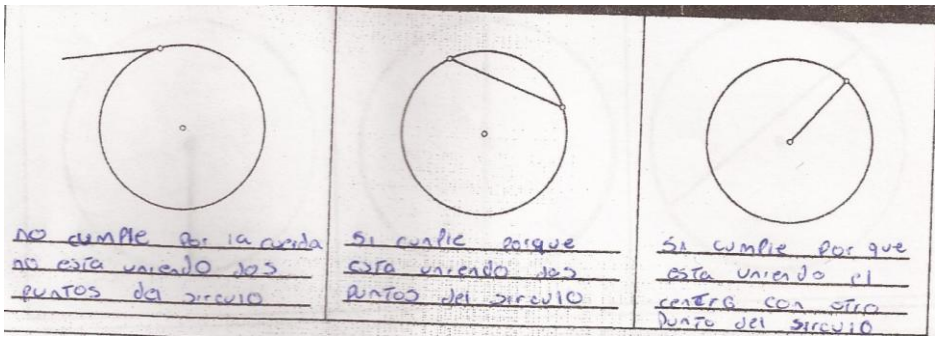


ESTUDIANTE 1.

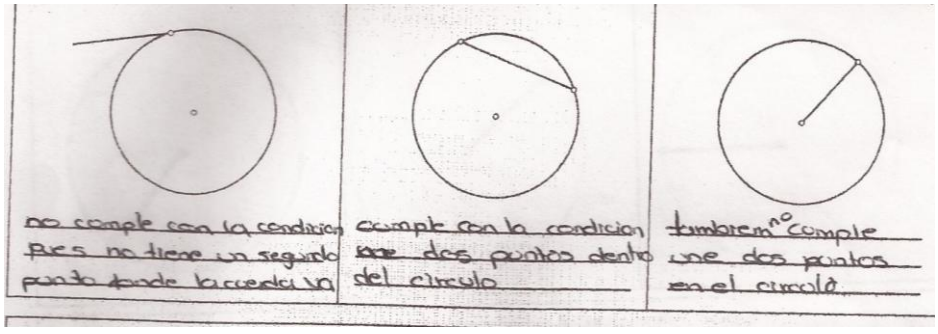


ESTUDIANTE 2

2. SOBRE LA CUERDA

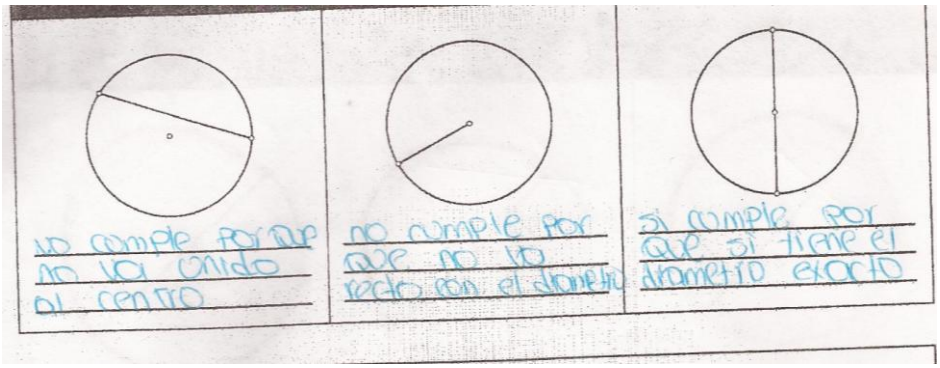


ESTUDIANTE 3

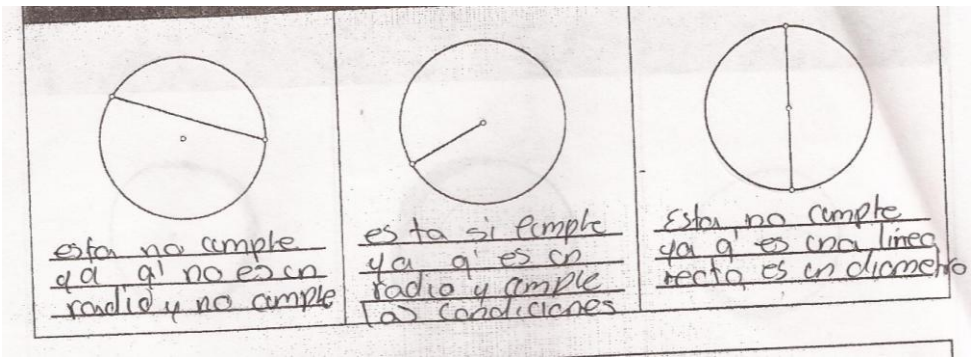


ESTUDIANTE 4

3. SOBRE EL DIAMETRO

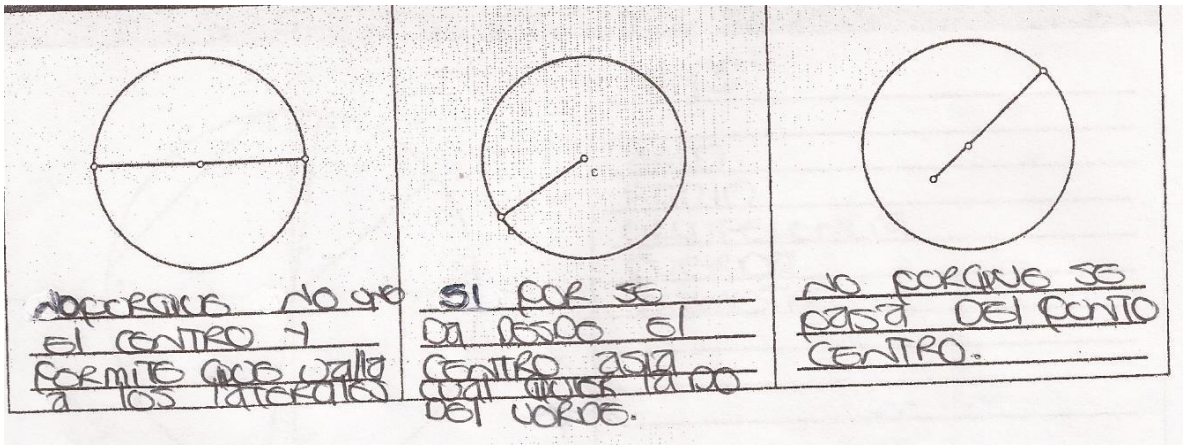


ESTUDIANTE 5

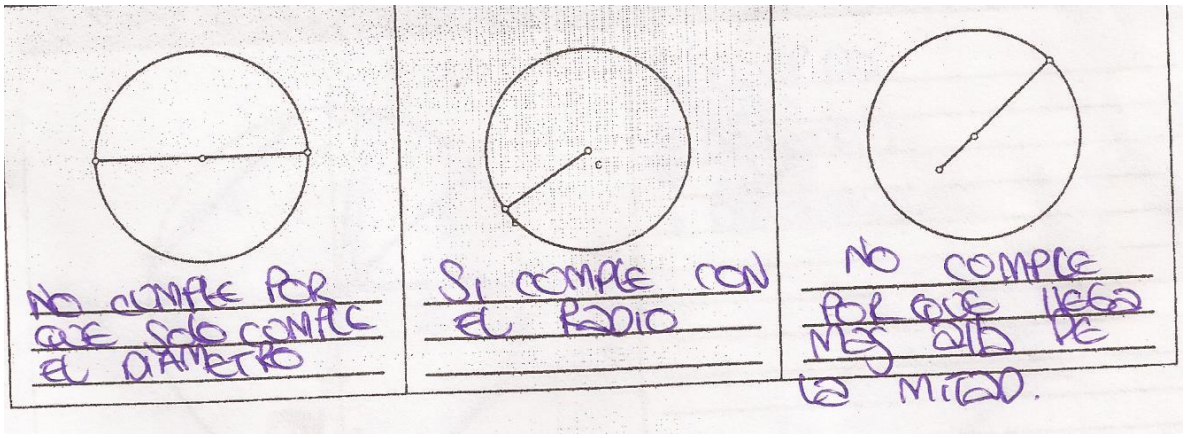


ESTUDIANTE 6

4. SOBRE EL RADIO

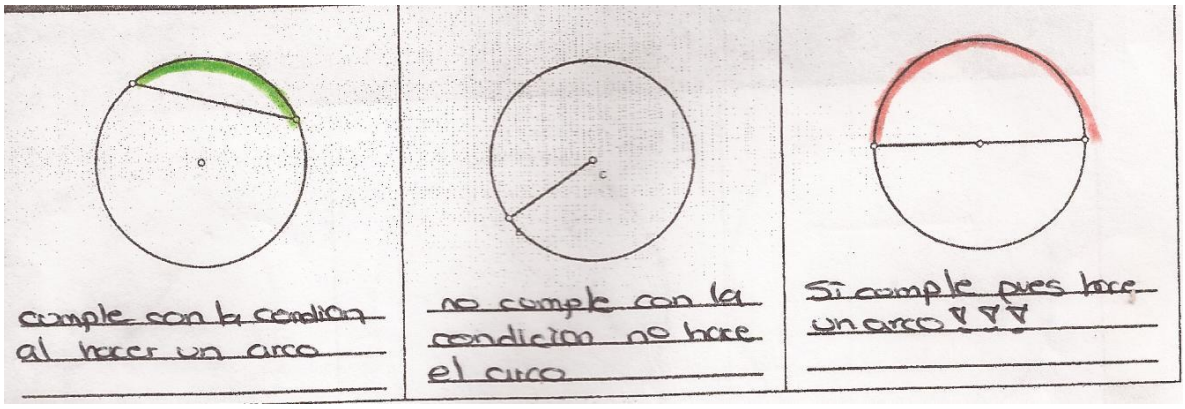


ESTUDIANTE 7

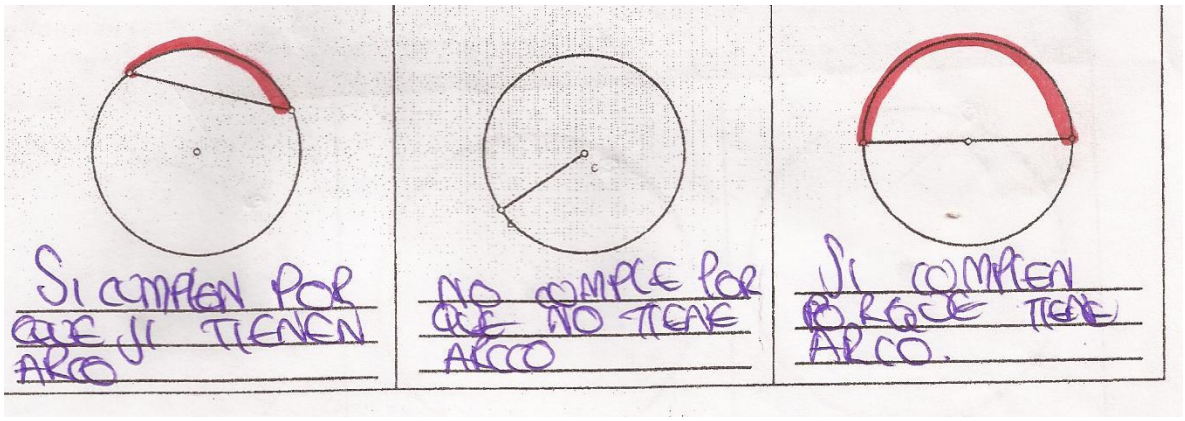


ESTUDIANTE 8

5. SOBRE ARCOS

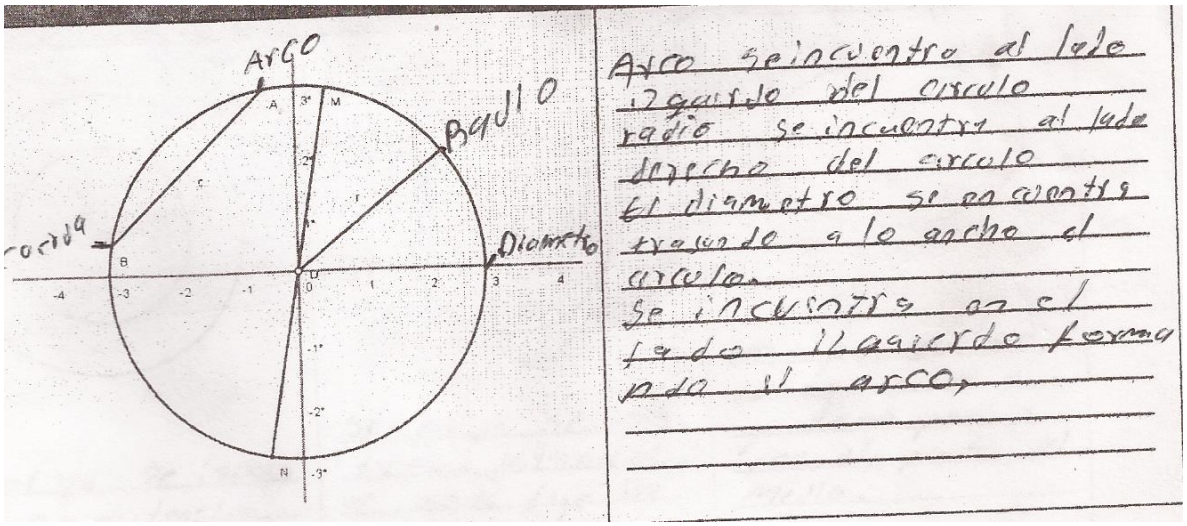


ESTUDIANTE 9

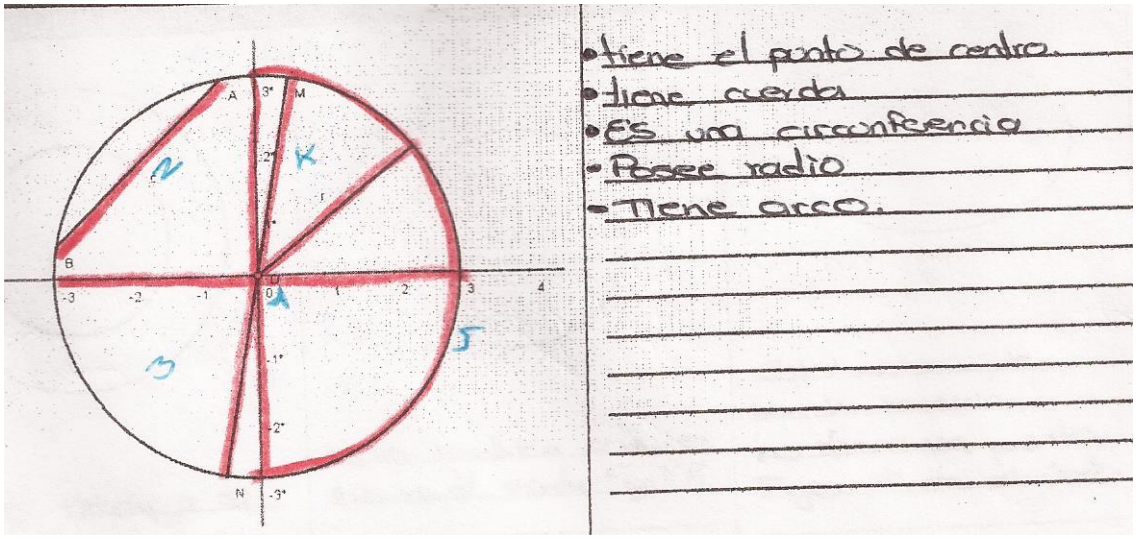


ESTUDIANTE 10

6. SOBRE ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

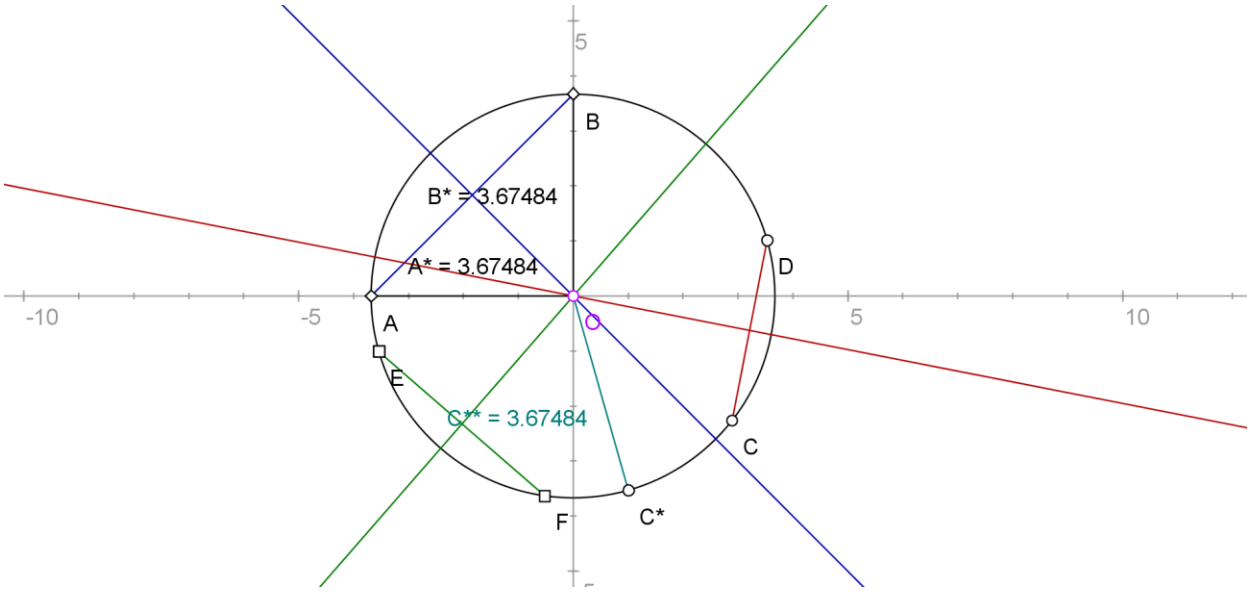


ESTUDIANTE 11



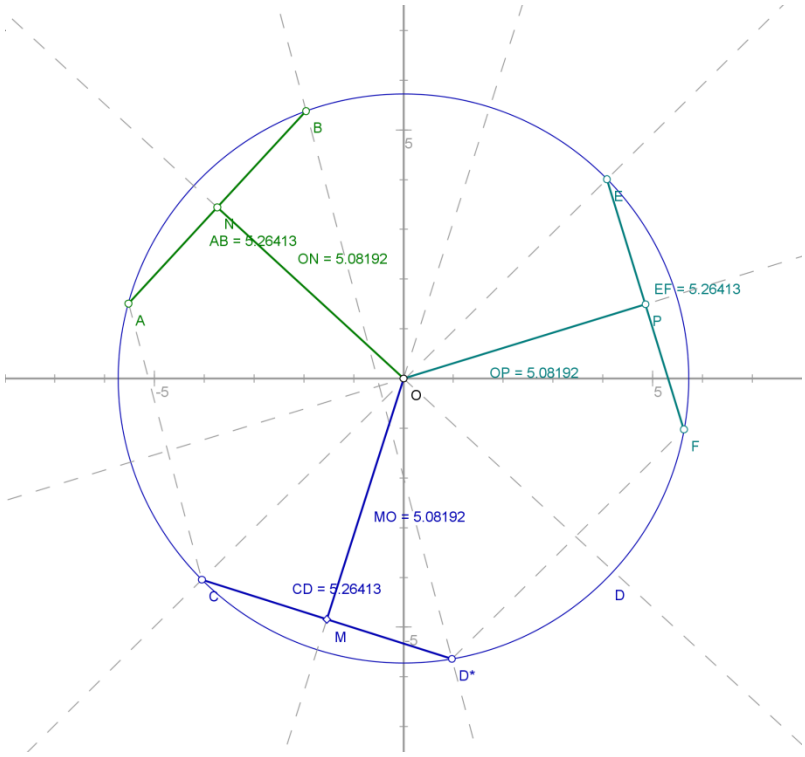
D . Anexo: **Evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, Actividad Construyendo los Niveles de Razonamiento**

1. centrándonos: Sobre el centro.



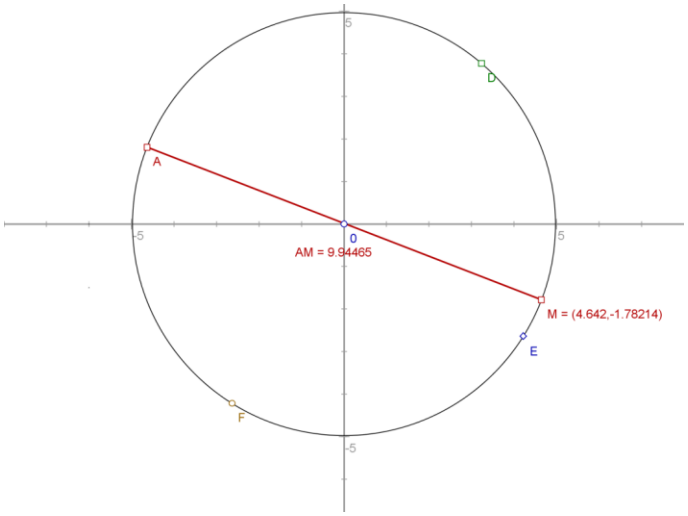
ESTUDIANTE 1.

2. Muy cuerdos y cuerdas: Sobre cuerdas iguales.



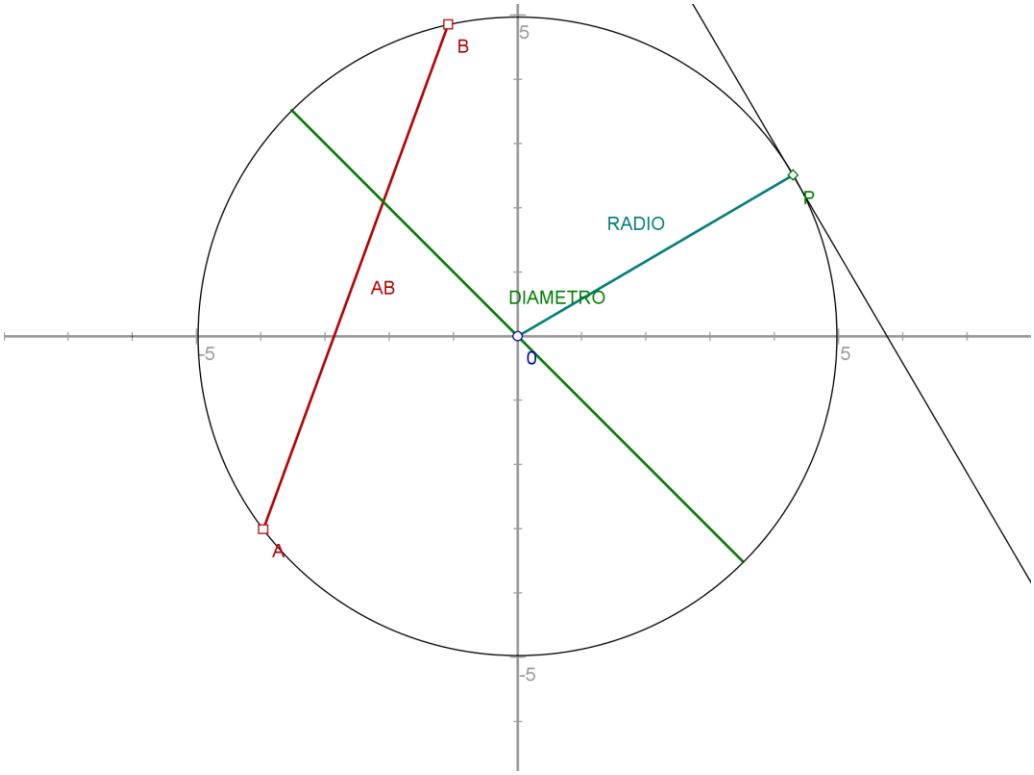
ESTUDIANTE 2.

3. La cuerda más larga.



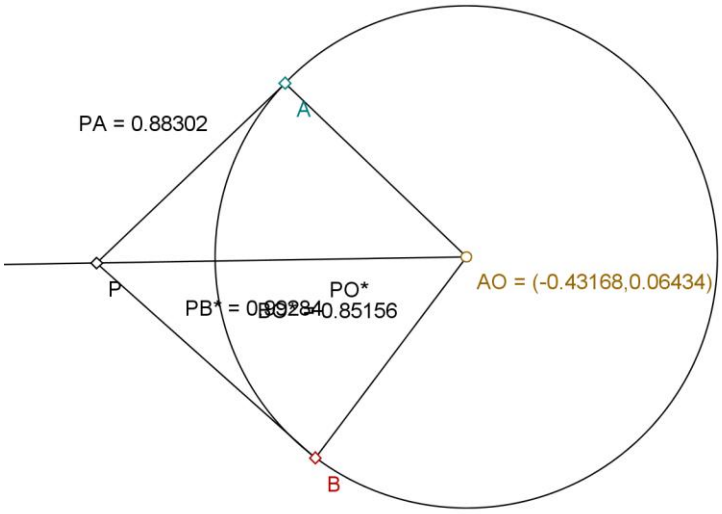
ESTUDIANTE 3.

4. De ladito: Sobre tangentes y secantes.



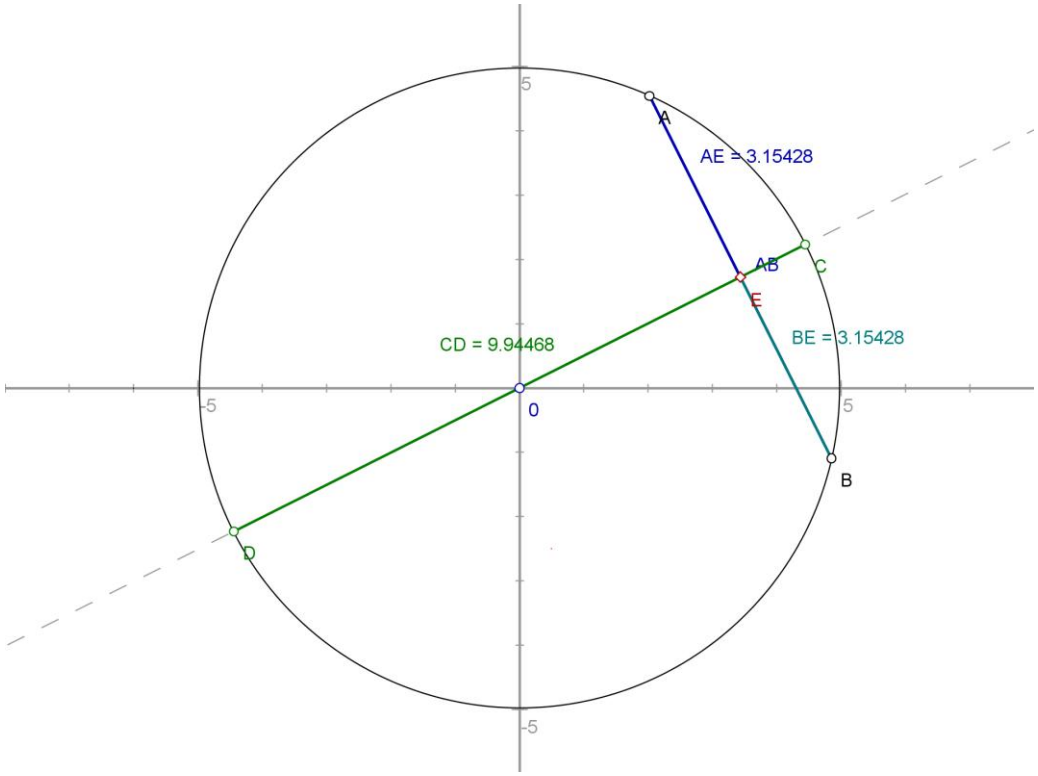
ESTUDIANTE 4.

5. Sobre el Teorema de las dos tangentes.



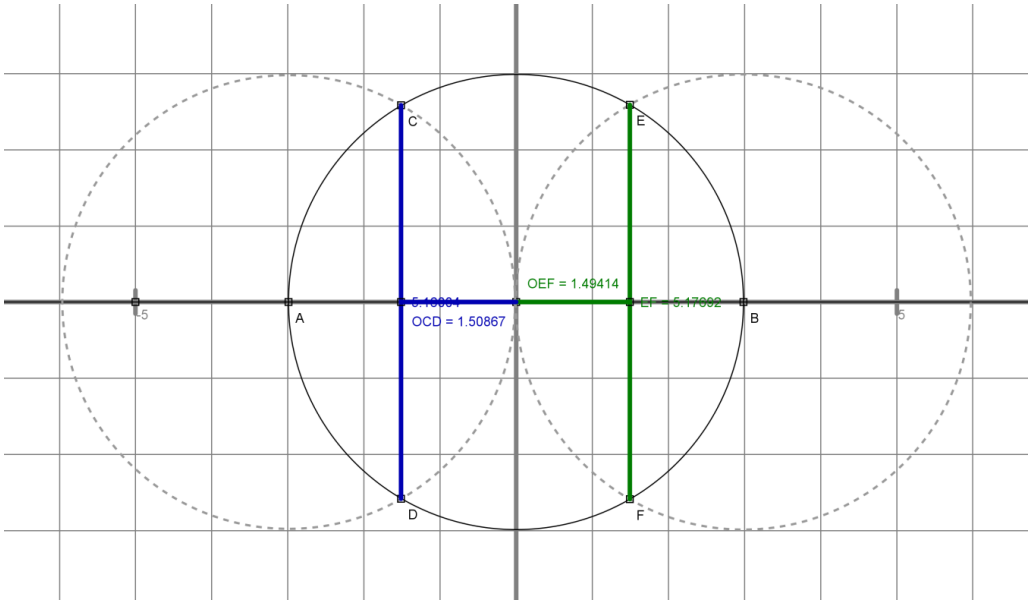
ESTUDIANTE 5.

6. Sobre diámetro perpendicular a una cuerda



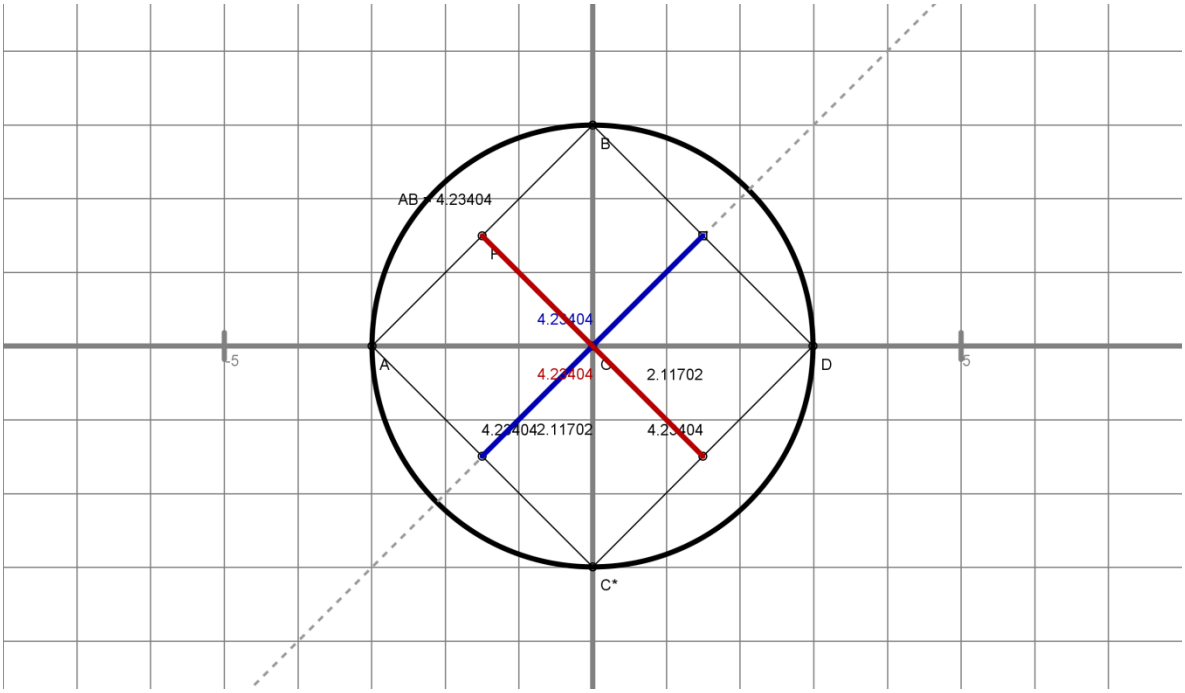
ESTUDIANTE 1.

7. Sobre cuerdas equidistantes del centro

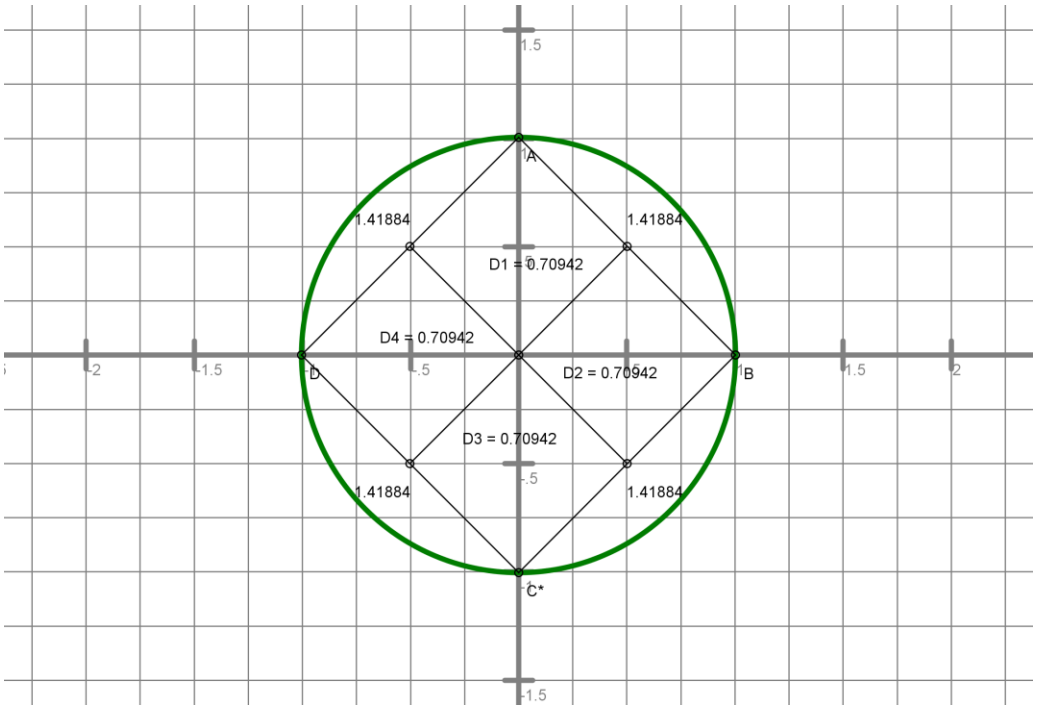


ESTUDIANTE 2.

8. Radio perpendicular a una cuerda. distancia del centro a cuerdas igua

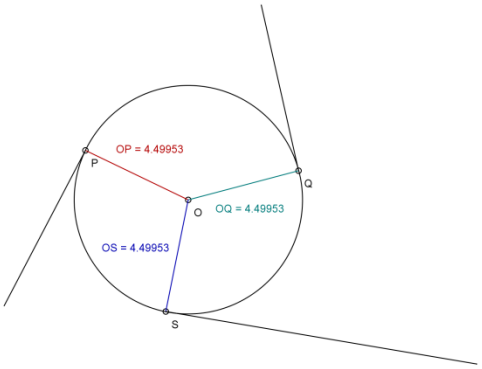


ESTUDIANTE 3.



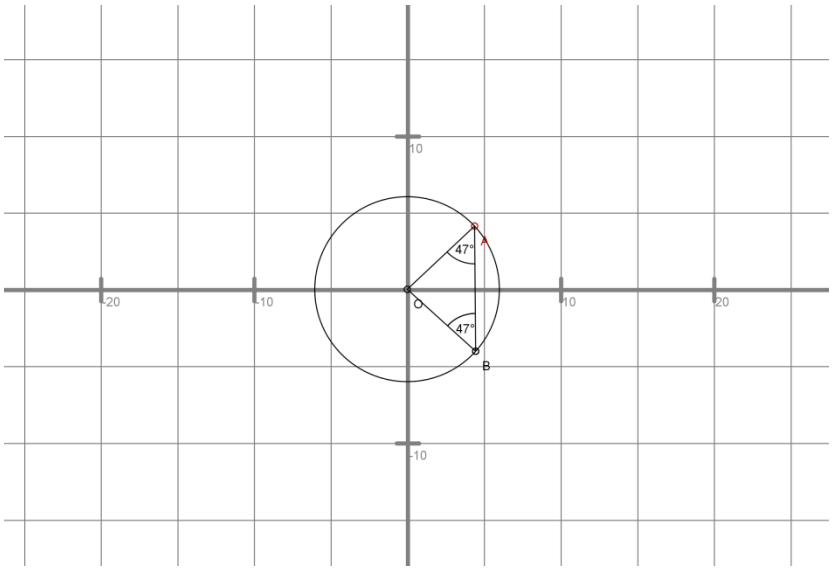
ESTUDIANTE 4.

9. Relación entre la tangente y el Radio.

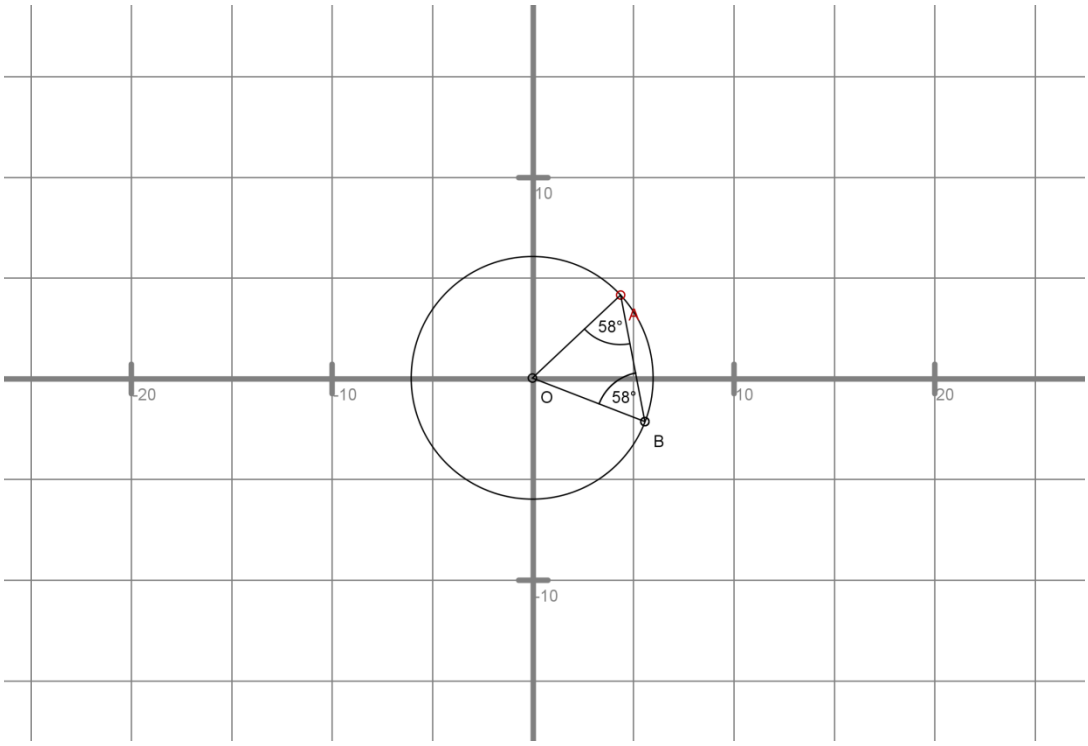


ESTUDIANTE 5.

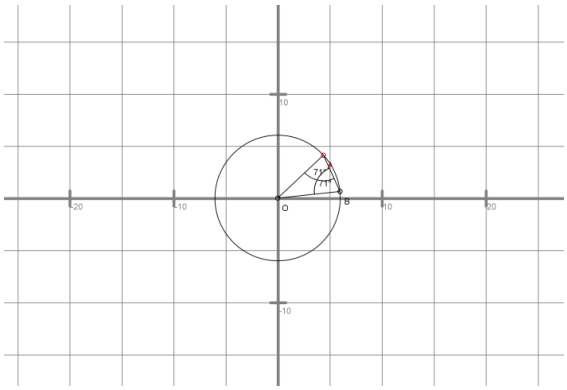
10. Demostrando el Teorema del Radio y la tangente.



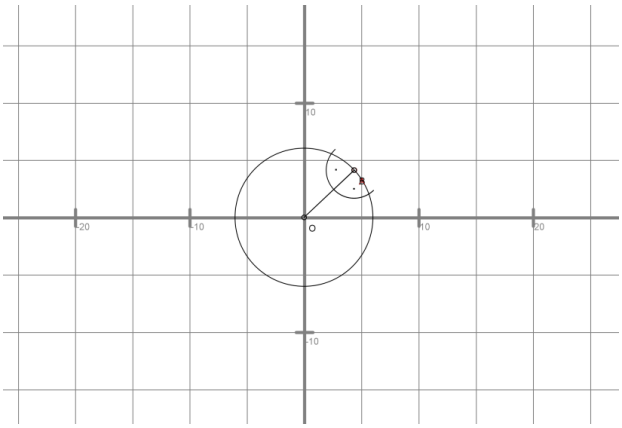
ESTUDIANTE 5. PUNTO 1.



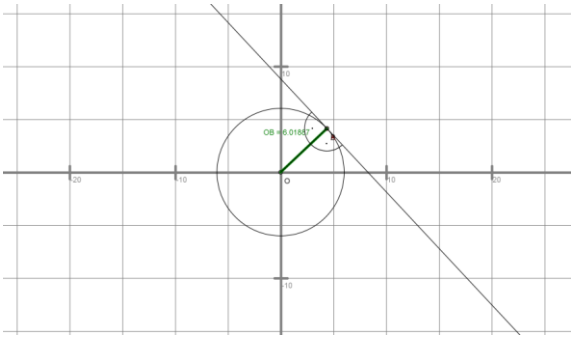
ESTUDIANTE 5. PUNTO 2.



ESTUDIANTE 5. PUNTO 3.



ESTUDIANTE 11. PUNTO 4.



ESTUDIANTE 5. PUNTO 5.

E. Anexo: **Manual de trabajo con el software de Geometría Dinámica Regla y Compás**

C.A.R.

1. INTRODUCCIÓN

CaR (Compass and Ruler) es un programa que simula construcciones geométricas que pueden
ir desde sencillas figuras hasta complicadas construcciones y animaciones.
Está desarrollado en Java (por tanto válido para cualquier Sistema Operativo) por el profesor
René Grothmann de la Universidad Alemana de Eichstätt.
La web oficial de CAR (en alemán) la puedes encontrar en:
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_de/index.html
Si prefieres el inglés:
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/index.html
Se puede encontrar un manual en castellano de la antigua versión 3.1 (actualmente va por la
5.1) en:
http://matematicas.uis.edu.co/~marsan/geometria/RyC/
Entre las características de CAR podemos destacar:

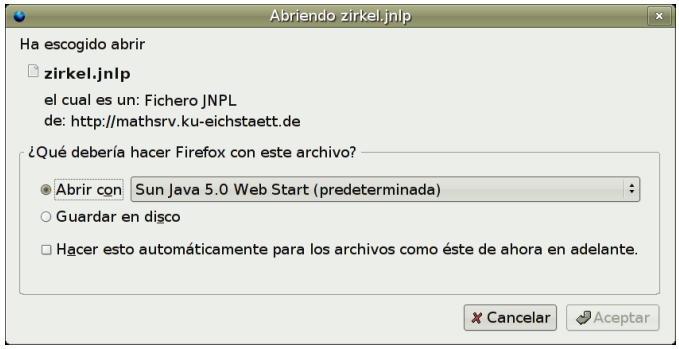
- multiplataforma (funciona en Linux, Windows, Mac, etc.)
- puede exportar las construcciones a html (para poder verlas en la red)
- puede exportar a diferentes formatos: PNG, JPG, SVG, etc.
- permite macros
- Admite expresiones en LATEX
- Genera Ejercicios (tipo especial de construcción)
- Genera animaciones
- Permite ver una construcción paso a paso
- Puede calcular expresiones
- Ayuda (traducida) sensible al contexto, etc.
- Puede ver numerosos ejemplos y demos en la web oficial de CAR.

2. INSTALACIÓN

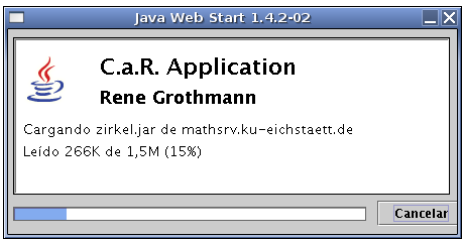
El único pre-requisito es Java (vale una versión antigua). Tanto Guadalinex 2004, como V3, así como la nueva V4 traen instalado por defecto Java.
CAR no se encuentra instalado en los Centros TIC, pero la instalación no supone ningún problema ya que no se necesita contraseña de administrador (root). Por tanto los métodos de instalación que describo a continuación valen para Centros TIC y NO TIC.
Básicamente hay dos métodos de instalación:

2.1 Java Web Start

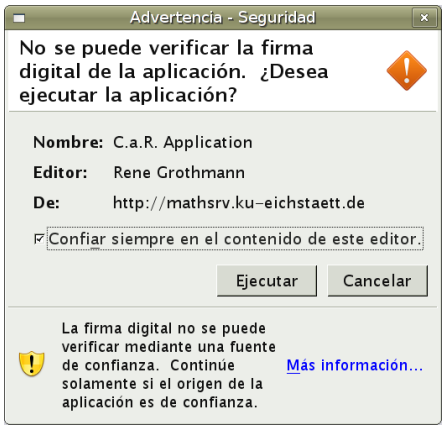
Java Web Start, desarrollado por Sun Microsystems, es la implementación de referencia de la especificación JNLP (Java Networking Launching Protocol) y permite iniciar aplicaciones Java que se encuentran en algún servidor de Internet.
Estas aplicaciones se inician mediante un enlace en Internet (o en local) a un fichero de extensión jnlp. al pulsar sobre dicho enlace se comprueba si disponemos de la última versión (de no ser así la descarga) y se ejecuta en nuestro ordenador.
La ventaja es que siempre estaremos usando la última versión disponible, aunque a veces se trata de una beta (versión aún en desarrollo).
La desventaja es que necesitamos una conexión a Internet permanente (y de banda ancha a ser posible).
Si queremos usar este método para instalar y usar CAR, no tenemos más que hacer clic en el enlace:
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/JavaWebStart/zirkel.jnlp
Si es la primera vez o si no tenemos la última versión, se descargará mostrando una barra de
progreso.



Si es la primera vez o si no tenemos la última versión, se descargará mostrando una barra de
progreso.



Cuando finalice la descarga se ejecutará la aplicación (antes de ejecutarse nos pedirá permiso:
aparecerá una de las dos ventanas siguientes)



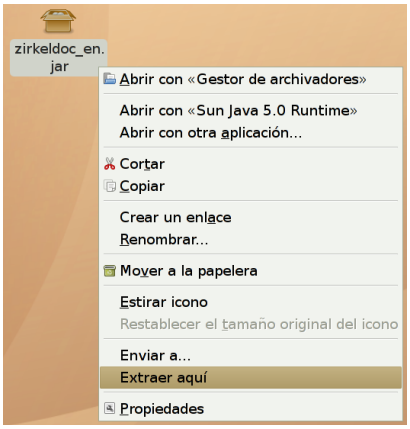
Si marcamos la casilla *'Confiar siempre en el contenido de este editor'* ya no nos pedirá permiso
más veces. S la advertencia es la que aparece en la imagen de la derecha anterior, pulse Iniciar.
Posiblemente también le pregunte si desea crear un acceso directo en el escritorio.

Finalmente se inicia el programa CAR (ver siguiente imagen)

2.2 Instalación en Linux

Mediante este método instalaremos en nuestro disco duro la última versión estable (y la documentación) y no necesitaremos internet para usar el programa.
Descargamos el paquete zirkeldoc_en.jar de:
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/Download/zirkeldoc_en.jar
Lo descomprimimos en una carpeta de nuestro disco duro (podemos hacerlo de forma sencilla apuntando al paquete, clic-derecho, extraer aquí). Creará una carpeta llamada CaR.

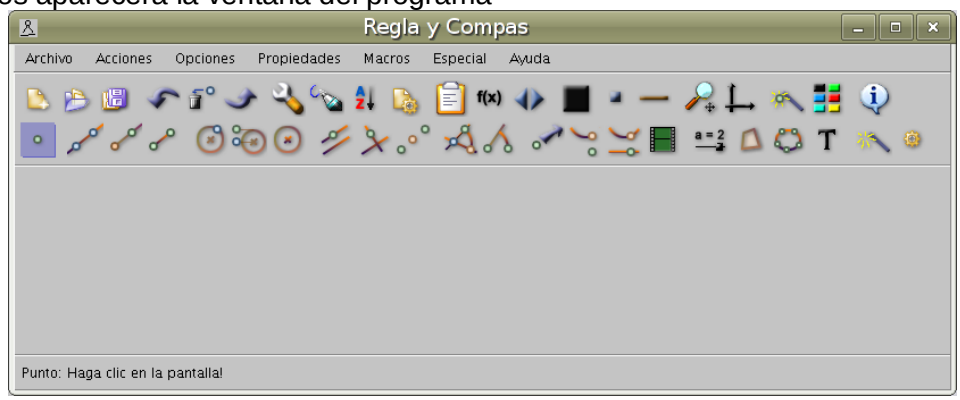
El icono dependerá de su configuración.



Para iniciar el programa nos situamos en la carpeta /CaR/doc_en y ejecutamos el programa. Por ejemplo, si lo descargó en el escritorio, la carpeta estará en la ruta: /home/usuario/Desktop/CaR/doc_en (con el 'usuario' correspondiente). Teclearíamos en terminal
entonces:

$ cd /home/usuario/Desktop/CaR/doc_en
$java -jar zirkel.jar

Si no desea usar la cónsola, otra opción es apuntar con el ratón al _chero zirkel.jar (que está en ../CaR/doc_en), hacer clic-derecho y elegir la opción Abrir con Java. De cualquier forma nos aparecerá la ventana del programa



3 MANUAL DE USO

Aunque se puede consultar el manual original (en inglés o alemán) en la web del programa, incluso la traducción al castellano del manual de una versión antigua (como vimos Al principio del capítulo), intentaré dar algunas instrucciones que nos ayuden a introducirnos en su uso (que a veces no es tan intuitivo como debiera)

3.1 PREPARANDO EL TERRENO

Cuando iniciamos CaR nos aparece una ventana en la que podemos distinguir (de arriba a abajo) varias zonas:

- barra de menús
- barra de herramientas
- zona de dibujo

- barra de mensajes

El proceso de trabajo normal consiste en elegir alguna de las herramientas y hacer el dibujo en la zona central. No obstante, antes de empezar a trabajar con CaR es recomendable realizar algunas configuraciones:

- **Zona de Dibujo.** Por defecto tiene fondo gris. Los dibujos se ven mejor colocándole un fondo blanco. Para cambiar el color del fondo usaremos el menú: *Propiedades ▸ Editar Colores ▸ Fondo*
- Barra de Herramientas. Las herramientas que aparecen por defecto son las más usadas (pero hay más). Se puede personalizar la lista de herramientas que queramos que aparezcan, eligiendo los modos principiante o escolar en el menú: *Propiedades ▸ Modo escolar o Modo principiante*. También podemos (en el modo por defecto) añadir o suprimir herramientas, de forma que sólo aparezcan las que creamos conveniente. Para ello usaremos el menú: *Propiedades ▸ Editar Herramientas.*

1.2 PUNTOS Y RECTAS

Las herramientas que usaremos/aprenderemos en este apartado son:

Punto: Dibuja un punto en pantalla

Color: Selecciona color

Tipo de punto: Selecciona un tipo de punto

Grosor: Selecciona un grosor

Recta: Recta que pasa por dos puntos

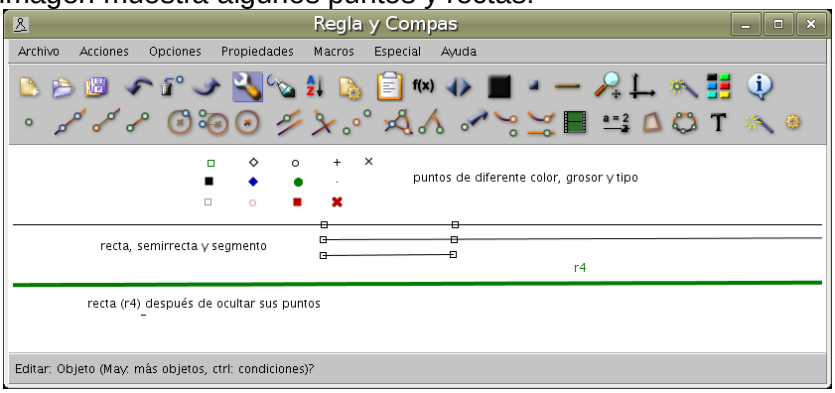
Semirecta: Recta a partir de un punto

Segmento: Segmento entre dos puntos

Ocultar: Ocultar un objeto

Deshacer: Borrar el último objeto dibujado

La siguiente imagen muestra algunos puntos y rectas:



3.3 PROPIEDADES DEL FONDO

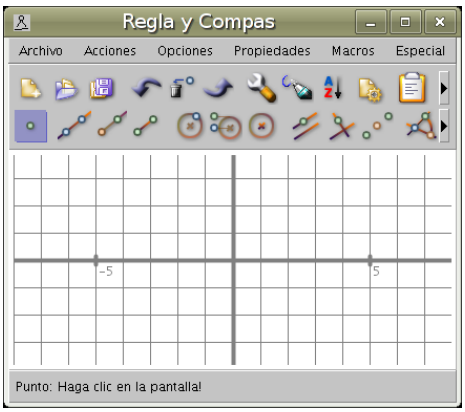
El fondo también se puede cambiar: se puede elegir un color (por ejemplo blanco), se puede poner una imagen de fondo e incluso se pueden poner ejes de coordenadas y rejilla. Estas opciones se eligen en el menú Opciones y en el menú ***Opciones Fondo***

- **Cambiar color de fondo.** El fondo (que por defecto aparece gris) puede ser cambiado a otro color mediante el menú: *Propiedades Editar Colores Fondo*

Podemos elegir cualquier color dando valores (0-255) a los básicos rojo, verde y azul.

- **Usar rejilla y ejes de coordenadas.** La herrami mostrar cuadrícula (o

alternativamente la tecla *F12* o el menú *Opciones* → *Mostrar* cuadrícula nos pone como fondo tanto la rejilla como los ejes de coordenadas. Si tan sólo queremos los ejes, lo haremos mediante el menú: *Opciones* → *Sólo Ejes*



Poner una imagen de fondo. Mediante el *Menú* → *Opciones* . Fondo podemos poner una imagen (en formato gif, jpg o png) como fondo, borrar el fondo actual, etc.

3.4 PROPIEDADES DE LOS OBJETOS

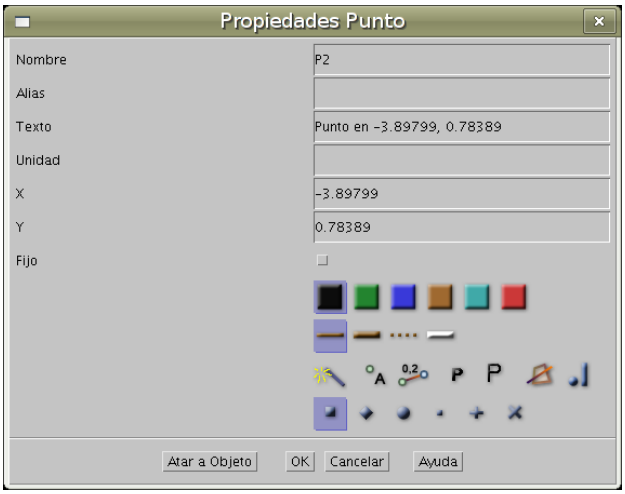
Las propiedades de un objeto, como por ejemplo el color, se pueden establecer de varias formas:

- ***Antes de crear el objeto***. Modificando una característica antes de crear el objeto (si seleccionamos color azul y después creamos un objeto, saldrá de color azul)
- ***Después de crear el objeto***, podemos modificar sus propiedades:

• Haciendo clic-derecho con el ratón sobre el objeto

• Usando la herramienta *'Editar objeto'* (una vez seleccionada la herramienta, hacemos clic sobre el objeto a editar).

En ambos casos nos aparece una pantalla de propiedades. Las propiedades varían según el objeto. En la imagen vemos las propiedades del objeto punto:



Algunas de las propiedades que se pueden modificar son:

- **Color** Seleccionar color
- **Tipo de punto** (sólo para el objeto punto)
- **Grosor** Selecciona un grosor

- **Mostrar nombre** Permite ver el nombre del objeto
- **Mostrar valor** Visualiza el valor (medida, super_cie, etc.) de un objeto
- **Ocultar** Ocultar un objeto

3.4.1 NOMBRE DE LOS OBJETOS

Para poner nombre a los objetos tenemos varias opciones:

- ***Dejar nomenclatura por defecto***. CaR asigna un nombre por defecto a cada objeto. Por ejemplo a los puntos les llama P1, P2, P3, ..; a las rectas: r1, r2, r3, etc.
- ***Usar nomenclatura personalizada.*** En la ventana propiedades podemos poner el nombre que queramos
- ***Nomenclatura automática.*** La herrami *'Cambiar nombre'* permite nombrar

automáticamente A, B, C, .. a los puntos; a, b, c, .. a las rectas, etc.

-

Recordemos que el nombre puede estar visible o no. Además podemos modificar el lugar de colocación del nombre, pues a veces el nombre nos tapa al propio objeto u a otros. Lo hacemos con clic-derecho sobre el nombre y arrastramos a la nueva posición (podemos comprobar que no es posible poner el nombre lejos del objeto, pero sí es posible ponerlo a izquierda, derecha, arriba,
abajo, etc.)

3.4.2 ELIMINANDO Y OCULTANDO OBJETOS

- **Deshacer** Elimina el último objeto
- **Borrar objeto** Borra un objeto
- **Deshace borrar objeto** Recupera un objeto recién borrado
- **Ocultar objeto** Oculta un objeto, pero no lo elimina

Bibliografía

AFONSO, M. C; CAMACHO, M.; SOCAS, M. (2003). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio. Tesis Doctoral. Universidad de Laguna.

ARANDA D. Y FUENTE M.(2001). Matemáticas. Naturaleza y Arte. Junta de Andalucía. Córdoba.

BALACHEFF, N.(1994). Didactique et Intelligence Artificielle, Recherches en Didactique des Mathematiques, 14, vol 1-2, pp. 9-42.

BALACHEFF, N.(2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En Colén, M Fraile, Y, Vidal, C (editores): *¨Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional¨.* Barcelona. Edit. GRAÓ DE Irif, S.L.

BARTOLINI, M. (2000). Early approach to mathematical ideas related to proof making. Tokio, Makuhari, Japón.

BATANERO, C.; GODINO, J.; FONT, V.; (2004) Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

BORGES, J. (1952). Otras Inquisiciones,. La esfera de Pascal. VII, Buenos Aires, Ed. Emecé, pp.14-16.

CANTORAL URIZA, R. (2002). Visualización y pensamiento matemático; estrategias de enseñanza.

CASTAÑEDA, A. (2000). Estudio Didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría. Cinestav-IPN, México.

CLEMENS (1998).Et al, Geometría, de Editorial Addison Wesley

CLEMENTS, D. Y M. BATTISTA. (1992). Geometría y razonamiento espacial. En D. Grouws, ed. *Manual de Investigación sobre la Enseñanza de Matemáticas y Aprendizaje,* Nueva York: Macmillan Publishing Co.

DE VILLIERS, MICHAEL. (1996). ¨Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría¨. The Future
of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve, Noviembre-Diciembre. 1999.

DIEUDONNÉ J. (1981): The Universal Domination of Geometry, ZDM 13 (1), p. 5-7 .

DREYFUS, T.(1991.), *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*, In the Proceedngs of the 15th Conference of the PME, Assisi (Italy). Vol. 1. pp. 33-48.

DUVAL R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, Págs. 173-201). México.

FERNANDEZ, PADILLA, SANTOS, VELASQUEZ. (1996). Circulando por el círculo. Editorial Síntesis. España.

FLOREZ, RUIZ, DE LA FUENTE. (2006). Geometría para el Siglo XXI. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Coedición Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Pp. 61-116.

FREUDENTHAK H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. Educ Stud in Math.

GODINO, J.;RUIZ, F.; (2004). Didáctica de la Geometría para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

GUERRA, M. (2010). La geometría y su didáctica. Experiencias educativas. Granada, España.

GUTIERREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. Alfar; Sevilla, España. Pp 295-384

GUTIERREZ, JAIME, FORTUNY. (1991). An alternative paradigm to evaluate the adquisition of the Van Hiele levels. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 22, No 3, pp 237-251. España.

GUTIERREZ, J. (1989). Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiel. Revista Enseñanza de las Ciencias 7(1), pp. 89-95.

HITT, F. Y FILLOY, E. (1997). Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamérica. México.

LANDAVERDE, F.J. (1955). Curso de Geometría. Librería F.T.D. pp. 93-124.

LEHMANN, C. H. (1989). *GEOMETRIA ANALITICA.* MEXICO: EDITORIAL LIMUSA.

MENESES, H. (2010). La transición grados → radianes ↔ reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico. México. pp. 33-36

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. MEN. Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (2002). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (2002). Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia. (2002). MEN. pp.39

MONTESINOS, J. (1997). Arquímedes y la medida del círculo. Ponencia año VII Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife 1997.

MORA SÁNCHEZ, J. (2002). Geometría Dinámica en Secundaria.. I.E.S. Sant Blai de Alicante. España.

MORENO ARMELLA L. (2004). Matemática Educativa, Cinvestav.

MAMMANA Y VILLANI. (1998). Recogiendo las ideas del documento de discusión del estudio del ICMI, perspectivas de la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. p. 338.

PIAGET, J.; DIEUDONNÉ, J,: THOM, R, (1986); La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza Editorial, p. 303.

POGORELOV, A.V. (1974). Geometría Elemental. Editorial MIR. URSS. pp. 76-84.
ROANÉS (1980). Introducción a la geometría. Anaya editorial. pp. 157-159

ROMBERG, T.; PRICE, G. (1983). Curriculum implementation and staff development as culture change. En Griffin, G. *Staff Development: Eighty- Second Yearbook of the National Society for the Study of Education,* pp. 154-184. University of Chicago.

SADOVSKY P, (1998). Enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Buenos Aires, p. 57.

TANTON, R. y otros (1988). Historia general de las ciencias. Edit Orbis, Barcelona.

WORLD WIDE WEB

MAZA, C.(2000). *Matemáticas en Mesopotamia.* http://ieslagunatollon.blogspot.com/2011/11/la-matematica-en-mesopotamia-areas.html)

SANCHEZ, J. (2000). *Las matemáticas en la India.* http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

MORALES, L. (2002). *La cuadratura del círculo y otros problemas de Geometría* http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/644/64406510.pdf

PÉREZ, J. (2003). *El quehacer matemático. Un recorrido por la historia. Parte I* http://personales.ya.com/casanchi/did/histoparte1.pdf

PÉREZ, J. (2003). *El quehacer matemático. Un recorrido por la historia. Parte IV.* http://personales.ya.com/casanchi/did/histoparte4.pdf

ROIT, G. (1989). *Geometría Física.* http://www.euclides.org/menu/articles/article10.htm

GARCÍA, M. (2002). *El siglo de la Geometría.* http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-2-1-geometria.pdf

BRACHO, J. (2003). *Introducción Analítica a la Geometría* http://www.matem.unam.mx/~rgomez/geometria/Indice.pdf