EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE DIFUSION NO LOCAL REESCALADO.

JESÚS ADOLFO CAICEDO URREGO
MATEMÁTICO

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2020

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE DIFUSION NO LOCAL REESCALADO.

JESÚS ADOLFO CAICEDO URREGO
MATEMÁTICO

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Ciencias, Matemáticas

Director
Cesar A. Gòmez S.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2020

Título en español

Existencia y unicidad de soluciones para un problema de difusión no local reescalado.

Title in English

Existence and uniqueness of solutions for a rescaled nonlocal diffusion problem

Resumen: Estudiamos un problema de difusión nolocal reescalado con el fin de determinar la existencia y unicidad de las soluciones, y si estas satisfacen algún principio de comparación.

Abstract: We study a nonlocal difusion problem with the aim to decide on existence and uniqueness of solutions, and if that solutions satisfy some comparison principle.

Palabras clave: problema no local, problema de difusión, problema reescalado, núcleo, ecuación del calor, Laplaciano.

Keywords: Nonlocal problem, diffusión problem, rescaled problem, kernel, heat equation, Laplacian.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria"

Jurado

Director
Cesar A. Gòmez S.

Bogotá, D.C., Mayo de 2020

Dedicado a

A mi familia: Laura Viviana, Jesús Gabriel y Maria Elvira, por estar presente en los momentos importantes de mi vida, por su apoyo incondicional y su aliento, por que son la chispa necesaria en mi vida para que las cosas sucedan, a José Caicedo por su constante apoyo, comprensión y colaboración, por ser un padre para mi.

Agradecimientos

Primero que nada agradecer a la vida por tener esta maravillosa oportunidad, por estar un paso más cerca de mis sueños.

Agradecer al profesor César Augusto Gómez Sierra por aceptarme como su estudiante, por la paciencia que me ha tenido en dirigir mi trabajo, por su gran ayuda y sus muchas sugerencias y orientación en puntos cruciales de este trabajo.

Al profesor y mentor José Francisco Caicedo Contreras, que ha sido más que un padre en mi vida, ha sido modelo a seguir, inspiración, fuerza, constancia, cuyos infinitos consejos, directrices, ayudas y demás me han llevado por la senda que hoy recorro con infinita felicidad y plenitud.

Agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme la oportunidad formarme en sus aulas.

A mis grandes amigos, que han sido una red de apoyo vital en los duros momentos. Ellos saben quienes son.

A las personas que representan lo más importante en mi vida: a mi esposa Laura Viviana, a mi hijo Jesús Gabriel, a mi madre Maria Elvira, sin ellos, nada de esto hubiese sido posible.

Bogotá Mayo del 2020

Jesús Adolfo Caicedo Urrego

Índice general

Índice general **I**

INTRODUCCIÓN **II**

1. SOBRE LA ANALOGÍA ENTRE LOS PROBLEMAS DE DIFUSIÓN LOCAL Y NO LOCAL **1**

2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE DIFUSIÓN NO LOCAL **6**

2.0.1. Resultados preliminares 8

2.0.2. Resultado fundamental 15

2.1. SOBRE UN PRINCIPIO DE COMPARACIÓN 17

CONCLUSIONES **21**

TRABAJO FUTURO **23**

Bibliografía **25**

INTRODUCCIÓN

La necesidad de modelar el entorno que nos rodea con el ánimo de dar soluciones matemáticas a problemas de la vida diaria, nos ha permitido llegar a ecuaciones que, no sólo nos ilustran la forma como actuán algunos fenómenos de la naturaleza, sino que además, nos han mostrado tener aplicaciones en una variedad de otras ramas de las ciencias, como la Biología, la Física, la Química, entre otras. La mayoría de estas ecuaciones son diferenciales parciales, algunas de ellas lineales, otras no lineales. Una clase de modelos de difusión más recientes, son aquellos descritos por ecuaciones de difusión no local, los cuales han mostrado tener una amplia gamma de aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias, como las mencionadas anteriormente. Uno de los problemas clásicos de difusión es precisamente el dado por la ecuación del calor con condición inicial, descrito por

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle\, u(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

En este modelo, la función de densidad $u(x,t)$, en un instante de tiempo t, depende directamente del punto x, y por ello se conoce como un modelo local, $\Omega \in \mathbb{R}^N$.
La base de los modelos de difusión no local, es dado por un análogo a la ecuación clásica del calor (local), de tal manera que, el problema análogo al descrito anteriormente está dado por la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Aquí, J es una función real simétrica no negativa definida en $\mathbb{R}^N$, de soporte compacto en la bola unitaria, tal que $\int_{\mathbb{R}^N} J(x) = 1$. En este caso, el valor de la densidad $u(x,t)$ en cualquier instante de tiempo t, depende no sólo de x sino de todos los valores cercanos a x determinados por el soporte de J a través de la convolución.

Si $u(x,t)$ es la densidad de población para el punto x en el tiempo t, y $J(x-y)$ es pensada como la distribución de probabilidad de salto de la ubicación y a la ubicación x, se tiene que la convolución

$$(J * u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(y,t)dy,$$

es la razón a la que los individuos llegan a x de los otros lugares y. De manera similar,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(x,t)dy = -u(x,t),$$

es la razón a la que los puntos dejan la locación x para ir a otras partes y.

En el primer capítulo (1), se presentará la analogía que existe entre los problemas de difusión local y no local. En el capítulo (2) se probará la existencia de una única solución para el problema de difusión no local con condición de Neumann

$$\begin{cases} w_t^\epsilon(x,t) = \frac{1}{\epsilon^{N+2}} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)(w^\epsilon(y,t) - w^\epsilon(x,t))dy + \\ \\ \frac{C_1}{\epsilon^{N+1}} \int_{\partial\Omega} J\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) g(y,t)dS_y, (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T), \\ \\ w^\epsilon(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

y se completará el desarrollo de los objetivos propuestos, en el proyecto inicial.

CAPÍTULO 1

SOBRE LA ANALOGÍA ENTRE LOS PROBLEMAS DE DIFUSIÓN LOCAL Y NO LOCAL

El objetivo de este capítulo, es hacer una descripción que nos permita ver la analogía que existe entre el problema de difusión local y el no local, para lo cual seguiremos las ideas dadas en [1], [2].

Sabemos que uno de los modelos de difusión más sencillos, está descrito por la ecuación diferencial parcial,

$$u_t = Du_{xx},$$

la cual proviene de la ley de conservación

$$u_t + \phi_x = 0,$$

y la ley de Fick's,

$$\phi = -Du_x,$$

en donde la constante de difusión D , indica qué tan rápido la cantidad medida por u, ya sea *partículas, sustancias químicas, animales, calor, energía, etc.*, se transmite de altas a bajas concentraciones.

Es bien conocido el hecho de que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

es dada por

$$u(x,t) = \int_{\Re} u_0(\xi) K(x-\xi,t) d\xi,$$

donde el núcleo de difusión $K(y,t)$ es

$$K(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}.$$

Para algún ξ, y $t > 0$, el núcleo mismo es una solución *fundamental* de la ecuación (1.1), y tiene las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x\to 0^+} K(x-\xi,t) = 0$ para cada $x \neq \xi$ fijo.
2. $\lim_{x\to 0^+} K(x-\xi,t) = +\infty$ para $x = \xi$.
3. $\lim_{|x|\to\infty} K(x-\xi,t) = 0$ para cada $t > 0$ fijo.
4. $\int_{\mathbb{R}} K(x-\xi,t)dx = 1$, $t > 0$.

De esas propiedades, puede deducirse que el núcleo es además, solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \delta(x-\xi), \ \ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.2}$$

con $\delta(x-\xi)$ la función delta de Dirac.

Existen varias formas de entender lo que es la difusión: por ejemplo, en química y física, es fácil de deducir, razonando a un nivel atómico o molecular como sustancias difusas sujetas a movimiento aleatorio. Esta descripción microscópica de difusión está basada en la estadística y el hecho de que átomos y moléculas colisionan aleatoriamente. Estas colisiones, hacen que las moléculas se muevan de donde hay mayor a donde hay menor concentración. La difusión está regida por la ley de Fick's, (o ley de Fourier en el caso de la conducción del calor) que establece que $\phi(x,t) = -Du_x(x,t)$. Al sustituir esta relación en la ley básica de la conservación $u_t = -\phi_x$, se obtiene la *ecuación de difusión*

$$u_t = Du_{xx}.$$

Puede verse, cómo este modelo de difusión aparece desde un argumento estocástico basado en movimientos aleatorios. Es decir, existe una relación muy estrecha entre difusión y probabilidad. Nótese por ejemplo, que la solución fundamental a la ecuación de difusión generada por un punto fuente $x = \mu$, y dada por el núcleo de difusión

$$K(x-\mu,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4Dt}},$$

tiene un comportamiento muy similar a la función de densidad de la distribución de probalidad Normal, la cual está determinada por

$$N(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

donde μ es la media de la distribución, y σ es la desviación estandard, la cual mide la dispersión alrededor de la media. Si se toma la desviación standard dependiendo del tiempo en la forma $\sigma = \sqrt{2Dt}$, de tal manera que la dispersión de los datos se incrementa con el tiempo, se obtiene el núcleo $K(x-\mu,t)$; que es la solución fundamental de la ecuación de difusión. De todas maneras, dicha relación no es accidental. Obsérvese que si x es un punto arbitrario en el eje de la equis, y se divide este eje en segmentos pequenõs de igual longitud h, se obtiene la cadena de puntos $\ldots, x-2h, x-h, x, x+h, x+2h, \ldots$. Si imaginamos una partícula moviéndose sobre esta cadena de manera aleatoria, de tal manera que, si esta se encuentra en uno de esos puntos de la cadena en un tiempo t, entonces durante un pequeño intervalo de tiempo τ, esta se mueve a la derecha de dicho punto con probabilidad p y a la izquierda con probabilidad $q = 1-p$. Si $u(x,t)$ representa la probabilidad que la partícula se halle en el punto x en el tiempo t, es posible obtener una ecuación para u.

Existen dos formas de llegar al punto x en el tiempo $t+\tau$: La partícula puede estar en la posición $x-h$ en el tiempo t y saltar a la derecha, o bien, puede estar en la posición $x+h$ en el tiempo t y saltar a la izquierda. Usando la ley de probabilidad total, se deduce que

$$u(x,t+\tau) = u(x-h,t)p + u(x+h,t)(1-p),$$

que representa una ecuación de diferencias en u. Ahora bien, expandiendo en serie de Taylor tanto el lado derecho como el izquierdo, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x,t) + u_t(x,t)\tau + O(\tau^2) = p(u(x,t) - u_x(x,t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)h^2 + O(h^3)) \\ +(1-p)(u(x,t) + u_x(x,t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)h^2 + O(h^3)), \end{aligned}$$

donde $O(\tau^2)$ indica los términos de mayor orden que contienen al menos la potencia τ^2, y $O(h^3)$ indica los términos que tienen como factor al menos la menor potencia h^3. La última ecuación se reduce a

$$u_t(x,t) = (1-2p)\frac{h}{\tau}u_x(x,t) + \frac{h^2}{2\tau}u_{xx}(x,t) + O(\tau) + \frac{1}{\tau}O(h^3).$$

En el caso especial $p = \frac{1}{2}$, y despreciando los últimos dos términos, obtenemos la ecuación de difusión

$$u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t).$$

En el caso $p \neq \frac{1}{2}$, podemos asumir $2p - 1 = O(h)$, (lo que indica que la probabilidad de movimiento de la partícula a la derecha y a la izquierda es más o menos la misma) y razonando como antes se obtiene la ecuación de difusión con flujo

$$u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t) - cu_x(x,t).$$

Tradicionalmente, el modelo de difusión $u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t)$ es representado por la ecuación de calor (semilineal)([1])

$$u_t = \triangle u, \tag{1.3}$$

la cual tiene asociado un funcional de energía, definido por la integral de Dirichlet

$$\varepsilon_0[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx. \tag{1.4}$$

La energía (1.4) es una cierta medida de cuánto u se desvía desde una posición dada. Es fácil ver que $\varepsilon_0[u] \geq 0$ y $\varepsilon_0[u] = 0$ si $u = constante$. En ([1]), se describe una medida alternativa de este mismo hecho por el funcional (de energía)

$$\varepsilon_{10}[u] = \int\int \frac{1}{4}J(x-y)(u(x)-u(y))^2 dxdy, \tag{1.5}$$

para alguna función no negativa $J(x)$, con $\int J(x)dx = 1$ y simétrica ($J(x) = J(-x)$). Es claro, que estas características asociadas a J tienen que ver con las características del núcleo $K(y,t)$ asociada a (1.1). Nótese que $\varepsilon_{10}[u] \geq 0$ y $\varepsilon_{10}[u] = 0$ si $u = 0$. A partir de la analogía entre estos dos funcionales de energía ε_0 con ε_{10}, en [1], el autor muestra la respectiva analogía entre $\triangle u$ y $J * u - u$, de tal manera que el análogo *no local* a la ecuación (1.3) es dada por

$$u_t = J * u - u. \tag{1.6}$$

Aquí, si $u(x,t)$ representa la densidad en el punto x en el tiempo t y si $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x, entonces $(J*u)(x,t)$ es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde todas la posiciones y $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(x,t)dy$ es la razón con la cual los individuos van de la posición x hacia cualquier otra posición y. Estas consideraciones, en ausencia de fuentes externas, lleva inmediatamente al hecho de que la densidad u satisface la ecuación (1.6). La ecuación (1.6) es llamada *Ecuación de Difusión No-Local.*

Ecuaciones de la forma (1.6) y variantes de ella, se han usado para modelar procesos de difusión y se han estudiado ampliamente desde el punto de vista analítico, puede verse por ejemplo las referencias [3],[4], [5],[6], [7],[8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]. Algunas aplicaciones importantes, pueden encontrarse en [20], [21], [22] y [23] entre otras. Como puede verse en la literatura sobre el tema, así como ocurre con el caso local, el estudio de los modelos de difusión no-local tiene su importancia no sólo desde el punto de vista de la matemática pura, sino también desde el punto de vista de la matemática aplicada.

CAPÍTULO 2

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE DIFUSIÓN NO LOCAL

Como lo mencionamos en el capítulo anterior, los problemas de difusión no locales tienen una analogía con los problemas locales. Los autores en ([24]), recientemente estudiaron el problema de difusión no local dado por la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

definido en $\Omega \times (0,T)$, considerado como el análogo al problema de Neumann (local)

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = g(x,t) \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Aquí, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, conexo y con frontera suave. El núcleo $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función suave no negativa, acotada, simétrica ($J(z) = J(-z)$), de soporte compacto en la bola unitaria, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)dz = 1,$$

El núcleo $G(x)$ tiene las mismas características del núcleo J, el dato inicial $u_0(x)$ es no negativo y $g(y,t)$ es una función dada regular. En este modelo, los individuos solo pueden saltar dentro de Ω (lo que esta reflejado en la primera integral sobre Ω), y sobre la frontera de Ω ($\partial\Omega$) se impone que la cantidad de individuos que entran (si g es positiva) es $G(x-y)g(x,y)$. Esto es lo que en el caso no local, se conoce como condiciones de Neumann. Los autores estudiaron lo referente a la existencia y unicidad de las soluciones, estudiaron un principio de comparación asociado a este problema y trabajaron lo referente al comportamiento asintótico de las soluciones.

El problema (2.1) estudiado por los autores en [24] fue presentado como un modelo no local, análogo al problema de Neumann local (2.2), con la ventaja que el trabajo realizado en el, puede extenderse a flujos no lineales de la forma ($g(x,y) = f(u(y,t))$), como por ejemplo (u^p) entre otros, sin que requiera extensiones que podrían complicar el análisis respectivo. Además de la existencia y unicidad de las soluciones, así como el estudio de un principio de comparación, los autores estudiaron el comportamiento asíntótico de las soluciones cuando $t \to \infty$, dejando abierto el problema de cómo sería el análisis para relacionar soluciones de estos modelos, con las soluciones del problema clásico de Neumann (2.2). Es precisamente esa tarea, la que realizan los autores en ([25]), para la cual requieren de un reescalamiento de los núcleos, necesitando entonces de considerar la familia de problemas de difusión no local descrita por

$$\begin{cases} u_t^\epsilon(x,t) = \dfrac{1}{\epsilon^2}\displaystyle\int_\Omega J_\epsilon(x-y)(u^\epsilon(y,t) - u^\epsilon(x,t))dy + \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

donde

$$J_\epsilon(z) = C_1\frac{1}{\epsilon^N}J(\frac{z}{\epsilon}), \qquad G_\epsilon(x) = C_1\frac{1}{\epsilon^N}G(\frac{x}{\epsilon}),$$

C_1 una constante de normalización. Mostraron que las correspondientes soluciones u^ϵ, convergen a la solución de (2.2), cuando el parámetro ϵ tiende a cero, en el sentido de la convergencia débil estrella, en la topología-L^∞, ([25]), dejando abierto el estudio de la existencia y unicidad de las soluciones de (2.3).

El objetivo fundamental del presente trabajo es demostrar que el problema (2.3) tiene una única solución $u^\epsilon \in C[[0,\infty); L^1(\Omega)]$, para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$ y para cada $g \in L^\infty_{loc}[(0,\infty); L^1(\partial\Omega)]$. Con este fin, necesitamos los siguientes resultados auxiliares.

2.0.1. Resultados preliminares

En esta sección, utilizaremos el Teorema de Punto Fijo de Banach [26] para mostrar existencia y unicidad de soluciones para la ecuación (2.3). Para tal efecto, dado $t_0 > 0$ fijo, consideraremos el espacio de Banach definido por el conjunto de funciones continuas

$$B_{t_0} = C([0, t_0]; L^1(\Omega)),$$

con la norma dada por

$$|||w||| = \operatorname*{máx}_{0\leq t\leq t_0} ||w(\cdot, t)||_{L^1(\Omega)} = \operatorname*{máx}_{0\leq t\leq t_0} \int_\Omega |w(\cdot, t)|dx = \int_\Omega |w(x, t)|dx.$$

Cambiando u por w y t por s en (2.3), obtenemos

$$\begin{cases} w_s^\epsilon(x, s) = \dfrac{1}{\epsilon^2} \displaystyle\int_\Omega J_\epsilon(x - y)[w^\epsilon(y, s) - w^\epsilon(x, s)]dy + \dfrac{1}{\epsilon} \displaystyle\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x - y)g(y, s)dS_y. \\ w^\epsilon(x, 0) = w_0(x) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.4}$$

Aquí, dS_y es el diferencial de superficie. Integrando (2.4) de 0 a t obtenemos

$$w^\epsilon(x, s) = w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y, s) - w^\epsilon(x, s)]dyds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y, s)dS_y ds.$$

Definimos el operador $T : B_{t_0} \longrightarrow B_{t_0}$ como

$$T_{w_0,g} = w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y, s) - w^\epsilon(x, s)]dyds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y, s)dS_y ds. \tag{2.5}$$

Con respecto a este operador definido, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1. El operador $T_{w_0,g}$ dado en (2.5) está bien definido como aplicación de B_{t_0} sobre B_{t_0}.

Demostración:

Sea $g \in L^{\infty}_{loc}[(0,\infty); L^1(\partial\Omega)]$, $0 < t_1 < t_2 \leq t_0$, $w^{\epsilon} \in B_{t_0}$, $||J_{\epsilon}||_{\infty} = K_1$ y $||G_{\epsilon}||_{\infty} = K_2$.

Realizando los cálculos respectivos tenemos

$$
\begin{aligned}
\Big|\Big|T_{w_0,g}[w^{\epsilon}(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w^{\epsilon}(x,t_2)]\Big|\Big|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega}\Big|T_{w_0,g}[w^{\epsilon}(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w^{\epsilon}(x,t_2)]\Big|dx = \\
&\int_{\Omega}\Big|w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y ds - \\
&\Big[w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_2}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_2}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y ds\Big]\Big|dx = \\
&\int_{\Omega}\Big|w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y ds \\
&- w_0(x) - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_2}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&- \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_2}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y ds\Big|dx = \\
&\int_{\Omega}\Big|w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y ds \\
&- w_0(x) - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)[w^{\epsilon}(y,s) - w^{\epsilon}(x,s)]dyds \\
&- \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,s)dS_y dsdx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \frac{1}{\epsilon^2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]dyds \\
&\qquad -\frac{1}{\epsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds\Bigg|dx \\
&=\int_\Omega\Bigg|\frac{1}{\epsilon^2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]dyds \\
&\qquad +\frac{1}{\epsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds\Bigg|dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega\Bigg|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]dyds\Bigg|dx \\
&\qquad +\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\Bigg|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds\Bigg|dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\Bigg|\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]dyds\Bigg|dx \\
&\qquad +\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\Bigg|\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds\Bigg|dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\Big|J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]\Big|dydsdx \\
&\qquad +\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\Big|G_\epsilon(x-y)g(y,s)\Big|dS_y dsdx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\Big|J_\epsilon(x-y)\Big|\Big|[w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)]\Big|dydsdx \\
&\qquad +\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\Big|G_\epsilon(x-y)\Big|\Big|g(y,s)\Big|dS_y dsdx.
\end{aligned}
$$

Usando ahora

1. $\int_\Omega dx = |\Omega|$, es el volumen de Ω.
2. $\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |J_\epsilon(x-y)|dsdx = K_1(t_2-t_1)$.
3. $\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |G_\epsilon(x-y)|dsdx = K_2(t_2-t_1)$,

podemos concluir que

$$\left|\left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t_2)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \leq$$
$$(t_2-t_1)\frac{K_1}{\epsilon^2}|\Omega|\int_\Omega\left|w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)\right|dy + (t_2-t_1)\frac{K_2}{\epsilon}|\Omega|\int_{\partial\Omega}|g(y,s)|dS_y.$$

Ahora bien, podemos notar que

$$\left|w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)\right| \leq \left|w^\epsilon(y,s)\right| + \left|w^\epsilon(x,s)\right|,$$

así que para la primera integral del lado derecho de esta última expresión tenemos

$$\int_\Omega\left|w^\epsilon(y,s)-w^\epsilon(x,s)\right|dy \leq \int_\Omega\left|w^\epsilon(y,s)\right|dy + \int_\Omega\left|w^\epsilon(x,s)\right|dy$$
$$\leq ||w|| + ||w|| = 2||w||,$$

y para la segunda integral

$$\int_{\partial\Omega}|g(y,s)|dS_y \leq ||g||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]},$$

con lo cual, finalmente obtenemos

$$\left|\left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t_2)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \leq$$
$$(t_2 - t_1)\,\text{máx}\left\{1, \frac{K_1}{\epsilon^2}|\Omega|, \frac{K_2}{\epsilon}|\Omega|\right\}\left\{2|||w||| + ||g||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]}\right\}.$$

De la desigualdad anterior se desprende que el operador es continuo en $t \in (0, t_0]$. Ahora veamos la continuidad en 0, para ello, vemos que

$$\left|\left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - w_0(x)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega \left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - w_0(x)]\right| dx$$

$$= \int_\Omega \left| w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s) - w^\epsilon(x,s)]dyds \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds - w_0(x) \right| dx$$

$$\leq \int_\Omega \left| \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,s) - w^\epsilon(x,s)]dyds \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds \right| dx.$$

Razonando como antes, obtenemos

$$\left|\left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - w_0(x)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \leq (t)\,\text{máx}\left\{1, \frac{K_1}{\epsilon^2}|\Omega|, \frac{K_2}{\epsilon}|\Omega|\right\}\left\{2|||w||| + ||g||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]}\right\}.$$

De esta manera tenemos la continuidad en $t = 0$. Por lo tanto el operador es continuo en $t \in [0, t_0]$. Nótese además que como función de x, el operador es continuo. Esto se desprende del hecho que la convolución en el espacio con la función J es uniformemente continua. En conclusión, para algún $w_0 \in L^1(\Omega)$, $w^\epsilon \in B_{t_0}$ y $g \in L^\infty_{loc}[(0,\infty); L^1(\partial\Omega)]$, se concluye que el operador $T_{w_0,g} \in C([0,t_0]; L^1(\Omega))$. De esta manera, $T_{w_0,g}$ aplica B_{t_0} sobre B_{t_0}.

El siguiente resultado es importante en la demostración del teorema sobre la existencia y unicidad de las soluciones para el problema (2.3).

Lema 2

Sea $w_0, u_0 \in L^1(\Omega)$, $g, h \in L^\infty[(0,t_0); L^1(\partial\Omega)]$ y $w^\epsilon, z^\epsilon \in B_{t_0}$. Entonces existe una constante $C = C(\Omega, J_\epsilon, G_\epsilon)$ tal que

$$|||T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - T_{z_0,h}[z^\epsilon(x,t)]||| \leq ||w_0 - z_0||_{L^1(\Omega)} + Ct_0\{|||w^\epsilon - z^\epsilon||| + ||g-h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]}\}. \tag{2.6}$$

Demostración:

Realizando cálculos similares como en el Lema 1, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - T_{z_0,h}[w^\epsilon(x,t)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega \left|T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - T_{z_0,h}[z^\epsilon(x,t)]\right| dx = \\
&\int_\Omega \Bigg| w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(w^\epsilon(y,s) - (w^\epsilon(x,s))]dyds \\
&\qquad + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,s)]dS_y ds \\
&\quad - \Bigg[z_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(z^\epsilon(y,s) - (z^\epsilon(x,s))]dyds \\
&\qquad + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[h(y,s)]dS_y ds \Bigg] \Bigg| dx \\
&= \int_\Omega \Bigg| w_0(x) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(w^\epsilon(y,s) - (w^\epsilon(x,s))]dyds \\
&\qquad + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,s)]dS_y ds \\
&\quad - z_0(x) - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(z^\epsilon(y,s) - (z^\epsilon(x,s))]dyds \\
&\qquad - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[h(y,s)]dS_y ds \Bigg] \Bigg| dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \int_\Omega \Big| (w_0(x) - z_0(x)) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(w^\epsilon(y,s) - z^\epsilon(y,s) - (w^\epsilon(x,s) - z^\epsilon(x,s))]dyds \\
+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,s) - h(y,s)]dS_y ds \Big| dx \\
\leq \int_\Omega |w_0(x) - z_0(x)|dx \\
+ \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega \Big| \int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(w^\epsilon(y,s) - z^\epsilon(y,s)) - (w^\epsilon(x,s) - z^\epsilon(x,s))]dyds \Big| dx \\
+ \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \Big| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,s) - h(y,s)]dS_y ds \Big| dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} \\
+ \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega \int_0^t \int_\Omega |J_\epsilon(x-y)||(w^\epsilon(y,s) - z^\epsilon(y,s))|dydsdx \\
+ \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega \int_0^t \int_\Omega |J_\epsilon(x-y)||(w^\epsilon(x,s) - z^\epsilon(x,s))|dydsdx \\
+ \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \int_0^t \int_{\partial\Omega} |G_\epsilon(x-y)||g(y,s) - h(y,s)|dS_y dsdx \\
\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} \\
+ \text{máx}\{1, \frac{K_1}{\epsilon^2}|\Omega|\}(t_0)\Big\{ \int_\Omega |(w^\epsilon(y,s) - z^\epsilon(y,s))|dy \\
+ \int_\Omega |(w^\epsilon(x,s) - z^\epsilon(x,s))|dx \Big\} \\
+ \text{máx}\{1, \frac{K_2}{\epsilon}|\Omega|\}(t_0) \int_{\partial\Omega} |g(y,s) - h(y,s)|dS_y, \\
\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} \\
+ Ct_0 \Big\{ |||w^\epsilon - z^\epsilon||| + ||g - h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \Big\},
\end{aligned}
$$

en donde

$$
Ct_0 = \text{máx}\{1, 2\frac{K_1}{\epsilon^2}|\Omega|, \frac{K_2}{\epsilon}|\Omega|\}.
$$

2.0.2. Resultado fundamental

Como consecuencia de los lemas anteriores, podemos enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema. Para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$, existe una única solución $u^\epsilon \in C[[0,\infty); L^1(\Omega)]$ del problema (2.3).

Demostración: Recordando el Lema 2,

$$|||T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - T_{z_0,h}[z^\epsilon(x,t)]||| \leq ||w_0 - z_0||_{L^1(\Omega)} + Ct_0\{|||w^\epsilon - z^\epsilon||| + ||g-h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]}\}. \tag{2.7}$$

Si escogemos t_0 suficientemente pequeño, de tal manera que $Ct_0 < 1$ y hacemos $z_0 \equiv w_0 \equiv u_0$, $g = h$ en (2.6), obtenemos

$$|||T_{w_0,g}[w^\epsilon(x,t)] - T_{w_0,h}[z^\epsilon(x,t)]||| \leq Ct_0|||w^\epsilon - z^\epsilon|||.$$

Como $C[[0,\infty); L^1(\Omega)]$ es un espacio métrico completo, y como hemos tomado Ct_0 tal que $0 < Ct_0 < 1$, entonces, $T_{u_0,g}$ es una contracción estricta en el espacio de Banach B_{t_0}, y por el Teorema del Punto Fijo de Banach [26], $T_{u_0,g}$ tiene un único punto fijo, en el intervalo $[0,t_0]$. Para extender la solución al intervalo $[0,\infty)$, podemos tomar como dato inicial $u^\epsilon(x,t_0) \in L^1(\Omega)$ y si $u^\epsilon \in B_{t_0}$ es tal que $|||u^\epsilon||| < \infty$, un argumento similar al expuesto en los lemas anteriores, permite extender la solución hasta un intervalo $[0,t_1)$, con $t_1 > t_0$. Iterando este procedimiento , obtenemos una solución definida en $[0,\infty)$.

Corolario. Con respecto al problema (2.3), se tiene que la *masa* total en Ω satisface

$$\int_\Omega u^\epsilon(y,t)dy = \int_\Omega u_0(y)dy + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y dx ds. \tag{2.8}$$

Demostración

Si u^ϵ es una solución del problema (2.3), sustituyendo w^ϵ por u^ϵ en (2.0.1), obtenemos

$$u^\epsilon(x,t) - u_0(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,s) - u^\epsilon(x,s)]dyds$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds.$$

Integrando a ambos lados de esta última igualdad en x obtenemos

$$\int_\Omega [u^\epsilon(x,t) - u_0(x)]dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,s) - u^\epsilon(x,s)]dyds\right]dx$$
$$+\int_\Omega \left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y ds\right]dx,$$

de donde se desprende que

$$\int_\Omega u^\epsilon(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega \int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)u^\epsilon(y,s)dydsdx$$
$$-\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega \int_0^t \int_\Omega J_\epsilon(x-y)u^\epsilon(x,s)dydsdx$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y dsdx.$$

Una aplicación del Teorema de Fubini [27], nos permite escribir esta última ecuación como

$$\int_\Omega u^\epsilon(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega \int_\Omega J_\epsilon(x-y)u^\epsilon(y,s)dydxds$$
$$-\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \int_\Omega \int_\Omega J_\epsilon(x-y)u^\epsilon(x,s)dydxds + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,s)dS_y dsdx.$$

para obtener finalmente

$$\int_\Omega u^\epsilon(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y dx ds, \tag{2.9}$$

de donde se desprende (2.8).

2.1. SOBRE UN PRINCIPIO DE COMPARACIÓN

En esta sección, presentamos unos resultados adicionales referentes al problema (2.3), en particular, sobre la validez de un principio de comparación de las soluciones, para lo cual, daremos algunas definiciones preliminares.

Definición 1: Una función $u^\epsilon \in C([0,T); L^1(\Omega))$, es una *supersolución* de (2.3), si cumple:

- $u^\epsilon(x,0) \geq u_0(x)$.
- $$u_t^\epsilon(x,t) \geq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t) - u^\epsilon(x,t)]dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y. \tag{2.10}$$

Definición 2: Una función $u^\epsilon \in C([0,T); L^1(\Omega))$, es una *subsolución* de (2.3), si cumple:

- $u^\epsilon(x,0) \leq u_0(x)$.
- $$u_t^\epsilon(x,t) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t) - u^\epsilon(x,t)]dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y. \tag{2.11}$$

Respecto de las supersoluciones tenemos:

Lema 3.

Sea $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $u_0 \geq 0$, y $u^\epsilon \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, una supersolución de (2.3) con $g \geq 0$. Entonces $u^\epsilon \geq 0$.

Demostración:

Supongamos que $u^\epsilon(x,t)$ es negativa en alguna parte, esto lo podemos suponer ya que $u^\epsilon(x,t)$ es continua. Consideremos $v^\epsilon(x,t) = u^\epsilon(x,t) + \rho t$, con $\rho > 0$ suficientemente pequeño, para que $v^\epsilon(x,t)$ siga siendo todavía negativa en alguna parte. Esto se tiene del hecho de

que $u^\epsilon(x,t)$ es continua, y por el teorema del signo, existe una vecindad donde es negativa. Sea (x_0,t_0) un punto donde v^ϵ alcanza su mínimo negativo en $\Omega\times[0,T]$, así que $t_0>0$ y como u^ϵ es supersolución, $g\geq 0$ y G no negativa, entonces

$$v_t^\epsilon(x_0,t_0)=u_t^\epsilon(x_0,t_0)+\rho>\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x_0-y)[u^\epsilon(y,t_0)-u^\epsilon(x_0,t_0)]dy+$$
$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega}G_\epsilon(x_0-y)g(y,t)dS_y+\rho>\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x_0-y)[u^\epsilon(y,t_0)-u^\epsilon(x_0,t_0)]dy=$$
$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x_0-y)[v^\epsilon(y,t_0)-v^\epsilon(x_0,t_0)]dy\geq 0.$$

Dado que J es no negativo, y $v^\epsilon(y,t_0)-v^\epsilon(x_0,t_0)\geq 0$ y ya que (x_0,t_0) es un punto crítico de mínimo para v^ϵ, lo anterior no puede ocurrir. La contradicción ocurre al suponer $u^\epsilon<0$, por lo tanto, debe ser $u^\epsilon\geq 0$.

Enunciamos el siguiente principio de comparación.

Lema 4

Sea $J_\epsilon, G_\epsilon\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, u^ϵ, v^ϵ, soluciones de (2.3), con datos iniciales $u_0,v_0\in L^1(\Omega)$, y condición Neumann $g,h\in L^\infty[(0,T);L^1(\partial\Omega)]$ respectivamente. Supóngase $u_0\geq v_0$ y $g\geq h$. Entonces $u^\epsilon\geq v^\epsilon$.

Demostración:

Sea $w^\epsilon(x,t)=u^\epsilon(x,t)-v^\epsilon(x,t)$. Si hacemos $t=0$, entonces tenemos $w^\epsilon(x,0)=u^\epsilon(x,0)-v^\epsilon(x,0)=u_0-v_0$, pero por hipótesis se tiene que $u_0\geq v_0$, entonces $u_0-v_0\geq 0$, así $w^\epsilon(x,0)\geq 0$. De otro lado, puede verse que

$$w_t^\epsilon(x,t)=u_t^\epsilon(x,t)-v_t^\epsilon(x,t)=$$
$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t)-u^\epsilon(x,t)]dy+\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega}G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y$$
$$-\left\{\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[v^\epsilon(y,t)-v^\epsilon(x,t)]dy+\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega}G_\epsilon(x-y)h(y,t)dS_y\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t)-u^\epsilon(x,t)]dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y \\
&\quad -\frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[v^\epsilon(y,t)-v^\epsilon(x,t)]dy - \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)h(y,t)dS_y \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t)-u^\epsilon(x,t)]dy - \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[v^\epsilon(y,t)-v^\epsilon(x,t)]dy \\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)dS_y - \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)h(y,t)dS_y.
\end{aligned}
$$

Usando propiedades de las integrales tenemos

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[u^\epsilon(y,t)-u^\epsilon(x,t)-v^\epsilon(y,t)+v^\epsilon(x,t)]dy \\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,t)-h(y,t)]dS_y \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[(u^\epsilon(y,t)-v^\epsilon(y,t))-(u^\epsilon(x,t)-v^\epsilon(x,t))]dy \\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,t)-h(y,t)]dS_y
\end{aligned}
$$

y usando la definición para $w^\epsilon(x,t)$ se tiene

$$
= \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega J_\epsilon(x-y)[w^\epsilon(y,t)-w^\epsilon(x,t)]dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)[g(y,t)-h(y,t)]dS_y.
$$

Por lo tanto, w^ϵ es una solución de (2.3) con dato inicial $w_0 \geq 0$ y frontera de Neumann $(g-h) \geq 0$. En particular, w^ϵ es una supersolución de (2.3), con dato inicial $w_0^\epsilon = u_0^\epsilon - v_0^\epsilon \geq 0$, y por el Lema 3, se tiene $w^\epsilon \geq 0$, de donde se concluye que $u^\epsilon \geq v^\epsilon$.

CONCLUSIONES

- En este trabajo se han estudiado modelos de difusión no-local análogos al problema de Neumann clásico para la ecuación del calor.

  Más concretamente se estudian ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} u_t^\epsilon(x,t) = \frac{1}{\epsilon^2}\displaystyle\int_\Omega J_\epsilon(x-y)(u^\epsilon(y,t)-u^\epsilon(x,t))\,dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y)g(y,t)\,dS_y, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

  donde

$$J_\epsilon(z) = C_1\frac{1}{\epsilon^N}J(\frac{z}{\epsilon}),\ \ G_\epsilon(z) = C_1\frac{1}{\epsilon^N}G(\frac{z}{\epsilon}),\ \ C_1^{-1} = \frac{1}{2}\int_{B(0,1)} J(z)z^2dz,$$

  Se demuestran los siguientes resultados:

  1. Existencia y unicidad de soluciones,
  2. Validez de un principio de comparación,

  En resumen, en este trabajo se aborda el estudio de un problema de difusión no-local reescalado usado por los autores en ([25]) con el fin de aproximar la familia de soluciones a la solución del problema análogo de Neumann clásico, y que habían dejado abierto el respectivo estudio de la existencia y unicidad de soluciones. El estudio propuesto se basa en establecer que el problema está bien planteado y luego estudiar

la validez de un principio de comparación, para lo cual, se usaron técnicas clásicas del análisis funcional y del análisis no lineal.

TRABAJO FUTURO

Algunos de los trabajos que quedan pendientes y que se pueden desarrollar en esta dirección, son los siguientes:

1. Estudiar problemas no-locales (existencia, unicidad, propiedades asintóticas, etc) donde la parte principal no es lineal.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)|u(y,t)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

   El respectivo problema reescalado, también tiene pertinencia.

2. Estudiar problemas no-locales cuando Ω no es un dominio en $\mathbb{R}^N$ sino un espacio de medida general y la probabilidad de salto viene dada por núcleos simétricos $J(x,y)$ y $G(x,y)$.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x,y)(u(y,t)-u(x,t))\,d\mu(y) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

   donde Ω es un subconjunto abierto de un espacio topológico (con una medida $d\mu$) y

$\partial\Omega$ es su frontera (con otra medida dS_y).

3. Considerar problemas "mixtos", los cuales pueden ser de la forma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_1} G(x,y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(y,t) = h(y,t) \qquad y \in \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Bibliografía

[1] P. Fife. Some nonclassical trends in parabolic and paraboli-like evolutions . *Trends in nonlinear analysis, Springer, Berlin.*, pages 153–191, 2003.

[2] D. Logan, Introduction to Nolinear Partial Differential Equations. John Wiley and Sons, 2.008

[3] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. J. Toledo-Melero. Nonlocal Diffusion Problems. American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs 2010. Vol. 165.

[4] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo. The Neumann problem for nonlocal nonlinear diffusion equations. *J. Evol. Equ.*, 8(1), (2008), 189–215.

[5] F. Andreu, J. M. Mazon, J. D. Rossi and J. Toledo. A nonlocal $p-$Lapla-cian evolution equation with Neumann boundary conditions. *J. Math. Pures Appl.* Vol. 90(2), 201–227, (2008).

[6] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo. A nonlocal $p-$Lapla-cian evolution equation with non homogeneous Dirichlet boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 40(5), 1815–1851, (2009).

[7] F. Andreu, J. M. Mazon, J. D. Rossi and J. Toledo. The limit as $p \to \infty$ in a nonlocal $p-$Laplacian evolution equation. A nonlocal approximation of a model for sandpiles. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* Vol. 35(3), 279–316, (2009).

[8] P. Bates and G. Zhao. Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal. *J. Math. Anal. Appl.,* 332, (2007), 428–440.

[9] M. Bogoya, R. Ferreira, and J.D. Rossi. Neumann boundary conditions for a nonlocal nonlinear diffusion operator. continuous and discrete models. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135:3837–3846, 2007.

[10] E. Chasseigne. The Dirichlet problem for some nonlocal diffusion equations. *Differential Integral Equations*, 20, (2007), 1389–1404.

[11] C. Cortázar, M. Elgueta, S. Martínez and J. D. Rossi. Random walks and the porous medium equation. *Rev. Union Matemática Argentina*, 50, (2009), 149–155.

[12] C. Cortázar, M. Elgueta and J. D. Rossi. Nonlocal diffusion problems that approximate the heat equation with Dirichlet boundary conditions. *Israel J. Math.*, 170, (2009), 53–60.

[13] C. Cortázar, M. Elgueta, J.D. Rossi, and N. Wolanski. How to aproximate the heat equation with neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.* Vol. 187(1), 137–156, (2008).

[14] C. Cortázar, M. Elgueta, J.D. Rossi, and N. Wolanski. Boundary fluxes for nonlocal diffusion. *J. Differential Equations.*, 234:360–390, 2007.

[15] J. Coville. Maximum principles, sliding techniques and applications to nonlocal equations. *Electron. J. Differential Equations,* 2007 (68), (2007), 1–23.

[16] J. Coville, J. Dávila and S. Martínez, Existence and uniqueness of solutions to a nonlocal equation with monostable nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 39, (2008),1693–1709.

[17] J. García Melián and J. D. Rossi. On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems. *J. of Differential Equations.* Vol. 246(1), 21–38, (2009).

[18] L. I. Ignat and J. D. Rossi. A nonlocal convection-diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, 251(2), (2007), 399–437.

[19] M. Perez and J.D. Rossi. Blow-up for a non-local diffusion problem with neumann boundary conditions and a reaction term. *Analysis TM&A.* Vol. 70(4), 1629–1640, (2009).

[20] P. Bates. On some nonlocal evolution equations arising in materials science. Nonlinear dynamics and evolution equations, 13–52, Fields Inst. Commun., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[21] C. Carrillo and P. Fife. Spatial effects in discrete generation population models. *J. Math. Biol.*, 50(2), (2005), 161–188.

[22] J. Coville and L. Dupaigne. On a nonlocal equation arising in population dynamics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 137, (2007), 1–29.

[23] N. Fournier and P. Laurencot. Well-posedness of Smoluchowski's coagulation equation for a class of homogeneous kernels. *J. Funct. Anal.*, 233, (2006), 351–379.

[24] C. Gómez y M. Bogoya L. On a nonlocal diffusion model with Neumann boundary conditions,*Nonlinear Analysis*, 32, (2020), 17-20.

[25] C. Gómez y J. Rossi. A nonlocal diffusion problem that aproximates the heat equation with Neumann boundary conditions,*Journal of King Saud University*, 75, (2012), 3198-3209.

[26] S Kesavan. Functional Analysis,Hindustan Book Agency,2009.

[27] Robert Bartle. The Elements of Integration and Lebesgue Measure,Wiley Classic,1995.

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo.

Bogotá, D.C., 2020

(Jesús Adolfo Caicedo)