UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Modelo de Contagio Dinámico: una aplicación al problema de la ruina. (Dynamic Contagion Model a Ruin Problem)

Henry Steven Rueda Corredor

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2021

Modelo de Contagio Dinámico: una aplicación al problema de la ruina. (Dynamic Contagion Model a Ruin Problem)

Henry Steven Rueda Corredor

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Actuaría y Finanzas

Director(a):
Alejandra Sánchez Vásquez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2021

A mi familia.

Agradecimientos

Inicialmente quiero dar las gracias a mi directora, Dra. Alejandra Sánchez Vásquez, por todo su tiempo, dedicación, apoyo, ideas y ser la guía en la ejecución de este proyecto. Sin sus aportes y trabajo no hubiera sido posible.

Mi sincera gratitud a los profesores Johanna Garzón, Alexander Guarín y Armando Zarruk por sus comentarios, aportes y retroalimentaciones constantes a lo largo del trabajo. Al señor Andrés Vesga actuario responsable del Grupo Bolívar, Nicolás Verano egresado de la Maestría en Actuaría y Finanzas y funcionario de Fasecolda y Diana Díaz egresada de la Maestría en Estadística por su colaboración y ayuda en la calibración y aplicación del proyecto. Y a los demás profesores de la maestría que me impartieron sus conocimientos en cada una de las materias.

Agradecerle a mis padres y hermano por siempre brindarme su apoyo y amor incondicional en los momentos más difíciles. A mis compañeros y amigos, en especial a Juan David Jaramillo Urrutia, quienes siempre me colaboraron y me extendieron una mano durante el tiempo de realización del proyecto.

Finalmente, quiero agradecerle al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia por otorgarme la beca y la oportunidad de realizar mis estudios en tan prestigiosa universidad.

Resumen

Este trabajo estudia el Modelo de Contagio Dinámico y sus propiedades, propuesto por Dassios y Zhao (2011) [8], el cual es una generalización de los procesos de Hawkes y los procesos doblemente estocásticos con intensidad de *shot noise* con el fin de representar situaciones de apiñamiento. Este proceso estocástico incluye los saltos externamente excitados y auto-excitados para modelar el impacto que pueden llegar a tener en el sistema factores tanto exógenos como endógenos. Por medio de este proceso se simuló la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora cuando el tamaño de las reclamaciones sigue una distribución exponencial y una Erlang tipo 2. El objetivo principal de la tesis es demostrar que el modelo es útil para simular el valor que debe destinar una Administradora de Riesgos Laborales (ARL) para determinar el monto de la reserva que permita cubrir todos los procedimientos médicos futuros de un empleado cuyo siniestro es un accidente o enfermedad laboral en Colombia. Esta aproximación se hace desde los conceptos de la Teoría de la Ruina y por consiguiente, el superávit, la condición de ganancia neta y las cotas de la probabilidad de ruina, también son estudiadas. Finalmente, se da el primer acercamiento al cálculo de la reserva para un portafolio de n empleados asegurados.

Palabras clave: Proceso de Contagio Dinámico; Probabilidad de Ruina; Modelos de Riesgo tipo Erlang; Proceso de Apiñamiento Puntual; Proceso de Hawkes.

Abstract

This paper will focus on the study of the Dynamic Contagion Model and its properties, proposed by Dassios and Zhao (2011) [8], which is a generalisation of Hawkes processes and doubly stochastic processes with intensity of shot noise in order to model clustering situations. This stochastic process includes externally-excited and self-excited jumps to model both exogenous and endogenous factors impact on the underlying system. Through this process, we simulated the probability of ruin of an insurance company when the size of claims follows an exponential and an Erlang type 2 distribution. The aim of the thesis is to demonstrate that the model is useful to simulate the value that a professional risk managers must allocate to determine the amount of the reserve that allows to cover all the future medical procedures of an employee whose claim is an accident or occupational disease in Colombia. This approach is based on the concepts of the Theory of Ruin and, consequently, the surplus, the net profit condition and the probability of ruin are also studied. Finally, the first approach to the calculation of the reserve for a portfolio of n insured employees is also given.

Keywords: Dynamic Contagion Process, Ruin Probability, Erlang Risk Models, Cluster Point Process, Hawkes Process.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

1. Introducción. 1

2. Marco Teórico. 5
2.1. Contagio Financiero. 5
2.2. Proceso de Apiñamiento Puntual. (*Cluster Point Process.*) 5
2.2.1. Proceso Puntual. 5
2.2.2. Proceso de Hawkes. 7
2.2.3. Proceso de Apiñamiento Puntual. 8

3. Modelo de Contagio Dinámico. 10
3.0.1. Generador Infinitesimal del proceso λ_t 13
3.0.2. Transformada de Laplace Conjunta-Función Generadora de Probabilidad de (λ_T, N_T). 14
3.0.3. Transformada de Laplace de λ_t 14
3.0.4. Función Generadora de Probabilidad de N_T. 15
3.1. Momentos de λ_t y N_T. 17
3.2. Ejemplo con saltos de distribución exponencial. 18
3.2.1. Transformada de Laplace de λ_T. 19
3.2.2. Función Generadora de Probabilidad de N_T. 20

4. Simulación. 22

5. El Problema de la Ruina y simulaciones con el Modelo de Contagio Dinámico. 27
5.1. Teoría de la Ruina. 27
5.1.1. Modelo de Cramér-Lundberg. 27
5.1.2. Desigualdad de Lundberg. 29
5.1.3. El Modelo de Contagio Dinámico en la Teoría de la Ruina. 29
5.1.4. Simulación. 29
5.1.5. Probabilidad de Ruina mediante distribuciones tipo Erlang 31
5.2. Ecuación Fundamental Generalizada de Lundberg. 33

5.3. Probabilidad de Ruina bajo la medida original. 34
5.3.1. Simulación. 34
5.4. Probabilidad de Ruina bajo el Cambio de Medida. 35
5.4.1. Aproximación de Cramér-Lundberg. 37
5.4.2. Simulación. 38

6. Aplicación del Modelo de Contagio Dinámico al Problema de la Ruina en el caso de las reservas individuales en las Administradoras de Riesgos Laborales en Colombia. 40
6.1. Aproximación al problema del portafolio. 45

7. Conclusiones. 48

A. Apéndice: Códigos y Algoritmos. 53

Lista de Figuras

2-1. Representación del Proceso de Contagio Dinámico. 9

3-1. Proceso Puntual N_t (*arriba*). Proceso de ruido con decaimiento exponencial λ_t (*abajo*). 11

4-1. Simulación de una realización del Proceso de Conteo del Proceso de Contagio Dinámico con parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 10)$. 22

4-2. Valores que toma la intensidad en los saltos tanto internos como externos para un camino del Proceso de Contagio Dinámico tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 10)$. 23

4-3. Segunda Simulación de un camino del Proceso de Contagio Dinámico tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 50)$. 24

4-4. Comparación entre trayectorias del Proceso de Conteo N_t para diferentes valores de la constante de decaimiento δ. 25

4-5. Comparación entre trayectorias del Proceso de Intensidad λ_t para diferentes valores de δ. 26

5-1. Ejemplo del superávit en el instante de tiempo T. 28

5-2. Simulación de una trayectoria del proceso de conteo N_t tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, c, X_0, T) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}0; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 0{,}7; 1{,}5; 10; 50)$. . . 30

5-3. Simulación superávit bajo la veracidad de la condición de ganancia neta. . . 30

5-4. Simulación Probabilidad de Ruina. 31

5-5. Simulación del superávit bajo la condición de ganancia neta donde el tamaño de las reclamaciones se distribuye Erlang (2). 32

5-6. Simulación Comparación entre Cotas. 35

6-1. Proceso de Conteo N_t del número reclamaciones y prestaciones asistenciales para un tiempo de 108 meses. 43

6-2. Intensidad λ_t del siniestro, número reclamaciones y prestaciones asistenciales para un tiempo de 108 meses. 44

6-3. Histograma de frecuencias procedimientos médicos y prestaciones asistenciales para un único individuo. 44

6-4. Superávit y ruina en un tiempo de 108 meses para un único empleado. . . . 45

6-5. Superávit y ruina en un tiempo de 180 meses para un único empleado. . . . 46

6-6. Histograma de frecuencias procedimientos médicos y prestaciones asistenciales para un portafolio de empleados con nivel de accidentalidad III y condiciones de género, edad, ubicación geográfica semejantes al individuo 0. 47

Lista de Tablas

4-1. Resultados Teóricos vs Simulados. 24
4-2. Comparación del número de saltos para diferentes valores de δ. 25

5-1. Comparación entre cotas para la probabilidad de ruina. 35
5-2. Estimación de la Probabilidad de Ruina para diferentes reservas iniciales x . 39

6-1. Resumen de los datos del individuo cero afiliado a la ARL. 42

1. Introducción.

El comportamiento de las reclamaciones y la probabilidad de caer en *default* de una compañía han sido motivo de investigación durante los últimos años, principalmente después de la crisis del 2007 en Estados Unidos donde la solvencia del sector financiero se vio afectada por la crisis inmobiliaria; la crisis del 2010 donde los cambios monetarios y fluctuaciones de las divisas mundiales (desvalorización del dólar) ocasionaron quiebras masivas en las empresas o, más recientemente, con la pandemia del COVID-19 que ocasionó desempleos masivos, pérdida del producto interno bruto, caída de las tasas de interés, entre otros. Luego, uno de los principales objetivos de las compañías aseguradoras es poder predecir el volumen, los tiempos de llegada y el impacto económico de las reclamaciones que se podrían llegar a recibir en épocas de crisis, ya que la mayoría de los modelos actuales no logran capturar las situaciones extremas en condiciones de alto estrés económico. Para ello es necesario construir nuevos modelos de riesgo que logren capturar dichas situaciones, es decir, modelos que puedan ayudar a simular situaciones extremas para prevenir su comportamiento y no llegar al *default*. Recientemente, y con el fin de suplir esta necesidad, han surgido distintos modelos actuariales que, en gran parte, son adaptados de procesos epidemiológicos, biológicos o financieros.

Uno de los métodos matemáticos más utilizados en la actualidad es el análisis estocástico que incorpora los cambios en la probabilidad con relación al tiempo para así identificar las diferentes fluctuaciones de los acontecimientos. El desarrollo de este método ha permitido describir y predecir el comportamiento de los seguros de acuerdo con el número de reclamaciones, severidad, frecuencia, razón de pérdida, entre otros, de manera más precisa; la teoría de ruina, a partir del modelo de riesgo colectivo propuesto por Lundberg(1903), relaciona el nivel de solvencia de una aseguradora con su cartera y capital, es decir, busca la proporción entre los ingresos por primas o capital inicial y los egresos por el costo de las reclamaciones. El modelo de riesgo de Cramér-Lundberg(1936) supone que la frecuencia de las reclamaciones sigue un proceso de Poisson con parámetro λ_t y de tal manera logra aproximar la probabilidad de ruina, solvencia y sobrevivencia de una compañía. Sin embargo, en la práctica, el modelo con esta distribución no se ajusta de la mejor manera a la realidad porque no logra capturar los choques internos y/o externos que suceden en situaciones de alta siniestralidad y que pueden afectar sensiblemente la probabilidad de ocurrencia de una reclamación, motivo por el cual se buscan nuevos métodos con el objetivo de encontrar el mejor modelo de ajuste para la ruina, entre estas nuevas alternativas se encuentran los procesos de Cox con intensidad constante o el proceso de Hawkes(1971).

Durante los últimos años, los procesos auto-excitados (proceso donde una ocurrencia causa un incremento en la función de intensidad), en particular el proceso de Hawkes, han sido usados para modelar y analizar fenómenos como lo son: riesgo de crédito, contingencias, cálculo del valor de la prima de seguro o tiempos de llegada de las reclamaciones. Estos son introducidos primero por Hawkes (1971) y luego fueron complementados por Hawkes y Oakes (1974), Brémaud and Massoulié (2002) y más recientemente por Dassios y Zhao (2011), Zhu (2015), Jaisson y Rosenbaum (2015) y Dassios, Jang y Zhao (2019). Por otro lado, Jarrow y Yu (2001) fueron los primeros en incluir la dependencia entre un proceso puntual y su intensidad, para introducir el concepto de 'contagio de crédito'. Luego, Errais, Giesecke y Goldberg (2009) evidenciaron que incluyendo el proceso de Hawkes auto-excitado (*self-excited*) al apiñamiento (*clustering*) se tenía un mejor ajuste a los problemas financieros. Además, Duffie y Gârleanu (2001) y Longstaff y Rajan (2008) incluyeron la relación de la intensidad con los factores externos del mercado financiero. Más aún, el proceso de Hawkes es aplicado en el sector actuarial por Stabile y Torrisi (2010) con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de la probabilidad de ruina en horizontes finitos e infinitos, y por Dassios y Zhao (2012) que generalizan la llegada de las reclamaciones y estiman la probabilidad de ruina mediante el Modelo de Contagio Dinámico que incluye tanto los factores endógenos como los exógenos en un solo proceso.

Por otra parte, el Modelo de Contagio Dinámico propuesto por Dassios y Zhao (2012) introduce un nuevo proceso puntual generalizando el proceso de Cox y el proceso de Hawkes para capturar los saltos externamente excitados y los saltos auto-excitados, respectivamente. En este se tienen en cuenta los parámetros de reversión a la media y decaimiento exponencial para lograr que el modelo en un tiempo finito se estabilice y capture hechos estilísticos del mercado, como es por ejemplo, el que a medida que el tiempo transcurrido después de un choque aumenta el impacto debido al mismo disminuye . El proceso de apiñamiento, el generador infinitesimal para el cambio de medida y la transformada de Laplace permitirán obtener propiedades de la nueva distribución que va a involucrar un proceso de Markov determinístico a trozos propuesto por Davis (1993) y la teoría de martingalas desarrollada por Dassios and Jang (2005).

En este trabajo se estudiará una aplicación del proceso de Contagio Dinámico propuesto por Hongbiao Zhao [28], junto con su director Angelos Dassios, en su tesis de doctorado: *A Dynamic Contagion Process for Modelling Contagion Risk in Finance and Insurance* y publicado en el artículo: *A dynamic contagion process* [8]. La aplicación actuarial de estudio utiliza el proceso de Contagio Dinámico para modelar la intensidad de llegada de las reclamaciones en una compañía de seguros, las cuales se asumen que siguen una distribución exponencial, y se obtienen las fórmulas explícitas para los momentos del proceso puntual e intensidad con el propósito de verificar que la prima cumpla con la condición de ganancia neta y dada una

reserva inicial buscar la mejor aproximación para la probabilidad de ruina mediante las cotas de Cramér-Lundberg, cuando el tamaño de las reclamaciones sigue un proceso estocástico con distribución exponencial. Finalmente, Dassios y Zhao calculan la probabilidad de ruina mediante el cambio de medida y la teoría de martingalas obteniendo una aproximación más eficiente. Para esto, se replicará el algoritmo propuesto por Dassios y Zhao para distintas trayectorias del proceso, se darán nuevas herramientas y métodos para el cálculo del proceso de intensidad, se verificará la condición de ganancia neta y sus consecuencias en la probabilidad de ruina, se utilizará para el tamaño de las reclamaciones una distribución Erlang con el fin de mostrar nuevas distribuciones en la aplicación del proceso a la teoría de ruina y se dará una aplicación concreta del modelo al caso actuarial colombiano.
Finalmente, el objetivo de este trabajo es poder calcular, mediante el Modelo de Contagio Dinámico, la reserva que debe ser destinada por una compañía de seguros para un individuo cuyo siniestro fue derivado de un accidente o enfermedad laboral. Para ello, se ajustarán los parámetros a fin de que el tamaño de las reclamaciones se ajuste bien a una distribución exponencial y se realizarán las simulaciones para distintas trayectorias del modelo y así encontrar el superávit y reserva de la compañía para no caer en ruina. Por último, se dará el primer acercamiento a la calibración del modelo para varios asegurados que conforman un portafolio en la compañía aseguradora.
La tesis está organizada de la siguiente manera:

- *Capítulo 2*: se hace una introducción a los conceptos preliminares de procesos estocásticos, teoría de la medida, economía y actuaría necesarios para el desarrollo de la tesis: proceso puntual, proceso de Hawkes, contagio financiero, entre otros. Además, se enuncian algunas propiedades relevantes que son aplicables y útiles para definir el modelo.

- *Capítulo 3*: se describe el Modelo de Contagio Dinámico presentando los resultados analíticos y matemáticos junto con sus propiedades y teoremas. En este capítulo se hace la representación matemática de los factores endógenos y exógenos que ayudan a la generalización de los procesos puntuales y de apiñamiento que permiten explicar las ecuaciones útiles para el problema de estudio.

- *Capítulo 4*: se presenta la simulación del modelo mediante la ejemplificación y el cálculo numérico para el caso particular en el que los saltos internos y externos siguen distribuciones exponenciales. Se comparan los resultados teóricos y los simulados mediante algunas trayectorias del Modelo de Contagio Dinámico. Se incluye el repositorio que contiene los códigos y algoritmos de programación (Apéndice A).

- *Capítulo 5*: se introducen las definiciones y propiedades de la teoría de la ruina haciendo énfasis en los problemas clásicos del cálculo de la condición de ganancia neta, modelo de Cramér-Lundberg y probabilidad de ruina. Finalmente, se realiza el cálculo de la

aproximación de la probabilidad de ruina mediante el proceso de Contagio Dinámico cuando las reclamaciones siguen la distribución exponencial y Erlang.

- *Capítulo 6*: se presenta una aplicación del Modelo de Contagio Dinámico a la teoría de la ruina para una compañía aseguradora poseedora de seguros con cobertura para siniestros de accidentes o enfermedades laborales. Se dan algunos resultados numéricos para el cálculo de la reserva y la probabilidad de ruina para el siniestro de un individuo en particular y se obtienen resultados para el primer acercamiento a un portafolio conformado por múltiples individuos.

- *Capítulo 7*: consiste en las conclusiones y la presentación de futuros desarrollos en la investigación en este campo a fin de conseguir una mejor aproximación de la ruina y un espectro más amplio de aplicación.

2. Marco Teórico.

2.1. Contagio Financiero.

Los modelos de contagio han venido cobrando mayor interés en los últimos años en distintos campos de aplicación como epidemiología, geología, demografía, economía, finanzas o actuaría. En estos últimos dos campos se han utilizado estos modelos para medir las fluctuaciones en los precios de bonos, acciones, flujo de capitales, tasas de interés o divisas entre países con vínculos comerciales. Además, uno de los principales objetivos ha sido encontrar el 'origen' de dichas fluctuaciones, es decir, qué procesos siguen dichas perturbaciones o si tienen algún patrón en particular. Según Masson [21], podemos definir al contagio financiero como toda aquella perturbación que se presenta en una economía local producto de una fluctuación en la economía internacional o en un país específico. Masson[21] clasifica estas fluctuaciones en:

- Efectos monsónicos: transmisión por los fundamentales de la economía, como por ejemplo las tasas de interés en Estados Unidos.
- Efecto derrame: países con vínculos económicos principales pueden trasmitir fluctuaciones en las variables a sus socios comerciales.
- Contagio puro: países con características políticas y/o económicas similares están observando a aquellos con los que tienen relaciones semejantes. En el momento en el cual evidencian volatilidad en el mercado local, retiran las inversiones, generando inestabilidad en la economía.

A continuación se presentarán las definiciones, teoremas y propiedades más importantes que permitirán construir el Modelo de Contagio Dinámico desarrollado por Dassios y Zhao [9] en el cual se basan los resultados y aplicaciones de este trabajo.

2.2. Proceso de Apiñamiento Puntual. (Cluster Point Process.)

2.2.1. Proceso Puntual.

Los procesos de punto o procesos puntuales son procesos estocásticos que se usan para modelar la ocurrencia de eventos en intervalos aleatorios de tiempo o espacio. Luego, un

proceso puntual puede verse como un conjunto de eventos discretos con intervalos aleatorios de tiempo o espacio.
Las siguientes definiciones son tomadas de las notas de Mikosch [22].
Considere una secuencia de vectores aleatorios (X_n) en un espacio E definido, definimos para un conjunto $A \subset E$:

$$N(A) = \#\{i \geq 1 : X_i \in A\}.$$

$N(A)$ es el número de vectores X_i que están en A. Luego, podemos decir que $N(A) = N(A, w)$ es aleatoria para un conjunto A y definir $N(*, w)$ como una medida de conteo ordinaria con puntos $X_i(w)$ en una $\sigma - algebra$ $\mathcal{E}$ de subconjuntos de E, para un w fijo.

Dada una secuencia $(x_i)_{i\geq 1}$ en E, se define una medida de conteo sobre $\mathcal{E}$ como:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{x_i}(A) = \#\{i \geq 1 : x_i \in A\},$$

donde $\varepsilon_{x_i}(A)$ se puede definir mediante la medida de Dirac como:

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}.$$

Se llamará medida puntual si la medida de conteo $m(K) < \infty$ se cumple para todos los conjuntos compactos K, con $K \subset E$.
Sea $M_p(E)$ el espacio de todas las medidas puntuales en E y $\mathcal{M}_p(E)$ la menor $\sigma - algebra$ que contiene todos los conjuntos de la forma

$$\{m \in M_p(E) : m(A) \in B\},$$

para todo $A \in E$ y todo conjunto de Borel $B \subset [0, \infty]$. Luego, es la menor $\sigma - álgebra$ que hace los mapas $m \to m(A)$ medibles para todo $A \in E$.

Definición 1 (Mikosch [22], página 216) *Un proceso puntual N con espacio de fase E es un mapeo medible del espacio de probabilidad subyacente Ω equipado con una $\sigma - álgebra$ $\mathfrak{F}$ a $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$, i.e.:*

$$N : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)).$$

Luego, se puede concluir que N es una función aleatoria que asume medidas puntuales como valores: para todo $w \in \Omega$ el valor de $m(*) = N(*, w)$ es una medida puntual.

Observación 1: [Ibe [16], página 401] Los procesos puntuales se pueden categorizar de acuerdo con las siguientes propiedades:

- Un proceso puntual es llamado simple si la probabilidad de que todos los puntos sean diferentes es uno.
- Un proceso puntual es llamado ordenado si no permite que pueda suceder más de un evento simultáneamente. Por lo tanto,
$$Pr[N_X(t, t+\Delta t) > 1] = o(\Delta t).$$
- Un proceso puntual es auto-excitado (*self-exciting point process*) si la ocurrencia de un evento afecta la ocurrencia de otros. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera en E con $A \cap B = \emptyset$, entonces
$$Cov\{N_X(A), N_X(B)\} > 0.$$
- Un proceso puntual es autocorregible (*self-correcting point process*) si un evento no permite la ocurrencia de otro. Con A y B como en el ítem anterior, entonces
$$Cov\{N_X(A), N_X(B)\} < 0.$$

2.2.2. Proceso de Hawkes.

Alan G. Hawkes (1971) con el fin de poder describir el comportamiento de los eventos en un periodo determinado de tiempo, introduce los llamados procesos de Hawkes los cuales permiten descifrar el comportamiento de los procesos *self-exciting* donde la ocurrencia del suceso inicial 'excita' el evento siguiente. Los procesos puntuales junto con otros procesos pueden llegar a ocasionar un agrupamiento o apiñamiento, donde la realización de un evento está directamente relacionado con el siguiente suceso. Es frecuente observar estos sucesos en el ámbito actuarial y financiero donde el *default* de una compañía ocasiona que varias transacciones se lleven o no acabo, como lo es el no pago de varias compañías simultáneamente o reclamaciones en las aseguradoras (*CDS: credit default swap*).

Definición 2 *(Hawkes [14]) Un proceso de Hawkes lineal o unidimensional es un proceso puntual N_t con filtración $\mathfrak{F}_t^N$ que cumple:*

$$P(N_{t+h} - N_t = m|\mathfrak{F}_t^N) = \begin{cases} \lambda_t h + o(h) & m = 1 \\ o(h) & m > 1 \\ 1 - \lambda_t h + o(h) & m = 0 \end{cases},$$

donde la intensidad λ_t, con constante $\lambda_0 = \lambda > 0$ respecto a la filtración $\mathfrak{F}_t^N$ es llamada intensidad de fondo y definida como:

$$\lambda_t = \lambda + \int_0^t \mu(t-s)dN(s),$$

donde la función $\mu(t)$, también conocida como función de excitación, es una función positiva que satisface

$$\int_0^\infty \mu_s ds < 1.$$

Por lo tanto, la función $\mu(t)$ es directamente proporcional a la intensidad de fondo y su función de excitación. Luego, si $\mu(0) > 0$ hay un 'disparo' en la intensidad a medida que llega un evento, ocasionando la característica de *self-exciting*. En particular, la forma más recurrente de la función $\mu(t)$ es el decaimiento exponencial donde $\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}$ para $\alpha, \beta > 0$. La intensidad del decaimiento exponencial es entonces definida por:

$$\lambda_t = \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta t} dN(s).$$

2.2.3. Proceso de Apiñamiento Puntual.

Siguiendo la teoría de Ibe [16], en el proceso de apiñamiento o agrupamiento cada punto es una realización en un instante de tiempo de un proceso puntual llamado inmigrante (pariente u ocasionador) que es usado para generar apiñamientos de puntos llamados descendientes (hijos o consecuentes). Cada grupo y punto es independiente del otro, sin embargo, las propiedades se mantienen iguales para todos, es decir, los descendientes tendrán la misma función de densidad y probabilidad que los inmigrantes. Se puede ver gráficamente a cada agrupamiento como un disco de radio R, siendo el inmigrante el centro de este.
Un proceso de apiñamiento se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. La intensidad del proceso puntual "B" (localización de los centros).

2. Disco de radio R.

3. La intensidad del agrupamiento B_R, donde B_R es la región dentro del apiñamiento.

En el ámbito financiero y actuarial son más usados los procesos donde la llegada de un inmigrante se modela con un proceso puntual de Poisson no homogéneo. Dentro de esta categoría de procesos entra el proceso de apiñamiento de Hawkes donde un inmigrante produce una serie de agrupamientos de descendientes y cada uno de esos descendientes luego producirá su propio apiñamiento con sus respectivos descendientes y así sucesivamente; cada uno de los inmigrantes llegarán en un tiempo T_i (puntos azules) y sus descendientes (puntos rojos) en un tiempo T_{ij} (Figura **2-1**). Este proceso de Hawkes será fundamental en la construcción del modelo de Contagio Dinámico con decaimiento exponencial que se presentará más adelante.

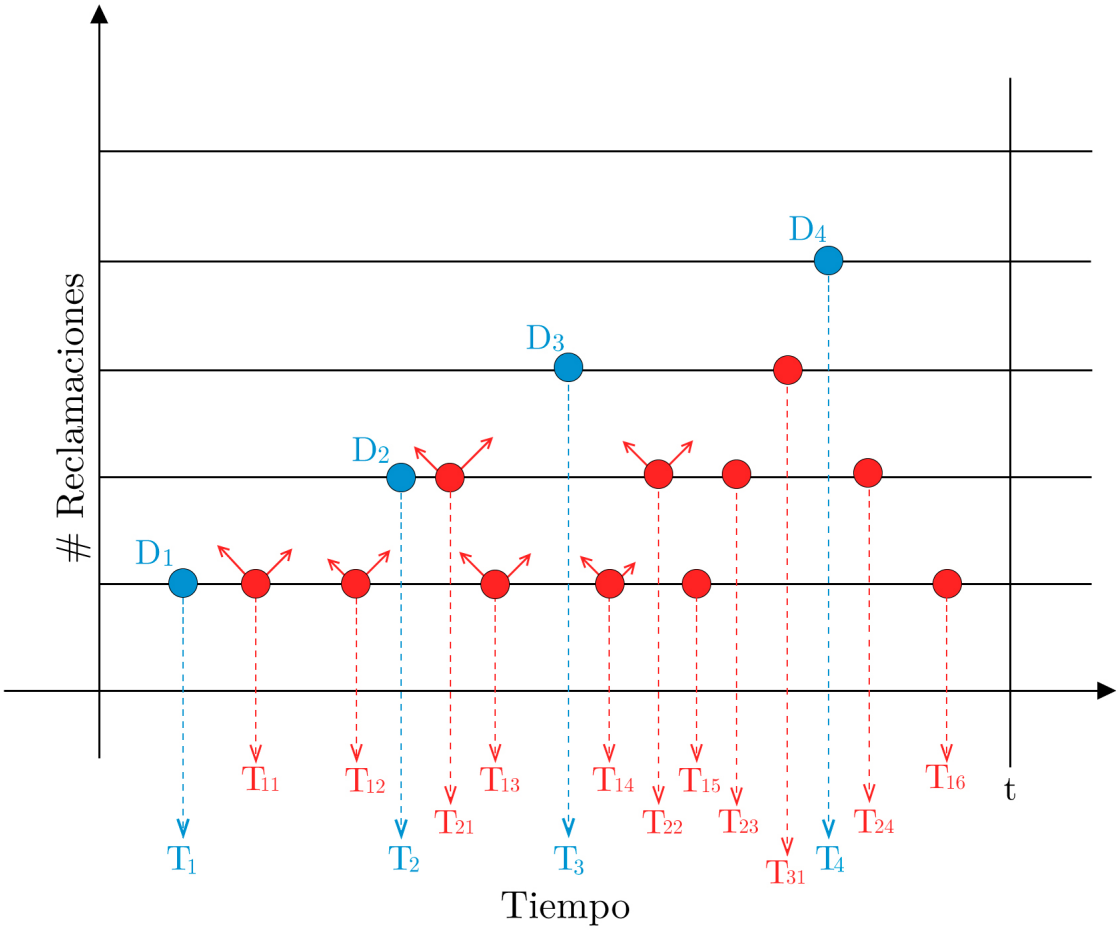

Figura 2-1.: Representación del Proceso de Contagio Dinámico.

3. Modelo de Contagio Dinámico.

Para poder abordar el Proceso de Contagio Dinámico se deben definir los procesos de Poisson compuesto no homogéneo con intensidad de ruido y el proceso de Poisson doblemente estocástico. Esto es debido a que los tiempos, frecuencia y tamaño de las reclamaciones que son recibidas por entidades financieras o aseguradoras durante periodos de estrés económico pueden ser medidos mediante un proceso estocástico que capture la magnitud y tiempo del impacto del evento. Inmediatamente después del primer evento y antes de la ocurrencia del segundo, es decir, el periodo entre eventos; el proceso estocástico disminuye hasta converger a su valor inicial. Con el fin de medir el número de reclamaciones se utiliza un proceso de Poisson en donde la intensidad del mismo se modela con un proceso de 'ruido'.

Definición 3 (Dassios y Jang [7], página 3) *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad con información $F = \{\Im_t, t \in [0,T]\}$. Sea N_t un proceso puntual adaptado a F. Sea λ_t un proceso no negativo adaptado a F tal que:*

$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty \quad , \quad \textit{casi seguramente.}$$

Si para todo $0 \leq t_1 \leq t_2$ y $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\{e^{iu(N_{t_2}-N_{t_1})}|\Im_{t_2}^{\lambda}\} = exp\{(e^{iu}-1)\int_{t_1}^{t_2} \lambda_s \; ds\},$$

donde N_t es llamado un proceso de Poisson doblemente estocástico con intensidad λ_t con $\Im_t^{\lambda} = \sigma\{\lambda_s; s \leq t\}$.

Por otra parte, si se considera el proceso agregado $X_t = \int_0^t \lambda_s ds$ se tiene:

$$\mathbb{E}(\theta^{N_{t_2}-N_{t_1}}) = \mathbb{E}\{e^{-(1-\theta)(X_{t_2}-X_{t_1})}\},$$

de donde se concluye que encontrar la distribución del proceso puntual N_t es equivalente a encontrar la distribución del proceso agregado X_t.

Definición 4 (Dassios y Jang [7], página 5) *El proceso de disparo ruido (shot noise process) usado es definido como:*

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{-\delta t} + \sum_{s_i \leq t} y_i e^{-\delta(t-s_i)} \quad , \quad \forall i, \tag{3-1}$$

donde

λ_0: *valor inicial de* λ.

y_i: *tamaño del salto del evento* i *donde* $\mathbb{E}(y_i) < \infty$.

s_i: *tiempo en el cual ocurre el evento* i *donde* $s_i < t < \infty$.

δ: *constante de decaimiento exponencial.*

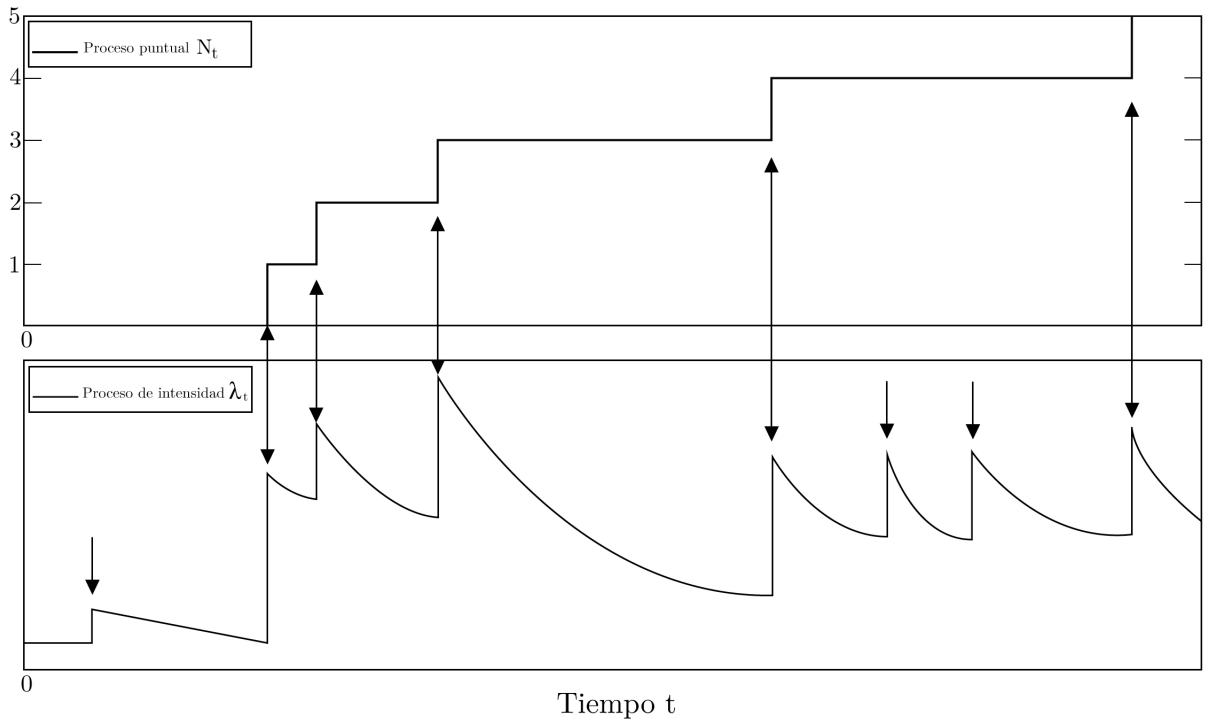

Figura 3-1.: Proceso Puntual N_t (*arriba*). Proceso de ruido con decaimiento exponencial λ_t (*abajo*).
Fuente: Adaptación propia a partir de Dassios y Zhao[8].

Definición 5 (Dassios y Zhao [8], página 2) *El proceso de Contagio Dinámico es un proceso puntual de apiñamiento* $\mathbb{D}$ *en* $\mathbb{R}_+$ *donde el número de puntos sobre el intervalo* $(0, t]$ *es definido por* $N_t = N_{\mathbb{D}(0,t]}$, *los centros de cada apiñamiento son los inmigrantes del proceso y sus descendientes los otros puntos alrededor del disco. Así, el modelo tiene la siguiente estructura:*

(a) Los inmigrantes siguen un proceso de Poisson con intensidad estocástica y un proceso de disparo de ruido con intensidad estocástica:

$$a + (\lambda_0 - a)e^{-\delta t} + \sum_{i \geq 1} Y_i e^{-\delta(t - T_i^{(1)})} \mathbb{I}\{T_i^{(1)} \leq t\}, \tag{3-2}$$

donde

$a \geq 0$ constante de reversión a la media.

$\lambda_0 > 0$ constante del valor inicial del proceso con intensidad estocástica.

δ constante de decaimiento exponencial.

$\{Y_i^{(1)}\}_{i=1,2,...}$ secuencia de saltos positivos externamente-excitados independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución $H(y)$, $y > 0$, con su correspondiente llegada en tiempos aleatorios $\{T_i^{(1)}\}_{i=1,2,...}$ siguiendo un proceso de Poisson homogéneo con constante intensidad $\rho > 0$.

$\mathbb{I}$ función indicadora.

(b) Cada inmigrante D_m genera un apiñamiento $C_m = C_{D_m}$ que es el conjunto formado por los puntos de generaciones 0,1,2,... con la siguiente estructura:

Los inmigrantes D_m se dice que son de generación 0. Dadas las generaciones $0, 1, ...j$ en C_m, cada punto $T^{(2)} \in C_m$ de generación j, genera un proceso de Poisson doblemente estocástico sobre $(T^{(2)}, \infty)$ de descendientes de generación $j + 1$ con la intensidad estocástica $Y^{(2)}e^{-\delta(-T^{(2)})}$ donde $Y^{(2)}$ es un salto positivo auto-excitado en el tiempo $T^{(2)}$ con distribución $G(y)$, $y > 0$, independiente de los puntos de generación $0, 1, ..., j$.

(c) Para cada inmigrante D_m, los apiñamientos

$$C_m - D_m = \{T^{(2)} - D_m : T^{(2)} \in C_m\}, \;\; D_m \in A,$$

son independientes e idénticamente distribuidos, además de independientes de A.
(d) $\mathbb{D}$ está conformado por la unión de todos los apiñamientos, es decir

$$\mathbb{D} = \bigcup\nolimits_{m=1,2,...} C_{D_m}, \tag{3-3}$$

Por lo tanto, el Proceso de Contagio Dinámico puede ser definido como un proceso de apiñamiento puntual $N_t \equiv \{T_k^{(2)}\}_{k\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ con intensidad $\mathcal{F}$-estocástica del proceso λ_t, no negativo que sigue la siguiente dinámica determinista a trozos, con saltos positivos, es decir:

$$\lambda(t) = a + (\lambda_0 - a)e^{-\delta t} + \sum_{i\geq 1} Y_i^{(1)} e^{-\delta(t-T_i^{(1)})} \mathbb{I}\{T_i^{(1)} \leq t\} + \sum_{k\geq 1} Y_k^{(2)} e^{-\delta(t-T_k^{(2)})} \mathbb{I}\{T_k^{(2)} \leq t\}, \tag{3-4}$$

donde

$\{\mathcal{F}_{\sqcup}\}_{t\geq 0}$ es la filtración del proceso N_t, respecto a $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ adaptado.

$\{Y_k^{(2)}\}_{k=1,2,...}$ es una sucesión de saltos positivos auto-excitados, independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución $G(y)$, $y > 0$ en los correspondientes tiempos aleatorios $\{T_k^{(2)}\}_{k=1,2,...}$

$\{Y_i^{(1)}\}_{i=1,2,\ldots}$, $\{T_i^{(1)}\}_{i=1,2,\ldots}$ y $\{Y_k^{(2)}\}_{k=1,2,\ldots}$ son sucesiones independientes entre sí.

Luego, el proceso de contagio dinámico es una pareja ordenada con dos procesos asociados, el proceso puntual N_t definido como un proceso de Poisson doblemente estocástico que corresponde al número de contagios internos que llegan en un intervalo de tiempo y un proceso de intensidad λ_t con decaimiento exponencial y reversión a la media (tendencia asintótica al valor medio) que indica la probabilidad de que en un lapso muy corto ocurra un contagio (Figura **3-1**).
Por otro lado, λ_t es un proceso de Markov debido al decaimiento exponencial δ y a su comportamiento, más aún, decrece con tasa $\delta(\lambda_t - a)$ e incurre en saltos ascendentes positivos de distribución H con parámetro ρ y saltos ascendentes positivos con distribución G de parámetro λ_t debido a los factores externos e internos, respectivamente. Por consiguiente, el proceso (N_t, λ_t) es de Markov.

3.0.1. Generador Infinitesimal del proceso λ_t

Con la ayuda de la teoría determinista a trozos del proceso de Markov y los resultados obtenidos por Davis (1984), el generador infinitesimal del proceso (λ_t, N_t, t) que actúa sobre la función $f(\lambda, n, t)$ con dominio $\Omega(\mathcal{A})$ está definido como:

$$\mathcal{A}f(\lambda,n,t) = \frac{\partial f}{\partial t} - \delta(\lambda - a)\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \rho\Big(\int_0^\infty f(\lambda + y, n, t)dH(y) - f(\lambda, n, t)\Big) + \lambda\Big(\int_0^\infty f(\lambda + y, n+1, t)dG(y) - f(\lambda, n, t)\Big), \quad (3\text{-}5)$$

donde,

$Y^{(1)}$ tamaño del salto aleatorio externamente-excitado.

$Y^{(2)}$ tamaño del salto aleatorio auto-excitado.

$H(y)$ función de distribución acumulada del tamaño del salto aleatorio $Y^{(1)}$.

$G(y)$ función de distribución acumulada del tamaño del salto aleatorio $Y^{(2)}$.

Además, $\Omega(\mathcal{A})$ es el conjunto de funciones $\mathcal{A}$ tal que $f(\lambda, n, t)$ es diferenciable con respecto a λ, t para todo λ, n y t; y,

$$\left|\int_0^\infty f(\lambda + y, n, t)dH(y) - f(\lambda, n, t)\right| < \infty,$$

$$\left|\int_0^\infty f(\lambda + z, n+1, t)dG(z) - f(\lambda, n, t)\right| < \infty.$$

La prueba puede verse en el apéndice A de Dassios, Jang y Zhao [6].

3.0.2. Transformada de Laplace Conjunta-Función Generadora de Probabilidad de (λ_T, N_T).

Consideramos la pareja ordenada con componentes λ_T y N_T deducimos la transformada de Laplace conjunta y la función generadora de probabilidad conjunta para un T fijo. Los siguientes teoremas conducen a la demostración de la transformada de Laplace para el proceso λ_T y la función generadora de probabilidad para el proceso N_T, continuo y discreto respectivamente. Además, se usarán para calcular los momentos de los procesos para un λ_0 dado.

Teorema 1 (Dassios y Zhao [28], página 5) *Para las constantes $\theta \in [0,1]$, $\nu \geq 0$ donde $0 \leq t \leq T$, para un tiempo fijo T, la transformada de Laplace y la función generadora de probabilidad conjunta para el proceso λ_t y el proceso puntual N_t está dada por:*

$$\mathbb{E}\left[\theta^{(N_T - N_t)} e^{-\nu\lambda_T} | \Im_t\right] = e^{-(c(T)-c(t))} e^{-B(t)\lambda_t}, \tag{3-6}$$

donde $B(t)$ está determinado por la ecuación diferencial no lineal con condición de frontera $B(T) = \nu$:

$$-B'(t) + \delta B(t) + \theta\ \widehat{g}(B(t)) - 1 = 0, \tag{3-7}$$

$$\widehat{g}(u) =: \int_0^\infty e^{-uy} dG(y),$$

$$c(t) = a\delta \int_0^t B(s)ds + \rho \int_0^t [1 - \hat{h}(B(s))]ds,$$

$$\hat{h}(u) =: \int_0^\infty e^{-uy} dH(y).$$

La prueba se puede ver en la página 6 de Dassios y Zhao [8].

3.0.3. Transformada de Laplace de λ_t

.

Teorema 2 (Dassios y Zhao [8], página 6) *La transformada de Laplace de λ_t con λ_0 conocido en $t = 0$ y $\delta > \mu_{1_G}$ como:*

$$\mathbb{E}[e^{-\nu\lambda_T} | \lambda_0] = exp(-\int_{\mathcal{G}_{\nu,1}^{-1}(T)}^{\nu} \frac{a\delta u + \rho[1 - \hat{h}(u)]}{\delta u + \hat{g}(u) - 1} du) \times exp(-\mathcal{G}_{\nu,1}^{-1}(T)\lambda_0), \tag{3-8}$$

donde,

$$\mu_{1_G} =: \int_0^\infty y dG(y),$$

y,

$$\mathcal{G}_{\nu,1}(L) =: \int_L^\nu \frac{du}{\delta u + \hat{g}(u) - 1}. \tag{3-9}$$

De lo anterior se deduce que la transformada de Laplace de la distribución asintótica, es decir, cuando el tiempo fijado T tiende a infinito para el proceso λ_T, está dado por:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\nu\lambda_T}|\lambda_0] = exp(-\int_0^{\nu} \frac{a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)]}{\delta u + \hat{g}(u) - 1} du). \tag{3-10}$$

Más aún, la transformada de Laplace de la distribución asintótica coincide con la distribución estacionaria del proceso $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$. La prueba se puede ver en la página 7 de Dassios y Zhao [8].

Corolario 2.1 (Dassios y Zhao [8], página 8) *Si el proceso λ_0 sigue la distribución mencionada en la ecuación (3-10) y en el Teorema 3 para cualquier $T \geq 0$, se tiene que:*

$$\mathbb{E}[e^{-v\lambda_T}] = exp(-\int_0^{\nu} \frac{a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)]}{\delta u + \hat{g}(u) - 1} du). \tag{3-11}$$

La condición $\delta > \mu_{1_G}$ se debe a que el proceso de contagio debe tener tendencia a la reversión a la media y, además, en algún momento debe detenerse el apiñamiento, es decir, la constante de decaimiento debe ser mayor que la fuerza interna de contagio. Para el caso particular aplicado a la teoría de ruina, la condición permite un primer acercamiento a la condición de ganancia neta y nos permite concluir que en algún momento un acontecimiento con alta siniestralidad comenzará a detenerse. De no cumplirse la condición, siempre se llegará a tener una reserva negativa y por lo tanto la compañía caerá en *default* con certeza.
Por otro lado, los resultados aquí presentados permiten obtener la media y la varianza del proceso λ_t a partir de los momentos de primer y segundo orden. Además, puesto que el proceso es de distribución estacionaria bajo las condiciones dadas y coincide con la distribución asintótica, se podrá concluir que para cualquier tiempo t su distribución será explícita.

3.0.4. Función Generadora de Probabilidad de N_T.

Para N_t un proceso de conteo y λ_t definida como antes, se calcula la probabilidad de tener un salto o no tener ningún salto dada una intensidad inicial λ_0 conocida y para un tiempo fijo T.

Teorema 3 (Dassios y Zhao [8], página 10) *La función generadora de probabilidad condicional de N_T dado λ_0 y $N_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$ con la condición $\delta > \mu_{1_G}$ está dada por:*

$$\mathbb{E}[\theta^{N_T}|\lambda_0] = exp(-\int_0^{\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T)} \frac{a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)]}{1 - \delta u - \theta\hat{g}(u)} du) \times exp(-\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T)\lambda_0), \tag{3-12}$$

donde

$$\mathcal{G}_{0,\theta}(L) =: \int_0^{L} \frac{du}{1 - \delta u - \theta\hat{g}(u)}. \tag{3-13}$$

Corolario 3.1 (Dassios y Zhao [8], página 12) *La función generadora de probabilidad N_T condicionada a λ_0 es una función estrictamente decreciente de tiempo T y,*

$$\lim_{T\to 0} \mathbb{E}[\theta^{N_T}|\lambda_0] = 1 \ , \ \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[\theta^{N_T}|\lambda_0] = 0. \tag{3-14}$$

Además, si el proceso λ_t es estacionario, la función generadora de probabilidad de N_T puede reescribirse como:

$$\mathbb{E}[\theta^{N_T}] = exp(-\int_0^{\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T)} \frac{-(1-\theta)\hat{g}(u)(a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)])}{(1-\delta u - \theta\hat{g}(u))(\delta u + \hat{g}(u) - 1)} du). \tag{3-15}$$

Por lo tanto, la probabilidad de no tener ningún salto o un único salto, dado λ_0 y la condición usual $\delta > \mu_{1_G}$, son respectivamente,

$$P\{N_T = 0|\lambda_0\} = exp(-\int_0^{u_T} \frac{a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)]}{1-\delta u} du) \times e^{-u_T\lambda_0}, \tag{3-16}$$

$$\begin{aligned} P\{N_T = 1|N_0\} = P(N_T = 0|\lambda_0) \times \{[a(1-e^{-\delta T}) + \rho[1-\hat{h}(u_T)] + \lambda_0 e^{-\delta T}] \\ \times \int_0^{u_T} \frac{\hat{g}(u)}{(1-\delta u)^2} du - \int_0^{u_T} \frac{\hat{g}(u)}{(1-\delta u)^2}(a\delta u + \rho[1-\hat{h}(u)])du\}, \end{aligned} \tag{3-17}$$

donde

$$u_T =: \frac{1}{\delta}(1-e^{-\delta T}).$$

Corolario 3.2 (Zhao [28], página 31) *La probabilidad de no obtener ningún salto en el proceso N_T es una función estrictamente decreciente para un T fijo, es decir:*

$$\lim_{T\to 0} P\{N_T = 0|\lambda_0\} = 1 \ , \lim_{T\to\infty} P\{N_T = 0|\lambda_0\} = 0.$$

Con este último resultado se puede verificar que la probabilidad condicional de que no haya saltos en proceso puntual N_t para el intervalo de tiempo dado no depende de la distribución de los saltos internos.
Adicionalmente, se define la función generadora de probabilidad del tamaño del apiñamiento generado por un punto de cualquier generación, de esta forma se podrá obtener el proceso de conteo del contagio generado por un punto específico.

Teorema 4 (Dassios y Zhao [8], página 13) *Para el proceso puntual N_t, la función generadora de probabilidad del tamaño del apiñamiento generado por un punto de cualquier generación, $\tilde{N}_t$, y la condición usual $\delta > \mu_{1_G}$, se tiene que*

$$\mathbb{E}[\theta^{\check{N}_t}|\check{\lambda}_0] = e^{-\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T)\check{\lambda}_0}, \tag{3-18}$$

$$\mathbb{E}[\theta^{\check{N}_\infty}|\check{\lambda}_0] = e^{-v^*\check{\lambda}_0}, \tag{3-19}$$

donde v^* es el único punto singular positivo (cuya existencia se prueba en Dassios y Zhao [8], página 13) tal que

$$0 < \tfrac{1-\theta}{\delta} < v^* \leq \tfrac{1}{\delta},$$

y $\check{\lambda}_0$ es el valor del salto asociado a un factor externo o interno. Más aún, para el apiñamiento generado por un punto de generación 0*, se deduce*

$$\mathbb{E}[\theta^{\check{N}_\infty}] = \hat{h}(v^*).$$

Mientras que para el apiñamiento generado por un punto de generaciones siguientes es:

$$\mathbb{E}[\theta^{\check{N}_\infty}] = \frac{1-\delta v^*}{\theta}.$$

3.1. Momentos de λ_t y N_T.

Los siguientes teoremas se obtienen a partir de la ecuación diferencial (3-7). Cada uno de los momentos, por definición, nos ayudarán a calcular la media y la varianza de los procesos λ_t y N_t. Además, se tomará la distribución estacionaria para eliminar la dependencia de la distribución inicial.

Teorema 5 (Dassios y Zhao [8], página 15) *El valor esperado y la varianza del proceso λ_t condicionado a λ_0 en el tiempo $t = 0$ como:*

$$\mathbb{E}[\lambda_t|\lambda_0] = \begin{cases} \frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}} + (\lambda_0 - \frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}})e^{-(\delta-\mu_{1_G})t} & si \quad \delta \neq \mu_{1_G} \\ \\ \lambda_0 + (\mu_{1_H}\rho + a\delta)t & si \quad \delta = \mu_{1_G} \end{cases}, \tag{3-20}$$

$$Var[\lambda_t|\lambda_0] = \begin{cases} \frac{1}{2(\delta-\mu_{1_G})}[\frac{\mu_{2_G}(\mu_{1_H}\rho+a\delta)}{\delta-\mu_{1_G}} - \mu_{2_H}\rho - 2\mu_{2_G}\lambda_0] & e^{-2(\delta-\mu_{1_G})t} \\ \quad + \frac{\mu_{2_G}}{\delta-\mu_{1_G}}(\lambda_0 - \frac{\mu_{1_H}\rho+a\delta}{\delta-\mu_{1_G}}) & e^{-(\delta-\mu_{1_G})t} \quad , \ si \ \delta \neq \mu_{1_G} \\ \quad + \frac{1}{2(\delta-\mu_{1_G})}(\frac{\mu_{2_G}(\mu_{1_H}\rho+a\delta)}{\delta-\mu_{1_G}} + \mu_{2_H}\rho) & \\ \frac{1}{2}\mu_{2_G}(\mu_{1_H}\rho + a\delta)t^2 + (\mu_{2_G}\lambda_0 + \mu_{2_H}\rho)t & , \ si \ \delta = \mu_{1_G} \end{cases}, \tag{3-21}$$

donde,

$$\mu_{1_H} =: \int_0^\infty y dH(y),$$

$$\mu_{2_H} =: \int_0^\infty y^2 dH(y),$$

$$\mu_{2_G} =: \int_0^\infty y^2 dG(y).$$

El siguiente corolario hace posible obtener la condición de ganancia neta para el caso en el que se estudia el momento de ruina de una compañía aseguradora. Esa condición de ganancia neta permitirá calcular el valor mínimo que deberá tener la prima para que la ruina no ocurra con probabilidad 1 antes de cierto tiempo t.

Corolario 5.1 (Dassios y Zhao [8], página 16) *Bajo la condición usual $\delta > \mu_{1_G}$, el primer momento, segundo momento y la varianza de la distribución estacionaria del proceso λ_t son*

$$\mathbb{E}[\lambda_t] = \frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}},$$

$$\mathbb{E}[\lambda_t^2] = \frac{(2(\mu_{1_H}\rho + a\delta) + \mu_{2_G})(\mu_{1_H}\rho + a\delta)}{2(\delta - \mu_{1_G})^2} + \frac{\mu_{2_H}\rho}{2(\delta - \mu_{1_G})},$$

$$Var[\lambda_t] = \frac{1}{2(\delta - \mu_{1_G})}(\mu_{2_H}\rho + \frac{\mu_{2_G}(\mu_{1_H}\rho + a\delta)}{\delta - \mu_{1_G}}).$$

Finalmente se obtienen el primer momento, segundo momento y varianza del proceso puntual N_t asumiendo la distribución límite.

Teorema 6 (Dassios y Zhao [8], página 17) *El valor esperado, los momentos y la varianza del proceso puntual N_t para el proceso λ_t con distribución estacionaria bajo la condición usual $\delta > \mu_{1_G}$ y $N_0 = 0$ está dado por:*

$$\mathbb{E}[N_t] = \frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}}t, \tag{3-22}$$

$$\mathbb{E}[N_t\lambda_t] = \bar{k}(1 - e^{-(\delta-\mu_{1_G})t}) + (\frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}})^2 t, \tag{3-23}$$

$$\mathbb{E}[N_t^2] = \frac{2}{\delta - \mu_{1_G}}(e^{-(\delta-\mu_{1_G})t} - 1) + 2\bar{k}t + (\frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}})^2 t^2, \tag{3-24}$$

$$Var[N_t] = \frac{2}{\delta - \mu_{1_G}}(e^{-(\delta-\mu_{1_G})t} - 1) + 2\bar{k}t, \tag{3-25}$$

donde,

$$\bar{k} =: \frac{2\mu_{1_G}(\mu_{1_H}\rho + a\delta) + \mu_{2_H}\rho}{2(\delta - \mu_{1_G})^2} + \frac{\mu_{2_G}(\mu_{1_H}\rho + a\delta)}{2(\delta - \mu_{1_G})^3}. \tag{3-26}$$

3.2. Ejemplo con saltos de distribución exponencial.

En esta sección se aplican los resultados obtenidos en las secciones anteriores para el caso particular donde los saltos, tanto internos como externos, se distribuyen exponencialmente, es decir,

$$h(y) = \alpha e^{-\alpha y},\ g(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y, \alpha, \beta > 0,$$

las transformadas de Laplace y medias tienen forma explícita:

$$\hat{h}(u) = \frac{\alpha}{\alpha + u} \ , \ \hat{g}(u) = \frac{\beta}{\beta + u} \ , \ \mu_{1_H} = \frac{1}{\alpha} \ , \ \mu_{1_G} = \frac{1}{\beta}.$$

Igualmente se obtiene la transformada de Laplace para el proceso continuo λ_T y la función generadora de probabilidad condicional del proceso puntual N_T.

3.2.1. Transformada de Laplace de λ_T.

Lema 7 (Dassios y Zhao [8], página 18) *Si los saltos internos y externos siguen la distribución exponencial mencionada, la transformada de Laplace condicional de λ_T dado λ_0 en el tiempo $t = 0$, bajo la condición $\delta\beta > 1$, está dada por*

$$\mathbb{E}[e^{-v\lambda_T}|\lambda_0] = e^{-(\mathcal{C}_1(v) - \mathcal{C}_1(\mathcal{G}_{\nu,1}^{-1}(T)))} e^{-\mathcal{G}_{\nu,1}^{-1}(T)\lambda_0},$$

donde,

$$\mathcal{C}_1(u) =: \begin{cases} au + \frac{\rho(\alpha-\beta)}{\delta(\alpha-\beta)+1}\ln(\alpha+u) + \frac{1}{\delta}(a + \frac{\rho}{\delta(\alpha-\beta)+1})\ln(u + \frac{\delta\beta-1}{\delta}) & si \quad \alpha \neq \beta - \frac{1}{\delta} \\ au + \frac{\rho\beta}{\delta\beta-1}\ln(\alpha+u) - \frac{\alpha\rho}{\delta(\delta\beta-1)}\frac{1}{\alpha+u} + \frac{1}{\delta}(a - \frac{\rho}{\delta\beta-1})\ln(u + \frac{\delta\beta-1}{\delta}) & si \quad \alpha = \beta - \frac{1}{\delta} \end{cases},$$

y

$$\mathcal{G}_{v,1}(L) = \frac{1}{\delta(\delta\beta - 1)}\left[\delta\beta\ln(\frac{v}{L}) - \ln(\frac{\delta v + (\delta\beta - 1)}{\delta L + (\delta\beta - 1}\right].$$

Teorema 8 (Dassios y Zhao [8], página 18) *Si los saltos internos y externos tienen distribución exponencial y bajo la condición $\delta\beta > 1$, la distribución estacionaria del proceso $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ como*

$$\lambda_t \overset{\mathcal{D}}{=} \begin{cases} a + \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2 & si \quad \alpha \geq \beta \\ a + \tilde{\Gamma}_3 + \tilde{B} & si \quad \alpha < \beta \quad y \quad \alpha \neq \beta - \frac{1}{\delta} \\ a + \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{P} & si \quad \alpha = \beta - \frac{1}{\delta} \end{cases},$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_1 \ \sim \ Gamma\left(\frac{1}{\delta}\left(a + \frac{\rho}{\delta(\alpha-\beta)+1}\right), \frac{\delta\beta - 1}{\delta}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_2 \ \sim \ Gamma\left(\frac{\rho(\alpha-\beta)}{\delta(\alpha-\beta)+1}, \alpha\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_3 \ \sim \ Gamma\left(\frac{\alpha+\rho}{\delta}, \frac{\delta\beta - 1}{\delta}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_4 \sim Gamma\left(\frac{\alpha+\rho}{\delta}, \alpha\right),$$

$$\tilde{B} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{N_1} X_i^{(1)}, \quad N_1 \sim NegBin\left(\frac{\rho}{\delta}\frac{\beta-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), \quad X_i^{(1)} \sim Exp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1 = max\left\{\alpha, \frac{\delta\beta-1}{\delta}\right\}, \ \gamma_2 = max\left\{\alpha, \frac{\delta\beta-1}{\delta}\right\},$$

$$\tilde{P} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{N_2} X_i^{(2)}, \quad N_2 \sim Poisson\left(\frac{\rho}{\delta^2\alpha}\right), \quad X_i^{(2)} \sim Exp(\alpha).$$

3.2.2. Función Generadora de Probabilidad de N_T.

Teorema 9 (Dassios y Zhao [8], página 20) *Si los saltos internos y externos siguen la distribución exponencial mencionada, la función generadora de probabilidad de N_T dado λ_0 y $N_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$, bajo la condición $\delta\beta > 1$, está dada por*

$$\mathbb{E}[\theta^{N_T}|\lambda_0] = e^{-\left(\mathcal{C}_2(\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T))-\mathcal{C}_2(0)\right)} e^{-\mathcal{G}_{0,\theta}^{-1}(T)\lambda_0} \quad \alpha \neq -v_-^*,$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2(u) =: -au &+ \frac{\alpha(\beta-\alpha)\rho}{\delta(\alpha+v_-^*)(\alpha+v^*)} \ln(u+\alpha \\ &+ \frac{1}{\delta(v^*-v_-^*)}\left\{\left[a(v_-^*+(1-\theta)\beta)+\rho v_-^*\frac{\beta+v_-^*}{\alpha+v_-^*}\right]\ln(u-v_-^*)\right. \\ &\left. - \left[a(v^*+(1-\theta)\beta)+\rho v^*\frac{\beta+v^*}{\alpha+v^*}\right]\ln(v^*-u),\right.\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{G}_{0,\theta}(L) = K(L) - K(0), \qquad 0 \leq L < v^*,$$

donde

$$K(u) =: -\frac{1}{\delta(v^*-v_-^*)}\left[(v^*+\beta)\ln(v^*-u) - (v_-^*+\beta)\ln(u-v_-^*)\right], \qquad 0 \leq u < v^*,$$

$$v^* = \frac{\sqrt{\Delta}-(\delta\beta-1)}{2\delta} > 0,$$

$$-\beta \leq v_-^* = -\frac{\sqrt{\Delta}+(\delta\beta-1)}{2\delta} < 0,$$

$$\Delta = (\delta\beta+1)^2 - 4\theta\delta\beta > 0, \qquad 0 \leq \theta < 1.$$

Corolario 9.1 (Dassios y Zhao [8], página 21) *Si los saltos internos y externos siguen la distribución exponencial mencionada, la probabilidad condicional de no tener saltos y de tener exactamente un salto, dado λ_0 y $N_0 = 0$, bajo la condición usual, están dadas por:*

$$P\{N_T = 0|\lambda_0\} = e^{-(a+\frac{\rho}{1+\delta\alpha})T} e^{\frac{a-\lambda_0}{\delta}(1-e^{-\delta T})} \left(\frac{1-e^{-\delta T}+\delta\alpha}{\delta\alpha}\right)^{\frac{\alpha\rho}{1+\delta\alpha}},$$

y

$$\begin{aligned} P\{N_T = 1|\lambda_0\} = P\{N_T = 0|\lambda_0\} \times [(H_T + a\delta\beta - \rho)Q_T - a\beta(e^{\delta T} - 1) \\ + \rho\frac{\alpha\beta}{1+\delta\beta}\left(\bar{a}\ln\frac{\alpha+u_T}{\alpha} - \bar{b}\ln\frac{\beta+u_T}{\beta} + \bar{c}T + \bar{d}(e^{\delta T}-1)\right)], \end{aligned}$$

donde

$$H_T = \left(a + \tfrac{\rho}{\delta\alpha+1-e^{-\delta T}}\right)(1-e^{-\delta T}) + \lambda_0 e^{-\delta T},$$

$$Q_T = \tfrac{\beta}{1+\delta\beta}\left[\tfrac{1}{1+\delta\beta}\ln\left(\tfrac{\beta+u_T}{\beta}\right) + \delta T + (e^{\delta T}-1)\right],$$

$$u_T = \tfrac{1}{\delta}(1-e^{-\delta T}),$$

$$\bar{a} = \tfrac{1}{1+\delta\beta}\tfrac{1}{\beta-\alpha} + \tfrac{\delta}{1+\delta\alpha}\left(\tfrac{1}{1+\delta\beta} + \tfrac{1}{1+\delta\alpha}\right),$$

$$\bar{b} = \tfrac{1}{1+\delta\beta}\tfrac{1}{\beta-\alpha},$$

$$\bar{c} = \tfrac{\delta^2}{1+\delta\alpha}\left(\tfrac{1}{1+\delta\beta} + \tfrac{1}{1+\delta\alpha}\right),$$

$$\bar{d} = \tfrac{\delta}{1+\delta\alpha}.$$

Teorema 10 (Dassios y Zhao [8], página 23) *Si los saltos internos y externos siguen la distribución exponencial mencionada, entonces para el tamaño del apiñamiento generado por un punto de cualquier generación $\check{N}_t$, con la condición usual, como*

$$\mathbb{E}[\theta^{\check{N}_\infty}|\check{\lambda}_0] = exp\left(-\frac{\sqrt{(\delta\beta-1)^2 + 4\delta\beta(1-\theta)} - (\delta\beta-1)}{2\delta}\check{\lambda}_0\right), \tag{3-27}$$

además,

$$P\left[\check{N}_\infty|\check{\lambda}_0\right] = \int_0^\infty \frac{v^k e^{-v}}{k!} m(v)\ dv, \tag{3-28}$$

donde $m(v)$ es la función de densidad de la distribución mixta, más precisamente una distribución inversa Gaussiana con parámetros $(\frac{\beta}{\delta\beta-1}\check{\lambda}_0, \frac{\beta}{2\delta}\check{\lambda}_0{}^2)$.

4. Simulación.

Se realizará la simulación del proceso de contagio dinámico mediante el algoritmo propuesto por Dassios y Zhao [9] donde los saltos internos y externos siguen una distribución exponencial de parámetros α y β, respectivamente. La simulación fue programada en el software Python y se usaron las librerías de Matlab para las gráficas de sus procesos e intensidades. Debido a la longitud de los códigos estos pueden ser consultados en el repositorio que se encuentra en el apéndice A.

Para la primera simulación se modela trayectorias del proceso (N_t, λ_t). Los parámetros considerados para las siguientes simulaciones fueron elegidos cumpliendo con la condición $\delta\beta > 1$ únicamente, estos son:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 10).$$

Para cada trayectoria obtenida se pueden obtener la sucesión de tiempos T_i donde ocurren ambos saltos y asignarle los saltos internos al proceso de conteo N_t (Figura **4-1**). Por otra parte, para cada instante de tiempo se tiene el valor de la intensidad generada por tamaño de salto de distribución exponencial, tanto para los saltos internos como para los externos. (Figura **4-2**)

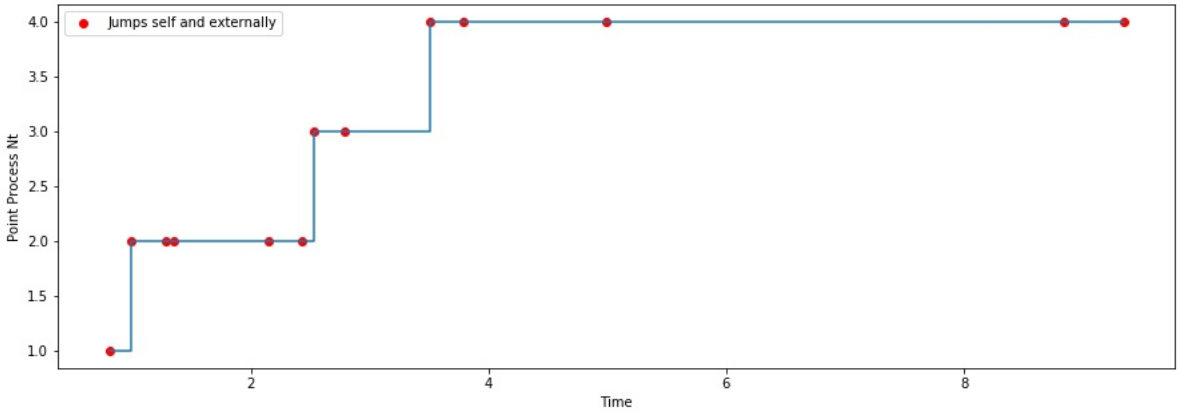

Figura 4-1.: Simulación de una realización del Proceso de Conteo del Proceso de Contagio Dinámico con parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 10)$.

De la simulación para esta única realización de la trayectoria del proceso se observa que para una ventana de tiempo de $t = 10$, se obtuvieron 4 saltos internos y la intensidad más alta

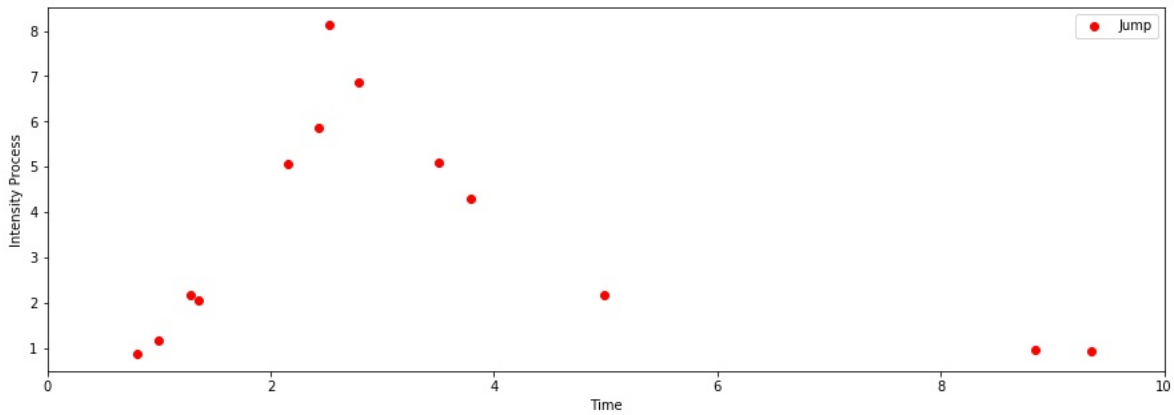

Figura 4-2.: Valores que toma la intensidad en los saltos tanto internos como externos para un camino del Proceso de Contagio Dinámico tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 10)$.

fue cercana a 8 (Figura **4-1**). Sin embargo, dado que el algoritmo propuesto no contempla el seguimiento del decaimiento entre los tiempos de los saltos, se procede a realizar un nuevo camino con la inclusión de la secuencia entre saltos.

Para esta segunda simulación se realiza nuevamente un sólo camino con los mismos parámetros, pero con una ventana de tiempo superior a la primera simulación:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 50).$$

En esta segunda simulación el número de saltos internos después de recorrer un camino fueron 33 y la intensidad del proceso máxima fue de 10 desde $t = 0$ hasta $t = 50$ (Figura **4-3**). En la tercera gráfica podemos observar el decaimiento exponencial entre los tiempos de los saltos con el fin de conocer la intensidad del proceso en cualquier instante de tiempo t.
Con el fin de poder evidenciar que los parámetros coinciden con lo planteado teóricamente en las secciones anteriores, se realizará una tercera simulación del algoritmo para 10.000 caminos donde se calculará la media de los saltos internos y se calcularán sus diferencias y errores respecto a la teoría (Tabla **4-1**). Los parámetros elegidos para la simulación son:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0; 2{,}0; 0{,}5; 2{,}5; 4{,}0; 0{,}5; 100).$$

Por lo tanto, se puede evidenciar que el algoritmo describe de forma adecuada los resultados propuestos para el caso donde los saltos siguen distribución exponencial.

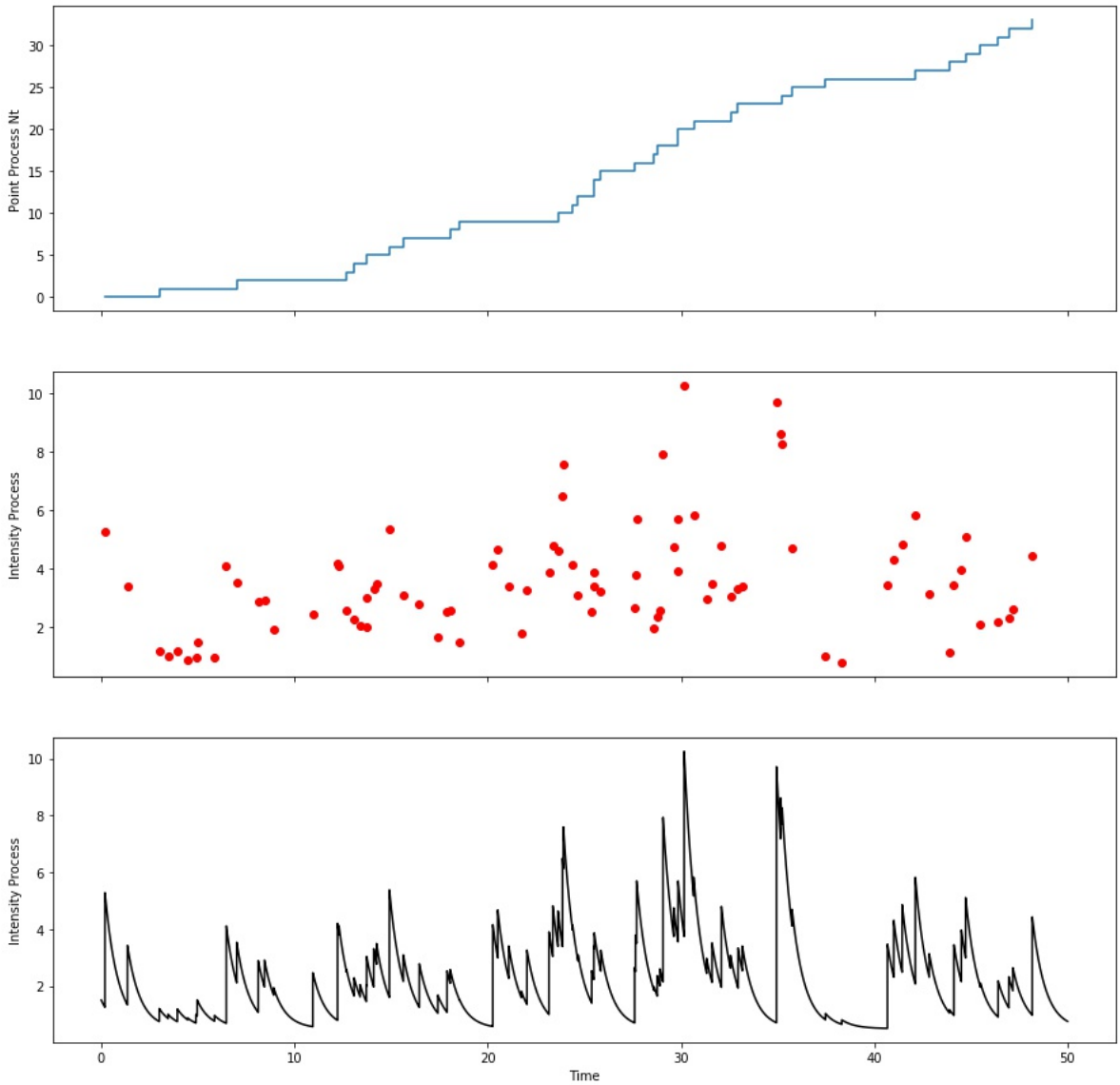

Figura 4-3.: Segunda Simulación de un camino del Proceso de Contagio Dinámico tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 50)$.

Resultado	Valor
Media teórica	309.2
Media Simulada	307.9
Diferencia	-1.3
Error	-0.004
Error Estándar	0.4929

Tabla 4-1.: Resultados Teóricos vs Simulados.

Para la última simulación del proceso se realizaron 10000 caminos del Modelo de Contagio Dinámico mediante la variación de la constante de decaimiento exponencial. Se evidenció que a medida que el valor de δ aumenta, la cantidad de saltos disminuye significativamente (Figura **4-5**). Por otro lado, la intensidad del proceso muestra que a medida que el valor de δ incrementa se llega en menor tiempo a la reversión a la media y, a pesar de que su intensidad tiene valores similares, la intensidad entre los tiempos entre saltos es mucho menor. La Tabla **4-2** muestra la diferencia entre la media de los saltos teóricos y la media simulada para distintos valores de delta con el fin de verificar el correcto funcionamiento del algoritmo.

$$(a, \rho, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}0; 0{,}5; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 400).$$

δ	Media Teórica	Media Simulada
2.0	75.609	75.608
3.0	43.24	43.07
4.0	30.28	30.08
5.0	23.29	23.27

Tabla 4-2.: Comparación del número de saltos para diferentes valores de δ.

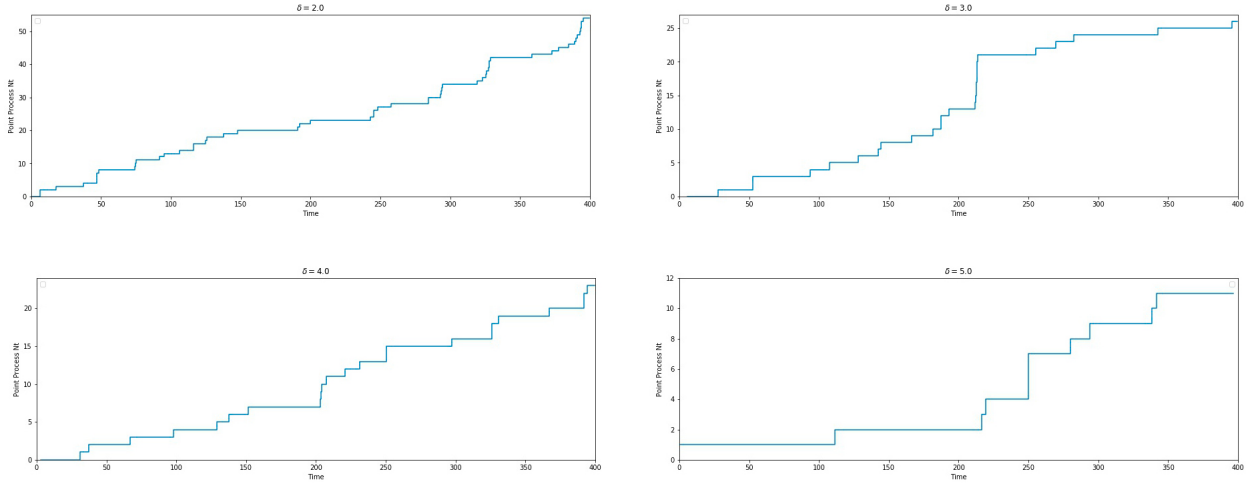

Figura 4-4.: Comparación entre trayectorias del Proceso de Conteo N_t para diferentes valores de la constante de decaimiento δ.

Se dejará para futuras investigaciones las posibles implicaciones y aplicaciones de los cambios en los valores de la constante de decaimiento exponencial. Una propuesta es mirar la posibilidad de hacerla dependiente del tiempo o incluso del tamaño del salto inmediatamente anterior pues es claro que 'la vuelta a la normalidad"no podrá ser igual si el 'choque"que generó el salto es mayor o menor.

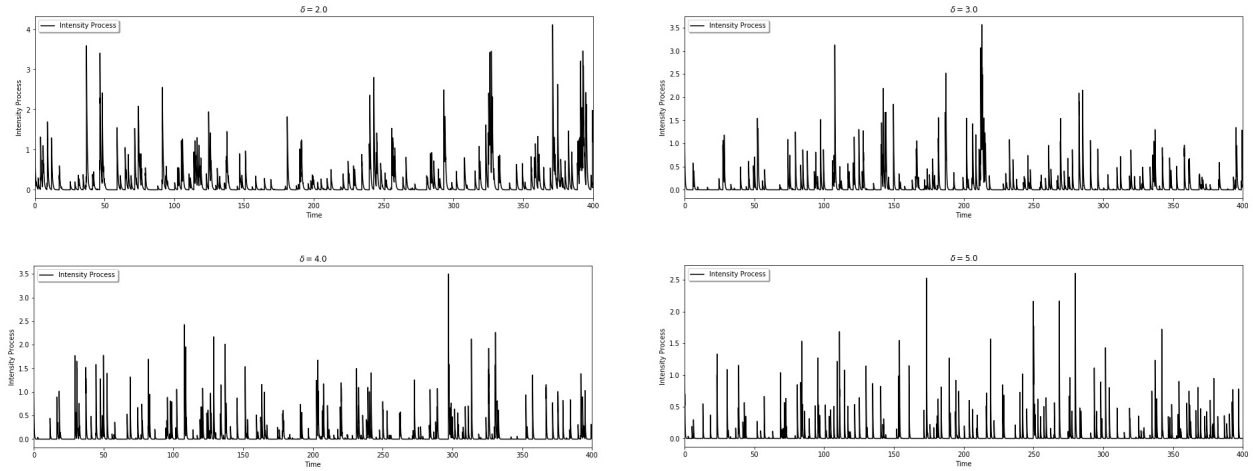

Figura 4-5.: Comparación entre trayectorias del Proceso de Intensidad λ_t para diferentes valores de δ.

La simulación de un solo camino del proceso del Modelo de Contagio Dinámico tiene un tiempo de realización de 0,008 segundos. Mientras que la simulación para 10000 caminos tiene un tiempo promedio de 30,6 segundos. Luego, el algoritmo propuesto es eficiente para calcular la intensidad, número y tiempos de los saltos debido a factores endógenos y exógenos usando el modelo de Contagio Dinámico. Todos los códigos usados para la replicación del modelo fueron subidos al repositorio que se encuentra en el apéndice A. El dispositivo usado para la simulación fue un computador portátil con procesador AMD Ryzen 5 3500U con Radeon Vega Mobile Gfx 2.10 GHz y memoria RAM de 8 GB.

5. El Problema de la Ruina y simulaciones con el Modelo de Contagio Dinámico.

5.1. Teoría de la Ruina.

La teoría de riesgo analiza cómo, cuándo y por qué una aseguradora puede tener una reserva negativa en un determinado tiempo considerando, un capital inicial, el número de reclamaciones y el costo de cada una. Para ello, utiliza modelos predictivos y el cálculo de la probabilidad de ruina con el fin de incluir fluctuaciones y/o el riesgo que conlleva. Sin embargo, los estudios más recientes se concentran en responder a la pregunta: ¿Cuál es el tiempo en el que se dará la ruina? o, más aún, ¿cuál es el tiempo límite de solvencia de la aseguradora?.
En este capítulo se presenta la definición usual de superávit, el modelo clásico de ruina y los fundamentos de la teoría de riesgo.

5.1.1. Modelo de Cramér-Lundberg.

Para poder definir el modelo clásico de riesgo se debe tener en cuenta el capital inicial de la compañía (x), la prima(c), el tamaño o monto de los reclamos (Z_t) y el número de ellos ($N(t)$) que llegan a la compañía en el horizonte de tiempo $(0, T)$. Las reclamaciones llegan en tiempos aleatorios de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo de intensidad $\lambda > 0$, por lo cual se tiene que el capital de la compañía en el tiempo t es:

$$X(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \tag{5-1}$$

donde el valor de $X(t)$ en el instante de tiempo t es conocido como el superávit de la compañía aseguradora.

El primer objetivo es conocer en qué instante o intervalo de tiempo la aseguradora caerá en ruina (Figura **5-1**). Para ello, se definen la probabilidad de ruina $\psi(x)$ y la probabilidad de sobrevivencia $\phi(x)$ de la compañía, para un tiempo $t > 0$ y un tiempo en el ocurre la ruina

T (Figura **5-1**),

$$\psi(x) = Pr(X(t) < 0|X(0) = x) = P\{T < \infty\}, \tag{5-2}$$

$$\phi(x) = 1 - \psi(x), \tag{5-3}$$

$$T = min\{t : X(t) < 0\}.$$

Por lo tanto, de 5-1 el valor esperado del capital de la compañía en el tiempo t se define como,

$$E[X(t)] = t(c - \lambda x),$$

$$c > \lambda x.$$

Lo cual implicaría que para tener ganancia neta, la prima c siempre debe ser mayor al pago esperado de las reclamaciones. Más aún, su diferencia $\lambda x - c$ se designa como $\theta\lambda x$, donde θ es el cargo relativo por seguridad.

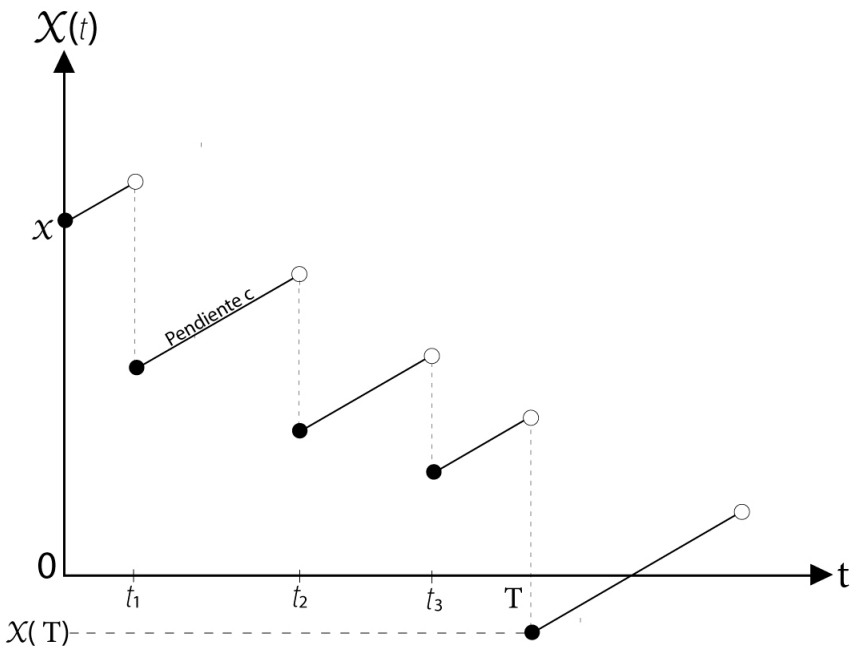

Figura 5-1.: Ejemplo del superávit en el instante de tiempo T.
Fuente: Adaptación propia a partir de Moreno, L. [23]

Teorema 11 (Moreno L. [23], página 96) *Para $u \geq 0$ y el coeficiente de ajuste R, la probabilidad de ruina $\psi(u)$ está dada por:*

$$\psi(x) = \frac{e^{-Rx}}{E[e^{-RX(T)} \mid T < \infty]}. \tag{5-4}$$

La prueba se puede ver en la página 96 de las notas de Moreno [23]

5.1.2. Desigualdad de Lundberg.

A partir del teorema anterior se puede aproximar el denominador suponiendo que los reclamos tienen distribución exponencial, de esta forma se obtiene la desigualdad de Lundberg como:

$$\psi(x) > e^{-R(x+m)}, \tag{5-5}$$

donde m es el valor máximo de los reclamos.

5.1.3. El Modelo de Contagio Dinámico en la Teoría de la Ruina.

Un proceso de Cox se caracteriza por ser un proceso de Poisson con intensidad estocástica, para el caso particular de estudio del modelo de Contagio Dinámico, el proceso N_t es un proceso de conteo con intensidad estocástica λ_t, definida anteriormente. Además, los tamaños de cada reclamación se asumirán independientes e idénticamente distribuidas con media, transformada de Laplace de la función de densidad y cola dadas por:

$$\mu_{1_Z} =: \int_0^\infty z dZ(z) \ , \ \hat{z}(u) =: \int_0^\infty e^{-uz} dZ(z) \ , \ \bar{Z}(x) =: \int_x^\infty dZ(s).$$

Considerando la distribución estacionaria del modelo de contagio dinámico definida en (8), la probabilidad de ruina está dada por:

$$P\left\{t > 0, X_t \leq 0 | X_0 = x, \lambda_0 \sim \Pi\right\},$$

donde Π es la función de densidad de λ con transformada de Laplace dada por (3-10).
Por último, la condición de ganancia neta debe modificarse para considerar ahora la esperanza del proceso de conteo N_t, por lo tanto,

$$c > \frac{\mu_{1_H}\rho + a\delta}{\delta - \mu_{1_G}} \mu_{1_Z}. \tag{5-6}$$

La prueba se puede ver en la página 70 de Dassios y Zhao [9].

5.1.4. Simulación.

Para realizar la simulación del Modelo de Contagio Dinámico en [8] y su aplicación a la ruina se asume que el tamaño de las reclamaciones siguen distribución exponencial, que la condición de ganancia neta se mantiene y la condición estacionaría λ_t se cumple. Los parámetros para la simulación son:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, c, X_0, T) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}0; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 0{,}7; 1{,}5; 10; 50).$$

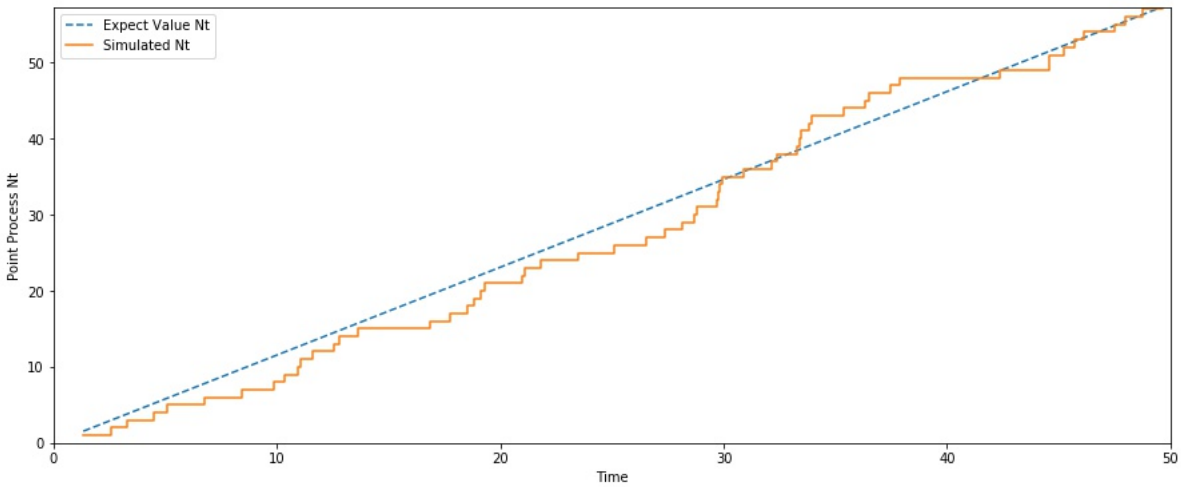

Figura 5-2.: Simulación de una trayectoria del proceso de conteo N_t tomando como parámetros $(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, c, X_0, T) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}0; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 0{,}7; 1{,}5; 10; 50)$.

Mientras la condición de ganancia neta se cumpla durante todo el proceso, se concluye que nunca ocurrirá la ruina, es decir, dado un capital inicial x_0 nunca se llegará a tener un superávit de 0. En la figura **5-3** se evidencia que dada una reserva de 10 unidades y un periodo de 50, la ruina nunca ocurre y en cambio su superávit llega a un valor superior a 25 unidades, llegando a más del doble en esa ventana de tiempo.

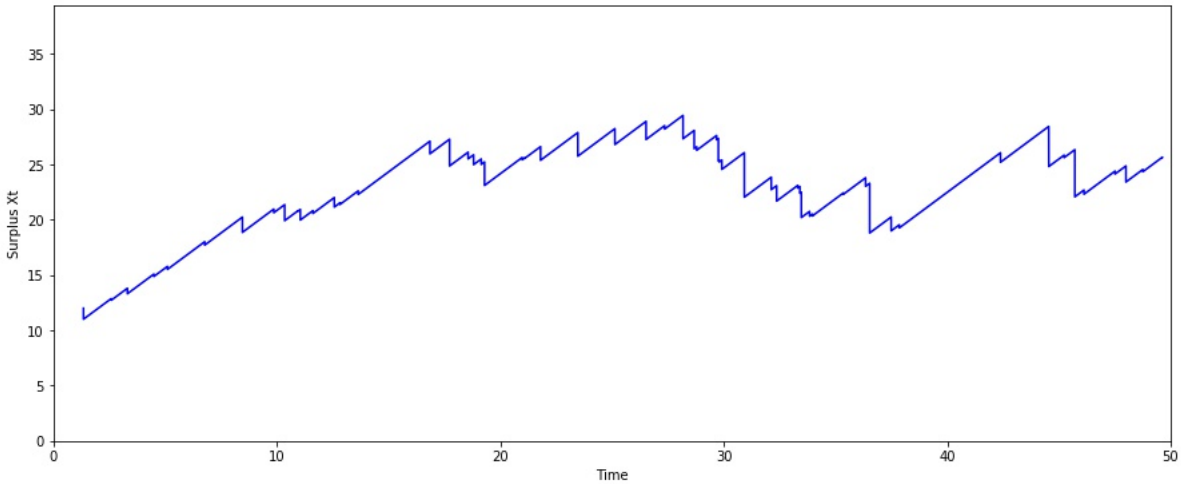

Figura 5-3.: Simulación superávit bajo la veracidad de la condición de ganancia neta.

Sin embargo, si se cambia la prima c a un valor de 0,8 con los mismos parámetros y bajo la misma simulación del proceso de Contagio Dinámico se tiene la convergencia deseada. El cálculo se realiza mediante 100 simulaciones del proceso y se encuentra la probabilidad de que el superávit sea menor o igual a cero, para este caso se obtiene el ruido correspondiente

pero con una asíntota cercana a 0,30, más exactamente la probabilidad de ruina máxima es 0,27 (Figura **5-4**). Cabe aclarar que dado que es imposible simular tiempos infinitos se aproxima su valor para un t lo suficientemente grande, en la simulación se realiza para un máximo de $t = 800$.

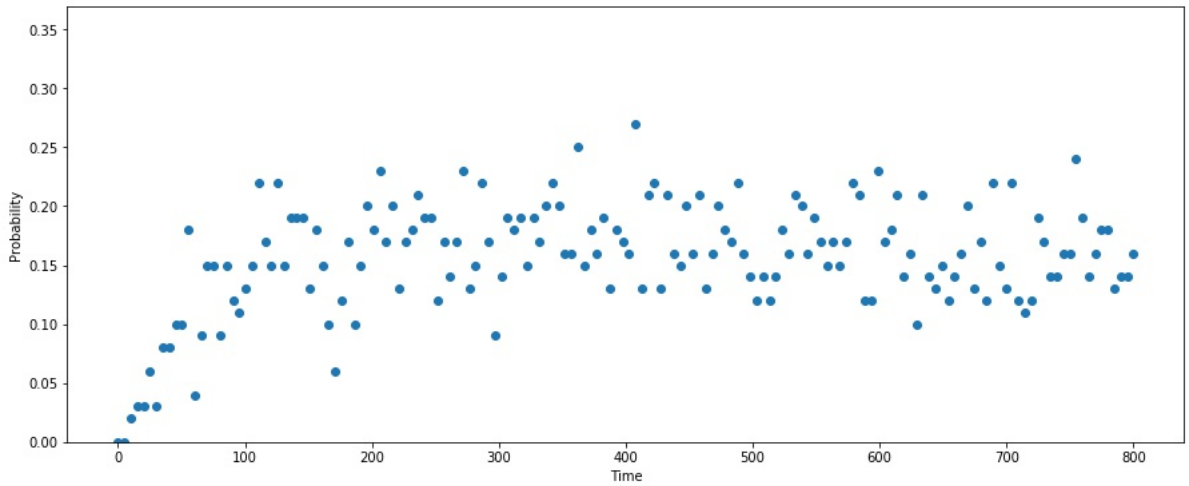

Figura 5-4.: Simulación Probabilidad de Ruina.

5.1.5. Probabilidad de Ruina mediante distribuciones tipo Erlang

Modelos recientes de riesgo se han concentrado en dar soluciones numéricas o aproximaciones usando la distribución tipo Erlang(n) para calcular la probabilidad de ruina. Dickson y Li (2012) [13] introducen los cálculos para las distribuciones de Erlang tipo 2 junto con los resultados para la transformada de Laplace; y más recientemente Cheng, Hou y Wang (2020) [4] utilizan métodos analíticos y *machine learning*; para calcular la solución numérica de la ecuación integro-diferencial para la probabilidad de ruina en Erlang tipo 2. Por lo tanto, en este trabajo se quiso explorar el caso en que los saltos del Modelo de Contagio Dinámico se distribuyen exponencial y se realiza la simulación del superávit cuando el tamaño de las reclamaciones siguen distribución Erlang tipo 2.
La transformada de Laplace para la distribución Erlang tiene solución explícita (ver 5-7) que se obtiene como

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \mathcal{L}\left\{e^{-\lambda x} x^{k-1}\right\},$$

dado que,

$$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d}{ds^n}(F(s)),$$

se tiene,

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}(-1)^{k-1}\frac{d}{ds^{(k-1)}}\left(\frac{1}{\lambda+s}\right). \tag{5-7}$$

Ahora bien, los parámetros usados para la simulación fueron los mismos que los utilizados para la distribución exponencial con el fin de contrastar ambos resultados:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_0, c, X_0, T) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}0; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 0{,}7; 1{,}5; 10; 50),$$

donde el tamaño de las reclamaciones siguen la distribución Erlang tipo 2.

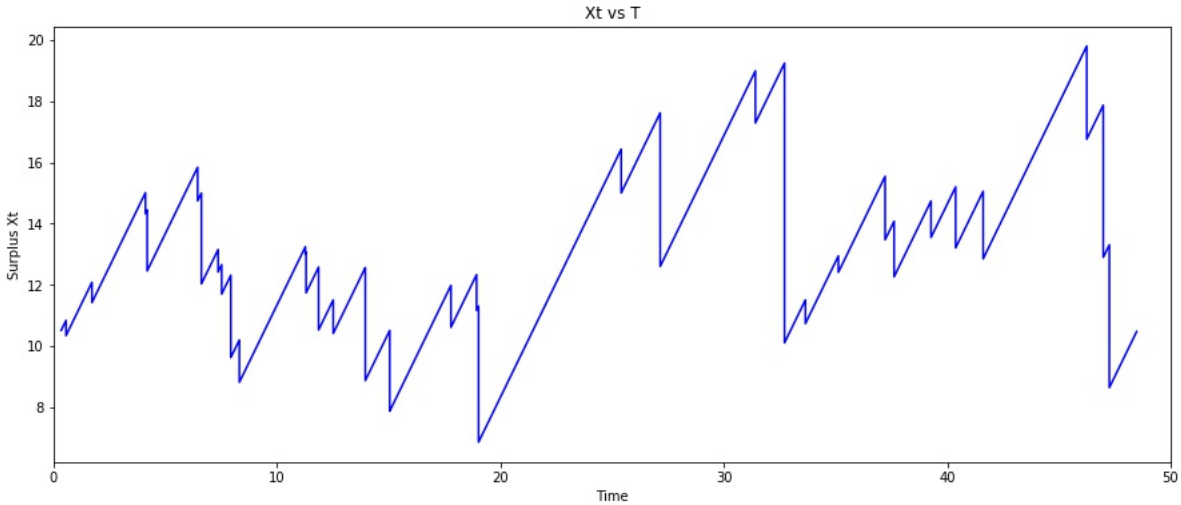

Figura 5-5.: Simulación del superávit bajo la condición de ganancia neta donde el tamaño de las reclamaciones se distribuye Erlang (2).

A diferencia de la simulación con distribución exponencial se puede concluir que la distribución tipo Erlang permite obtener saltos de mayor tamaño para el superávit y en algunos lapsos ser muy inferior a la reserva inicial, pero su mayor implicación surge al tener en una ventana de 50 un valor muy aproximado al de la reserva inicial, es decir, el valor recaudado por primas durante el periodo se utiliza para cumplir con el monto de las reclamaciones en el mismo lapso y así obtener valores muy cercanos a la reserva inicial cuando la condición de ganancia neta se satisface.
Se dejará para futuros trabajos investigar sobre el comportamiento las cotas a la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones se distribuyen Erlang(n).

5.2. Ecuación Fundamental Generalizada de Lundberg.

Los siguientes teoremas, definiciones y lemas, ayudan a formular la probabilidad de ruina en situaciones de alta siniestralidad. Para ello, se generalizará la ecuación de Cramér-Lundberg y se enunciarán las martingalas exponenciales correspondientes.
Cada uno de los siguientes teoremas asume que se cumple $\delta > \mu_{1_G}$ y la condición de ganancia neta (5-6).

Teorema 12 (Zhao [28], página 71) *Considere el proceso martingala*

$$e^{-v_r X_t} e^{\eta_r \lambda_t} e^{-rt} \ , \ r \geq 0,$$

donde las constantes r, v_r y η_r satisfacen la ecuación fundamental generalizada de Lundberg

$$\begin{cases} -\delta\eta_r + \hat{z}(-v_r)\hat{g}(-\eta_r) - 1 = 0 \\ \rho(\hat{h}(-\eta_r) - 1) - r + a\delta\eta_r - cv_r = 0 \end{cases}. \tag{5-8}$$

Si $0 \leq r < r^*$, entonces (5-8) tiene una única solución positiva ($v_r^+ > 0$, $\eta_r^+ > 0$) donde

$$r^* =: \rho(\hat{h}(-\eta^*) - 1) + a\delta\eta^*, \tag{5-9}$$

y η^* es la única solución positiva que satisface

$$1 + \delta\eta_r = \hat{g}(-\eta_r). \tag{5-10}$$

Lema 13 (Zhao [28], página 73) *Existe una única solución positiva η_r^+ y una única solución negativa η_r^- para η_r de la ecuación fundamental generalizada de Lundberg (5-8). Además, para $r = 0$ existe la solución cero y una única solución η_0^+.*

Para encontrar la solución positiva de v_r únicamente se considerará la solución positiva η_r^+ para $r \geq 0$. Siguiendo el lema anterior se tiene,

$$v_r^+ = -\frac{r - a\delta\eta_r^+ + \rho(1 - \hat{h}(-\eta_r^+))}{c}. \tag{5-11}$$

En particular, para el caso cuando $r = 0$, se tiene la martingala $e^{-v_0^+ X_t} e^{\eta_0^+ \lambda_t}$, donde (v_0^+, η_0^+) es la única solución positiva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\delta\eta_0^+ + \hat{z}(-v_0^+)\hat{g}(-\eta_0^+) - 1 = 0 \\ \rho(\hat{h}(-\eta_0^+) - 1) + a\delta\eta_0^+ - cv_0^+ = 0 \end{cases}. \tag{5-12}$$

Cada uno de los lemas y teoremas anteriores son útiles para obtener la transformación que permite el cambio de medida y la mejor aproximación para las cotas de Cramér-Lundberg. El cambio de medida se realiza con el objetivo de garantizar que la probabilidad de ruina sea cierta en un intervalo de tiempo $(0, t]$ y así obtener resultados más acordes a lo que se esperaría en situaciones de alta siniestralidad.

5.3. Probabilidad de Ruina bajo la medida original.

Teorema 14 (Zhao [28], página 75) *La probabilidad de ruina condicionada a λ_0 y x_0 bajo la medida original está dada por:*

$$P\left\{\tau^* < \infty | x_0,\ \lambda_0 = \lambda\right\} = \frac{e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}}{\mathbb{E}[e^{-v_0^+ X_{\tau^*}} e^{\eta_0^+ \lambda_{\tau^*}} | \tau^* < \infty; x_0 = x,\ \lambda_0 = \lambda]}.$$

La demostración puede verse en la página 75 de Zhao [9].

Además, si las reclamaciones internas se distribuyen exponencial, es decir, $Z \sim Exp(\gamma)$, la probabilidad de ruina es:

$$P\left\{\tau^* < \infty | x_0,\ \lambda_0 = \lambda\right\} = \frac{\gamma - v_0^+}{\gamma} \frac{e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}}{\mathbb{E}[e^{\eta_0^+ \lambda_{\tau^*}} | \tau^* < \infty; x_0 = x,\ \lambda_0 = \lambda]}. \tag{5-13}$$

Por lo tanto, se pueden obtener las cotas de la probabilidad de ruina como:

$$P\left\{\tau^* < \infty | x_0,\ \lambda_0 = \lambda\right\} < \frac{e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}}{\mathbb{E}[e^{\eta_0^+ \lambda_{\tau^*}} | \tau^* < \infty; x_0 = x,\ \lambda_0 = \lambda]} < e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}. \tag{5-14}$$

De igual manera, cuando las reclamaciones se distribuyen exponencial la cota es:

$$P\left\{\tau^* < \infty | x_0,\ \lambda_0 = \lambda\right\} < \frac{\gamma}{\gamma - v_0^+} e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}. \tag{5-15}$$

La prueba se puede ver en la página 76 de Zhao [9].

5.3.1. Simulación.

En esta simulación se calcularán las cotas de la probabilidad de ruina cuando los saltos internos y externos siguen distribución exponencial. Las cotas estimadas para la probabilidad de ruina son mostradas teniendo como parámetros,

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, , c, X_0) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}5; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 0{,}8; 10),$$

donde la única solución a la ecuación (5-12) que satisface las propiedades dadas son los valores de $(\eta_0^+, v_0^+) = (0{,}1270, 0{,}1708)$.
Los resultados mostrados en la Tabla **5-1**, evidencian que la aproximación para la probabilidad de ruina es menor cuando se utilizan distribuciones exponenciales sin importar la intensidad inicial del proceso y a medida que aumenta la intensidad, la diferencia entre las dos cotas es más evidente. En la gráfica **5-6** se muestran las cotas obtenidas para la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones siguen cualquier distribución y se comparan con el caso donde siguen la distribución exponencial mostrando que a medida que aumentan los valores en la intensidad la diferencia con la distribución exponencial es más drástica.
Los códigos de simulación para las cotas de la probabilidad de ruina podrán ser consultados en el repositorio que se encuentra disponible en el Apéndice A.

$\lambda_0 = \lambda$	Cota superior$^{(1)}$: $e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}$	Cota superior$^{(2)}$: $\frac{\gamma - v_0^+}{\gamma} e^{-v_0^+ x} e^{\eta_0^+ \lambda}$
1	20.58 %	17.06 %
2	23.36 %	19.37 %
3	26.53 %	22.00 %
4	30.12 %	24.98 %
5	34.2 %	28.36 %
6	38.83 %	32.20 %
7	44.09 %	36.56 %
8	50.07 %	41.51 %
9	56.85 %	47.14 %
10	64.55 %	53.52 %
11	73.29 %	60.77 %
12	83.22 %	69.00 %

Tabla 5-1.: Comparación entre cotas para la probabilidad de ruina.

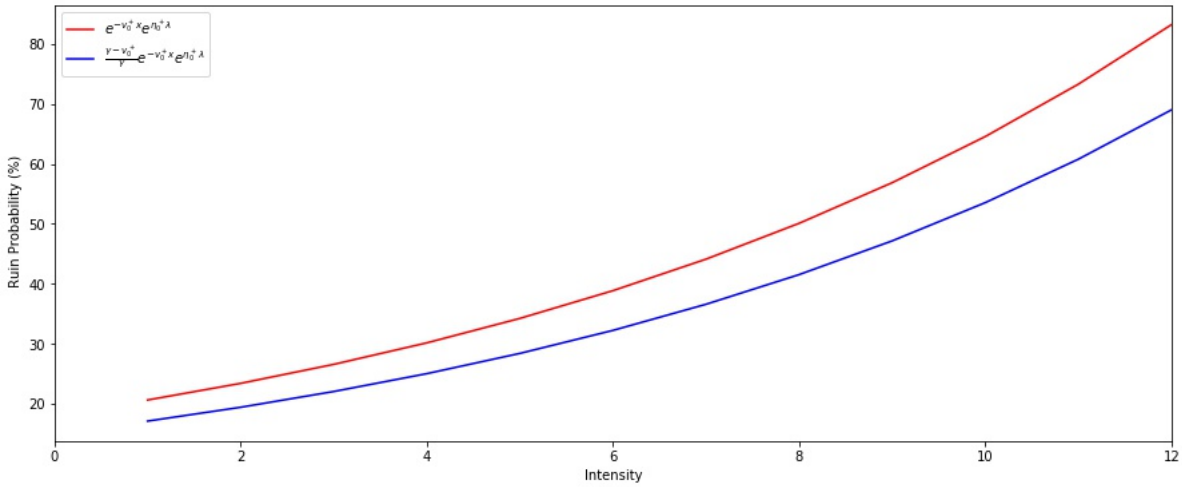

Figura 5-6.: Simulación Comparación entre Cotas.

5.4. Probabilidad de Ruina bajo el Cambio de Medida.

Dadas las martingalas, propiedades y teoremas previos, se pueden obtener mejores resultados asintóticos y una mejor aproximación a la probabilidad de ruina mediante el cambio medida. La principal diferencia bajo esta nueva medida respecto a la original es que la probabilidad de ruina ocurre con valor de 1 para algún tiempo t^*, es decir, la ruina es cierta. Estos resultados son más acordes a lo que se experimentaría en situaciones de alta siniestralidad (i.e. catástrofe natural) donde el número de eventos internos pueden hacer que la reserva destinada para ellos sea menor o igual a cero. Además, la simulación será más eficiente dado que en la medida original la ruina no necesariamente ocurre para algún intervalo de tiempo

$(0, t)$.
Los siguientes teoremas y resultados serán la base que permitirán la simulación de la probabilidad de ruina bajo la nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Teorema 15 (Zhao [28], página 77) *La probabilidad de ruina bajo la nueva medida* $\tilde{\mathbb{P}}$ *puede ser expresada por:*

$$\tilde{P}\left\{\tau^* < \infty | x_0,\ \lambda_0 = \lambda\right\} = e^{-v_0^+ x} e^{m_0^+ \tilde{\lambda}} \mathbb{E}[\Psi(X_{\tau^*}) \frac{e^{-m_0^+ \tilde{\lambda}_{\tau_-^*}}}{\hat{g}(-\eta_0^+)} | X_0 = x,\ \lambda_0 = \lambda],$$

donde,

$$\tilde{\lambda} =: (1 + \delta\eta_0^+)\lambda,$$

$$m_0^+ = \frac{\eta_0^+}{\delta\eta_0^+ + 1},$$

$$\Psi(x) = \frac{\bar{Z}(x) e^{v_0^+ x}}{\int_x^\infty e^{v_0^+ z} dZ(z)}.$$

Además, si se asume que la condición de ganancia neta se cumple bajo la medida $\mathbb{P}$ original y, en ambas medidas, se satisface la condición de distribución estacionaria. Los nuevos parámetros $(X_t, \tilde{\lambda}_t)$ bajo la nueva medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ son:

$$\tilde{a} = (1 + \delta\eta_0^*)a,$$

$$\tilde{c} = c,$$

$$\tilde{\delta} = \delta,$$

$$\tilde{\rho} = \hat{h}(-\eta_0^*)\rho,$$

$$\tilde{\tilde{g}}(u) = \frac{\tilde{g}(\frac{u}{1+\delta\eta_0^*})}{1+\delta\eta_0^*},$$

$$\tilde{\tilde{h}}(u) = \frac{\tilde{h}(\frac{u}{1+\delta\eta_0^*})}{1+\delta\eta_0^*},$$

$$d\tilde{Z}(z) = \frac{e^{v_0^+ z} dZ(z)}{\hat{z}(-v_0^+)},$$

$$d\tilde{G}(u) = \frac{e^{\eta_0^+ u} dG(u)}{\hat{g}(-\eta_0^+)} = \tilde{g}(u)du,$$

$$d\tilde{H}(u) = \frac{e^{\eta_0^+ u} dH(u)}{\hat{h}(-\eta_0^+)} = \tilde{h}(u)du,$$

$$d\tilde{\tilde{G}}(u) = \tilde{\tilde{g}}(u)du,$$

$$d\tilde{\tilde{H}}(u) = \tilde{\tilde{h}}(u)du.$$

La demostración puede verse en la página 79 de Zhao [9].
Para el caso particular de estudio donde las reclamaciones se distribuyen exponencial la función de cambio de medida es simplificada como:

$$\Psi(x) = \frac{e^{-\gamma x} e^{v_0^+ x}}{\int_x^\infty e^{v_0^+ z} \gamma e^{-\gamma z} dz} = \frac{\gamma - v_0^+}{\gamma}.$$

5.4.1. Aproximación de Cramér-Lundberg.

Teorema 16 (Zhao [28], página 82) *Si se supone que las reclamaciones se distribuyen exponencial y la intensidad sigue distribución estacionaria bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$, la probabilidad de ruina es:*

$$\tilde{P}\left\{\tau^* < \infty | X_0 = x\right\} = \frac{\gamma - v_0^+}{\gamma \hat{g}(-\eta_0^+)} \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{m_0^+ \tilde{\lambda}}\right] \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-m_0^+ \tilde{\lambda}_{\tau_-^*}} | X_0 = x\right] e^{-v_0^+ x}. \tag{5-16}$$

Luego, la aproximación de Cramér-Lundberg está dada por:

$$P\left\{\tau^* < \infty | X_0 = x\right\} \sim C e^{-v_0^+ x}, \tag{5-17}$$

donde,

$$C =: \frac{\gamma - v_0^+}{\gamma \hat{g}(-\eta_0^+)} \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{m_0^+ \tilde{\lambda}}\right] \frac{\frac{1}{\tilde{\gamma}} \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-m_0^+ \tilde{\lambda}} \tilde{\lambda}\right] - \tilde{c} \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-m_0^+ \tilde{\lambda}_{\tau_-^*}} | X_0 = 0\right]}{\frac{1}{\tilde{\gamma}} \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\lambda}] - \tilde{c}}.$$

El siguiente corolario permitirá realizar los cálculos de la probabilidad de ruina más eficiente bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Corolario 16.1 (Zhao [28], página 84) *Dada la constante de Cramér-Lundberg se pueden derivar los siguientes resultados:*

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\lambda}] = \frac{\tilde{a}\tilde{\delta} + \tilde{\rho}\mu_{1_{\tilde{\tilde{H}}}}}{\tilde{\rho} - \mu_{1_{\tilde{\tilde{G}}}}},$$

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{m_o^+ \tilde{\lambda}} \tilde{\lambda}] = exp\left(\int_{-m_o^+}^0 \frac{\tilde{a}\tilde{\delta}u + \tilde{\rho}[1 - \hat{\tilde{\tilde{h}}}(u)]}{\tilde{\delta}u - 1 + \hat{\tilde{\tilde{g}}}(u)} du\right),$$

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{-m_o^+ \tilde{\lambda}} \tilde{\lambda}] = \frac{\tilde{a}\tilde{\delta} m_0^+ \tilde{\rho}[1 - \hat{\tilde{\tilde{h}}}(m_0^+)]}{\tilde{\delta} m_0^+ - 1 + \hat{\tilde{\tilde{g}}}(m_0^+ rr)} exp\left(-\int_0^{m_o^+} \frac{\tilde{a}\tilde{\delta}u + \tilde{\rho}[1 - \hat{\tilde{\tilde{h}}}(u)]}{\tilde{\delta}u - 1 + \hat{\tilde{\tilde{g}}}(u)} du\right),$$

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\lambda}] > \tilde{c}\tilde{\gamma}.$$

Para el caso en el que las reclamaciones tienen distribución exponencial, las expresiones del corolario anterior se pueden simplificar y expresar como:

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\lambda}] = \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{a}\tilde{\delta}\tilde{\alpha})\tilde{\beta}}{(\tilde{\beta}\tilde{\delta} - 1)\tilde{\alpha}},$$

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{-m_o^+\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}] = e^{-m_0^+\tilde{a}}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} + m_0^+}\right)^{\kappa}\left(\frac{\tilde{\delta}\tilde{\beta} - 1}{\tilde{\delta}m_0^+ + \tilde{\delta}\tilde{\beta} - 1}\right)^{\omega}\frac{\tilde{a}\tilde{\delta} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\alpha}+m_0^+}}{\tilde{\delta} - \frac{1}{\tilde{\beta}+m_0^+}},$$

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{m_o^+\tilde{\lambda}}] = e^{m_0^+\tilde{a}}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - m_0^+}\right)^{\kappa}\left(\frac{\tilde{\delta}\tilde{\beta} - 1}{-\tilde{\delta}m_0^+ + \tilde{\delta}\tilde{\beta} - 1}\right)^{\omega},$$

donde,

$$\kappa = \frac{\tilde{\rho}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{\tilde{\delta}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) + 1},$$

$$\omega = \frac{1}{\tilde{\delta}}\left(\tilde{a} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\delta}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) + 1}\right).$$

5.4.2. Simulación.

Se dará un ejemplo numérico de los resultados anteriores bajo el cambio de medida para el caso en el que el tamaño de las reclamaciones se distribuyen exponencial con parámetro γ y $\alpha \geq \beta$. Los parámetros en la medida original que son utilizados para la simulación de cada uno de los caminos son:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, c) = (0{,}7; 0{,}5; 2{,}5; 2{,}0; 1{,}5; 1{,}0; 1{,}5),$$

donde gracias a los resultados obtenidos anteriormente se cumple tanto la condición estacionaria como la de ganancia neta. Luego, se puede calcular, a partir de la generalización de la ecuación fundamental de Lundberg, para el caso cuando $r = 0$ las soluciones

$$(\eta_0^+, v_0^+) = (0{,}127; 0{,}171).$$

Adicionalmente, de este resultado y mediante el teorema anterior podemos obtener los parámetros en la nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$ donde la condición estacionaria se mantiene pero la condición de ganancia neta no se satisface debido a que la ruina ocurre con probabilidad de 1 para algún tiempo τ. Los parámetros en la nueva medida son:

$$(\tilde{a}, \tilde{\rho}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{c}, m_0^+, \tilde{\lambda}) = (0{,}9223; 0{,}5339; 2{,}5; 1{,}4215; 1{,}042; 0{,}8292; 1{,}5; 0{,}0964; 0{,}9223),$$

y por lo tanto, se pueden calcular explícitamente $\tilde{\mathbb{E}}[e^{m_o^+\tilde{\lambda}}] = 1{,}1901$, $\tilde{\mathbb{E}}[e^{-m_o^+\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}] = 1{,}3928$. Haciendo 10000 simulaciones bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ se pudo obtener la estimación para $\tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-m_0^+\tilde{\lambda}_{\tau^*_-}}|X_0 = 0\right] =$

0,8453. Por último, se halló la constante de Cramér $C \approx 0{,}6206$ lo que permitió calcular la probabilidad de ruina,

$$\tilde{P}\left\{\tau^* < \infty | X_0 = x\right\} \sim Ce^{-v_0^+ x} \approx 0{,}6217e^{-0{,}171x}.$$

La siguiente tabla muestra la estimación de la probabilidad de ruina mediante la simulación desarrollada en la nueva medida para cada valor de reserva inicial x.

x	$P\left\{\tau^* < \infty \| X_0 = x\right\}$
4.0	0.313
6.0	0.222
8.0	0.158
10.0	0.112
12.0	0.0799
14.0	0.0568
16.0	0.04035
18.0	0.02868
20.0	0.02038
22.0	0.0145
24.0	0.01029
26.0	0.00731
28.0	0.00519
30.0	0.00369

Tabla 5-2.: Estimación de la Probabilidad de Ruina para diferentes reservas iniciales x .

El tiempo de ejecución del algoritmo para el cálculo del valor esperado $\tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-m_0^+ \tilde{\lambda}_{\tau_-^*}} | X_0 = 0\right]$ corriendo las 10000 simulaciones fue, en promedio, de 105.3 segundos permitiendo realizar el cálculo de la probabilidad de ruina en un tiempo aproximado de 106.2 segundos y para distintas valores de x en 106.21 segundos. La eficiencia de los algoritmos y su simulación puede ser consultada en el repositorio disponible en el Apéndice A.

6. Aplicación del Modelo de Contagio Dinámico al Problema de la Ruina en el caso de las reservas individuales en las Administradoras de Riesgos Laborales en Colombia.

En el año 1994 se crea en Colombia el Sistema General de Riesgos Profesionales con el decreto ley 1295 de 1994. Este decreto crea las Administradoras de Riesgos Profesionales (ARP), después modificado con la ley 1562 de 2012 que las convierte en Administradoras de Riesgos Laborales (ARL), con el objetivo de cubrir los gastos que puedan llegar a surgir por accidentes de trabajo y enfermedades laborales. La ley 1562 de 2012 en su artículo primero define al Sistema de Riesgos Laborales como: "El conjunto de entidades públicas y privadas, normas y procedimientos, destinados a prevenir, proteger y atender a los trabajadores de los efectos de las enfermedades y los accidentes que puedan ocurrirles con ocasión o como consecuencia del trabajo que desarrollan."(Ley N 1562, 2012).

Los afiliados al sistema deberán ser todos los trabajadores dependientes vinculados mediante un contrato escrito o verbal con una duración superior a un mes, los trabajadores independientes que cumplan con actividades de alto riesgo o los trabajadores independientes o informales que voluntariamente decidan aportar, siempre y cuando coticen también al régimen contributivo de salud. Según el Artículo 6 de la misma ley el monto de la cotización no podrá ser inferior al 0,348 % ni superior al 8,7 % del ingreso base de cotización medido según el riesgo al que es expuesto el empleado en el desarrollo de sus labores. En el momento en que ocurra un siniestro la ARL pagará a las Entidades Promotoras de Salud (EPS) el valor de las prestaciones asistenciales y económicas derivadas del accidente o enfermedad laboral. Luego, el afiliado será cubierto por su ARL en todos los tratamientos, asistencias, incapacidades y demás servicios que se originen debido al siniestro hasta el momento de su recuperación o deceso.

Algunas compañías aseguradoras dentro de sus servicios tienen la administración de los riesgos laborales cuya función es recaudar el valor de las primas procedentes de la afiliación de

cada empleado. En el momento de ocurrencia de un siniestro la compañía deberá crear una reserva para las posibles prestaciones asistenciales, incapacidades temporales, gastos siniestros u otras contingencias que desencadene el evento. En la actualidad, para el cálculo de la reserva se categoriza por tipo de accidente y mediante métodos estadísticos se estima su valor de acuerdo al histórico de liquidación pero no se utiliza ningún modelo matemático. Por lo tanto, y con el fin de poder tener un modelo que incluya las fluctuaciones, eventos y dinámica para el cálculo de la reserva, se propone el Modelo de Contagio Dinámico.

El objetivo principal de la sección es dar el primer acercamiento al cálculo de la reserva para un único individuo. No obstante, en el ámbito asegurador se tienen en cuenta las primas colectivas para el cálculo de la reserva, es decir, no se toma un solo trabajador sino todos las primas recolectadas son usadas en el momento del siniestro ya sea individual o grupal. En futuras investigaciones se realizará la aplicación del modelo para varios individuos con mismo nivel de riesgo o múltiples empleados de una compañía sin importar su nivel de riesgo. La información que aquí se utilizó para modelar corresponde al de un único individuo, cuya identificación se desconoce y fue suministrada con fines académicos por el señor Andrés Vesga, actuario de la Compañía de Seguros Bolívar S.A., a quien agradecemos sus aportes para enriquecer el modelo.
Para poder abordar el problema se realizarán los siguientes supuestos:

- Se asumirá como salto interno, y así mismo incremento en el proceso de conteo, a toda aquella intervención médica, gasto asistencial, operacional o médico y/o servicios derivados del accidente o enfermedad laboral.

- El salto externo es el accidente o enfermedad en la que incurrió el empleado mientras ejercía sus funciones.

- Los tiempos T_i entre reclamaciones para el individuo siguen una distribución exponencial con parámetro conocido.

- La constante de reversión a la media es igual a cero. Este supuesto es plausible ya que en algún momento la compañía deberá dejar de pagar por los gastos médicos que acarrea el individuo, ya sea por recuperación total, incapacidad permanente con derecho a pensión vitalicia o deceso. El mismo supuesto fue consultado con uno de los autores del Modelo de Contagio Dinámico, quien además confirmó la utilización del mismo supuesto para el caso que estudia recientemente relativo al contagio por COVID-19 en China [3].

- Se supone una intensidad estocástica inicial de 0,3 acorde al porcentaje de probabilidad de accidentalidad registrado por Fasecolda.

- Tipo de accidentalidad Riesgo III equivalente al 2,436 % del salario del empleado. Para este supuesto se consideró únicamente la actividad económica que desarrollaba el

empleado, sin tener en cuenta género, edad, lugar geográfico donde laboraba, ni otras posibles variables.

- Tiempo de ahorro de la prima individual igual a 60 meses a partir de la fecha de vinculación. Se supone que el empleado no tuvo ningún siniestro durante sus primeros 5 años de trabajo, motivo por el cual la compañía tenía disponible en su reserva la prima pagada por el empleador o empleado durante ese periodo.

- Se supone que los rendimientos obtenidos por la cotización en la aseguradora equivalen al incremento en el valor del salario mínimo al momento de la fecha del siniestro.

- El sueldo del empleado corresponde a 3 salarios mínimos mensuales legales vigentes (SMMLV) dado que no se posee la información exacta de lo devengado por el empleado.

- Los intervalos de tiempo son mensuales debido a la cantidad de eventos que se tienen del individuo.

La siguiente tabla muestra el tamaño de las reclamaciones, tiempo y conteo de los procedimientos médicos otorgados por la aseguradora para el individuo de estudio, también llamado individuo cero, para los conceptos de Prestaciones Asistenciales, Gastos Siniestros, Incapacidad Permanente Parcial o Muerte Accidental (Tabla **6-1**).

Número de procedimientos médicos	165
Fecha del siniestro	11/03/2011
Fecha aviso siniestro	21/09/2011
Fecha último movimiento	30/10/2020
Valor máximo de la reclamación	$2'516.350
Valor mínimo de la reclamación	$7.800
Media del valor de las reclamaciones	$420.267
Desviación estándar	$408.342
Total valor de las reclamaciones	$68'434.847

Tabla 6-1.: Resumen de los datos del individuo cero afiliado a la ARL.

Cabe aclarar que para la adaptación de los datos al modelo se sumaron las prestaciones asistenciales que tuvieron lugar (o fueron reportadas a la aseguradora) el mismo día, se omitieron los valores negativos y el valor de la incapacidad permanente parcial para el conteo de los saltos internos.

Para la calibración de los parámetros restantes del modelo se utilizó la estimación por el método de error cuadrático medio (MSE) siguiendo el mismo proceso utilizado por Chen,

et. al. [3]. El error cuadrático medio entre los incrementos mensuales esperados de N_t y los confirmados por la aseguradora está dado por:

$$MSE(\alpha, \beta, \delta, \rho) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t] - C_{t+1} \right)^2 ,$$

esta fórmula permite obtener varias soluciones para el mismo modelo motivo por el cual se tomará los parámetros que resulten en el menor error promedio cuadrado para la calibración.

Siguiendo los supuestos y los datos dados, los parámetros del modelo son:

$$(a, \lambda_0, \rho, \delta, \alpha, \beta, \gamma, T) = (0; 0{,}3; 9{,}616243; 1{,}153579; 6{,}913208; 5{,}615616; \tfrac{1}{447736}; 108),$$

$$(SMMLV, n, riesgo, t_{ahorro}) = (877803; 3; 0{,}02436; 60),$$

$$(c, x_0) = (64149; 3848990).$$

El proceso de conteo N_t y la intensidad correspondiente a los saltos internos y externos para un solo individuo evidencia que para un tiempo de 108 meses el número de siniestros es aproximadamente 158 (Figura **6-1**) con una intensidad estocástica máxima aproximada de 3.5 (Figura **6-2**). Además, al realizar diez mil simulaciones del camino, la media del proceso de conteo es 153.
Al simular mil trayectorias para el individuo cero se obtiene que el número de procedimientos médicos oscila entre 99 y 203 para el intervalo de 9 años lo cual constituye un resultado muy cercano a la realidad evidenciada, este es un buen indicativo de la calidad en la calibración y selección de los parámetros (Figura **6-3**).

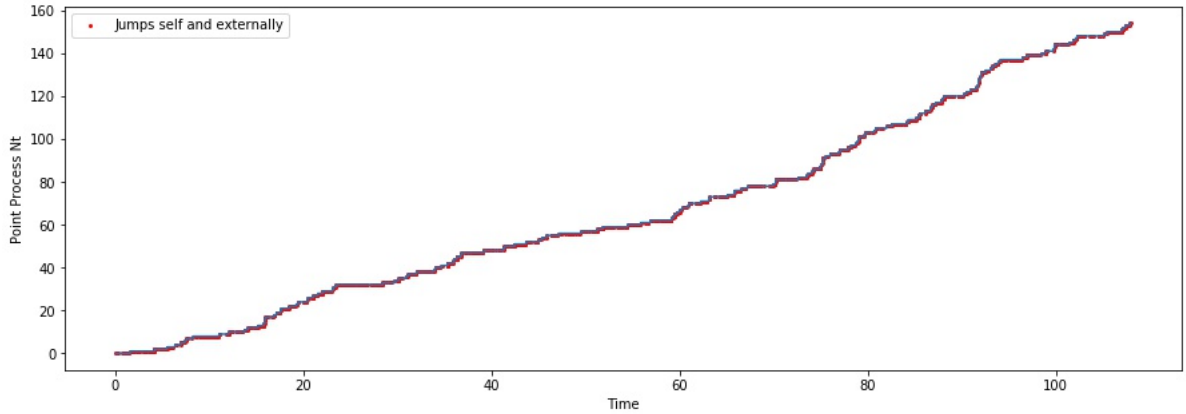

Figura 6-1.: Proceso de Conteo N_t del número reclamaciones y prestaciones asistenciales para un tiempo de 108 meses.

Por otro lado, se procede a simular el superávit X_t con el fin de calcular el valor de la reserva que debe ser destinada por el Grupo Bolívar y el costo total de los siniestros. Calculando

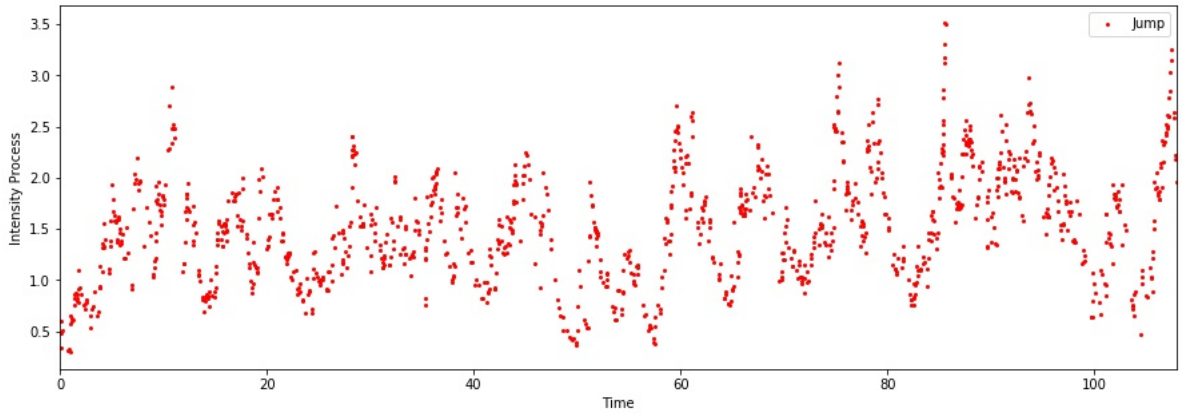

Figura 6-2.: Intensidad λ_t del siniestro, número reclamaciones y prestaciones asistenciales para un tiempo de 108 meses.

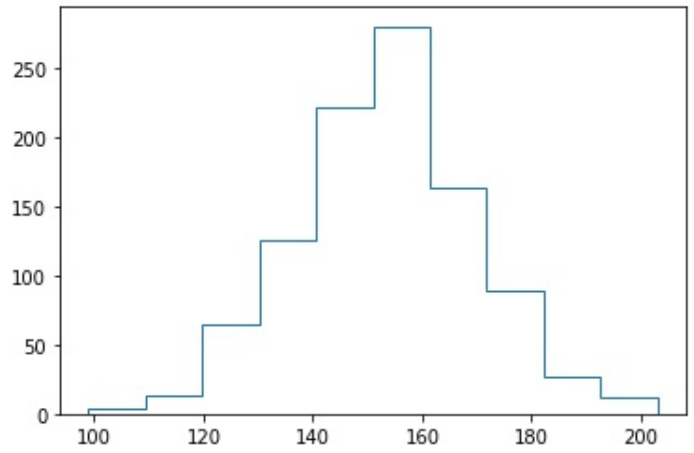

Figura 6-3.: Histograma de frecuencias procedimientos médicos y prestaciones asistenciales para un único individuo.

el valor de la prima que se recolecta por el individuo cero se evidencia que no se cumple la condición de ganancia neta y por lo tanto la ruina ocurrirá con probabilidad uno en un tiempo finito. Luego, para un tiempo lo suficientemente grande, las cotas para la probabilidad de ruina con los datos simulados y la prima c, no aportarán nueva información y serán omitidas. La simulación del superávit permite concluir que en un tiempo de 108 meses y con una media de 154 reclamaciones la ruina ocurre en un tiempo inferior a los 10 meses si únicamente se considera la reserva ahorrada para ese individuo junto con sus rendimientos esperados. Por último, la aseguradora deberá destinar un monto adicional a los \$3'848.990 iniciales de \$67′282,752 pesos colombianos para no tener ruina a octubre 30 de 2020 y que sea suficiente para todos los procedimientos médicos del empleado (Figura **6-4**). Por lo tanto, el monto que se deberá tener en la reserva el 11 de Marzo de 2011 para cubrir todas las contingencias y no llegar a la ruina es de \$71'131.742 pesos colombianos.

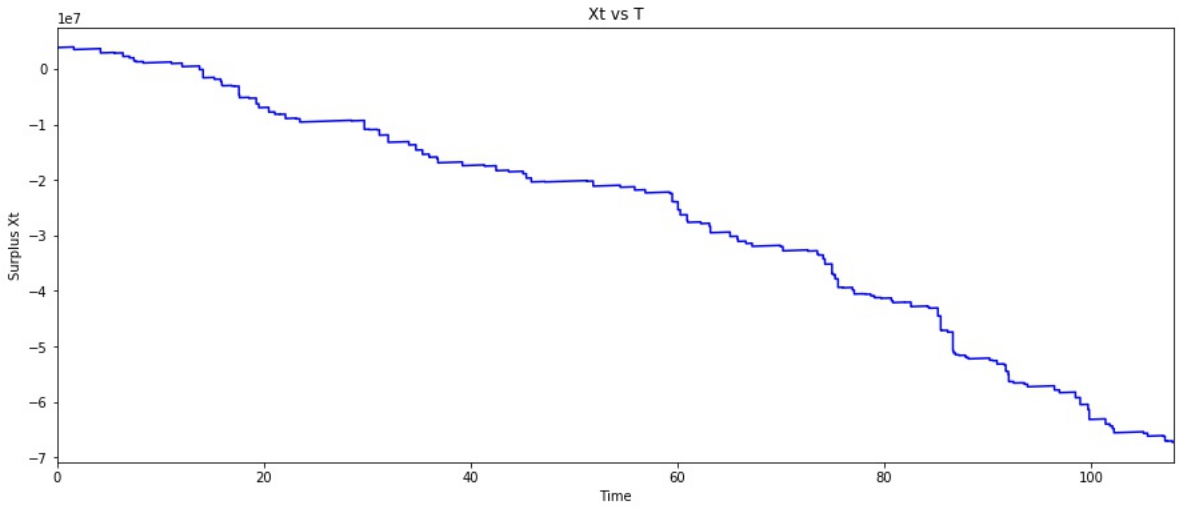

Figura 6-4.: Superávit y ruina en un tiempo de 108 meses para un único empleado.

Según los valores obtenidos por la aseguradora para el individuo cero, el costo total al 30 de octubre de 2020 de los procedimientos médicos del accidentado fueron $68′434,847 pesos; esto difiere en $2′696,896 de lo simulado mediante el Modelo de Contagio Dinámico.

Por otra parte, si se supone que los parámetros no son dinámicos y se comportan de igual manera para cualquier intervalo de tiempo, se puede simular, para un lapso de 180 meses el proceso de conteo N_t y el superávit X_t para predecir la reserva que deberá destinar la aseguradora al momento del accidente o enfermedad laboral. La siguiente simulación se realizará con los mismos parámetros pero para $T = 180$ meses. El proceso de conteo para una única trayectoria tuvo 256 eventos por procedimientos médicos o gastos operacionales y un valor total a ser destinado, adicional a lo ya cotizado por el empleado, de $89′379,285 para no caer en ruina (Figura **6-5**).

6.1. Aproximación al problema del portafolio.

Por último, para dar un primer acercamiento al comportamiento en un portafolio constituido por n individuos empleados de riesgo tipo III con características de género, edad y actividad laboral similar al individuo cero analizado anteriormente, se propone calibrar los parámetros dejando a ρ con una cota superior igual al 3 %. Este supuesto se asume toda vez que el riesgo de accidentalidad que calcula Fasecolda para empleados de riesgo tipo III es del 2,436 %. A diferencia de lo que se espera obtener para un único individuo, en la realidad de la aseguradora no todos los cotizantes tienen siniestros durante periodos prolongados como el caso simulado anteriormente; usualmente se espera que la mayoría de individuos hagan uso de la ARL en muy pocos procedimientos médicos y aquellos de alta siniestralidad sean

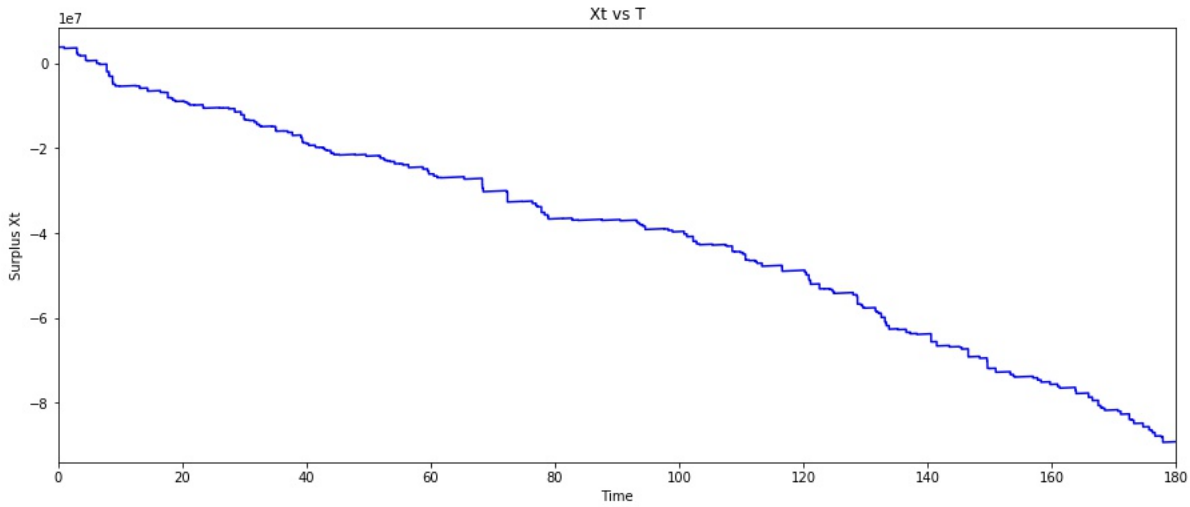

Figura 6-5.: Superávit y ruina en un tiempo de 180 meses para un único empleado.

el porcentaje inferior.

La calibración del portafolio se realizó siguiendo como modelo el individuo anterior, pero únicamente se mantiene el supuesto $\delta > \mu_{1G}$ y la cota superior para ρ. Los parámetros encontrados fueron:

$$(a, \rho, \delta, \alpha, \beta, \lambda_0, T) = (0{,}0, 0{,}023654, 0{,}266699, 0{,}423671, 4{,}394793, 0{,}3, 108).$$

A partir de estos parámetros se simulan mil trayectorias, dando como resultado una media de siniestros de 129 para el portafolio. Además, el histograma (Figura **6-6**) muestra claramente el sesgo a la derecha que se debería obtener en el portafolio de la aseguradora.
Cabe aclarar que a pesar de obtener resultados muy satisfactorios para el cálculo del portafolio, aún es un problema de estudio cuya interpretación será discutida en futuras investigaciones. De igual manera, los códigos y simulaciones utilizadas para la calibración se realizaron en el lenguaje de programación R y los resultados teóricos y gráficas del Modelo de Contagio Dinámico en Python; ambos disponibles en el repositorio que se encuentra en el Apéndice A.

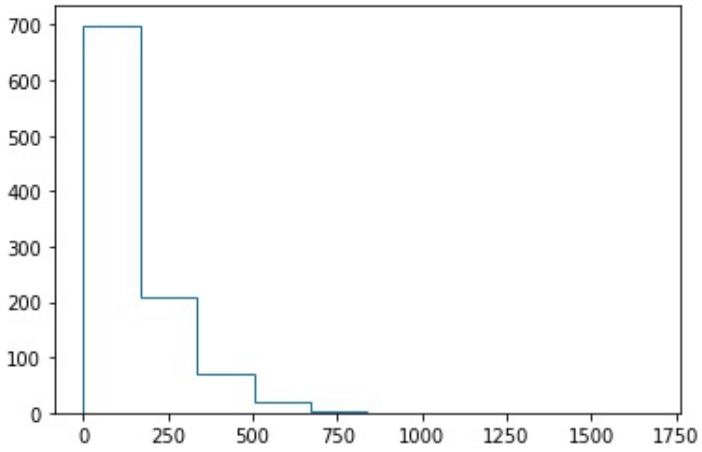

Figura 6-6.: Histograma de frecuencias procedimientos médicos y prestaciones asistenciales para un portafolio de empleados con nivel de accidentalidad III y condiciones de género, edad, ubicación geográfica semejantes al individuo 0.

7. Conclusiones.

Esta tesis presenta un primer acercamiento al cálculo de la reserva que debería destinar una compañía de seguros con el fin de solventar un siniestro derivado de un accidente o enfermedad laboral, utilizando para ello un proceso estocástico particular conocido como modelo de Contagio Dinámico; el cual incluye dos elementos diferenciadores importantes, la reversión a la media y el decaimiento exponencial, los cuales permiten estabilizar el modelo en un horizonte de tiempo finito. Por otra parte, la mayor contribución de la utilización de este modelo es que permite modelar factores exógenos y endógenos que afectan la intensidad en un mismo proceso.

Para la replicación del modelo se introdujo la definición matemática del Modelo de Contagio Dinámico junto con sus propiedades, se evidenciaron los resultados de los momentos, función generadora de probabilidad del proceso de intensidad y del proceso puntual, transformada de Laplace y su respectivo análisis en el cambio de medida. Mediante el algoritmo de Monte Carlo se realizaron varias trayectorias del modelo y se contrastaron con los valores obtenidos teóricamente, incluyendo los tiempos de ejecución para evidenciar que el algoritmo propuesto es eficiente en su ejecución. Además, se realizó la aplicación a la Teoría de la Ruina con el fin de encontrar una aproximación y cotas superiores de la probabilidad de ruina; para ello se asumió que el número de reclamaciones sigue un proceso de conteo con intensidad dada por el proceso de Contagio Dinámico y que el tamaño de las reclamaciones sigue una distribución exponencial. Por otra parte, como un aporte original de este trabajo, se modeló con la distribución Erlang tipo 2 para así obtener el cálculo del superávit obteniendo así resultados más cercanos a los que se esperaría observar en la realidad. Por último, se encontraron las soluciones para la ecuación fundamental de Cramér-Lundberg y los resultados explícitos para el cambio de medida cuando el tamaño de las reclamaciones sigue una distribución exponencial, de esta forma, al cambiar la medida, se obtuvieron parámetros transformados que permitieron que la probabilidad de ruina ocurriera en tiempo finito con probabilidad uno y se obtuviera una probabilidad para cada tiempo t más eficiente computacionalmente y con un error significativamente menor.

Como un aporte nuevo de este proyecto se incluye dentro del algoritmo el comportamiento que tiene el proceso de intensidad para todo el intervalo de tiempo y no solo en los tiempos en los que ocurren los saltos, se evidencia la sensibilidad de la constante de decaimiento exponencial para distintas simulaciones del proceso, se realiza el cálculo del superávit cuando

el tamaño de las reclamaciones sigue una distribución Erlang, se calcula la probabilidad de ruina aplicando el modelo de Contagio Dinámico para un individuo cuyo siniestro desencadenó una serie de reclamaciones en una compañía aseguradora y, por último, se da el primer acercamiento al cálculo de la reserva para un portafolio. En todos los casos la calibración utilizada fue la del error cuadrático medio.

La aplicación del modelo a una compañía administradora de riesgos laborales (ARL) permitió conocer el valor de la reserva que debería ser destinada para cubrir todas las prestaciones derivadas de un accidente o enfermedad laboral en casos de alta siniestralidad. Además, se obtuvieron resultados muy cercanos a las frecuencias observadas, y montos de reservas cercanos a los valores efectivamente devengados; en este sentido podemos afirmar que, este primer acercamiento al problema de la ruina y al cálculo de la reserva de un portafolio conformado por varios empleados, genera resultados muy satisfactorios. Sin embargo, es tema aún de discusión y objeto de estudio la calibración del modelo, la independencia de los parámetros, las cotas para el parámetro de llegada de las reclamaciones y otras condiciones que deben satisfacerse para minimizar el error o tener un conjunto finito de soluciones, dado que hasta el momento se obtienen infinitas soluciones para el mismo problema.

Las simulaciones del algoritmo del modelo de Contagio Dinámico, probabilidad de ruina, cotas para la probabilidad de ruina bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$, cálculo del superávit con tamaño de reclamaciones siguiendo una distribución tipo Erlang y la aplicación a una compañía aseguradora, fueron realizadas en el lenguaje de programación Python. Por otro lado, la calibración de los parámetros a la aplicación del individuo cero fueron realizados en el lenguaje de programación R. Los códigos programados son eficientes en su ejecución teniendo un tiempo máximo de duración, en promedio, para 10000 trayectorias de menos de 110 segundos.

Finalmente, se deja para futuras investigaciones las siguientes propuestas:

- Utilizar distintas constantes de decaimiento exponencial para los saltos auto-excitados y externamente excitados, esto debido a que en este trabajo se evidenció que existe una alta sensibilidad del modelo con relación al parámetro delta (δ).
- Aplicar el modelo de Contagio Dinámico con difusión propuesto por Dassios, Jang y Zhao (2019) para el cálculo de la prima adecuada en el problema de la ruina.
- Generalizar, para cada tipo de riesgo, el cálculo de la reserva que debe contemplar una Administradora de Riesgos Laborales en situaciones de alta siniestralidad.
- Extender los cálculos de la probabilidad de ruina para distintas distribuciones tanto para los tiempos de llegada como para el tamaño de las reclamaciones.
- Analizar la sensibilidad de los parámetros necesarios del modelo.

- Nuevos métodos de calibración del modelo que permitan minimizar el error y poder encontrar parámetros dinámicos o condiciones para hacer predicciones basadas en el proceso de Contagio Dinámico.

Bibliografía

[1] Albrecher, H., and Asmussen, S. Ruin probabilities and aggregrate claims distributions for shot noise cox processes. *Scandinavian Actuarial Journal 2006* (03 2006).

[2] Blanco, L. *Probabilidad*, 1 ed. Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[3] Chen, Z., Dassios, A., Kuan, V., Lim, J., Qu, Y., Surya, B., and Zhao, H. A two-phase dynamic contagion model for covid-19. *SSRN Electronic Journal* (06 2020).

[4] Cheng, Y.-J., Hou, M., and Wang, J. An improved optimal trigonometric elm algorithm for numerical solution to ruin probability of erlang(2) risk model. *Multimedia Tools and Applications 79* (11 2020).

[5] Constantinescu, C., Samorodnitsky, G., and Zhu, W. Ruin probabilities in classical risk models with gamma claims. *Scandinavian Actuarial Journal 2018* (11 2017).

[6] Dassios, A., Jang, J., and Zhao, H. A generalised cir process with externally-exciting and self-exciting jumps and its applications in insurance and finance. *Risks 7* (10 2019), 103.

[7] Dassios, A., and Jang, J.-W. Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the cox process with shot noise intensity. *Finance and Stochastics 7* (2003), 73–95.

[8] Dassios, A., and Zhao, H. A dynamic contagion process. *Advances in Applied Probability 43* (09 2011).

[9] Dassios, A., and Zhao, H. A risk model with delayed claims. *Journal of Applied Probability 1* (2013), 1–19.

[10] Dassios, A., and Zhao, H. Efficient simulation of clustering jumps with cir intensity. *Operations Research 65* (10 2017), 1494–1515.

[11] Davis, M. H. A. Piecewise-deterministic markov processes: A general class of non-diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological) 46* (1984), 353–376.

[12] Dickson, D., and Li, S. Erlang risk models and finite time ruin problems. *Scandinavian Actuarial Journal - SCAND ACTUAR J 2012* (01 2010), 1–20.

[13] Dickson, D., and Li, S. The distributions of some quantities for erlang(2) risk models. 18.

[14] Hawkes, A. Point spectra of some mutually exciting point processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B 33* (07 1971).

[15] Hawkes, A., and Oakes, D. A cluster process representation of a self-exciting process. *Journal of Applied Probability 11* (09 1974), 493–503.

[16] Ibe, O. *Markov Processes for Stochastic Modeling*, 1 ed. ELSEVIER, 1997.

[17] Jang, J., and Dassios, A. A bivariate shot noise hawkes process for insurance. *SSRN Electronic Journal* (05 2011).

[18] Jang, J., and Oh, R. A review on poisson, cox, hawkes, shot-noise poisson and dynamic contagion process and their compound processes. *Annals of Actuarial Science* (09 2020), 1–22.

[19] Li, S., and Garrido, J. On ruin for the erlang(n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics 34* (06 2004), 391–408.

[20] Marmol, M., Claramunt, M. M., and Castañer, A. Aplicaciones de la transformada de laplace a la teoría del riesgo. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* (01 2007), 9–36.

[21] Masson, P. Contagion: Monsoonal effects, spillovers, and jumps between multiple equilibria. *IMF Working Papers* (1998), 1–32.

[22] Mikosch, T. *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with the Poisson Process*, 2 ed. Springer, 2009.

[23] Moreno, L. G. Teoría del riesgo. apuntes de clase. 2016.

[24] Pasricha, P., and Selvamuthu, D. A markov modulated dynamic contagion process with application to credit risk. *Journal of Statistical Physics 175* (04 2019).

[25] Puneet Pasricha, D. S. A markov modulated dynamic contagion process with application to credit risk. *Journal of Statistical Physics 175* (2019), 495–511.

[26] Rincón, L. *Introducción a la teoría del riesgo*, 1 ed. UNAM, 2012.

[27] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, G. E. W. *LOSS MODELS. From Data to Decisions*, 4 ed. John Wiley Sons, 2012.

[28] Zhao, H. *A Dynamic Contagion Process for Modelling Contagion Risk in Finance and Insurance*. PhD thesis, London School of Economics, 2012.

A. Apéndice: Códigos y Algoritmos.

En este apéndice se incluye el link con el repositorio que contiene los códigos utilizados para la realización de la tesis.

https://github.com/henryrueda/Dynamic-Contagion-Model