



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Pronósticos en series de tiempo no lineales: aplicación del modelo TSARX y comparación con modelos para datos estacionales

Sebastián Arbeláez Quintero

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá, D.C., Colombia  
2022

# Pronósticos en series de tiempo no lineales: aplicación del modelo TSARX y comparación con modelos para datos estacionales

Sebastián Arbeláez Quintero

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ciencias Estadísticas**

Director(a):  
Ph.D., Sergio Alejandro Calderón Villanueva

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá, D.C., Colombia  
2022

A mis padres y hermano. Sé que siempre estarán para mí cuando los necesite

## Declaración de obra original

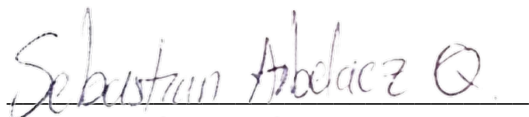
Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

A handwritten signature in blue ink that reads "Sebastián Arbeláez Q." with a horizontal line underneath.

Sebastián Arbeláez Quintero

Fecha 12/05/2023

# Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a Joaquín González Borja, profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, de la Universidad del Tolima, este trabajo no hubiese sido posible sin sus comentarios y ayuda. También agradezco a mi director, el profesor Sergio Calderón por su seguimiento a este trabajo, dedicación, comentarios e ideas. En momentos en los que no sabía cómo continuar, siempre estuvo disponible para contribuir con sus conocimientos.

Un agradecimiento especial a Maria Clara Pardo, quien me brindó el empujón que necesitaba para iniciar esta maestría. A mi familia quienes vieron este proceso desde el inicio y a Aleja, quien me acompañó en más de una noche de trabajo.

# Resumen

## **Pronósticos en series de tiempo no lineales: aplicación del modelo TSARX y comparación con modelos para datos estacionales**

La introducción de los modelos TAR en el análisis económico ha permitido capturar el comportamiento no lineal, usualmente observado en este tipo de series de tiempo. Adicional a la no linealidad, las series de tiempo económicas pueden presentar comportamientos estacionales cuyo análisis podría llevar a conclusiones más acordes con la realidad. Por otro lado, realizar pronósticos acertados sobre los valores que una serie de tiempo tomará, es un tema importante en economía, por lo que un sector de la literatura se ha encargado de comparar la precisión de los pronósticos generados a partir de diferentes tipos de modelos. En este trabajo se compara la precisión de los pronósticos obtenidos al ajustar el modelo *Multiplicative Seasonal Threshold Autoregressive with exogenous input* - TSARX, con respecto a otros modelos usualmente empleados en la literatura. El modelo TSARX permite capturar el comportamiento estacional multiplicativo de las series de tiempo para explicar el proceso de interés.

**Palabras clave:** No linealidad, modelos de umbral, estacionalidad, pronósticos, economía.

# Abstract

## **Non-linear time series forecasting: application of the TSARX model and comparison with models for seasonal data**

Introduction of TAR models in economic analysis has allowed to capture the non linear behavior usually observed this kind of time series. In addition to non linearity, economic time series may exhibit seasonal patterns whose analysis may carry to conclusions more in line with reality. Otherwise, accurate forecasting for time series its a relevant topic in economics, thus a part of literature has been in charge to compare the accuracy of forecasts generated by different types of models. In this work, accuracy of forecast obtained by adjusting Multiplicative Seasonal Threshold Autorregressive with exogenous input - TSARX models, is compared with those obtained by adjusting other models usually used in literature. TSARX model allows to capture time series multiplicative seasonality to explain the process of interest.

**Keywords: Non-linearity, threshold models, seasonality, forecast, economics**

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelos considerados, métodos de estimación y verificación de supuestos</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo TAR . . . . .	5
2.2. Modelo TSARX . . . . .	8
2.3. Modelo SAR . . . . .	13
2.4. Modelo SE . . . . .	14
2.5. Redes LSTM . . . . .	15
2.6. Combinación de pronósticos . . . . .	18
2.7. Pruebas de bondad de ajuste . . . . .	19
<b>3. Medidas de precisión y comparación de pronósticos</b>	<b>22</b>
3.1. Error cuadrático medio . . . . .	22
3.2. Prueba de Diebold - Mariano . . . . .	24
<b>4. Presentación de variables consideradas y análisis descriptivo</b>	<b>25</b>
4.1. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - Colombia	27
4.1.1. Análisis descriptivo para el Índice de Seguimiento a la Economía . . .	27
4.1.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo . . . . .	30
4.1.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor . . . . .	33
4.2. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - EE.UU.	36
4.2.1. Análisis descriptivo para el Producto Interno Bruto . . . . .	36
4.2.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo . . . . .	39
4.2.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor . . . . .	42
4.3. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - Reino Unido . . . . .	45
4.3.1. Análisis descriptivo para el Producto Interno Bruto . . . . .	45
4.3.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo . . . . .	48
4.3.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor . . . . .	51

<b>5. Resultados</b>	<b>55</b>
5.1. Resultados para las series de tiempo de Colombia . . . . .	55
5.1.1. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo TSARX . . . . .	55
5.1.2. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo TAR . . . . .	57
5.1.3. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo SAR . . . . .	58
5.1.4. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo SE . . . . .	59
5.1.5. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados redes LSTM . . . . .	61
5.1.6. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados redes LSTM para datos desestacionalizados . . . . .	62
5.1.7. Tasa de desempleo - resultados . . . . .	66
5.1.8. Índice de Precios al Consumidor - resultados . . . . .	71
5.2. Resultados para las series de tiempo de Estados Unidos . . . . .	77
5.2.1. Producto Interno Bruto - resultados . . . . .	77
5.2.2. Tasa de desempleo - resultados . . . . .	81
5.2.3. Índice de Precios al Consumidor - resultados . . . . .	86
5.3. Resultados para las series de tiempo de Reino Unido . . . . .	91
5.3.1. Producto Interno Bruto - resultados . . . . .	91
5.3.2. Tasa de desempleo - resultados . . . . .	96
5.3.3. Índice de Precios al Consumidor - resultados . . . . .	101
<b>6. Conclusiones</b>	<b>107</b>
<b>A. Anexo: Coeficientes estimados para los modelos considerados</b>	<b>110</b>
A.1. ISE - modelo TSARX Colombia . . . . .	110
A.2. ISE - modelo TAR Colombia . . . . .	110
A.3. ISE - modelo SAR Colombia . . . . .	110
A.4. ISE - modelo SE Colombia . . . . .	111
A.5. Tasa de desempleo - modelo TSARX Colombia . . . . .	111
A.6. Tasa de desempleo - modelo TAR Colombia . . . . .	111
A.7. Tasa de desempleo - modelo SAR Colombia . . . . .	111
A.8. Tasa de desempleo - modelo SE Colombia . . . . .	111
A.9. Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX Colombia . . . . .	112
A.10. Índice de Precios al Consumidor - modelo TAR Colombia . . . . .	112
A.11. Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR Colombia . . . . .	112
A.12. Índice de Precios al Consumidor - modelo SE Colombia . . . . .	112
A.13. Producto Interno Bruto - modelo TSARX EE.UU. . . . .	112
A.14. Producto Interno Bruto - modelo TAR EE.UU. . . . .	113
A.15. Producto Interno Bruto - modelo SAR EE.UU. . . . .	113
A.16. Producto Interno Bruto - modelo SE EE.UU. . . . .	113
A.17. Tasa de Desempleo - modelo TSARX EE.UU. . . . .	113

A.18.Tasa de Desempleo - modelo TAR EE.UU. . . . .	113
A.19.Tasa de Desempleo - modelo SAR EE.UU. . . . .	114
A.20.Tasa de Desempleo - modelo SE EE.UU. . . . .	114
A.21.Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX EE.UU. . . . .	114
A.22.Índice de Precios al Consumidor - modelo TAR EE.UU. . . . .	114
A.23.Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR EE.UU. . . . .	114
A.24.Índice de Precios al Consumidor - modelo SE EE.UU. . . . .	115
A.25.Prducto Interno Bruto - modelo TSARX Reino Unido . . . . .	115
A.26.Prducto Interno Bruto - modelo TAR Reino Unido . . . . .	115
A.27.Prducto Interno Bruto - modelo SAR Reino Unido . . . . .	115
A.28.Prducto Interno Bruto - modelo SE Reino Unido . . . . .	115
A.29.Tasa de Desempleo - modelo TSARX Reino Unido . . . . .	116
A.30.Tasa de Desempleo - modelo TAR Reino Unido . . . . .	116
A.31.Tasa de Desempleo - modelo SAR Reino Unido . . . . .	116
A.32.Tasa de Desempleo - modelo SE Reino Unido . . . . .	116
A.33.Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX Reino Unido . . . . .	117
A.34.Índice de Precios al Consumidor - modelo TAR Reino Unido . . . . .	117
A.35.Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR Reino Unido . . . . .	117
A.36.Índice de Precios al Consumidor - modelo SE Reino Unido . . . . .	117
<b>B. Anexo: Pruebas de validación de los modelos ajustados</b>	<b>118</b>
B.1. Modelo TSARX - TD Colombia . . . . .	119
B.2. Modelo TAR - TD Colombia . . . . .	120
B.3. Modelo SAR - TD Colombia . . . . .	121
B.4. Modelo SE - TD Colombia . . . . .	122
B.5. Redes LSTM - TD Colombia . . . . .	123
B.6. Redes LSTM - TD desestacionalizada Colombia . . . . .	124
B.7. Modelo TSARX - IPC Colombia . . . . .	125
B.8. Modelo TAR - IPC Colombia . . . . .	126
B.9. Modelo SAR - IPC Colombia . . . . .	127
B.10.Modelo SE - IPC Colombia . . . . .	128
B.11.Redes LSTM - IPC Colombia . . . . .	129
B.12.Redes LSTM - IPC desestacionalizado Colombia . . . . .	130
B.13.Modelo TSARX - PIB EE.UU. . . . .	131
B.14.Modelo TAR - PIB EE.UU. . . . .	132
B.15.Modelo SAR - PIB EE.UU. . . . .	133
B.16.Modelo SE - PIB EE.UU. . . . .	134
B.17.Redes LSTM - PIB EE.UU. . . . .	135
B.18.Redes LSTM - PIB desestacionalizado EE.UU. . . . .	136
B.19.Modelo TSARX - TD EE.UU. . . . .	137

---

B.20. Modelo TAR - TD EE.UU. . . . .	138
B.21. Modelo SAR - TD EE.UU. . . . .	139
B.22. Modelo SE - TD EE.UU. . . . .	140
B.23. Redes LSTM - PIB EE.UU. . . . .	141
B.24. Redes LSTM - PIB desestacionalizado EE.UU. . . . .	142
B.25. Modelo TSARX - IPC EE.UU. . . . .	143
B.26. Modelo TAR - IPC EE.UU. . . . .	144
B.27. Modelo SAR - IPC EE.UU. . . . .	145
B.28. Modelo SE - IPC EE.UU. . . . .	146
B.29. Redes LSTM - IPC EE.UU. . . . .	147
B.30. Redes LSTM - IPC desestacionalizado EE.UU. . . . .	148
B.31. Modelo TSARX - PIB U.K. . . . .	149
B.32. Modelo TAR - PIB UK. . . . .	150
B.33. Modelo SAR - PIB UK. . . . .	151
B.34. Modelo SE - PIB UK. . . . .	152
B.35. Redes LSTM - PIB UK. . . . .	153
B.36. Redes LSTM - PIB desestacionalizado UK. . . . .	154
B.37. Modelo TSARX - TD U.K. . . . .	155
B.38. Modelo TAR - TD UK. . . . .	156
B.39. Modelo SAR - TD UK. . . . .	157
B.40. Modelo SE - TD UK. . . . .	158
B.41. Redes LSTM - TD UK. . . . .	159
B.42. Redes LSTM - TD desestacionalizada UK. . . . .	160
B.43. Modelo TSARX - IPC U.K. . . . .	161
B.44. Modelo TAR - IPC UK. . . . .	162
B.45. Modelo SAR - IPC UK. . . . .	163
B.46. Modelo SE - IPC UK. . . . .	164
B.47. Redes LSTM - IPC UK. . . . .	165
B.48. Redes LSTM - IPC desestacionalizado UK. . . . .	166
<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>
Referencias . . . . .	167

# 1. Introducción

La introducción del modelo autorregresivo con umbrales *Threshold Autoregressive - TAR* propuesto por Tong y Lim (1980), al análisis de series de tiempo, ha tenido impacto en diversas áreas del conocimiento pues cuenta con aplicaciones en economía, biología, medicina, entre otros. En el campo de la economía, los modelos TAR han sido ampliamente utilizados debido a que la no linealidad de los modelos con umbrales permite capturar comportamientos de las variables de interés durante periodos de auge o recesión, que los modelos clásicos como los ARIMA y similares, no logran capturar.

El modelo TAR permite explicar el comportamiento de una variable de interés  $\{X_t\}$  en función del valor que toma el retardo  $d$  de una variable exógena  $\{Z_{t-d}\}$ , conocida como “variable de umbrales”. Cuando la variable de umbrales corresponde a la misma variable de interés pero retardada  $d$  periodos en el tiempo (i.e.,  $\{Z_t\} = \{X_{t-d}\}$ ), el modelo se conoce como autorregresivo con umbrales auto-excitado *Self-Exciting Threshold Autorregresive - SETAR* (Tong y Chen, 1978). Los modelos TAR pueden ser expandidos para incluir variables exógenas que permitan explicar el proceso de interés, caso en el cual son conocidos como TARX (*Threshold Autoregressive with Exogenous input*).

Las principales variables económicas como la tasa de desempleo, el Producto Interno Bruto (PIB), el Índice de Precios al Consumidor (IPC) y similares, se caracterizan por exhibir patrones de corto plazo<sup>1</sup>, relacionados con el comportamiento de los consumidores y productores<sup>2</sup> durante el año. Incorporar estas fluctuaciones de corto plazo en los modelos ha sido de interés en la literatura, pues permitiría comprender de una mejor forma el comportamiento de las variables teniendo en cuenta los efectos estacionales que los gobiernan, así como factores propios del sistema económico, tal y como se aprecia, por ejemplo, en los trabajos de Urrutia, Rivera, Quite, Belamide, y Quinto (2014); Kryzanowski y Zhang (1992); Etuk (2012); Luetkepohl y Xu (2012), entre otros.

Precisamente para tratar de explicar el efecto producido conjuntamente por cambios en

---

<sup>1</sup>También existen patrones de largo plazo asociados a los ciclos de auge y recesión, sin embargo, este trabajo se enfoca en los ciclos de corto plazo.

<sup>2</sup>Normalmente, la economía es más activa hacia final de año debido a las fiestas de navidad y fin de año, mientras que en los primeros meses del año, la actividad económica generalmente disminuye. Además se presentan fluctuaciones en periodos concretos como semana santa o los meses de junio y julio.

---

la dinámica económica y teniendo en cuenta los patrones estacionales sobre la inflación, De Gooijer y Vidiella-i Anguera (2003) extienden los modelos SETAR para incorporar parámetros a partir de los que se pueden modelar patrones estacionales multiplicativos, nombrando a este nuevo modelo SEASETAR (*multiplicative seasonal self-exciting threshold autoregressive*).

Generalizando el trabajo realizado por De Gooijer y Vidiella-i Angera, González y Nieto (2020), amplían el modelo SEASETAR y proponen el modelo autorregresivo estacional multiplicativo de umbrales con entradas exógenas (*Multiplicative Seasonal Threshold Autorregresive with exogenous input - TSARX*), implementando métodos Bayesianos para la estimación de sus parámetros y la obtención de pronósticos y analizan su desempeño a partir de simulaciones y el ajuste a la variación mensual de la tasa de desempleo colombiana.

Por otro lado, el ajuste de modelos de series de tiempo a variables económicas no solo permite comprender su comportamiento histórico para explicar, en retrospectiva, el porqué de ciertos eventos, sino que también permite pronosticar los valores que tomarán en el futuro. El análisis predictivo de series de tiempo es relevante en el entorno económico debido a que conocer, con alguna certeza, el comportamiento de una variable, permite tomar decisiones de política económica para corregir (si se pronostican valores adversos en la variable de interés) o incentivar (si los valores pronosticados para la variable son favorables para el entorno económico) esos comportamientos previstos. Debido a esto, una rama de la literatura económica se encarga de estudiar la calidad de los pronósticos generados a partir de diferentes métodos, y en particular, en los últimos años se ha visto interés por evaluar la precisión de los pronósticos obtenidos al ajustar modelos TAR, con respecto a otros modelos de series de tiempo (Hansen, 2011).

Con relación al análisis de la capacidad predictiva de los modelos de series de tiempo, Vaca (2018) realiza una comparación de los pronósticos generados al usar modelos TAR, con respecto a los modelos SETAR, STAR (*Smooth Transition Autoregressive*), MSAR (*Markov-Switching Autoregressive*) y AR (*Autoregressive*), aplicados a la tasa de desempleo, inflación, crecimiento económico y actividad industrial para Colombia y Estados Unidos. Con base en ese trabajo, en esta ocasión se compara la precisión de los pronósticos del modelo TSARX<sup>3</sup>, con respecto a los modelos TAR, SAR (*Seasonal Autoregressive*), Suavizamiento Exponencial (SE) y redes LSTM (*Long Short-Term Memory*), aplicados a la tasa de desempleo, inflación y el crecimiento económico para Colombia, Estados Unidos y Reino Unido. Teniendo en cuenta las bondades del modelo TSARX, en este trabajo se modelan las variables sin ajustar por patrones estacionales.

---

<sup>3</sup>Con el fin de comparar los resultados sin dar ventajas a ciertos modelos, no se incluyen variables exógenas como explicativas.

La selección de los modelos empleados se realizó teniendo en cuenta que debían cumplir con tres condiciones: I. ser capaces de capturar el comportamiento estacional de las series de tiempo analizadas, II. haber sido utilizados en otros trabajos para explicar series de tiempo económicas similares a las seleccionadas para este trabajo, III. estar programados en R o Python tanto para la estimación de los parámetros, como para el cálculo de pronósticos  $h$  pasos adelante.

Los pronósticos se calculan a  $h = 1, 2, 3$  y 4 pasos adelante <sup>4</sup> y la comparación de su precisión se realiza comparando los errores cuadráticos medios (calculados empleando *rolling*) y la prueba de Diebold - Mariano (ver capítulo 3).

El resto de este documento presenta la siguiente estructura: en el próximo capítulo se describen los modelos considerados para la comparación de pronósticos, indicando en cada caso los métodos de estimación de parámetros y de cálculo de los pronósticos; también se presenta la metodología empleada para la verificación del ajuste de los modelos. El capítulo 3 corresponde a la definición de medidas de precisión para los pronósticos y la metodología de comparación. En el capítulo 4 se presentan las variables ajustadas y su correspondiente análisis descriptivo. En el capítulo 5 se presentan los resultados del ajuste de los modelos a cada variable, los pronósticos y la comparación de la precisión a través de las medidas previamente mencionadas. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo y se plantean algunos estudios posteriores que se pueden realizar a partir de los resultados obtenidos.

---

<sup>4</sup>La periodicidad de  $h$ , corresponde a la misma de la serie de tiempo para cual se estén calculando los pronósticos. En este trabajo se analizan series con periodicidad mensual y trimestral. En el análisis descriptivo (capítulo 4), se especifica la periodicidad de cada serie.

## 2. Modelos considerados, métodos de estimación y verificación de supuestos

En esta sección se presentan los modelos considerados para este trabajo. Se explican los métodos de estimación de parámetros y de cálculo de los pronósticos empleados en cada ajuste y se presentan las pruebas de bondad de ajuste empleadas para validar los modelos ajustados.

### 2.1. Modelo TAR

El modelo TAR, inicialmente propuesto por Tong y Lim (1980) relaciona los procesos estocásticos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$  por medio de una función a trozos de la siguiente forma:

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + h^{(j)} \epsilon_t, \text{ si } r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

donde los valores  $r_j$  son llamados valores de umbral para el proceso  $\{Z_t\}$  y definen los  $j = 1, 2, \dots, l$  regímenes del modelo. Los parámetros,  $a_i^{(j)}$  y  $h^{(j)}$ , son números reales y los enteros positivos  $k_1, \dots, k_l$ , denotan los ordenes autorregresivos del proceso  $\{X_t\}$  en cada régimen.  $\{\epsilon_t\}$  es un proceso Gaussiano de media cero y varianza 1, no correlacionado con el proceso  $\{Z_t\}$ . Además,  $\{Z_t\}$  es una cadena de Markov de orden  $m \geq 1$ , con función de densidad inicial  $f(\cdot)$  y función de densidad kernel  $f_m(\cdot|\cdot)$  en el sentido de la medida de Lebesgue, que converge debilmente a una distribución F.

La función de verosimilitud del modelo TAR es

$$f(\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T} | \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = f(\mathbf{x}_{1,T} | \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) f(\mathbf{z}_{1,T} | \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z),$$

donde  $\mathbf{x}_{1,T}$  y  $\mathbf{z}_{1,T}$  son los vectores que contienen las  $t = 1, 2, \dots, T$  realizaciones de los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ , respectivamente. Además, debido a que  $\{\epsilon_t\}$  es Gaussiano, se tiene que

$$f(\mathbf{x}_{1,T} | \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = (2\pi)^{-\frac{(T-k)}{2}} \prod_{t=k+1}^T (h^{(j_t)})^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{t=k+1}^T \left( \frac{x_t - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{h^{(j_t)}} \right)^2\right\},$$

$\boldsymbol{\theta}_x$  es conocido como vector de parámetros no estructurales, con  $\boldsymbol{\theta}_x = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)}, h^{(1)}, \dots, h^{(l)})$ , está condicionado al número de regímenes ( $l$ ), los valores de umbral  $r$  y los ordenes autorregresivos máximos ( $k_j$ ) y contiene los parámetros a estimar en el modelo.  $\boldsymbol{\theta}_z$ , es el vector de parámetros del proceso  $\{Z_t\}$  (variable de umbrales) y se asume exógeno ya que la variable de interés  $\{X_t\}$ , no incide en su comportamiento  $\{Z_t\}$  (Nieto, 2005).

Los detalles de la estimación de parámetros en el modelo TAR pueden ser consultados en el trabajo de Nieto (2005), quien sugiere emplear el método de selección de variables de Gibbs (Dellaportas, Foster, y Ntzoufras, 2002), por lo que se definen variables indicadoras  $s_{ij}$  que toman el valor de 1 si el parámetro debe ser incluido en el modelo y 0 en otro caso. Al incorporar estas variables, el modelo queda reescrito como:

$$X_t = a_0^{(j)} s_{0j} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} s_{ij} X_{t-i} + h^{(j)} \epsilon_t, \text{ si } r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

Se asume que los parámetros  $A_j$  se distribuyen normal multivariado condicional a  $S_j$  *a priori*, es decir,

$$A_j | S_j \sim N_{k+1}(\mathbf{0}, (D_{S_j} D_{S_j})^{-1}),$$

donde  $A_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)})$ ,  $S_j = (s_{0j}, s_{1j}, \dots, s_{k_j j})$ , y  $D_{S_j}$  es una matriz diagonal con valores  $1/a_{0j}\varphi_{0j}, \dots, 1/a_{k_j j}\varphi_{k_j j}$  con  $a_{ij} = 1$  si  $s_{ij} = 0$  y  $a_{ij} = \eta_{ij}$  si  $s_{ij} = 1$ . Con  $\varphi_{ij}$  y  $\eta_{ij}$ , hiperparámetros (ver detalles en González y Nieto (2020)).

Por su parte, se asume que  $(h^{(j)})^2$  sigue una distribución Gamma Inversa (GI) *a priori*, con parámetro de posición  $v_j$  y parámetro de escala  $v_j \lambda_j / 2$ . Para  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  (vector de valores de umbral) se asume una distribución constante *a priori*  $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{C} I(\mathbf{A})$ , donde  $C = \int, \dots, \int_{\mathbf{A}} dr_1, \dots, dr_{l-1}$ . Para  $d$  se asume una distribución uniforme discreta con función de masa de probabilidad  $Pr(d = i) = i / (d_0 + 1)$ , donde  $d_0$  es el retardo máximo seleccionado.

A continuación, se presenta de forma resumida, el algoritmo para la estimación de parámetros, para detalles, se recomienda consultar el trabajo de Nieto (2005):

1. Iniciar el algoritmo con  $A_j^{(0)}$ ,  $[(h^{(j)})^2]^{(0)}$ ,  $S_j^{(0)}$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $\mathbf{r}^{(0)}$ ,  $d^{(0)}$ .
2. Extraer  $A_j$  (independiente en cada umbral) de una distribución normal multivariada con media  $\boldsymbol{\theta}_{A_j}$  y matriz de varianzas y covarianzas  $\mathbf{V}_{A_j}^{-1}$ .
3. Generar  $(h^{(j)})^2$  (independiente en cada umbral) a partir de una distribución Gamma Inversa con parámetros  $\frac{\nu_j + n_j}{2}$  y  $\frac{\nu_j \lambda_j + n_j s_j^2}{2}$ .

4. Generar  $\mathbf{r}$  (vector de valores de umbral) de

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-r}) \propto f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x)I(\mathbf{A}),$$

donde  $f(\cdot|\cdot)$  es la función de verosimilitud condicional del modelo TAR ajustado.

5. Generar  $d$  de una distribución multinomial con función de masa de probabilidad

$$Pr(d = i|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d}) = \frac{f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d, d=i})Pr(d=i)}{\sum_{m=0}^{d_0} f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d, d=m})Pr(d=m)},$$

con  $d = 0, 1, \dots, d_0$

6. Generar el vector  $S_j = (s_{0j}, s_{1j}, \dots, s_{k_j j})'$  (independiente en cada umbral), obteniendo muestras de  $s_{ij}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , de forma individual a partir de una distribución Bernoulli con función de masa de probabilidad

$$Pr(s_{ij} = 1|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}},$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}, s_{ij} = 1)f(A_j|S_{j-s_{ij}}, s_{ij} = 1)\pi_{ij} \\ \beta_{ij} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}, s_{ij} = 0)f(A_j|S_{j-s_{ij}}, s_{ij} = 0)(1 - \pi_{ij}) \end{aligned}$$

En otro artículo, Nieto (2008) propone un algoritmo empleando métodos Bayesianos para generar pronósticos a partir de la distribución predictiva posterior para el modelo ajustado,  $f(x_{T+h}|\mathbf{x}_{1,T+h-1}, \mathbf{z}_{1,T+h-1}, \boldsymbol{\theta}_x)$ , con  $T$  el tamaño de la muestra empleada para el ajuste del modelo y  $h$  el horizonte de pronósticos. La distribución predictiva posterior para el modelo TAR es una distribución normal con media

$$a_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{k_j} a_m^{(j)} x_{T+i-m}$$

y varianza  $(h^{(j)})^2$ , si  $r_{j-1} < z_{T+i-d} \leq r_j$ . El algoritmo consiste en:

1. Extraer una muestra aleatoria de  $\boldsymbol{\theta}_x^{(k)}$  a partir de la distribución posterior  $p(\boldsymbol{\theta}_x|x_{1,T}, z_{1,T})$ .
2. Generar  $z_{T+1}^{(k)}$  a partir de  $p(z_{T+1}|z_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_z)$ .
3. Generar  $x_{T+1}^{(k)}$  a partir de  $p(x_{T+1}|z_{T+1}^{(k)}, x_{1,T}, z_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x^{(k)})$ .
4. Generar  $z_{T+i}^{(k)}$  a partir de  $p(z_{T+i}|z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}_z)$ .
5. Generar  $x_{T+i}^{(k)}$  a partir de  $p(x_{T+i}|z_{T+i}^{(k)}, x_{1,T}, x_{T+1}^{(k)}, \dots, x_{T+i-1}^{(k)}, z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}_x^{(k)})$ .

6. Repetir los pasos 4 y 5 para  $i = 2, 3, \dots, h$

Para el calculo de residuales del modelo TAR, se tiene que si  $Z_t \in B_j$ , para algún  $j$ , entonces:

$$\hat{\epsilon}_t = \frac{x_t - \left( \hat{a}_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \hat{a}_i^{(j)} X_{t-i|t-1} \right)}{\hat{h}^{(j)}},$$

Previo al ajuste del modelo TAR, se requiere determinar si la serie analizada ( $\{X_t\}$ ) efectivamente presenta comportamientos no lineales con respecto a la variable de umbrales considerada ( $\{Z_t\}$ ), para lo cual se emplea la prueba de no linealidad de umbrales de Tsay.

La prueba de no linealidad de umbrales de Tsay (Tsay, 1998), compara la hipótesis nula de linealidad contra la alternativa de no linealidad en umbrales, dados los ordenes autorregresivos máximos en el modelo ( $k_j$ ) y de la variable de umbrales ( $d$ ). Asintóticamente, el estadístico de prueba sigue una distribución chi-cuadrado. Esta prueba se implementa a través del software RATS. El máximo orden autorregresivo de cada variable se fija con base en lo observado en el análisis descriptivo de cada serie (a partir de la función de autocorrelación parcial) y para la variable de umbrales se fija  $d_0 = 0, 1, 2, 3$ .

## 2.2. Modelo TSARX

El modelo TSARX, propuesto por González y Nieto (2020), relaciona dos procesos estocásticos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ , siendo  $\{Z_t\}$  un proceso exógeno, por medio de una función a trozos definida por:

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{u=1}^{K_j} b_u^{(j)} X_{t-su} - \sum_{i=1}^{k_j} \sum_{u=1}^{K_j} a_i^{(j)} b_u^{(j)} X_{t-i-su} + \sum_{v=1}^{q_j} c_v^{(j)} Z_{t-v} + h^{(j)} \epsilon_t, \text{ si}$$

$$r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

donde  $j = 1, \dots, l$  representa el número de regímenes en los que se divide el proceso, los cuales a su vez son determinados por los valores de umbral  $r_j$  y,  $Z_{t-d}$  es la variable de umbral retardada  $d$  periodos.  $\{\epsilon_t\}$  es un proceso Ruido Blanco Gaussiano con media 0 y varianza 1 independiente de  $\{X_t\}$  y de  $\{Z_t\}$ . Además, se asume que  $\{Z_t\}$  es una cadena de Markov de orden  $m \geq 1$ , con función de densidad inicial  $f(\cdot)$  y función de densidad kernel  $f_m(\cdot|\cdot)$  en el sentido de la medida de Lebesgue, que converge debilmente a una distribución  $F$ .

Los coeficientes autorregresivos  $a_i^{(j)}$ ,  $b_u^{(j)}$ ,  $c_v^{(j)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k_i$ ,  $u = 1, \dots, K_j$ ,  $v = 1 \dots, q_j$  y los pesos de varianza  $h^{(1)}, \dots, h^{(l)}$ , son llamados parámetros no estructurales. El número de regímenes  $l$ , los valores de umbral  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$ , el parámetro de retardo  $d$ , los ordenes

autorregresivos de cada umbral  $k_1, \dots, k_l, K_1, \dots, K_l, q_1, \dots, q_l$  y el tamaño del periodo del ciclo estacional,  $s$ , son llamados parámetros estructurales.

El vector de parámetros no estructurales es  $\boldsymbol{\theta}_{ns} = (A_1 \dots, A'_l, B_1 \dots, B'_l, C_1 \dots, C'_l, \mathbf{h}')'$ , donde  $A_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)})$ ,  $B_j = (b_1^{(j)}, \dots, b_{K_j}^{(j)})$ ,  $C_j = (c_1^{(j)}, \dots, c_{q_j}^{(j)})$  y  $\mathbf{h} = ((h^{(1)})^2, \dots, (h^{(l)})^2)$  y el vector de parámetros estructurales es  $\boldsymbol{\theta}_s = (k_1, \dots, k_l, K_1, \dots, K_l, q_1, \dots, q_l, \mathbf{r}', d, s, l)'$ . Entonces, el vector de parámetros completo es  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)$ , donde  $\theta_x = (\theta'_{ns}, \theta'_s)$  y  $\theta_z$ , es el vector de parámetros de la cadena de Markov.

Para la estimación de los parámetros en el modelo TSARX, González y Nieto (2020) sugieren usar el método de selección de variables de Gibbs (GVS, por sus siglas en inglés), propuesto por Dellaportas y cols. (2002). El método consiste en primero definir variables indicadoras  $s_{ij}$ ,  $m_{uj}$  y  $n_{vj}$  para cada  $i = 0, 1, \dots, k_j$ ,  $u = 1, \dots, K_j$  y  $v = 1, \dots, q_j$ , tal que si toman el valor de 1, el parámetro ( $a_i^{(j)}, b_u^{(j)}$  o  $c_v^{(j)}$ , respectivamente), será incluido en el modelo y en caso de tomar el valor 0, los parámetros no son incluidos. Entonces, el modelo queda reescrito como:

$$X_t = a_0^{(j)} s_{0j} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} s_{ij} X_{t-i} + \sum_{u=1}^{K_j} b_u^{(j)} m_{uj} X_{t-su} - \sum_{i=1}^{k_j} \sum_{u=1}^{K_j} a_i^{(j)} b_u^{(j)} s_{ij} m_{uj} X_{t-i-su} + \sum_{v=1}^{q_j} c_v^{(j)} n_{vj} Z_{t-v} + h^{(j)} \epsilon_t, \quad \text{si } r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j$$

Se asume que los vectores de parámetros siguen una distribución normal multivariada condicional a la función indicadora asociada, tal que:

$$\begin{aligned} A_j | S_j &\sim N_{k_j+1}(\mathbf{0}, (D_{S_j} V_{A_{j_0}} D_{S_j})^{-1}), \\ B_j | M_j &\sim N_{K_j}(\mathbf{0}, (D_{M_j} V_{B_{j_0}} D_{M_j})^{-1}) \text{ y} \\ C_j | N_j &\sim N_{q_j}(\mathbf{0}, (D_{N_j} V_{C_{j_0}} D_{N_j})^{-1}), \end{aligned}$$

donde  $V_{A_{j_0}}$ ,  $V_{B_{j_0}}$  y  $V_{C_{j_0}}$ , son matrices de covarianza *a priori*,  $D_{S_j}$  es una matriz diagonal con valores  $1/a_{0j}\varphi_{0j}, \dots, 1/a_{k_jj}\varphi_{k_jj}$  con  $a_{ij} = 1$  si  $s_{ij} = 0$  y  $a_{ij} = \eta_{ij}$  si  $s_{ij} = 1$ ;  $D_{M_j} = \text{diag}(1/b_{1j}\chi_{1j}, \dots, 1/b_{K_jj}\chi_{K_jj})$  con  $b_{uj} = 1$  si  $m_{uj} = 0$  y  $b_{uj} = \xi_{uj}$  si  $m_{uj} = 1$  y;  $D_{N_j} = \text{diag}(1/c_{1j}\psi_{1j}, \dots, 1/c_{q_jj}\psi_{q_jj})$  con  $c_{vj} = 1$  si  $n_{vj} = 0$  y  $c_{uj} = \lambda_{vj}$  si  $n_{vj} = 1$ .

Dado que se supone que los errores del modelo son procesos Ruido Blanco Gaussianos, para  $t = (K + 1), \dots, T$ , el proceso  $x_t | x_{t-1}, \dots, x_1, z_{1,T}$  sigue una distribución normal con media

$$\mu_t = a_0^{(j_t)} + \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i} + \sum_{u=1}^{K_{j_t}} b_u^{(j_t)} x_{t-su} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} \sum_{u=1}^{K_{j_t}} a_i^{(j_t)} b_u^{(j_t)} x_{t-i-su} + \sum_{v=1}^{q_{j_t}} c_v^{(j_t)} z_{t-v}$$

y varianza  $(h^{(j_t)})^2$ . Por lo tanto, la distribución de verosimilitud condicional está dada por:

$$f(\mathbf{x}_{K+1,T} | \mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x) = 2\pi^{-\frac{T-K}{2}} \prod_{t=K+1}^T (h^{(j_t)})^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{t=K+1}^T \left(\frac{x_t - \mu_t}{h^{(j_t)}}\right)^2\right\}$$

A continuación se listan las distribuciones *a priori* para cada uno de los parámetros a estimar:

- Para  $A_j | S_j$ , normal multivariada con media  $\mathbf{0}_{k_j+1}$  y covarianza  $(D_{S_j} D_{S_j})^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, l$ .
- Para  $B_j | M_j$ , normal multivariada con media  $\mathbf{0}_{K_j}$  y covarianza  $(D_{M_j} D_{M_j})^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, l$ .
- Para  $C_j | N_j$ , normal multivariada con media  $\mathbf{0}_{q_j}$  y covarianza  $(D_{N_j} D_{N_j})^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, l$ .
- Para  $B_j | M_j$ , normal multivariada con media  $\mathbf{0}_{K_j}$  y covarianza  $(D_{M_j} D_{M_j})^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, l$ .
- Para  $(h^{(j)})^2$ , Gamma inversa, con parámetro de posición  $\nu_j/2$  y parámetro de escala  $\nu_j \lambda_j/2$ ,  $j = 1, \dots, l$ .
- Para  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  distribución constante  $f(\mathbf{r} = \frac{1}{C} I(\mathbf{A}))$ , donde  $C = \int, \dots, \int_{\mathbf{A}} dr_1, \dots, dr_{l-1}$ .
- $d$  sigue una distribución uniforme discreta con función de masa de probabilidad  $Pr(d = i) = 1/(d_0 + 1)$ , para  $i = 0, 1, \dots, d_0$ ; donde  $d_0$  es el retardo máximo seleccionado.

Las distribuciones posteriores de cada uno de los parámetros a estimar se obtienen combinando la distribución de verosimilitud condicional previamente mencionada y las distribuciones *a priori* para cada parámetro. A continuación, se presenta la racionalidad del algoritmo de estimación para modelos TSARX, se sugiere consultar los detalles en el algoritmo 1, presentado en González y Nieto (2020):

1. Iniciar  $A_j^{(0)}$ ,  $B_j^{(0)}$ ,  $C_j^{(0)}$ ,  $[(h^{(j)})^2]^{(0)}$ ,  $S_j^{(0)}$ ,  $M_j^{(0)}$ ,  $N_j^{(0)}$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $\mathbf{r}^{(0)}$ ,  $d^{(0)}$ .
2. Generar  $A_j$  (independiente para cada umbral) a partir de una distribución normal multivariada con media  $\boldsymbol{\theta}_{A_j}$  y matriz de varianza y covarianza  $\mathbf{V}_{A_j}^{-1}$ .
3. Generar  $B_j$  (independiente para cada umbral) de una distribución normal multivariada con media  $\boldsymbol{\theta}_{B_j}$  y matriz de varianza y covarianza  $\mathbf{V}_{B_j}^{-1}$ .
4. Generar  $C_j$  (independiente para cada umbral) de una distribución normal multivariada con media  $\boldsymbol{\theta}_{C_j}$  y matriz de varianza y covarianza  $\mathbf{V}_{C_j}^{-1}$ .
5. Generar  $(h^{(j)})^2$  (independiente para cada umbral) de una distribución Gamma Inversa con parámetros  $\frac{\nu_j + n_j}{2}$  y  $\frac{\nu_j \lambda_j + n_j s_j^2}{2}$ .
6. Generar  $\mathbf{r}$  (vector de valores de umbral) de

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-r}) \propto f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x)I(\mathbf{A}),$$

donde  $f(\cdot|\cdot)$  es la función de verosimilitud condicional del modelo TSARX ajustado.

7. Generar  $d$  de una distribución multinomial con función de masa de probabilidad

$$Pr(d = i|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d}) = \frac{f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d, d=i})Pr(d=i)}{\sum_{m=0}^{d_0} f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-d, d=m})Pr(d=m)},$$

con  $d = 0, 1, \dots, d_0$

8. Generar el vector  $S_j = (s_{0j}, s_{1j}, \dots, s_{k_jj})'$  (independiente de  $S_i$ ,  $M_i$  y  $N_i$ , para  $i \neq j$ ), obteniendo muestras de  $s_{ij}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , de forma individual a partir de una distribución Bernoulli con función de masa de probabilidad

$$Pr(s_{ij} = 1|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \beta_{ij}},$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}, s_{ij} = 1)f(A_j|S_{j-s_{ij}}, s_{ij} = 1)\pi_{ij} \\ \beta_{ij} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-s_{ij}}, s_{ij} = 0)f(A_j|S_{j-s_{ij}}, s_{ij} = 0)(1 - \pi_{ij}) \end{aligned}$$

9. Generar el vector  $M_j = (m_{1j}, \dots, m_{K_jj})'$  (independiente de  $S_i$ ,  $M_i$  y  $N_i$ , para cada umbral), obteniendo muestras de  $m_{uj}$ ,  $u = 1, \dots, K_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , de forma individual a partir de una distribución Bernoulli con función de masa de probabilidad

$$Pr(m_{uj} = 1|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-m_{uj}}) = \frac{\gamma_{uj}}{\gamma_{uj} + \varrho_{uj}},$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_{uj} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-m_{uj}}, m_{uj} = 1)f(B_j|M_{j-m_{uj}}, m_{uj} = 1)\lambda_{uj} \\ \varrho_{uj} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-m_{uj}}, m_{uj} = 0)f(B_j|M_{j-m_{uj}}, m_{uj} = 0)(1 - \lambda_{uj}) \end{aligned}$$

10. Generar el vector  $N_j = (n_{1j}, \dots, n_{q_jj})'$  (independiente de  $S_i$ ,  $M_i$  y  $N_i$ , para cada umbral), obteniendo muestras de  $n_{vj}$ ,  $v = 1, \dots, q_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , de forma individual a partir de una distribución Bernoulli con función de masa de probabilidad

$$Pr(n_{vj} = 1|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-n_{vj}}) = \frac{\varsigma_{vj}}{\varsigma_{vj} + \xi_{vj}},$$

donde

$$\begin{aligned} \varsigma_{vj} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-n_{vj}}, n_{vj} = 1)f(C_j|N_{j-n_{vj}}, n_{vj} = 1)\omega_{vj} \\ \xi_{vj} &= f(\mathbf{x}_{K+1,T}|\mathbf{x}_{1,K}, \mathbf{z}_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_{x-n_{vj}}, n_{vj} = 0)f(C_j|N_{j-n_{vj}}, n_{vj} = 0)(1 - \omega_{vj}) \end{aligned}$$

Se fija un tamaño  $N$  suficientemente grande de muestras MCMC y se descartan las primeras  $M$  observaciones correspondientes al periodo de calentamiento<sup>1</sup>. Las estimaciones puntuales se obtienen a partir del cálculo de las medias de las distribuciones posteriores de cada parámetro y las medidas de incertidumbre se obtienen a partir del cálculo de las y desviaciones estándar. Se pueden calcular intervalos de credibilidad.

Para la selección del mejor modelo se sigue el método sugerido por Congodon (2007), quien a través de métodos Bayesianos, compara diferentes especificaciones y números de regímenes, seleccionando el mejor modelo empleando criterios de información como el DIC<sup>2</sup>, o el criterio normalizado de información de Akaike (NAIC, por sus siglas en inglés).

Para el cálculo de pronósticos se emplea la distribución predictiva posterior de  $X_{T+h}$ , es decir,  $f(X_{T+h}|\mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T})$ , donde  $T$  es el tamaño de la muestra con la que se ajusta el modelo y  $h$  es el horizonte de pronósticos. A partir de la distribución predictiva conjunta, se pueden obtener las distribuciones de interés para el cálculo de pronósticos, es decir:

$$\begin{aligned} & f(x_{T+1}, \dots, x_{T+h}, z_{T+1}, \dots, z_{T+h}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z | \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}) = \\ & f(x_{T+1}, \dots, x_{T+h}, z_{T+1}, \dots, z_{T+h}, \boldsymbol{\theta}_z | \boldsymbol{\theta}_x \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}) f(\boldsymbol{\theta}_x | \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}) \\ & = \left\{ \prod_{i=1}^h f(z_{T+i} | z_{1,T+i}, \boldsymbol{\theta}_z) f(x_{T+i} | z_{T+i}, x_{1,T+i-1}, z_{1,T+i-1}, \boldsymbol{\theta}_x) \right\} f(\boldsymbol{\theta}_x | \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T}), \end{aligned}$$

donde,  $f(z_{T+i} | z_{1,T+i}, \boldsymbol{\theta}_z)$  es el kernel de la función de densidad de la cadena de Markov  $Z_t$ ,  $f(x_{T+i} | z_{T+i}, x_{1,T+i-1}, z_{1,T+i-1}, \boldsymbol{\theta}_x)$  es una distribución normal con media

$$a_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{k_j} a_m^{(j)} x_{T+i-m} + \sum_{u=1}^{K_j} b_u^{(j)} x_{T+i-su} - \sum_{m=1}^{k_j} \sum_{u=1}^{K_j} a_m^{(j)} b_u^{(j)} x_{T+i-m-su} + \sum_{v=1}^{q_j} c_v^{(j)} z_{T+i-v}$$

y varianza  $(h^{(j)})^2$ , si  $r_{j-1} < z_{T+i-d} \leq r_j$ , para algún  $j = 1, \dots, l$  y  $f(\boldsymbol{\theta}_x | \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T})$  es la distribución posterior de los parámetros del modelo TSARX.

Los pronósticos se calculan empleando el siguiente algoritmo:

1. Generar una muestra MCMC  $\boldsymbol{\theta}_x^{(k)}$  a partir de la distribución posterior  $p(\boldsymbol{\theta}_x | \mathbf{x}_{1,T}, \mathbf{z}_{1,T})$ .

<sup>1</sup> Siguiendo parcialmente el lo propuesto por González y Nieto (2020), para este trabajo se fija  $N = 12.000$  y  $M = 4.000$ , en el trabajo mencionado se usa el mismo  $N$ , pero con  $M = 6.000$

<sup>2</sup> El Criterio de Información de Desviación (*Deviance Information Criterion* - DIC) calcula a partir de la desviación del modelo (*deviance*), que mide la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Un modelo que ajusta bien los datos tendrá una desviación baja.

El objetivo del DIC es encontrar el modelo que tenga una buena bondad de ajuste y al mismo tiempo sea lo suficientemente simple. El modelo con el DIC más bajo se considera el mejor modelo.

En el contexto del modelo TSARX, se sugiere su uso para la especificación del modelo de acuerdo con lo notado por González y Nieto (2020), donde se pueden consultar más detalles sobre su cálculo e interpretación.

2. Generar  $z_{T+1}^{(k)}$  a partir de  $p(z_{T+1}|z_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_z)$ .
3. Generar  $x_{T+1}^{(k)}$  a partir de  $p(x_{T+1}|z_{T+1}^{(k)}, x_{1,T}, z_{1,T}, \boldsymbol{\theta}_x^{(k)})$ .
4. Generar  $z_{T+i}^{(k)}$  a partir de  $p(z_{T+i}|z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}_z)$ .
5. Generar  $x_{T+i}^{(k)}$  a partir de  $p(x_{T+i}|z_{T+i}^{(k)}, x_{1,T}, x_{T+1}^{(k)}, \dots, x_{T+i-1}^{(k)}, z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}_x^{(k)})$ .
6. Repetir los pasos 4 y 5 para  $i = 2, 3, \dots, h$

En este trabajo no se incluyen variables exógenas para explicar el comportamiento de la variable de interés, su uso se limita únicamente a fungir como variables de umbrales.

Los residuales del modelo TSARX son:

$$\hat{u}_t = \frac{\sum_{i=1}^G F(x_t|\mathbf{x}_{1,t-1}, \mathbf{z}_{1,t-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)})/f(x_{t,k}|\mathbf{x}_{1,t-1}, \mathbf{z}_{1,t-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)})}{1/f(x_{t,k}|\mathbf{x}_{1,t-1}, \mathbf{z}_{1,t-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)})}$$

La estimación se realiza con base en MCMC, los detalles pueden ser consultados en González y Nieto (2020).

Para determinar la existencia de relaciones no lineales entre los procesos  $X_t$  y  $Z_t$ , se calcula la prueba de no linealidad de umbrales propuesta por Tsay (1998), introducida previamente.

## 2.3. Modelo SAR

Los procesos autorregresivos estacionales (SAR, por sus siglas en inglés), sugeridos por Box y Jenkins (1991) son casos más generales de los procesos autorregresivos de orden  $p$  (AR(p)), en los cuales se busca modelar patrones cíclicos que se repiten en periodos fijos en el tiempo (de corto plazo). Se denota  $AR(p, P)_s$  a las series de tiempo que pueden ser modeladas a partir de procesos SAR, donde  $p$  representa el máximo orden autorregresivo,  $P$  representa el orden del proceso estacional y  $s$  el tamaño del periodo del ciclo estacional (conocido por la estructura de los datos).

Un proceso SAR puede ser descrito, de forma general, por:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^P \Phi_j X_{t-js} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} X_{t-js-i} + \epsilon_t,$$

donde,  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  y los valores  $i = 1, 2, \dots, p$  y  $j = 1, 2, \dots, P$ , representan los ordenes autorregresivos del modelo. El vector de parámetros a estimar es  $\theta = (\phi_0, \phi_1, \dots, \Phi_1, \dots, \Phi_P, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{pP})$ .

La estimación del modelo SAR puede ser resumida en los siguientes pasos:

1. Identificar los ordenes autorregresivos máximos a partir de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.
2. Estimar los parámetros empleando máxima verosimilitud.
3. Verificar la significancia de los parámetros y ajustar el modelo hasta obtener el modelo restringido final.
4. Validar el ajuste a partir de pruebas estadísticas o métodos gráficos

El cálculo de pronósticos del modelo SAR, corresponde a la esperanza condicional del proceso,  $E(x_{T+h}|x_T)$ , y se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$x_{T+h|T} = E(x_{T+h}|x_T) = \phi_1 x_{T+h-1} + \Phi_1 x_{T+h-s} - \alpha_{11} x_{T+h-s-1} + \dots + \phi_p x_{T+h-p} + \Phi_P x_{T+h-Ps} - \alpha_{pP} x_{T+h-Ps-p},$$

donde  $X_T$ , representa el vector de datos observados hasta el momento  $T$ , es decir, la serie de tiempo observada.

## 2.4. Modelo SE

Los modelos de suavizamiento exponencial (SE) fueron propuestos a mediados del siglo XX por R. G. Brown (1959), Holt (2004)<sup>3</sup> y Winters (1960) y dependiendo de los componentes presentes en la serie de tiempo, la forma que toma este tipo de modelo varía. Para este trabajo, teniendo en cuenta que las series que se desea modelar en este trabajo exhiben patrones estacionales (ver Capítulo 4), las formas del modelo SE pueden ser:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+h|t} &= l_t + hb_t + m_{t+h-s(k+1)} \\ l_t &= \alpha(X_t - m_{t-s}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1} \\ m_t &= \gamma(X_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)m_{t-s} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Holt propuso este modelo a la *Office of Naval Research* en 1957, sin embargo, dada la importancia de su investigación, el artículo ha sido republicado en varias revistas para facilitar su difusión.

Esta forma es conocida como método aditivo de Holt-Winters. La componente  $l_t$  representa el nivel de la variable y corresponde a un promedio ponderado entre la observación ajustada por estacionalidad y el pronóstico no estacional. La componente  $b_t$  captura la tendencia de la serie de tiempo y la componente  $m_t$  captura el comportamiento estacional y refleja un promedio ponderado entre el índice estacional del periodo actual y el índice estacional del mismo periodo, observado en el año anterior. El valor  $k$ , corresponde a la parte entera de la proporción del horizonte de pronóstico  $h$ , menos uno entre el tamaño del ciclo estacional  $s$ , es decir,  $k = [(h-1)/s]$  y  $s$  equivale a la periodicidad del ciclo estacional en la serie analizada.

En series que no presentan tendencia, el modelo SE se simplifica a:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+h|t} &= l_t + m_{t+h-s(k+1)} \\ l_t &= \alpha(X_t - m_{t-s}) + (1 - \alpha)l_{t-1} \\ m_t &= \gamma(X_t - l_{t-1}) + (1 - \gamma)m_{t-s}\end{aligned}$$

Los parámetros a estimar en los modelos de suavizamiento exponencial son  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ , o  $\theta = (\alpha, \gamma)$ , según la especificación elegida. El método de estimación consiste en minimizar el cuadrado de los errores de predicción un paso adelante ( $\sum_{t=2}^T (x_t - \hat{x}_{t+h|t})^2$ ). Los pronósticos se calculan por medio de promedios ponderados de las observaciones pasadas en las cuales los pesos decaen exponencialmente en la medida que las observaciones se hacen más lejanas en el tiempo (Hyndman y Athanasopoulos, 2021). Se pueden calcular de forma recursiva a partir de la ecuación que describe el proceso de suavizamiento.

## 2.5. Redes LSTM

Las redes *Long Short-Term Memory* (LSTM), son un tipo de redes recurrentes en las que se pueden establecer relaciones de observaciones presentes con información lejana en el tiempo (i.e. retardos de periodos de orden alto). Este tipo de redes fueron propuestas por Hochreiter y Schmidhuber (1997) quienes advirtieron que las redes recurrentes “simples” únicamente utilizaban información reciente para representar los eventos analizados y no funcionaban correctamente cuando los retardos de la variable que activa el proceso son relativamente altos. De forma general, una red neuronal se puede escribir como:

$$Y = F_{W,b}(X) + \epsilon,$$

donde,

$$F_{W,b}(X) = f_{W^{(L)},b^{(L)}}^{(L)} \circ \dots \circ f_{W^{(1)},b^{(1)}}^{(1)}(X),$$

lo cual indica que la red está compuesta por  $L$  capas ocultas en las cuales  $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(L)})$ , son matrices de pesos y  $b = (b^{(1)}, \dots, b^{(L)})$ , son vectores de sesgo ( $W$  y  $b$ , son parámetros a estimar). Además, el término  $\epsilon$  es un error i.i.d.

Las redes neuronales establecen relaciones (no lineales) entre todas las entradas (*inputs*) que se definan para describir los procesos, en este caso, los retardos de la variable, para explicar el comportamiento de la serie analizada y cada enlace cuenta con un parámetro. Por esta razón, a diferencia de los modelos estadísticos clásicos, la cantidad de parámetros a estimar suele ser mayor al número de datos disponibles.

En particular, la estructura de una red LSTM puede ser descrita como una serie de compuertas a través de las cuales la información es procesada de forma específica. Las salidas de una red LSTM se pueden escribir como:

$$c_t = \hat{\alpha}_t \circ c_{t-1} + \hat{\beta}_t \circ \hat{c}_t,$$

donde  $\circ$ , es el producto Hadamard,  $\hat{\alpha}_t$  representa la compuerta de olvido y  $\hat{\beta}_t$  es la compuerta de entrada. Adicionalmente, se incluye una compuerta de reinicio  $\hat{\gamma}_t$ . A continuación se describe con más detalle cómo funcionan las compuertas de la red.

- Compuerta de olvido (*dropout*): En cada momento  $t$  para el que se analice la información, se puede definir una proporción de la información pasada que será considerada innecesaria y por lo tanto, se desechará. Naturalmente, este parámetro toma valores entre 0 y 1, donde 1 implica desechar todas las observaciones pasadas y 0, no desechar nada. Por esta compuerta ingresa la información del estado oculto previo,  $h_{t-1}$  y es procesada a través de una capa sigmoide:

$$\hat{\alpha}_t = \sigma(U_\alpha h_{t-1} + W_\alpha x_t + b_\alpha)$$

- Compuerta de entradas: En esta compuerta se generan valores candidatos para los pesos a asignar en las relaciones entre las neuronas. En otras palabras, consiste en definir los pesos asignados a la relaciones entre los retardos de la variable que se fijaron para el ajuste de la red (ventana de observaciones pasadas), en función de la cantidad de neuronas (enlaces) determinadas.

$$\hat{\beta}_t = \sigma(U_\beta h_{t-1} + W_\beta x_t + b_\beta)$$

- Compuerta de reinicio: Corresponde a la información que será procesada para la generación del estado oculto.

$$\hat{\gamma}_t = \sigma(U_\gamma h_{t-1} + W_\gamma x_t + b_\gamma)$$

La información del estado oculto ingresa por una función sigmoide que determina los datos que ingresarán a la celda de estado (de forma similar a la compuerta de olvido) y simultáneamente, es procesada por una función de activación ( $f$ , seleccionada por el investigador y por lo general tangente hiperbólica ( $\tanh$ ) o  $\text{relu}$ ) que genera un vector de valores candidatos para la celda de memoria ( $\hat{c}_t$ ).

$$h_t = \hat{\gamma}_t \circ f_h(c_t)$$

La propiedad de las redes LSTM para establecer relaciones con retardos de orden alto, las hacen propicias para, entre muy variadas aplicaciones, el análisis económico y pronóstico de series financieras como se ha mostrado en los trabajos de, entre otros, Jiehua, Chao, Wei, y Qiumin (2021), Siami-Namini, Tavakoli, y Siami Namin (2018), Peirano, Kristjanpoller, y Minutolo (2021) y Cao, Zhu, Wang, Demazeau, y Zhang (2020).

La estimación de parámetros se realiza buscando una red neuronal tal que permita minimizar el riesgo empírico, lo cual es una estimación de la precisión de la red ajustada fuera del conjunto de entrenamiento (i.e., el conjunto de datos con el que se calibra la red neuronal (estimación de parámetros)). El riesgo empírico está dado por:

$$R(\hat{F}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathcal{L}(\hat{F}(\mathbf{x}_t), \mathbf{y}_t)$$

A partir de lo anterior, el problema de optimización se puede escribir como:

$$\min_{W,b} f(W, b) + \lambda \phi(W, b),$$

con

$$f(W, b) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathcal{L}(Y^{(t)}, \hat{F}(X^{(t)})) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathcal{L}(Y^{(t)}, \hat{Y}(X^{(t)})),$$

donde  $\phi(W, b)$  es una componente de penalización por regularización, es decir, una penalización por ajustes en el modelo tendientes a reducir su error de generalización, pero no su error de entrenamiento. Para solucionar el problema de minimización se usa el algoritmo de gradiente descendiente, que puede ser consultado con más detalle en Peña y Tsay (2021).

Los pronósticos de la variable de interés, se pueden obtener a partir del estado oculto:

$$\hat{X}_{t+1} = W_X \hat{h}_t + b_X$$

Para el ajuste y cálculo de pronósticos de las variables empleadas en este documento se usa como base el código propuesto por Dixon, Halperin, y Bilokon (2020), con algunas modificaciones. Para la elección de los hiperparámetros de la red (número de neuronas, tasa de olvido, número de retardos y tipo de función de activación), se implementa validación cruzada y en cada caso se prueban ajustes incluyendo 15, 30, 50, 75 y 100 neuronas y parámetros de regularización 0, 0.001, 0.01 y 0.1. Para la validación cruzada se hacen 5 pliegues secuenciales de los datos y se selecciona la especificación cuyo error cuadrático medio, calculado para el conjunto de entrenamiento (i.e., la serie empleada para ajustar la red) sea el menor. Es decir, se cuenta con 20 configuraciones de redes LSTM y se prueban 5 pliegues de los datos, lo que da como resultado 100 diferentes ajustes para cada variable.

La definición del número de retardos a incluir en la especificación de la red, se realiza a partir del análisis de la función de autocorrelación parcial (PACF) presentada en el análisis descriptivo de cada una de las series consideradas.

Si bien las redes LSTM permiten incorporar retardos de orden alto, Zhang y Qi (2005) sugieren que este tipo de modelos no necesariamente capturan correctamente los comportamientos estacionales. Por lo tanto, adicional al ajuste de redes LSTM de alto orden autorregresivo, para cada variable se realiza una estimación de la componente estacional con el fin de extraerla de los procesos analizados y posteriormente, se ajusta una red LSTM a los datos desestacionalizados.

Para la comparación de precisión, se calculan de forma independiente pronósticos para la componente estacional siguiendo lo mencionado en la sección 2.4 y para la serie desestacionalizada a partir de la red neuronal ajustada. Los resultados de los pronósticos independientes se suman para obtener la serie final que será comparada.

## 2.6. Combinación de pronósticos

El artículo de Bates y Granger (1969) sugiere que se puede obtener pronósticos más precisos si se combinan los resultados obtenidos por medio de métodos distintos. En el trabajo citado, se indica que se debe encontrar la mejor combinación lineal de los pronósticos con el fin de minimizar el error cuadrático medio y para tal fin, sugieren que los métodos cuyos pronósticos individuales generen menor error cuadrático medio, deben ser ponderados con pesos mayores a los pronósticos generados por métodos menos precisos.

En este sentido, la combinación lineal sugerida por Bates y Granger (1969), supone un promedio ponderado de los pronósticos, donde el objetivo es estimar las ponderaciones óptimas que permitan minimizar el error cuadrático medio.

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es comparar la precisión de los pronósticos generados por el modelo TSARX, con respecto a otros métodos empleados en la literatura, adicional a los modelos previamente presentados, se incluye la idea de combinación de pronósticos. No obstante, encontrar la combinación lineal óptima puede ser complejo y excede el alcance de este trabajo, razón por la cual se usa un promedio equiponderado en los pronósticos obtenidos por cada modelo ajustado, pues esta forma de combinación resulta aceptable para propósitos ilustrativos (Bates y Granger, 1969). Es decir:

$$\hat{X}_{t+h} = \frac{\hat{X}_{t+h_{TSARX}} + \hat{X}_{t+h_{TAR}} + \hat{X}_{t+h_{SAR}} + \hat{X}_{t+h_{SE}} + \hat{X}_{t+h_{LSTM}} + \hat{X}_{t+h_{LSTM+SE}}}{6}$$

## 2.7. Pruebas de bondad de ajuste

Para validar el ajuste de los modelos considerados, se realiza un análisis de residuales a partir del cual se busca verificar si son estacionarios por lo menos en el sentido débil, es decir, que presenten media y varianza marginal constantes y no cuenten con estructura de autocorrelación. Además, como se mencionó previamente, en los modelos TSARX, TAR y SAR, el término de error corresponde a procesos Gaussianos de Ruido Blanco, por lo que se requiere verificar su distribución.

Para verificar la distribución de los residuales se emplea la prueba de Jarque-Bera, que contrasta la hipótesis nula de normalidad en la distribución de los residuales analizados, contra la alterna de no normalidad. El estadístico incluye información sobre la simetría y la curtosis de los residuales para validar su distribución.

$$JB = \left[ \frac{n-k+1}{6} \right] \cdot [S^2 + 0.25(c-3)^2],$$

donde  $n$  es el número de observaciones,  $k$  el número de parámetros estimados,  $S$  la asimetría y  $C$  la curtosis. Bajo la hipótesis nula, el estadístico Jarque-Bera se distribuye asintóticamente chi-cuadrado, es decir,  $JB \sim \chi^2(2)$ .

La no autocorrelación de los residuales se verifica a partir de la prueba de Ljung-Box, cuya hipótesis nula indica independencia (no autocorrelación) en los datos. Esta prueba verifica si existe autocorrelación con los primeros  $h$  rezagos de la variable analizada y para este caso, si existe autocorrelación en los residuales hasta el rezago  $h$ .

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k},$$

donde  $n$  es la cantidad de residuales y  $\hat{\rho}$  es la autocorrelación estimada. Bajo la hipótesis nula, el estadístico  $Q$  sigue una distribución asintóticamente chi-cuadrado, es decir,  $Q \sim \chi^2(h)$ .

Adicional al cálculo de la prueba de Ljung-Box, se incluyen los gráficos de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, a través de las cuales también se puede identificar estructura de autocorrelación en los datos analizados.

La función de autocorrelación muestral (ACF) permite medir el grado de asociación lineal entre la serie analizada y sus rezagos, es decir:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2},$$

donde  $\bar{X}$  es el promedio muestral y  $k$  representa el rezago para el cual se calcula la autocorrelación.

Por su parte, la función de autocorrelación parcial (PACF) determina el grado de asociación lineal entre  $X_1$  y  $X_{k+1}$ , eliminando los efectos de los rezagos  $2, 3, \dots, k$ . El cálculo de estos valores se puede obtener ajustando modelos de regresión de la serie analizada, contra cada uno de los rezagos que se deseen evaluar.

En los autocorrelogramas, es decir gráficos de autocorrelación, se presenta la autocorrelación muestral estimada y las correspondientes bandas de confianza que indican si dicha autocorrelación es o no, significativa (ilustraciones incluidas en el Anexo B).

Para verificar errores en la especificación de los modelos y heterocedasticidad se usan los gráficos CUSUM y CUSUMSQ, respectivamente. Los cálculos requeridos para realizar estos gráficos tienen en cuenta el número de observaciones y de parámetros estimados. Más detalles sobre los cálculos pueden ser consultados en los artículos de R. L. Brown, Durbin, y Evans (1975) y Edgerton y Wells (1994).

Los modelos de redes neuronales tienen la particularidad de no especificar supuestos distribucionales de los residuales que generan. Adicionalmente, debido a que el cálculo de las gráficas CUSUM y CUSUMSQ se realiza con base en el número de parámetros y la cantidad de datos empleados para la estimación, éstas no pueden ser empleadas para verificar la especificación del modelo o problemas de heterocedasticidad. No obstante, la estimación del riesgo empírico, requiere que los residuales sean estacionarios en el sentido débil. Por lo tanto, para la validación de las redes LSTM ajustadas, se analiza si los residuales presentan estructura de autocorrelación y problemas de heterocedasticidad a partir del análisis gráfico y la prueba de Ljung-Box. También se incluyen los resultados de la prueba de Jarque-Bera a pesar que el rechazo de la hipótesis nula de normalidad no afecta la validez de los pronósticos

---

calculados a partir de este ajuste.

Para sintetizar los resultados del proceso de validación, al finalizar cada ajuste se presenta una tabla en la que se indican los resultados de las pruebas para cada modelo ajustado. Para las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box, se incluyen los valores  $p$  (para el caso de la prueba de Ljung-Box, el valor corresponde a la prueba incluyendo dos años y medio de retardos ya que no es común identificar series económicas que sean explicadas por retardos de orden más alto).

La estimación de los modelos TSARX, TAR, SAR y SE, así como el cálculo de los pronósticos en cada caso fue realizada usando la versión 2022.07.02+576 de Rstudio y para las redes LSTM se usó la versión 3.8.10 de Python. Los códigos empleados pueden ser consultados en el repositorio de GitHub disponible en <https://github.com/saerbelaez/Pronosticos-modelos-TSARX>.

# 3. Medidas de precisión y comparación de pronósticos

Una vez ajustados y verificados los modelos introducidos en el capítulo anterior, se calculan los pronósticos y se procede a comparar su precisión. Determinar si la precisión de los pronósticos varía dependiendo del modelo que se ajuste solamente es posible si se comparan los valores pronosticados contra los valores observados en la realidad. Por ello, por cada variable analizada se cuenta con una serie de tamaño  $T$ , entre los que se toman las primeras  $t_0$  observaciones para el ajuste de los modelos y se calculan los pronósticos de los valores  $X_{t_0+1}, X_{t_0+2}, \dots, X_T$ , ajustando el horizonte de pronóstico a  $h = 1, 2, 3, 4$ <sup>1</sup>.

Para este trabajo se seleccionan horizontes temporales  $h = 1, 2, 3, 4$  teniendo en cuenta la disponibilidad de información. Además, los pronósticos se calculan máximo hasta marzo de 2020, debido a que las medidas de confinamiento para la prevención de la transmisión del virus COVID-19 y el consecuente desaceleramiento de la economía comenzaron a ser observados a partir de ese mes en los países considerados para el análisis.

Para comparar la precisión de los pronósticos, se sigue parcialmente el trabajo de Vaca (2018), quien sugiere emplear estadísticas que permitan comparar los resultados entre diferentes modelos. A continuación, se presenta el error cuadrático medio y la prueba de Diebold - Mariano, como métodos de comparación de precisión de pronósticos considerados en este trabajo.

## 3.1. Error cuadrático medio

El error cuadrático medio (ECM), es el promedio del cuadrado de la diferencia entre los valores observados y los pronosticados. Se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$ECM(h) = \frac{1}{l} \sum_{j=t_0}^{t_0+l-1} (e_{j+h|j})^2,$$

---

<sup>1</sup>La periodicidad de los pronósticos corresponde a la de la serie de tiempo analizada, por lo tanto, para este estudio  $h$  tendrá periodicidad mensual y trimestral, ver capítulo 4 donde se especifica la periodicidad de cada serie.

donde  $l$  representa el número disponible de pronósticos de tamaño  $h$  y  $t_0$  es el punto de inicio de pronóstico.  $e_{j+h|j}$ , corresponde al error de pronóstico, a saber,  $e_{j+h|j} = X_{j+h} - \hat{X}_{j+h|j}$ .

El ECM se calcula vía *rolling*, método que consiste en fijar el horizonte de pronósticos  $h = 1, 2, 3, \dots, H$  y calcular los pronósticos a partir de un origen  $X_{t_0}$ , incluyendo para los siguientes pronósticos, los  $h$  siguientes valores observados. Para ilustrar el funcionamiento del *rolling*, suponga que cuenta con una muestra de una serie de tiempo compuesta por 20 observaciones de las cuales va a emplear las primeras 15 para el ajuste de los modelos ( $t_0 = 20$ ) y las 5 restantes serán empleadas para comparar la precisión cuando cálcula pronósticos uno y dos pasos adelante ( $h = 1, 2$ ). Para este trabajo los parámetros estimados con la muestra de de entrenamiento (observaciones hasta  $x_{t_0}$ ) se fijan para calcular todos los pronósticos, sin embargo, otras modalidades del *rolling* permiten re-estimar los parámetros en cada iteración. Para  $h = 1$  se tiene el siguiente paso a paso:

- Una vez estimados los parámetros con la muestra de entrenamiento  $\hat{\theta}_{15}$ , se calcula el pronóstico para la observación 16, empleando una ventana de observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_{15}$ .
- Con los parámetros estimados con la muestra de entrenamiento  $\hat{\theta}_{15}$ , se calcula el pronóstico para la observación 17, pero esta vez, la ventana de observaciones se amplía para incluir la realización 16, es decir,  $x_1, x_2, \dots, x_{15}, x_{16}$ .
- A partir de  $\hat{\theta}_{15}$ , calcular el pronóstico para la observación 18, ampliando la ventana para incluir las observaciones 16 y 17, es decir,  $x_1, x_2, \dots, x_{15}, x_{16}, x_{17}$ .
- Continuar hasta pronosticar la observación 20, empleando una ventana de 19 observaciones y los parámetros inicialmente estimados ( $\hat{\theta}_{15}$  y  $x_1, x_2, \dots, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ ).

Para  $h = 2$  el funcionamiento es esencia el mismo, solo que en cada ocasión, se pronostican 2 pasos adelante y la ventana se mueve en la misma cantidad de observaciones. Es decir:

- Con los parámetros estimados a partir de la muestra de entrenamiento ( $\hat{\theta}_{15}$ , calcular los pronósticos de las observaciones 16 y 17, empleando una ventana de 15 observaciones,  $x_1, x_2, \dots, x_{15}$ .
- Ampliar la ventana para incluir las observaciones 16 y 17, y calcular el pronóstico para las observaciones 18 y 19 con  $\hat{\theta}_{15}$ .

La comparación de los pronósticos se realiza a partir de los  $ECM(h)$  obtenidos, teniendo en cuenta que un menor  $ECM(h)$  implica mayor precisión en los pronósticos. Por lo tanto, el criterio para identificar el modelo más preciso consiste en seleccionar el modelo que genere el mínimo error cuadrático medio entre los ajustados, es decir,

$$\begin{aligned} & \text{Min}(ECM_{TSARX}(h), ECM_{TAR}(h), ECM_{SAR}(h), ECM_{SE}(h), ECM_{LSTM}(h), \\ & \quad ECM_{LSTM+SE}(h), ECM_{comb}(h)) \end{aligned}$$

### 3.2. Prueba de Diebold - Mariano

Para comparar los pronósticos generados por dos modelos diferentes, (Diebold y Mariano, 1995) sugieren una prueba en la que se tiene en cuenta el error cuadrático medio producido en ambos casos. El estadístico de Diebold-Mariano es:

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{d})}},$$

el cual, bajo la hipótesis nula se distribuye asintóticamente normal estándar y donde  $\bar{d}$  se puede ver como la diferencia media en los errores de pronóstico obtenidos en los modelos comparados y  $\hat{V}(\bar{d})$ , es la varianza estimada para  $\bar{d}$ . Es decir:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{1}{l} \sum_{j=t_0}^{t_0+l-1} d_j \\ d_j &= (e_{j+h|j,1})^2 - (e_{j+h|j,2})^2 \\ V(\bar{d}) &\approx \frac{1}{l} \left[ \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \gamma_k \right] \\ \hat{\gamma}_k &= \frac{1}{l} \sum_{j=k+1}^l (d_j - \bar{d})(d_{j-k} - \bar{d}) \end{aligned}$$

Se debe notar que la hipótesis nula en esta prueba se puede interpretar como igual desempeño de los pronósticos, por lo que, con el objetivo de determinar con certeza cuál es el modelo que genera pronósticos más precisos, se realizan pruebas simultáneas teniendo como hipótesis alternativa tanto que el modelo 1 es mejor que el modelo 2, como que el modelo 2 es mejor que el modelo 1<sup>2</sup>.

Además, si bien el estadístico se distribuye asintóticamente normal, como fue mencionado previamente, la cantidad de datos disponibles para la mayoría de series analizadas es limitada, por lo se aplica la prueba a pesar de no contar con una cantidad suficiente de datos para garantizar sus propiedades asintóticas.

---

<sup>2</sup>Dado que en este caso, el modelo de interés es el TSARX, se toma este como modelo 1

## 4. Presentación de variables consideradas y análisis descriptivo

El modelo TSARX es una generalización del modelo TAR que permite capturar patrones estacionales en las series que se desea modelar (González y Nieto, 2020). En este sentido, las series analizadas en el presente trabajo deben caracterizarse por presentar patrones cíclicos de corto plazo (i.e., que se repiten cada año).

Adicional a los patrones estacionales exhibidos por la series, para la determinación de las variables, se buscó que fueran relevantes para el seguimiento a la actividad económica. En esta sección se presentan las variables para las cuales se ajustaron los modelos propuestos en el capítulo 2, describiendo sus características principales y especificando en cada caso la variable de umbrales para la estimación de los modelos TSARX y TAR. Las variables determinadas corresponden al Producto Interno Bruto (PIB)<sup>1</sup>, la tasa de desempleo y el Índice de Precios al Consumidor (IPC).

El Producto Interno Bruto (PIB), representa el indicador macroeconómico por excelencia y se puede medir desde el punto de vista del valor agregado, de la utilización de bienes o servicios finales (consumo) o de los ingresos de las unidades productivas. Independiente del punto de vista desde el que se calcule, el PIB da cuenta del nivel de producción de un país.

Las mediciones del PIB generalmente se realizan de forma trimestral, sin embargo, para el caso colombiano, el Departamento Administrativo Nacional - DANE, diseñó el Indicador de Seguimiento a la Economía (ISE), como una medida que permitiera monitorear la actividad económica en el corto plazo (DANE, 2016). El ISE puede ser interpretado como una variable *proxy* del PIB y es publicado con una periodicidad mensual lo que se traduce en que la serie disponible para el ISE cuenta con una mayor cantidad de datos que la serie del PIB colombiano. Una mayor cantidad de datos es deseable para lograr el correcto ajuste de los modelos y contar con observaciones adicionales para el cálculo de los pronósticos. Teniendo esto en cuenta, para Colombia en lugar de analizar el PIB, se analiza el ISE.

En condiciones normales, esta variable exhibe patrones estacionales debido a que la economía presenta ciclos de corto plazo, asociados a periodos en el año para los cuales la actividad

---

<sup>1</sup>Para el caso colombiano se emplea el Índice de Seguimiento a la Economía (ISE)

económica es más dinámica, como en periodos de vacaciones o fiestas de fin de año y periodos de menor actividad, como lo son los primeros meses de cada año. Además, dependiendo de las costumbres y tradiciones de cada país, durante algunos meses, la economía puede presentar incrementos en su dinámica como ocurre durante semana santa (*Easter*).

La tasa de desempleo, como su nombre lo indica, permite determinar la proporción de personas en una región que carecen de un empleo que les permita generar ingresos. Este indicador es relevante para la economía debido a que bajas tasas de desempleo<sup>2</sup> se asocian a niveles altos de producción y por ende, a economías activas (y viceversa).

Si bien la tasa de desempleo refleja la proporción de personas que no cuenta con un empleo, el cálculo no se realiza con relación a la población total, sino, con respecto a la población económicamente activa (PEA), que para Colombia<sup>3</sup> corresponde a las personas en edad de trabajar<sup>4</sup>, que cuentan con un empleo o se encuentran buscando uno (DANE, 2015).

Como la tasa de desempleo fluctúa de acuerdo con los cambios de la producción, se espera que esta variable presente patrones estacionales asociados a los meses en los cuales la economía es más (o menos) dinámica.

El Índice de Precios al Consumidor (IPC) es una herramienta a partir de la cual se realiza seguimiento al precio de los bienes y servicios contenidos en una canasta representativa de los hábitos de consumo de los individuos en un país. Una vez definida la canasta de bienes y servicios, se selecciona un periodo base contra el que se compararán los precios en los siguientes periodos. En los meses siguientes, se recolecta información sobre los precios de los bienes y servicios de esa canasta y se calcula el índice, si los precios han aumentado, el índice será mayor y viceversa. Las variaciones mensuales o anuales del IPC son conocidas como inflación mensual o anual, respectivamente.

Las oficinas de estadística de los países o las instituciones que tienen a cargo el IPC, publican mensualmente los resultados debido a que este es uno de los indicadores más relevantes para la ejecución de política monetaria y se relaciona con los ciclos económicos de corto y largo plazo.

Adicionalmente, para el ajuste de algunas variables, siguiendo lo sugerido por (Vaca, 2018),

---

<sup>2</sup>El concepto de tasa de desempleo baja o alta, es relativo y depende de las condiciones de cada país. Una tasa de desempleo es baja cuando se acerca a la tasa natural de desempleo.

<sup>3</sup>Las instituciones encargadas de estas estadísticas en cada país pueden implementar definiciones ligeramente distintas.

<sup>4</sup>En Colombia, las personas en edad de trabajar son aquellas tienen más de 12 años, para las zonas urbanas o más de 10 años para las zonas rurales. Las oficinas estadísticas de cada país pueden definir la población en edad de trabajar con otros criterios.

se usa el *spread* como variable de umbrales para el ajuste de los modelos TSARX y TAR. El término *spread* generalmente se usa para nombrar la diferencia entre el precio de oferta y de demanda de algún producto. Por ejemplo, en finanzas, puede representar la diferencia entre el precio de venta y de compra de una acción u otro título valor. En este trabajo, el *spread* se refiere a la diferencia entre las tasas de interés de corto y largo plazo.

En este trabajo se analizan datos de Colombia, Estados Unidos y Reino Unido con el fin de observar el comportamiento de los modelos propuestos y poder comparar efectivamente la precisión de los pronósticos obtenidos, con particular interés en el TSARX. Adicionalmente, incluir datos de diferentes países permite tener en cuenta distintas periodicidades en las variables, por lo que se puede observar el comportamiento de los pronósticos generados por el modelo TSARX, ajustando datos con periodicidad mensual y trimestral.

En las siguientes secciones se presenta el análisis descriptivo de las series de tiempo de cada país, indicando en cada caso la variable de umbrales empleada para el ajuste de los modelos TSARX y TAR, el número de observaciones empleadas para el ajuste de los modelos y el número de observaciones para las cuales se calculan los pronósticos.

También se incluye la identificación de patrones estacionales en cada serie contemplada, lo cual se realiza a partir de análisis gráficos (autocorrelograma y gráficos de caja mensuales) y se determina el orden autorregresivo máximo (o ventana de observaciones pasadas para las redes LSTM) con el que se puede describir el comportamiento de cada variable a partir del análisis del autocorrelograma parcial.

## **4.1. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - Colombia**

### **4.1.1. Análisis descriptivo para el Índice de Seguimiento a la Economía**

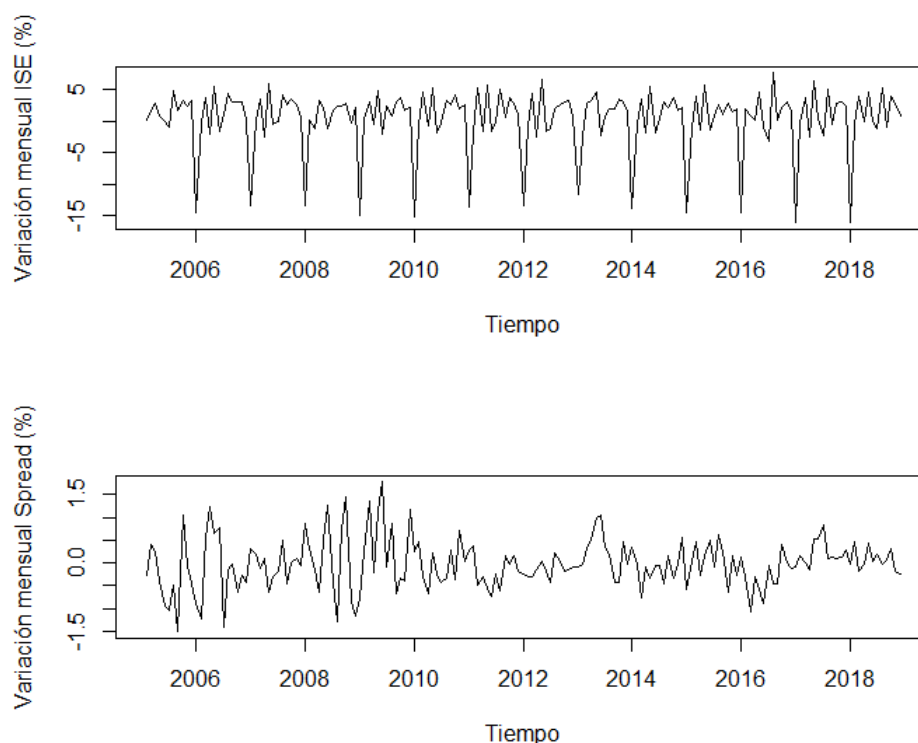
Como se mencionó previamente, en Colombia se calcula el Índice de Seguimiento a la Economía (ISE) que tiene periodicidad mensual y exhibe comportamientos similares al PIB. Para este trabajo se cuenta con información del ISE entre febrero de 2005 y marzo de 2020 (182 observaciones). Para el ajuste de los modelos se toman las observaciones de febrero de 2005 a diciembre de 2018 (167 observaciones) y los pronósticos se calculan para el periodo entre enero de 2019 y marzo de 2020 (15 observaciones). Los datos fueron descargados de la página web del DANE.

Los modelos se ajustan para el logaritmo natural de la variación mensual del ISE, lo cual,

en series relativamente estables, es similar a la variación porcentual de la variable<sup>5</sup>, es decir,  $X_t = (\log(ISE_t) - \log(ISE_{t-1})) * 100$ .

Para ajustar los modelos TAR y TSARX al ISE, se usa el *spread* como variable de umbrales. Como tasa de interés de largo plazo, se toma la tasa de interés de los bonos del tesoro (TES) a diez años y como tasa de interés de corto plazo se toma tasa interbancaria *overnight*. Los datos de tasas de interés para el periodo mencionado previamente fueron descargados de la página web del Banco de la República.

La variable de umbrales corresponde a la primera diferencia ordinaria del *spread*, es decir,  $Z_t = spread_t - spread_{t-1}$ . En la figura 4-1, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$  para el periodo de ajuste de los modelos.

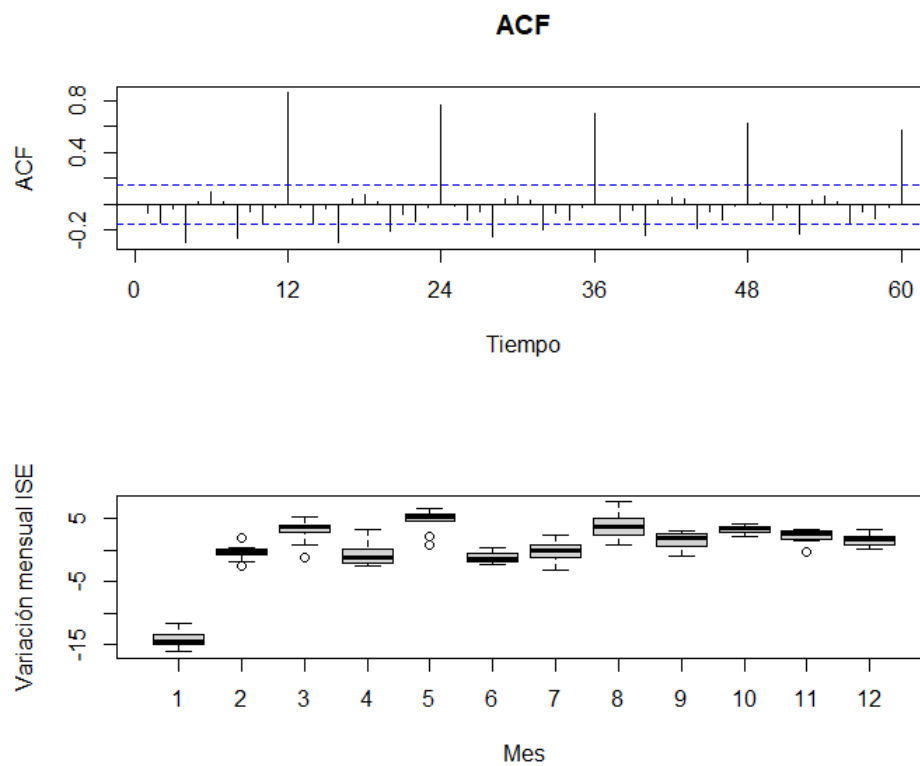


**Figura 4-1.:** Relación variación mensual ISE  $\{X_t\}$  (arriba) y variación mensual spread  $\{Z_t\}$  (abajo) - Colombia.

En la figura se aprecia que la serie  $\{X_t\}$ , presenta valores bajos para los meses de enero de cada año. Adicionalmente, el autocorrelograma de la serie indica autocorrelación significativa (fuera del intervalo de confianza) para los rezagos 4, 8 y 12, que se repiten cíclicamente cada

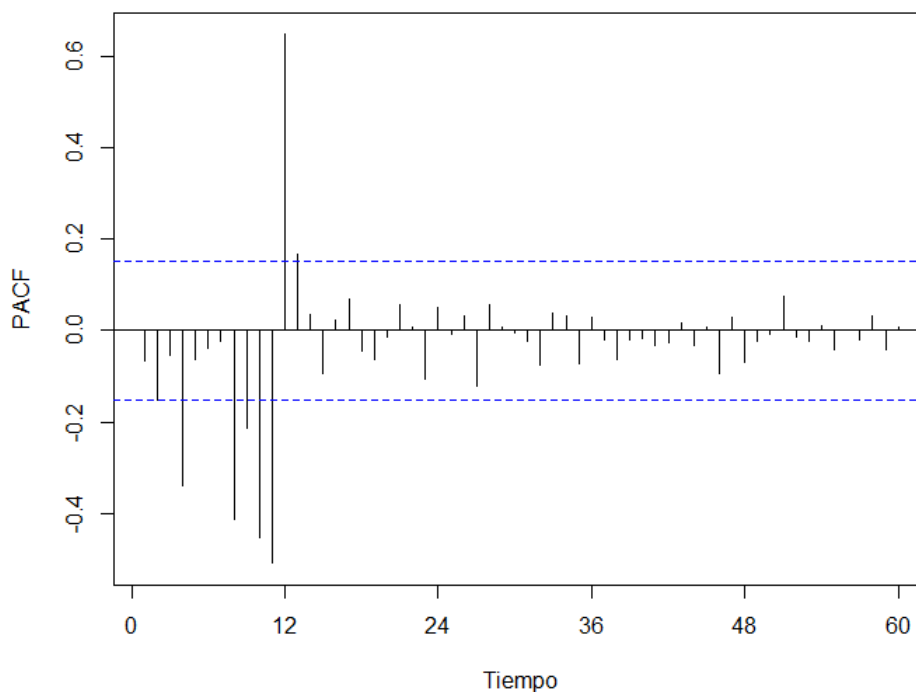
<sup>5</sup>Si la tasa de crecimiento de la variable analizada es cercana a 0,  $\log(X_t) - \log(X_{t-1}) \approx \frac{X_t - X_{t-1}}{X_t}$

año (rezagos 16, 20, 24, etc.) y los gráficos de caja indican que la media de la variación mensual del ISE varía en cada mes (Figura 4-2), lo cual se puede aceptar como evidencia empírica de patrones estacionales en  $\{X_t\}$ .



**Figura 4-2.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja para cada mes (abajo) de la variación mensual del ISE,  $\{X_t\}$ .

El autocorrelograma parcial (Figura 4-3) muestra que existe autocorrelación significativa de la variación mensual del ISE para los rezagos 2 (ligeramente significativa), 4, 8, 9, 10, 11 y 12.



**Figura 4-3.:** Autocorrelograma parcial para la variación mensual del ISE,  $\{X_t\}$ .

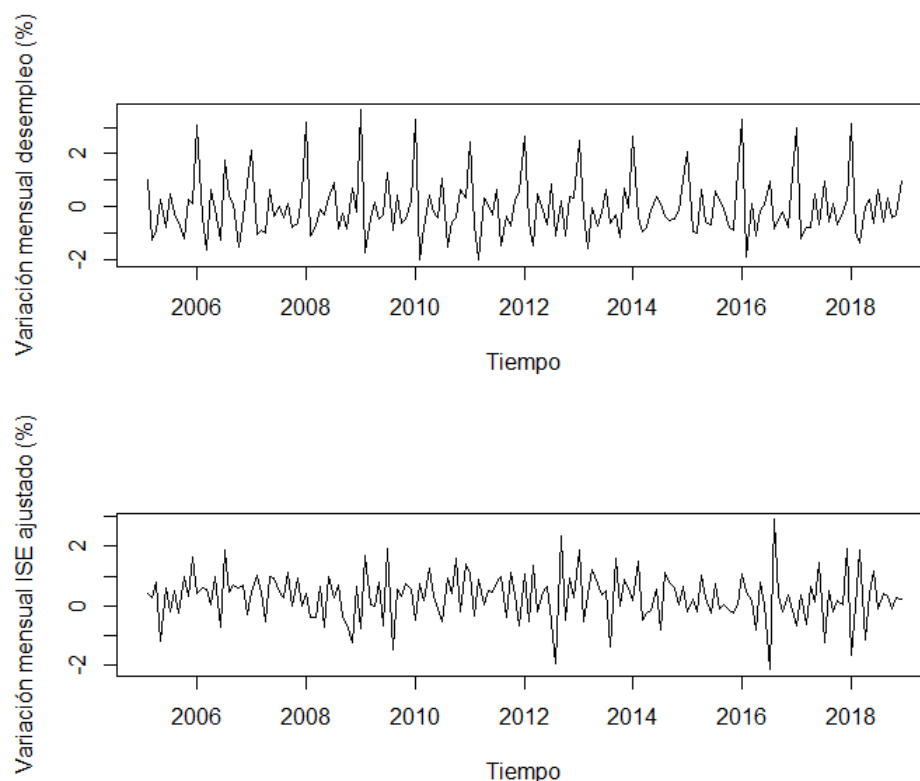
A partir de lo observado en el autocorrelograma parcial, los modelos TSARX y SAR podrían ser especificados empleando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2, 3, 4$  y  $P = 1, 2$  y para el modelo TAR y las redes LSTM, se podrían fijar ordenes autorregresivos máximos  $p = 14, 15, 16, 26, 27, 28$ .

#### 4.1.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo

La tasa de desempleo refleja la proporción de personas económicamente activas que no cuentan con un empleo. La serie analizada en este trabajo se compone de 181 observaciones mensuales entre febrero de 2005 y marzo de 2020, de las cuales, las primeras 161 se usaron para el ajuste de los modelos (febrero 2005 a diciembre 2018) y los pronósticos se calculan para el periodo comprendido entre enero de 2019 y marzo de 2020 (15 observaciones). Los datos fueron descargados de la página web del DANE.

La variable ajustada corresponde a la primera diferencia ordinaria de la tasa de desempleo, lo cual se puede interpretar como la tasa de crecimiento del desempleo, es decir,  $X_t = (Desempleo_t - Desempleo_{t-1})$ .

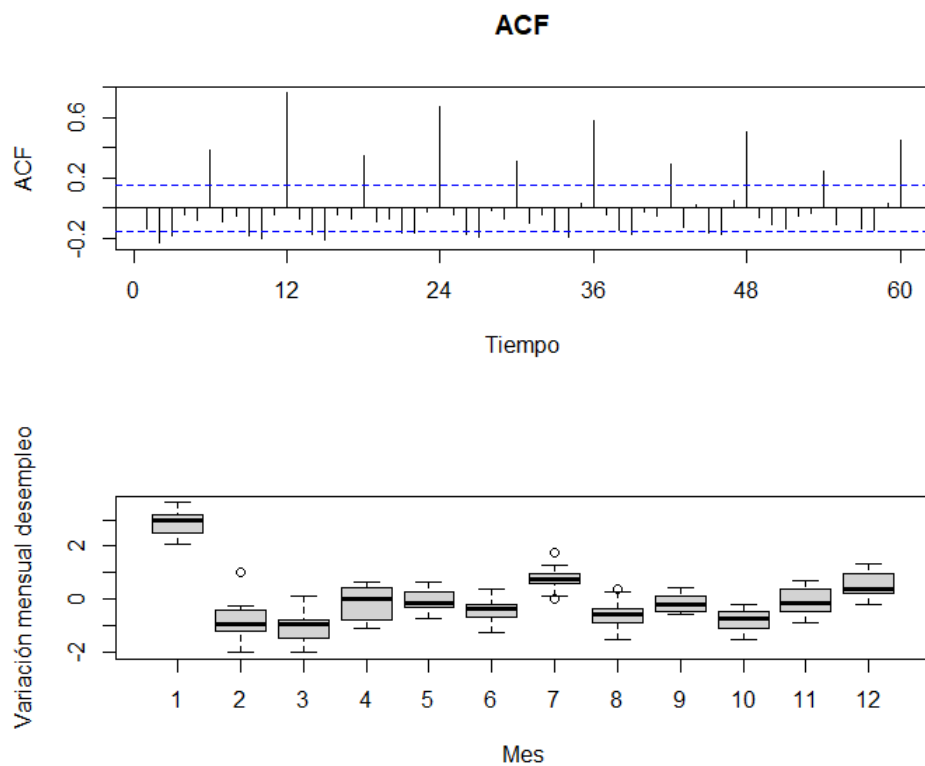
Como variable de umbrales se usa la variación mensual del ISE ajustada por estacionalidad, datos que también son publicados por el DANE, es decir,  $Z_t = (\log(ISE_t) - \log(ISE_{t-1})) * 100$ . En la Figura 4-4, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ .



**Figura 4-4.:** Relación variación tasa de desempleo  $\{X_t\}$  (arriba) y variación ISE  $\{Z_t\}$  (abajo) - Colombia.

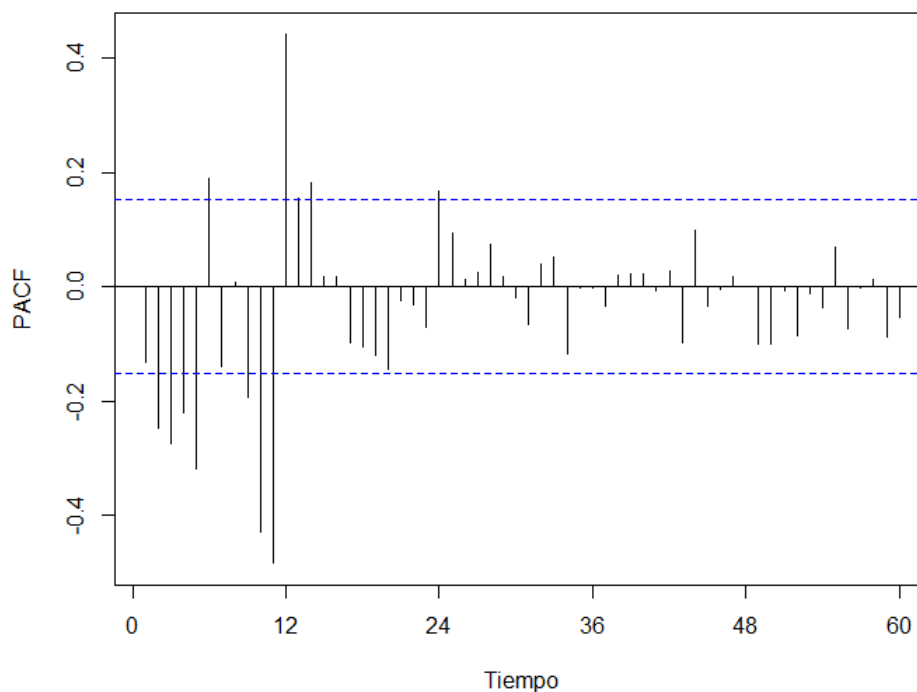
Se observa que las variaciones en la tasa de desempleo son mayores en enero, lo cual tiene sentido debido a que después de la temporada de diciembre la cantidad de personas desempleadas suele aumentar, lo cual es seguido por menores variaciones causadas porque en los primeros meses del año la economía tiende a activarse lentamente.

El autocorrelograma para la variable estudiada indica la presencia de autocorrelación significativa para los rezagos 2, 3, 6, 9, 10 y 12, con este patrón repitiéndose cada 12 rezagos, lo cual indica la presencia de un patrón estacional. Adicionalmente, los gráficos de caja reflejan cambios en el valor medio de la variación mensual de la tasa de desempleo, en otras palabras, el valor medio de la variable de interés varía para cada uno de los meses del año (figura 4-5). Con lo anterior, se puede concluir que la serie efectivamente presenta un patrón estacional.



**Figura 4-5.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja para cada mes (abajo) de la variación mensual de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

En el autocorrelograma parcial se puede apreciar que la variación mensual de la tasa de desempleo presenta autocorrelación significativa para los rezagos 2 al 6 y 9 al 12. Algunos rezagos de mayor orden también parecen presentar autocorrelación significativa (Figura 4-6).



**Figura 4-6.:** Autocorrelograma parcial para la variación mensual de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

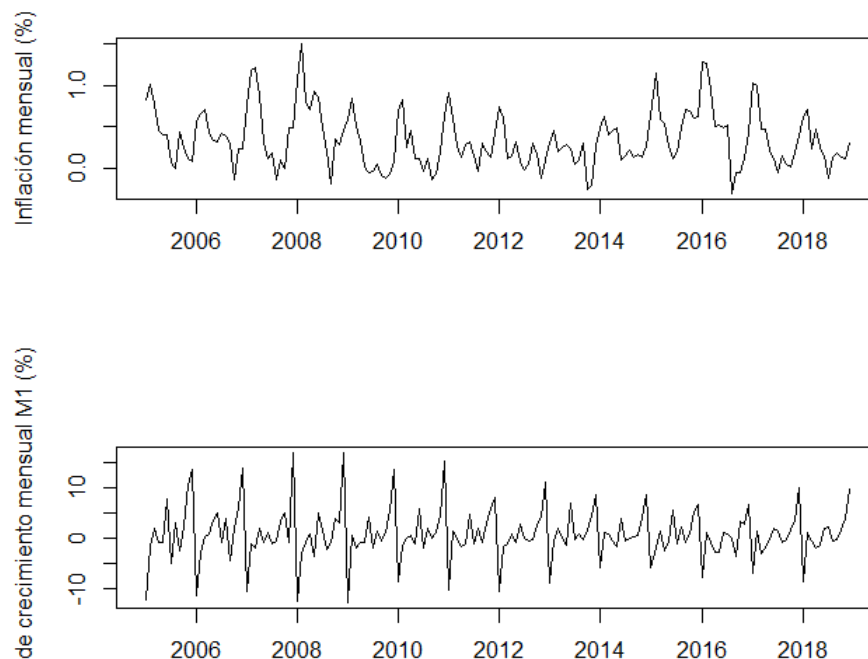
A partir de lo presentado en el autocorrelograma parcial, se podrían sugerir modelos TSARX y SAR con ordenes autorregresivos máximos  $p = 2, 3, 4$  y  $P = 1, 2$  y modelos TAR y redes LSTM con ordenes autorregresivos máximos  $p = 14, 15, 16, 26, 27, 28$ .

### 4.1.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor

La política monetaria en Colombia tiene, desde su adopción en el año 2001, un enfoque de inflación objetivo. Esto implica que el objetivo de la política monetaria consiste en mantener la inflación baja y estable en el largo plazo. Por esta razón, conocer el comportamiento de la inflación y pronosticar sus valores futuros es importante para la toma de decisiones por parte del Banco de la República, entidad encargada de la política monetaria. Adicionalmente, niveles altos de inflación aumentan la incertidumbre para las empresas, lo que afecta los niveles de inversión y sus ingresos y afecta a los consumidores, pues su poder adquisitivo se ve afectado de forma negativa. Para el ajuste de los modelos propuestos se utiliza información mensual del IPC para el periodo comprendido entre enero de 2005 y diciembre de 2018 (168 observaciones). Los pronósticos se calculan para el periodo comprendido entre enero de 2019 y marzo de 2020 (15 observaciones).

Los modelos se ajustan para la primera diferencia ordinaria del IPC en logaritmo natural, lo cual puede ser interpretado como la inflación mensual, es decir,  $X_t = (\log(IPC_t) - \log(IPC_{t-1})) * 100$ . Como variable de umbrales se usa la variación mensual del agregado M1<sup>6</sup>, que representa una medida del dinero que circula en el país y en el corto plazo, se asocia con los niveles de inflación y es afectado por las decisiones de política monetaria. En este sentido,  $Z_t = (\log(M1_t) - \log(M1_{t-1})) * 100$ . Los datos de IPC y M1 fueron descargados de la página web del Banco de la República.

En la Figura 4-7, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ . Se puede observar que la inflación durante los primeros meses de cada año presenta niveles relativamente altos, probablemente causados por la aceleración económica de las fiestas de fin de año, posterior a ello, la inflación disminuye y presenta otro pico hacia mitad de año, que coincide con el periodo de vacaciones. Hacia finales de cada año la inflación presenta una tendencia creciente.

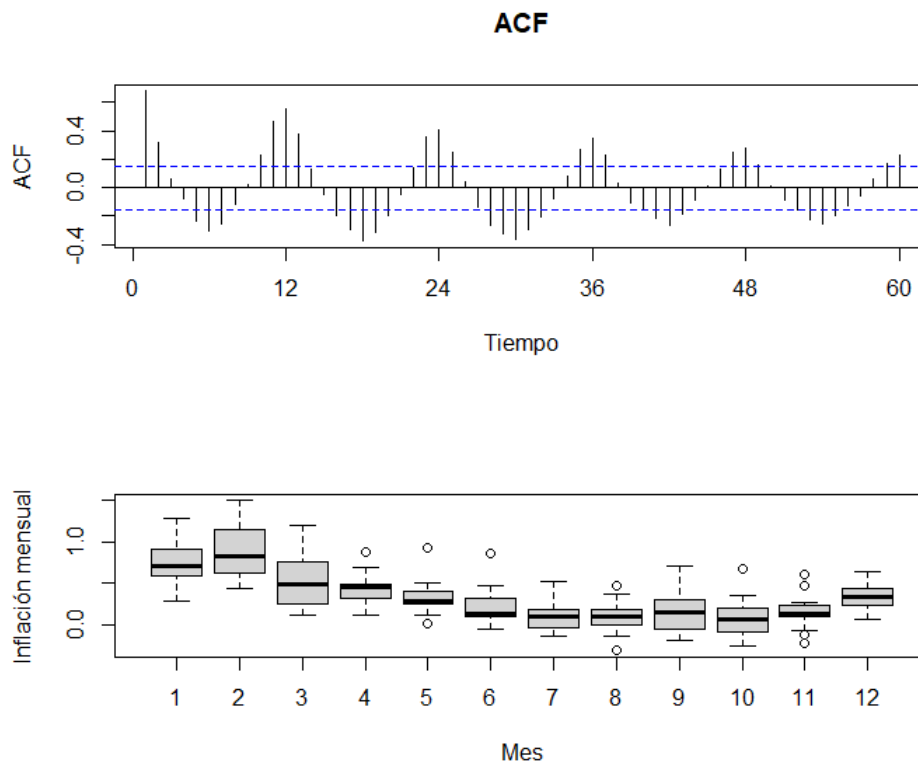


**Figura 4-7.:** Relación inflación  $\{X_t\}$  (arriba) y variación M1  $\{Z_t\}$  (abajo) - Colombia.

El autocorrelograma para la inflación mensual muestra un comportamiento sinusoidal que decrece lentamente y los gráficos de caja indican que el valor medio de la inflación varía

<sup>6</sup>Dinero en efectivo, más depósitos en cuentas corrientes

en función del mes en el que se analice (figura 4-8). Estos dos comportamientos permiten afirmar que la serie de inflación mensual presenta patrones estacionales.



**Figura 4-8.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja para cada mes (abajo) de la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

El autocorrelograma parcial de la inflación mensual muestra autocorrelación significativa para los rezagos 1, 2, 5, 10 y 11 como se puede verificar en la figura 4-9. Lo cual indica que se podrían ajustar modelos TSARX y SAR fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 1, 2$  y  $P = 1, 2$  y modelos TAR y redes LSTM fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 13, 14, 25, 26$ .

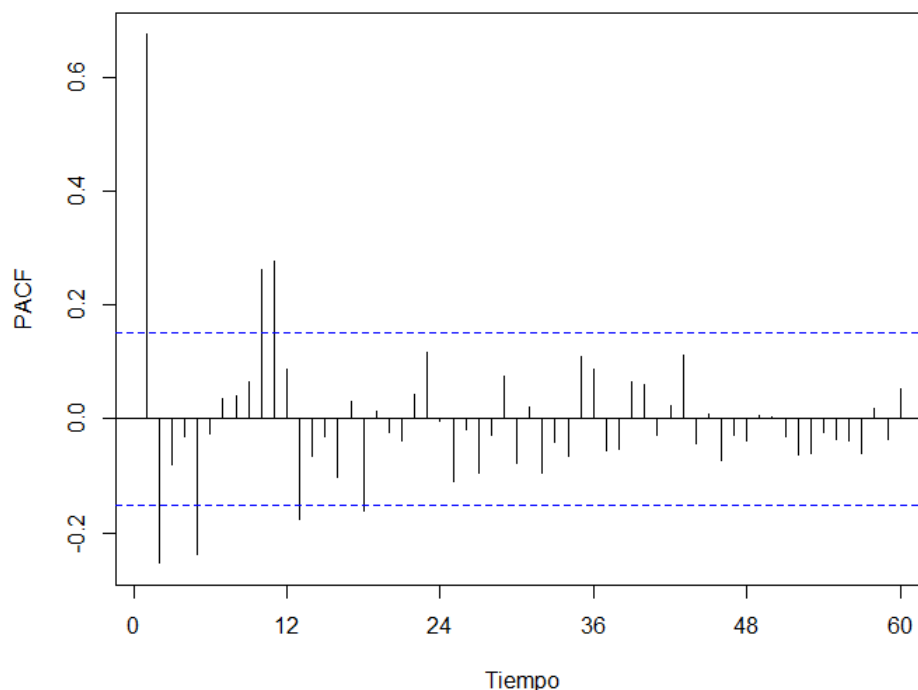


Figura 4-9.: Autocorrelograma parcial para la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

## 4.2. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - EE.UU.

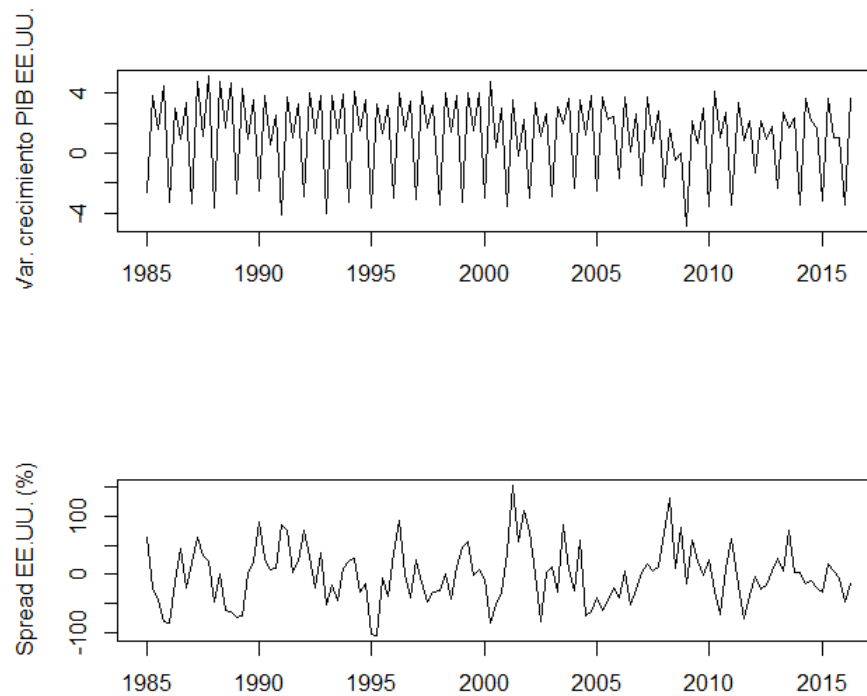
### 4.2.1. Análisis descriptivo para el Producto Interno Bruto

Las estadísticas de Producto Interno Bruto (PIB) de Estados Unidos de América son reportadas con periodicidad trimestral y se encuentran disponibles desde 1947. No obstante, en este trabajo se emplean datos desde el cuarto trimestre de 1986, hasta el segundo trimestre de 2016 (127 observaciones) para el ajuste de los modelos. Los pronósticos se calculan entre el primer trimestre de 2016 y el primer trimestre de 2020 (15 observaciones).

Para el ajuste de los modelos se calcula la primera diferencia ordinaria del logaritmo natural del PIB trimestral, lo cual puede ser interpretado como la tasa de crecimiento trimestral del PIB de Estados Unidos, es decir,  $X_t = (\log(PIB_t) - \log(PIB_{t-1})) * 100$ .

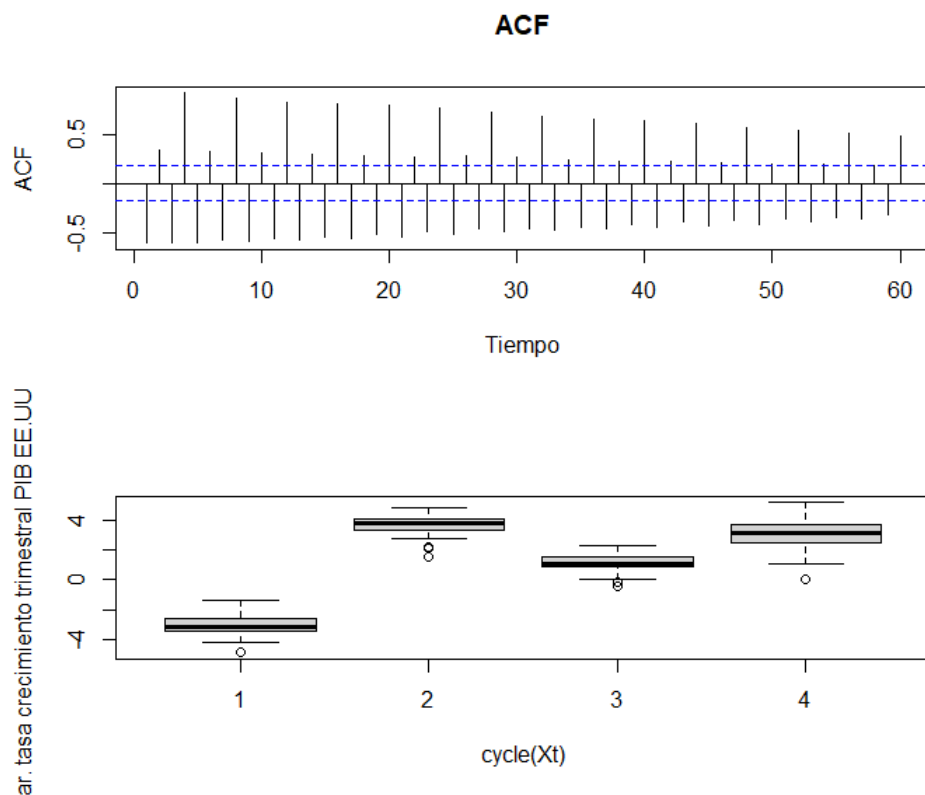
Como variable de umbrales, se emplea el *spread*, definido en esta ocasión como la diferencia entre la tasa de interés de los Bonos del Tesoro (*treasury*) a 10 años, menos la tasa

efectiva de los fondos federales (*overnight*). La variable de umbrales queda definida como,  $Z_t = spread_t - spread_{t-1}$ . En la Figura 4-10, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ . Los datos fueron obtenidos de la página web de la Reserva Federal de San Luis.



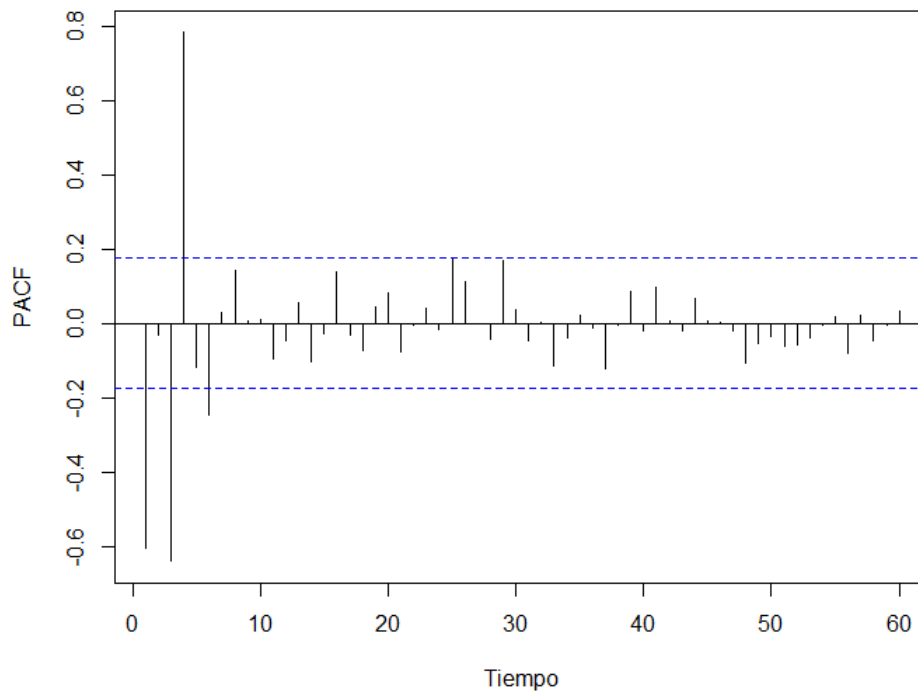
**Figura 4-10.:** Relación tasa de crecimiento PIB  $\{X_t\}$  (arriba) y variación spread  $\{Z_t\}$  - EE.UU. (abajo).

En la figura 4-11 se presenta el autocorrelograma para la tasa de crecimiento del PIB, donde se puede apreciar un lento decaimiento, que generalmente se relaciona procesos autorregresivos puros. Los gráficos de caja para la variable indican que la media en cada trimestre del año es distinta, presentando menores valores medios en el primer trimestre y mayores en el segundo y cuarto trimestre. Lo anterior implica que la tasa de crecimiento trimestral del PIB exhibe patrones estacionales.



**Figura 4-11.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja por trimestre (abajo) de la tasa de crecimiento trimestral del PIB,  $\{X_t\}$

El autocorrelograma parcial presentado en la figura 4-12 indica que la serie presenta estructura de autocorrelación con los rezagos 1, 3, 4 y 6.



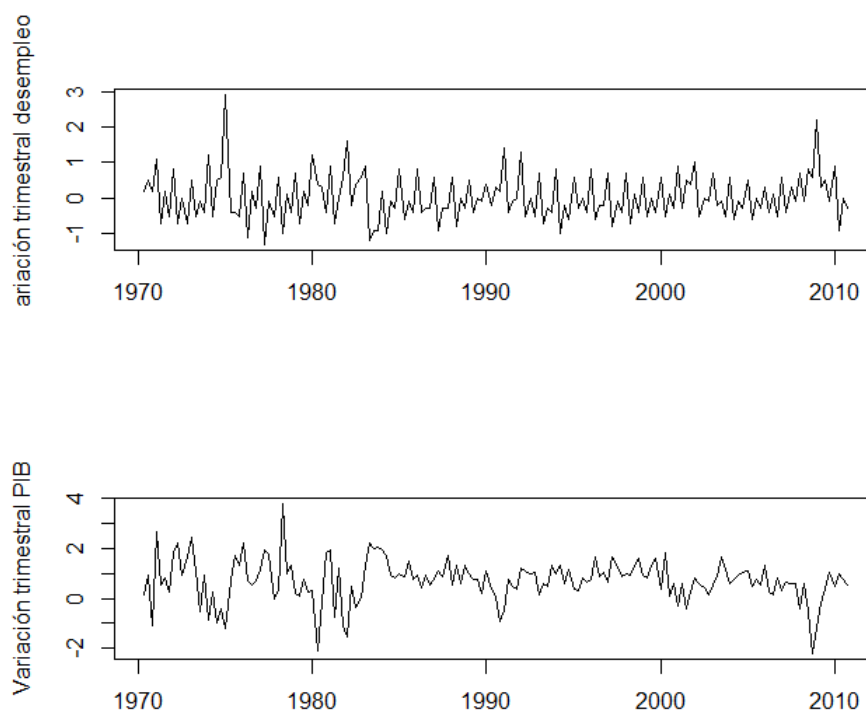
**Figura 4-12.:** Autocorrelograma parcial para la tasa de crecimiento trimestral del PIB,  $\{X_t\}$ .

Estos comportamientos sugieren que la variación trimestral del PIB estadounidense puede ser modelada a partir de modelos TSARX y SAR, fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 1, 3$  y  $P = 1, 2$  o fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 5, 7, 9, 11$  para modelos TAR o redes LSTM.

### 4.2.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo

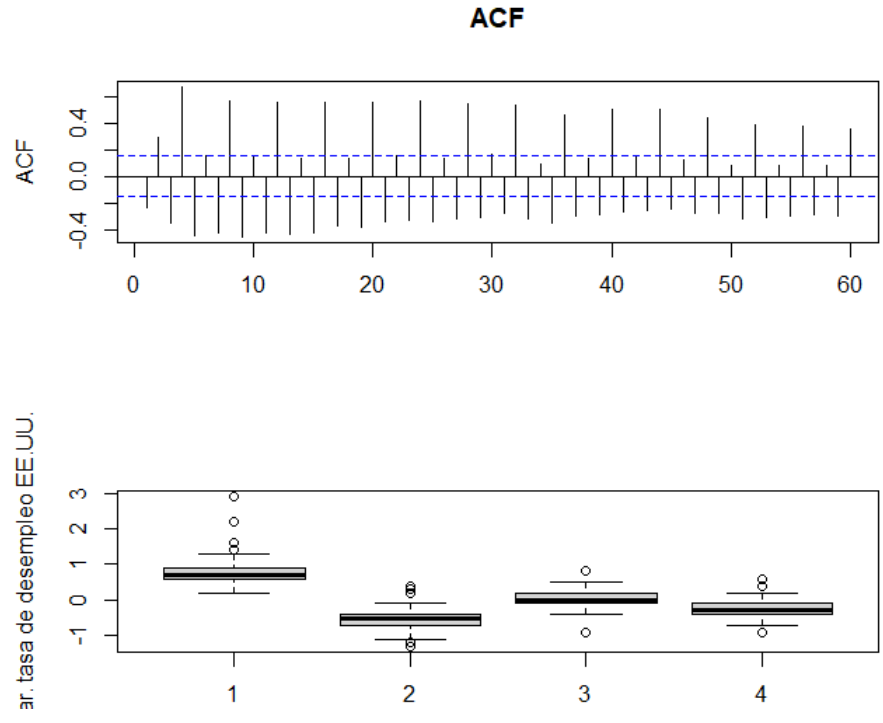
La Reserva Federal de los Estados Unidos cuenta con información relacionada con la tasa de desempleo desde 1948. Generalmente este datos se reporta de forma mensual pues representa uno de los indicadores más relevantes para hacer seguimiento al desempeño de la economía, no obstante, debido a que se emplea el PIB como variable de umbrales para la estimación de los modelos TSARX y TAR, en este trabajo se analiza la tasa de desempleo trimestral, calculada como el valor medio de la tasa de desempleo registrada en los meses que componen cada trimestre. Para el ajuste de los modelos se usan datos correspondientes al periodo entre el primer trimestre de 1970 hasta el cuarto trimestre de 2010 (163 observaciones) y los pronósticos se calculan para el periodo comprendido entre el primer trimestre de 2011 y el primer trimestre de 2020 (15 observaciones).

La serie a modelar corresponde a la primera diferencia ordinaria de la tasa de desempleo, es decir, la variación trimestral del desempleo en los Estados Unidos,  $X_t = (Desempleo_t - Desempleo_{t-1})$ . Como variable de umbrales, se emplea la primera diferencia ordinaria del logaritmo natural del PIB (i.e., la tasa de crecimiento del PIB) es decir,  $Z_t = (\log(PIB_t) - \log(PIB_{t-1})) * 100$ . En la Figura 4-13, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ . Los datos fueron descargados de la página web de la Reserva Federal de San Luis.



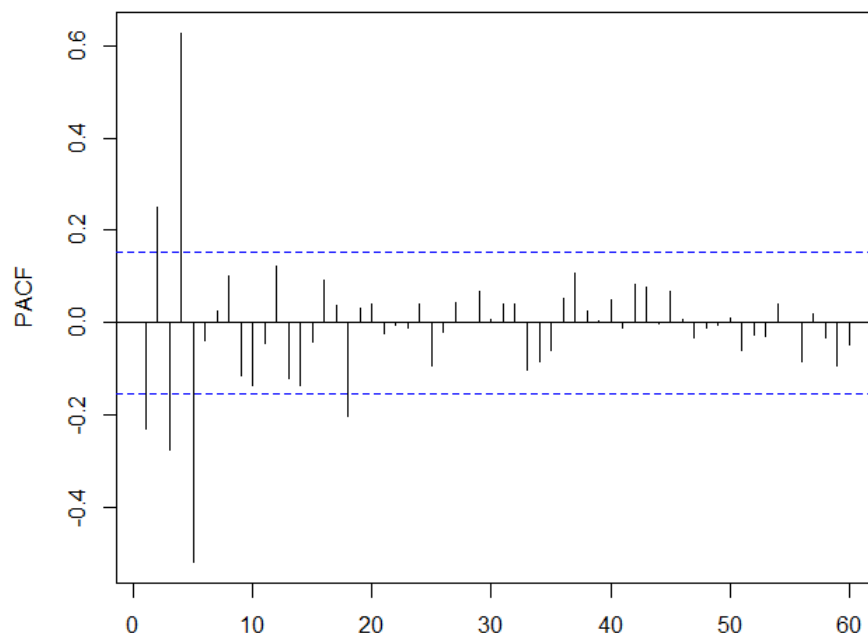
**Figura 4-13.:** Relación la variación trimestral del desempleo  $\{X_t\}$  (arriba) y la variación trimestral del PIB  $\{Z_t\}$  (abajo) - EE.UU.

El autocorrelograma de la serie presenta un comportamiento que decrece lentamente, indicando que posiblemente se trata de un proceso autorregresivo puro. Los gráficos de caja indican diferentes valores medios de la tasa de desempleo para cada trimestre, con lo que se puede determinar que la serie exhibe patrones estacionales (figura 4-14).



**Figura 4-14.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja por trimestre (abajo) de la variación trimestral de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

La variación trimestral de la tasa de desempleo presenta autocorrelación significativa para los rezagos 2 a 4, según lo que se puede apreciar en el autocorrelograma parcial (Figura 4-15).



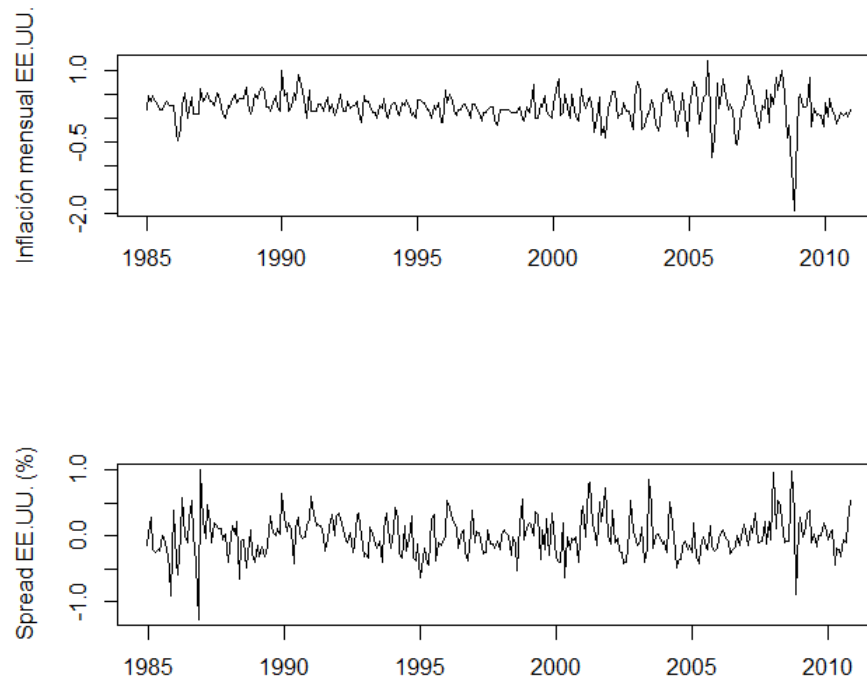
**Figura 4-15.:** Autocorrelograma parcial para la variación trimestral de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

Los comportamientos observados en el autocorrelograma parcial indican que la serie de variación trimestral del desempleo estadounidense podría ser modelada fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 1, 2, 3$  y  $P = 1, 2$  para los modelos TSARX y SAR o  $p = 5, 6, 7, 9, 10, 11$  para modelos TAR o redes LSTM.

### 4.2.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor

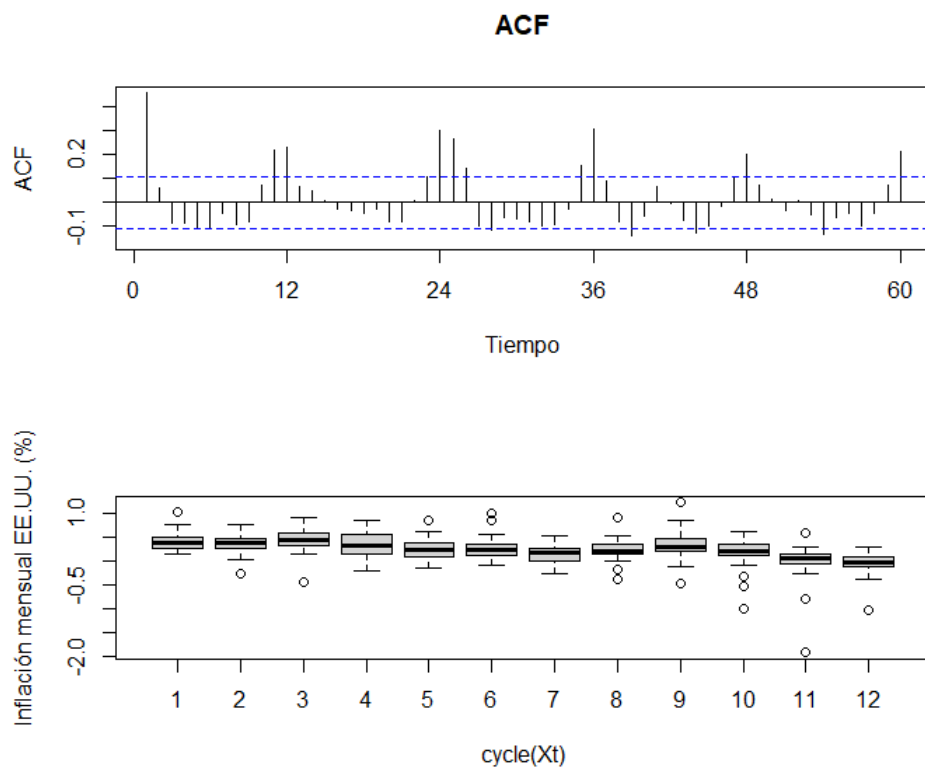
La información relacionada con el Índice de Precios al Consumidor (IPC) en Estados Unidos se encuentra disponible desde 1960, la publicación de este indicador se realiza de forma mensual debido a su relevancia para el seguimiento a la actividad económica y en particular, para la ejecución de la política monetaria. Para el ajuste de los modelos al IPC estadounidense, se toma el periodo comprendido entre enero de 1985 y diciembre de 2010 (313 observaciones) y los pronósticos se calculan para el periodo comprendido entre enero de 2011 y marzo de 2020 (111 observaciones). Los datos fueron descargados de la página web de la Reserva Federal de San Luis.

Los modelos se ajustan para la primera diferencia ordinaria del IPC en escala logarítmica, es decir, la inflación mensual,  $X_t = (\log(IPC_t) - \log(IPC_{t-1})) * 100$ . Para el ajuste de los modelos TSARX y TAR se emplea la variación mensual del *spread*. En La Figura 4-16 se presentan las series de inflación mensual y variación del *spread*.



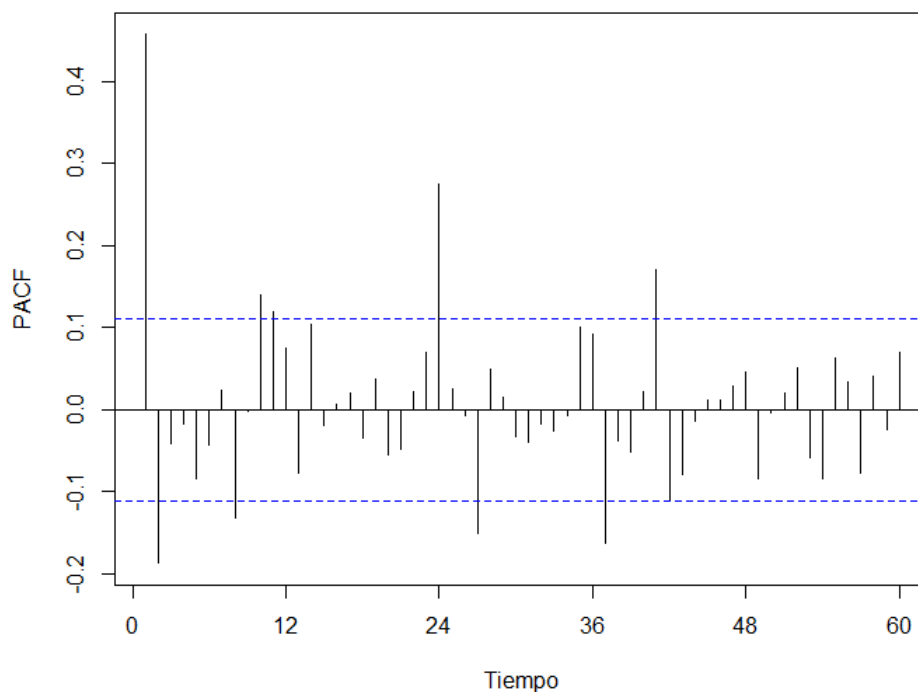
**Figura 4-16.:** Relación la inflación mensual  $\{X_t\}$  (arriba) y la variación del spread  $\{Z_t\}$  (abajo) - EE.UU.

Si bien la serie de la inflación en Estados Unidos presenta por lo general un comportamiento estable, en periodos relacionados con crisis económicas como la ocurrida en 2008, las variaciones de la inflación se hacen más volátiles. Adicionalmente, al apreciar los gráficos de caja se puede observar que la inflación mensual promedio varía. Lo anterior, sumado al comportamiento sinusoidal que se puede observar en el autocorrelograma (figura 4-17), indica la presencia de patrones estacionales en la serie de tiempo.



**Figura 4-17.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja para cada mes (abajo) de la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

El autocorrelograma parcial de la inflación mensual muestra autocorrelación significativa para los rezagos 1, 2, 8, 9, 10 (ligeramente significativo) y rezagos de orden alto como 24, 27, 37 y 41 como se puede apreciar en la figura 4-18.



**Figura 4-18.:** Autocorrelograma parcial para la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

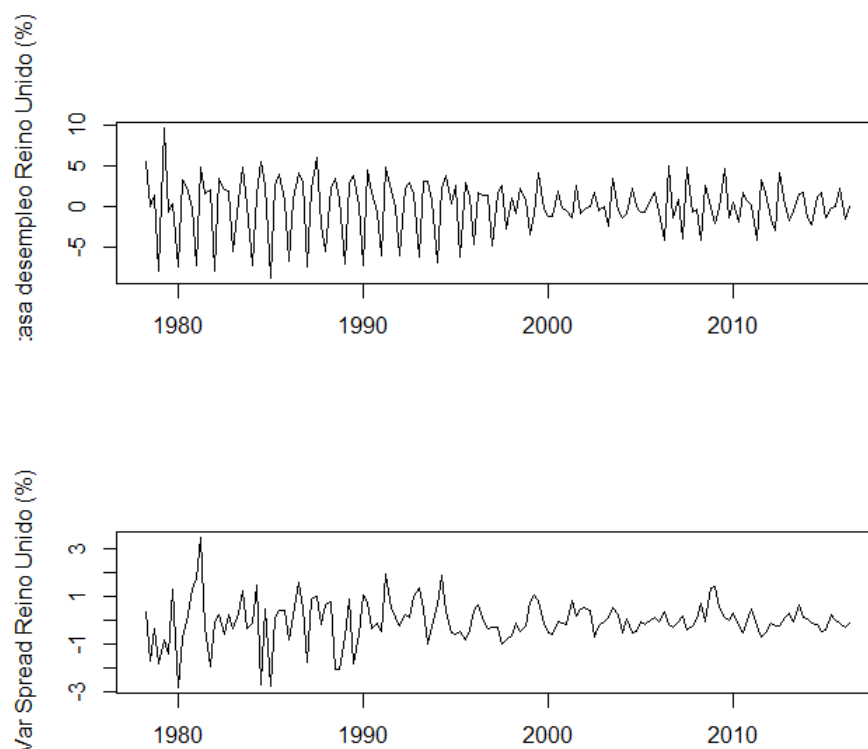
Por lo tanto, se podrían ajustar modelos TSARX y SAR fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 1, 2$  y  $P = 1, 2$  y modelos TAR y redes LSTM con  $p = 13, 14, 25, 26$  a la inflación mensual estadounidense.

### 4.3. Análisis descriptivo de series de tiempo determinadas para el estudio - Reino Unido

#### 4.3.1. Análisis descriptivo para el Producto Interno Bruto

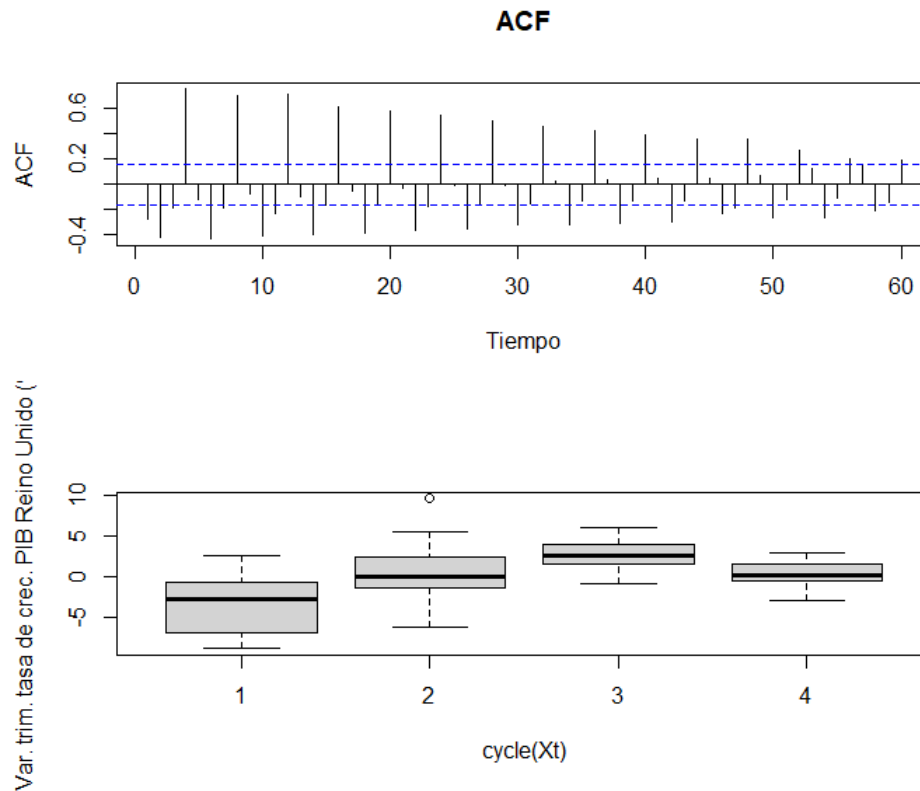
La información del Producto Interno Bruto para Reino Unido se encuentra disponible de forma trimestral desde 1975 y es publicada por la Oficina Europea de Estadística (EUROSTAT). Para este trabajo se emplean datos para el periodo comprendido entre el primer trimestre de 1975 y el segundo trimestre de 2016 (164 observaciones). Los pronósticos se calcula para el periodo comprendido entre el tercer trimestre de 2016 y el primer trimestre de 2020 (15 observaciones). La información fue descargada del repositorio de información de la Reserva Federal de San Luis.

La serie a modelar corresponde a la primera diferencia ordinaria de la tasa de crecimiento del PIB, es decir,  $X_t = (\log(PIB_t) - \log(PIB_{t-1})) * 100$ . Como variable de umbrales, se emplea la primera diferencia ordinaria del *spread* es decir,  $Z_t = (spread_t - spread_{t-1})$  y para este caso la tasa de interés de largo plazo corresponde a la tasa de interés a 10 años de los bonos del gobierno británico y la tasa de corto plazo es la tasa interbancaria *overnight*. En la Figura 4-19, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ .



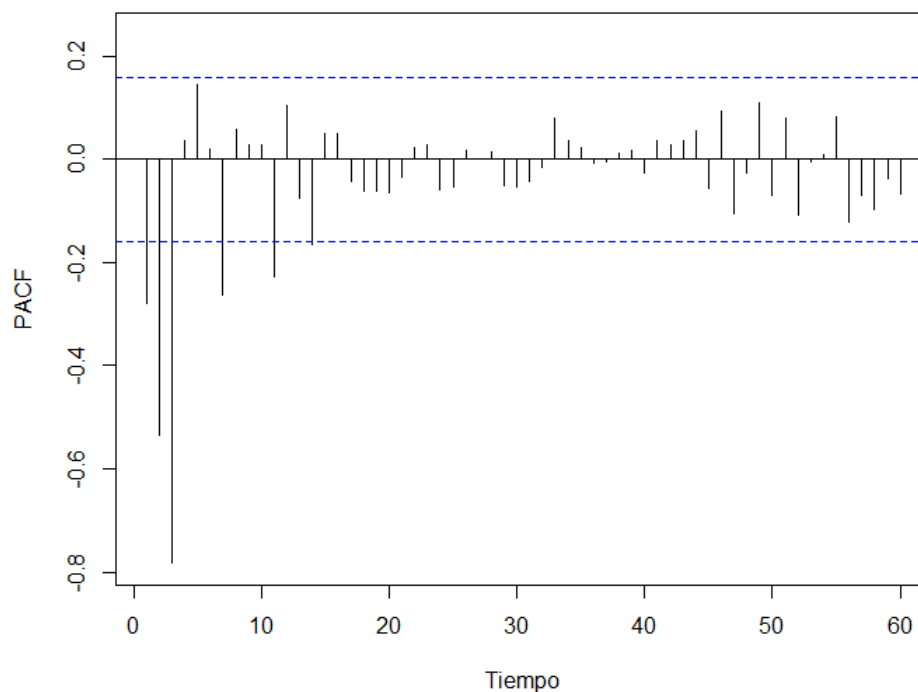
**Figura 4-19.:** Relación la variación trimestral del PIB  $\{X_t\}$  (arriba) y la variación trimestral del spread  $\{Z_t\}$  (abajo) - Reino Unido.

En la figura 4-20 se presenta el autocorrelograma para la tasa de crecimiento del PIB, donde se puede apreciar que lentamente decae, comportamiento generalmente asociado a procesos autorregresivos puros. Los gráficos de caja para la variable indican que la media en cada trimestre del año es distinta, presentando un comportamiento creciente durante los primeros tres trimestres, para estabilizarse en el último trimestre, lo cual es coherente con el ciclo económico de corto plazo. Estos comportamientos permiten afirmar que la serie analizada presenta patrones estacionales



**Figura 4-20.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja por trimestre (abajo) de la tasa de crecimiento trimestral del PIB,  $\{X_t\}$  - EE.UU.

El autocorrelograma parcial presentado en la figura 4-21 indica que la serie presenta estructura de autocorrelación con los rezagos 1, 3, 4, 7, 11 y 14, lo cual indica que la variación trimestral del PIB británico puede ser modelada a partir de modelos TSARX y SAR con ordenes autorregresivos máximos  $p = 1, 2, 3$  y  $P = 1, 2$  o modelos TAR y redes LSTM con  $p = 5, 6, 7, 9, 10, 11$ .

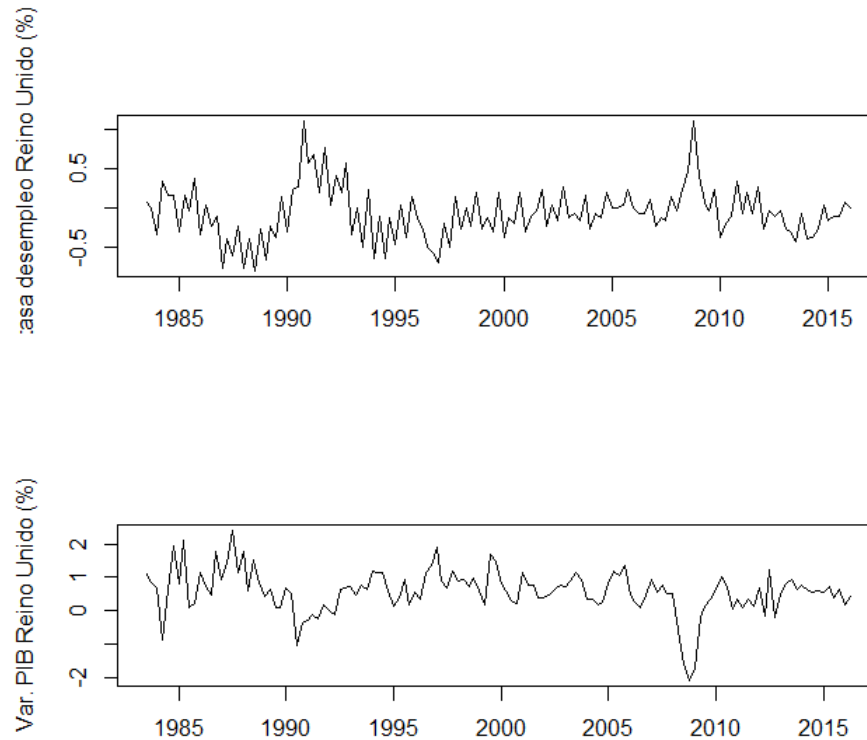


**Figura 4-21.:** Autocorrelograma parcial para la tasa de crecimiento trimestral del PIB,  $\{X_t\}$ .

### 4.3.2. Análisis descriptivo para la tasa de desempleo

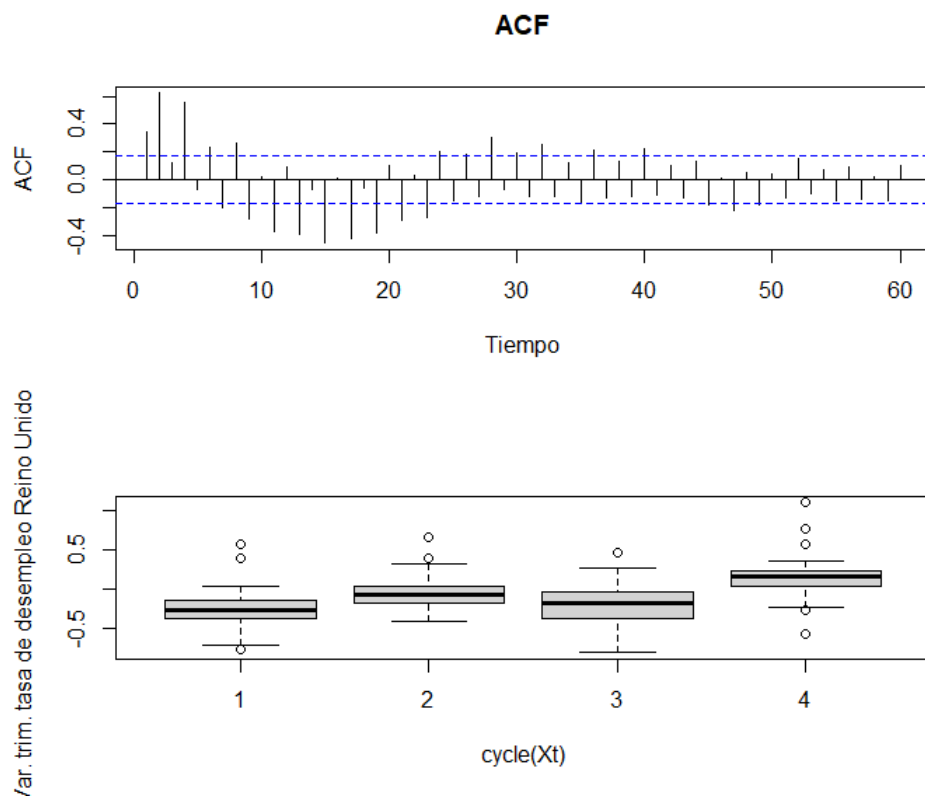
La información relacionada con la tasa de desempleo del Reino Unido se descargó del repositorio de datos de la Reserva Federal de San Luis, quienes recopilan los datos de la bodega de datos de la OCDE. Tal y como se expuso en el análisis de la tasa de desempleo estadounidense, para la tasa de desempleo de Reino Unido se usan datos trimestrales pues la variable de umbrales que se emplea (PIB), se publica con esa periodicidad.

Los modelos se ajustan para el periodo comprendido entre el primer trimestre de 1983 y el segundo trimestre de 2016 (131 observaciones), mientras que los pronósticos se calculan para el periodo entre el tercer trimestre de 2016 y el primer trimestre de 2020 (15 observaciones). La variable a analizar corresponde a la variación trimestral de la tasa de desempleo, es decir,  $X_t = (Desempleo_t - Desempleo_{t-1})$ . Como variable de umbrales, se emplea la primera diferencia ordinaria del PIB en escala logarítmica (i.e., la tasa de crecimiento del PIB),  $Z_t = (\log(PIB_t) - \log(PIB_{t-1})) * 100$ . En la Figura 4-22, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ .



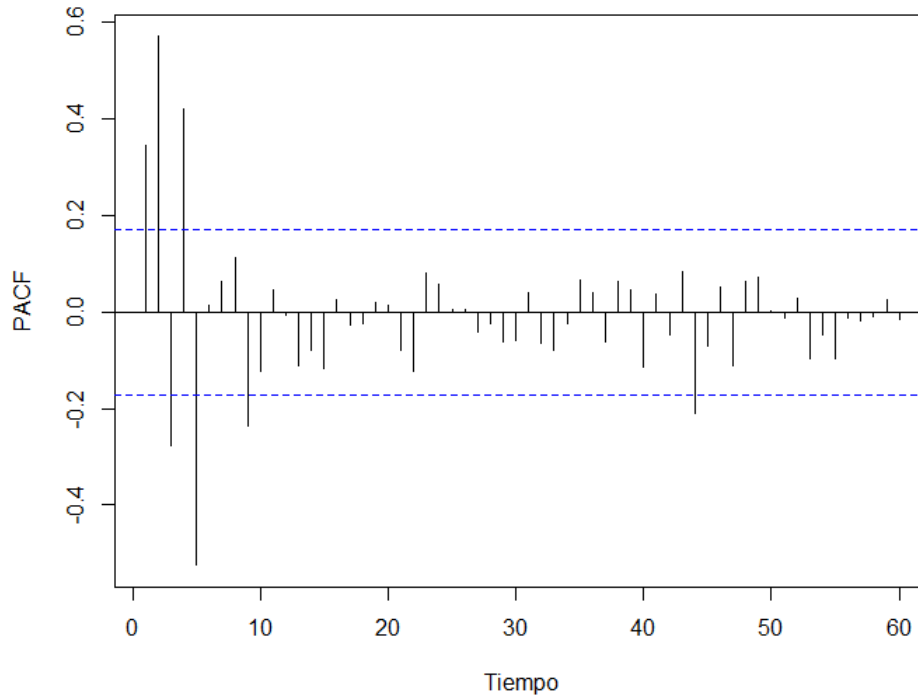
**Figura 4-22.:** Relación la variación trimestral de la tasa de desempleo  $\{X_t\}$  (arriba) y la tasa de crecimiento del PIB  $\{Z_t\}$  (abajo) - Reino Unido.

El autocorrelograma para la variable estudiada presenta un comportamiento de lento decaimiento en la medida en que se aumenta el número de rezagos. Los gráficos de caja reflejan cambios en el valor medio de la variación mensual de la tasa de desempleo, similares a los observados en la serie del PIB, previamente descrita (figura 4-23). Se puede concluir que la serie presenta patrones estacionales.



**Figura 4-23.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja por trimestre (abajo) de la variación trimestral de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

La variación trimestral de la tasa de desempleo presenta autocorrelación significativa para los retardos 2 a 5, según lo que se puede apreciar en el autocorrelograma parcial (Figura 4-24).



**Figura 4-24.:** Autocorrelograma parcial para la variación trimestral de la tasa de desempleo,  $\{X_t\}$ .

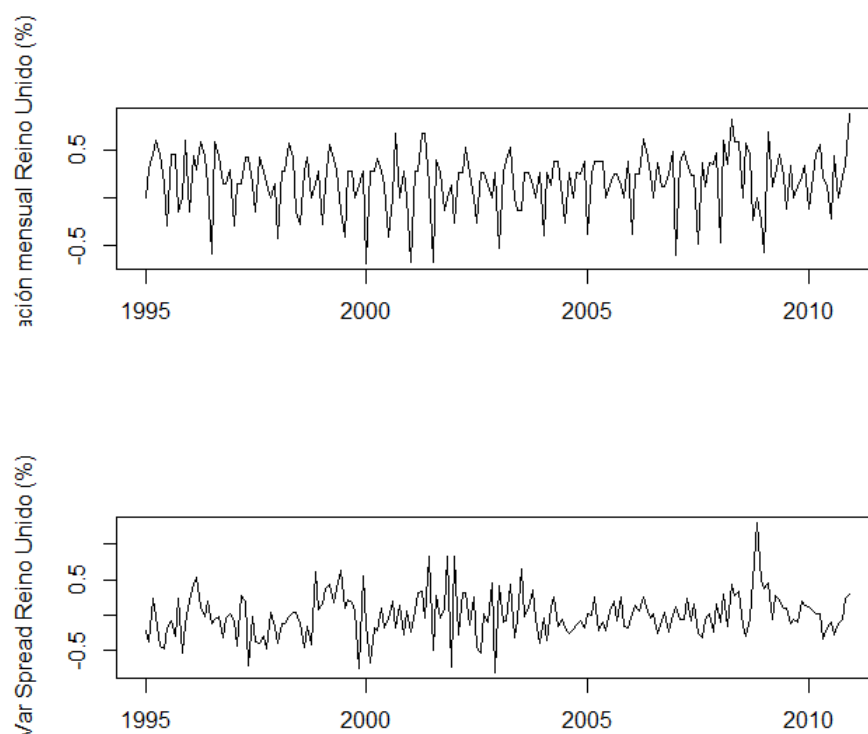
Es decir que se podrían ajustar modelos TSARX y SAR a la variación trimestral de la tasa de desempleo británica fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2, 3$  y  $P = 1, 2$  y modelos TAR y redes LSTM fijando  $p = 6, 7, 10, 11$ .

### 4.3.3. Análisis descriptivo para el Índice de Precios al Consumidor

El Índice de Precios al Consumidor (IPC) de Reino Unido se reporta mensualmente desde 1960, sin embargo, la serie completa presenta aparentes cambios estructurales probablemente causados por ajustes en las políticas del país. Debido a esos cambios estructurales, en este trabajo los modelos se ajustan para los datos correspondientes al periodo comprendido entre enero de 1995 y diciembre de 2010 (192 observaciones), mientras que los pronósticos se calculan entre enero de 2011 y marzo de 2020 (111 observaciones). El ajuste se realiza sobre la inflación mensual, es decir,  $X_t = (\log(IPC_t) - \log(IPC_{t-1})) * 100$ .

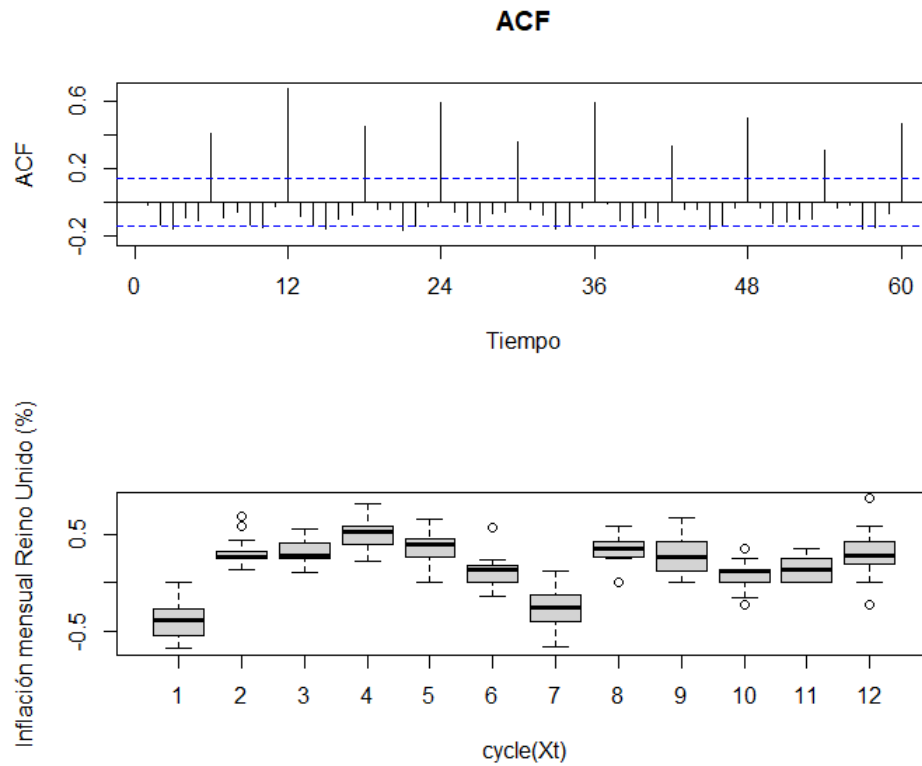
Como variable de umbrales para el ajuste de los modelos TSARX y TAR, se emplea el **spread** tal y como se definió previamente ( $Z_t = (spread_t - spread_{t-1})$ ). Los datos fueron descargados del repositorio de información de la Reserva Federal de San Luis.

En la Figura 4-25, se presentan los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$ .



**Figura 4-25.:** Relación entre la inflación mensual,  $\{X_t\}$  (arriba) y la variación del **spread**,  $\{Z_t\}$  (abajo) - Reino Unido.

Los gráficos de caja indican cambios en el valor medio de la inflación mensual en Reino Unido, con valores más bajos en los meses de enero y julio y valores más altos en los meses de abril, agosto y diciembre. El autocorrelagrama muestra correlación ligeramente significativa para los rezagos 2 y 3 y con mayor fuerza para los rezagos, 6 y 12 que se repiten con una periodicidad de 12 meses (figura 4-26), lo cual indica la presencia de patrones estacionales en la serie de tiempo.



**Figura 4-26.:** Autocorrelograma (arriba) y gráficos de caja para cada mes (abajo) de la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

El autocorrelograma parcial de la inflación mensual muestra autocorrelación significativa para los rezagos 3, 5, 6, 7, 10, 12 y 13 (ligeramente significativo) y algunos rezagos de orden más alto, como se puede apreciar en la figura 4-27. A partir de esto se podrían sugerir modelos TSARX y SAR fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 3, 4, 5, 6$  y  $P = 1, 2$  o modelos TAR y redes LSTM fijando  $p = 15, 16, 17, 8, 27, 28, 29, 30$

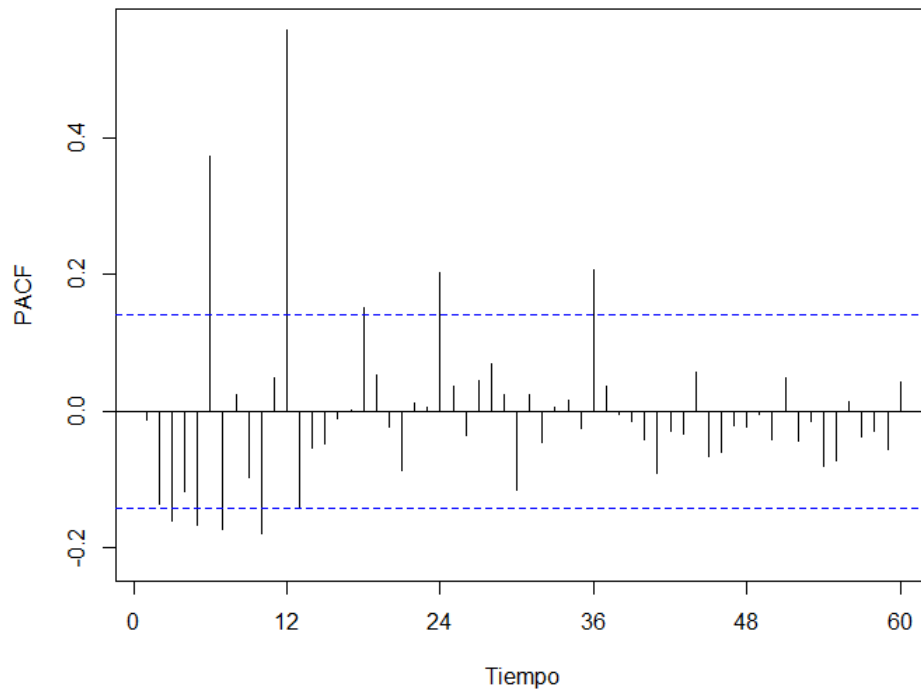


Figura 4-27.: Autocorrelograma parcial para la inflación mensual,  $\{X_t\}$ .

## 5. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de los modelos ajustados a cada variable en términos de las pruebas de verificación introducidas en el capítulo 2 y los cálculos de precisión y comparación de los pronósticos generados por cada modelo, mencionados en el capítulo 3. Con el fin de sintetizar la información, los resultados se presentan de forma detallada para el ISE colombiano y para las demás variables se presentan análisis resumidos.

El capítulo está dividido por país (en orden, Colombia, Estados Unidos y Reino Unido) y los resultados de las pruebas de bondad de ajuste se resumen en un cuadro para cada variable en el que se presentan los valores  $p$  de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box y se indica si se observan o no problemas de especificación o heterocedasticidad, según las gráficas CUSUM y CUSUMSQ, los cuales pueden ser consultados en el Anexo B.

En cada caso se indica el número de retardos incluidos para la estimación de los modelos y se presentan en el siguiente orden, primero para el modelo TSARX, después para el modelo TAR, seguidos por los modelos SAR, SE y redes LSTM (primero incluyendo la componente estacional y después, con los datos desestacionalizados a partir de un modelo de suavizamiento exponencial tal y como se mencionó en la sección 2.5). Los parámetros estimados en cada modelo pueden ser consultados en el Anexo A.

También se incluyen tablas en las que se relacionan los valores de los errores cuadráticos medios obtenidos para los pronósticos de cada modelo teniendo en cuenta el horizonte de pronósticos  $h = 1, 2, 3, 4$ . Los resultados de las pruebas de Diebold-Mariano para la comparación de pronósticos se presentan de forma resumida, indicando si existe diferencia a favor de algún modelo o si los modelos producen pronósticos que son estadísticamente iguales.

### 5.1. Resultados para las series de tiempo de Colombia

#### 5.1.1. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo TSARX

De acuerdo con lo visto en el análisis descriptivo, se realiza la prueba de no linealidad de umbrales fijando los ordenes autorregresivos máximos en  $p = 2$  y  $P = 2$  y  $d = 0, 1, 2, 3$ . En

la tabla **5-1** se presentan los resultados de la prueba. Se identifica no linealidad cuando se fija  $d = 2$ .

**Tabla 5-1.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación mensual del ISE - Colombia

d	$X_t = ISE, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	1.6558	1.0578	1.9911	1.4121
P-valor	0.0688	0.4025	<b>0.0209</b>	0.1518

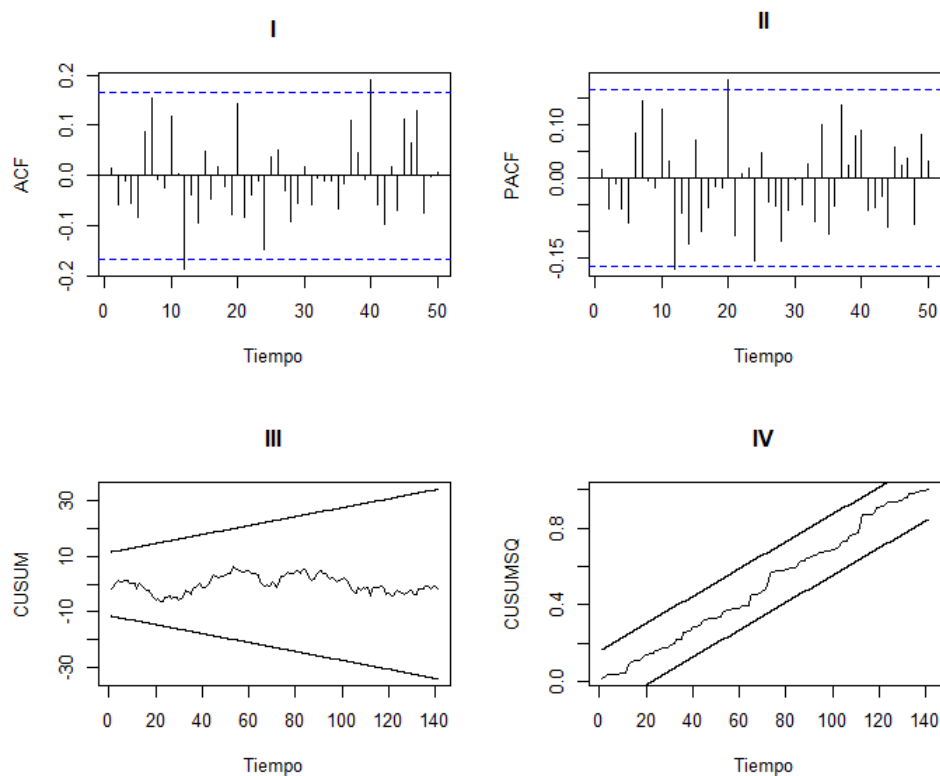
En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

Se ajustaron modelos TSARX fijando el número de regímenes en  $l = 2$  y  $3$ , con ordenes autorregresivos máximos de  $p = 2$ ,  $P = 2$  y  $d = 2$ . Se selecciona el modelo con dos regímenes para el ajuste final (ver anexo A.1) teniendo en cuenta que es el que menor DIC refleja (Tabla **5-2**).

**Tabla 5-2.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes para el modelo TSARX de la variación mensual del ISE - Colombia

Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	<b>474.6403</b>	475.2334
NAIC	0.4876	0.4559

Los residuales generados por el modelo no presentan estructura de autocorrelación significativa y son homocedásticos. El gráfico CUSUMSQ indica que la especificación del modelo es correcta (Figura **5-1**).

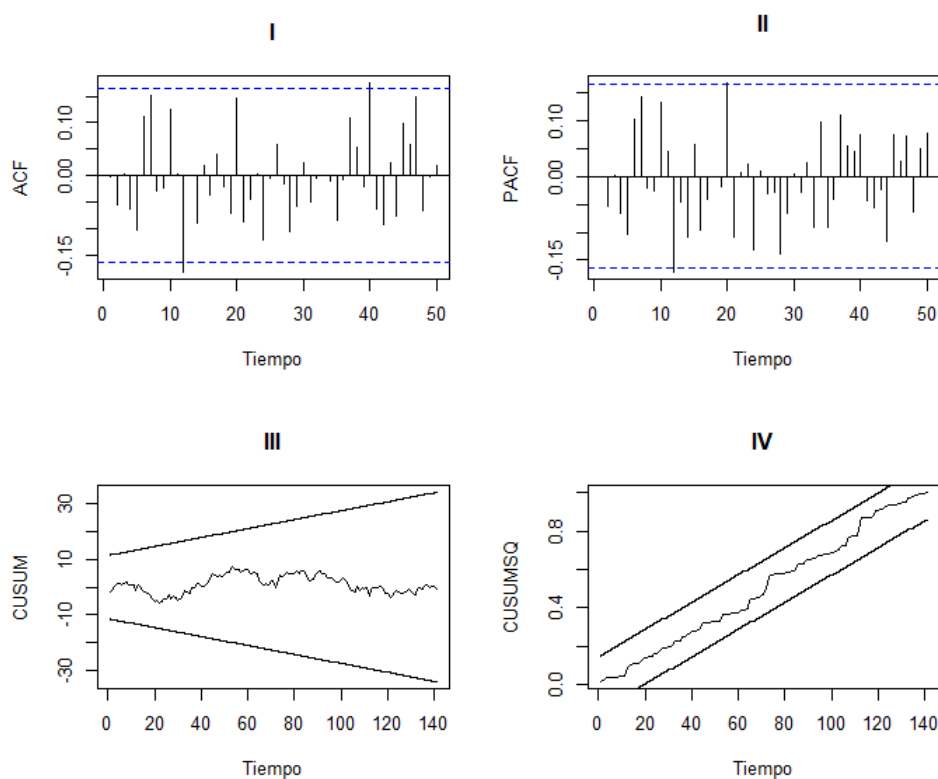


**Figura 5-1.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la variación mensual del ISE - Colombia

### 5.1.2. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo TAR

En concordancia con el modelo TSARX ajustado y los resultados del análisis descriptivo, se ajusta un modelo TAR con dos regímenes fijando orden autorregresivo máximo  $p = 26$  (ver Anexo A.2).

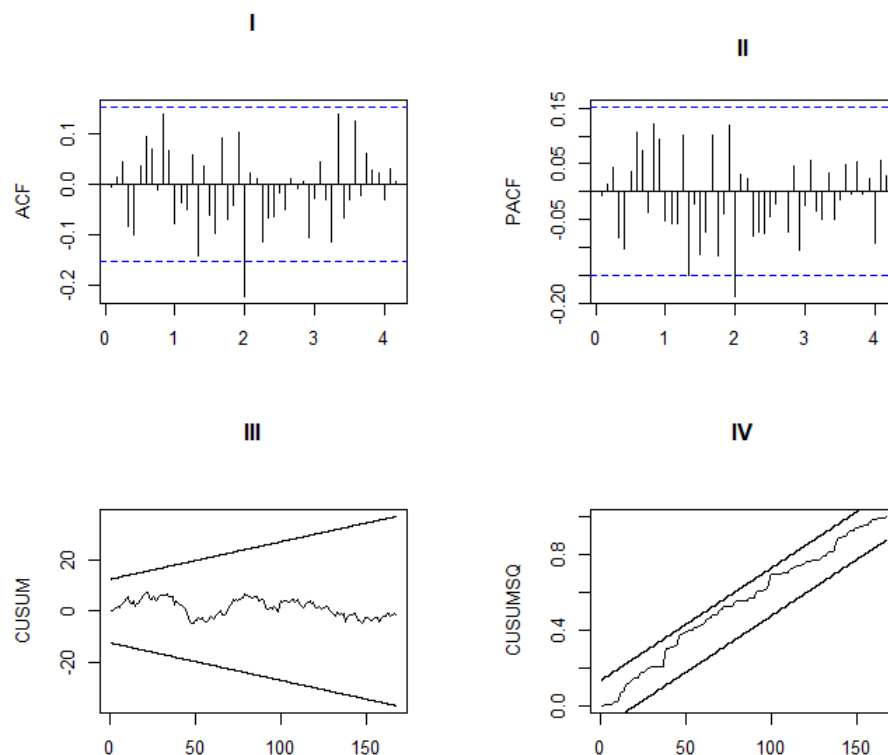
Los residuales generados por este modelo presentan varianza constante y no hay evidencia de autocorrelación significativa. La gráfica CUSUM muestra que no hay problemas de especificación en el modelo ajustado (Figura 5-2).



**Figura 5-2.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la variación mensual del ISE - Colombia

### 5.1.3. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo SAR

Al ajustar un modelo SAR con ordenes autorregresivos  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.3), se obtienen residuales homocedásticos y sin estructura de autocorrelación. El modelo está correctamente especificado a partir de lo mostrado en la gráfica CUSUM (Figura 5-3).

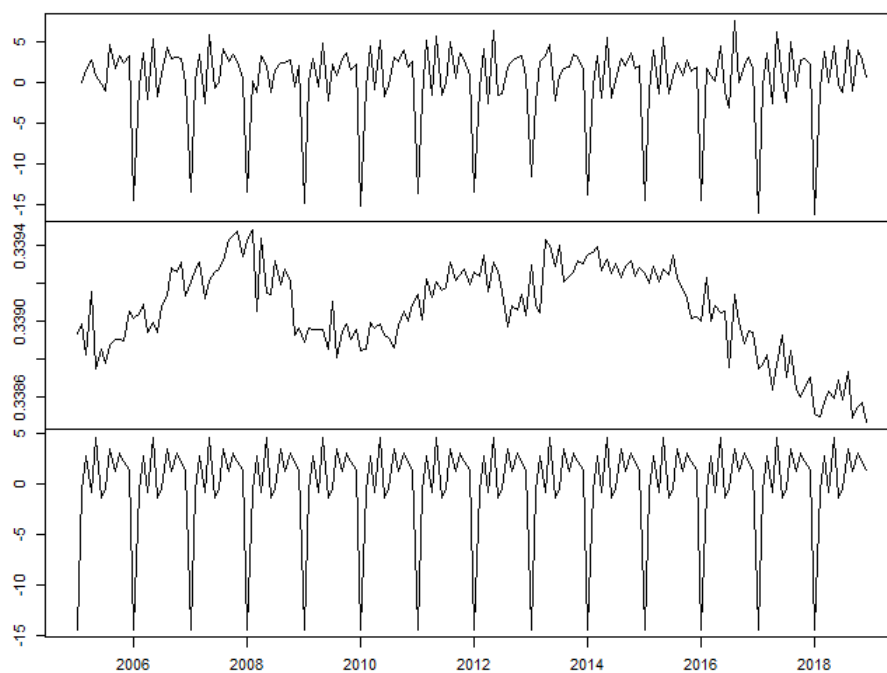


**Figura 5-3.:** Gráficos CUSUM (arriba) y CUSUMSQ (abajo) para los residuos del modelo SAR ajustado a la variación mensual del ISE - Colombia

#### 5.1.4. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados modelo SE

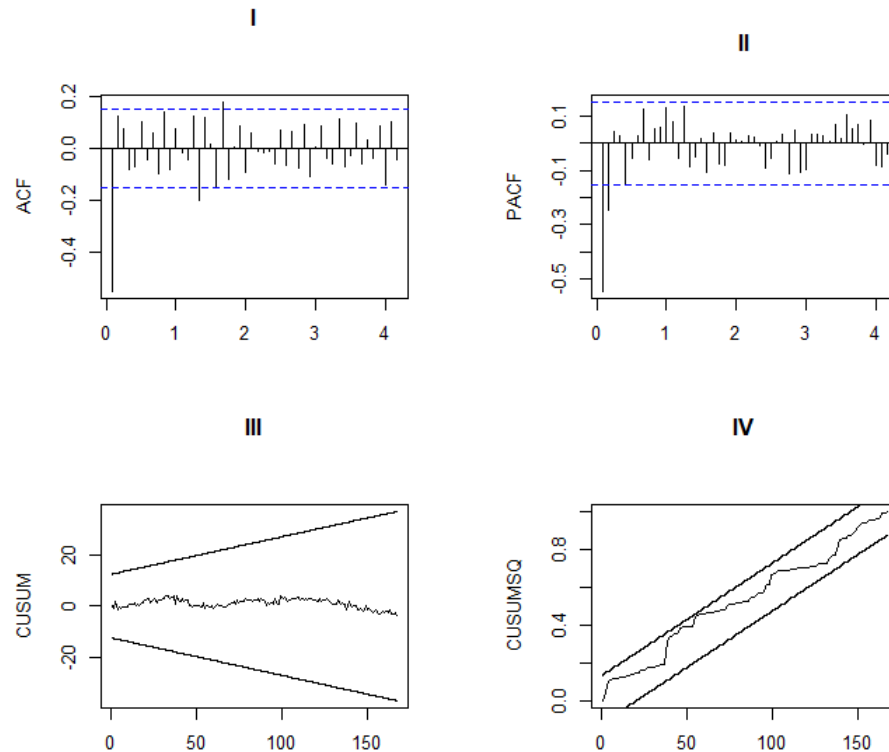
Como se puede observar en la Figura 4-1, la serie de la variación mensual del ISE no presenta tendencia, por lo que el modelo de suavizamiento exponencial ajustado incluye únicamente los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.4).

En la Figura 5-4, se muestran los componentes estimados para la variación mensual del ISE en Colombia a partir del modelo de suavizamiento exponencial. Se debe notar que la componente de nivel se presenta en una escala distinta a la cual se presentan la serie original y la componente de tendencia, por lo que aparentemente, el nivel presenta un comportamiento distinto al observado en la serie. Sin embargo, al verificar los valores, se observa que corresponden a variaciones pequeñas producidas por el comportamiento de la serie en los diferentes momentos.



**Figura 5-4.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la variación del ISE, serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los residuales generados por el ajuste del modelo SE presentan estructura de autocorrelación, pero cuentan con varianza constante (CUSUMSQ). El modelo no presenta problemas de especificación según la gráfica CUSUM (Figura 5-5).

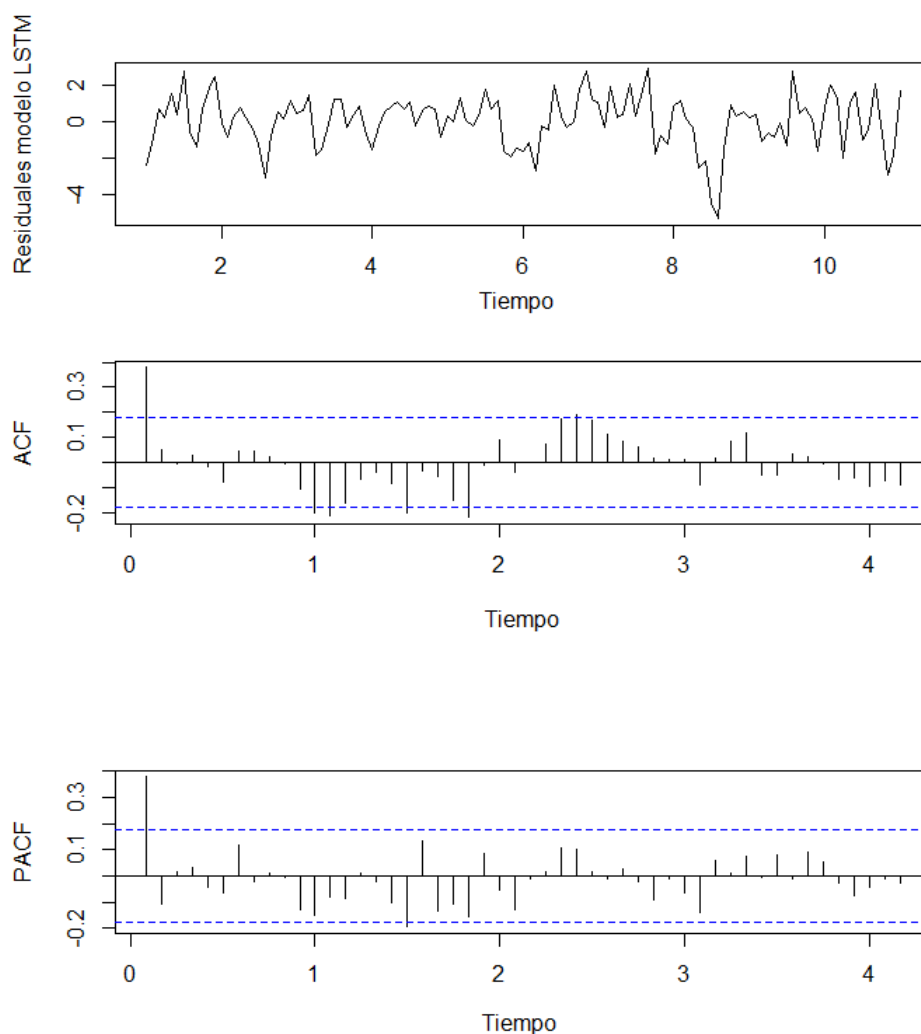


**Figura 5-5.:** Gráficos CUSUM (arriba) y CUSUMSQ (abajo) para los residuales del modelo SE ajustado a la variación mensual del ISE - Colombia

### 5.1.5. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados redes LSTM

De acuerdo con lo observado en el análisis descriptivo y en concordancia con los modelos estimados previamente, para capturar el comportamiento estacional de la variación mensual del ISE en Colombia, se ajusta una red neuronal LSTM fijando una ventana de 26 observaciones pasadas para incluir en la compuerta de entradas. El proceso de validación cruzada empleado, indica que al incluir 50 neuronas en la red, se obtiene la mayor precisión en el conjunto de entrenamiento.

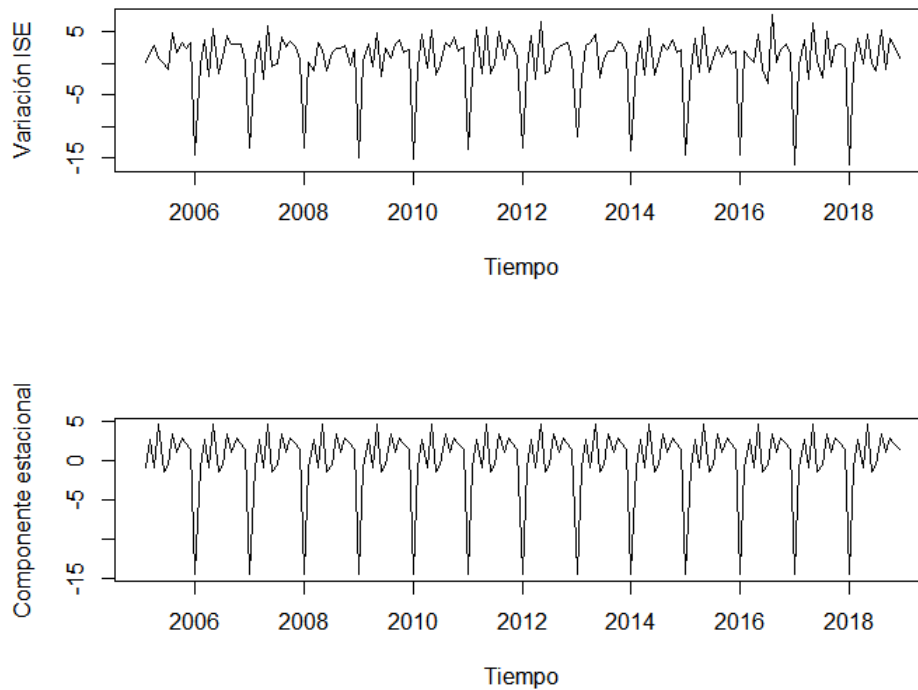
La red ajustada genera residuales correlacionados y aparentemente, la componente estacional no fue completamente explicada a pesar de incluir rezagos de alto orden para la estimación (Figura 5-6). Además se observan cambios en la varianza marginal de los residuales, lo que indica heterocedasticidad.



**Figura 5-6.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para ISE - Colombia

### 5.1.6. Índice de Seguimiento a la Economía - resultados redes LSTM para datos desestacionalizados

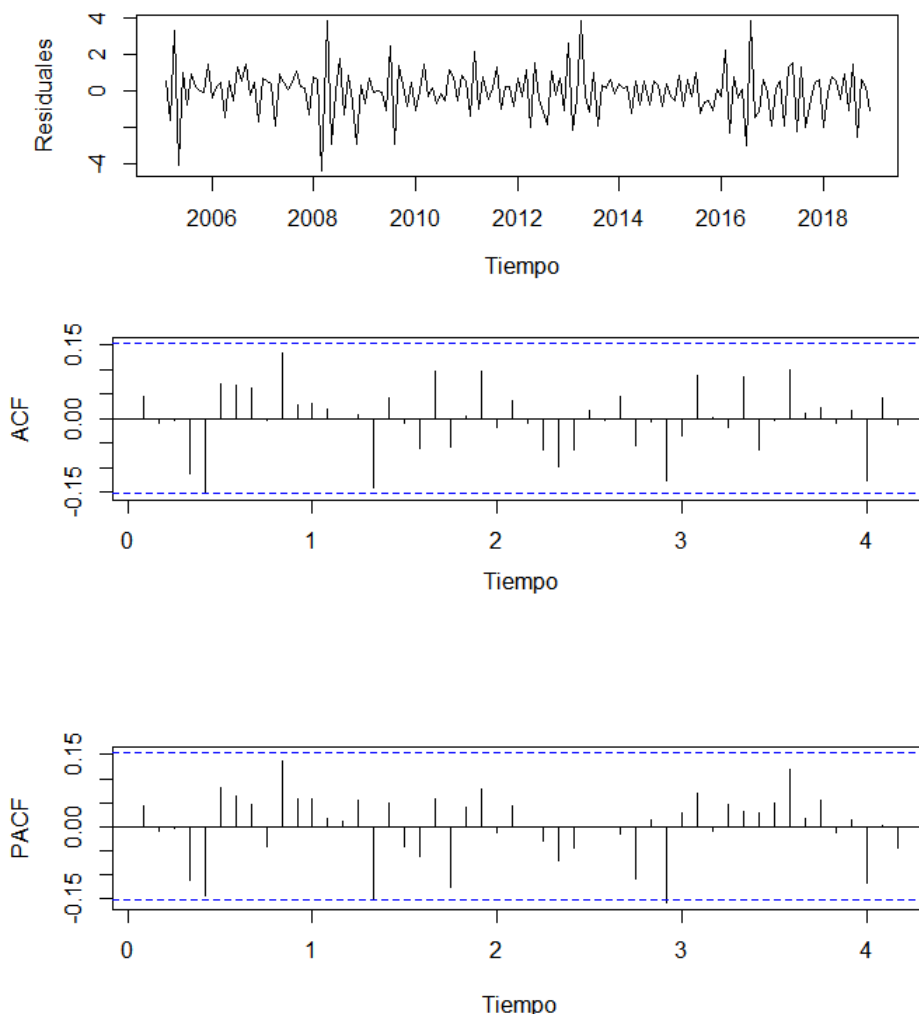
Para extraer la componente estacional de la serie, se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial como el presentado en la sección 5.1.4. En la Figura 5-7 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-7.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

Una vez desestacionalizada la serie, se fija una ventana de 2 observaciones pasadas (lo cual es coherente con los retardos máximos incluidos en los demás ajustes para el parámetro  $p$ ). El proceso de validación cruzada indica que el menor error cuadrático medio en el conjunto de entrenamiento se alcanza al incluir 100 neuronas.

Los residuales generados por este modelo no exhiben patrones estacionales o estructura de autocorrelación tal y como se puede apreciar en la figura 5-8.



**Figura 5-8.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para ISE desestacionalizado - Colombia

### Índice de Seguimiento a la Economía - Resumen bondad de ajuste

Con el fin de resumir los resultados de la validación de los modelos ajustados, en la tabla 5-3 se presentan los valores p obtenidos en las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box y se indica si los residuales presentan o no, problemas de heterocedasticidad o autocorrelación según lo observado en las gráficas CUSUM y CUSUMSQ.

El ajuste de los modelos SAR y SE presentan problemas de normalidad. La prueba de Ljung-Box indica que los residuales obtenidos por el ajuste del modelo SE presentan estructura de autocorrelación, lo cual puede ser causado porque el modelo no pudo capturar la estructura

de autocorrelación de orden alto (retardos lejanos) presentada por la serie.

Los residuales de las redes LSTM presentan estructura de autocorrelación y comportamiento estacional, lo cual indica que a pesar de incluir retardos de orden alto, la red no explicó completamente ese comportamiento, en línea con lo sugerido por (Zhang y Qi, 2005). Al extraer la componente estacional de la serie y ajustar la red LSTM, no se observa estructura de autocorrelación en los residuales, pero sí algunos comportamientos que sugieren problemas de heterocedasticidad.

En el caso de la variación del ISE, se observan problemas de normalidad para el modelo autorregresivo (SAR), de autocorrelación y normalidad para el modelo de suavizamiento exponencial, algunos problemas de heterocedasticidad y autocorrelación en las redes LSTM sin ajuste por estacionalidad y aparente heterocedasticidad en las redes LSTM con datos ajustados por estacionalidad.

**Tabla 5-3.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la variación mensual del ISE - Colombia

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.8872	0.9676	0.0042	0.0019	0.0126	0.0051
Autocorrelación	0.4967	0.4903	0.1430	< 0.0001	0.1025	0.709
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	No	No	Sí	Sí

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Índice de Seguimiento a la Economía - Comparación de pronósticos

En la tabla 5-4 se presenta el error cuadrático medio (ECM) de los pronósticos generados a partir de la estimación de los modelos. Se incluye también el ECM para la combinación de pronósticos introducida en la sección 2.6. En negrita se muestran los valores más bajos, es decir, los pronósticos más precisos, para cada horizonte de pronóstico.

Si bien el modelo TSARX no produce, en general, los pronósticos con menor error cuadrático medio, al comparar con los demás modelos ajustados, se observa que el ECM del modelo TSARX es menor en algunos casos. En particular, para un paso adelante genera menor ECM

que los modelos TAR, SAR, SE y las redes LSTM (sin ajuste por estacionalidad), para dos pasos adelante, el ECM del modelo TSARX es menor que el del modelo TAR y las redes LSTM. A tres pasos el ECM del modelo TSARX es menor que el de los modelos TAR y SAR y para cuatro pasos, menor que el del modelo SAR.

**Tabla 5-4.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación del ISE; <sup>1</sup>

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos ISE						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	9.6343	9.7868	9.7910	10.5209	11.0515	<b>9.3296</b>	9.3844
Dos pasos	1.1988	1.3639	1.1767	<b>0.5859</b>	7.1539	0.6271	0.9770
Tres pasos	32.0744	32.9499	32.3793	30.2756	<b>20.2611</b>	30.5874	30.1792
Cuatro pasos	0.5965	0.4799	0.6094	<b>0.1305</b>	1.4945	0.1534	0.3258

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

En la tabla 5-5, se resumen los resultados de las pruebas de Diebold-Mariano para los pronósticos del ISE en Colombia. En cada caso se especifica si existe o no diferencia y a favor de qué modelo (en negrita). Los resultados indican que los pronósticos generados por los modelos considerados, son estadísticamente iguales en casi todos los casos, a excepción de cuando se comparan los modelos TSARX y de suavizamiento exponencial a un paso adelante, donde hay suficiente evidencia para afirmar que el modelo TSARX resulta más preciso.

**Tabla 5-5.:** Resultados prueba Diebold-Mariano para ISE - Colombia

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres paso	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SE	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

### 5.1.7. Tasa de desempleo - resultados

El análisis descriptivo de la variación mensual de la tasa de desempleo colombiana indica que esta variable puede ser modelada fijando ordenes autorregresivos máximos de  $p = 2$ ,  $P = 2$ .

Con estos parámetros se calcula la prueba de no linealidad de Tsay con  $y$   $d = 0, 1, 2, 3$ . La hipótesis nula de no linealidad no puede ser rechazada según los resultados de la tabla 5-6. No obstante, para efectos del presente trabajo, se ajustan modelos TSARX de dos y tres regímenes, fijando  $d = 2$ .

**Tabla 5-6.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación mensual de la tasa de desempleo - Colombia

d	$X_t = TD, Z_t = ISE$			
	0	1	2	3
Estadístico F	1.6558	1.0578	1.9911	1.4121
P-valor	0.0688	0.4025	<b>0.0209</b>	0.1518

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

El ajuste final se realiza para un modelo de dos regímenes debido a que se obtiene un menor DIC con este número de regímenes (Tabla 5-7). Los parámetros estimados pueden ser consultados en el Anexo A.5

**Tabla 5-7.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX tasa de desempleo-ISE

Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	<b>213.7037</b>	215.9113
NAIC	<b>-1.3317</b>	-1.2970

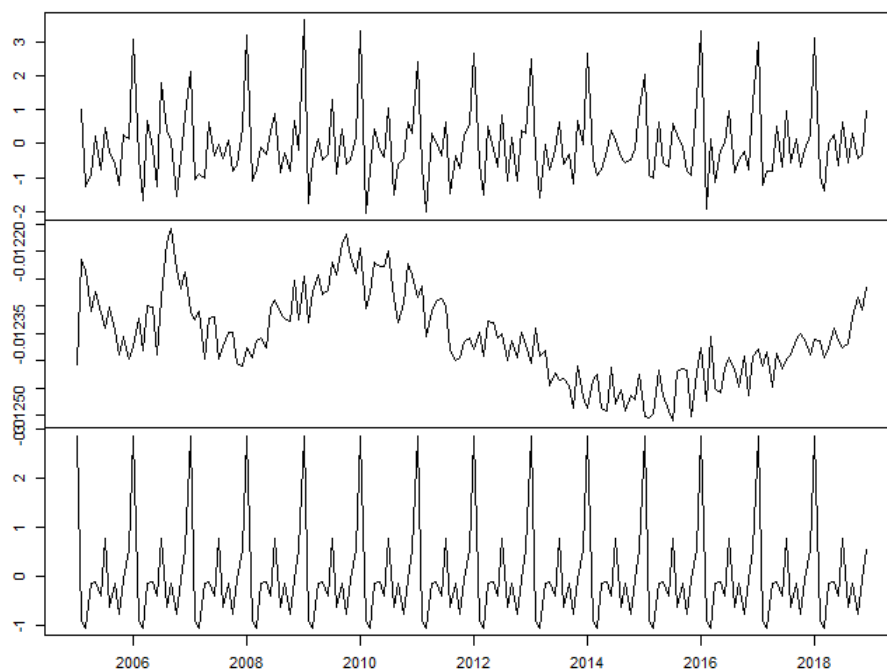
El modelo TSARX ajustado genera residuales con distribución normal y no correlacionados. No se identifican errores de especificación y no hay evidencia de heterocedasticidad en los residuales (ver Anexo B.1).

En línea con lo anterior, se ajusta un modelo TAR de dos regímenes a la variación mensual de la tasa de desempleo colombiana. Para capturar el comportamiento estacional, se fija un orden autorregresivo máximo  $p = 26$  (ver Anexo A.6).

Este modelo genera residuales normalmente distribuidos que no exhiben estructura de autocorrelación. Las gráficas CUSUM y CUSUMSQ indican que la especificación del modelo es correcta y no hay evidencia de heterocedasticidad (ver Anexo B.2).

El modelo SAR ajustado a la variación mensual de la tasa de desempleo en Colombia, se estima fijando  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.7). No se detectan problemas de especificación o de heterocedasticidad (ver Anexo B.3). Los residuales no presentan estructura de autocorrelación y siguen una distribución normal.

La serie de la variación mensual del desempleo no presenta tendencia, por lo que el modelo de suavizamiento exponencial ajustado incluye únicamente los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.8). La Figura 5-9, presenta los componentes estimados para la variación mensual de la tasa de desempleo en Colombia a partir del modelo de suavizamiento exponencial.



**Figura 5-9.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la variación de la tasa de desempleo, serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

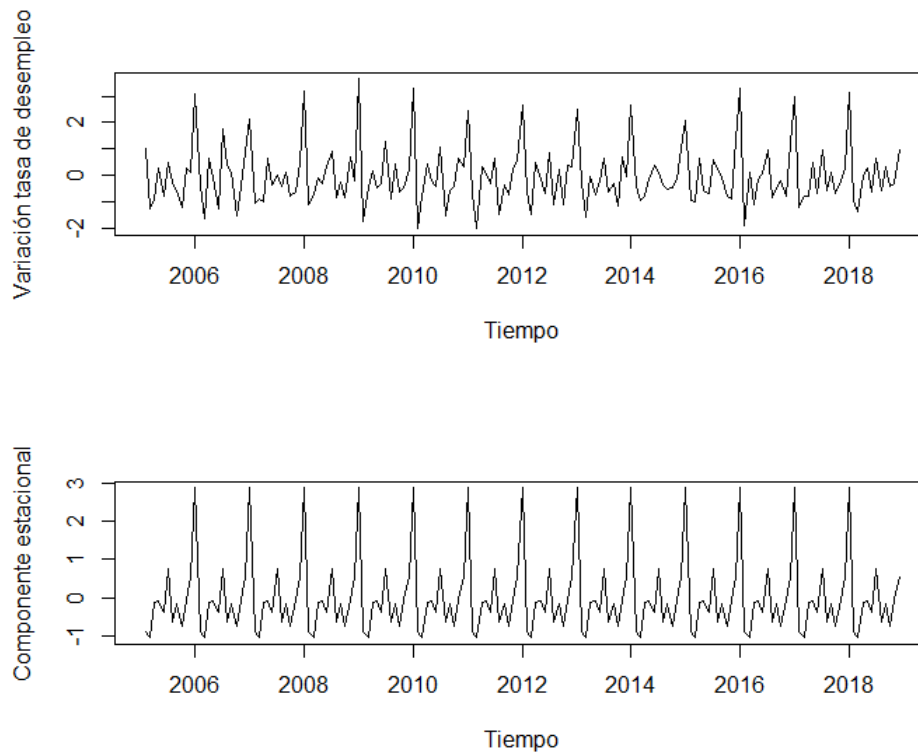
El ajuste del modelo SE genera residuales normalmente distribuidos, pero con estructura de autocorrelación. La especificación es correcta, pero se observan algunos problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.4).

Para el ajuste de las redes LSTM a la variación de la tasa de desempleo colombiana, se fija una ventana de 13 observaciones pasadas a partir de las cuales se pueda capturar el comportamiento estacional y se definió como función de activación  $\tanh$ . Los resultados de la validación cruzada indican que la mejor red LSTM entre las combinaciones probadas se

obtiene al incluir 100 neuronas.

Los residuales generados por la red LSTM no presentan estructura de autocorrelación y hay indicios de heterocedasticidad (ver Anexo B.5).

En la Figura 5-10 se muestran la serie original y la componente estacional estimada. Para el posterior ajuste de una red LSTM con una ventana de 2 observaciones pasadas en la compuerta de entradas y a partir de los resultados de la validación cruzada se determinan 50 neuronas, para el ajuste de los datos desestacionalizados.



**Figura 5-10.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

Los residuales generados por este modelo no exhiben estructura de autocorrelación de orden relativamente alto. No hay evidencia de comportamiento estacional en los residuales y tampoco se aprecian problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.6).

### Tasa de Desempleo - Resumen bondad de ajuste

Los modelos ajustados a la variación de la tasa de desempleo colombiana cumplen, en general con la validación. Se observan problemas de autocorrelación en los ajustes de modelos de suavizamiento exponencial y LSTM, así como heterocedasticidad en los modelos SAR, SE, y redes LSTM (tabla 5-8).

**Tabla 5-8.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la variación mensual de la tasa de desempleo Colombia

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.7367	0.659	0.4763	0.2359	0.7296	0.8584
Autocorrelación	0.5108	0.6032	0.7698	< 0.0001	0.7774	0.5642
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	Sí	Sí	Sí	No

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Tasa de Desempleo - Comparación de pronósticos

En la Tabla 5-9 se presenta el error cuadrático medio (ECM) de los pronósticos calculados con cada uno de los modelos considerados y la combinación de pronósticos. En negrita se muestran los casos en los cuales se obtiene menor ECM (más precisión) por cada horizonte de pronósticos.

El modelo TSARX produce pronósticos más precisos (menor ECM) cuando se fija un horizonte de pronóstico de un paso adelante. Cuando el horizonte de pronósticos es de dos pasos adelante, el modelo TSARX presenta menor ECM en los pronósticos, únicamente superado por el modelo SAR. Para los pronósticos a tres pasos, el TSARX produce menor ECM que el modelo TAR y a cuatro pasos produce menor ECM que los modelos SE y redes LSTM (ambos casos). La combinación de pronósticos genera pronósticos más precisos, en términos de ECM, que el modelo TSARX cuando se calculan pronósticos a tres pasos.

**Tabla 5-9.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación de la tasa de desempleo

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos tasa de desempleo						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	<b>0.3047</b>	0.3702	0.3897	0.3320	1.0074	0.3362	0.3863
Dos pasos	0.1072	0.1398	<b>0.0991</b>	0.1941	0.2449	0.1480	0.1416
Tres pasos	0.6695	0.8489	0.6567	0.6221	<b>0.5180</b>	0.6332	0.6439
Cuatro pasos	0.1582	<b>0.1297</b>	0.1485	0.2304	0.2148	0.2367	0.2199

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

Al comparar por parejas de modelos, se encuentran diferencias significativas que indican que los pronósticos obtenidos a partir del modelo TSARX resultan más precisos para la variación de la tasa de desempleo colombiana. Esto ocurre con respecto al modelo SAR cuando el horizonte de pronóstico es de tres y cuatro pasos adelante, con respecto a las redes LSTM cuando el horizonte es de tres pasos y con respecto a la combinación de pronósticos cuando el horizonte es de dos y cuatro pasos adelante (tabla 5-10).

**Tabla 5-10.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para tasa de desempleo Colombia

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres paso	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	Sin diferencia	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>
TSARX-SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	Sin diferencia	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

Las diferencias significativas encontradas en la prueba de Diebold-Mariano indican que para la variación mensual de la tasa de desempleo, sería recomendable ajustar un modelo TSARX si se quieren realizar pronósticos más precisos para la toma de decisiones de política económica.

### 5.1.8. Índice de Precios al Consumidor - resultados

Del análisis descriptivo de para el IPC, presentado en el capítulo 4, se puede inferir que la inflación mensual puede ser modelada fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 1$ ,  $P = 2$ . Con la prueba de no linealidad de Tsay se busca evidencia de no linealidad en la inflación

mensual usando como variable de umbrales la variación mensual del agregado monetario M1, fijando retardos de ésta última variable  $d = 0, 1, 2, 3$ . La hipótesis nula de no linealidad se rechaza para  $d = 0, 2, 3$  (tabla 5-11).

**Tabla 5-11.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la inflación mensual - Colombia

d	$X_t = IPC, Z_t = M1$			
	0	1	2	3
Estadístico F	1.7883	0.4775	1.8488	1.8289
P-valor	<b>0.0226</b>	0.9842	<b>0.0170</b>	<b>0.0187</b>

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

Teniendo en cuenta lo anterior, se ajustaron modelos TSARX de dos y tres regímenes, con  $d = 2$ , pero la estimación final (ver Anexo A.9) se realiza con el modelo de dos regímenes debido a que con dicho ajuste se obtiene menor DIC (Tabla 5-12).

**Tabla 5-12.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX inflación-M1

Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	<b>-41.9435</b>	-33.2954
NAIC	<b>-3.0853</b>	-3.0361

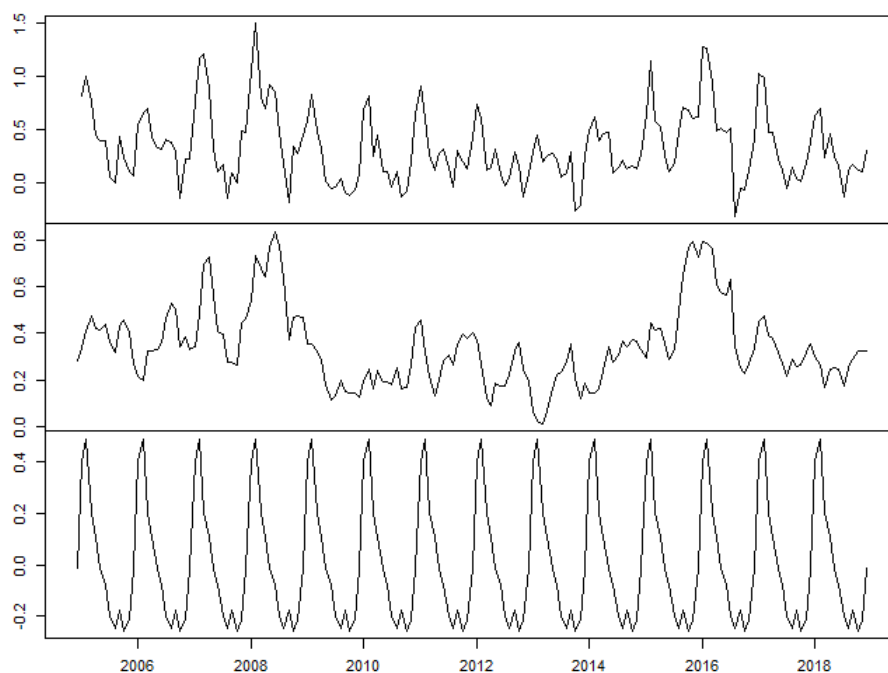
Este modelo genera residuales con distribución normal, no correlacionados y no se evidencian indicios de problemas por especificación incorrecta o heterocedasticidad en los residuales (ver Anexo B.7).

Para el ajuste del modelo TAR se fija el orden autorregresivo máximo en  $p = 13$  (ver Anexo A.10). Los residuales generados por el modelo ajustado no presentan estructura de autocorrelación y las gráficas CUSUM y CUSUMSQ indican que la especificación del modelo es correcta y que no hay heterocedasticidad en los errores (ver Anexo B.8). Sin embargo, según la prueba de Jarque-Bera la hipótesis nula de normalidad se rechaza, por lo que los residuales no son procesos Gaussianos.

Los residuales obtenidos tras el ajuste del modelo SAR final (ver Anexo A.11) para la inflación mensual no presentan estructura de autocorrelación significativa, pero la prueba de

Jarque-Bera indica que no son procesos Gaussianos. No se observan errores de especificación y la varianza es constante (ver Anexo B.9).

Se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial incluyendo únicamente los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.12). En la figura 5-11 se presentan los componentes de nivel y estacionalidad estimados para la inflación mensual.



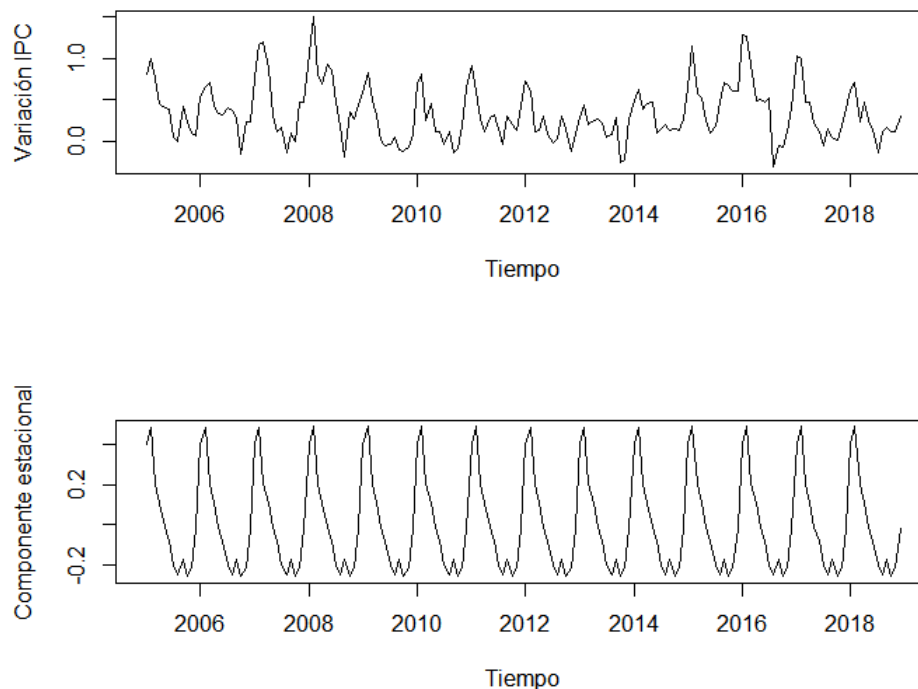
**Figura 5-11.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la inflación mensual. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los residuales generados al ajustar el modelo de suavizamiento exponencial presentan estructura de autocorrelación y no siguen una distribución normal. No se presentan errores de especificación, ni heterocedasticidad en la varianza de los residuales (ver Anexo B.10).

Según el análisis descriptivo para la inflación mensual en Colombia y en concordancia con los modelos previamente ajustados, se define una ventana de 13 observaciones pasadas para incluir en la compuerta de entrada de la red LSTM. El resultado de la validación cruzada permite determinar que la red LSTM más apropiada para este caso cuenta con 15 neuronas.

Los residuales generados por la red neuronal ajustada parecen indicar heterocedasticidad y no presentan estructura de autocorrelación (ver Anexo B.11). Sin embargo, parece que la componente estacional fue mayormente explicada.

La componente estacional de la inflación mensual se extrae empleando un modelo de suavizamiento exponencial. En la Figura 5-12 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-12.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

Una vez se extrae la componente estacional de la inflación mensual, se ajusta una red LSTM fijando una ventana de 2 observaciones pasadas en la compuerta de entradas. La validación cruzada sugiere emplear 50 neuronas en la estimación de la red neuronal.

Los residuales generados por este modelo exhiben cierta estructura de autocorrelación de orden alto, se aprecia una especie de comportamiento estacional en los residuales y algunos problemas de heterocedasticidad para los últimos meses de la serie (ver Anexo B.12).

### Tasa Índice de Precios al Consumidor - Resumen bondad de ajuste

La tabla 5-13 resume los resultados de la validación de los modelos ajustados a la inflación mensual en Colombia. Los modelos TAR y SAR generan residuales con distribuciones no normales y se evidencian algunos problemas de autocorrelación en los residuales generados

por el modelo SE y y las redes LSTM (para datos con y sin ajuste por estacionalidad). También se observan algunos problemas de heterocedasticidad en los residuales de las redes LSTM.

**Tabla 5-13.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la inflación mensual Colombia

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.1649	0.0063	0.0378	0.0588	0.1943	0.2602
Autocorrelación	0.7337	0.6782	0.3826	0.0276	0.7677	0.478
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	No	No	Sí	Sí

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Índice de Precios al Consumidor - Comparación de pronósticos

En la tabla 5-14 se presenta el error cuadrático medio (ECM) de los pronósticos generados a partir de la estimación de los modelos, en negrita se presentan los casos en los cuales se obtiene menor ECM para cada horizonte de pronósticos. Se observa que el modelo TSARX produce pronósticos más precisos cuando se fija un horizonte de pronóstico de un paso adelante, superado ligeramente por la combinación de pronósticos. Cuando el horizonte de pronóstico es de dos pasos, el modelo TSARX genera pronósticos más precisos que el modelo SE y a tres pasos, más precisos que el modelo SAR. A cuatro pasos adelante, el modelo TSARX genera pronósticos más precisos que el modelo SE y las redes LSTM (sin ajuste por estacionalidad).

En este caso, la combinación de pronósticos produce menor ECM para horizontes de 1 y 2 pasos y para 3 y 4 pasos, se encuentran entre los más bajos.

**Tabla 5-14.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la inflación mensual

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos Inflación mensual						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	0.0075	0.0089	0.0147	0.0222	0.0107	0.0110	<b>0.0073</b>
Dos pasos	0.0184	0.0134	0.0164	0.0194	0.0176	0.0150	<b>0.0058</b>
Tres pasos	0.0098	0.0091	0.0321	0.0090	0.0075	<b>0.0043</b>	0.0065
Cuatro pasos	0.0149	0.0141	0.0111	0.0155	0.0519	<b>0.0026</b>	0.0086

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

A partir de los resultados de la prueba de Diebold-Mariano, se observa que el modelo TSARX produce pronósticos más precisos que los generados a partir del ajuste de un modelo SAR cuando el horizonte de pronóstico es de uno, dos y cuatro pasos. Genera pronósticos más precisos que el modelo SE cuando el horizonte es de uno o dos pasos y que las redes LSTM (sin ajustar por estacionalidad) cuando el horizonte es de un paso (tabla 5-15).

**Tabla 5-15.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para IPC Colombia

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres paso	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>
TSARX-SE	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

A partir de lo anterior, hay evidencia para afirmar que el modelo TSARX puede ser utilizado para calcular pronósticos de la inflación mensual en Colombia ya que su precisión es superior a los modelos lineales contra los cuales se compara en este trabajo (SAR y SE) y que las redes LSTM. Con respecto al modelo TAR, el modelo TSARX produce resultados por lo menos, iguales y con respecto a las redes LSTM, se requiere primero extraer la componente estacional para que los pronósticos sean por lo menos iguales, lo cual aunado a la complejidad de la propia red, puede resultar excesivo para el análisis de esta variable.

## 5.2. Resultados para las series de tiempo de Estados Unidos

### 5.2.1. Producto Interno Bruto - resultados

A partir de lo observado en el análisis descriptivo, para ajuste del modelo TSARX a la variación trimestral del PIB estadounidense, se calcula la prueba de Tsay para determinar la existencia de relaciones no lineales con respecto a la variación del *spread* que se usa como variable de umbrales. Para ello, se fijan ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$ ,  $P = 2$  y la prueba se realiza para  $d = 0, 1, 2, 3$ .

Los resultados de la prueba de Tsay, presentados en la tabla **5-16**, indican que no es posible rechazar la hipótesis nula de linealidad con un nivel de confianza del 95 %. Sin embargo, para efectos de este trabajo se ajustan modelos TSARX con dos y tres regímenes y  $d = 3^1$ .

**Tabla 5-16.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación trimestral del PIB - EE.UU.

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	0.8218	0.9935	1.8818	1.2548
P-valor	0.6185	0.4582	0.0515	0.2630

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

Si bien el modelo que menor DIC refleja es el de tres regímenes, la diferencia con respecto al modelo de dos regímenes es pequeña, por lo que teniendo en cuenta el principio de parsimonia, el modelo final ajustado (ver Anexo A.13) es de dos regímenes (Tabla **5-17**).

**Tabla 5-17.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX ISE-spread

Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	297,1688	<b>296,7109</b>
NAIC	-0,4465	<b>-0,3607</b>

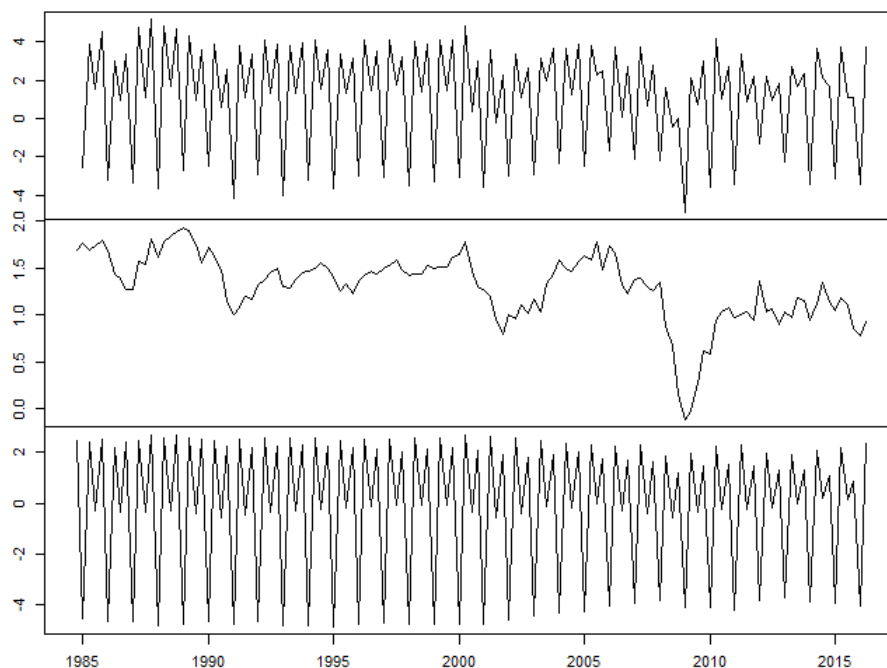
<sup>1</sup>Teniendo en cuenta que la hipótesis nula podría ser rechazada con un nivel de confianza del 90 %

Los residuales generados por el modelo ajustado no presentan estructura de autocorrelación y además siguen una distribución normal. La especificación del modelo es correcta, pero se evidencian algunos problemas de heterocedasticidad(ver Anexo B.13) .

Para el ajuste del modelo TAR se plantean dos regímenes y orden autorregresivo máximo  $p = 5$  (ver Anexo A.14). Los residuales generados presentan heterocedasticidad, pero no hay evidencia de errores de especificación. Adicionalmente, se encuentra estructura de autocorrelación (con un nivel de confianza del 90 %) y la prueba de Jarque - Bera indica que los residuales no siguen una distribución normal (ver Anexo B.14).

El modelo SAR se ajusta a la variación trimestral del PIB estadounidense fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.15). Los residuales obtenidos presentan estructura de autocorrelación, heterocedasticidad pero, siguen una distribución normal y no se evidencian fallas en la especificación del modelo (ver Anexo B.15).

Se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial sin tendencia a la tasa de crecimiento del PIB (ver Anexo A.16) a partir del cual se estiman sus componentes y se presentan en la figura 5-13.



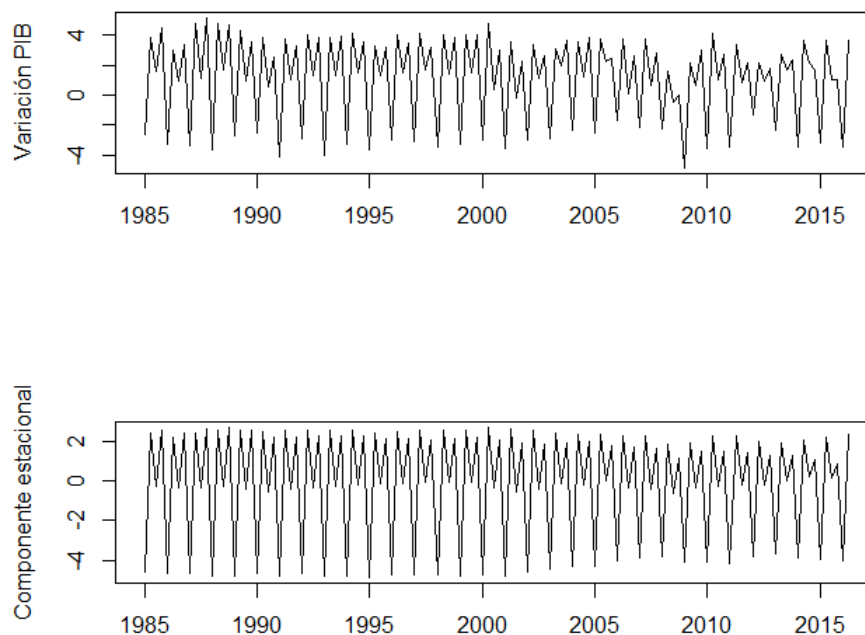
**Figura 5-13.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la tasa de crecimiento del PIB, EE.UU.. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los residuales generados no presentan estructura de autocorrelación significativa pero exhi-

ben heterocedasticidad (CUSUMSQ) (ver Anexo B.16), por lo cual, la prueba de Jarque - Bera indica que no siguen una distribución normal (con un nivel de confianza del 90%). Sin embargo, El modelo no presenta problemas de especificación.

Para el ajuste de las redes LSTM se define una ventana de 5 observaciones pasadas y el resultado del proceso de validación cruzada indica que se deben incluir 75 neuronas ya que de esta forma se minimiza el error cuadrático medio en la serie utilizada para el entrenamiento de la red. El modelo ajustado genera residuales que no exhiben patrones de autocorrelación y al parecer, la componente estacional fue explicada por el modelo. También se evidencian problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.17).

En la figura 5-14 se presenta la serie original de variación trimestral del PIB y la componente estacional estimada a partir de métodos de suavizamiento exponencial. A los datos desestacionalizados, se les ajusta un modelo LSTM con 75 neuronas y una ventana de una observación pasada.



**Figura 5-14.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

Los residuales generados por el ajuste de la red LSTM exhiben patrones estacionales y pro-

blemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.18).

### Producto Interno Bruto - Resumen bondad de ajuste

En la tabla 5-18 se resumen los resultados de las pruebas de verificación del ajuste de los modelos considerados. El modelo TSARX permite explicar la correlación de la variación trimestral del PIB estadounidense, sin embargo, presenta heterocedasticidad. Los demás modelos presentan problemas de normalidad o autocorrelación. No obstante, en ningún caso se detectan fallas de especificación.

**Tabla 5-18.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados PIB EE.UU.

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.9774	0.0194	0.1607	0.0588	< 0.0001	0.0003
Autocorrelación	0.3216	0.0673	0.0339	0.1934	0.1211	0.0339
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Producto Interno Bruto - Comparación de pronósticos

A partir del cálculo de ECM, se obtiene que el modelo TSARX genera pronósticos más precisos cuando el horizonte de pronóstico es de tres pasos adelante. No obstante, para un paso adelante, el ECM es más bajo que el producido por las redes LSTM, para dos pasos adelante, es más preciso que el modelo TAR y las redes LSTM y para cuatro pasos, más preciso que el modelo de suavizamiento exponencial y las redes LSTM. En la Tabla 5-19 se presentan los ECM para los diferentes modelos y horizontes de pronóstico, en negrita se presentan los casos en los cuales el ECM es menor, para cada horizonte de pronóstico. Se destaca que la combinación de pronósticos es más precisa para dos y cuatro pasos adelante.

**Tabla 5-19.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación del PIB

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos ISE						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	0.6488	0.5949	<b>0.5785</b>	0.6038	1.2612	0.7006	0.6021
Dos pasos	0.3329	0.3515	0.2384	0.3008	0.9196	0.2825	<b>0.1490</b>
Tres pasos	<b>1.1401</b>	1.1438	1.4023	1.4440	37.5813	1.7019	1.4467
Cuatro pasos	0.2632	0.2488	0.2242	0.5265	0.2288	0.5702	<b>0.0609</b>

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

Los resultados de la prueba de Diebold - Mariano indican que el modelo TSARX no genera pronósticos más precisos que los demás modelos considerados en el análisis. De hecho, cuando el horizonte de pronóstico es un paso, el modelo SAR genera pronósticos más precisos (tabla 5-20).

**Tabla 5-20.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para PIB EE.UU.

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres paso	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	<b>SAR más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

De acuerdo con lo anterior, el modelo TSARX puede generar pronósticos con menor ECM que las redes neuronales o los modelos de suavizamiento exponencial. Sin embargo, las diferencias en los pronósticos no son significativas y el modelo autorregresivo lineal genera mejores pronósticos para un paso adelante. En este sentido, puede no ser recomendable ajustar un modelo TSARX a la variación trimestral del PIB estadounidense con el fin de generar pronósticos acertados.

### 5.2.2. Tasa de desempleo - resultados

A partir de lo visto en el análisis descriptivo, se calcula la prueba de no linealidad de Tsay, para la variación trimestral de la tasa de desempleo estadounidense, fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 1$ . La prueba se calcula para  $d = 1, 2, 3$  y se determina que existe evidencia de no linealidad en todos los casos (tabla 5-21).

**Tabla 5-21.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación trimestral del PIB - EE.UU.

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	12.5816	6.3016	7.2405	3.2325
P-valor	< <b>0.0001</b>	< <b>0.0001</b>	< <b>0.0001</b>	<b>0.0038</b>

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

Para la selección del número de umbrales se ajustan modelos TSARX con dos y tres regímenes y los ordenes autorregresivos previamente mencionados, fijando  $d = 0$ . El modelo ajustado (ver Anexo A.17) es el de tres regímenes debido a que este ajuste genera menor DIC (tabla 5-22).

**Tabla 5-22.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX desempleo-PIB EE.UU.

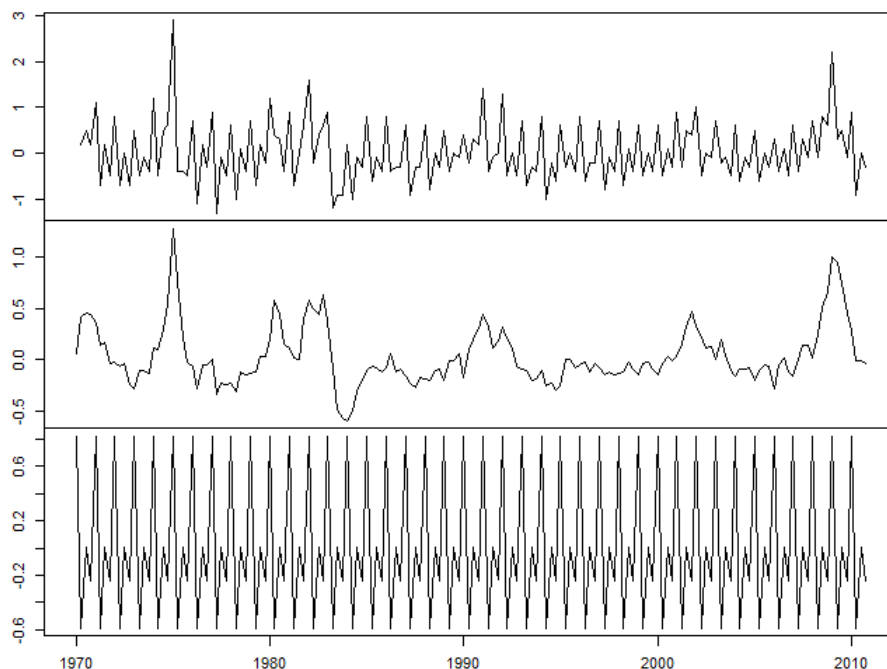
Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	131,049	<b>100,1828</b>
NAIC	-2,0368	<b>-2,2460</b>

Los residuales generados por el ajuste del modelo TSARX este modelo siguen una distribución normal y no presentan estructura de autocorrelación, problemas de heterocedasticidad o de especificación (ver Anexo B.19), lo cual indica un buen ajuste de los datos.

Siguiendo lo anterior y para facilitar la comparación de los modelos, se ajusta un modelo TAR con tres regímenes a la variación de la tasa de desempleo (ver Anexo A.18). Para capturar la componente estacional se fija el máximo orden autorregresivo en  $p = 6$ . Los residuales generados por este modelo no presentan estructura de autocorrelación, problemas de especificación ni de heterocedasticidad (ver Anexo B.20). Los residuales siguen una distribución normal.

Para el ajuste del modelo SAR se fijan los ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 1$  (ver Anexo ??). Los residuales generados por el modelo ajustado exhiben autocorrelación significativa y problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.21). No se evidencian errores de especificación, pero la distribución de los residuales no es normal.

Se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial incluyendo los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.20). En la Figura 5-17, se muestran los componentes estimados para la variación trimestral de la tasa de desempleo en Estados Unidos a partir del modelo de suavizamiento exponencial.

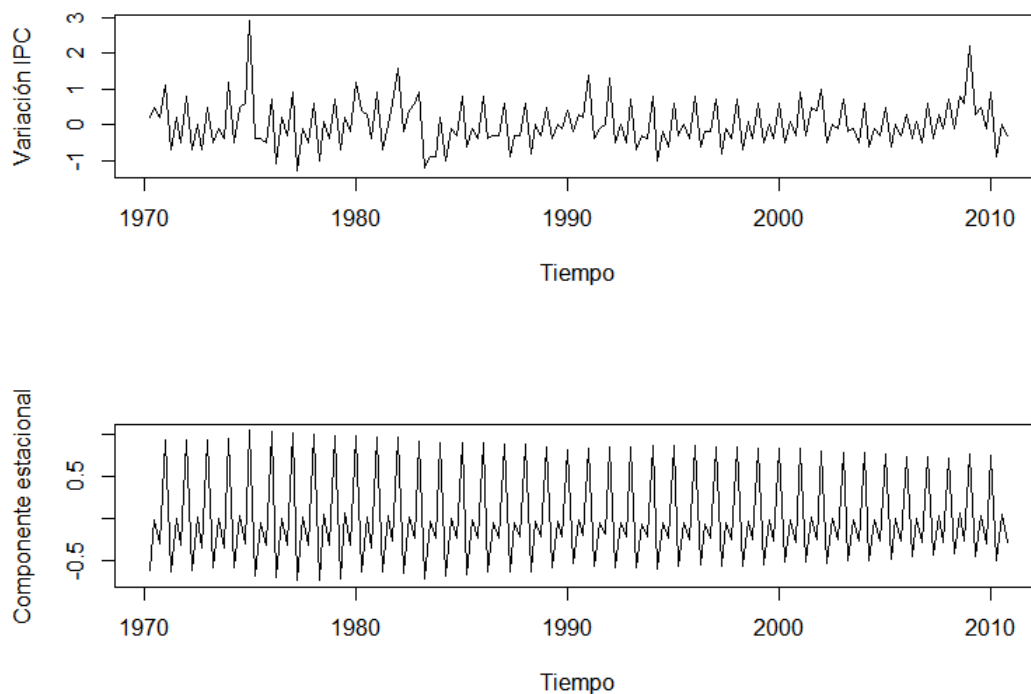


**Figura 5-15.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la tasa de crecimiento del desempleo, EE.UU.. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

El modelo ajustado produce residuales correlacionados y no normales, no se evidencian problemas de especificación, pero si de heterocedasticidad (ver Anexo B.22).

Para el ajuste del modelo LSTM se define una ventana de cinco observaciones pasadas (según lo mencionado en el análisis descriptivo para la serie) y se definió una ventana de olvido (*dropout*) del 10%. Los resultados del proceso de validación cruzada, indican que la especificación que genera menores errores en la muestra de entrenamiento es el de 100 neuronas. Los residuales generados por la red LSTM presentan estructura de autocorrelación y no se observa heterocedasticidad (ver Anexo B.23).

La componente estacional de la variación trimestral del desempleo en Estados Unidos, se extrae ajustando un modelo de suavizamiento exponencial. En la Figura 5-16 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-16.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

A los datos desestacionalizados, se les ajusta una red LSTM definiendo una ventana de cinco observaciones pasadas y una tasa de olvido (*dropout*) del 10%. La validación cruzada sugiere incluir 15 neuronas. Los residuales generados por la red no exhiben autocorrelación o comportamientos estacionales, sin embargo, la varianza marginal no es constante (ver Anexo B.24).

### Tasa de Desempleo - Resumen bondad de ajuste

El ajuste de los modelos TSARX y TAR a la variación trimestral de la tasa de desempleo estadounidense generan residuales a partir de los cuales se pueden validar los supuestos. No obstante, los modelos SAR y SE generan residuales no normales y con componentes autorregresivas y heterocedastidad. En la Tabla 5-23 se resumen los resultados de las pruebas de verificación realizadas.

**Tabla 5-23.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la tasa de desempleo EE.UU.

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.1111	0.3486	0.0011	0.0171	0.0066	< 0.0001
Autocorrelación	0.1314	0.1854	0.0048	0.0011	0.0210	0.0592
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	Sí	Sí	No	Sí

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Tasa de Desempleo - Comparación de pronósticos

En la Tabla 5-24 se presenta el error cuadrático medio (ECM) calculado para los pronósticos de la tasa de desempleo, en negrita se muestran los modelos para los cuales el ECM es menor para cada horizonte de pronóstico. El modelo TSARX genera menor ECM comparado con los demás modelos (a excepción del modelo SE), cuando el horizonte de pronóstico es de cuatro pasos adelante. Si se calculan los pronósticos dos pasos adelante, el TSARX resulta más preciso que los modelos TAR, SAR y las redes LSTM (para datos sin ajuste por estacionalidad). A tres pasos, es más preciso que el modelo SE y la red LSTM.

**Tabla 5-24.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación de la tasa de desempleo EE.UU.

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos ISE						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	0.0661	0.0558	0.0656	0.0424	0.0411	0.0561	<b>0.0403</b>
Dos pasos	0.0433	0.0669	0.0450	<b>0.0256</b>	0.0485	0.0287	0.0345
Tres pasos	0.0323	0.1813	0.0314	<b>0.0167</b>	0.0602	0.0282	0.0186
Cuatro pasos	0.0492	0.0884	0.0504	<b>0.0392</b>	0.1155	0.1029	0.0542

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

Los resultados de la prueba de Diebold - Mariano, presentados en la tabla 5-25, indican que el modelo más TSARX no es necesariamente el que genera pronósticos más precisos. no se evidencian diferencias significativas contra los residuales generados por el modelo TAR. Al comparar con el modelo SAR, el TSARX es menos preciso para los pronósticos dos pasos

adelante. Comparado con el modelo de suavizamiento exponencial, este último es más preciso en todos los casos, menos en tres pasos adelante, donde no hay diferencias y la combinación de pronósticos es más precisa en todos los horizontes de pronóstico.

**Tabla 5-25.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para Desempleo EE.UU.

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres pasos	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	Sin diferencia	<b>SAR más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SE	<b>SE más preciso</b>	<b>SE más preciso</b>	Sin diferencia	<b>SE más preciso</b>
TSARX-LSTM	<b>LSTM más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

El único caso para el cual el TSARX genera mejores pronósticos es cuando se compara con las redes LSTM (sin ajuste por estacionalidad). A partir de lo anterior, los pronósticos de la variación mensual de la tasa de desempleo, se sugieren calcular a partir de la combinación de pronósticos, si el objetivo es obtener las predicciones más precisas.

### 5.2.3. Índice de Precios al Consumidor - resultados

Para determinar si existe evidencia de no linealidad en la relación de la inflación mensual en Estados Unidos y la variación del *spread*, se calcula la prueba de Tsay fijando ordenes autorregresivos  $p = 2$  y  $P = 2$ . Se determina que la hipótesis nula de linealidad se puede rechazar cuando  $d = 1, 3$  (tabla 5-36).

**Tabla 5-26.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la inflación mensual - EE.UU.

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	1.9691	2.5717	0.3629	2.5954
P-valor	0.0591	<b>0.0138</b>	0.9232	<b>0.0130</b>

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

De acuerdo con lo anterior, se ajustaron modelos TSARX fijando el número de regímenes en  $l = 2, 3$ , con ordenes autorregresivos máximos de  $p = 2$ ,  $P = 2$  y  $d = 3$  (ver Anexo A.21). Se selecciona el modelo de dos regímenes debido a que es el que menor valor reporta en el criterio de información DIC (tabla 5-27).

**Tabla 5-27.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX inflación-spread EE.UU.

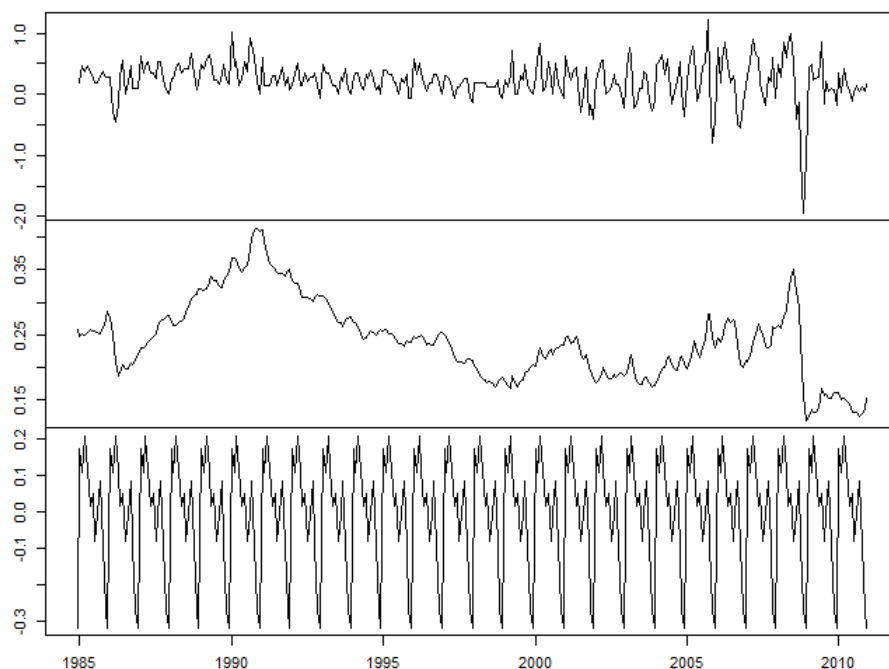
Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	<b>40.0859</b>	61.2869
NAIC	<b>-2.6813</b>	-2.6554

Los residuales generados por el modelo TSARX ajustado presentan estructura de autocorrelación (significativa con nivel de confianza del 90 %), además se evidencia heterocedasticidad y no normalidad (ver Anexo B.25). No se observan errores en la especificación del modelo siguen una distribución normal y no presentan estructura de autocorrelación significativa.

A la inflación mensual en Estados Unidos se le ajusta un modelo TAR con dos regímenes, fijando el orden autorregresivo máximo en  $p = 26$  (ver Anexo A.22). Los residuales generados presentan estructura de autocorrelación y heterocedasticidad (ver Anexo B.26). No se evidencian errores de especificación, pero los residuales no siguen una distribución normal.

Para el ajuste del modelo SAR se fijan los ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.23). El modelo ajustado no captura completamente el comportamiento autorregresivo de la serie, por lo que los residuales presentan estructura de autocorrelación. Se observa heterocedasticidad en los residuales del modelo SAR ajustado y no normalidad en su distribución. No se evidencian errores de especificación (ver Anexo B.27).

Se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial incluyendo los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.24). En la Figura 5-17, se muestran los componentes estimados para la inflación mensual en Estados Unidos por el ajuste de un modelo de suavizamiento exponencial.



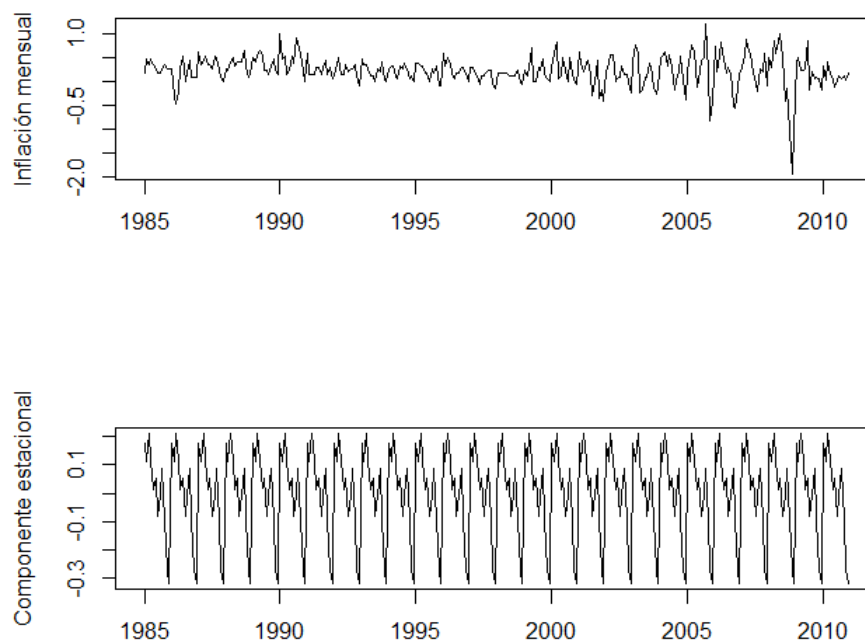
**Figura 5-17.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la inflación mensual, EE.UU.. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Este modelo produce residuales correlacionados y no normales, no se evidencian problemas de especificación, pero si de heterocedasticidad (ver Anexo B.28).

Para el ajuste de la red LSTM se define una ventana de 26 observaciones pasadas con el fin de capturar el comportamiento estacional y se fija una tasa de olvido (*dropout*) del 5%, se define relu como función de activación. A partir de los resultados de la validación cruzada se incluyen 30 neuronas en la red ajustada.

La especificación de la red captura en su mayoría el comportamiento estacional de la serie, no parece haber heterocedasticidad (ver Anexo B.29).

En la figura 5-18 se muestra la serie original y la componente estacional estimada a partir de métodos de suavizamiento exponencial.



**Figura 5-18.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

A los datos desestacionalizados, se les ajusta una red LSTM fijando una ventana de 2 observaciones pasadas y a partir de la validación cruzada, se fijan 50 neuronas. Los residuales generados al ajustar el modelo LSTM a la serie desestacionalizada exhiben autocorrelación de orden alto que asemejan a la presencia de un patrón estacional persistente. No se evidencia heterocedasticidad (ver Anexo B.30).

### Índice de Precios al Consumidor - Resumen bondad de ajuste

Los modelos ajustados, generan residuales autocorrelacionados y con evidencia de heterocedasticidad. Las redes LSTM parecen capturar correctamente la componente estacional y generar residuales con varianza constante. No obstante, al ajustar la red a los datos desestacionalizados, no se obtiene un buen ajuste. En la tabla 5-28 se resumen los resultados de las pruebas de bondad de ajuste aplicadas a los residuales de los modelos ajustados a la inflación mensual en Estados Unidos, se presentan los valores p para las pruebas de normalidad y autocorrelación y se especifica si se evidencian problemas de heterocedasticidad o correlación a partir del análisis gráfico (Anexo B).

**Tabla 5-28.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la inflación mensual - EE.UU.

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0002	< 0.0001
Autocorrelación	0.0587	0.0088	0.0251	< 0.0001	0.2181	0.7242
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Índice de Precios al Consumidor - Comparación de pronósticos

Los pronósticos más precisos, en cuanto a error cuadrático medio, para la inflación mensual en Estados Unidos se obtienen a partir de las redes neuronales para datos desestacionalizados (para uno y dos pasos adelante) y con el modelo de suavizamiento exponencial (para tres y cuatro pasos adelante). Los pronósticos un paso adelante calculados a partir del modelo TSARX son más precisos que los del modelo TAR y las redes LSTM sin ajuste por estacionalidad. A dos, tres y cuatro pasos, el TSARX solo es más preciso que las redes LSTM. En la tabla 5-29 se presentan el ECM de los pronósticos calculados para la inflación mensual a partir de los modelos ajustados, en negrita se presentan los valores mínimos (más precisos) para cada horizonte de pronóstico  $h$ .

**Tabla 5-29.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la inflación mensual - EE.UU.

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos inflación - EE.UU.						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
<b>Un paso</b>	0.0609	0.0707	0.0554	0.0523	0.0754	<b>0.0489</b>	0.0571
<b>Dos pasos</b>	0.0752	0.0749	0.0686	0.0595	0.0879	<b>0.0486</b>	0.0620
<b>Tres pasos</b>	0.0949	0.0949	0.0882	<b>0.0623</b>	0.1191	0.0677	0.0791
<b>Cuatro pasos</b>	0.0959	0.0808	0.0870	<b>0.0470</b>	0.1067	0.0568	0.0709

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

Los resultados de la prueba de Diebold-Mariano, presentados en la tabla 5-30, confirman lo mencionado a partir del ECM. Es decir, que el modelo TSARX no genera pronósticos más precisos que los demás con los que se compara en este trabajo, para el análisis de la

inflación mensual estadounidense. En este caso, dados los resultados, sería recomendable tomar decisiones a partir de los pronósticos generados por el modelo SAR, las redes LSTM previo ajuste por estacionalidad de los datos o por la combinación de pronósticos, en lugar del modelo TSARX.

**Tabla 5-30.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para inflación - EE.UU.

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres pasos	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	<b>SAR más preciso</b>	<b>SAR más preciso</b>	<b>SAR más preciso</b>	<b>SAR más preciso</b>
TSARX-SE	Sin diferencia	Sin diferencia	<b>SE más preciso</b>	<b>SE más preciso</b>
TSARX-LSTM	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>
TSARX-LSTM + SE	<b>LSTM más precisa</b>	<b>LSTM más precisa</b>	<b>LSTM más precisa</b>	<b>LSTM más precisa</b>
TSARX-Combinación	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

## 5.3. Resultados para las series de tiempo de Reino Unido

### 5.3.1. Producto Interno Bruto - resultados

Se calcula la prueba de no linealidad de Tsay a la variación trimestral del PIB fijando ordenes autorregresivos máximos de  $p = 2$ ,  $P = 2$  y con  $d = 0, 1, 2, 3$ . Los resultados indican que no se puede rechazar la hipótesis nula de linealidad (tabla 5-31).

**Tabla 5-31.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación trimestral del PIB - Reino Unido

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	1.4792	1.5850	1.2236	1.2871
P-valor	0.1478	0.1114	0.2787	0.2398

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

No obstante lo anterior, se ajustaron modelos TSARX de dos y tres regímenes con  $d = 3$  y de acuerdo con los DIC obtenidos, se selecciona el modelo de tres regímenes para el ajuste final (A.25) debido a que es el que menor valor reporta en el DIC (tabla 5-32).

**Tabla 5-32.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX PIB-spread - Reino Unido

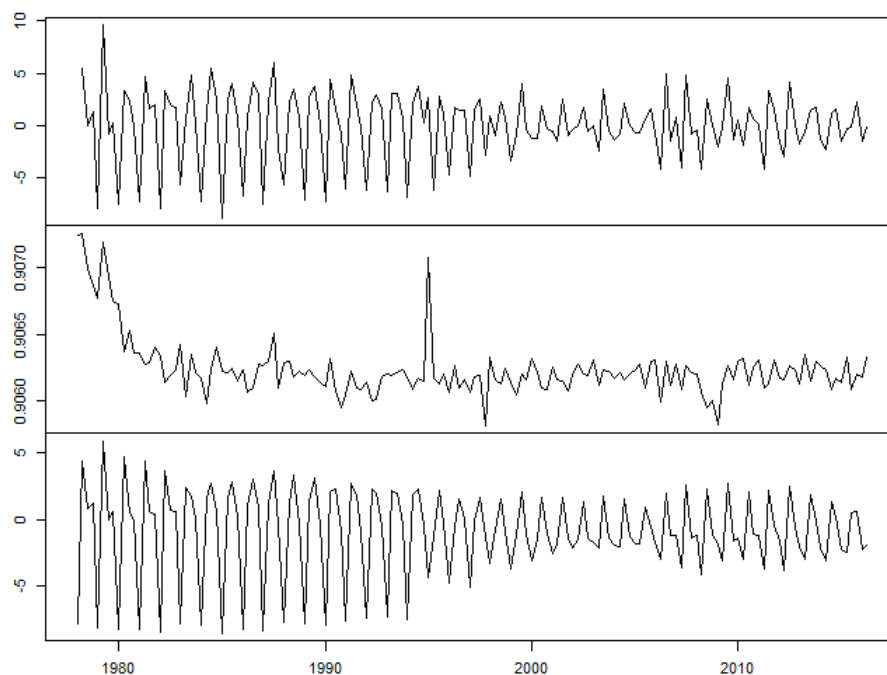
Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	513.0779	<b>501.371</b>
NAIC	0.7459746	<b>0.6729902</b>

A partir del ajuste del modelo TSARX, se obtienen residuales normalmente distribuidos y no presentan estructura de autocorrelación significativa. Además, el modelo está bien especificado según lo observado en la gráfica CUSUM y no hay problemas de heterocedasticidad según la gráfica CUSUMSQ (ver Anexo B.31).

Se ajusta un modelo TAR con tres regímenes a la variación de la tasa de crecimiento del PIB en Reino Unido. Para capturar el componente estacional se fija el máximo orden autorregresivo en  $p = 10$  (ver Anexo A.26). Los residuales generados por este modelo no presentan estructura de autocorrelación o problemas de especificación. Además se puede afirmar que la distribución de los residuales es normal y no hay evidencia de heterocedasticidad (ver Anexo B.32).

Para el ajuste del modelo SAR se fijan los ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.27). Los residuales exhiben estructura de autocorrelación significativa y no se distribuyen normal. No hay evidencia de errores de especificación pero si ciertos problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.33).

El modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la variación trimestral del PIB de Reino Unido, se ajusta incluyendo componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.28). En la Figura 5-19, se muestran los componentes estimados para a la variación de la tasa de crecimiento del PIB en Reino Unido.

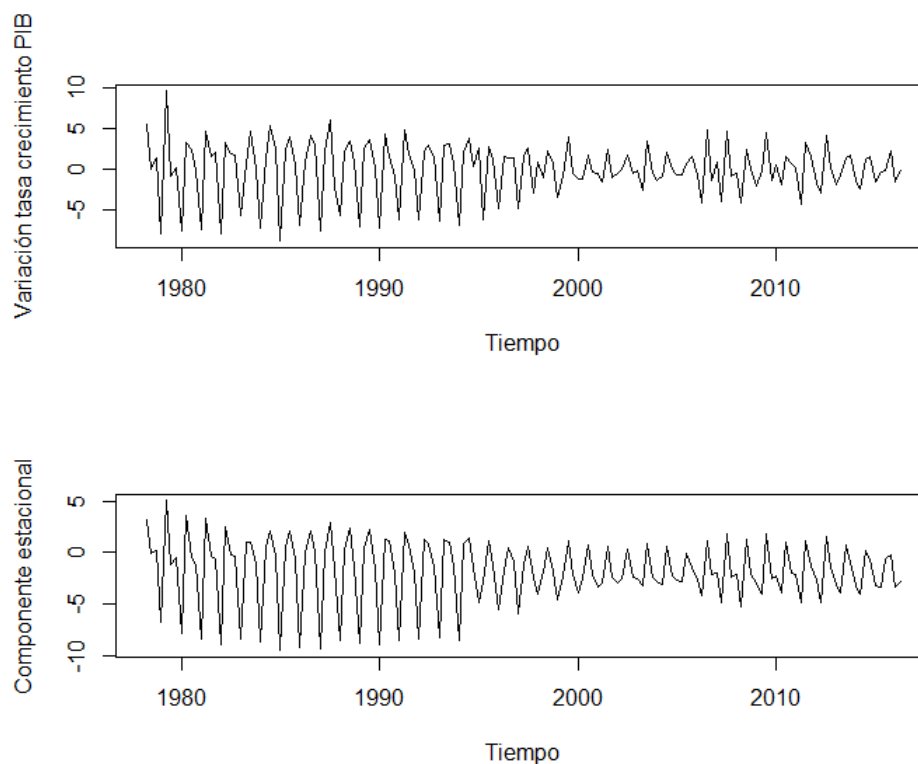


**Figura 5-19.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la variación de la tasa de crecimiento del PIB, Reino Unido. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los errores generados por el ajuste del modelo de suavizamiento exponencial no siguen una distribución normal y presentan estructura de autocorrelación. No se observan errores relacionados con la especificación pero, indicios de heterocedasticidad en los residuales (ver Anexo B.34).

Para el ajuste de la red LSTM se define una ventana de cinco observaciones pasadas con función de activación relu. A partir de los resultados de la validación cruzada, se incluyen 30 neuronas. Los residuales generados presentan estructura de autocorrelación y la componente estacional no fue explicada completamente (ver Anexo B.35).

La componente estacional de la serie de desempleo se extrae ajustando un modelo de suavizamiento exponencial. En la Figura 5-22 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-20.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

A los datos desestacionalizados, se les ajusta una red LSTM con ventana de observaciones pasadas de un retardo y a partir de validación cruzada, se definen 30 neuronas. Los residuales no exhiben autocorrelación o comportamientos estacionales (ver Anexo B.36).

### Producto Interno Bruto - Resumen bondad de ajuste

En la tabla 5-43 se resumen los resultados de las pruebas de bondad de ajuste para el análisis de residuales de los modelos ajustados a la variación del PIB en Reino Unido. En general el ajuste de los modelos a la variación del PIB trimestral en Reino Unido es correcto, en el sentido en que los supuestos probados se cumplen. Sin embargo, los residuales generados por los modelos autorregresivo y de suavizamiento exponencial, no cumplen con el supuesto de normalidad. Además, se detecta heterocedasticidad en los residuales del modelo de suavizamiento exponencial.

**Tabla 5-33.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la variación del PIB - Reino Unido

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.8724	0.6458	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Autocorrelación	0.3994	0.3785	0.0150	< 0.0001	0.03517	0.7281
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	No	Sí	No	No

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Producto Interno Bruto - Comparación de pronósticos

En la tabla 5-34, se presentan los resultados del error cuadrático medio (ECM) para los pronósticos de la tasa de crecimiento del PIB en Reino Unido, obtenidos a partir de los modelos considerados, en negrita se presentan los valores mínimos por cada horizonte de pronóstico. Se puede observar que el modelo TSARX genera pronósticos más precisos cuando el horizonte de pronóstico es de un paso adelante. Si el horizonte de pronóstico es de dos pasos, el modelo TSARX es más preciso que todos los modelos ajustados, a excepción del modelo TAR, para tres pasos, es más preciso que el modelo TAR y las redes LSTM y cuando se calculan pronósticos a cuatro pasos, es más preciso que el modelo SE y las redes LSTM.

**Tabla 5-34.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación del PIB - Reino Unido

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos ISE						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	<b>1.0448</b>	1.2111	6.4035	2.1245	1.5340	1.4854	1.5034
Dos pasos	1.0106	<b>0.9280</b>	1.0582	1.2963	6.0618	1.1390	3.6165
Tres pasos	2.5413	3.0672	2.3948	2.4921	4.6297	3.9699	<b>1.9363</b>
Cuatro pasos	0.9514	0.8008	0.8460	1.0537	2.8554	1.1703	<b>0.8277</b>

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

Los resultados de la prueba de Diebold - Mariano, indican que el modelo TSARX genera pronósticos estadísticamente más precisos que algunos de los modelos con los que se compara en este trabajo. Estas diferencias se mantienen para los diferentes horizontes de pronóstico (tabla 5-35).

**Tabla 5-35.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para PIB Reino Unido

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres pasos	Cuatro pasos
<b>TSARX-TAR</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>
<b>TSARX-SAR</b>	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
<b>TSARX-SE</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>
<b>TSARX-LSTM</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>
<b>TSARX-LSTM + SE</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>
<b>TSARX-Combinación</b>	Sin diferencia	<b>Comb. más precisa</b>	Sin diferencia	Sin diferencia

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

A partir de lo anterior, se puede concluir que el ajuste de modelos TSARX para pronosticar el comportamiento de la variación de la tasa de desempleo de Reino Unido, genera resultados positivos en términos de precisión, en comparación con los modelos considerados para el presente trabajo. Esto quiere decir que para la toma de decisiones basadas en el PIB de Reino Unido, se puede recomendar el ajuste de modelos TSARX.

### 5.3.2. Tasa de desempleo - resultados

De acuerdo con lo observado en el análisis descriptivo de la variación de la tasa de desempleo en Reino Unido, se realiza la prueba de Tsay, fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$ ,  $P = 2$  y se prueba para  $d = 0, 1, 2, 3$ . Se encuentra evidencia de no linealidad para todos los casos.

**Tabla 5-36.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la variación trimestral de la tasa de desempleo - Reino Unido

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	3.8081	5.3732	4.0783	2.2522
P-valor	<b>0.0001</b>	<b>&lt; 0.0001</b>	<b>&lt; 0.0001</b>	<b>0.0157</b>

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

Se ajustan modelos TSARX de dos y tres regímenes y se selecciona el modelo de tres regímenes (ver Anexo A.29) debido a que es el que menor valor reporta en el criterio de información DIC (Tabla 5-37).

**Tabla 5-37.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX desempleo-PIB Reino Unido

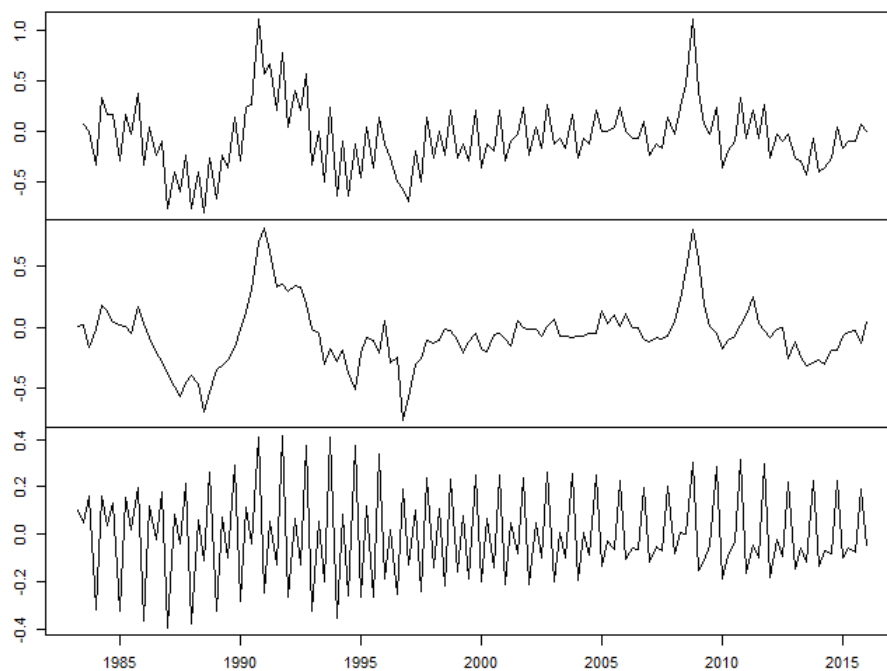
Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	-85.43147	<b>-130.8964</b>
NAIC	-3.312047	-3.065715

Los residuales generados por el modelo TSARX ajustado una distribución normal y no presentan estructura de autocorrelación significativa. Además, el modelo está bien especificado y no hay problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.37).

Se ajusta un modelo TAR con tres regímenes a la variación de la tasa de desempleo en Reino Unido. Para capturar el componente estacional se fija el máximo orden autorregresivo en  $p = 9$  (ver Anexo A.30). Los residuales generados por este modelo no presentan estructura de autocorrelación o problemas de especificación o heterocedasticidad (ver Anexo B.38), sin embargo, no se distribuyen normal.

Para el ajuste del modelo SAR se fijan los ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 2$  (ver Anexo A.31). Los residuales generados por el modelo ajustado siguen una distribución normal, no presentan autocorrelación, problemas de especificación o heterocedasticidad (ver Anexo B.39).

El modelo de suavizamiento exponencial incluyendo componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.32). En la Figura **5-21**, se muestran los componentes estimados:



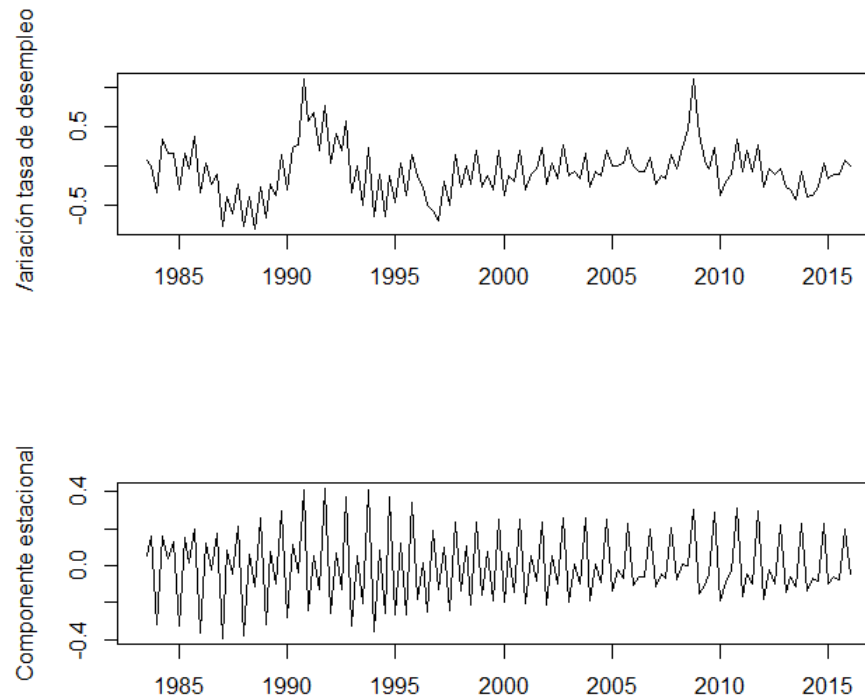
**Figura 5-21.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la tasa de crecimiento de la tasa de desempleo, Reino Unido. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los errores generados por el ajuste del modelo SE no siguen una distribución normal, sin embargo, no presentan autocorrelación, no se observan errores relacionados con la especificación ni heterocedasticidad (ver Anexo B.40).

Para el ajuste del modelo LSTM se define una ventana de cinco observaciones pasadas, se fija  $\text{relu}$  como función de activación. A partir de los resultados del ejercicio de validación cruzada se estima la red con 30 neuronas.

Los residuales generados por el modelo LSTM presentan estructura de autocorrelación, la componente estacional no fue explicada y parecen haber problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.41).

La componente estacional de la serie de desempleo se extrae ajustando un modelo de suavizamiento exponencial. En la Figura 5-22 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-22.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

A los datos desestacionalizados, se les ajusta un modelo LSTM con 30 neuronas y una ventana de una observación pasada. Los residuales no exhiben autocorrelación o comportamientos estacionales, pero sí heterocedasticidad (ver Anexo B.42).

### Tasa de desempleo - Resultados bondad de ajuste

En la Tabla 5-43 se resumen los resultados de las pruebas de bondad de ajuste aplicadas a los residuales generado por el ajuste de cada uno de los modelos considerados a la variación trimestral de la tasa de desempleo en Reino Unido. Los residuales de los modelos TSARX y SE no cumplen con el supuesto de normalidad y las redes LSTM presentan problemas de heterocedasticidad.

**Tabla 5-38.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados a la variación de la tasa de desempleo - Reino Unido

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.3532	0.0013	0.1439	0.0443	0.0001	< 0.0001
Autocorrelación	0.5690	0.4577	0.2241	0.7590	< 0.0001	0.7397
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	No	No	No	Si	Si

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Tasa de desempleo - Comparación de pronósticos

En la Tabla 5-39 se presenta el error cuadrático medio (ECM) de los pronósticos calculados a partir de los modelos ajustados, en negrita se muestran los valores mínimos para cada horizonte de pronósticos  $h$ . Si bien el modelo TSARX no produce los pronósticos más precisos en términos de error cuadrático medio, cuando el horizonte de pronóstico es de un paso adelante, resulta más preciso que las redes neuronales para datos desestacionalizados y el modelo de suavizamiento exponencial; cuando el horizonte es de dos pasos, el TSARX es más preciso que el modelo TAR; a tres pasos es más preciso que el modelo de suavizamiento exponencial y que las redes LSTM para datos desestacionalizados; cuando el horizonte de pronóstico es de cuatro pasos, es más preciso que las redes LSTM.

**Tabla 5-39.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la variación de la tasa de desempleo - Reino Unido

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos ISE						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	0.0151	<b>0.0073</b>	0.0083	0.0155	0.0146	0.0275	0.0089
Dos pasos	0.0024	0.0031	<b>0.0013</b>	0.0020	0.0162	0.0018	0.0022
Tres pasos	0.0177	<b>0.0141</b>	0.0156	0.0287	0.0167	0.0409	0.0153
Cuatro pasos	0.0093	0.0019	<b>0.0014</b>	0.0022	0.0373	0.0165	0.0079

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

A partir de los resultados de la prueba de Diebold - Mariano, se obtiene que el modelo TSARX genera pronósticos más precisos que las redes LSTM para datos desestacionalizados

para todos los horizontes de pronóstico. Sin embargo, también se obtiene evidencia que indica que los pronósticos del modelo TSARX son menos precisos que los modelos SAR y la combinación de pronósticos.

**Tabla 5-40.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para tasa de desempleo Reino Unido

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres pasos	Cuatro pasos
TSARX-TAR	<b>TAR más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	<b>SAR más preciso</b>	<b>SAR más preciso</b>	<b>SAR más preciso</b>	Sin diferencia
TSARX-SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>	<b>TSARX más preciso</b>
TSARX-Combinación	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	Sin diferencia	Sin diferencia

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

A partir de los resultados, previamente presentados, se puede afirmar que la mejor alternativa, entre las consideradas en este trabajo, para pronosticar el comportamiento de la variación trimestral de la tasa de desempleo en Reino Unido, es la combinación de pronósticos.

### 5.3.3. Índice de Precios al Consumidor - resultados

Para probar si existe evidencia de no linealidad entre la inflación mensual y la variación del *spread* en Reino Unido, se calcula la prueba de Tsay fijando ordenes autorregresivos máximos  $p = 2$  y  $P = 1$ , la prueba se calcula para valores  $d = 0, 1, 2, 3$  y en la tabla 5-41. No se encuentra evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula de linealidad.

**Tabla 5-41.:** Resultados prueba de no linealidad de Tsay para la inflación mensual - Reino Unido

d	$X_t = PIB, Z_t = spread$			
	0	1	2	3
Estadístico F	0.9480	1.1317	0.9870	0.7767
P-valor	0.5146	0.3375	0.4739	0.7005

En negrita se presentan los casos para los cuales la hipótesis nula de linealidad puede ser rechazada

A partir del criterio de información DIC, se determina que el modelo TSARX más adecuado para explicar el comportamiento de la inflación mensual en Reino Unido, es el de tres regímenes DIC (Tabla 5-42). Los parámetros estimados pueden ser consultados en el (ver Anexo A.33).

**Tabla 5-42.:** Criterios de información para la selección de número de regímenes en modelo TSARX inflación - *spread* Reino Unido

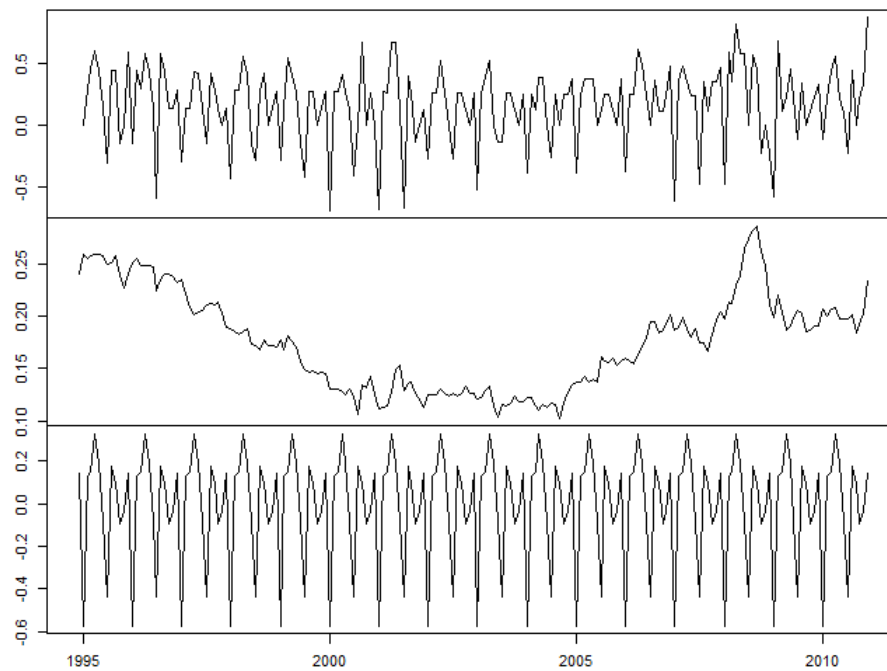
Criterio de información	Número de regímenes	
	$l = 2$	$l = 3$
DIC	-56.5519	<b>-71.3792</b>
NAIC	-3.1994	<b>-3.2251</b>

Los residuales generados por este modelo siguen una distribución normal y no presentan estructura de autocorrelación significativa. Además, el modelo está bien especificado y no hay problemas de heterocedasticidad (ver Anexo B.43).

Se ajusta un modelo TAR con tres regímenes y para capturar el componente estacional se fija el máximo orden autorregresivo en  $p = 26$  (ver Anexo A.34). Los residuales generados por este modelo presentan estructura de autocorrelación significativa y no se distribuyen normal. Además se observa un indicio de heterocedasticidad pero, la especificación del modelo es correcta (ver Anexo B.44).

Para el ajuste del modelo SAR se fijan los ordenes autorregresivos máximos  $p = 1$  y  $P = 1$  (ver Anexo A.35). El análisis de residuales indica que hay heterocedasticidad. Sin embargo, las pruebas son favorables para distribución normal, no se identifican errores de especificación, o de autocorrelación en los residuales (ver Anexo B.45).

Se ajusta un modelo de suavizamiento exponencial incluyendo los componentes de nivel y estacionalidad (ver Anexo A.36). En la Figura **5-23**, se muestran los componentes estimados para la inflación mensual de Reino Unido a partir del modelo ajustado.

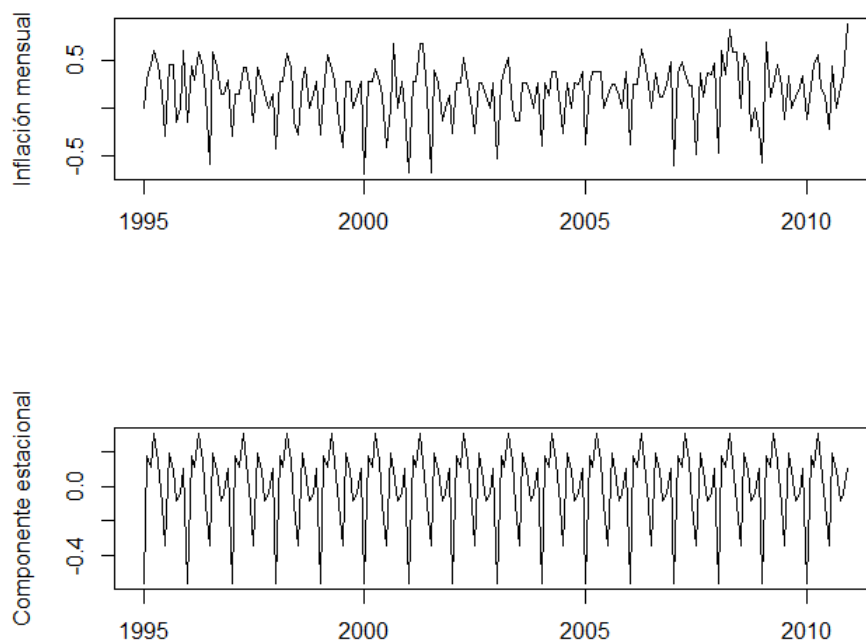


**Figura 5-23.:** Componentes del modelo de suavizamiento exponencial ajustado a la inflación mensual, Reino Unido. Serie original (arriba), nivel (en medio) y estacionalidad (abajo)

Los residuales generados por el modelo de suavizamiento exponencial no siguen una distribución normal, no se encuentra evidencia de autocorrelación o errores de especificación. Se observa evidencia de heterocedasticidad en los residuales (ver Anexo B.46).

Para el ajuste de las redes LSTM se define una ventana de trece observaciones pasadas y función de activación relu. Se ajustan 100 neuronas de acuerdo con los resultados del proceso de validación cruzada. Los residuales obtenidos presentan estructura de autocorrelación pero parece que la componente estacional fue explicada y no se observa heterocedasticidad (ver Anexo B.47).

La componente estacional de la serie de inflación mensual en Reino Unido se extrae ajustando un modelo de suavizamiento exponencial. En la Figura 5-24 se muestra la serie original y la componente estacional estimada.



**Figura 5-24.:** Serie original (arriba) y componente estacional estimada por suavizamiento exponencial (abajo)

A los datos desestacionalizados, se les ajusta una red LSTM para una ventana de tres observaciones pasadas y 100 neuronas. Los residuales obtenidos no exhiben autocorrelación o comportamientos estacionales ((ver Anexo B.48).

### Índice de Precios al Consumidor - Resumen bondad de ajuste

En la Tabla 5-43 se resumen los resultados de las pruebas de bondad de ajuste para los residuales de los modelos ajustados a la inflación mensual en Reino Unido. El modelo TSARX permite un correcto ajuste de la inflación mensual de Reino Unido, sin embargo, se observan algunos problemas en el ajuste de los modelos TAR (autocorrelación, normalidad y heterocedasticidad) y de suavizamiento exponencial (normalidad y heterocedasticidad).

**Tabla 5-43.:** Resumen de validación de supuestos para los modelos ajustados tasa de desempleo EE.UU.

Aspecto a validar	Modelo					
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE
Normalidad	0.6025	0.0262	0.6573	0.0047	0.7492	0.0599
Autocorrelación	0.5191	0.0022	0.1219	0.6462	0.0140	0.4335
Especificación	No	No	No	No	No	No
Heterocedasticidad	No	Sí	Sí	Sí	No	No

Para las filas de normalidad y autocorrelación se presentan los valores p de las pruebas de Jarque-Bera y Ljung-Box (evaluada en el retardo equivalente a dos años y medio para cada serie). Para las filas de especificación y heterocedasticidad se indica “Sí”, en caso de presentar, respectivamente, errores de especificación o heterocedasticidad y “No”, en caso contrario. Los errores de especificación y la heterocedasticidad son identificados a partir de los gráficos CUSUM y CUSUMSQ. Para las redes neuronales, se analiza el comportamiento de los residuales a través de gráficos.

### Índice de Precios al Consumidor - Comparación de pronósticos

En la Tabla 5-44 se presenta el error cuadrático medio (ECM) de los pronósticos generados a partir los modelos considerados, en negrita se presentan los casos en los cuales se obtiene menor ECM para cada uno de los horizontes de pronóstico considerados. Las redes LSTM con ajuste por estacionalidad generan pronósticos más precisos en todos los casos, a excepción de un paso adelante, donde la combinación de pronósticos parece ser la mejor alternativa. No obstante, a un paso, el modelo TSARX es más preciso que las redes LSTM y el modelo SAR; a dos pasos, el modelo TSARX resulta más preciso que los modelos TAR y SAR; y a tres y cuatro pasos es más preciso que el modelo SAR.

**Tabla 5-44.:** Error cuadrático medio de los pronósticos calculados para la inflación mensual - Reino Unido

Horizonte de pronósticos	ECM pronósticos inflación - Reino Unido						
	TSARX	TAR	SAR	SE	LSTM	LSTM + SE	Combinación
Un paso	0.0329	0.0318	0.0333	0.0269	0.0408	0.0277	<b>0.0253</b>
Dos pasos	0.0516	0.0558	0.0565	0.0462	0.0371	<b>0.0295</b>	0.0361
Tres pasos	0.0379	0.0375	0.0401	0.0291	0.0355	<b>0.0274</b>	0.0291
Cuatro pasos	0.0353	0.0343	0.0388	0.0246	0.0297	<b>0.0218</b>	0.0246

En negrita se presentan los errores cuadráticos medios mínimos entre los modelos ajustados para cada horizonte de pronóstico.

A partir de los resultados de la prueba de Diebold - Mariano (tabla 5-45), se puede indicar que el modelo TSARX no genera pronósticos más precisos que los modelos considerados en el presente trabajo y de hecho, resulta menos preciso que las redes LSTM o la combinación

de pronósticos cuando se busca pronosticar el comportamiento de la inflación mensual de Reino Unido.

**Tabla 5-45.:** Resultados prueba Diebold - Mariano para inflación mensual - Reino Unido

Modelos comparados	Horizonte de pronósticos			
	Un paso	Dos pasos	Tres paso	Cuatro pasos
TSARX-TAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SAR	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-SE	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-LSTM	Sin diferencia	<b>TSARX más preciso</b>	<b>LSTM más preciso</b>	Sin diferencia
TSARX-LSTM + SE	Sin diferencia	<b>LSTM más preciso</b>	Sin diferencia	Sin diferencia
TSARX-Combinación	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>	<b>Comb. más precisa</b>

En negrita se presentan las comparaciones para las cuales se encontraron diferencias significativas entre los pronósticos por cada pareja de modelos.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se ajustaron modelos TSARX, TAR, SAR, SE y redes LSTM al Producto Interno Bruto (Índice de Seguimiento a la Economía para el caso colombiano), la tasa de desempleo y el Índice de Precios al Consumidor de Colombia, Estados Unidos y Reino Unido. La especificación de los modelos partió del análisis descriptivo de cada una de las series consideradas.

A partir de los modelos ajustados se calcularon pronósticos fijando horizontes de pronóstico a uno, dos, tres y cuatro pasos hacia adelante y se comparó su precisión a partir del cálculo del error cuadrático medio y la prueba de Diebold - Mariano, incluyendo cálculos para los pronósticos calculados a partir de la combinación lineal sugerida por Bates y Granger (1969).

La aplicación de los modelos TSARX a series de tipo económico permite explicar el comportamiento de las variables incluyendo su componente estacional y estimando modelos más parsimoniosos que si se ajustara por ejemplo un modelo TAR de alto orden o una red neuronal. Adicionalmente, ajustar modelos que capturen el comportamiento estacional de las series de tiempo facilitaría la toma de decisiones en el corto plazo teniendo en cuenta el comportamiento observado de la variable, es decir, sin ajustes previos para corregir por patrones estacionales.

Teniendo en cuenta que el objetivo es comparar la precisión del modelo TSARX, el análisis de los errores cuadráticos medios de los pronósticos, permite afirmar que este modelo genera pronósticos más precisos que por lo menos uno de los modelos que se usaron para comparar en este trabajo y para todos los horizontes de pronóstico probados, a excepción de los pronósticos calculados para la variación de la tasa de desempleo estadounidense a un paso, donde resultó el modelo menos preciso según los ECM calculados. Sin embargo, se vio que a pesar que en la mayoría de casos se identificó que el TSARX genera pronósticos más precisos que por lo menos uno de los demás modelos considerados, no es el que menor ECM genera entre el conjunto en todos los casos.

Los resultados de las pruebas de Diebold - Mariano indican que los pronósticos de las series colombianas, calculados a partir del ajuste de modelos TSARX son por lo menos, iguales a los producidos al ajustar los demás modelos considerados, destacando los casos de la variación de la tasa de desempleo y la inflación mensual, donde se podría recomendar el uso de

este modelo pues sus pronósticos resultan significativamente mejores que los producidos por varios de los modelos considerados.

Para las series de Estados Unidos consideradas, se obtienen resultados mixtos pues el modelo TSARX resulta casi igual de preciso para el análisis del PIB, pero dependiendo del modelo con el que se compare y el tamaño del horizonte de pronósticos, puede ser más o menos preciso para los pronósticos de la tasa de desempleo y la inflación mensual. En estos dos últimos casos, la combinación de pronósticos parece ser la mejor opción.

Los resultados de la comparación de pronósticos para las series de Reino Unido, sugieren que el modelo TSARX es la mejor alternativa para pronosticar el PIB y la tasa de desempleo, pero para la inflación, se recomienda el uso de combinación de pronósticos.

A partir de lo anterior, se puede concluir que el modelo TSARX es una buena alternativa para el pronóstico de series de tiempo económicas. Sin embargo, no representa siempre la mejor opción, por lo que se podría recomendar ajustar simultáneamente otros modelos para tener mayor certeza en el comportamiento futuro que exhibirá la variable de interés. Adicionalmente, es necesario tener en cuenta que el cálculo de pronósticos a partir del ajuste de modelos TSARX y TAR, implica un coste computacional relevante<sup>1</sup> en comparación con modelos lineales u otros, por lo que si bien los resultados de este trabajo indican que el modelo TSARX genera pronósticos por lo menos igual de precisos que los modelos considerados, el coste computacional requerido podría implicar que la precisión obtenida no justifique el uso de este tipo de modelos.

Un resultado interesante, es que no se encuentran diferencias significativas (salvo dos casos puntuales) entre los pronósticos calculados a partir de los modelos TSARX y TAR, lo cual indica que la inclusión de parámetros de orden alto en la estimación de modelos TAR, se asemeja, en pronósticos, a la precisión de los obtenidos con el ajuste de un modelo TSARX. Sin embargo, sí se observan diferencias en la validación del ajuste, pues en este caso, el modelo TSARX permite explicar de una mejor forma la autocorrelación de las series y presenta menos problemas de heterocedasticidad.

Además de lo anterior, si bien las redes LSTM se pueden considerar como una alternativa para el cálculo de pronósticos de series de tiempo económicas, los resultados del presente trabajo no justifican el uso de estas para las variables consideradas, pues su complejidad no se ve compensada por una ganancia significativa en la precisión de los pronósticos, contra modelos menos complejos (y hasta lineales).

---

<sup>1</sup>El ajuste y cálculo de pronósticos en modelos TSARX tardó aproximadamente 6 horas para cada variable. Para el ajuste de los modelos se usó una *workstation* con procesador Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1660 v4 3.20GHz 3.20 GHz y 128Gb de memoria RAM.

Si bien, como fue previamente mencionado, el modelo TSARX debe ser tenido en cuenta para el cálculo de pronósticos de series económicas debido a la evidencia encontrada sobre su precisión comparada con los modelos considerados en este trabajo, se recomienda un trabajo posterior en el cual se realice la comparación de pronósticos con otros modelos no lineales, así como analizar su precisión una vez se incluyan variables exógenas como explicativas y emplear métodos de remuestreo o permutaciones de forma complementaria para garantizar el cumplimiento del supuesto distribucional de las pruebas de Diebold-Mariano.

# A. Anexo: Coeficientes estimados para los modelos considerados

En este anexo se presentan los coeficientes estimados para cada uno de los modelos considerados el trabajo. Los coeficientes presentados son los que se obtienen posterior al proceso de depuración, es decir, que solo se presentan los coeficientes que resultan estadísticamente significativos para explicar el comportamiento de cada variable.

## A.1. ISE - modelo TSARX Colombia

$$X_t = \begin{cases} -0.7161X_{t-1} - 0.3690X_{t-2} + 0.5710X_{t-12} + 0.4089X_{t-13} \\ +0.2107X_{t-14} + 0.4292X_{t-24} + 0.3074X_{t-25} + 0.1584X_{t-26} \\ +\sqrt{1.5980}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \leq 0.6579 \\ 0.8241X_{t-12} + \sqrt{5.3423}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} > 0.6579 \end{cases}$$

## A.2. ISE - modelo TAR Colombia

$$X_t = \begin{cases} -0.7103X_{t-1} - 0.3702X_{t-2} + 0.5721X_{t-12} + 0.3754X_{t-13} \\ +0.1577X_{t-14} + 0.4251X_{t-24} + 0.3463X_{t-25} + 0.1919X_{t-26} \\ +\sqrt{1.6342}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \leq 0.6676 \\ 0.7984X_{t-12} + \sqrt{5.5112}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} > 0.6676 \end{cases}$$

## A.3. ISE - modelo SAR Colombia

$$X_t = -0.6900X_{t-1} - 0.2907X_{t-2} + 0.5418X_{t-12} + 0.3738X_{t-13} \\ + 0.1575X_{t-14} + 0.4412X_{t-24} + 0.3044X_{t-25} + 0.1283X_{t-26} + \sqrt{1.655}\epsilon_t$$

## A.4. ISE - modelo SE Colombia

$$\hat{\alpha} = 0.0001; \quad \hat{\gamma} = 0.0001$$

## A.5. Tasa de desempleo - modelo TSARX Colombia

$$X_t = \begin{cases} -0.4959X_{t-1} - 0.2859X_{t-2} + 0.5202X_{t-12} + 0.2580X_{t-13} \\ +0.1487X_{t-14} + 0.4153X_{t-24} + 0.2059X_{t-25} + 0.1187X_{t-26} \\ +\sqrt{0.2646}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \leq 1.3990 \\ 0.8445X_{t-12} + \sqrt{0.3003}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} > 1.3990 \end{cases}$$

## A.6. Tasa de desempleo - modelo TAR Colombia

$$X_t = \begin{cases} -0.4985X_{t-1} - 0.2748X_{t-2} + 0.5271X_{t-12} + 0.3199X_{t-13} \\ +0.2455X_{t-14} + 0.3986X_{t-24} + 0.1773X_{t-25} + \sqrt{0.2662}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \leq 1.4250 \\ 0.8000X_{t-12} + \sqrt{0.2914}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} > 1.4250 \end{cases}$$

## A.7. Tasa de desempleo - modelo SAR Colombia

$$X_t = -0.4484X_{t-1} - 0.3137X_{t-2} + 0.5201X_{t-12} + 0.2332X_{t-13} \\ + 0.1631X_{t-14} + 0.3938X_{t-24} + 0.1766X_{t-25} + 0.1235X_{t-26} + \sqrt{0.273}\epsilon_t$$

## A.8. Tasa de desempleo - modelo SE Colombia

$$\hat{\alpha} = 0.0001; \quad \hat{\gamma} = 0.0001$$

### A.9. Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX Colombia

$$X_t = \begin{cases} 0.5852X_{t-1} + 0.1662X_{t-12} - 0.0973X_{t-13} + \sqrt{0.0398}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \leq 5.0177 \\ 0.1992 + 0.8199X_{t-1} + 0.5511X_{t-12} - 0.4518X_{t-13} + \sqrt{0.0462}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} > 5.0177 \end{cases}$$

### A.10. Índice de Precios al Consumidor- modelo TAR Colombia

$$X_t = \begin{cases} 0.0622 + 0.6051X_{t-1} + 0.3583X_{t-12} - 0.2079X_{t-13} + \sqrt{0.0486}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \leq 6.8690 \\ 0.9398X_{t-1} + \sqrt{0.0601}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} > 6.8690 \end{cases}$$

### A.11. Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR Colombia

$$X_t = 0.6926X_{t-1} + 0.3983X_{t-12} - 0.2759X_{t-13} + 0.2552X_{t-24} - 0.1768X_{t-25} + \sqrt{0.0488}\epsilon_t$$

### A.12. Índice de Precios al Consumidor - modelo SE Colombia

$$\hat{\alpha} = 0.4087; \quad \hat{\gamma} = 0.0001$$

### A.13. Producto Interno Bruto - modelo TSARX EE.UU.

$$X_t = \begin{cases} 0.9320X_{t-4} + \sqrt{0.5751}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \leq 5.4182 \\ 0.6007X_{t-1} + 1.0094X_{t-4} - 0.6063X_{t-5} + \sqrt{1.0244}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} > 5.4182 \end{cases}$$

**A.14. Producto Interno Bruto - modelo TAR EE.UU.**

$$X_t = \begin{cases} 0.2128X_{t-1} + 0.9375X_{t-4} - 0.2504X_{t-5} + \sqrt{0.7024}\epsilon_t & \text{si } Z_t \leq 67.5999 \\ 0.9600X_{t-4} + \sqrt{2.3175}\epsilon_t & \text{si } Z_t > 67.5999 \end{cases}$$

**A.15. Producto Interno Bruto - modelo SAR EE.UU.**

$$X_t = 0.1798X_{t-1} + 0.2070X_{t-2} + 0.6501X_{t-4} - 0.1169X_{t-5} - 0.1346X_{t-6} \\ + 0.3234X_{t-8} + 0.0581X_{t-9} + 0.0669X_{t-10} + \sqrt{0.6444}\epsilon_t$$

**A.16. Producto Interno Bruto - modelo SE EE.UU.**

$$\hat{\gamma} = 0.2003; \quad \hat{\alpha} = 0.2233$$

**A.17. Tasa de Desempleo - modelo TSARX EE.UU.**

$$X_t = \begin{cases} 1.3089X_{t-1} + 0.9826X_{t-4} - 1.2861X_{t-5} + \sqrt{0.3393}\epsilon_t & \text{si } Z_t \leq -0.2942 \\ 0.3961X_{t-1} - 0.1702X_{t-2} + 0.8651X_{t-4} - 0.3427X_{t-5} \\ + 0.1472X_{t-6} + \sqrt{0.0849}\epsilon_t & \text{si } Z_t > -0.2942 \text{ y } Z_t < 1.9545 \\ 1.1887X_{t-1} + 0.7816X_{t-4} - 0.9291X_{t-5} + \sqrt{0.1964}\epsilon_t & \text{si } Z_t \geq 1.9545 \end{cases}$$

**A.18. Tasa de Desempleo - modelo TAR EE.UU.**

$$X_t = \begin{cases} 1.4267X_{t-1} + 0.7218X_{t-4} - 1.5149X_{t-5} \\ + \sqrt{0.3404}\epsilon_t & \text{si } Z_t \leq -0.2938 \\ 0.1849X_{t-1} + 0.6839X_{t-4} - 0.3731X_{t-5} \\ + \sqrt{0.0682}\epsilon_t & \text{si } Z_t > -0.2938 \text{ y } Z_t < 1.9416 \\ -0.6455X_{t-5} + \sqrt{0.5368}\epsilon_t & \text{si } Z_t > 1.9416 \end{cases}$$

**A.19. Tasa de Desempleo - modelo SAR EE.UU.**

$$X_t = 0.5548X_{t-1} + 0.8720X_{t-4} - 0.4838X_{t-5} + \sqrt{0.1594}$$

**A.20. Tasa de Desempleo - modelo SE EE.UU.**

$$\hat{\gamma} = 0.4762; \quad \hat{\alpha} = 0.0001$$

**A.21. Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX EE.UU.**

$$X_t = \begin{cases} 0.1278 + 0.4080X_{t-1} - 0.2134X_{t-2} + 0.2743X_{t-24} - 0.1119X_{t-25} \\ + 0.0585X_{t-26} + \sqrt{0.0595}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \leq 0.2731 \\ 0.9175X_{t-1} + 0.4990X_{t-12} - 0.4578X_{t-13} + \sqrt{0.1217}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} > 0.2731 \end{cases}$$

**A.22. Índice de Precios al Consumidor - modelo TAR EE.UU.**

$$X_t = \begin{cases} 0.5992X_{t-1} + 0.2793X_{t-25} + \sqrt{0.0801}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \leq -0.0643 \\ 0.1674 + 0.1502X_{t-1} + 0.2257X_{t-12} + \sqrt{0.0636}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} > -0.0643 \end{cases}$$

**A.23. Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR EE.UU.**

$$X_t = 0.2316 + 0.5072X_{t-1} - 0.1947X_{t-2} + 0.1446X_{t-12} - 0.0733X_{t-13} + 0.0282X_{t-14} \\ + 0.2330X_{t-24} - 0.1182X_{t-25} + 0.0454X_{t-26} + \sqrt{0.0705}$$

## A.24. Índice de Precios al Consumidor - modelo SE EE.UU.

$$\hat{\gamma} = 0.0001 \quad \hat{\alpha} = 0.0439$$

## A.25. Prducto Interno Bruto - modelo TSARX Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} -0.7972X_{t-1} - 0.4771X_{t-2} + 0.4141X_{t-4} \\ +0.3301X_{t-5} + 0.1976X_{t-6} + 0.4391X_{t-8} \\ +0.3501X_{t-9} + 0.2095X_{t-10} + \sqrt{1.6857}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \leq 0.6074 \\ 0.9743X_{t-4} + \sqrt{1.8259}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} > 0.6074 \text{ y } Z_{t-3} < 1.2805 \\ 0.7199X_{t-4} + \sqrt{13.0224}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \geq 1.2805 \end{cases}$$

## A.26. Prducto Interno Bruto - modelo TAR Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} -0.7908X_{t-1} - 0.4772X_{t-2} + 0.3798X_{t-4} \\ +0.3019X_{t-5} + 0.1382X_{t-6} + 0.4193X_{t-8} \\ +0.4392X_{t-9} + 0.2684X_{t-10} + \sqrt{1.6388}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \leq 0.6600 \\ 0.8993X_{t-4} + \sqrt{2.2371}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} > 0.6600 \text{ y } Z_{t-3} < 1.2755 \\ 0.7882X_{t-4} + \sqrt{12.8390}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \geq 1.2755 \end{cases}$$

## A.27. Prducto Interno Bruto - modelo SAR Reino Unido

$$X_t = -0.7127X_{t-1} - 0.3689X_{t-2} + 0.4453X_{t-4} + 0.3174X_{t-5} \\ + 0.1643X_{t-6} + 0.4551X_{t-8} + 0.3243X_{t-9} + 0.1679X_{t-10} + \sqrt{2.439}$$

## A.28. Prducto Interno Bruto - modelo SE Reino Unido

$$\hat{\gamma} = 0.0001 \quad \hat{\alpha} = 0.3465$$

### A.29. Tasa de Desempleo - modelo TSARX Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} -0.2312 + 0.7008X_{t-1} + 0.8503X_{t-4} \\ -0.5959X_{t-5} + \sqrt{0.0404}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \leq -0.0167 \\ 0.1247 + 0.8210X_{t-1} + 0.6639X_{t-4} \\ -0.5451X_{t-5} + 0.2557X_{t-8} - 0.2099X_{t-9} \\ +\sqrt{0.0256}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} > -0.0167 \text{ y } Z_{t-3} < 0.8782 \\ 0.1975X_{t-1} + 0.5733X_{t-4} - 0.1132X_{t-5} + \sqrt{0.0384}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-3} \geq 0.8782 \end{cases}$$

### A.30. Tasa de Desempleo - modelo TAR Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} 0.8059 + 1.4723X_{t-4} + \sqrt{0.0800}\epsilon_t & \text{si } Z_t \leq -0.2572 \\ 0.3194X_{t-1} + 0.6429X_{t-4} - 0.4804X_{t-5} \\ +\sqrt{0.0249}\epsilon_t & \text{si } Z_t > -0.0249 \text{ y } Z_t < 1.2740 \\ 0.9982X_{t-1} + 0.7806X_{t-4} + \sqrt{0.0411}\epsilon_t & \text{si } Z_t \geq 1.2740 \end{cases}$$

### A.31. Tasa de Desempleo - modelo SAR Reino Unido

$$X_t = 0.7640X_{t-1} + 0.5144X_{t-4} - 0.3930X_{t-5} + 0.3445X_{t-8} - 0.2632X_{t-9} + \sqrt{0.0362}\epsilon_t$$

### A.32. Tasa de Desempleo - modelo SE Reino Unido

$$\hat{\gamma} = 0.7687 \quad \hat{\alpha} = 0.2313$$

### A.33. Índice de Precios al Consumidor - modelo TSARX Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} 0.0819 + 0.2330X_{t-2} + 0.7478X_{t-12} - 0.1742X_{t-14} \\ + \sqrt{0.0300}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \leq -0.0919 \\ -0.5142X_{t-2} + 0.5889X_{t-12} - 0.3028X_{t-14} \\ + \sqrt{0.0314}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} > -0.0919 \text{ y } Z_{t-1} < 0.0398 \\ 0.1120 + 0.2650X_{t-1} + 0.7335X_{t-12} - 0.1944X_{t-13} \\ + \sqrt{0.0576}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \geq 0.0398 \end{cases}$$

### A.34. Índice de Precios al Consumidor - modelo TAR Reino Unido

$$X_t = \begin{cases} 0.7841X_{t-12} + \sqrt{0.0304}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \leq -0.0877 \\ 0.5376X_{t-12} + 0.2683X_{t-18} + \sqrt{0.0418}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} > -0.0877 \text{ y } Z_{t-1} < 0.2188 \\ 0.3285 + 0.7227X_{t-12} - 0.4251X_{t-13} + \sqrt{0.0580}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \geq 0.2188 \end{cases}$$

### A.35. Índice de Precios al Consumidor - modelo SAR Reino Unido

$$X_t = 0.1569X_{t-1} + 0.7838X_{t-12} - 0.1230X_{t-13} + \sqrt{0.0467}\epsilon_t$$

### A.36. Índice de Precios al Consumidor - modelo SE Reino Unido

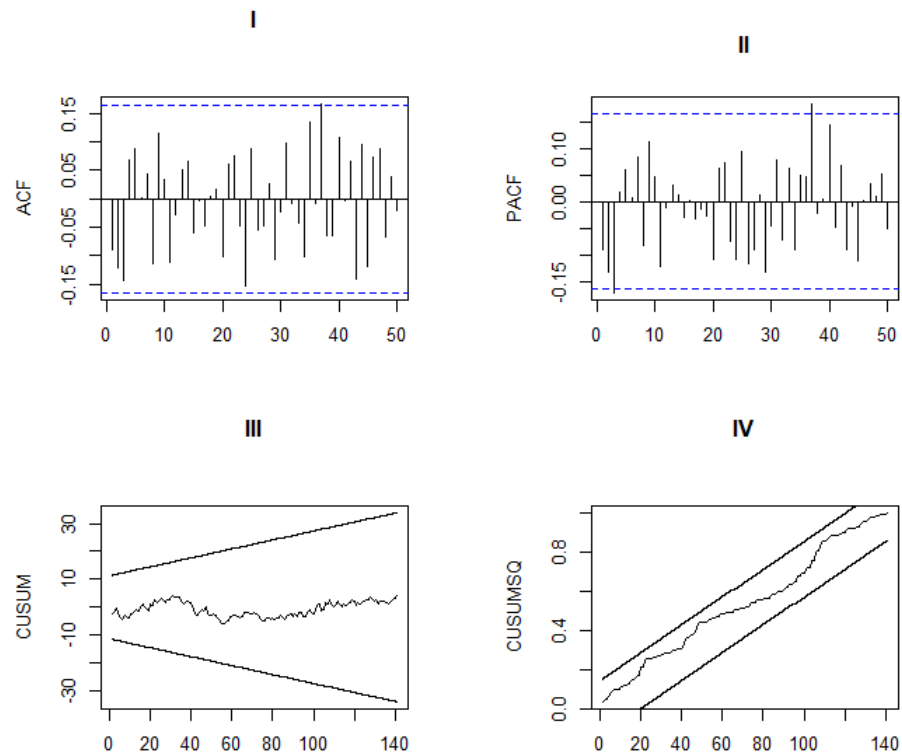
$$\hat{\gamma} = 0.0001; \quad \hat{\alpha} = 0.0594$$

## **B. Anexo: Pruebas de validación de los modelos ajustados**

En esta sección se presentan los gráficos de residuales de los modelos ajustados (a excepción del ISE para Colombia que fue presentado en el cuerpo del documento). Los valores p de las pruebas de Ljung-Box y Jarque-Bera se presentan en las tablas de resumen incluidas en el capítulo de resultado para cada variable.

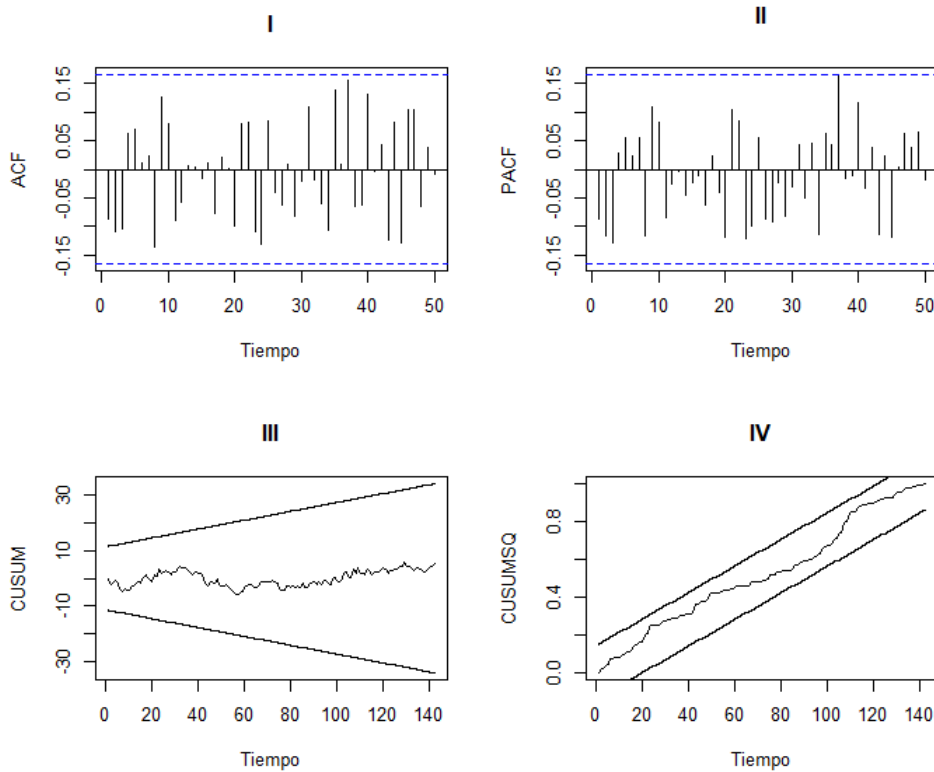
Para el ajuste de los modelos TSARX, TAR, SAR y SE, se presentan los autocorrelogramas y las gráficas CUSUM y CUSUMSQ. Para el ajuste de las redes neuronales, se presenta la gráfica de los residuales y los autocorrelogramas.

## B.1. Modelo TSARX - TD Colombia



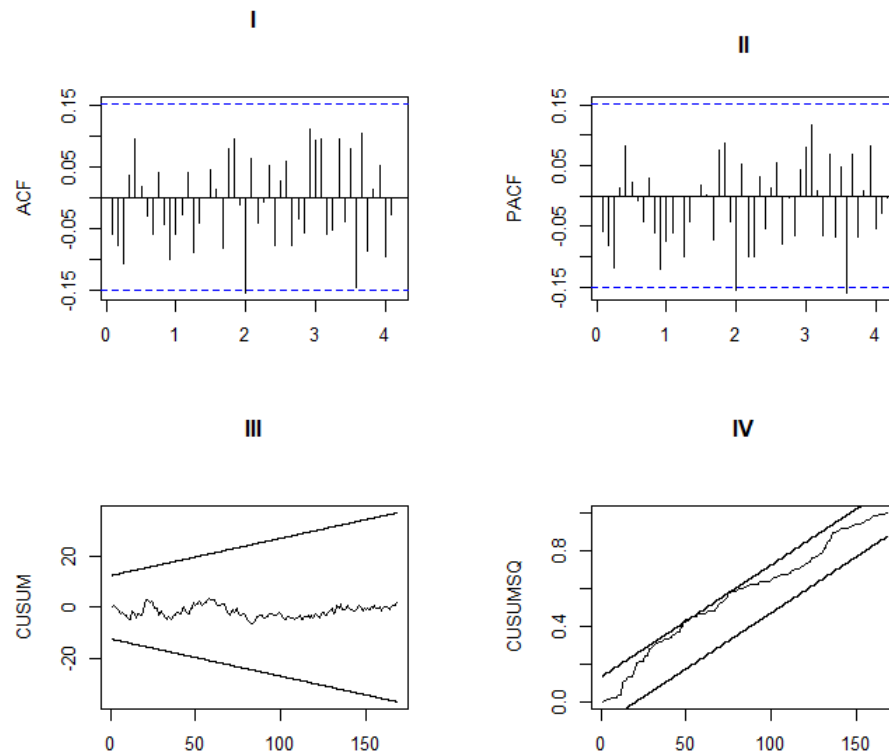
**Figura B-1.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la tasa de desempleo - ISE - Colombia

## B.2. Modelo TAR - TD Colombia



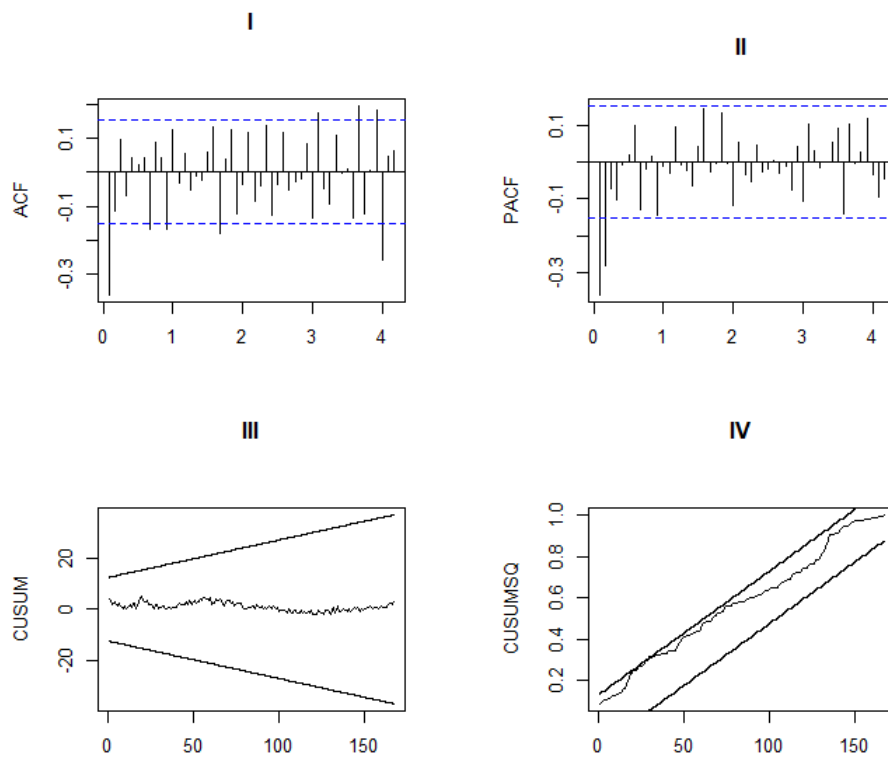
**Figura B-2.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la tasa de desempleo - ISE - Colombia

### B.3. Modelo SAR - TD Colombia



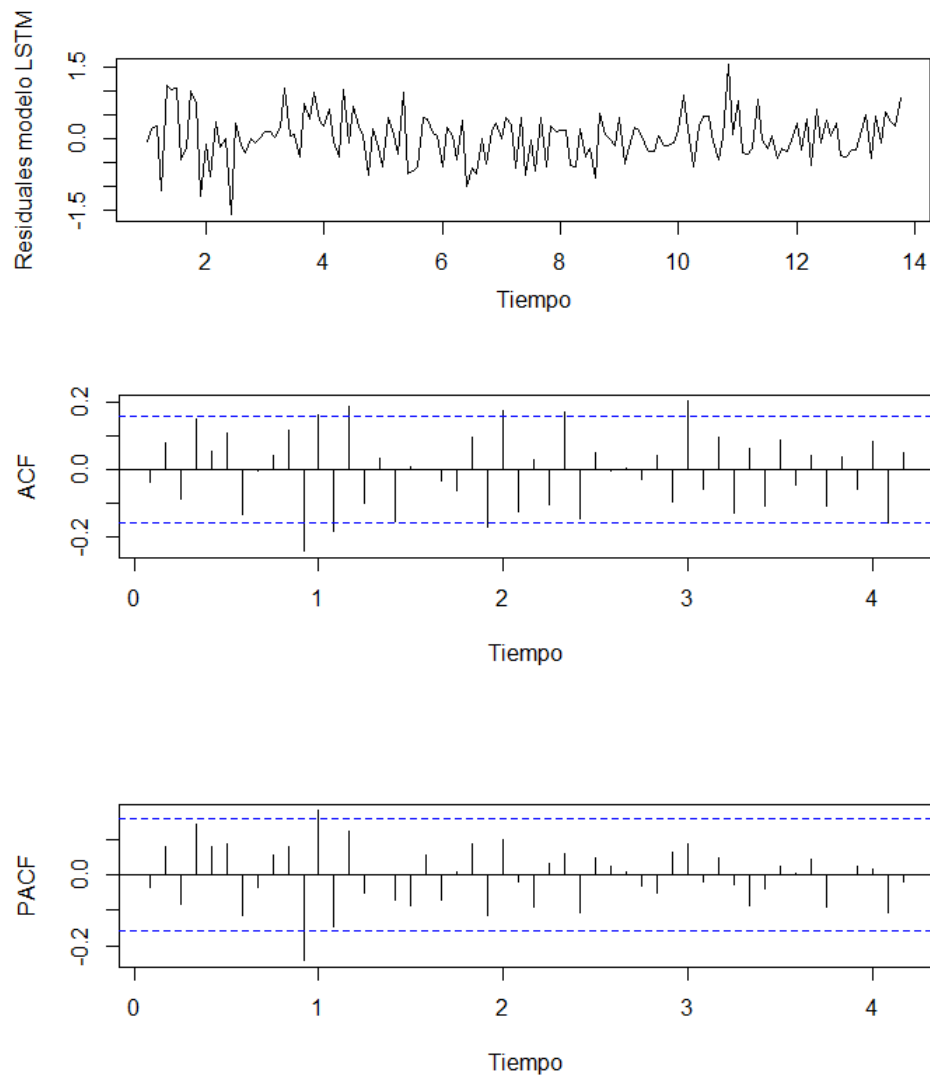
**Figura B-3.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado a la tasa de desempleo - Colombia

## B.4. Modelo SE - TD Colombia



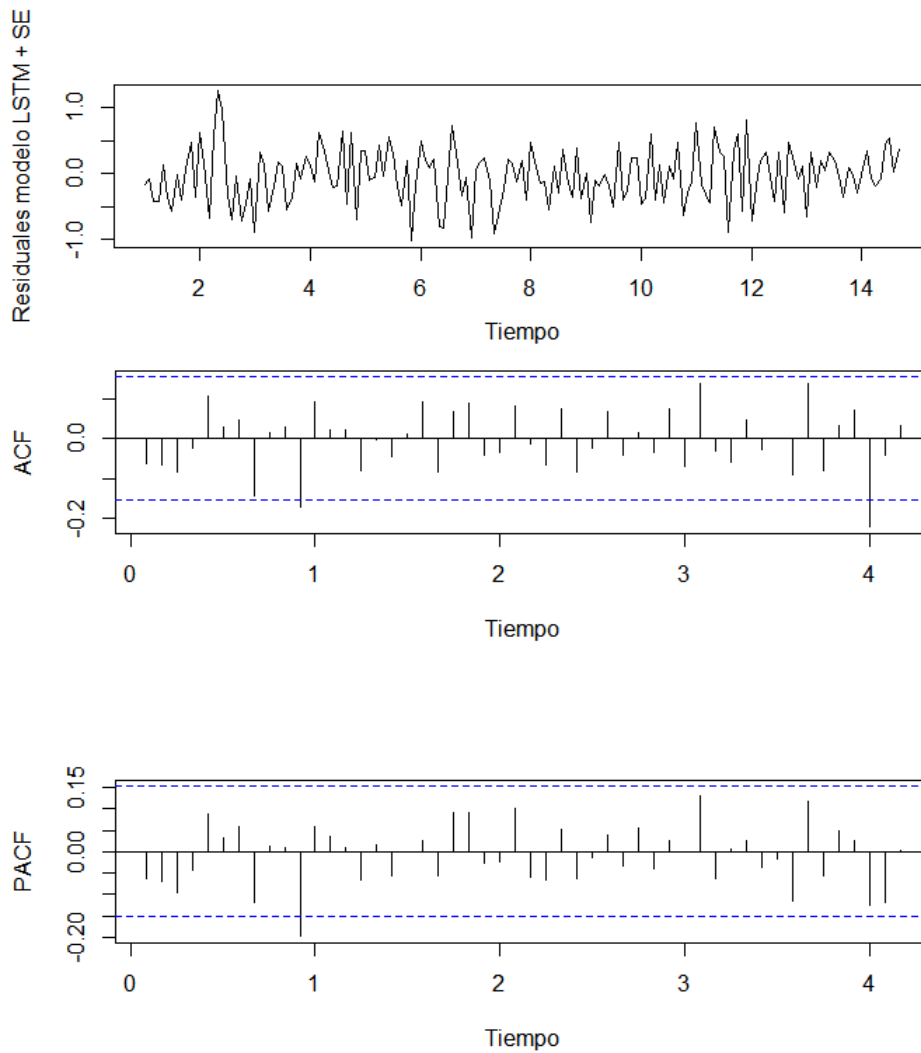
**Figura B-4.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado a la tasa de desempleo - Colombia

## B.5. Redes LSTM - TD Colombia



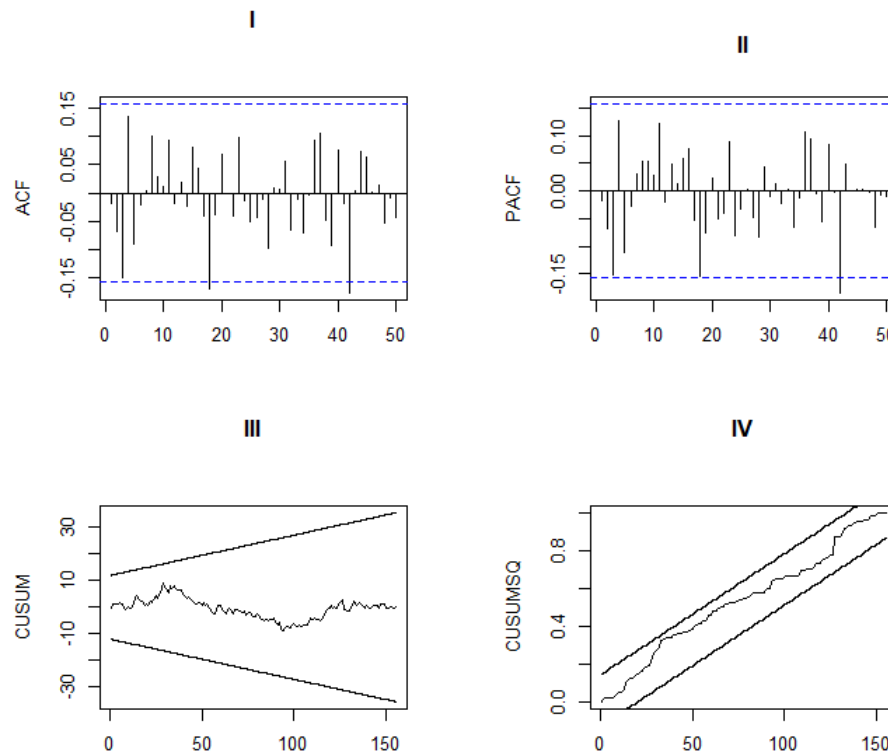
**Figura B-5.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) a la tasa de desempleo - Colombia

## B.6. Redes LSTM - TD desestacionalizada Colombia



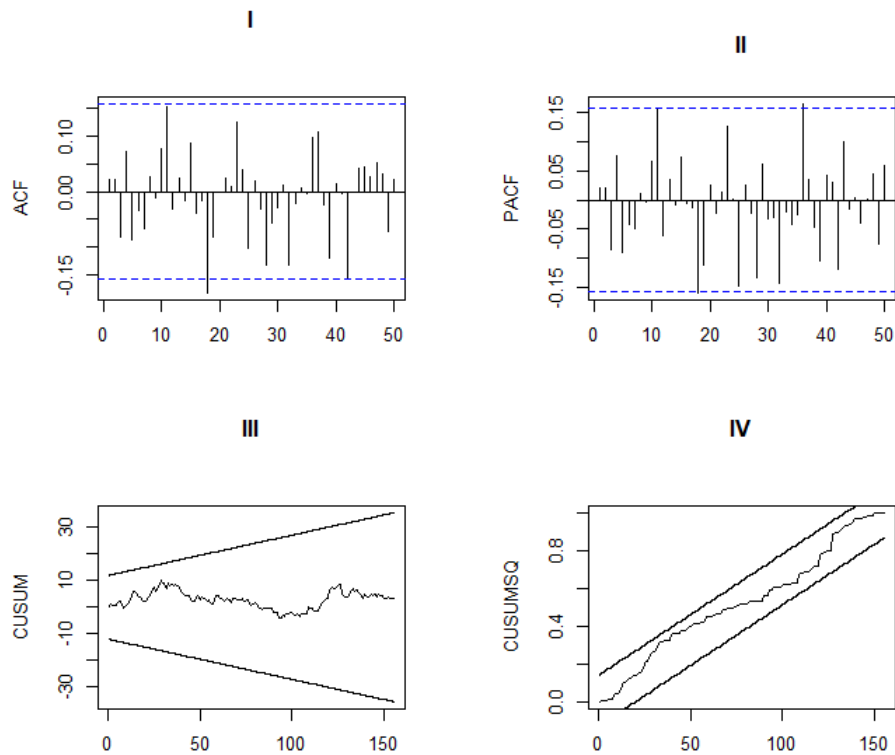
**Figura B-6.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la tasa de desempleo desestacionalizada - Colombia

## B.7. Modelo TSARX - IPC Colombia



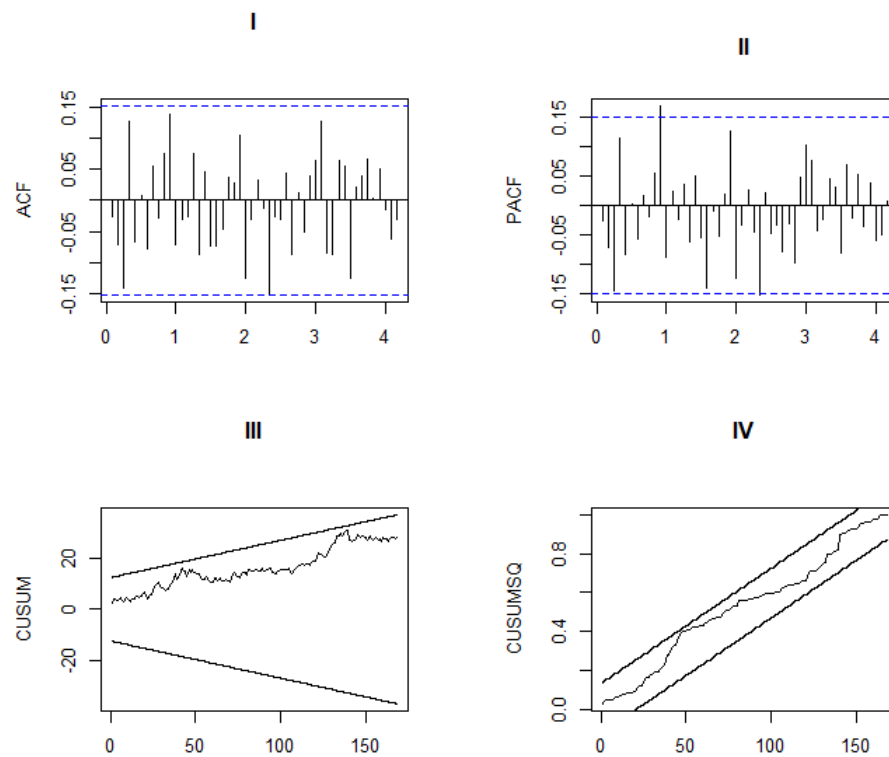
**Figura B-7.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la inflación mensual - M1 - Colombia

## B.8. Modelo TAR - IPC Colombia



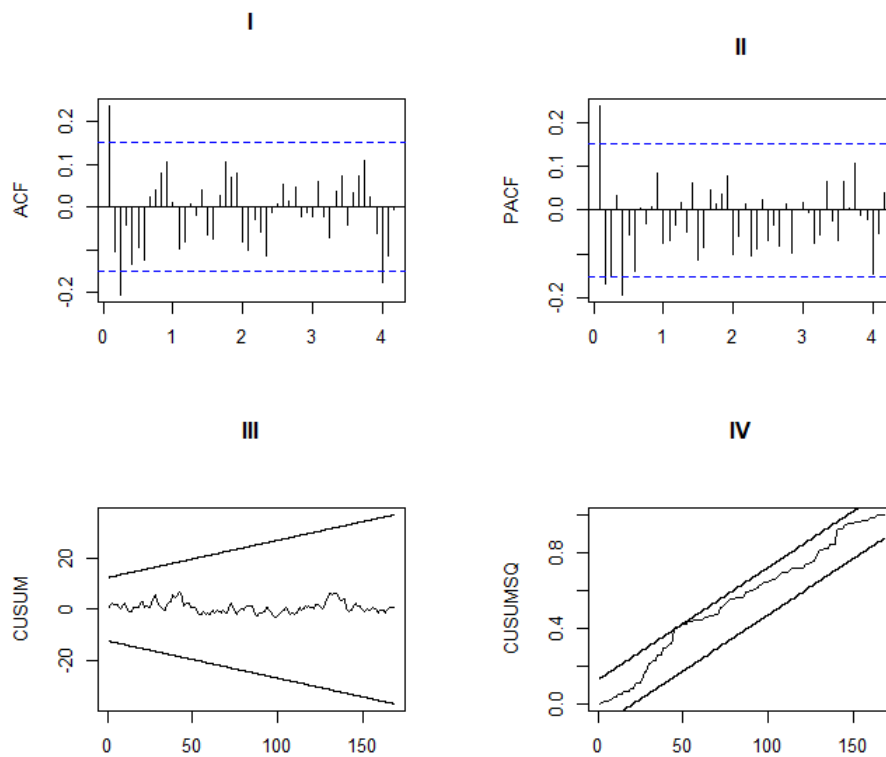
**Figura B-8.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la inflación mensual - M1 - Colombia

## B.9. Modelo SAR - IPC Colombia



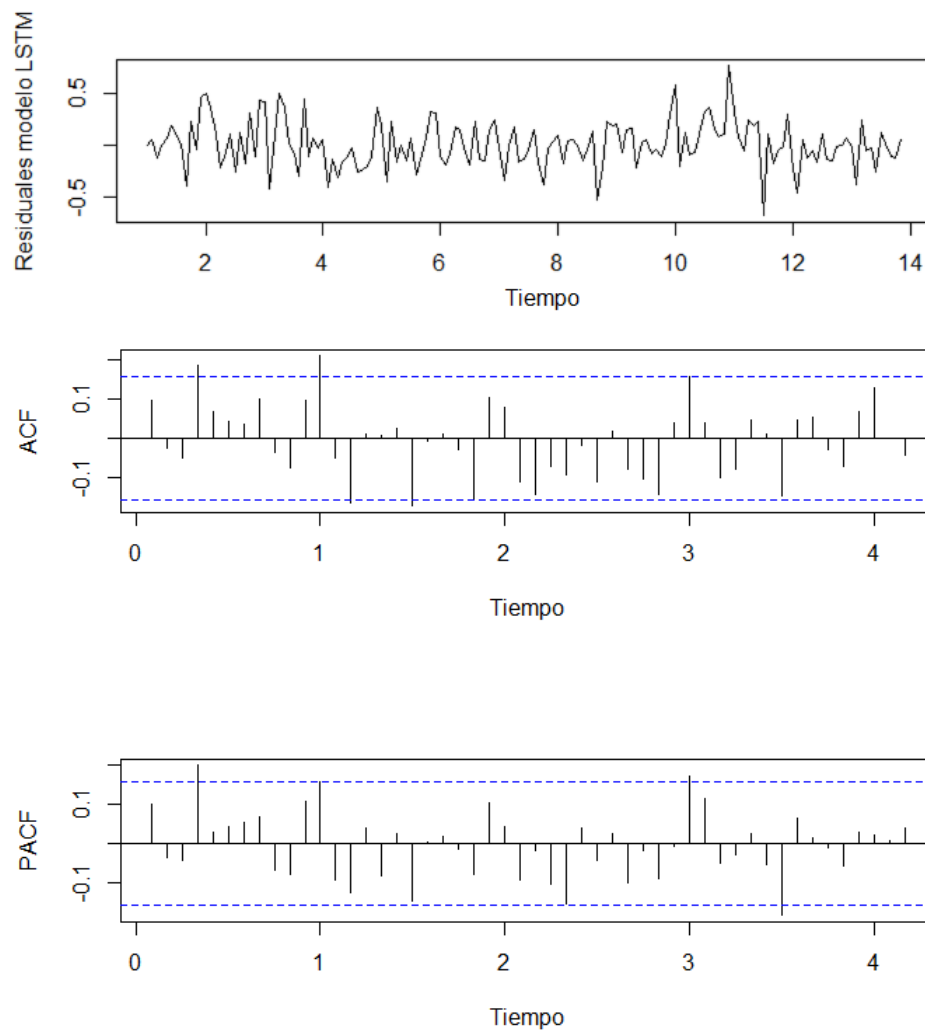
**Figura B-9.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado a la inflación mensual - Colombia

## B.10. Modelo SE - IPC Colombia



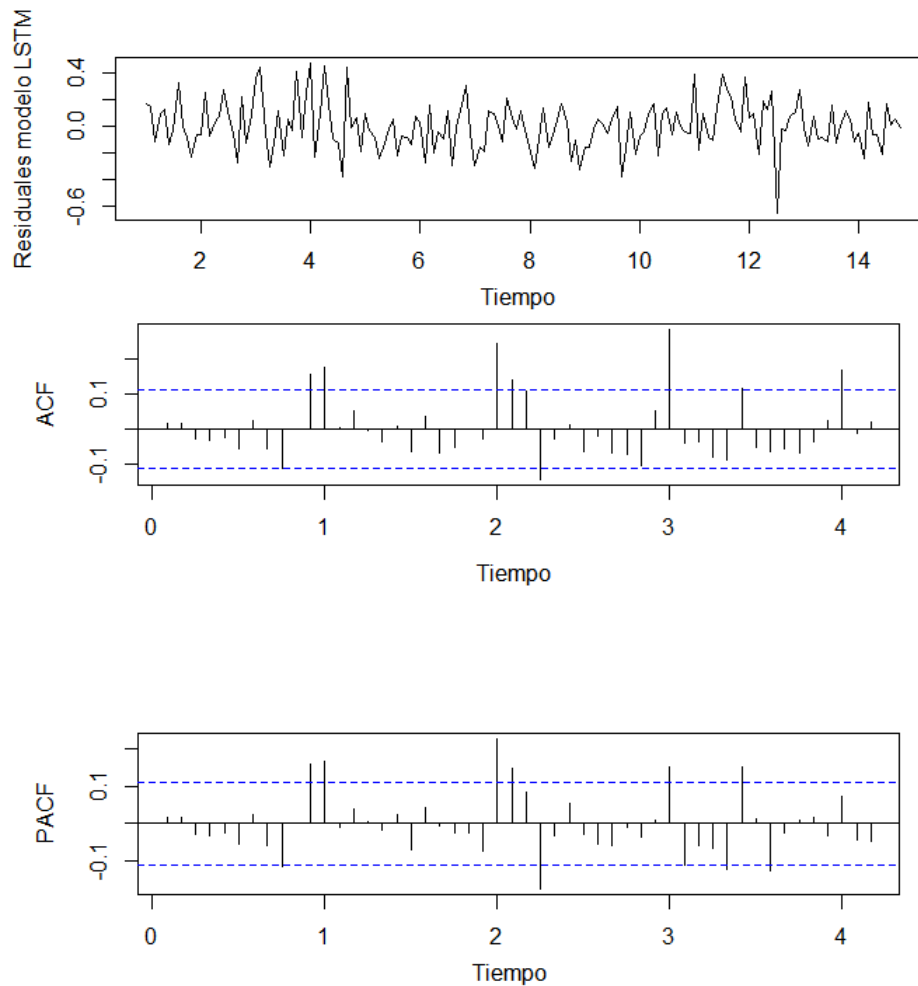
**Figura B-10.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado a la inflación mensual - Colombia

## B.11. Redes LSTM - IPC Colombia

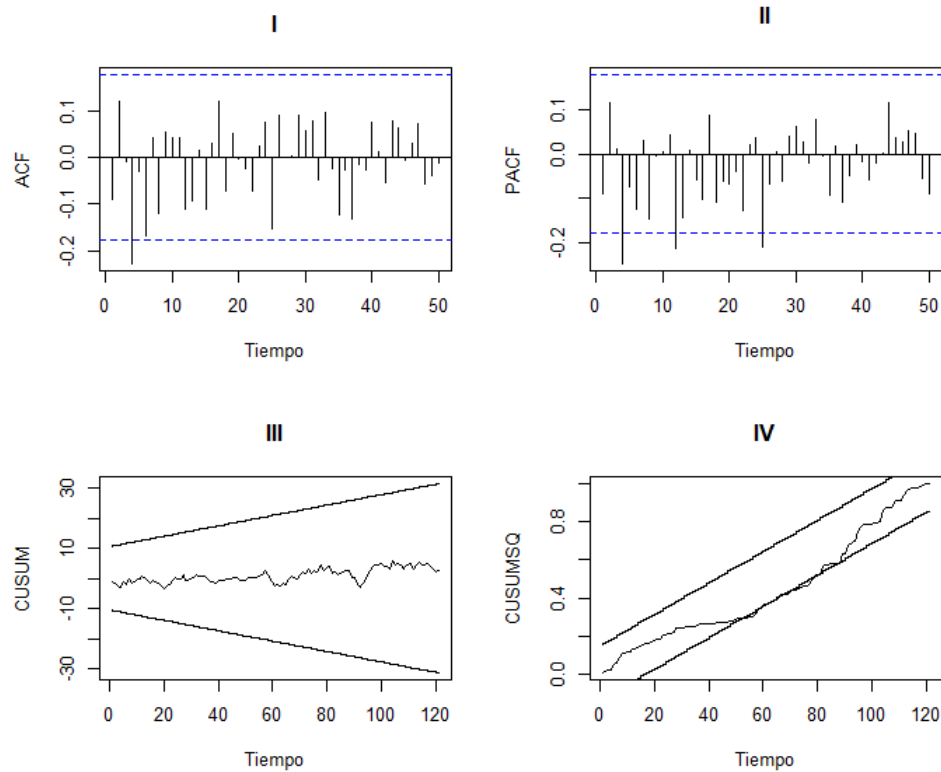


**Figura B-11.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) a la inflación mensual - Colombia

## B.12. Redes LSTM - IPC desestacionalizado Colombia

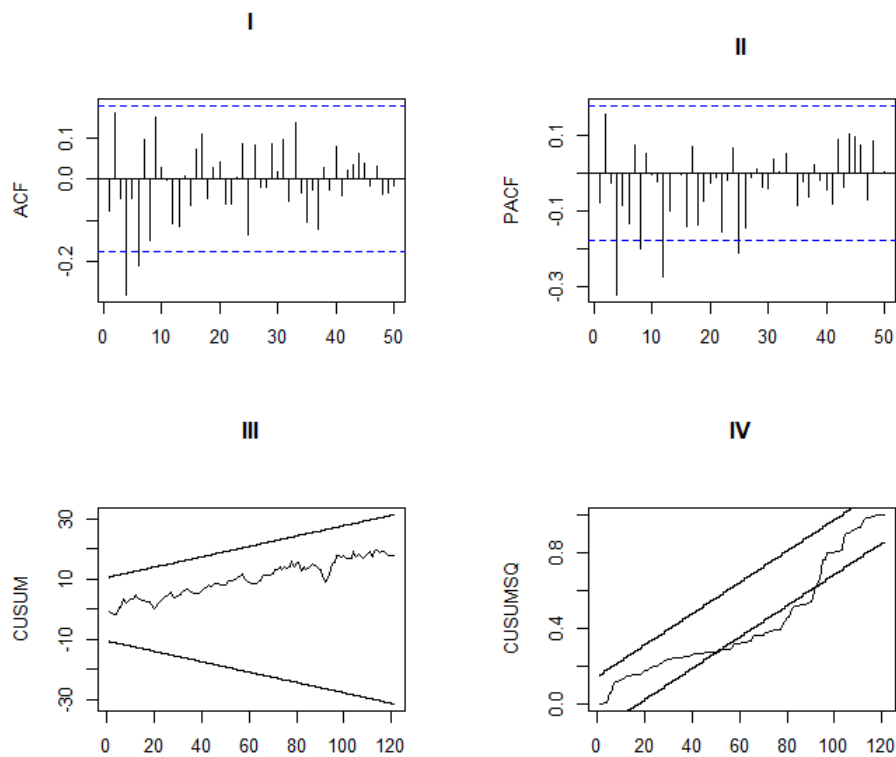


**Figura B-12.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la inflación mensual desestacionalizada - Colombia

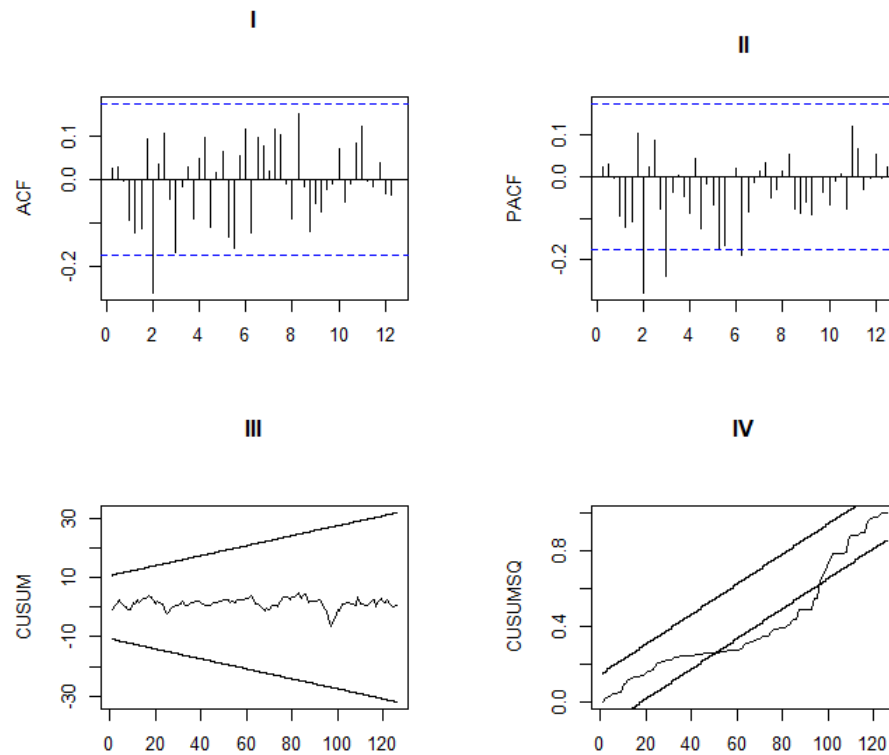
**B.13. Modelo TSARX - PIB EE.UU.**

**Figura B-13.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado al PIB - spread - EE.UU.

## B.14. Modelo TAR - PIB EE.UU.

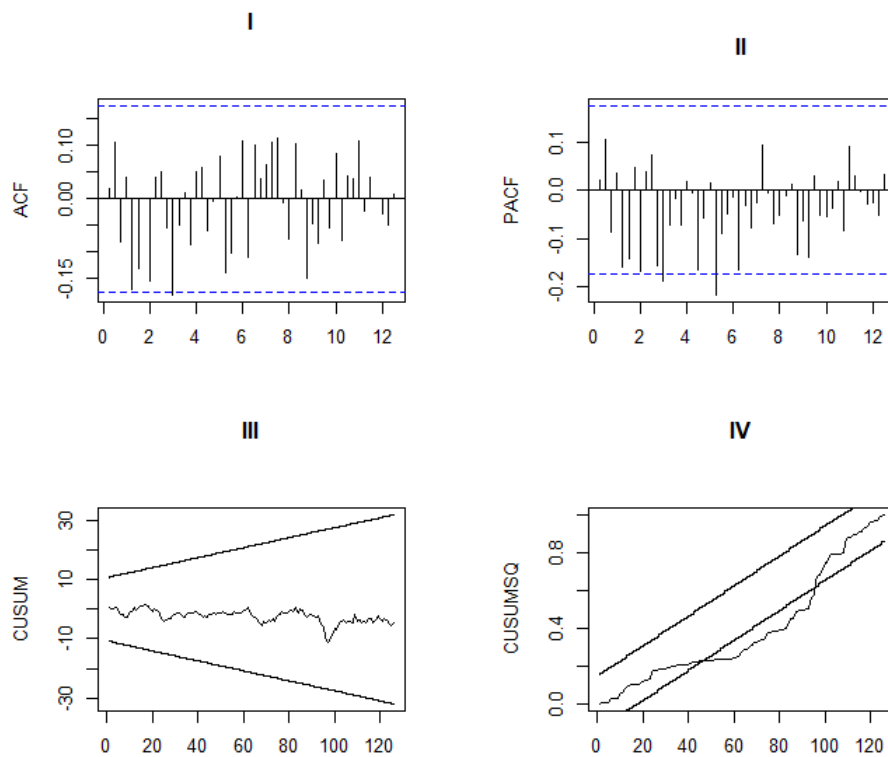


**Figura B-14.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado al PIB - EE.UU.

**B.15. Modelo SAR - PIB EE.UU.**

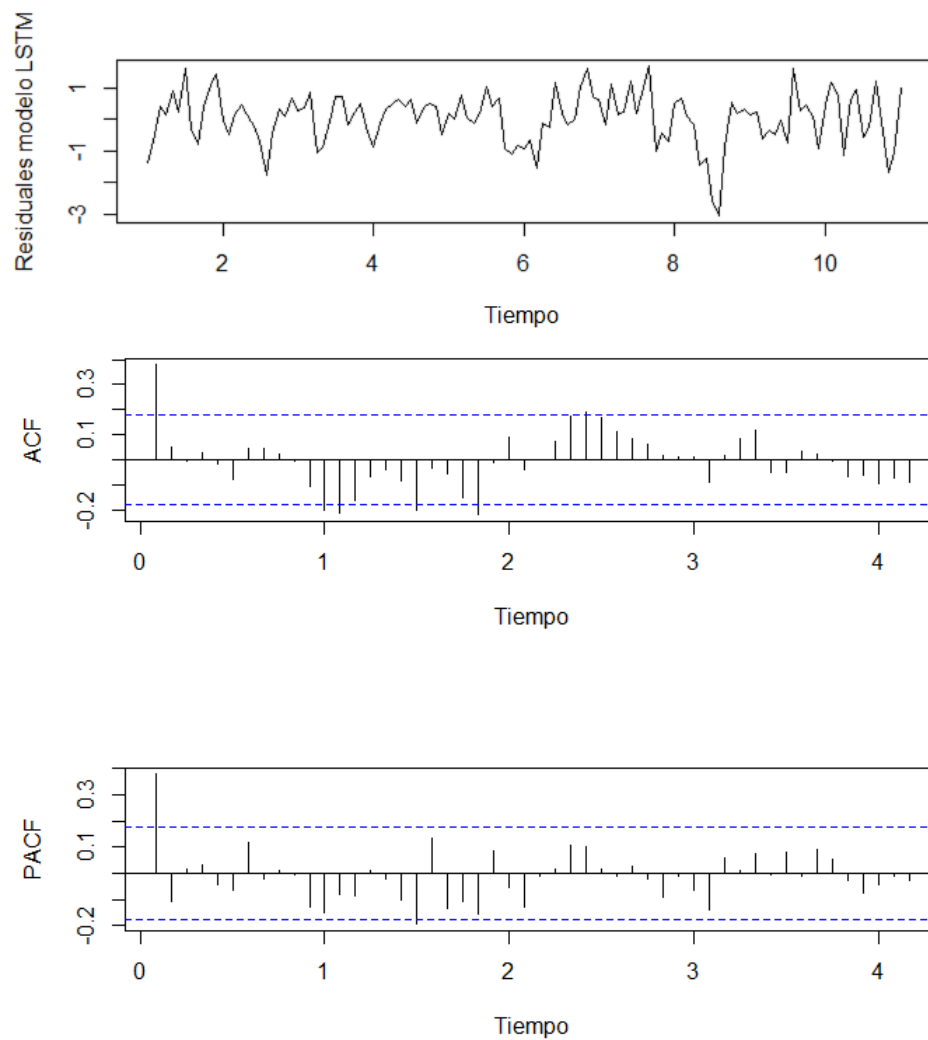
**Figura B-15.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado al PIB EE.UU.

## B.16. Modelo SE - PIB EE.UU.



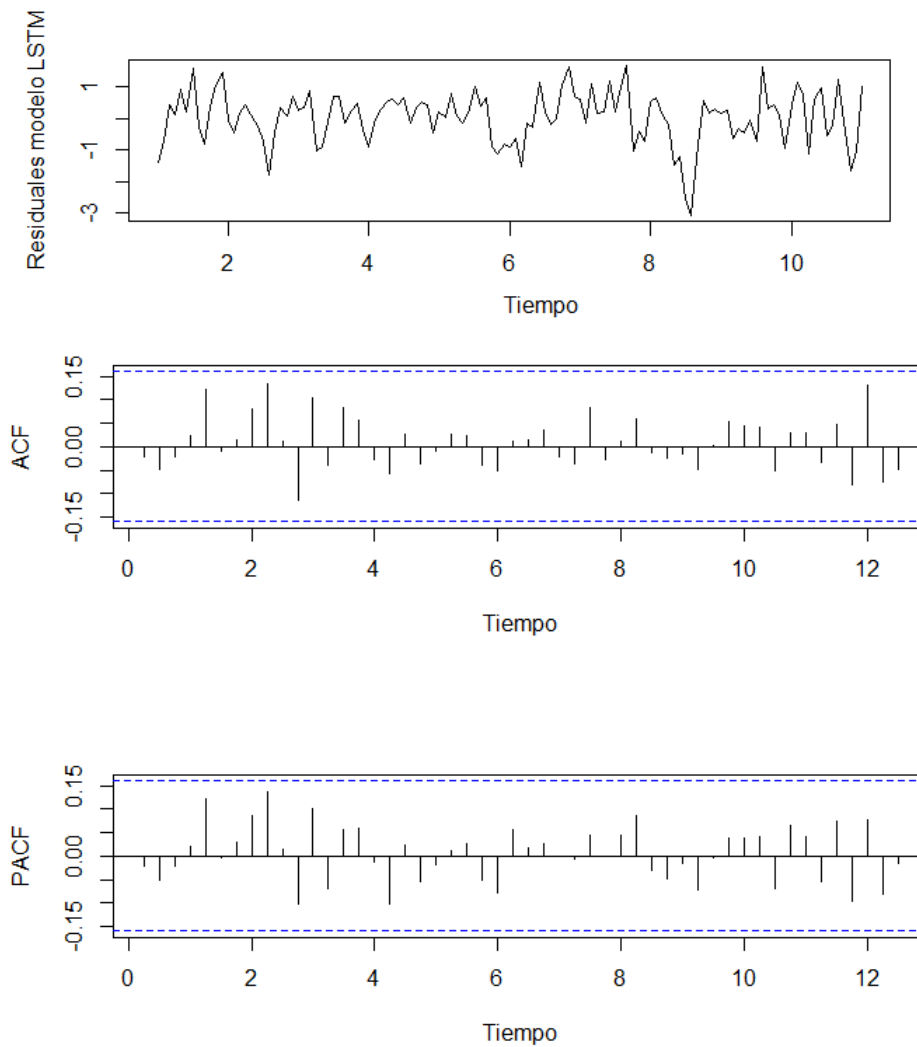
**Figura B-16.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado al PIB - EE.UU.

## B.17. Redes LSTM - PIB EE.UU.

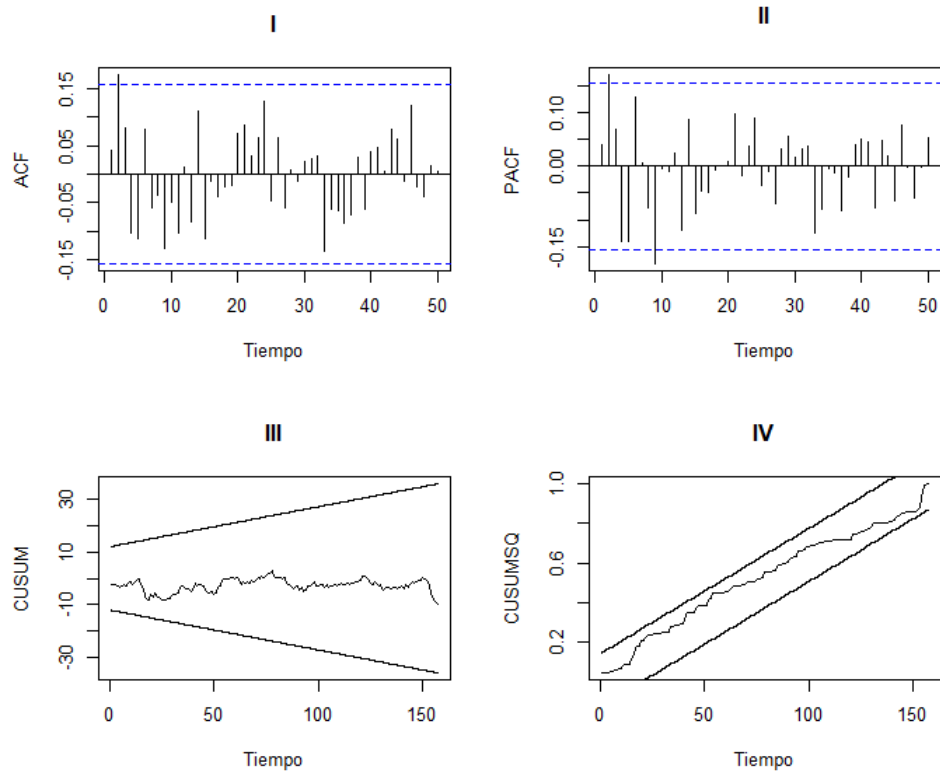


**Figura B-17.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la variación trimestral del PIB - EE.UU.

## B.18. Redes LSTM - PIB desestacionalizado EE.UU.

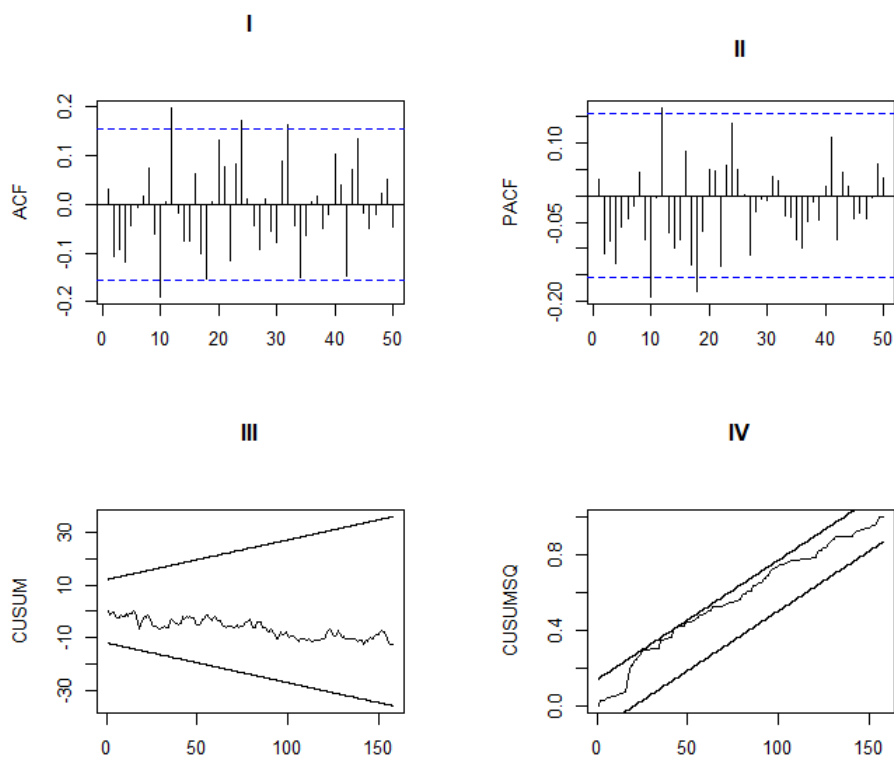


**Figura B-18.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la tasa de crecimiento trimestral PIB desestacionalizada - EE.UU.

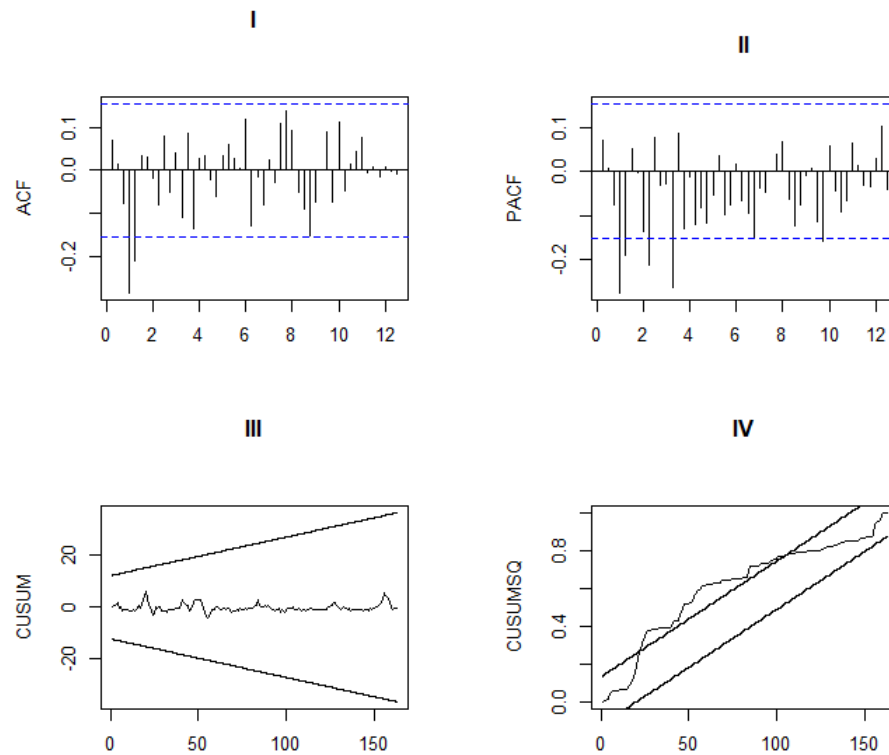
**B.19. Modelo TSARX - TD EE.UU.**

**Figura B-19.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la tasa de desempleo - EE.UU.

## B.20. Modelo TAR - TD EE.UU.

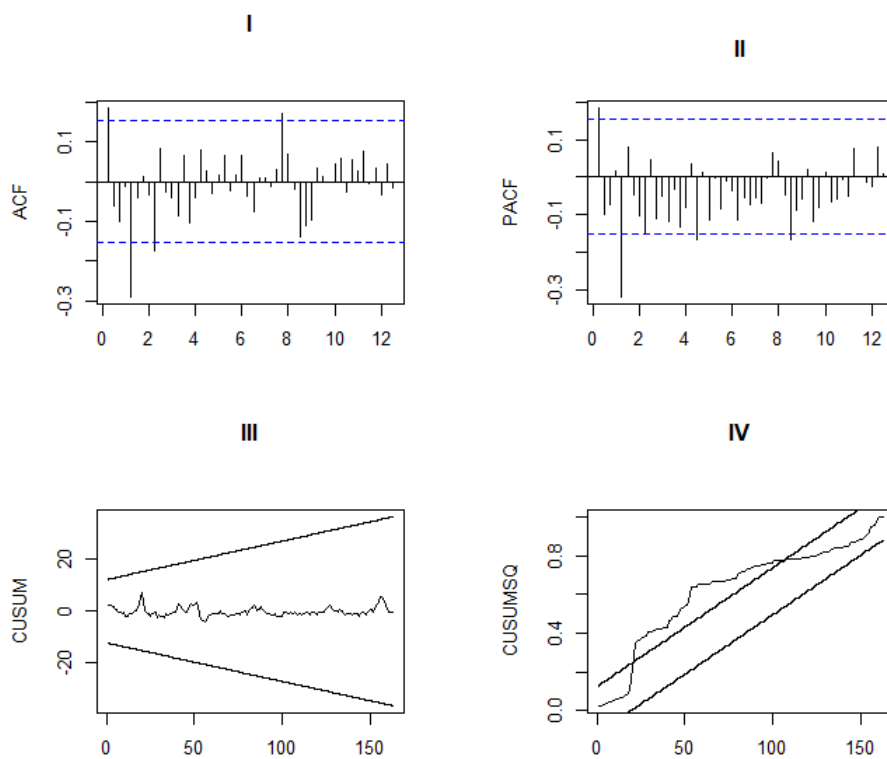


**Figura B-20.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la tasa de desempleo - EE.UU.

**B.21. Modelo SAR - TD EE.UU.**

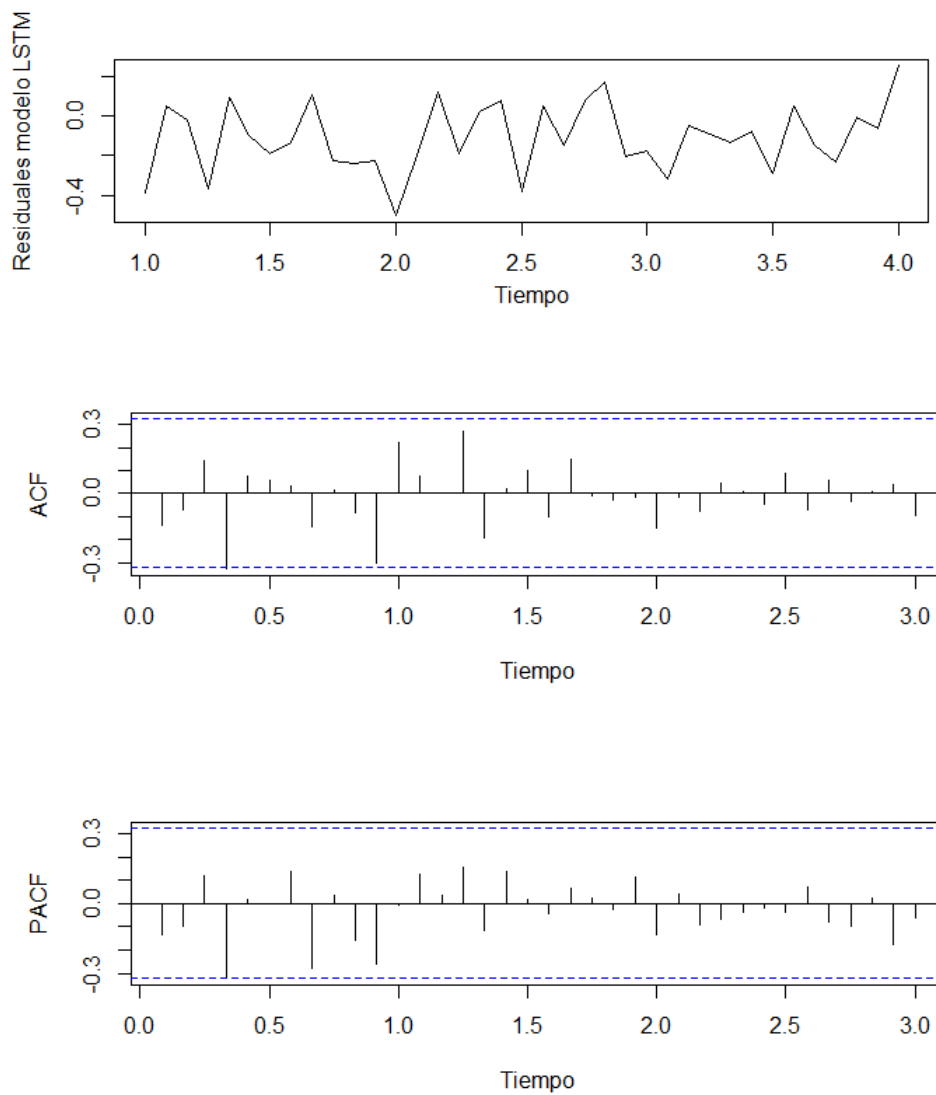
**Figura B-21.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado a la tasa de desempleo - EE.UU.

## B.22. Modelo SE - TD EE.UU.



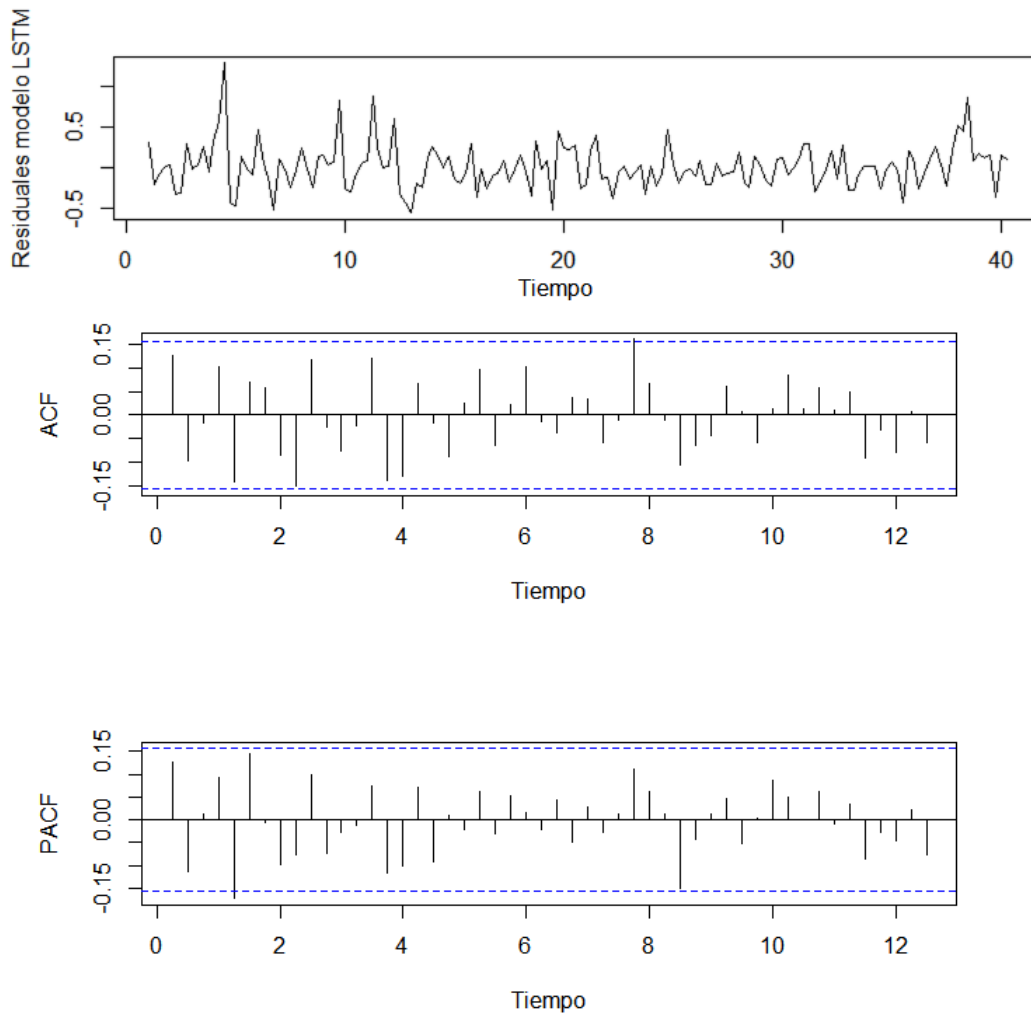
**Figura B-22.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado a la tasa de desempleo - EE.UU.

## B.23. Redes LSTM - PIB EE.UU.

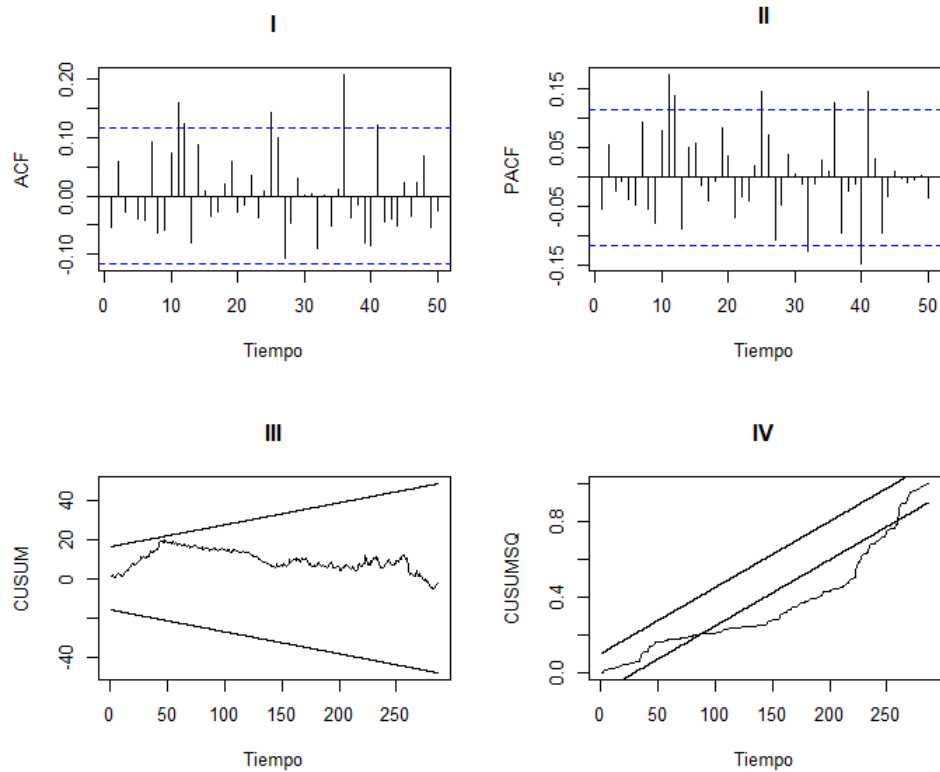


**Figura B-23.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la tasa de desempleo - EE.UU.

## B.24. Redes LSTM - PIB desestacionalizado EE.UU.

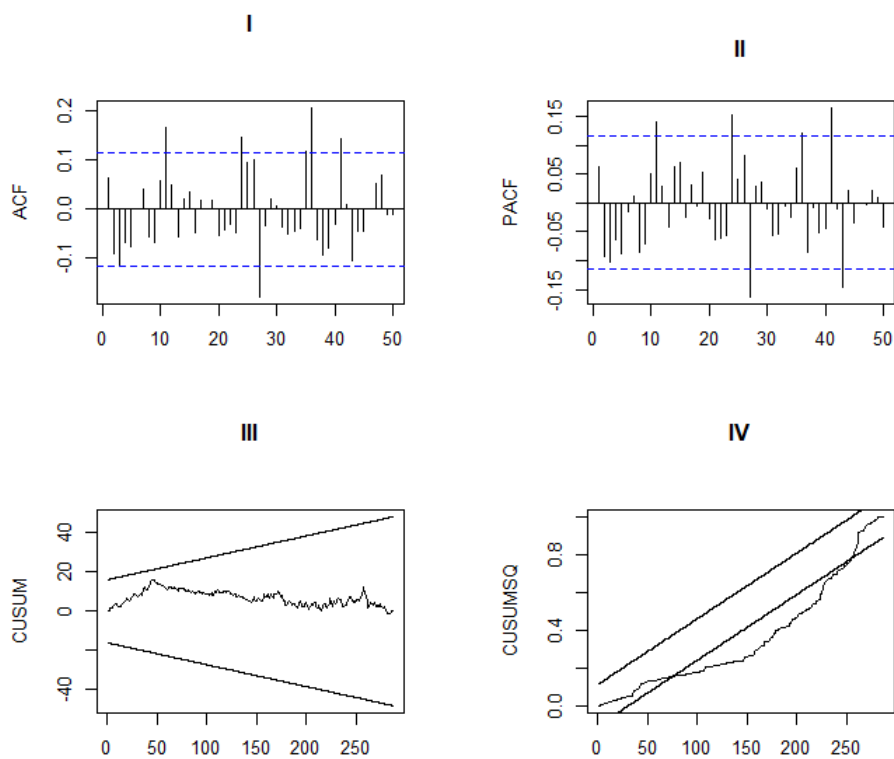


**Figura B-24.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la tasa de desempleo desestacionalizada - EE.UU.

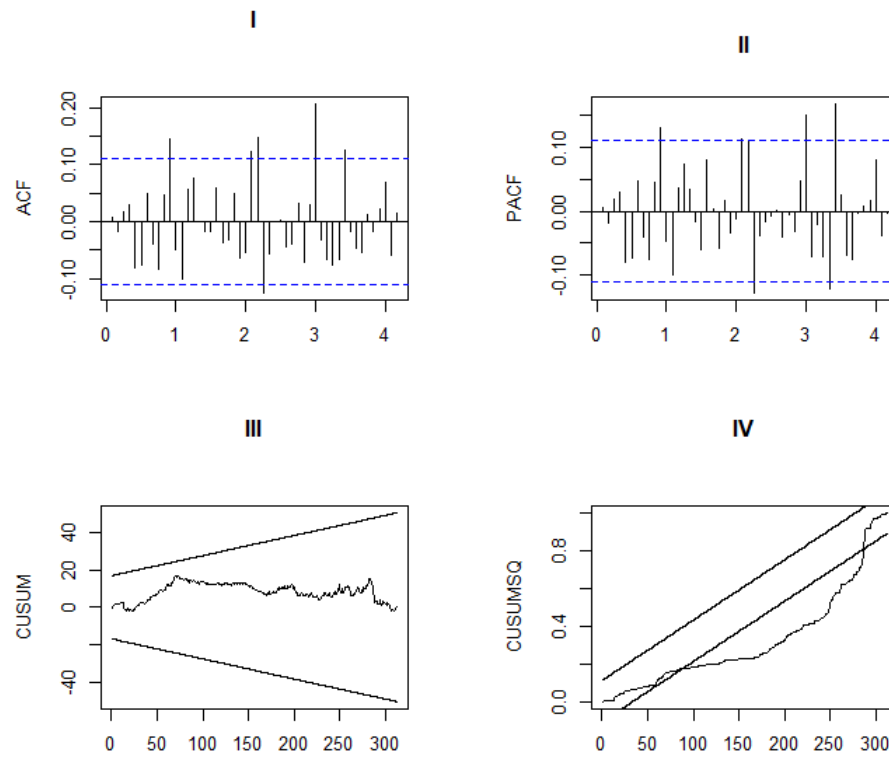
**B.25. Modelo TSARX - IPC EE.UU.**

**Figura B-25.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la inflación mensual - EE.UU.

## B.26. Modelo TAR - IPC EE.UU.

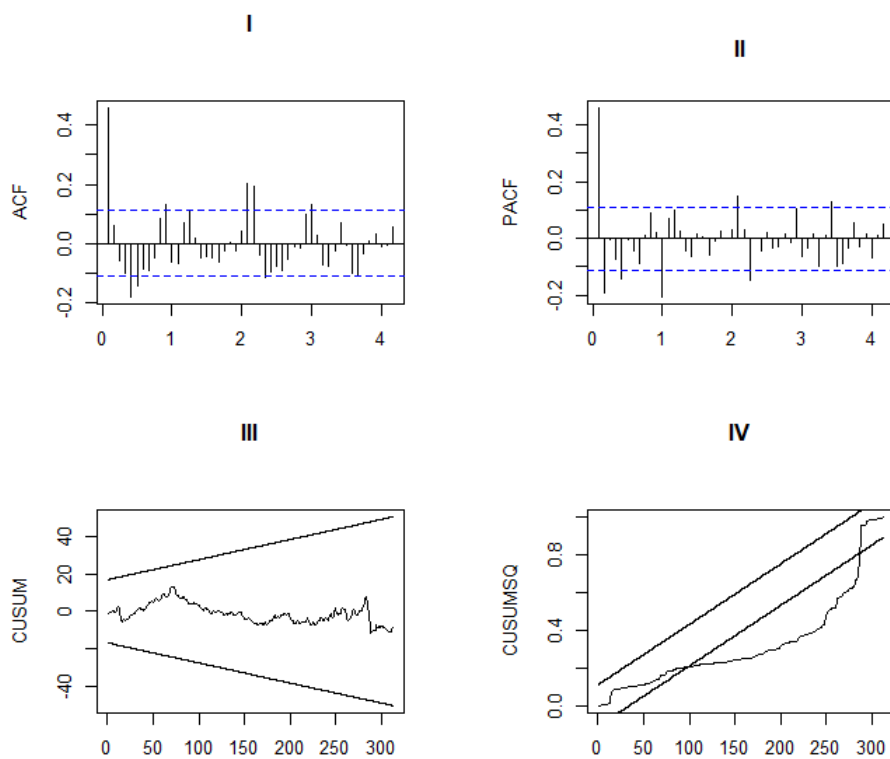


**Figura B-26.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la inflación mensual - EE.UU.

**B.27. Modelo SAR - IPC EE.UU.**

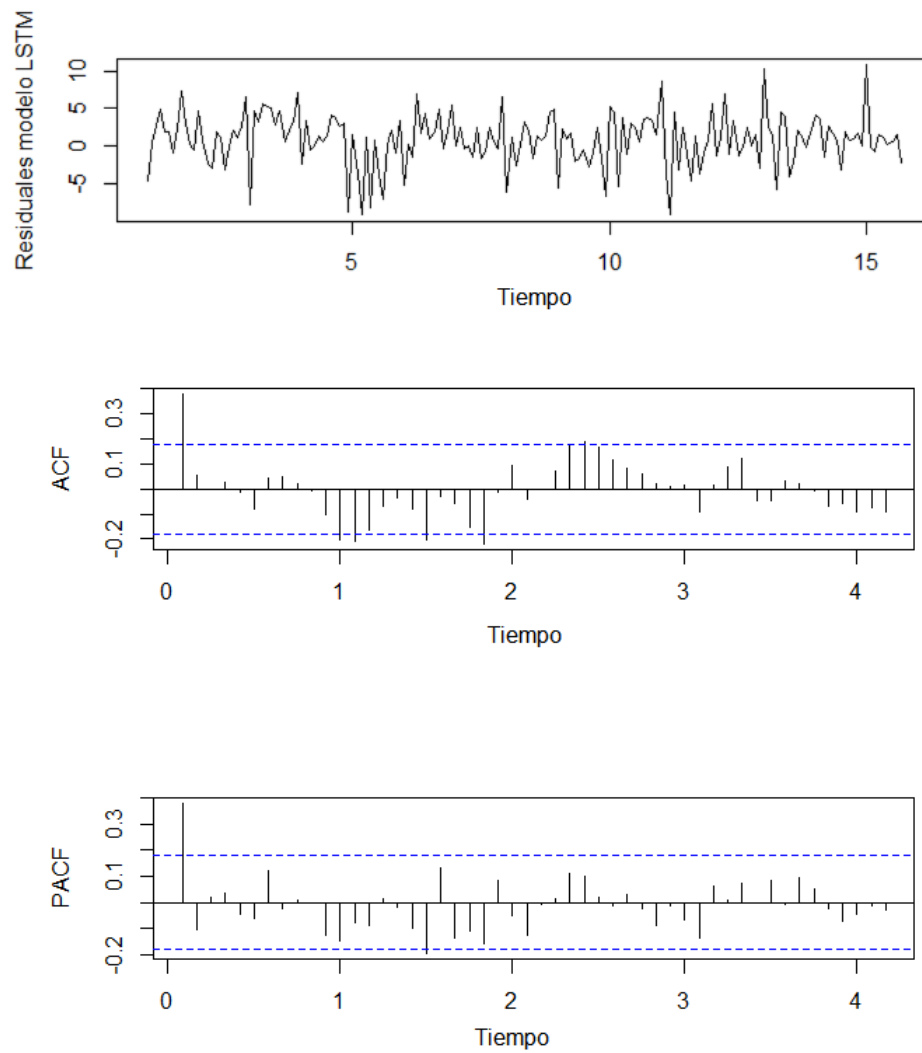
**Figura B-27.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado a la inflación mensual -EE.UU.

## B.28. Modelo SE - IPC EE.UU.



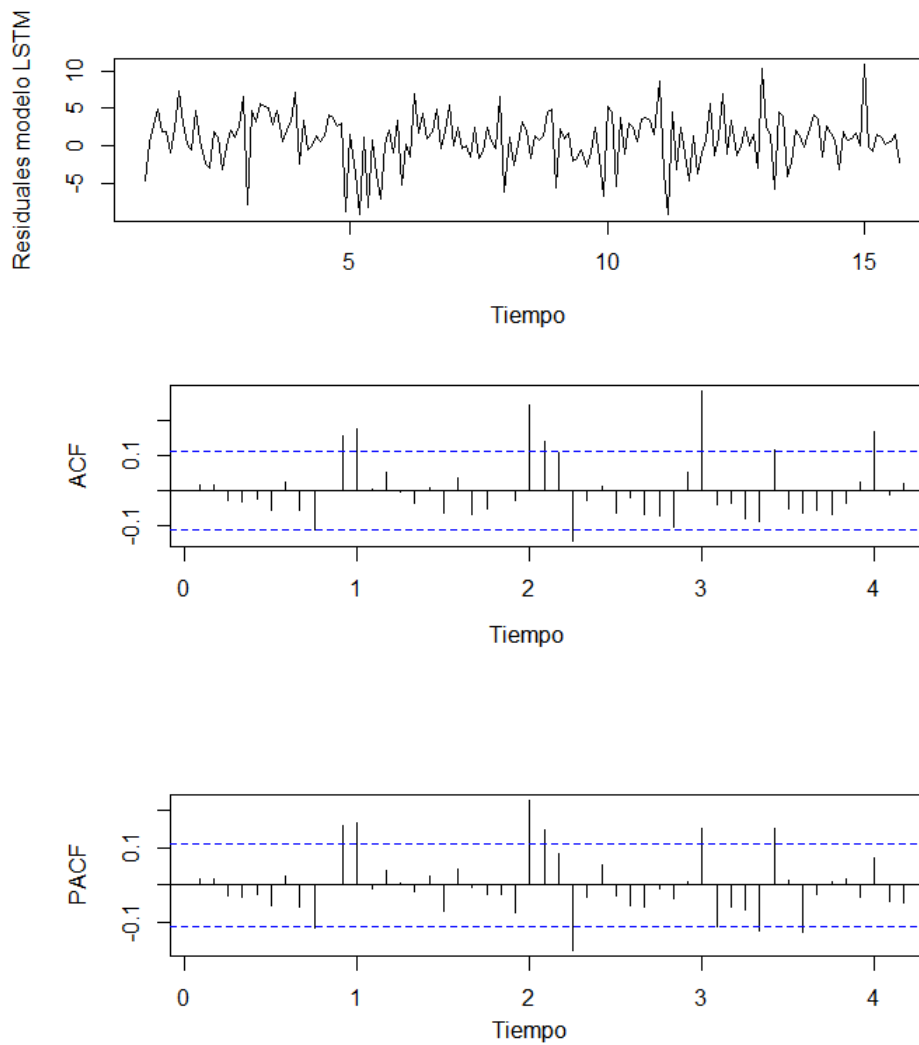
**Figura B-28.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado a la inflación mensual - EE.UU.

## B.29. Redes LSTM - IPC EE.UU.



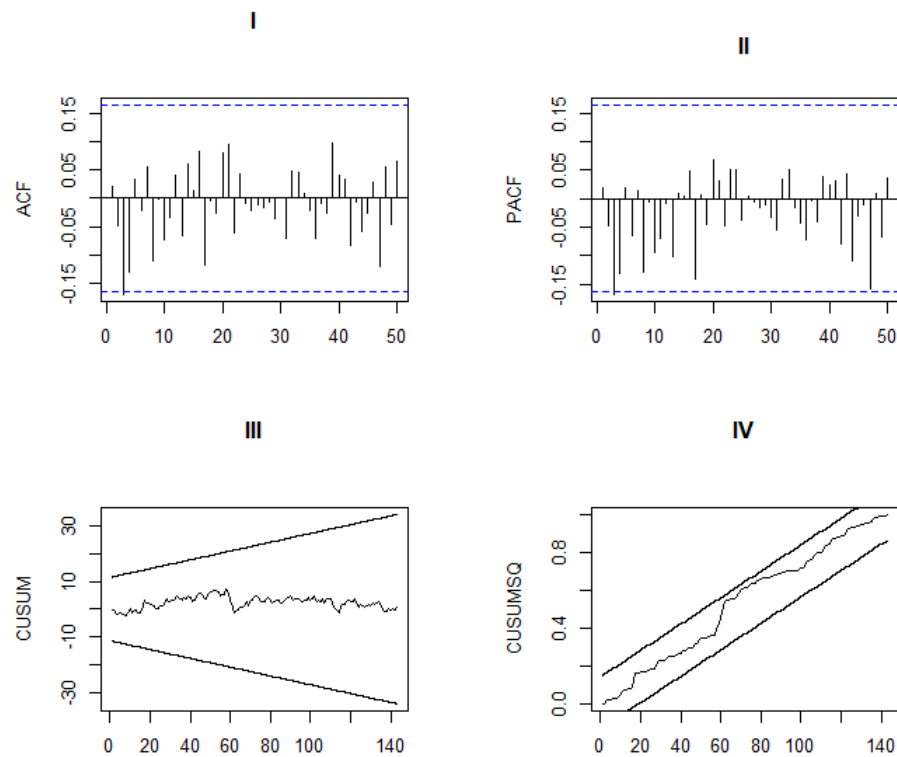
**Figura B-29.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la inflación mensual - EE.UU.

### B.30. Redes LSTM - IPC desestacionalizado EE.UU.



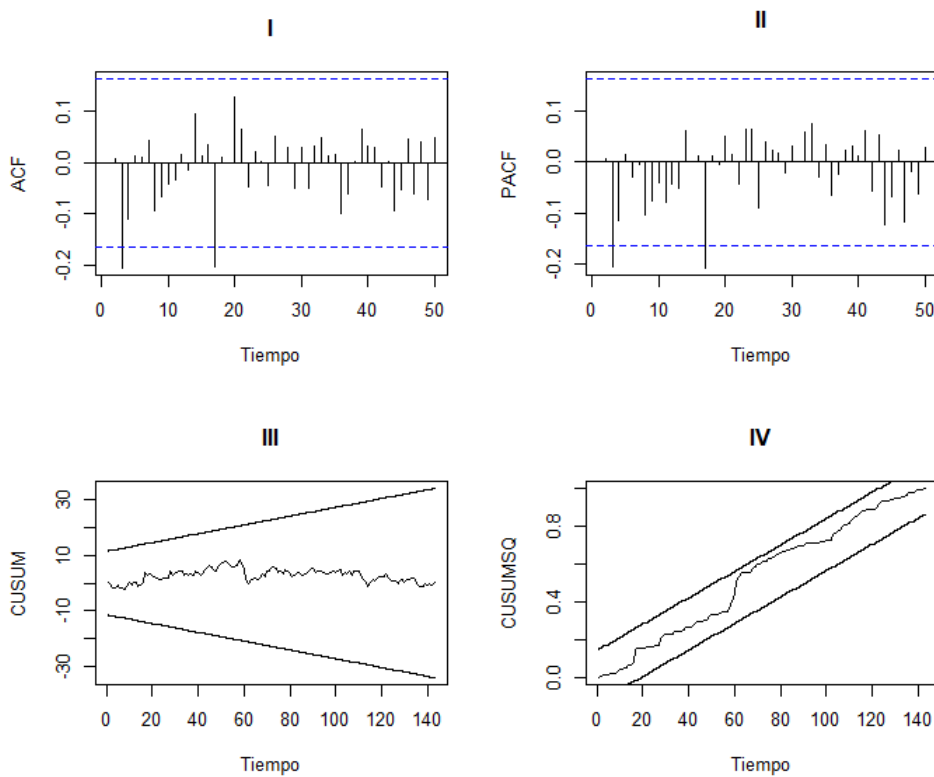
**Figura B-30.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la inflación mensual desestacionalizada - EE.UU.

## B.31. Modelo TSARX - PIB U.K.

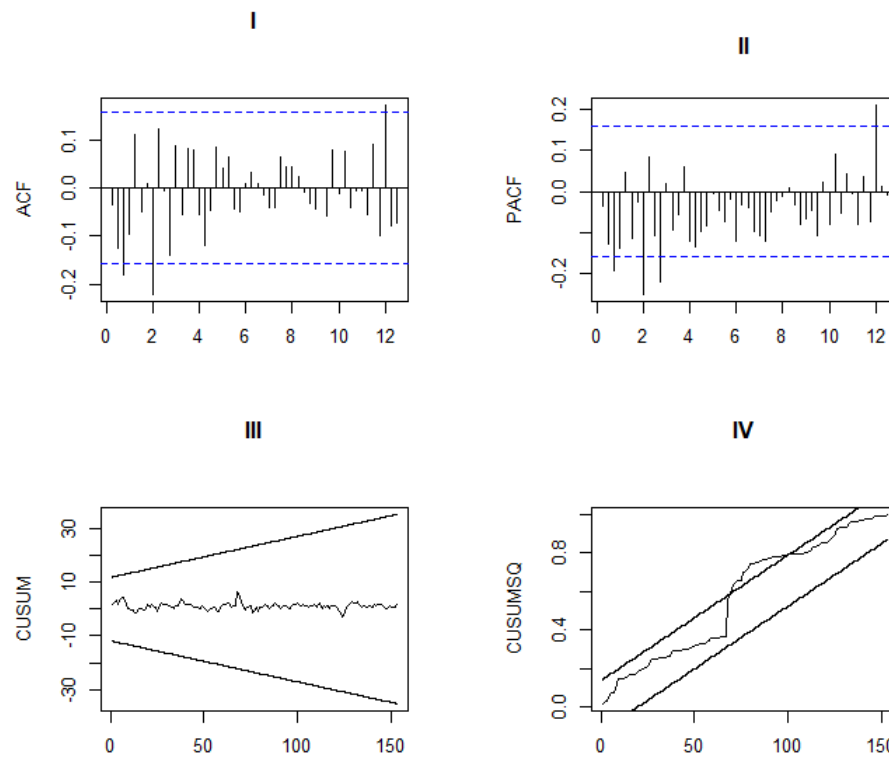


**Figura B-31.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a variación de la tasa de crecimiento del PIB - Reino Unido

## B.32. Modelo TAR - PIB UK.

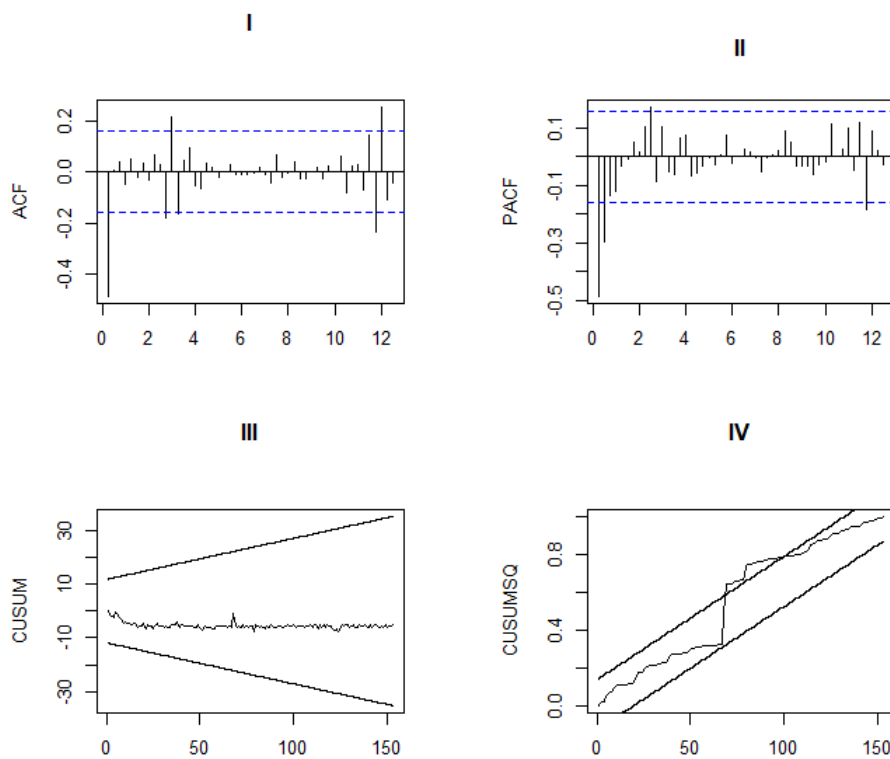


**Figura B-32.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la variación de la tasa de crecimiento del PIB - Reino Unido

**B.33. Modelo SAR - PIB UK.**

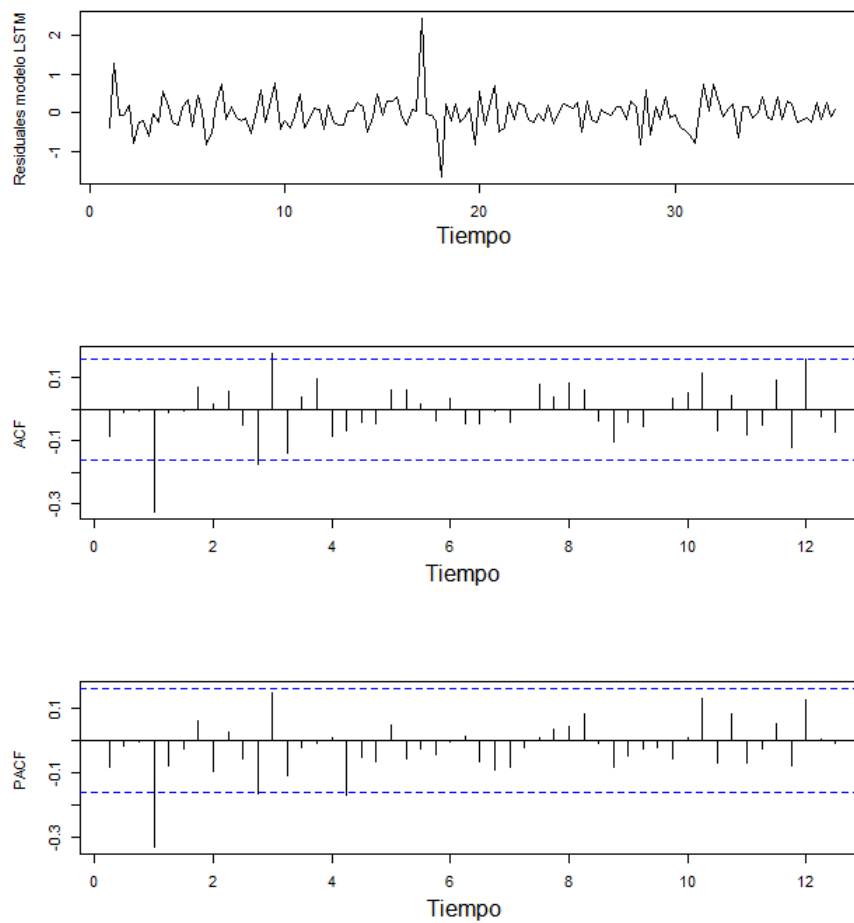
**Figura B-33.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuos del modelo SAR ajustado a la variación del crecimiento del PIB - Reino Unido

### B.34. Modelo SE - PIB UK.



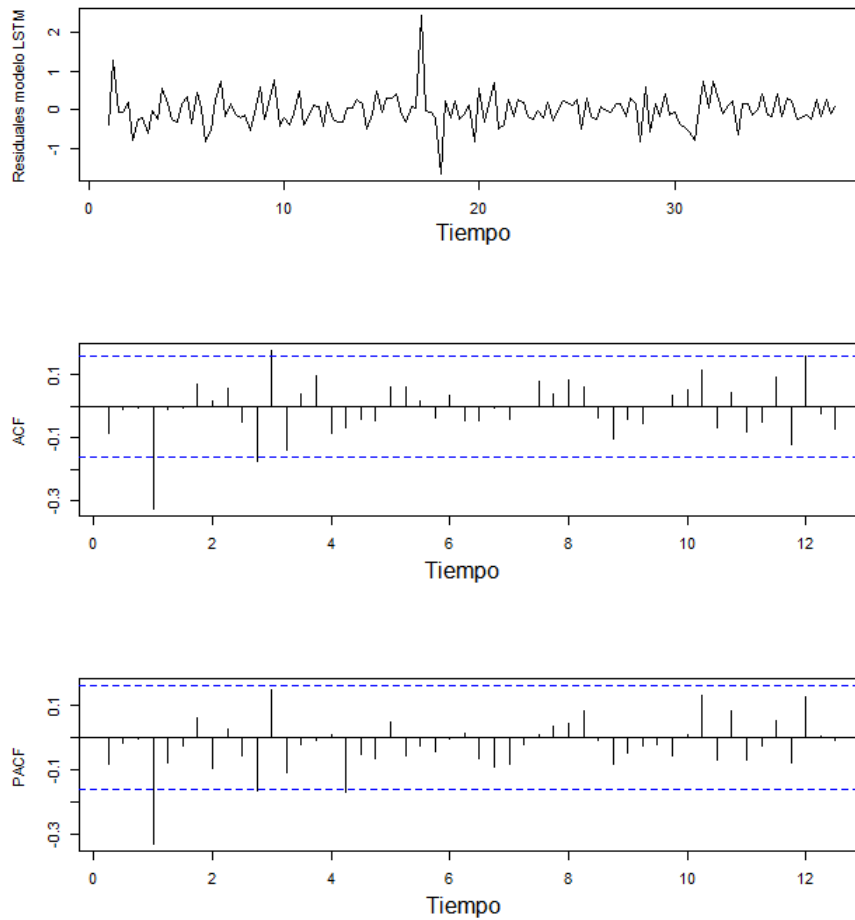
**Figura B-34.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado a la variación del crecimiento del PIB - Reino Unido

## B.35. Redes LSTM - PIB UK.

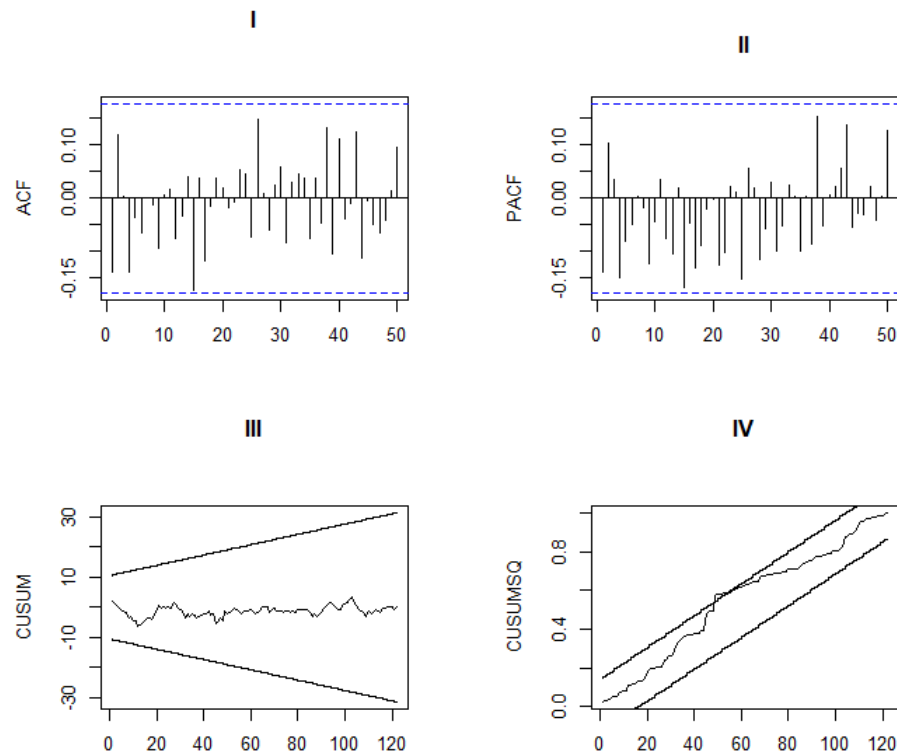


**Figura B-35.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la variación de la tasa de crecimiento del PIB - Reino Unido

## B.36. Redes LSTM - PIB desestacionalizado UK.

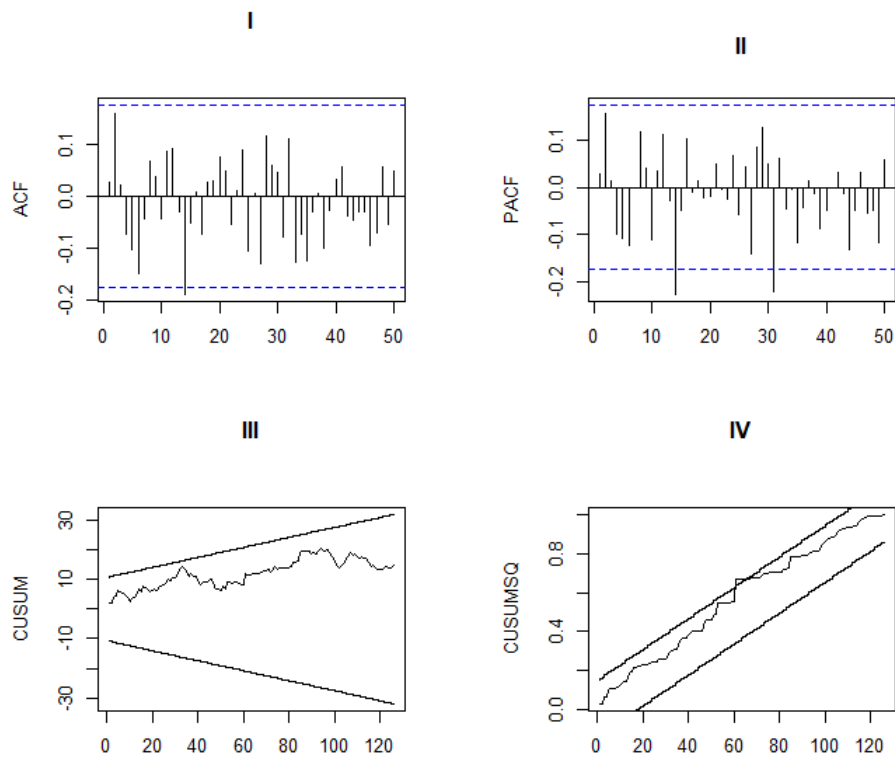


**Figura B-36.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para la variación de la tasa de crecimiento del PIB - Reino Unido

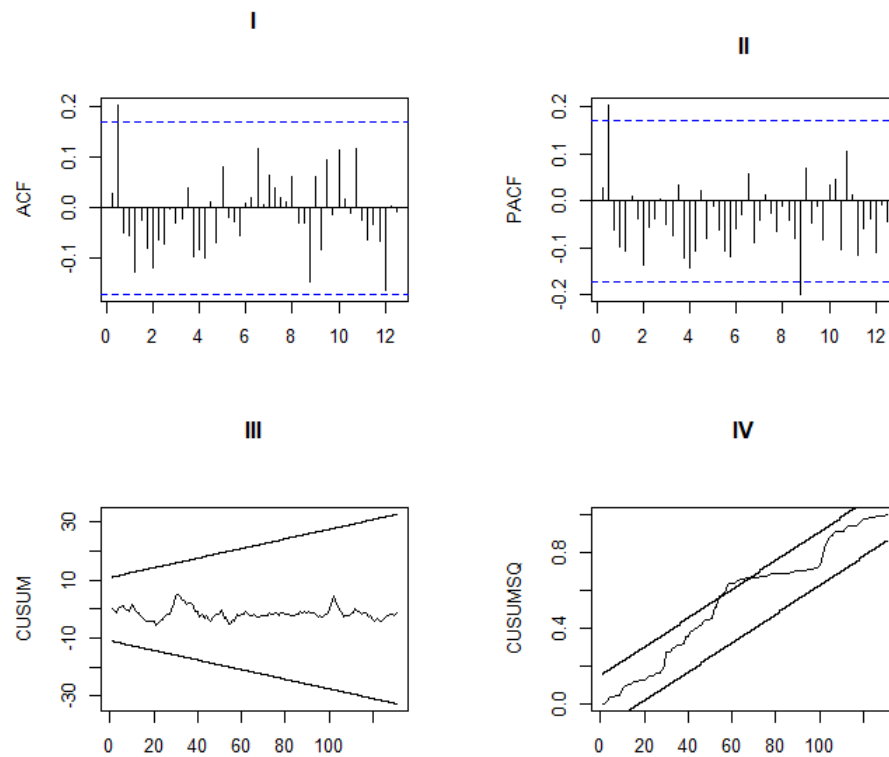
**B.37. Modelo TSARX - TD U.K.**

**Figura B-37.:** CF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la tasa de desempleo - Reino Unido

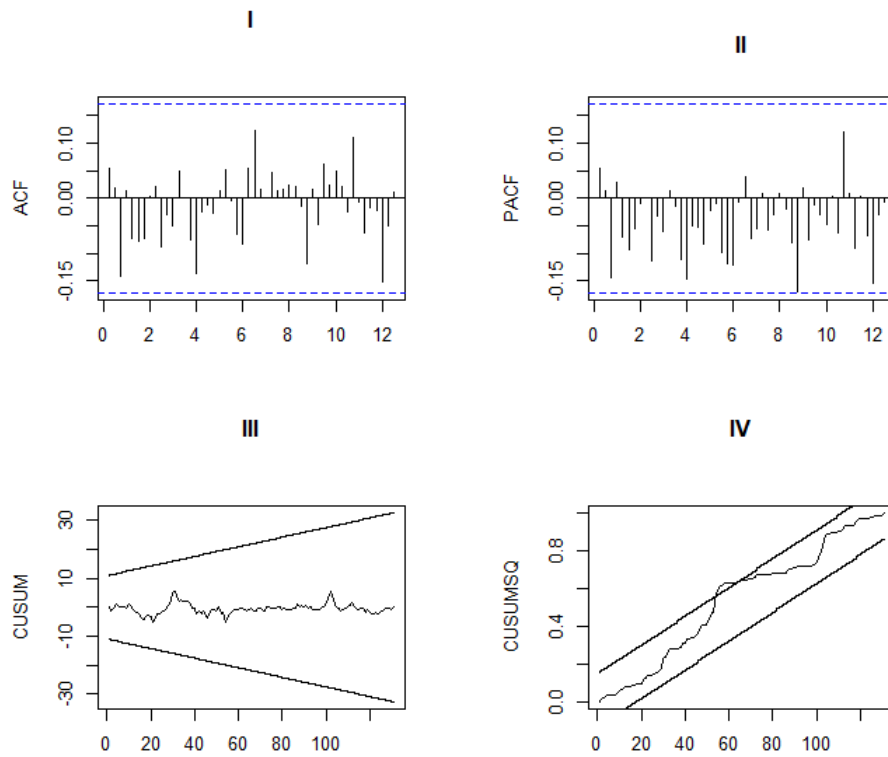
### B.38. Modelo TAR - TD UK.



**Figura B-38.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuos del modelo TAR ajustado a la variación de la tasa de desempleo - Reino Unido

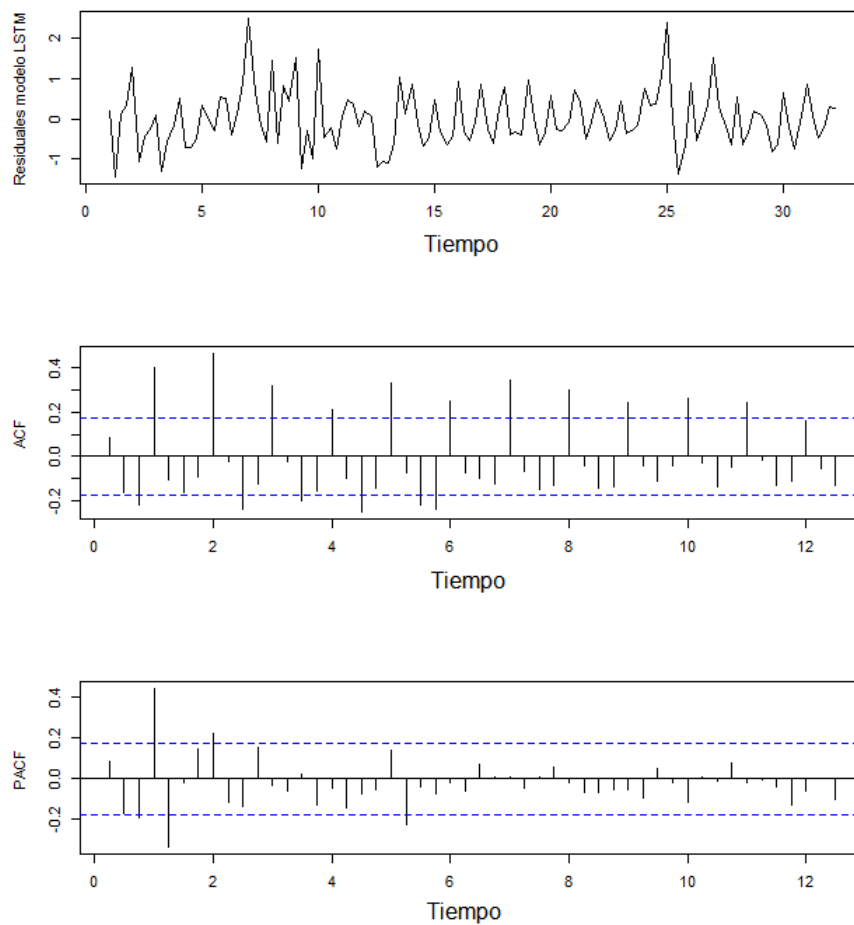
**B.39. Modelo SAR - TD UK.**

**Figura B-39.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuos del modelo SAR ajustado a la variación de la tasa de desempleo - Reino Unido

**B.40. Modelo SE - TD UK.**

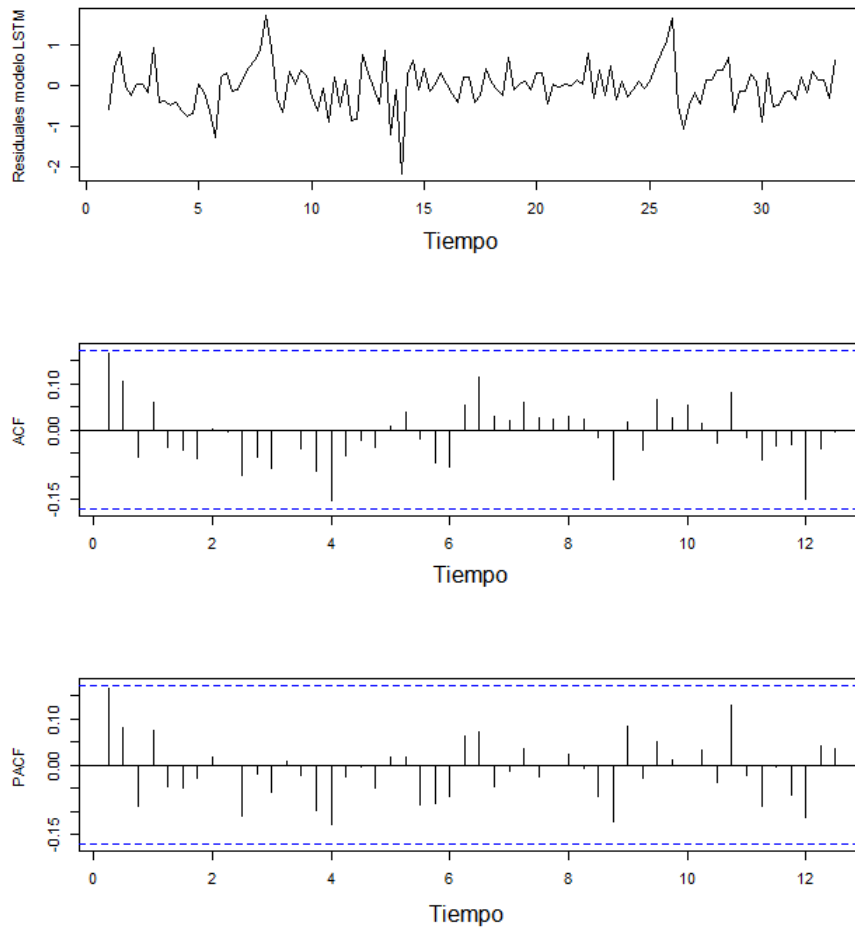
**Figura B-40.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado al ISE

## B.41. Redes LSTM - TD UK.

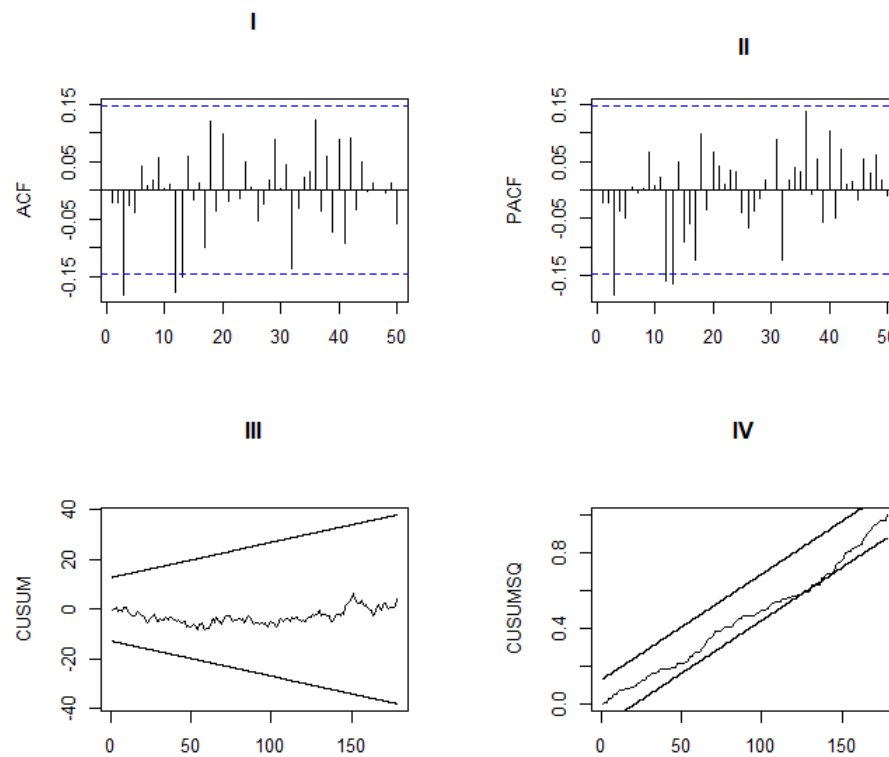


**Figura B-41.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para variación de la tasa de desempleo - Reino Unido

## B.42. Redes LSTM - TD desestacionalizada UK.

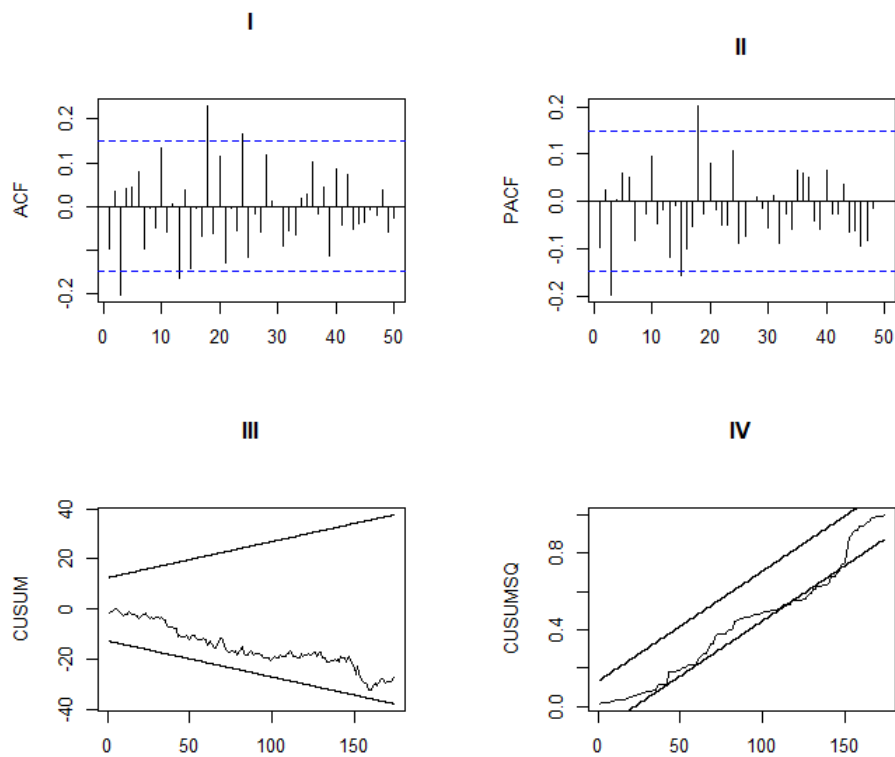


**Figura B-42.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para variación de la tasa de desempleo desestacionalizada - Reino Unido

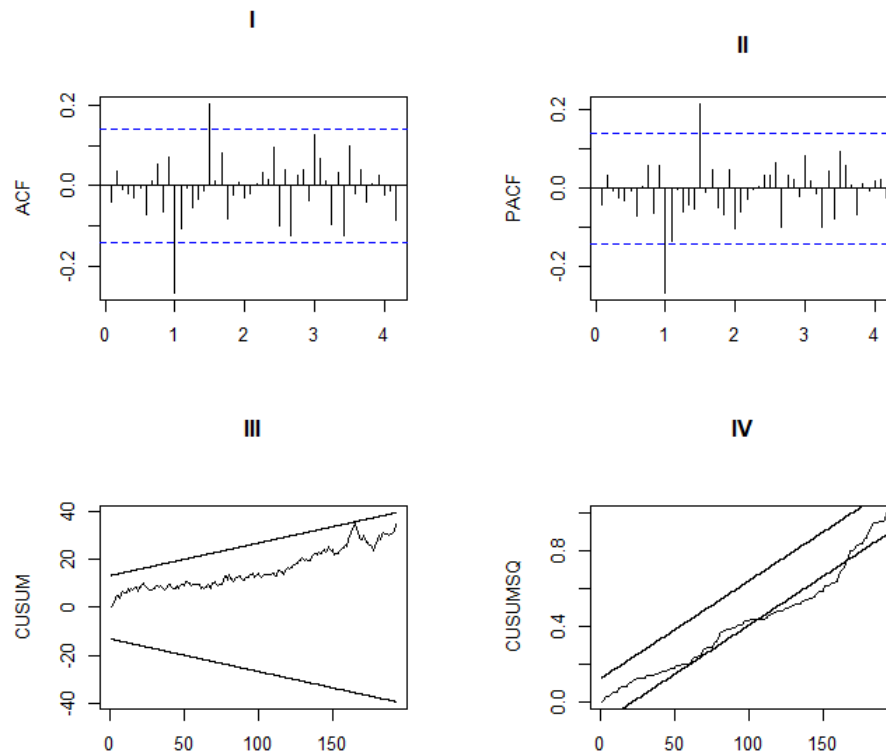
**B.43. Modelo TSARX - IPC U.K.**

**Figura B-43.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TSARX ajustado a la inflación mensual - Reino Unido

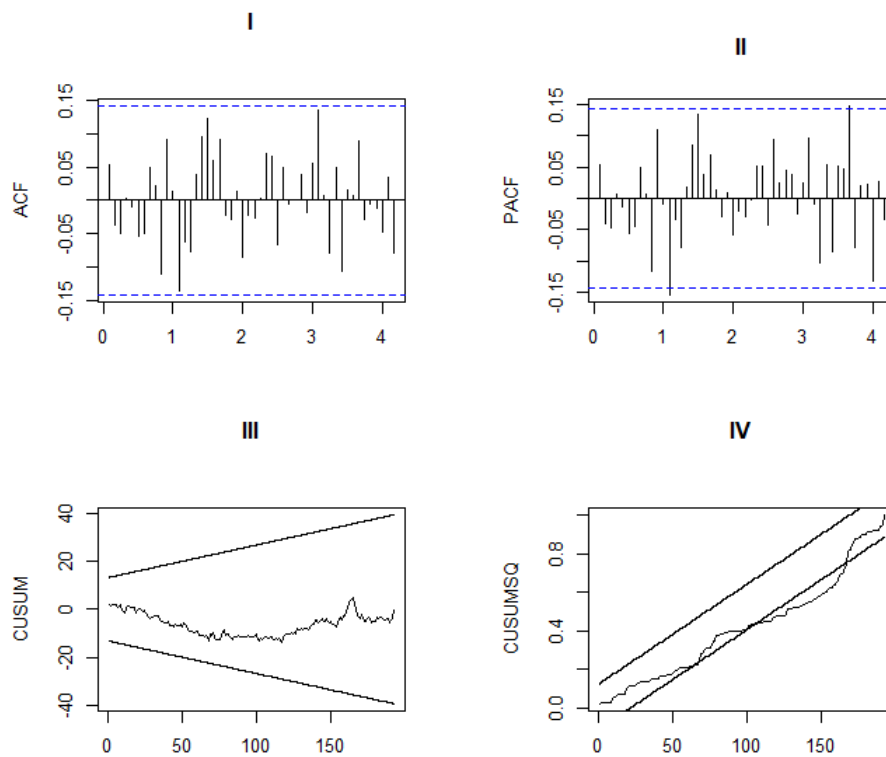
## B.44. Modelo TAR - IPC UK.



**Figura B-44.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo TAR ajustado a la inflación mensual - Reino Unido

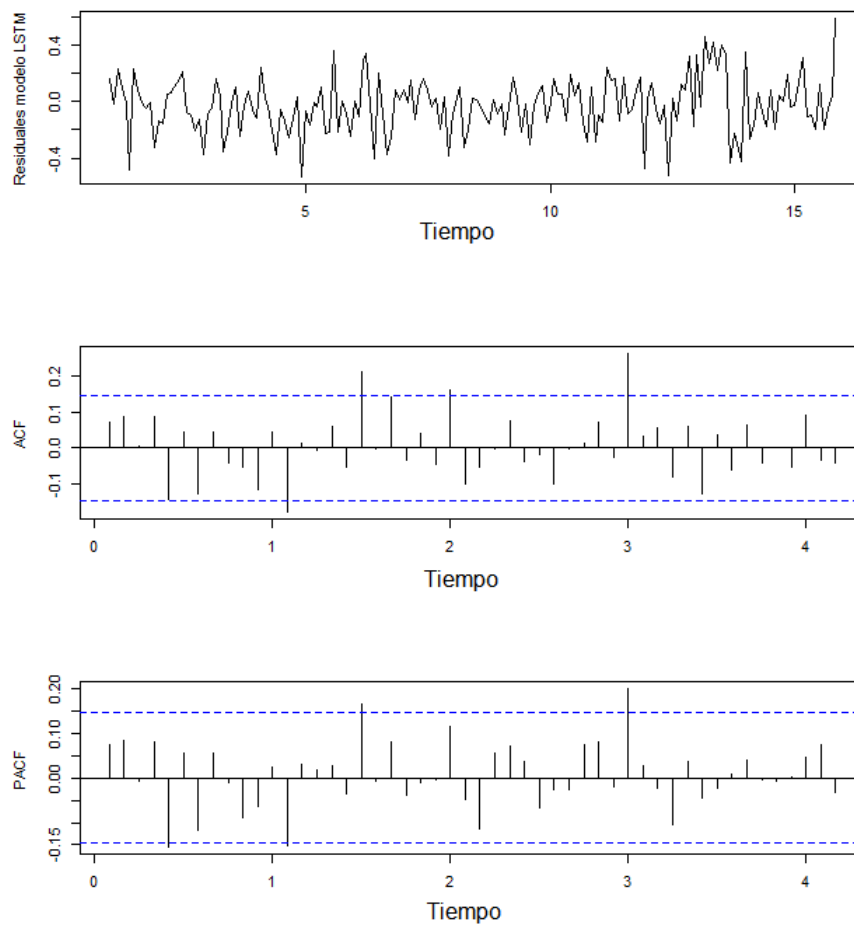
**B.45. Modelo SAR - IPC UK.**

**Figura B-45.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SAR ajustado a la inflación mensual - Reino Unido

**B.46. Modelo SE - IPC UK.**

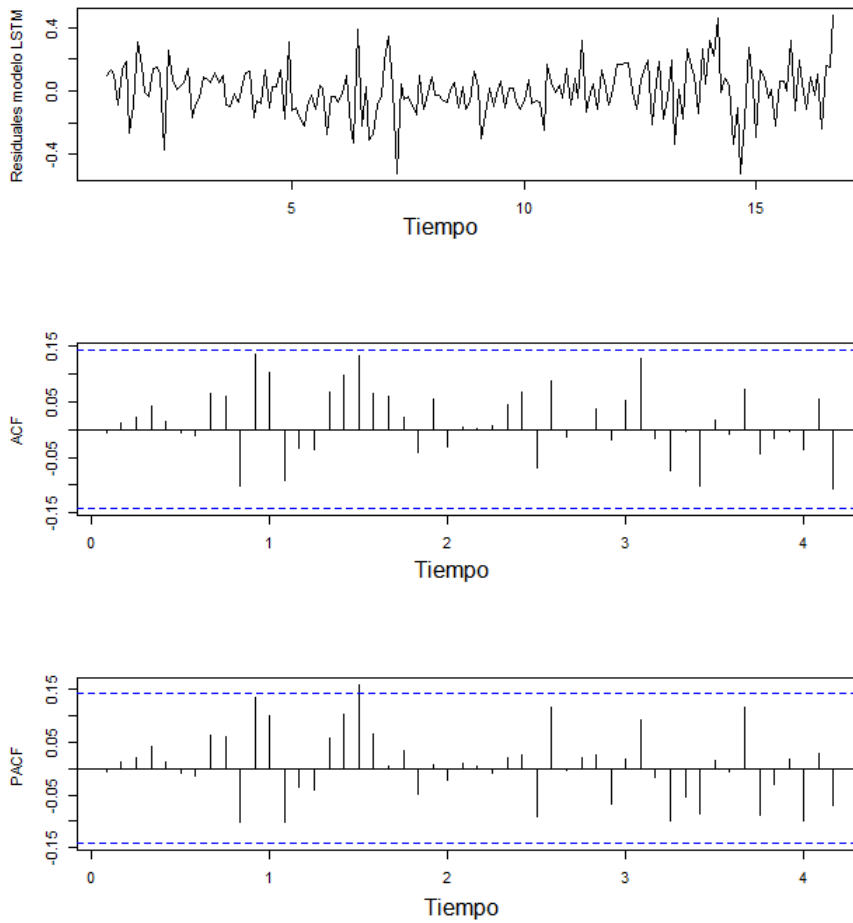
**Figura B-46.:** ACF (I), PACF (II), Gráficos CUSUM (III) y CUSUMSQ (IV) para los residuales del modelo SE ajustado al ISE

## B.47. Redes LSTM - IPC UK.



**Figura B-47.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para inflación mensual - Reino Unido

## B.48. Redes LSTM - IPC desestacionalido UK.



**Figura B-48.:** Residuales generados por el ajuste de la red LSTM (arriba), autocorrelograma (en medio) y autocorrelograma parcial (abajo) para inflación mensual desestacionalizada - Reino Unido

## Referencias

- Bates, J. M., y Granger, C. W. J. (1969). The combination of forecasts. *Journal of the Operational Research Society*, 20(4), 451-468.
- Box, G., y Jenkins, G. M. (1991). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice-Hall.
- Brown, R. G. (1959). *Statistical forecasting for inventory control*. McGraw/Hill.
- Brown, R. L., Durbin, J., y Evans, J. M. (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 37(2), 149-192.
- Cao, W., Zhu, W., Wang, W., Demazeau, Y., y Zhang, C. (2020). A deep coupled lstm approach for usd/cny exchange rate forecasting. *IEEE Intelligent Systems*, 35(2), 43-53. doi: 10.1109/MIS.2020.2977283
- Congodon, P. (2007). *Bayesian statistical modelling*. Southern Gate, Chichester: John Wiley & Sons.
- DANE. (2015). *Metodología general gran encuesta integrada de hogares geih*.
- DANE. (2016). *Metodología general indicador de seguimiento a la economía ise*.
- De Gooijer, J. G., y Vidiella-i Anguera, A. (2003). Nonlinear stochastic inflation modelling using seasetars. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32((1)), 27-36.
- Dellaportas, P., Foster, J. J., y Ntzoufras, I. (2002). On bayesian model and variable selection using mcmc. *Statistics and Computing*, 12((1)), 27-36.
- Diebold, F., y Mariano, R. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13((3)), 253-263.
- Dixon, M. F., Halperin, I., y Bilokon, P. (2020). *Machine learning in finance from theory to practice*. Switzerland: SP.
- Edgerton, D., y Wells, C. (1994). Critical values for the cusumsq statistic in medium and large sized samples. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 56(3), 355-365.
- Etuk, E. H. (2012). Predicting inflation rates of nigeria using a seasonal box-jenkins model. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, 1-3, 27-37.
- González, J., y Nieto, H., F. (2020). Bayesian analysis of multiplicative seasonal threshold autoregressive processes. *Revista Colombiana de Estadística - Applied Statistics*, 43(2), 251-285.
- Hansen, B. E. (2011). Threshold autoregression in economics. *Statistics and their interface*, 4, 123-127.
- Hochreiter, S., y Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735-1780.
- Holt, C. (2004). Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted averages. En *Onr memorandum no. 52*.
- Hyndman, R., y Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: principles and practice* (3rd ed.). Melbourne: OTexts.

- Jiehua, L., Chao, W., Wei, G., y Qiumin, Z. (2021). An economic forecasting method based on the lightgbm-optimized lstm and time-series model. *Neural Computation*, 2021, 1-10.
- Kryzanowski, L., y Zhang, H. (1992). Economic forces and seasonality in security returns. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 2, 227-244.
- Luetkepohl, H., y Xu, F. (2012). Forecasting annual inflation with seasonal monthly data: Using levels versus logs of the underlying price index. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, 1-3, 27-37.
- Nieto, F. H. (2005). Modeling bivariate threshold autoregressive processes in the presence of missing data. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 34, 905-930.
- Nieto, F. H. (2008). Forecasting with univariate tar models. *Statistical Methodology*, 5, 263-276.
- Peirano, R., Kristjanpoller, W., y Minutolo, M. (2021). Forecasting inflation in latin american countries using a sarima-lstm combination. *Neural Computation*, 25, 10851-10862.
- Peña, D., y Tsay, R. S. (2021). *Statistical Learning for Big Dependent Data*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Siami-Namini, S., Tavakoli, N., y Siami Namin, A. (2018). A comparison of arima and lstm in forecasting time series. En *2018 17th ieee international conference on machine learning and applications (icmla)* (p. 1394-1401). doi: 10.1109/ICMLA.2018.00227
- Tong, H., y Chen, C. H. (1978). *Pattern recognition and signal processing*. Netherlands: Springer.
- Tong, H., y Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 42((3)), 245-292.
- Tsay, R. S. (1998). Testing and modeling multivariate threshold models. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443), 1188-1202.
- Urrutia, J. D., Rivera, C. I., Quite, J. A., Belamide, J. A., y Quinto, J. Q. (2014). Application of seasonal autoregressive integrated moving average (sarima) in modeling and forecasting philippine real gross domestic product. *European Academic Research*, II, 11247-11297.
- Vaca, P. A. (2018). *Analysis of the forecasting performance of the threshold autorregresive model* (Tesis de Master no publicada). Universidad Nacional de Colombia.
- Winters, P. R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, 6(3), 324-342.
- Zhang, G., y Qi, M. (2005). Neural network forecasting for seasonal and trend time series. *EJOR*, 160(2), 501-514.