Dualidad de Urquhart: Una extensión de la dualidad de Priestley al contexto de los retículos acotados.

Martha Yaneth Mancera Camacho
Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2017

Dualidad de Urquhart: Una extensión de la dualidad de Priestley al contexto de los retículos acotados.

Martha Yaneth Mancera Camacho
Matemático

Trabajo final para optar al título de
Magister en Ciencias - Matemáticas

Director
Lorenzo Acosta Gempeler
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2017

Dedicado a

A mis padres

Gonzalo Mancera y Luz Camacho.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por las infinitas bendiciones que ha puesto en mi camino.

Por siempre estaré agradecida con el Profesor Lorenzo Acosta quien con cada aporte a lo largo de mi formación como matemática ha enriquecido de manera significativa este proceso académico. Su paciencia, sabiduriá y excepcional manera de guiar el presente trabajo no me dejan para expresar más que palabras de admiración y respeto.

Al motor de mi vida, mis padres. Agradezco su amor infinito hacia mi. Su compañía y cada uno de sus consejos me han permitido mantener siempre una sonrisa frente a cada adversidad.

A mis hermanos Luz y Hernán quienes han sido mi ejemplo y modelo a seguir.

A mis compañeros de carrera pues más que un apoyo académico me brindaron su valiosa amistad.

Resumen :

En este trabajo se estudia la teoría de representaciń hecha por Urquhart para retículos acotados y adicionalmente se establece una co-equivalencia entre la categoría de los espacios de Urquhart y la categoría de los retículos acotados. Así, esta dualidad extiende la de Priestley al contexto de los retículos acotados.

Abstract:

In this paper, Urquhart's representation theory for bounded lattices is studied. Additionally, a coequivalence between Urquhatr's category of spaces and that of bounded lattices is established. Thus, this duality extends that of Priestley to arbitrary bounded lattices.

Palabras clave: Retículo , dualidad, espacio espectral, espacio de Priestley, espacio de Urquhart.

Keywords: Lattice, duality, spectral space, Urquhart's space, Priestley's space.

Índice general

Índice general **II**

Introducción **1**

1. Teoría previa **4**

1.1. Nociones básicas de retículos 4

1.2. Representación de Stone 9

1.3. Representación de Priestley 11

1.4. Conjuntos pre-ordenados 14

2. Representación de Urquhart **20**

2.1. Conceptos Preliminares 20

2.2. El espacio dual de un retículo 24

2.3. Espacios de Urquhart 26

2.4. Equivalencia entre las categorías $\mathfrak{R}_{cp}$ y $\mathfrak{U}$ 33

2.5. Equivalencia con la representación de Priestley en retículos distributivos . . . 38

Conclusiones y preguntas **43**

Bibliografía **44**

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar una extensión de la conocida dualidad de Priestley para retículos distributivos. Empezaremos entonces explicando un poco en qué consiste la dualidad de Priestley, su relación con la dualidad de Stone y cuáles son las ideas fundamentales que permiten su generalización al contexto de retículos arbitrarios.

Priestley establece en [11] una dualidad entre la categoría de los retículos distributivos acotados y la categoría de los espacios de Stone ordenados, llamados desde entonces espacios de Priestley.

La *dualidad de Priestley* tiene como origen la *dualidad de Stone*. En ambos casos la clave es el homomorfismo de retículos

$$d : D \to \wp(\mathcal{IP}(D)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{IP}(D) : x \notin I\},$$

entre el retículo distributivo D y el retículo de las partes del conjunto $\mathcal{IP}(D)$ de los ideales primos de D. Este homomorfismo es inyectivo y por consiguiente es un isomorfismo entre D y la imagen de d. La pregunta fundamental es

¿cómo recuperamos el retículo D a partir de la imagen de d?

La idea original de Stone fue dotar a $\mathcal{IP}(D)$ de una topología y caracterizar topológicamente los elementos de la imagen de d. Es así como surge la *topología de la envolvente del núcleo* (*hull-kernel topology*) que posteriormente recibirá el nombre de *topología de Zariski*. En este caso, esta topología no es otra que la generada por la imagen de la función d. El conjunto $\mathcal{IP}(D)$ dotado con esta topología se conoce como el espectro primo de D y se nota $spec(D)$. Stone recupera el retículo original tomando los subconjuntos abiertos-compactos de $spec(D)$. Estudiando las propiedades topológicas de $spec(D)$ se llega a que, cuando D es acotado, este es un espacio compacto, sobrio y coherente, y que cualquier espacio con estas propiedades es homeomorfo al espectro primo del retículo de sus abiertos-compactos. Los espacios topológicos de este tipo se conocen como *espacios espectrales*, debido al trabajo de Hochster [7], quien caracterizó topológicamente los espacios topológicos que son homeomorfos a espectros de Zariski de anillos conmutativos con unidad. La dualidad de Stone es, pues, una co-equivalencia entre la categoría de los retículos distributivos acotados y la categoría de los espacios espectrales.

Para algunos, el resultado de Stone tiene el defecto de que los espacios espectrales no son, en general, espacios de Hausdorff.

El trabajo de Priestley consiste en modificar el funtor espectro de Stone para que los espacios topológicos considerados resulten ser de Hausdorff. Se dota entonces al conjunto $\mathcal{IP}(D)$ de una topología más fina que la de Zariski, imponiendo la condición de que los elementos de la imagen de d sean a la vez abiertos y cerrados. En realidad, este proceso corresponde a hausdorffizar el espectro primo de D, agregando la menor cantidad posible de abiertos para que el espacio sea de Hausdorff y no pierda la propiedad de compacidad. Se obtienen de esta manera espacios de Hausdorff, compactos y totalmente disconexos, que corresponden exactamente a los espectros primos de los retículos de Boole y por esto son llamados en algunos textos *espacios de Boole*. Sin embargo, desde la publicación del libro de Johnstone [8], reciben el nombre de *espacios de Stone* (no confundir con los espacios de Stone de [3]).

Una observación interesante es que este proceso de hausdorffización puede describirse considerando la función

$$\varepsilon : D \to \wp(\mathcal{IP}(D)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{IP}(D) : x \in I\}$$

y generando la topología con las imágenes de las funciones d y ε. Nótese que, como en los retículos distributivos el complemento de un ideal primo es un filtro primo, y viceversa, la función d puede identificarse con la función

$$\delta : D \to \wp(\mathcal{FP}(D)) : x \mapsto \{F \in \mathcal{FP}(D) : x \in F\}$$

del retículo D en el retículo de las partes del conjunto $\mathcal{FP}(D)$ de los filtros primos de D. La base del mecanismo de Priestley no es otra cosa que el ensamblaje de las funciones δ y ε.

El problema ahora es que hay retículos distributivos no isomorfos a los que les corresponden espacios de Stone homeomorfos y se pierde así la fidelidad del funtor de Stone. La idea de Priestley para corregir este defecto consistió en dotar al espacio topológico de un orden compatible de cierta manera con la topología. Se obtienen así los espacios de Stone ordenados o *espacios de Priestley*. El retículo original D se recupera a partir de su espacio de Priestley tomando sus abiertos-cerrados decrecientes (o iniciales). Se establece entonces una dualidad entre la categoría de los retículos distributivos acotados y la categoría de los espacios de Priestley. Esta dualidad coincide con la de Stone para los retículos de Boole, pues en este caso la relación de orden es la trivial.

¿Se puede extender la dualidad de Priestley al contexto general de los retículos acotados (no necesariamente distributivos)?

La función d de Stone ya no sirve pues deja de ser inyectiva en los retículos que no son distributivos. Se introduce entonces una nueva noción: la de *ideal casi-primo*. Un ideal I es casi-primo si existe un filtro F que es maximal entre los filtros disyuntos de I. De manera dual se define el concepto de *filtro casi-primo*. Cambiando el conjunto de los filtros primos por el de los filtros casi-primos se obtiene, para cada retículo acotado L, una función análoga a la función δ:

$$\mu : L \to \wp(\mathcal{FCP}(L)) : x \mapsto \{F \in \mathcal{FCP}(L) : x \in F\}.$$

Esta función es una inmersión de conjuntos ordenados del retículo L en el retículo de las partes del conjunto $\mathcal{FCP}(L)$ de los filtros casi-primos de L. Así, el retículo L es isomorfo a la imagen de μ. Es claro que esta imagen no será un subretículo de $\wp(\mathcal{FCP}(L))$ pues

no puede ser distributivo (a menos que L lo sea). Sin embargo, la función μ preserva la estructura de inf-semi-retículo de L.

De la misma manera se obtiene una función análoga a la función ε :

$$\nu : L \to \wp(\mathcal{ICP}(L)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{ICP}(L) : x \in I\},$$

que resulta ser una inmersión de conjuntos ordenados del retículo L° (dual de L) en el retículo de las partes del conjunto $\mathcal{ICP}(L)$ de los ideales casi-primos de L. Esta función tampoco es homomorfismo de retículos pero preserva la estructura de inf-semi-retículo de L°, es decir, permite recuperar la estructura de sup-semi-retículo de L.

La idea genial de Urquhart en [16] consiste en ensamblar estas dos funciones considerando el conjunto $\mathcal{M}(L)$ de los pares maximales filtro-ideal del retículo L. Se producen así dos funciones

$$u, v : L \to \wp(\mathcal{M}(L))$$

una isótona y la otra antítona, que permiten recuperar las dos estructuras de semi-retículo de L.

Siguiendo las ideas de Priestley, se dota a $\mathcal{M}(L)$ de la topología generada por las imágenes de u y de v y se observa que este conjunto está dotado con dos relaciones naturales de pre-orden. El estudio de las propiedades de este espacio topológico doblemente pre-ordenado, da lugar a los espacios que hemos llamado *espacios de Urquhart*. También en este caso es posible caracterizar la imagen de u (y recuperar así el retículo L) escogiendo ciertos subconjuntos de $\mathcal{M}(L)$ que tienen propiedades relacionadas con la topología y con los pre-órdenes y se llaman *conjuntos doblemente cerrados estables*. Se establece de este modo una correspondencia entre la clase de los retículos acotados y la clase de los espacios de Urquhart. Definiendo apropiadamente los morfismos, cosa que no hace Urquhart, esta correspondencia resulta ser una co-equivalencia entre la categoría de los retículos acotados y la categoría de los espacios de Urquhart. Esta dualidad extiende a la de Priestley, pues en el caso de los retículos distributivos las dos relaciones de pre-orden resultan ser una relación de orden y su recíproca.

Hay que señalar que, contrario a lo que afirman algunos autores [2], aunque la dualidad de Urquhart funciona perfectamente y extiende a la de Priestley, los espacios de Urquhart no son, en general, espacios de Hausdorff.

En el presente trabajo se explicará de manera detallada las ideas de Urquhart mostradas en [16]. Para ello se divide la explicación en dos capítulos:

En el Capítulo 1 se contextualiza al lector con la teoría de retículos, se hace una presentación breve de las representaciones hechas por Stone [15] y Priestley [11] y por último se dedica una sección a los conjuntos pre-ordenados, esto con el fin de brindar las herramientas necesarias para la compresión de la teoría de mayor interés, que se presenta en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 2 se desarrolla de manera detallada la representación hecha por Urquhart [16], su equivalencia con la representación de Priestley en el caso de los retículos distributivos y (de manera adicional a lo presentado en [16]) se muestra la co-equivalencia entre la categoría de los espacios de Urquhart y la categoría de los retículos cuyos morfismos son homomorfismos de retículos con una propiedad adicional.

CAPÍTULO 1

Teoría previa

Este capítulo tiene como principal objetivo brindar las herramientas que necesita el lector para comprender la representación topológica hecha por Urquhart [16] para retículos acotados, la cual será explicada de manera detallada en el Capítulo 2. Se presentan entonces de manera breve algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de retículos, las representaciones topológicas hechas por Stone y Priestley para retículos distributivos acotados y algunos resultados de interés en conjuntos pre-ordenados.

1.1. Nociones básicas de retículos

Los conceptos presentados en esta sección fueron seleccionados con el fin de familiarizar al lector con algunos conceptos sobre la teoría de retículos que serán utilizados en lo que sigue del presente trabajo. Las demostraciones de los teoremas pueden ser consultados en las referencias [1], [3], o [4].

Definición 1.1.1. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $Y \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es una* ***cota superior*** *de Y, si $y \leq x$ para todo $y \in Y$. De manera dual, x será una* ***cota inferior*** *de Y, si $x \leq y$ para todo $y \in Y$.*

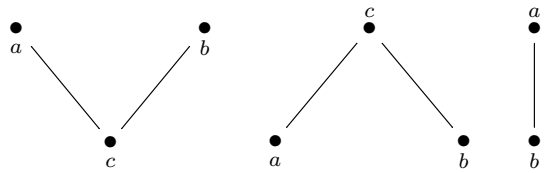
La mínima de las cotas superiores de Y (si existe) es llamada ***supremo*** *o* ***extremo superior de Y*** *y se denota* ***sup Y****.*

La máxima de las cotas inferiores de Y (si existe) es llamada ***ínfimo*** *o* ***extremo inferior de Y*** *y se denota* ***ínf Y****.*

Definición 1.1.2. *Un* ***semi-retículo superior*** *(respectivamente* ***inferior****) es un conjunto ordenado $(X, \leq)$ en el cual todo sub-conjunto de la forma $\{x, y\}$ tiene extremo superior (respectivamente inferior) y será denotado por $x \vee y$ (respectivamente $x \wedge y$).*

Ejemplo 1.1.1. *Sea X un conjunto. El conjunto $\wp(X)$ ordenado por inclusión es un semi-retículo superior, donde $\vee$ es la unión y también es un semi-retículo inferior, donde $\wedge$ es la intersección.*

Ejemplo 1.1.2. *Un semi-retículo puede ser representando mediante diagramas de Hasse. Los siguientes son algunos ejemplos de semi-retículos.*



Proposición 1.1.1. *Si X es un semi-retículo superior (respectivamente inferior) entonces $\vee$ (respectivamente $\wedge$) es una operación binaria idempotente, conmutativa y asociativa.*

Demostración. Las condiciones de idempotencia y conmutatividad se siguen por definición. Para verificar la asociatividad de $\vee$ considere $x, y, z, c \in X$ tales que

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z \leq c &\Leftrightarrow x \vee y \leq c \text{ y } z \leq c \\ &\Leftrightarrow x \leq c \text{ y } y \leq c \text{ y } z \leq c \\ &\Leftrightarrow x \leq c \text{ y } y \vee z \leq c \\ &\Leftrightarrow x \vee (y \vee z) \leq c.\end{aligned}$$

Por lo tanto se puede concluir que $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

De manera dual se verifica la asociatividad para $\wedge$. □

De la proposición anterior tenemos que $(X, \vee)$ resulta ser un semigrupo conmutativo e idempotente.

Además es posible definir el orden $\leq$ en términos de $\vee$ mediante la siguiente equivalencia: Para cada $x, y \in X$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

De hecho, en caso de tener un semigrupo conmutativo e idempotente $(X, \circ)$, es posible definir el retículo $(X, \preceq)$ donde el orden $\preceq$ se define en términos de $\circ$ mediante la equivalencia

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \circ y = y. \tag{1.1}$$

Esto se verifica en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.2. *Sea $(X, \circ)$ un conjunto dotado con una operación binaria. Si se define $\preceq$ como en la equivalencia (1.1) entonces:*

1. *$\preceq$ es reflexiva si y solo si $\circ$ es idempotente.*
2. *$\preceq$ es antisimétrica si y solo si $\circ$ es conmutativa.*
3. *$\preceq$ es transitiva si y solo si $\circ$ es asociativa.*

Definición 1.1.3. *Un **retículo** es un conjunto ordenado que es de manera simultánea un semi-retículo superior y un semi-retículo inferior.*

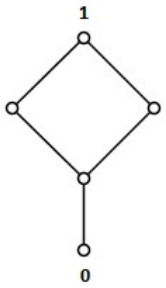
Definición 1.1.4. *Sea L un retículo. Si L tiene mínimo este elemento se notará 0 y si L tiene máximo este elemento de notará 1. Un retículo con 0 y 1 se llama retículo acotado.*

Ejemplo 1.1.3.

1. *Del Ejemplo 1.1.1 se deduce que para un conjunto X, $(\wp(X), \subseteq)$ es un retículo.*

2. *Toda cadena es un retículo.*

3. *El siguiente conjunto ordenado es un retículo acotado.*



4. *El primer y el segundo semi-retículos del Ejemplo 1.1.2 no son retículos.*

De la Proposición 1.1.1 se tiene que tanto $\vee$ como $\wedge$ son operaciones binarias idempotentes, conmutativas y asociativas. Adicional a estas propiedades los operadores $\vee$ y $\wedge$ se relacionan en un retículo mediante las **leyes de absorción** que serán descritas a continuación.

Proposición 1.1.3. *Si L un retículo y $x, y \in L$ entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes identidades.*

1. $x \vee (x \wedge y) = x$.
2. $x \wedge (x \vee y) = x$.

Demostración. La primera identidad se sigue de lo siguiente:

$$x \leq x \vee (x \wedge y) \leq x \vee x = x.$$

y la segunda se tiene por dualidad.

□

Proposición 1.1.4. *Si L es un retículo entonces para todo $x, y, z \in L$ se tiene:*

1. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
2. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Demostración. Como $x \leq (x \vee y)$ y $x \leq (x \vee z)$ entonces

$$x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{1.2}$$

Por otro lado

$$y \wedge z \leq y \leq x \vee y \quad \text{y} \quad y \wedge z \leq z \leq x \vee z,$$

entonces

$$y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{1.3}$$

Así, de (1.2) y (1.3) se tiene que

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

La condición 2 se satisface por dualidad. □

Definición 1.1.5. *Sea L un retículo. Se dice que L es* ***distributivo*** *si para todo $x, y, z \in L$ se tiene que*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Proposición 1.1.5. *Si L es un retículo entonces son equivalentes:*

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *para todo* $a, b, c \in L$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *para todo* $a, b, c \in L$

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2)

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))\\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)\\ &= a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1) se satisface por dualidad.

□

Ejemplo 1.1.4. *Los siguientes son retículos no distributivos:*

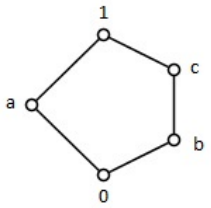


FIGURA 1.1. Retículo N_5.

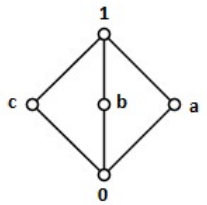


FIGURA 1.2. Retículo M_5.

Teorema 1.1.1. ***(Birkhoff)*** *Un retículo L es distributivo si y solo si L no contiene subretículos isomorfos a M_5 o a N_5.*

Definición 1.1.6. *Sea L un retículo. Un* ***ideal*** *de L es un subconjunto no vacío I de L que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $x, y \in I$, se tiene que $x \vee y \in I$.*

2. *Para todo $x \in L$ y todo $y \in I$, si $x \leq y$ entonces $x \in I$.*

De manera dual se tiene la siguiente definición:

Definición 1.1.7. *Sea L un retículo. Un **filtro** de L es un subconjunto no vacío F de L que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $x, y \in F$, se tiene que $x \wedge y \in F$*

2. *Para todo $x \in L$ y todo $y \in F$, si $y \leq x$ entonces $x \in F$.*

Observación 1.1.1. *Sea L un retículo. En adelante $\mathcal{I}(L)$ denotará el conjunto de sus ideales y $\mathcal{F}(L)$ el conjunto de sus filtros.*

Definición 1.1.8. *Sea I un ideal de un retículo L. I es un ideal maximal si*

1. *I es un ideal propio.*

2. *Para todo ideal J de L, si $I \subseteq J$ entonces $I = J$ o $J = L$.*

Definición 1.1.9. *Sea I un ideal de un retículo L. Se dirá que I es un **ideal primo** si satisface las siguientes condiciones:*

1. *I es un ideal propio de L.*

2. *Para todo $x, y \in L$, si $x \wedge y \in I$ entonces $x \in I$ o $y \in I$.*

*De manera dual se define un **filtro primo**.*

Observación 1.1.2. *Sea L un retículo. En adelante $\mathcal{IP}(L)$ denotará el conjunto de los ideales primos de L y $\mathcal{FP}(L)$ el conjunto de los filtros primos de L.*

Teorema 1.1.2. *(**Teorema del ideal primo**) Sea L un retículo distributivo. Si I es un ideal de L, F es un filtro de L y $F \cap I = \emptyset$ entonces existe un ideal primo P de L tal que $I \subseteq P$ y $F \cap P = \emptyset$.*

Definición 1.1.10. *Sean L_1 y L_2 retículos. Una función $f : L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo de retículos si para todo par de elementos $x, y \in L_1$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

2. $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Definición 1.1.11. *Un homomorfismo de retículos $f : L_1 \longrightarrow L_2$ es acotado si:*

1. *Si L_1 tiene 0, entonces L_2 tiene 0 y $f(0) = 0$.*

2. *Si L_1 tiene 1, entonces L_2 tiene 1 y $f(1) = 1$.*

Observación 1.1.3. *En las representaciones de Stone y Priestley se notará por $\mathfrak{D}_0^1$ a la categoría de los retículos distributivos acotados en donde sus morfismos son los homomorfismos acotados de retículos.*

1.2. Representación de Stone

En esta sección se mostrará la representación topológica hecha por Stone [14] para retículos distributivos acotados. Para ello el conjunto de los ideales primos $\mathcal{IP}(L)$ de un retículo L será dotado con la topología τ cuya base es la imagen de la función

$$d : L \longrightarrow \wp(\mathcal{IP}(L)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{IP}(L) : x \notin I\}.$$

Se mostrará que d resulta ser un isomorfismo del retículo L en el retículo conformado por los conjuntos abiertos-compactos del espacio topológico $(\mathcal{IP}(L), \tau)$.

Las demostraciones de los resultados mostrados pueden ser consultadas en [3].

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es* ***coherente*** *si tiene una base de abiertos-compactos cerrada para intersecciones finitas.*

Definición 1.2.2. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{W}$ de subconjuntos de X se dice* ***bi-reducible*** *si para todo par de subconjuntos no vacíos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ de $\mathcal{W}$ donde $\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{T}} B$ existen subconjuntos finitos $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ tales que $\bigcap_{A\in\mathcal{S}'} A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{T}'} B$.*

Definición 1.2.3. *Un espacio topológico X será llamado de* ***Balbes-Dwinger*** *si es T_0, coherente y la colección de abiertos-compactos no vacíos es bi-reducible.*

Observación 1.2.1. *En [3], los espacios que acá son llamados de Balbes-Dwinger reciben el nombre de espacios de Stone. El nombre de Balbes-Dwinger es adoptado de [1], pues libros como [8] llaman espacios de Stone a otro tipo de espacios.*

Sea L un retículo. Considere la función

$$d : L \longrightarrow \wp(\mathcal{IP}(L)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{IP}(L) : x \notin I\}. \tag{1.4}$$

La imagen de esta función resulta ser base para una topología τ. Al espacio topológico $(\mathcal{IP}(L), \tau)$ se le llamará espectro primo de L y en adelante será denotado $\mathfrak{spec}(L)$.

Teorema 1.2.1. *Si L es un retículo distributivo entonces $\mathfrak{spec}(L)$ es un espacio de Balbes-Dwinger y los abiertos compactos son $\{\emptyset\} \cup \{d(a) : a \in L\}$.*

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto no vacío $A \subseteq X$ es* ***fundamental*** *si es abierto-compacto. El conjunto vacío es fundamental en X si toda colección de abiertos-compactos con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

En adelante, para un espacio topológico X la colección de sus subconjuntos fundamentales será notada por $\mathfrak{F}(X)$.

Proposición 1.2.1. *Sea L un retículo distributivo.*

1. *L tiene 1 si y solo si $\mathfrak{spec}(L)$ es compacto.*
2. *L tiene 0 si y solo si $\emptyset$ es fundamental en $\mathfrak{spec}(L)$.*

Sea L un retículo distributivo. Puesto que todos los abiertos compactos no vacíos de $\mathfrak{spec}(L)$ son de la forma $d(a)$ con $a \in L$ y en caso de que L tenga 0 se tiene que $d(0) = \emptyset$, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2. *Si L es un retículo distributivo entonces $\mathfrak{F}(\mathfrak{spec}(L)) = Im\ d$.*

Note que si X es un espacio de Balbes-Dwinger, $\mathfrak{F}(X)$ es un subretículo de $\wp(X)$. Resulta un ejercicio sencillo verificar que $\{A \in \mathfrak{F}(X) : x \notin A\}$ es un ideal primo de $\mathfrak{F}(X)$, lo que da lugar a la definición de la función

$$h : X \longrightarrow \mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X)) : x \mapsto \{A \in \mathfrak{F}(X) : x \notin A\}. \tag{1.5}$$

h resulta ser un homeomorfismo de espacios topológicos y por lo tanto se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.2.3. *Si X es un espacio de Balbes-Dwinger, entonces $\mathfrak{F}(X)$ es un retículo distributivo y $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X))$ es homeomorfo a X.*

La función d es un isomorfismo de retículos, en caso de ser L un retículo distributivo. Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 1.2.4. *Si L es un retículo distributivo, entonces $\mathfrak{F}(\mathfrak{spec}(L))$ es isomorfo a L.*

De los resultados previos se tienen dos aplicaciones entre la clase de los retículos distributivos **D** y la clase de los espacios de Balbes-Dwinger **BD**:

$$\mathfrak{spec} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{BD} : L \longmapsto \mathfrak{spec}(L)$$

$$\mathfrak{F} : \mathbf{BD} \longrightarrow \mathbf{D} : X \longmapsto \mathfrak{F}(X)$$

En donde $\mathfrak{F}(\mathfrak{spec}(L)) \cong L$ y $\mathfrak{spec}(\mathfrak{F}(X)) \cong X$. Lo ideal sería entonces extender estas aplicaciones al contexto categórico. A continuación se describe la representación topológica hecha en [3] para la categoría de los retículos distributivos acotados $\mathfrak{D}_0^1$ y la co-equivalencia que existe con la categoría que tiene como objetos a los espacios de Balbes-Dwinger.

Definición 1.2.5. *Una función entre espacios topológicos es **fuertemente continua** si es continua y envía fundamentales en fundamentales por imagen recíproca.*

La categoría que tiene como objetos a los espacios de Balbes-Dwinger y como morfismos a las funciones fuertemente continuas será denotada $\mathfrak{BD}$.

Definición 1.2.6. *Un espacio topológico X se llama **espacio espectral** si es un espacio de Balbes-Dwinger compacto, en donde $\emptyset$ es fundamental.*

Se notará por $\mathfrak{E}$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{BD}$ cuyos objetos son los espacios espectrales.

Note entonces que la aplicación $\mathfrak{spec}$ se puede restringir a una aplicación de los objetos de $\mathfrak{D}_0^1$ en los objetos de $\mathfrak{E}$. Del mismo modo, la aplicación $\mathfrak{F}$ se puede restringir a una aplicación de los objetos de $\mathfrak{E}$ en los objetos de $\mathfrak{D}_0^1$.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : L \longrightarrow M$ un homomorfismo acotado de retículos distributivos. La función*

$$\mathfrak{spec}(f) : \mathfrak{spec}(M) \longrightarrow \mathfrak{spec}(L) : I \mapsto f^*(I)$$

es fuertemente continua.

Proposición 1.2.3. *Sea $g : X \longrightarrow Y$ una función fuertemente continua entre espacios espectrales. La aplicación*

$$\mathfrak{F}(g) : \mathfrak{F}(Y) \longrightarrow \mathfrak{F}(X) : A \mapsto g^*(A)$$

es un homomorfismo acotado.

Se llega entonces a que $\mathfrak{spec}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores contravariantes entre las categorías $\mathfrak{D}_0^1$ y $\mathfrak{E}$. Estos funtores determinarán entonces la co-equivalencia deseada.

Sea $f : L \longrightarrow M$ un morfismo en $\mathfrak{D}_0^1$. Se notará por d_L a la función dada en (1.4) correspondiente a un retículo L. Demostrando la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "d_L"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec}(L) \arrow[d, "\mathfrak{F}\circ\mathfrak{spec}(f)"] \\
M \arrow[r, "d_M"] & \mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec}(M)
\end{tikzcd}$$

se verifica que $\mathbf{d} = (d_L)_{L \in Ob\mathfrak{D}_0^1}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{D}_0^1$ en el funtor $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{spec}$.

Del mismo modo, si se considera un morfismo $g : X \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{E}$ y notando h_X la función definida en (1.5) correspondiente al espacio espectral X, se tiene que la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F}(X) \arrow[d, "\mathfrak{spec}\circ\mathfrak{F}(g)"] \\
Y \arrow[r, "h_Y"] & \mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

demuestra que $\mathbf{h} = (h_X)_{X \in Ob\mathfrak{E}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{E}$ en el funtor $\mathfrak{spec} \circ \mathfrak{F}$.

Concluyendo así que las categorías $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{D}_0^1$ son co-equivalentes.

Observación 1.2.2. *En [1] se muestra que las categorías $\mathfrak{BD}$ y $\mathfrak{D}$ son también co-equivalentes.*

1.3. Representación de Priestley

En esta sección se presenta la teoría desarrollada por Priestley en [11] y [5].

Del mismo modo que en la representación de Stone vista en la sección anterior, considere el conjunto de los ideales primos $\mathcal{IP}(L)$ de un retículo distributivo acotado L y sea

$$d : L \longrightarrow \wp(\mathcal{IP}(L)) : x \mapsto \{I \in \mathcal{IP}(L) : x \notin I\}. \tag{1.6}$$

La distinción con la representación de Stone está en dotar al conjunto $\mathcal{IP}(L)$ con la topología τ generada por la sub-base

$$\mathcal{B} := \{d(a) : a \in L\} \cup \{d(a)^c : a \in L\}.$$

Y, del mismo modo que en la representación de Stone, se verifica que la función d resulta ser un isomorfismo, solo que esta vez será entre el retículo L y el retículo conformado por los conjuntos abiertos-cerrados decrecientes del espacio topológico $(\mathcal{IP}(L), \tau)$ ordenado por inclusión.

Teorema 1.3.1. *Si L es un retículo distributivo acotado entonces $(\mathcal{IP}(L), \tau)$ es compacto.*

Definición 1.3.1. *Sean X un conjunto ordenado y $Y \subseteq X$.*

*i) Y es un conjunto **decreciente**, si para todo $y \in Y$ y todo $x \in X$, se tiene que $x \leqslant y$ implica $x \in Y$.*

*ii) Y es un conjunto **creciente**, si para todo $y \in Y$ y todo $x \in X$, se tiene que $y \leqslant x$ implica $x \in Y$.*

El retículo de los conjuntos crecientes de un conjunto ordenado X será denotado por $\mathbf{C}(X)$ y el de los conjuntos decrecientes $\mathbf{D}(X)$.

Observación 1.3.1. *Este nombre no es estándar, algunos autores (ver por ejemplo [5]) a este tipo de conjuntos los llaman ascendentes, superiores o finales, de manera dual descendentes, inferiores o iniciales.*

Definición 1.3.2. *Un espacio topológico (X, τ) se llama **espacio ordenado** si está dotado con una relación de orden $\leq$.*

Definición 1.3.3. *Se llama a un espacio ordenado $(X, \tau, \leq)$ **orden totalmente disconexo** si dados $x, y \in X$ con $y \not\leq x$, existen conjuntos abiertos-cerrados disjuntos $U \in \boldsymbol{C}(X)$ y $W \in \boldsymbol{D}(X)$ tales que $y \in U$ y $x \in W$.*

Los espacios orden totalmente disconexos que además son compactos se conocen como **espacios de Stone ordenados** o **espacios de Priestley**.

Siguiendo la notación de [11] y [5], al espacio $(\mathcal{IP}(L), \tau)$ de un retículo distributivo acotado L ordenado por inclusión, se le llama **espacio dual** de L y se notará $\mathscr{P}(L) = (\mathcal{IP}, \tau, \subseteq)$.

Respecto al espacio dual de un retículo distributivo L se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 1.3.2. *El espacio dual de un retículo distributivo acotado L es orden totalmente disconexo y por lo tanto, es un espacio de Priestley.*

Teorema 1.3.3. *Si L es un retículo distributivo acotado entonces los conjuntos abiertos-cerrados decrecientes de su espacio dual son exactamente los conjuntos de la forma $d(a)$, donde $a \in L$.*

Dado un espacio de Priestley X definimos su **retículo dual** $\mathscr{L}(X)$ como la clase de todos sus conjuntos abiertos-cerrados decrecientes ordenados por inclusión. Claramente este es un retículo distributivo acotado.

Teorema 1.3.4. *Si L es un retículo distributivo y acotado, entonces $L \cong \mathscr{L}(\mathscr{P}(L))$.*

Si X es un espacio de Priestley, el conjunto

$$\widehat{x} = \{B \in \mathscr{L}(X) : x \notin B\}$$

es un ideal primo de $\mathscr{L}(X)$ y por lo tanto, da lugar a la definición de la siguiente función:

$$h : X \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{L}(X)) : x \mapsto \widehat{x} \tag{1.7}$$

que resulta ser un isomorfismo de conjuntos ordenados y un homeomorfismo de espacios topológicos. Así, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.5. *Si X es un espacio de Priestley, entonces $X \cong \mathscr{P}(\mathscr{L}(X))$.*

Notando $\mathbf{P}$ a la clase de los espacios de Priestley y $\mathbf{D}_0^1$ a la clase de los retículos distributivos acotados. Tenemos entonces dos aplicaciones:

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{D}_0^1 : P \mapsto \mathscr{L}(P)$$

$$\mathscr{P} : \mathbf{D}_0^1 \longrightarrow \mathbf{P} : L \mapsto \mathscr{P}(L)$$

Para extenderlas al contexto categórico, como se hizo en la representación de Stone, se define entonces la categoría que tiene como objetos los espacios de Priestley y como morfismos las funciones continuas isótonas (que respetan orden). Esta categoría se notará $\mathfrak{P}$.

Proposición 1.3.1. *Si $f : L \longrightarrow M$ es un morfismo de $\mathfrak{D}_0^1$ entonces la aplicación*

$$\mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(M) \longrightarrow \mathscr{P}(L) : I \mapsto f^*(I)$$

es una función continua e isótona.

Proposición 1.3.2. *Si $g : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathfrak{P}$ entonces la aplicación*

$$\mathscr{L}(g) : \mathscr{L}(Y) \longrightarrow \mathscr{L}(X) : A \mapsto g^*(A)$$

es un homomorfismo de retículos acotados.

Por las proposiciones anteriores es posible verificar que $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$ son funtores contravariantes entre las categorías $\mathfrak{D}_0^1$ y $\mathfrak{P}$. Serán estos funtores los que determinen la co-equivalencia entre las categorías.

Sea $f : L \longrightarrow M$ un morfismo en $\mathfrak{D}_0^1$, notando d_L a la función dada en (1.6), la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "d_L"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{L} \circ \mathscr{P}(L) \arrow[d, "\mathscr{L}\circ\mathscr{P}(f)"] \\ M \arrow[r, "d_M"] & \mathscr{L} \circ \mathscr{P}(M) \end{tikzcd}$$

verifica que $d = (d_L)_{L \in Ob\mathfrak{D}_0^1}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{D}_0^1$ en el funtor $\mathscr{L} \circ \mathscr{P}$.

Del mismo modo, si se considera un morfismo $g : X \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{P}$ y notando por h_X la función (1.7), se tiene que la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "g"'] & \mathscr{P} \circ \mathscr{L}(X) \arrow[d, "\mathscr{P}\circ\mathscr{L}(g)"] \\ Y \arrow[r, "h_Y"] & \mathscr{P} \circ \mathscr{L}(Y) \end{tikzcd}$$

demuestra que $h = (h_X)_{X \in Ob\mathfrak{P}}$ es una transformación natural del funtor idéntico de $\mathfrak{P}$ al funtor $\mathscr{P} \circ \mathscr{L}$.

Se puede concluir entonces que las categorías $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{D}_0^1$ son co-equivalentes.

1.4. Conjuntos pre-ordenados

En esta sección se presentan algunas definiciones y resultados de interés sobre conjuntos pre-ordenados, que servirán como herramienta fundamental para el desarrollo de la teoría de representación para retículos mostrada en el Capítulo 2. El lector notará que algunos de los conceptos presentados coinciden con los ya conocidos en el contexto de los conjuntos ordenados, pero nuestro interés se centrará en los conjuntos pre-ordenados.

Definición 1.4.1. *Un pre-orden es una relación binaria $\leqslant$ sobre un conjunto X tal que para todo $x, y, z \in X$,*

i) $x \leqslant x$ *(Reflexividad),*

ii) Si $x \leqslant y$ *y* $y \leqslant z$ *entonces* $x \leqslant z$ *(Transitividad).*

Observación 1.4.1. *En adelante el concepto de conjunto* ***creciente*** *(****decreciente****) se define como en la Definición 1.3.1, salvo que en este caso la relación es de pre-orden.*

Observación 1.4.2. *Sea X un conjunto pre-ordenado. Note que:*

i) Un subconjunto Y de X es creciente si y solo si Y^c es un subconjunto decreciente.

ii) Al ordenar los elementos de $\boldsymbol{C}(X)$ *(respectivamente los de* $\boldsymbol{D}(X)$*) por inclusión, se tiene que* $\boldsymbol{C}(X)$ *(respectivamente* $\boldsymbol{D}(X)$*) tiene estructura de retículo. De hecho,* $\boldsymbol{C}(X)$ *y* $\boldsymbol{D}(X)$ *son subretículos de* $\wp(X)$.

Definición 1.4.2. *Sean* X *un conjunto pre-ordenado y* $Y \subseteq X$*. Se definen*

$$\uparrow Y = \{x \in X : (\exists y \in Y)\ y \leqslant x\} \quad y \quad \downarrow Y = \{x \in X : (\exists y \in Y)\ x \leqslant y\}.$$

Observación 1.4.3. *Note que* $\uparrow Y$ *es el conjunto creciente más pequeño que contiene a* Y*, por lo tanto* Y *es un conjunto creciente si y solo si* $\uparrow Y = Y$*. De manera dual se tiene lo anterior para* $\downarrow Y$*.*

Definición 1.4.3. *Sean* X *un conjunto pre-ordenado y* $\mathscr{F}$ *una familia de subconjuntos de* X*.* $\mathscr{F}$ *será una* ***familia separadora*** *de* X *si para todo* $x, y \in X$*, tales que* $x \nleqslant y$ *existe* $Z \in \mathscr{F}$ *tal que* $x \in Z$ *y* $y \notin Z$*.*

Funciones entre conjuntos pre-ordenados

El objetivo de esta sección es presentar una conexión de Galois que se produce cada vez que dotamos a un conjunto con dos relaciones de pre-orden. Las funciones l y r que constituyen esta conexión de Galois serán de gran utilidad en el Capítulo 2.

Definición 1.4.4. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función entre conjuntos pre-ordenados. Se dice que:*

i) f *es* ***isótona*** *si para todo* $x, y \in X$*, se tiene que* $x \leqslant y$ *implica* $f(x) \leqslant f(y)$*.*

ii) f *es* ***antítona*** *si para todo* $x, y \in X$*, se tiene que* $x \leqslant y$ *implica* $f(x) \geqslant f(y)$*.*

iii) f *es una* ***inmersión*** *si para todo* $x, y \in X$ *se tiene que*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

iv) f *es un* ***isomorfismo*** *de conjuntos pre-ordenados si es una inmersión sobreyectiva.*

Observación 1.4.4. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es una función y* $B \subseteq Y$*, notaremos*

$$f^*(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Proposición 1.4.1. *Sean* $f : X \longrightarrow Y$ *una función isótona entre conjuntos pre-ordenados y* $W \subseteq Y$*. Si* $W \in \boldsymbol{C}(Y)$*, entonces* $f^*(W) \in \boldsymbol{C}(X)$*.*

Demostración. Sea $x \in f^*(W)$ y $y \in X$ tal que $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ y $f(x) \in W$, por lo tanto $f(y) \in W$, luego $y \in f^*(W)$. Se puede concluir entonces que $f^*(W) \in \boldsymbol{C}(X)$. □

Definición 1.4.5. *Sea* X *un conjunto pre-ordenado. Una función* $f : X \longrightarrow X$ *es un* ***operador de clausura*** *si satisface las siguientes condiciones:*

i) f *es isótona.*

ii) Para todo $x \in X$ se tiene que $x \leqslant f(x)$.

iii) Para todo $x \in X$ se tiene que $f(f(x)) = f(x)$.

Sea X un conjunto pre-ordenado. Considere las funciones:

$$\uparrow : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto \uparrow Y = \{x \in X : (\exists y \in Y)\ y \leqslant x\},$$

$$\downarrow : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto \downarrow Y = \{x \in X : (\exists y \in Y)\ x \leqslant y\}$$

A continuación se verifican algunas de sus propiedades.

Proposición 1.4.2. *Sea X un conjunto pre-ordenado. Las funciones $\uparrow$ y $\downarrow$ son operadores de clausura en $\wp(X)$.*

Demostración.

i) Sean A y B subconjuntos de X. Suponga que $A \subseteq B$. Si $x \in \downarrow A$, entonces existe $a \in A$ tal que $x \leqslant a$. Como $A \subseteq B$, existe $a \in B$ tal que $x \leqslant a$. Así, $x \in \downarrow B$ y por lo tanto $\downarrow$ es una función isótona. De manera dual se verifica que $\uparrow$ es isótona.

Las condiciones *ii)* y *iii)* de la Definición 1.4.5 se siguen de la Observación 1.4.3. □

Corolario 1.4.1. *Si X es un conjunto pre-ordenado y $A, B \subseteq X$ entonces:*

i) $\downarrow (A \cup B) = \downarrow A \cup \downarrow B$ *y* $\uparrow (A \cup B) = \uparrow A \cup \uparrow B$.

ii) $\downarrow (A \cap B) \subseteq \downarrow A \cap \downarrow B$ *y* $\uparrow (A \cap B) \subseteq \uparrow A \cap \uparrow B$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned} A \subseteq \downarrow A \text{ y } B \subseteq \downarrow B \quad &\Rightarrow A \cup B \subseteq \downarrow A \cup \downarrow B \\ &\Rightarrow \downarrow (A \cup B) \subseteq \downarrow (\downarrow A \cup \downarrow B) \\ &\Rightarrow \downarrow (A \cup B) \subseteq \downarrow A \cup \downarrow B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \subseteq A \cup B \text{ y } B \subseteq A \cup B \Rightarrow \ &\downarrow A \subseteq \downarrow (A \cup B) \text{ y } \downarrow B \subseteq \downarrow (A \cup B) \\ \Rightarrow \ &\downarrow A \cup \downarrow B \subseteq \downarrow (A \cup B). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} A \cap B \subseteq A \text{ y } A \cap B \subseteq B \quad &\Rightarrow \downarrow (A \cap B) \subseteq \downarrow A \text{ y } \downarrow (A \cap B) \subseteq \downarrow B \\ &\Rightarrow \downarrow (A \cap B) \subseteq \downarrow A \cap \downarrow B. \end{aligned}$$

De manera análoga se verifican las condiciones para la función $\uparrow$. □

Otra aplicación de interés para el desarrollo de la teoría de representación es la función complemento

$$c : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto Y^c$$

de la cual serán utilizadas las propiedades básicas conocidas en teoría de conjuntos.

Proposición 1.4.3. *Sean Y y Z subconjuntos de un conjunto pre-ordenado X. La función*

$$c \circ \downarrow : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto [\downarrow Y]^c$$

satisface las siguiente propiedades:

i) $c \circ \downarrow$ *es antítona.*

ii) $c \circ \downarrow (Y \cup Z) = c \circ \downarrow (Y) \cap c \circ \downarrow (Z)$.

iii) $c \circ \downarrow (Y \cap Z) \supseteq c \circ \downarrow (Y) \cup c \circ \downarrow (Z)$.

Demostración. *i*) Esto se tiene por ser composición de una función isótona con una función antítona.

ii)

$$\begin{aligned} \downarrow (Y \cup Z) = \downarrow (Y) \cup \downarrow (Z) &\Leftrightarrow [\downarrow (Y \cup Z)]^c = [\downarrow (Y)]^c \cap [\downarrow (Z)]^c \\ &\Leftrightarrow c \circ \downarrow (Y \cup Z) = c \circ \downarrow (Y) \cap c \circ \downarrow (Z). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \downarrow (Y \cap Z) \subseteq \downarrow (Y) \cap \downarrow (Z) &\Leftrightarrow [\downarrow (Y \cap Z)]^c \supseteq [\downarrow (Y)]^c \cup [\downarrow (Z)]^c \\ &\Leftrightarrow c \circ \downarrow (Y \cap Z) \supseteq c \circ \downarrow (Y) \ \cup c \circ \downarrow (Z). \end{aligned}$$

□

Observación 1.4.5. *Por dualidad se tiene el anterior resultado para la función $c \circ \uparrow$.*

En particular, los conjuntos dotados con dos relaciones de pre-orden tienen un papel fundamental en el desarrollo del presente trabajo, por lo tanto se hacen algunas aclaraciones sobre la notación que se manejará en adelante.

Sea X un conjunto dotado con dos relaciones de pre-orden $(\leqslant_1, \leqslant_2)$. Se notará por $\downarrow_i$ $(i = 1, 2)$, a la función $\downarrow$ anteriormente descrita con el pre-orden $\leqslant_i$ $(i = 1, 2)$ y por l y r a las funciones

$$l = c \circ \downarrow_1 : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto [\downarrow_1 Y]^c,$$

$$r = c \circ \downarrow_2 : \wp(X) \longrightarrow \wp(X) : Y \longmapsto [\downarrow_2 Y]^c.$$

También $\boldsymbol{C}_i(X)$ y $\boldsymbol{D}_i(X)$ denotarán el retículo de los conjuntos crecientes y decrecientes respectivamente con el pre-orden i $(i = 1, 2)$.

Lema 1.4.1. *Sea X un conjunto dotado con dos relaciones de pre-orden $(\leqslant_1, \leqslant_2)$. Las funciones l y r definen una conexión de Galois entre el retículo de los conjuntos crecientes de X con el orden $\leqslant_1$ y el retículo de los conjuntos crecientes de X con el orden $\leqslant_2$. Esto es, para todo $Y \in \boldsymbol{C}_1(X)$ y todo $Z \in \boldsymbol{C}_2(X)$*

$$Y \subseteq l(Z) \Leftrightarrow Z \subseteq r(Y).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Y \subseteq l(Z) &\Rightarrow Y \subseteq c \circ \downarrow_1 (Z) \\
&\Rightarrow \quad Y^c \supseteq \downarrow_1 (Z) \\
&\Rightarrow \quad Y^c \supseteq Z && (\textit{pues} \downarrow_1 (Z) \supseteq Z) \\
&\Rightarrow \quad Y \subseteq Z^c \\
&\Rightarrow \quad \downarrow_2 (Y) \subseteq \downarrow_2 (Z^c) \\
&\Rightarrow \quad \downarrow_2 (Y) \subseteq Z^c && (\textit{pues } Z^c \textit{es decreciente}) \\
&\Rightarrow \quad [\downarrow_2 (Y)]^c \supseteq Z \\
&\Rightarrow \quad Z \subseteq c \circ \downarrow_2 (Y) \\
&\Rightarrow \quad Z \subseteq r(Y).
\end{aligned}$$

Del mismo modo se verifica que $Y \subseteq l(Z)$ si $Z \subseteq r(Y)$. □

Observación 1.4.6. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ dos funciones entre conjuntos ordenados. Se dice que (f,g) es una conexión de Galois entre X y Y si para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se tiene que:*

$$x \leqslant g(y) \Leftrightarrow y \leqslant f(x).$$

Dada la conexión de Galois (f,g), las siguientes son algunas propiedades útiles en el desarrollo del presente texto:

- *f y g son antítonas.*
- *Para todo $x \in X$ se tiene que $x \leqslant g(f(x))$.*
- *Para todo $y \in Y$ se tiene que $y \leqslant f(g(y))$.*

Se culmina esta sección prestando atención a los puntos fijos de la conexión de Galois anteriormente presentada.

Definición 1.4.6. *Sean X un conjunto con dos relaciones de pre-orden y $Y \subseteq X$. Y será llamado **estable** si $lr(Y) = Y$.*

Lema 1.4.2. *Para Y y Z subconjuntos de un conjunto dotado con dos relaciones de pre-orden X se tiene:*

i) $r(Y) \subseteq Z^c \Rightarrow r(Y) \subseteq r(Z)$.

ii) $Y \subseteq r(Z)^c \Rightarrow Y \subseteq Z$, *siempre que Z sea un conjunto estable y* $Y \in \boldsymbol{C}_1(X)$.

iii) $Y \subseteq Z, r(Y) \subseteq r(Z) \Rightarrow Y = Z$, *siempre que Y sea un conjunto estable y* $Z \in \boldsymbol{C}_1(X)$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned}
r(Y) \subseteq Z^c \Rightarrow \quad & c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq c(Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_2 (Y) \supseteq Z \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_2 \circ \downarrow_2 (Y) \supseteq \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_2 (Y) \supseteq \downarrow_2 (Z) \qquad (\textit{por ser } \downarrow_2 \textit{ operador de clausura }) \\
\Rightarrow \quad & c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & r(Y) \subseteq r(Z).
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
Y \subseteq r(Z)^c \Rightarrow \quad & Y \subseteq c \circ c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & c(Y) \supseteq c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_1 \circ c(Y) \supseteq \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & c(Y) \supseteq \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Z) \qquad (\textit{pues } Y^c \in \boldsymbol{D}_1(X)) \\
\Rightarrow \quad & Y \subseteq c \circ \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & Y \subseteq lr(Z) \\
\Rightarrow \quad & Y \subseteq Z \qquad (\textit{por ser } Z \textit{ estable}).
\end{aligned}$$

iii) Se debe verificar que $Z \subseteq Y$.

$$\begin{aligned}
r(Y) \subseteq r(Z) \Rightarrow \quad & c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq c \circ \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_2 (Y) \supseteq \downarrow_2 (Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_2 (Y) \supseteq Z \qquad (\textit{se sigue de } \downarrow_2 (Z) \supseteq Z) \\
\Rightarrow \quad & c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq c(Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq \downarrow_1 \circ c(Z) \\
\Rightarrow \quad & \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Y) \subseteq c(Z) \qquad (\textit{pues } Z^c \in \boldsymbol{D}_1(X)) \\
\Rightarrow \quad & c \circ \downarrow_1 \circ c \circ \downarrow_2 (Y) \supseteq Z \\
\Rightarrow \quad & lr(Y) \supseteq Z \\
\Rightarrow \quad & Y \supseteq Z \qquad (\textit{por ser } Y \textit{ estable}).
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 2

Representación de Urquhart

En este capítulo se presenta de manera detallada la teoría desarrollada por Urquhart en [16], se establecerá una co-equivalencia entre la categoría que tiene como objetos los retículos acotados y la categoría cuyos objetos son los espacios de Urquhart y se mostrará que en el caso de los retículos distributivos acotados, la representación de Urquhart coincide con la representación hecha por Priestley.

2.1. Conceptos Preliminares

A diferencia de las representaciones de Stone y de Priestley, la representación de Urquhart no será desarrollada en el conjunto de los ideales primos de un retículo sino en un tipo especial de conjunto que se encarga de ensamblar cierto tipo de ideales y de filtros de un retículo (conjunto de los pares maximales). En esta sección se presenta un teorema equivalente al teorema del ideal primo en el contexto de retículos arbitrarios y un par de funciones (u y v) análogas a la función d en la representación de Priestley.

En adelante se tendrán en cuenta únicamente los retículos acotados.

Definición 2.1.1. *Sea L un retículo tal que $0 \neq 1$ y sean $\bigtriangledown$ un filtro y $\bigtriangleup$ un ideal de L. Se dirá que:*

- $(\bigtriangledown, \bigtriangleup)$ *es un* ***par filtro-ideal*** *si $\bigtriangledown$ y $\bigtriangleup$ son disyuntos.*
- $(\bigtriangledown, \bigtriangleup)$ *es un* ***par maximal*** *si $(\bigtriangledown, \bigtriangleup)$ es un par filtro-ideal, $\bigtriangledown$ es maximal en la familia de filtros disyuntos de $\bigtriangleup$ y $\bigtriangleup$ es maximal en la familia de ideales disyuntos de $\bigtriangledown$.*

Definición 2.1.2. *Sean L un retículo y X el conjunto de todos pares maximales de L. De manera natural se tienen dos relaciones de pre-orden ($\leqslant_1$ y $\leqslant_2$) sobre X como sigue:*
Para $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ en X,

- $x \leqslant_1 y$ *si* $x_1 \subseteq y_1$.
- $x \leqslant_2 y$ *si* $x_2 \subseteq y_2$.

Teorema 2.1.1. *Si (y_1, y_2) es un par filtro-ideal en un retículo L, entonces existe un par maximal (Q, P) de L tal que $y_1 \subseteq Q$ y $y_2 \subseteq P$.*

Demostración. Considere el conjunto

$$\mathscr{A} := \{J \in \mathcal{I}(L) : y_2 \subseteq J \text{ y } J \cap y_1 = \emptyset\}$$

ordenado por inclusión. $\mathscr{A} \neq \emptyset$, pues $y_2 \in \mathscr{A}$. Si $\mathscr{C}$ una cadena en $\mathscr{A}$, entonces $\bigcup \mathscr{C}$, resulta ser una cota superior de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{A}$. Así, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal P en $\mathscr{A}$.

Del mismo modo considere el conjunto

$$\mathscr{B} := \{F \in \mathcal{F}(L) : y_1 \subseteq F \text{ y } F \cap P = \emptyset\}.$$

Haciendo el mismo razonamiento que se hizo con el anterior conjunto, existe un elemento maximal Q en $\mathscr{B}$.
La pareja (Q, P) resulta ser entonces un par maximal de L, donde $y_1 \subseteq Q$ y $y_2 \subseteq P$.

□

Sean L y X como en la Definición 2.1.2. Considere las siguientes funciones:

$$u : L \longrightarrow \wp(X) : a \longmapsto \{(x_1, x_2) : a \in x_1\}$$

$$v : L \longrightarrow \wp(X) : a \longmapsto \{(x_1, x_2) : a \in x_2\}.$$

Observación 2.1.1. *Para $a \in L$, $u(a) \in \boldsymbol{C}_1(X)$ y $v(a) \in \boldsymbol{C}_2(X)$.*

Proposición 2.1.1. *Si se ordenan los elementos de Imu y los de Imv por inclusión, entonces las funciones*

$$u : (L, \wedge) \longrightarrow (Imu, \cap)$$

$$v : (L, \vee) \longrightarrow (Imv, \cap),$$

son isomorfismos de semi-retículos.

Demostración. Se deben verificar las siguiente condiciones:

i) $u(a \wedge b) = u(a) \cap u(b)$.

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \in u(a) \cap u(b) &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in u(a) \text{ y } (x_1, x_2) \in u(b)\\ &\Leftrightarrow a \in x_1 \text{ y } b \in x_1\\ &\Leftrightarrow a \wedge b \in x_1\\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in u(a \wedge b).\end{aligned}$$

ii) $v(a \vee b) = v(a) \cap v(b)$.

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \in v(a) \cap v(b) &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in v(a) \text{ y } (x_1, x_2) \in v(b)\\ &\Leftrightarrow a \in x_2 \text{ y } b \in x_2\\ &\Leftrightarrow a \vee b \in x_2\\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in v(a \vee b).\end{aligned}$$

iii) u y v son funciones inyectivas.

Para verificar la inyectividad de u considere $a, b \in L$, tales que $a \neq b$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $a \nleqslant b$, luego $[a) \cap (b] = \emptyset$. Por lo tanto existe un par maximal $x = (x_1, x_2)$ tal que $[a) \subseteq x_1$ y $(b] \subseteq x_2$, de donde $x \in u(a)$ y $x \notin u(b)$. Así, $u(a) \neq u(b)$.
De manera análoga se verifica la inyectividad de v. □

Observación 2.1.2. *u es una función isótona y v es una función antítona.*

Se puede concluir que $(Imu, \subseteq)$ y $(Imv, \subseteq^o)$ resultan ser isomorfos, como conjuntos ordenados, a $(L, \leqslant)$ y por consiguiente, son retículos.

$$\begin{tikzcd}
 & (Imu, \subseteq) \arrow[d, dashed, shift right, "f"'] \\
(L, \leqslant) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \\
 & (Imv, \subseteq) \arrow[uu, dashed, shift right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existen dos anti-isomorfismos f y g entre $(Imu, \subseteq)$ y $(Imv, \subseteq)$, tales que

$$f = g^{-1}, g(v(a)) = u(a) \text{ y } f(u(a)) = v(a).$$

Note que para $a \in L$, $v(a) \subseteq u(a)^c$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}v(a) &= u(a)^c \setminus \{(x_1, x_2) \in X : a \notin x_1 \text{ y } a \notin x_2\}\\ &= u(a)^c \cap \{(x_1, x_2) \in X : a \notin x_1 \text{ y } a \notin x_2\}^c\\ &= [u(a) \cup \{(x_1, x_2) \in X : a \notin x_1 \text{ y } a \notin x_2\}]^c.\end{aligned}$$

Por lo anterior se concluye que $v(a)^c = u(a) \cup \{(x_1, x_2) \in X : a \notin x_1 \text{ y } a \notin x_2\}$.

Como $v(a)^c \in \boldsymbol{D}_2(X)$ y $u(a) \subseteq v(a)^c$, entonces $\downarrow_2 u(a) \subseteq v(a)^c$.

Por otro lado, sea $y = (y_1, y_2) \in v(a)^c$, puesto que $a \notin y_2$, se tiene que $[a) \cap y_2 = \emptyset$. Por el Teorema 2.1.1 existe un par maximal $z = (z_1, z_2)$, tal que $[a) \subseteq z_1$ y $y_2 \subseteq z_2$. Así, $z \in u(a)$ y $y \leqslant_2 z$, luego $v(a)^c \subseteq \downarrow_2 u(a)$.

Se concluye que $v(a)^c = \downarrow_2 u(a)$ y por lo tanto $[\downarrow_2 u(a)]^c = v(a)$. Del mismo modo se puede verificar que $[\downarrow_1 v(a)]^c = u(a)$. Así, $r|_{Imu} = f$ y $l|_{Imv} = g$, donde l y r son las funciones definidas en el Capítulo 1.

En lo anterior se verificó que $(Imu, \subseteq)$ y $(Imv, \subseteq)$ son retículos cuyas estructuras de inf-semi-retículo se heredan de $\wp(X)$. Claramente estos no son sub-retículos de $\wp(X)$, dejando entonces la duda de cómo definir el extremo superior. Para ello se hace la siguiente observación:

Observación 2.1.3. *Si X es el conjunto de todos los pares maximales en un retículo L entonces:*

- $u(a \vee b) = lv(a \vee b) = l(v(a) \cap v(b)) = l(r(u(a)) \cap r(u(b))) = lr(u(a) \cup u(b))$.
- $v(a \wedge b) = ru(a \wedge b) = r(u(a) \cap u(b)) = r(l(v(a)) \cap l(v(b))) = rl(v(a) \cup v(b))$.

Proposición 2.1.2. *En el retículo $(Imu, \subseteq)$ se tiene:*

$$u(a) \wedge u(b) = u(a) \cap u(b) \quad y \quad u(a) \vee u(b) = lr(u(a) \cup u(b)).$$

De igual manera, en el retículo $(Imv, \subseteq)$ se tiene:

$$v(a) \wedge v(b) = v(a) \cap v(b) \quad y \quad v(a) \vee v(b) = rl(v(a) \cup v(b)).$$

Demostración.

i) $u(a) \vee u(b) = lr(u(a) \cup u(b))$.

Por la Observación 2.1.3, $lr(u(a) \cup u(b)) = u(a \vee b)$, luego $lr(u(a) \cup u(b)) \in Imu$.

Suponga que existe $c \in L$ tal que $u(c)$ es una cota superior del conjunto $\{u(a), u(b)\}$, luego $u(a) \cup u(b) \subseteq u(c)$, por lo tanto $lr(u(a) \cup u(b)) \subseteq lr(u(c)) = u(c)$.
Por el Lema 1.4.1 $u(a) \cup u(b) \subseteq lr(u(a) \cup u(b))$, entonces $lr(u(a) \cup u(b))$ resulta ser la mínima cota superior del conjunto $\{u(a), u(b)\}$ en Imu.

Del razonamiento anterior se concluye que $u(a) \vee u(b) = lr(u(a) \cup u(b))$.

ii) $u(a) \wedge u(b) = u(a) \cap u(b)$.

Por la Proposición 2.1.1 Imu es cerrada para $\cap$ y por consiguiente el extremo inferior de $u(a)$ y $u(b)$ es $u(a) \cap u(b)$.

De manera similar se verifica lo correspondiente a Imv.

□

Observación 2.1.4. *Sea L un retículo. De los resultados previos se concluye:*

i) La función

$$u : L \longrightarrow (Imu, \wedge, \vee)$$

es un isomorfismo de retículos.

ii) La función

$$v : L \longrightarrow (Imv, \wedge, \vee)$$

es un anti-isomorfismo de retículos.

iii) Las funciones

$$l : (Imv, \wedge, \vee) \longrightarrow (Imu, \wedge, \vee)$$
$$r : (Imu, \wedge, \vee) \longrightarrow (Imv, \wedge, \vee)$$

son anti-isomorfismos de retículos.

2.2. El espacio dual de un retículo

En esta sección se define el espacio dual de un retículo L y se estudian algunas de sus propiedades. Estas propiedades nos permitirán definir, en la siguiente sección, los espacios de Urquhart.

Definición 2.2.1. *Sean L un retículo y X el conjunto de todos sus pares maximales. Si τ es la topología generada por la sub-base*

$$\{u(a)^c : a \in L\} \cup \{v(a)^c : a \in L\},$$

entonces al arreglo $\mathscr{U}(L) = (X, \tau, \leqslant_1, \leqslant_2)$ se le llama ***espacio dual*** *de L.*

Observación 2.2.1. *Según la deducción hecha en la sección anterior $v(a) = r(u(a))$, entonces la topología τ está generada por la sub-base*

$$\{u(a)^c : a \in L\} \cup \{r(u(a))^c : a \in L\}.$$

Definición 2.2.2. *Sean X un espacio topológico dotado con dos relaciones de pre-orden y $Y \subseteq X$. Se dice que Y es un* ***conjunto doblemente cerrado*** *si tanto Y como $r(Y)$ son conjuntos cerrados.*

Observación 2.2.2. *En el espacio dual de un retículo L los conjuntos de la forma $u(a)$, con $a \in L$ son doblemente cerrados.*

Proposición 2.2.1. *Sea X el conjunto de todos los pares maximales en un retículo L. Para $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ en X, si $x \leqslant_1 y$ y $x \leqslant_2 y$, entonces $x = y$.*

Demostración. Si $x \leqslant_1 y$ y $x \leqslant_2 y$, entonces $x_1 \subseteq y_1$ y $x_2 \subseteq y_2$, luego $y_1 \cap x_2 = \emptyset$. Por ser x_1 maximal en los filtros disyuntos a x_2, se tiene que $x_1 = y_1$. Del mismo modo se verifica que $x_2 = y_2$ y por lo tanto se concluye que $x = y$. □

Teorema 2.2.1. *Si L es un retículo, entonces el espacio $\mathscr{U}(L)$ es compacto.*

Demostración. Suponga que existe un cubrimiento F de X, mediante elementos de la sub-base de $\mathscr{U}(L)$, tal que ninguna sub-familia finita de F cubra totalmente a X. Se definen los siguientes conjuntos:

$$F_1 = \{a : u(a)^c \in F\}$$
$$F_2 = \{b : r(u(b))^c \in F\}.$$

Para cualesquiera subconjuntos finitos $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq F_1$, $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq F_2$, existe $x = (x_1, x_2) \in X$, tal que:

$$\begin{aligned} & x \notin (u(a_1)^c \cup \cdots \cup u(a_m)^c \cup r(u(b_1))^c \cup \cdots \cup r(u(b_n))^c) \\ \Leftrightarrow & x \in (u(a_1) \cap \cdots \cap u(a_m) \cap r(u(b_1)) \cap \cdots \cap r(u(b_n))). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \in x_1 \quad \text{y} \quad b_1 \vee \cdots \vee b_n \in x_2.$$

Así,

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \not\leq b_1 \vee \cdots \vee b_n \in x_2,$$

de donde, $[F_1) \cap (F_2] = \emptyset$. Por el Teorema 2.1.1, existe $y = (y_1, y_2)$ maximal tal que $[F_1) \subseteq y_1$ y $(F_2] \subseteq y_2$. Para cada $a \in F_1$, $y \in u(a)$ y para cada $b \in F_2$, $y \in r(u(b))$, por lo tanto $y \notin \bigcup F$ lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que $\mathscr{U}(L)$ es compacto. □

Proposición 2.2.2. *Im u e Im v son familias separadoras de $\mathscr{U}(L)$ con los pre-ordenes $\leqslant_1$ y $\leqslant_2$ respectivamente.*

Demostración. Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ en $\mathscr{U}(L)$. Suponga que $x \not\leqslant_1 y$, entonces $x_1 \not\subseteq y_1$, por lo tanto existe $a \in x_1$ tal que $a \notin y_1$, de donde $x \in u(a)$ y $y \notin u(a)$. Así, se concluye que Imu es una familia separadora de $\mathscr{U}(L)$.
Del mismo modo se verifica que Imv es una familia separadora de $\mathscr{U}(L)$. □

Lema 2.2.1. *Si $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$ es un espacio compacto dotado con dos relaciones de pre-orden y F es una familia separadora de X respecto al orden $\leqslant_1$, de conjuntos doblemente cerrados estables, cerrada bajo $\wedge$ y $\vee$, que contiene a X y a $\emptyset$, entonces F es la familia de todos los conjuntos doblemente cerrados estables de X.*

Demostración. Sean W un conjunto doblemente cerrado estable en X y $x, y \in X$, tales que $x \in W$ y $y \in r(W)$. Como $x \not\leqslant_1 y$, existe $Z_{xy} \in F$, tal que $x \in Z_{xy}$ y $y \notin Z_{xy}$. Entonces $r(W) \subseteq \bigcup\{Z_{xy}^c : y \in r(W)\}$. Por la compacidad de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\begin{aligned} r(W) &\subseteq Z_{xy_1}^c \cup Z_{xy_2}^c \cup . \cdots \cup Z_{xy_m}^c \\ &= (Z_{xy_1} \cap Z_{xy_2} \cap \cdots \cap Z_{xy_m})^c \\ &= (Z_{xy_1} \wedge Z_{xy_2} \wedge \cdots \wedge Z_{xy_m})^c \\ &= Z_x^c, \end{aligned}$$

donde $Z_x = Z_{xy_1} \wedge Z_{xy_2} \wedge \cdots \wedge Z_{xy_m}$. De lo anterior, y haciendo uso del Lema 1.4.2, concluimos que $r(W) \subseteq r(Z_x)$.
Para cada $x \in W$, $x \in Z_x$ y como $Z_x \subseteq r(Z_x)^c$, $W \subseteq \bigcup\{r(Z_x)^c : x \in W\}$. Por la compacidad de X, para algún $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W &\subseteq r(Z_{x_1})^c \cup r(Z_{x_2})^c \cup \cdots \cup r(Z_{x_n})^c \\ &= (r(Z_{x_1}) \cap r(Z_{x_2}) \cap \cdots \cap r(Z_{x_n}))^c \\ &= r(Z_{x_1} \cup Z_{x_2} \cup \cdots \cup Z_{x_n})^c \\ &= (rlr(Z_{x_1} \cup Z_{x_2} \cup \cdots \cup Z_{x_n}))^c \\ &= r(Z_{x_1} \vee Z_{x_2} \vee \cdots \vee Z_{x_n})^c \\ &= r(Z)^c, \end{aligned}$$

donde $Z = Z_{x_1} \vee Z_{x_2} \vee \cdots \vee Z_{x_n}$. Por lo tanto, del Lema 1.4.2 se tiene $W \subseteq Z$.
Por otro lado, dado que $r(W) \subseteq r(Z_x)$ para cada $x \in W$,

$$\begin{aligned} r(W) &\subseteq r(Z_{x_1}) \cap r(Z_{x_2}) \cap \cdots \cap r(Z_{x_n}) \\ &= r(Z_{x_1} \cup Z_{x_2} \cup \cdots Z_{x_n}) \\ &= rlr(Z_{x_1} \cup \cdots \cup Z_{x_n}) \\ &= r(Z_{x_1} \vee \cdots \vee Z_{x_n}) \\ &= r(Z), \end{aligned}$$

Del razonamiento anterior y por el Lema 1.4.2, $W = Z$, de donde $W \in F$. □

Como Imu satisface las condiciones del lema anterior, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. *Sea L un retículo. $Imu = \{u(a) : a \in L\}$ es la familia de todos los conjuntos doblemente cerrados estables de $\mathscr{U}(L)$.*

2.3. Espacios de Urquhart

En esta sección se definen los espacios de Urquhart, basados en las propiedades del espacio dual de un retículo. Se ilustra esta noción con algunos ejemplos y se verifica que estos espacios no siempre son espacios de Stone. Finalmente, se exhibe una manera de asociar un retículo a cualquier espacio de Urquhart, de manera que el espacio original coincida con su espacio dual.

Definición 2.3.1. *X es un **conjunto doblemente pre-ordenado** si está dotado con dos relaciones de pre-orden $\leqslant_1, \leqslant_2$ tales que, para $x, y \in X$, si $x \leqslant_1 y$ y $x \leqslant_2 y$ entonces $x = y$.*

Definición 2.3.2. *Un **espacio doblemente pre-ordenado** es un arreglo $(X, \tau, \leqslant_1, \leqslant_2)$, donde X es un conjunto dotado con una topología τ y $(X, \leqslant_1, \leqslant_2)$ es un conjunto doblemente pre-ordenado.*

Definición 2.3.3. *Sea X un espacio doblemente pre-ordenado. Se dice que X es **doblemente** T_0 si:*

- *$\{Y \subseteq X :$ Y es doblemente cerrado y estable$\}$ es una familia separadora de X con el orden $\leqslant_1$.*
- *$\{r(Y) \subseteq X :$ Y es doblemente cerrado y estable$\}$ es una familia separadora de X con el orden $\leqslant_2$.*

Proposición 2.3.1. *Todo espacio doblemente T_0 es T_1.*

Demostración. Sean X un espacio doblemente T_0 y $x, y \in X$, tales que $x \neq y$. Entonces,

$$(x \nleqslant_1 y \text{ o } x \nleqslant_2 y) \text{ y } (y \nleqslant_1 x \text{ o } y \nleqslant_2 x).$$

Por lo tanto se tiene alguno de los siguientes casos:

i) $x \nleqslant_1 y$ y $y \nleqslant_1 x$.

ii) $x \nleq_1 y$ y $y \nleq_2 x$.

iii) $x \nleq_2 y$ y $y \nleq_1 x$.

iv) $x \nleq_2 y$ y $y \nleq_2 x$.

Será verificada la condición de separabilidad para los casos *i*) y *iii*). En caso de tenerse *ii*) o *iv*) la demostración es análoga.

i) Como $x \nleq_1 y$, existe un conjunto doblemente cerrado estable Y, tal que $x \in Y$ y $y \notin Y$. Por lo tanto $y \in Y^c$ el cual es un conjunto abierto, y $x \notin Y^c$. Del mismo modo, puesto que $y \nleq_1 x$ existe un conjunto doblemente cerrado estable Z, tal que $y \in Z$ y $x \notin Z$. Así, $x \in Z^c$ que es un conjunto abierto y $y \notin Z^c$.

iii) Dado que $x \nleq_2 y$, existe un conjunto doblemente cerrado estable Y, tal que $x \in r(Y)$ y $y \notin r(Y)$, por ser Y doblemente cerrado, $r(Y)$ es cerrado. Por lo tanto $r(Y)^c$ es abierto, $y \in r(Y)^c$ y $x \notin r(Y)^c$. Por otro lado como $y \nleq_1 x$, existe un conjunto doblemente cerrado estable Z, tal que $y \in Z$ y $x \notin Z$. Así, $x \in Z^c$ y $y \notin Z^c$.

□

Definición 2.3.4. *Un espacio doblemente pre-ordenado X es un* ***espacio de Urquhart*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) X es un espacio compacto y doblemente T_0.

(2) Para Y, Z subconjuntos de X doblemente cerrados estables, $r(Y \cap Z)$ y $lr(Y \cup Z)$ son cerrados en X.

(3) La familia $\{Y^c$: Y es un conjunto doblemente cerrado estable $\} \cup \{r(Y)^c$: Y es un conjunto doblemente cerrado estable $\}$ es una sub-base para la topología de X.

Observación 2.3.1. *Dado un retículo L, el espacio dual $\mathscr{U}(L)$ es un espacio de Urquhart.*

Proposición 2.3.2. *Sea L un retículo. Si L es finito, entonces $\mathscr{U}(L)$ es un espacio discreto.*

Demostración. Esto se tiene pues $\mathscr{U}(L)$ es un espacio topológico finito y T_1. □

Ejemplo 2.3.1. *Considere el retículo de la Figura 2.1.*

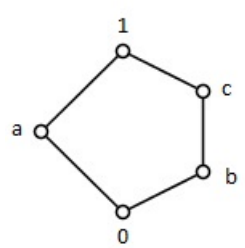


FIGURA 2.1. N_5

El conjunto de las parejas maximales de este retículo es

$$X = \{x = ([c), (b]), y = ([a), (c]), z = ([b), (a])\},$$

por lo tanto su espacio dual es $\mathscr{U}(L) = (X, \tau, \leqslant_1, \leqslant_2)$*, donde* τ *es la topología discreta,* $\leqslant_1 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,z)\}$ *y* $\leqslant_2 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y)\}$.

Ejemplo 2.3.2. *Considere el conjunto* $X = \{a,b,c\}$*, dotado con la topología discreta y las siguientes relaciones de pre-orden:*

$$\leqslant_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\} \quad y \quad \leqslant_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(c,a)\}$$

En la siguiente tabla se relacionan los subconjuntos de X *con las funciones* l *y* r*:*

$\boldsymbol{S}$	$r(\boldsymbol{S})$	$lr(\boldsymbol{S})$
$\emptyset$	X	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,c\}$
$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	X
$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b,c\}$
$\{a,c\}$	$\{b\}$	$\{a,c\}$

De lo anterior tenemos que la colección de los subconjuntos estables de X *es:*

$$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}.$$

X *resulta ser un espacio de Urquhart si satisface las condiciones (1),(2) y (3) de la anterior definición.*
Verificar la condición (1) resulta un ejercicio sencillo en el cual solo se debe tener en cuenta cuáles elementos de X *no se encuentran relacionados.*
La condición (2) se satisface pues la topología de X *es la discreta.*
Para la condición (3), la familia $\{Y^c$*: Y es un conjunto doblemente cerrado estable*$\} \cup \{r(Y)^c$*: Y es un conjunto doblemente cerrado estable*$\}$ *es* $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}\}$*, la cual es claramente una sub-base para la topología discreta.*

Ahora veamos un espacio doblemente ordenado que no es de Urquhart.

Ejemplo 2.3.3. *Considere el conjunto* $X = \{a,b,c\}$*, dotado con la topología discreta y las siguientes relaciones de pre-orden:*

$$\leqslant_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\} \quad y \quad \leqslant_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c)\}$$

Veamos cuáles son los subconjuntos estables de X*.*

$\boldsymbol{S}$	$r(\boldsymbol{S})$	$lr(\boldsymbol{S})$
$\emptyset$	X	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X
$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b,c\}$
$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$
$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b,c\}$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	X

La colección de subconjuntos estables de X es : $\{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b\}\}$. Note por ejemplo que, $c \nleq_1 b$ y no existe un conjunto estable Y tal que $c \in Y$ y $b \notin Y$. Así, X no es doblemente T_0 y por lo tanto no es un espacio de Urquhart.

Proposición 2.3.3. *La familia de todos los conjuntos doblemente cerrados estables $\mathscr{L}(X)$ de un espacio de Urquhart X, ordenada por inclusión, es un retículo, donde $Y \wedge Z = Y \cap Z$ y $Y \vee Z = lr(Y \cup Z)$.*

Demostración. Sean Y y Z conjuntos doblemente cerrados estables de X. Se verificará entonces:

- $Y \wedge Z = Y \cap Z$.
  $Y \cap Z$ es cerrado y por ser X un espacio de Urquhart $r(Y \cap Z)$ también lo es, por lo tanto $Y \cap Z$ es doblemente cerrado.
  Por otro lado, haciendo uso de la Proposición 1.4.3 :

$$\begin{aligned} r(Y \cap Z) &\supseteq r(Y) \cup r(Z) \\ l(r(Y \cap Z)) &\subseteq l(r(Y) \cup r(Z)) \\ l(r(Y \cap Z)) &\subseteq l(r(Y)) \cap l(r(Z)) \\ l(r(Y \cap Z)) &\subseteq Y \cap Z. \end{aligned}$$

  Ahora, por el Lema 1.4.1

$$Y \cap Z \subseteq l(r(Y \cap Z)).$$

  Así, se concluye que $Y \cap Z = l(r(Y \cap Z))$ y por lo tanto $Y \cap Z$ es un conjunto estable. Entonces, necesariamente $Y \wedge Z = Y \cap Z$.

- $Y \vee Z = l(r(Y \cup Z))$.
  Por ser X un espacio de Urquhart, $l(r(Y \cup Z))$ es cerrado. Por el Lema 1.4.1 y la Proposición 1.4.3, $r(l(r(Y \cup Z))) = r(Y \cup Z) = r(Y) \cap r(Z)$, por lo tanto $l(r(Y \cup Z))$ es doblemente cerrado.
  Por otro lado, $l(r(Y \cup Z))$ es estable. En efecto, $l(r(l(r(Y \cup Z)))) = l(r(Y \cup Z))$.
  Por el Lema 1.4.1, $Y \cup Z \subseteq lr(Y \cup Z)$. Sea Q un conjunto doblemente cerrado estable en X, tal que $Y \cup Z \subseteq Q$. Por ser l y r antítonas $l(r(Y \cup Z))) \subseteq l(r(Q)) = Q$.
  De lo anterior se puede concluir que $Y \vee Z = l(r(Y \cup Z))$.

□

Definición 2.3.5. *Si X es un espacio de Urquhart, el retículo $\mathscr{L}(X)$ se llama* ***retículo dual*** *de X.*

Ejemplo 2.3.4. *Sea X como en el Ejemplo 2.3.2, entonces $\mathscr{L}(X)$ es:*

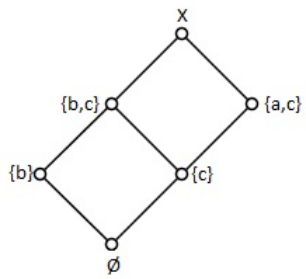


FIGURA 2.2. Retículo dual.

Observación 2.3.2. *De los resultados previos, se puede concluir que $\mathscr{L}(\mathscr{U}(L)) = (Imu, \wedge, \vee)$ y por lo tanto se tiene el siguiente teorema:*

Teorema 2.3.1. *Si L es un retículo, entonces $\mathscr{L}(\mathscr{U}(L)) \cong L$.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior y del análisis hecho en la Pagina 22. □

Ejemplo 2.3.5. *En este ejemplo, se presenta un espacio de Urquhart que no es de Hausdorff.*

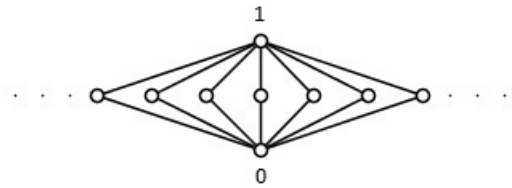


FIGURA 2.3. M_∞

Sea L el retículo de la Figura 2.3. Puesto que todos los ideales y filtros propios de L son principales y notando por x_i con $i \in \mathbb{N}$, a los elementos de L distintos de 0 y 1, se tiene que:

$$\mathscr{U}(L) = \{([x_i), (x_j]) : i \neq j\}.$$

Entonces, para $x \in L$, tal que $x \neq 0, 1$:

$$u(x) = \{([x), (x_j]) : ([x), (x_j]) \in \mathscr{U}(L)\} \quad y \quad ru(x) = \{([x_i), (x]) : ([x_i), (x]) \in \mathscr{U}(L)\}.$$

Por lo tanto,

$$u(x)^c = \{([x_i), (x_j]) \in \mathscr{U}(L) : x_i \neq x\} \quad y \quad ru(x)^c = \{([x_i), (x_j]) \in \mathscr{U}(L) : x_j \neq x\}$$

de donde,

$$u(x)^c \cap ru(y)^c = \{([x_i), (x_j]) : x_i \neq x \ y \ x_j \neq y\}.$$

Por otro lado, sea B la base generada por la sub-base de $\mathscr{U}(L)$. Si $Y \in B$, existen $I, J \subset \mathbb{N}$ finitos, tales que:

$$Y = \{([x_i), (x_j]) \in \mathscr{U}(L) : x_i \neq x_s \ y \ x_j \neq x_k, para \ s \in I \ y \ k \in J\}.$$

Sean $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ puntos distintos de $\mathscr{U}(L)$ y v_1, v_2 en B tales que, $a \in v_1$ y $b \in v_2$.
Para cada v_i, existen J_i, I_i (i=1, 2), tales que:

$$v_i = \{([x_t), (x_r]) \in \mathscr{U}(L) : x_t \neq x_s \text{ y } x_r \neq x_k, \text{para } s \in I_i \text{ y } k \in J_i\}.$$

Dado que J_i e I_i (i=1,2), son conjuntos finitos, existen w y z tales que $w \notin J_1 \cup J_2$ y $z \notin I_1 \cup I_2$. Note que $([x_z), (x_w]) \in v_1 \cap v_2$ y por lo tanto se puede concluir que $\mathscr{U}(L)$ no es un espacio de Hausdorff.

Observación 2.3.3. *En algunos textos como en [2], se afirma que todo espacio de Urquhart es de Stone, lo cual es falso. El anterior es un ejemplo de un espacio de Urquhart que no es un espacio de Stone.*

Definición 2.3.6. *Sean X y Y dos espacios doblemente pre-ordenados. Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es un* ***orden-homeomorfismo****, si es un homeomorfismo de espacios topológicos y además un isomorfismo de conjuntos pre-ordenados, respecto a cada pre-orden.*

Teorema 2.3.2. *Si X es un espacio de Urquhart, entonces X es orden-homeomorfo a $\mathscr{U}(\mathscr{L}(X))$.*

Demostración. Considere la función,

$$h : X \longrightarrow \mathscr{U}(\mathscr{L}(X)) : x \longrightarrow (h_1(x), h_2(x))$$

Donde, $h_1(x) = \{Y \in \mathscr{L}(X) : x \in Y\}$ y $h_2(x) = \{Y \in \mathscr{L}(X) : x \in r(Y)\}$.

En primer lugar se verifica que $(h_1(x), h_2(x))$ es un par maximal.
Es claro que $h_1(x) \cap h_2(x) = \emptyset$. Resta entonces verificar lo siguiente:

- $h_1(x)$ es un filtro.

Sean $Y, Z \in h_1(x)$, por lo tanto $x \in Y \cap Z$, entonces $Y \cap Z \in h_1(x)$.
Por otro lado, sean $Y \in h_1(x)$ y $W \in \mathscr{L}(X)$, tales que $Y \subseteq W$, como $x \in Y$, $x \in W$ y por lo tanto $W \in h_1(x)$.

- $h_2(x)$ es un ideal.

$$\begin{aligned} Y, Z \in h_2(x) &\Rightarrow x \in r(Y) \text{ y } x \in r(Z) \\ &\Rightarrow x \in r(Y) \cap r(Z) \\ &\Rightarrow x \in r(Y \cup Z) \\ &\Rightarrow x \in rlr(Y \cup Z) \\ &\Rightarrow x \in r(Y \vee Z) \\ &\Rightarrow Y \vee Z \in h_2(x). \end{aligned}$$

Ahora, sean $Y \in h_2(x)$ y $W \in \mathscr{L}(X)$. Si $W \subseteq Y$, entonces $r(Y) \subseteq r(W)$ y por lo tanto $x \in r(W)$. Se puede concluir que $W \in h_2(x)$.

- $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ es un par maximal.

Sea F un filtro que contiene propiamente a $h_1(x)$. Entonces $\bigcap F \subseteq \bigcap h_1(x)$ y $x \notin \bigcap F$.
Sea $z \in \bigcap F$, entonces $x \leqslant_1 z$, en caso contrario, es decir si $x \nleqslant_1 z$, existe $Y \in \mathscr{L}(X)$, tal que $x \in Y$ y $z \notin Y$, contradiciendo que $z \in \bigcap F$.
Puesto que $x \neq z$, $x \nleqslant_2 z$, por lo tanto existe $Y_z \in \mathscr{L}(X)$, tal que $x \in r(Y_z)$ y $z \notin r(Y_z)$.
Así, $\bigcap F \subseteq \bigcup\{r(Y_z)^c : z \in \bigcap F\}$. Por la compacidad de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\begin{aligned}\bigcap F &\subseteq r(Y_{z_1})^c \cup \cdots \cup r(Y_{z_m})^c \\ &= (r(Y_{z_1}) \cap \cdots \cap r(Y_{z_m}))^c \\ &= (r(Y_{z_1} \cup \cdots \cup Y_{z_m}))^c \\ &= r(Y)^c,\end{aligned}$$

donde $Y = Y_{z_1} \vee \cdots \vee Y_{z_m}$ y por lo tanto $r(Y) \subseteq \bigcup\{W^c : W \in F\}$. Por la compacidad de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\begin{aligned}r(Y) &\subseteq W_1^c \cup \cdots \cup W_n^c \\ r(Y) &\subseteq (W_1 \cap \cdots \cap W_n)^c \\ r(Y)^c &\supseteq W_1 \wedge \cdots \wedge W_n.\end{aligned}$$

Por el Lema 1.4.2, $W_1 \wedge \cdots \wedge W_n \subseteq Y$ y por lo tanto $Y \in F$.
Por construcción $x \in r(Y)$, luego $Y \in h_2(x)$. Se concluye que $h_1(x)$ es maximal en la familia de los filtros disyuntos de $h_2(x)$.
De manera similar se verifica que $h_2(x)$ es maximal en la familia de los ideales disyuntos de $h_1(x)$ y por lo tanto $h(x)$ es un par maximal.

- h es sobreyectiva.

Sea (W_1, W_2) un par maximal y $F = W_1 \cup \{r(Z) : Z \in W_2\}$. F tiene la propiedad de intersección finita, de no ser así, existirían $Y \in W_1, Z \in W_2$, tales que $Y \cap r(Z) = \emptyset$ de donde, $Y \subseteq r(Z)^c$, entonces $Y \subseteq Z$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, F puede ser extendido a un ultrafiltro $\mathscr{F}$. Por la compacidad de X, $\mathscr{F}$ tiene un punto adherente x, entonces $W_1 \subseteq h_1(x)$ y $W_2 \subseteq h_2(x)$, por lo tanto $h(x) = (W_1, W_2)$.

- h es inyectiva.

Sean $x, y \in X$, tales que $x \neq y$ entonces $x \nleq_1 y$ o $x \nleq_2 y$ por lo tanto $h(x) \neq h(y)$.

- h es continua.

Esto se sigue del hecho que para $Y \in \mathscr{L}(X)$,

$$h^*(u(Y)) = Y \text{ y } h^*r(u(Y)) = r(Y).$$

- h es una inmersión.

Sean $x, y \in X$, tales que $x \leq_1 y$. Para $Y \in h_1(x)$, $y \in Y$ pues Y es $\leq_1$-creciente, por lo tanto $h_1(x) \subseteq h_1(y)$.

Recíprocamente, si $h_1(x) \subseteq h_1(y)$ y suponemos que $x \not\leqslant_1 y$, entonces existe $Y \in \mathscr{L}(X)$, tal que $x \in Y$ y $y \notin Y$, contradiciendo lo supuesto.
Se concluye que h es una inmersión con respecto a $\leqslant_1$ y de manera similar se verifica que h es una inmersión respecto a $\leqslant_2$.

□

2.4. Equivalencia entre las categorías $\mathfrak{R}_{cp}$ y $\mathfrak{U}$

Para llevar la teoría de Urquhart al contexto categórico se define la categoría que tiene como objetos a los espacios de Urquhart, en donde sus morfismos son cierta clase de funciones continuas. En esta sección se demuestra que existe una co-equivalencia entre la categoría de los espacios de Urquhart y la categoría de los retículos y los morfismos casi-propios.

Definición 2.4.1. *Sea $f : L \longrightarrow M$, un homomorfismo de retículos acotados. f se dirá homomorfimo* ***casi-propio*** *si $(f^*(x_1), f^*(x_2))$ es un par maximal de L para todo par maximal (x_1, x_2) de M.*

Ejemplo 2.4.1. *Todo isomorfismo de retículos es un homomorfismo casi-propio. En particular, dado L un retículo, el isomorfismo $u : L \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{U}(L))$ es casi-propio.*

Se notará, $\mathfrak{R}_{cp}$ a la categoría de los retículos acotados, donde los morfismos son homomorfismos casi-propios de retículos y $\mathfrak{U}$, la categoría de los espacios de Urquhart donde cada morfismo f es una función que satisface las siguientes condiciones:

- f es continua.
- Para cada conjunto doblemente cerrado estable B:

$$f^*(rB) = rf^*(B) \text{ y } f^*(lrB) = lf^*(rB). \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.4.2. *Sea X un espacio de Urquhart, la aplicación del Teorema 2.3.2*

$$h : X \longrightarrow \mathscr{U}(\mathscr{L}(X)) : x \longrightarrow (h_1(x), h_2(x))$$

donde, $h_1(x) = \{Y \in \mathscr{L}(X) : x \in Y\}$ y $h_2(x) = \{Y \in \mathscr{L}(X) : x \in r(Y)\}$ es un morfismo en la categoría $\mathfrak{U}$. En la demostración del Teorema 2.3.2 se verificó que h es continua. Resta entonces que se cumple (2.1). Puesto que los conjuntos doblemente cerrados estables de $\mathscr{U}(\mathscr{L}(X))$ son de la forma $u(Y)$, con $Y \in \mathscr{L}(X)$, por la continuidad de h se tiene que $h^*(ru(Y)) = r(Y) = rh^*(u(Y))$. Del mismo modo $h^*(lru(Y)) = h^*(u(Y)) = Y = lr(Y) = lh^*(ru(Y))$.

Proposición 2.4.1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de $\mathfrak{U}$, entonces f es isótona respecto a los pre-ordenes $\leqslant_1$ y $\leqslant_2$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, tales que $x \leqslant_1 y$. Suponga que $f(x) \not\leqslant_1 f(y)$. Por ser Y un espacio de Urquhart, existe un conjunto doblemente cerrado estable W tal que $f(x) \in W$ y $f(y) \notin W$ luego $x \in f^*(W)$ y $y \notin f^*(W)$.
Note que por ser W un conjunto doblemente cerrado estable, $W = lr(W)$. Así, $f^*(W) = f^*(lr(W)) = lf^*(r(W))$ y por lo tanto $f^*(W)$ es un conjunto creciente respecto a $\leqslant_1$.

Como $x \leqslant_1 y$ y $x \in f^*(W)$ entonces $y \in f^*(W)$ lo cual es contradictorio.
Se concluye así que f es isótona respecto a $\leqslant_1$. La demostración para el pre-orden $\leqslant_2$ es similar. $\square$

Considere la aplicación $\mathscr{L} : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{R}_{cp}$, donde $\mathscr{L}(X)$ es el retículo dual de un espacio de Urquhart X y para un morfismo f de $\mathfrak{U}$, $\mathscr{L}(f) = f^*$.
Se verificará, que $\mathscr{L}$, se encuentra bien definido y que además, resulta ser un funtor contravariante.
Sean X_1 y X_2, espacios de Urquhart y f un morfismo entre ellos.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{L}(X_1) \\
X_2 \arrow[r] & \mathscr{L}(X_2) \arrow[u, "\mathscr{L}(f)"']
\end{tikzcd}$$

Para verificar que $\mathscr{L}(f)$ está bien definido, considere un conjunto $Z \in \mathscr{L}(X_2)$.

a) Por ser Z un conjunto cerrado y f una función continua, $\mathscr{L}(f)(Z) = f^*(Z)$ es un conjunto cerrado.

b) Note que, $r\mathscr{L}(f)(Z) = rf^*(Z) = f^*(rZ)$. Por ser Z un conjunto doblemente cerrado y f una función continua, $r\mathscr{L}(f)(Z)$ es un conjunto cerrado.

c) $lr\mathscr{L}(f)(Z) = lr(f^*(Z)) = lf^*(r(Z)) = f^*(lr(Z)) = f^*(Z) = \mathscr{L}(f)(Z)$. Por lo tanto $\mathscr{L}(f)(Z)$ es un conjunto estable.

A continuación, se verifica que $\mathscr{L}(f)$ es un homomorfismo de retículos.

- $\mathscr{L}(f)$ es un homomorfismo de retículos.

a)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)(Y \wedge Z) &= \mathscr{L}(f)(Y \cap Z) \\
&= f^*(Y \cap Z) \\
&= f^*(Y) \cap f^*(Z) \\
&= f^*(Y) \wedge f^*(Z) \\
&= \mathscr{L}(f)(Y) \wedge \mathscr{L}(f)(Z).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)(Y \vee Z) &= \mathscr{L}(f)(lr(Y \cup Z)) \\
&= f^*(lr(Y \cup Z)) \\
&= f^*(lr(lr(Y \cup Z))) \\
&= l(f^*(r(lr(Y \cup Z)))) \\
&= l(f^*(r(Y \cup Z))) \\
&= l(f^*(r(Y) \cap r(Z))) \\
&= l(f^*(r(Y)) \cap f^*(r(Z))) \\
&= l(r(f^*(Y)) \cap r(f^*(Z))) \\
&= l(r(f^*(Y) \cup f^*(Z))) \\
&= lr(f^*(Y) \cup f^*(Z)) \\
&= f^*(Y) \vee f^*(Z) \\
&= \mathscr{L}(f)(Y) \vee \mathscr{L}(f)(Z).
\end{aligned}$$

- $\mathscr{L}(f)$ es un homomorfismo casi-propio.

Sea (F, I) un par maximal de $\mathscr{L}(X_1)$. Siguiendo la notación y lo demostrado en el Teorema 2.3.2 anterior, debe existir un $x \in X_1$, tal que $(F, I) = (h_1(x), h_2(x))$.
$\mathscr{L}(f)^*(h_1(x)) \cap \mathscr{L}(f)^*(h_2(x)) = \emptyset$ pues $h_1(x) \cap h_2(x) = \emptyset$.

Ahora, vea que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)^*(h_1(x)) &= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : \mathscr{L}(f)(Y) \in h_1(x)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : f^*(Y) \in h_1(x)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : x \in f^*(Y)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : f(x) \in Y\} \\
&= h_1(f(x)).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)^*(h_2(x)) &= \{Y \in \mathscr{L}(X_1) : \mathscr{L}(f)(Y) \in h_2(x)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : f^*(Y) \in h_2(x)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : x \in r(f^*(Y))\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : x \in f^*(rY)\} \\
&= \{Y \in \mathscr{L}(X_2) : f(x) \in rY\} \\
&= h_2(f(x)).
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que $(\mathscr{L}(f)^*(h_1(x)), \mathscr{L}(f)^*(h_2(x)))$ es un par maximal y por lo tanto $\mathscr{L}(f)$ es un homomorfismo casi-propio de retículos.

Ahora, sean X un espacio de Urquhart y $Y \in \mathscr{L}(X)$, entonces $\mathscr{L}(1_X)(Y) = 1_X^*(Y) = Y$, por lo tanto $\mathscr{L}(1_X) = 1_{\mathscr{L}(X)}$.

Por último, si $f : X_1 \longrightarrow X_2$ y $g : X_2 \longrightarrow X_3$ son morfismos entre espacios de Urquhart entonces $g \circ f : X_1 \longrightarrow X_3$ es una función continua e isótona, además como $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,

entonces se satisface (2.1). Así,

$$\mathscr{L}(g \circ f) = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathscr{L}(f) \circ \mathscr{L}(g).$$

De lo anterior, se puede concluir que $\mathscr{L}$, efectivamente es un funtor contravariante de $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{R}_{cp}$.

Ahora considere la aplicación $\mathscr{U} : \mathfrak{R}_{cp} \longrightarrow \mathfrak{U}$. Donde, $\mathscr{U}(L)$ es el espacio dual de un retículo L y para un homorfismo casi-propio de retículos h, se tiene que $\mathscr{U}(h)(x_1, x_2) = (h^*(x_1), h^*(x_2))$. Del mismo modo que en el caso anterior, se verificará que la aplicación $\mathscr{U}$ es un funtor contravariante.

Considere los retículos L_1 y L_2 y un morfismo h entre ellos.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U}(L_1) & L_1 \arrow[l] \arrow[d, "h"] \\
\mathscr{U}(L_2) \arrow[u, "\mathscr{U}(h)"] & L_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\mathscr{U}(h)$ se encuentra bien definida pues h es un homomorfismo casi-propio de retículos.

$\mathscr{U}(h)$ es un morfismo en la categoría $\mathfrak{U}$. En efecto,

- $\mathscr{U}(h)$ es una función continua. Para $a \in L_1$,

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in (\mathscr{U}(h))^*(u(a)) &\Leftrightarrow (\mathscr{U}(h))(x_1, x_2) \in u(a) \\
&\Leftrightarrow a \in h^*(x_1) \\
&\Leftrightarrow h(a) \in x_1 \\
&\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in u(h(a)).
\end{aligned}$$

Del mismo, modo se verifica que $(\mathscr{U}(h))^*(ru(a)) = ru(h(a))$.

- Las funciones l y r conmutan con $(\mathscr{U}h)^*$ de acuerdo con la definición de morfismo en la categoría $\mathfrak{U}$.

Puesto que, cada conjunto doblemente cerrado estable de $\mathscr{U}(L)$ es de la forma $u(a)$, donde $a \in L$:

a)

$$\begin{aligned}
(\mathscr{U}h)^*(ru(a)) &= r(u(h(a))) \\
&= r(\mathscr{U}h)^*(u(a)).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\mathscr{U}h)^*(lru(a)) &= (\mathscr{U}h)^*(u(a))\\ &= u(h(a))\\ &= lr(u(h(a)))\\ &= l(\mathscr{U}h)^*(ru(a)).\end{aligned}$$

- $\mathscr{U}(h)$ es una función isótona con los pre-ordenes $\leqslant_1$ y $\leqslant_2$.
  Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ en $\mathscr{U}(L_2)$, entonces:

$$\begin{aligned}x \leq_1 y &\Rightarrow x_1 \subseteq y_1\\ &\Rightarrow h^*(x_1) \subseteq h^*(y_1)\\ &\Rightarrow (\mathscr{U}h)(x) \leq_1 (\mathscr{U}h)(y).\end{aligned}$$

Del mismo modo se verifica para $\leq_2$.

Sea L un retículo y (x_1, x_2) un par maximal de L. $\mathscr{U}(1_L)(x_1, x_2) = (1_L^*(x_1), 1^*(x_2)) = (x_1, x_2)$. Así, $\mathscr{U}(1_L) = 1_{\mathscr{U}(L)}$.

Por otro lado sean $f : L_1 \longrightarrow L_2$ y $g : L_2 \longrightarrow L_3$ homomorfismos casi-propios de retículos. Para un par maximal (x_1, x_2) de L_3, $((g \circ f)^*(x_1), (g \circ f)^*(x_2)) = (f^*(g^*(x_1)), f^*(g^*(x_2)))$ que es un par maximal pues f y g son homomorfismos casi-propios. Así,$\mathscr{U}(g \circ f)(x_1, x_2) = ((g \circ f)^*(x_1), (g \circ f)^*(x_2)) = (f^*(g^*(x_1)), f^*(g^*(x_2))) = \mathscr{U}(f)(g^*(x_1), g^*(x_2)) = \mathscr{U}(f)(\mathscr{U}(g)(x_1, x_2)) = \mathscr{U}(f) \circ \mathscr{U}(g)(x_1, x_2)$.
De lo anterior se concluye que $\mathscr{U}$ es un funtor contravariante.

Teorema 2.4.1. *Las categorías $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{R}_{cp}$ son co-equivalentes.*

Demostración. Considere dos retículos L y M. A continuación se verifica que, para $f : L \longrightarrow M$, un homomorfismo casi-propio de retículos, el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u_L"] \arrow[d, "f"'] & (\mathscr{L} \circ \mathscr{U})(L) \arrow[d, "(\mathscr{L}\circ\mathscr{U})(f)"] \\ M \arrow[r, "u_M"] & (\mathscr{L} \circ \mathscr{U})(M) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Las funciones u_L y u_M se definen del mismo modo que la aplicación u de la Sección 2.1.
Sea $a \in L$, entonces:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L} \circ \mathscr{U}(f))(u_L(a)) &= \mathscr{L}(\mathscr{U}(f))(u_L(a))\\ &= (\mathscr{U}(f))^*(u_L(a))\\ &= u_M(f(a)).\end{aligned}$$

Por otro lado, sean X e Y, dos espacios de Urquhart y $g : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathfrak{U}$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h^X"] \arrow[d, "g"'] & (\mathscr{U} \circ \mathscr{L})(X) \arrow[d, "(\mathscr{U}\circ\mathscr{L})(g)"] \\ Y \arrow[r, "h^Y"] & (\mathscr{U} \circ \mathscr{L})(Y) \end{tikzcd}$$

donde las funciones h^X y h^Y, se definen del mismo modo que la aplicación h en la demostración del Teorema 2.3.2.
Sea $a \in X$,

$$\begin{aligned} (C, D) \in (\mathscr{U} \circ \mathscr{L}(g))(h^X(a)) &\Leftrightarrow (C, D) \in ((\mathscr{L}(g))^*(h_1^X(a)), (\mathscr{L}(g))^*(h_2^X(a))) \\ &\Leftrightarrow ((\mathscr{L}(g))(C), (\mathscr{L}(g)(D))) \in (h_1^X(a), h_2^X(a)) \\ &\Leftrightarrow a \in \mathscr{L}(g)(C) \text{ y } a \in r(\mathscr{L}(g))(D) \\ &\Leftrightarrow a \in g^*(C) \text{ y } a \in r(g^*(D)) \\ &\Leftrightarrow g(a) \in C \text{ y } g(a) \in r(D) \\ &\Leftrightarrow C \in h_1^Y(g(a)) \text{ y } D \in h_2^Y(g(a)) \\ &\Leftrightarrow (C, D) \in h^Y(g(a)). \end{aligned}$$

Se encontraron entonces, dos transformaciones naturales:

$$U = \{u_L : 1_{\mathfrak{R}_{cp}} \longrightarrow \mathscr{L} \circ \mathscr{U}\}_{L \in Ob\mathfrak{R}_{cp}} \text{ y } H = \{h^X : 1_{\mathfrak{U}} \longrightarrow \mathscr{U} \circ \mathscr{L}\}_{X \in Ob\mathfrak{U}}.$$

Puesto que estas transformaciones naturales son isomorfismos, se concluye que las categorías $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{R}_{cp}$ son co-equivalentes. □

2.5. Equivalencia con la representación de Priestley en retículos distributivos

Esta sección, tiene como base la representación de Priestley, que se describió en la Sección 1.3. Se verificará que efectivamente la representación de Urquhart resulta ser una extensión de la representación de Priestley.

Definición 2.5.1. *Sea X un espacio doblemente pre-ordenado. Un punto x en X es llamado* ***primo*** *si para todo y en X, se tiene que $x \leqslant_1 y$ implica $y \leqslant_2 x$.*

Teorema 2.5.1. *Sean L un retículo y $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{U}(L)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) x es un punto primo.

b) x_1 es un filtro primo.

c) Para todo $y \in \mathscr{U}(L)$, si $x \leqslant_2 y$ entonces $y \leqslant_1 x$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ *b)* Sean $a, b \in L$ tales que $a \vee b \in x_1$. Suponga que $a \notin x_1$ y $b \notin x_1$, entonces $x_1 \cap (a] = \emptyset$ y $x_1 \cap (b] = \emptyset$. Así, existen $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$ en $\mathscr{U}(L)$ tales que $x_1 \subseteq y_1$, $(a] \subseteq y_2$, $x_1 \subseteq z_1$ y $(b] \subseteq z_2$.

Puesto que $x \leqslant_1 y$ se tiene que $y \leqslant_2 x$ y por lo tanto $a \in x_2$.

Del mismo modo como $x \leqslant_1 z$ se tiene que $z \leqslant_2 x$ y por lo tanto $b \in x_2$.

De lo anterior $a \vee b \in x_2$, lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que $a \in x_1$ o $b \in x_1$, luego x_1 es un filtro primo.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sea $x = (x_1, x_2)$ tal que x_1 es un filtro primo, luego $x_2 = (x_1)^c$. Sea $y \in \mathscr{U}(L)$, tal que $x \leqslant_2 y$, entonces $x_2 = (x_1)^c \subseteq y_2$, por lo tanto $(y_2)^c \subseteq x_1$. Como $y_1 \subseteq (y_2)^c$ entonces $y_1 \subseteq x_1$ de donde $y \leqslant_1 x$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sea $x \leqslant_1 y$ y suponga que $y \nleqslant_2 x$, entonces existe Z un conjunto doblemente cerrado estable tal que $y \in r(Z)$ y $x \notin r(Z)$, luego existe $w \in Z$ tal que $x \leqslant_2 w$. Así, $w \leqslant_1 x \leqslant_1 y$, por transitividad $w \leqslant_1 y$ y por ser Z un conjunto creciente $y \in Z$. Lo anterior es una contradicción, por lo tanto $y \leqslant_2 x$.

□

Teorema 2.5.2. *Sea L un retículo. Son equivalentes:*

a) L es distributivo.

b) Todo punto en $\mathscr{U}(L)$ es primo.

c) Para $x, y \in \mathscr{U}(L), x \leqslant_1 y \Leftrightarrow y \leqslant_2 x$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ *b)* Suponemos que existe un punto $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{U}(L)$ que no es primo. Por el teorema anterior x_1 no es un filtro primo. Así, existen s y t en L tales que $s \vee t \in x_1$, $s \notin x_1$ y $t \notin x_1$. Además, si $s \in x_2$ entonces $t \notin x_2$. Del mismo modo, si $t \in x_2$ entonces $s \notin x_2$. Por lo tanto existe $c \in L$ tal que $c \notin x_1$ y $c \notin x_2$.

Puesto que x es un par maximal $[x_1 \cup \{c\}) \cap x_2 \neq \emptyset$. Así, existe $y \in [x_1 \cup \{c\}) \cap x_2$, por lo tanto existe $a \in x_1$ tal que $a \wedge c \leqslant y$ y $y \in x_2$. Así, se tiene $a \wedge c \in x_2$.

Del mismo modo, $x_1 \cap (x_2 \cup \{c\}] \neq \emptyset$. Por lo tanto existen $w \in x_1 \cap (x_2 \cup \{c\}]$ y $b \in x_2$ tales que $w \leqslant b \vee c$. Así, $b \vee c \in x_1$.

Así,

$$a \wedge (b \vee c) \in x_1 \text{ y } (b \wedge a) \vee (a \wedge c) \in x_2,$$

de donde

$$a \wedge (b \vee c) \nleqslant (b \wedge a) \vee (a \wedge c),$$

lo cual es contradictorio.

$b) \Rightarrow a)$ Suponemos que L no es distributivo. Entonces existen a, b y c en L, tales que

$$a \wedge (b \vee c) \nleqslant (b \wedge a) \vee (a \wedge c).$$

Por lo tanto existe $x = (x_1, x_2)$ tal que $a \wedge (b \vee c) \in x_1$ y $(b \wedge a) \vee (a \wedge c) \in x_2$.

Como $(b \wedge a) \vee (a \wedge c) \in x_2$, se tiene que $b \wedge a \in x_2$ y $a \wedge c \in x_2$.

Por otro lado, dado que $a \wedge (b \vee c) \in x_1$, entonces $a \in x_1$ y $b \vee c \in x_1$. $c \notin x_1$, pues de lo contrario $a \wedge c \in x_1$, lo cual contradice que $a \wedge c \in x_2$.

Del razonamiento anterior se tienen los siguientes casos:

- Si $b \notin x_2$ entonces x_2 no es primo y por lo tanto x_1 no es primo.
- Si $b \in x_2$ entonces $b \notin x_1$ y por lo tanto x_1 no es primo.

Se llega entonces a una contradicción.

$b) \Leftrightarrow c)$ Esta equivalencia se tiene por definición de punto primo y por el teorema anterior.

□

Observación 2.5.1. *Observe que si L es distributivo, la condición c) del teorema anterior implica que la relación $\leqslant$ es antisimétrica y por lo tanto es de orden.*

Proposición 2.5.1. *Si X es un conjunto doblemente pre-ordenado donde $\leqslant_1 = (\leqslant_2)^o$ entonces las funciones $l : \boldsymbol{C}_2(X) \longrightarrow \boldsymbol{C}_1(X)$ y $r : \boldsymbol{C}_1(X) \longrightarrow \boldsymbol{C}_2(X)$ coinciden con el operador complemento.*

Demostración. Note que para todo subconjunto B de X, si $B \in \boldsymbol{C}_1(X)$ entonces $B \in \boldsymbol{D}_2(X)$. Así, $r(B) = c(\downarrow_2 B) = c(B) = B^c$. Del mismo modo se verifica la condición para el operador l. □

De los resultados previos se tiene entonces que el espacio dual de un retículo distributivo L se puede identificar con una sola relación de pre-orden $\leqslant_i$ pues la otra será su dual. Además, todas sus parejas maximales serán de la forma (I^c, I), donde I^c es un filtro primo de L y por lo tanto I es un ideal primo.

Observación 2.5.2. *Sea L un retículo distributivo. Note que para $a \in L$*

$$\begin{aligned} u(a) =& \{(I^c, I) \in \mathscr{U}(L) : a \in I^c\} \\ =& \{(I^c, I) \in \mathscr{U}(L) : a \notin I\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $u(a)$ es equivalente al conjunto de la forma $d(a)$ en el contexto de Priestley. Además en $\mathscr{U}(L)$, $u(a)$ es creciente con el orden $\leqslant_1$ por lo tanto es decreciente con el orden $\leqslant_2$ que es el orden por inclusión respecto a los ideales, el cual coincide con el orden en $\mathscr{P}(L)$. Entonces se identificará en adelante $\mathscr{U}(L)$ con el orden de inclusión respecto a los ideales ($\leqslant_2$).

Proposición 2.5.2. *Si L es un retículo distributivo entonces $\mathscr{U}(L)$ es orden homeomorfo a $\mathscr{P}(L)$.*

Demostración. Considere la aplicación

$$G : \mathscr{P}(L) \longrightarrow \mathscr{U}(L) : I \longmapsto (I^c, I)$$

Es claro que esta es una aplicación inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, dado que los órdenes coinciden, se tiene que es un isomorfismo de conjuntos ordenados. Resta entonces verificar lo siguiente:

Por la proposición anterior $r(u(a)) = u(a)^c$. Entonces $G(d(a)) = u(a)$ y $G(d(a)^c) = u(a)^c$, por lo tanto G es una función abierta. Además, $G^*(u(a)) = d(a)$ y $G^*(u(a)^c) = d(a)^c$ luego G es una función continua. Así, G es un orden-homeomorfismo. □

Proposición 2.5.3. *Sea $(X, \tau, \leqslant)$ un espacio ordenado. Y es un conjunto doblemente cerrado estable en el espacio doblemente ordenado $(X, \tau, \leqslant, \leqslant^o)$ si y solo si Y es un conjunto abierto, cerrado y creciente en el espacio ordenado $(X, \tau, \leqslant)$.*

Demostración. $\Rightarrow$)En este caso r coincide con el operador complemento. Por ser Y un conjunto doblemente cerrado Y^c es cerrado y por lo tanto Y es un conjunto abierto. Ahora, por ser Y estable resulta ser creciente con el orden $\leqslant$.

$\Leftarrow$)Por ser Y abierto, Y^c es cerrado, luego $r(Y)$ es cerrado.

Puesto que Y es creciente con el orden $\leqslant$, $lr(Y) = (Y^c)^c = Y$. Por lo tanto es estable. □

Proposición 2.5.4. *El espacio ordenado $(X, \tau, \leqslant)$ es un espacio de Priestley si y solo si $(X, \tau, \leqslant, \leqslant^o)$ es un espacio de Urquhart.*

Demostración. $\Rightarrow$) Suponga que $(X, \tau, \leqslant)$ es un espacio de Priestley entonces es compacto y orden totalmente disconexo.

A continuación, se verifican las condiciones $1, 2$ y 3 en la definición de espacio de Uruhart.

1. X es compacto por definición. Note que por ser X un espacio de Priestley, la colección de los subconjuntos abiertos cerrados crecientes de X es una familia separadora y por la proposición anterior se tiene que esto es equivalente a decir que la colección de todos los conjuntos doblemente cerrados estables de X es una familia separadora. Por dualidad se tiene que los complementos de los conjuntos doblemente cerrados estables constituyen una familia separadora de X respecto al orden $\leqslant^o$.

2. Sean Y y Z conjuntos doblemente cerrados estables, por lo tanto son abiertos y cerrados crecientes. Así, $r(Y \cap Z) = (Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c$, luego es cerrado. Del mismo modo, $lr(Y \cup Z) = ((Y \cup Z)^c)^c = Y \cup Z$ que es un conjunto cerrado.

3. Esta condición se sigue de la proposición anterior y de que la colección de todos los conjuntos abiertos cerrados crecientes y sus complementos son una sub-base para τ.

$\Leftarrow$) X es compacto. Por ser la colección de todos los conjuntos doblemente cerrados estables una familia separadora con el orden $\leqslant$, sigue de la proposición anterior que X es orden totalmente disconexo. □

Observación 2.5.3. *Las siguientes son consecuencias inmediatas de la anterior proposición:*

1. *Si* $(X, \leqslant)$ *es un espacio de Priestley entonces el retículo dual de* $(X, \leqslant)$ *es isomorfo al retículo dual de* $(X, \leqslant, \leqslant^o)$.

2. *Existe una correspondencia biyectiva entre los objetos de la categoría* $\mathfrak{U}$ *tales que* $\leqslant_1 = (\leqslant_2)^o$ *y los objetos de la categoría* $\mathfrak{P}$.

Proposición 2.5.5. *Sean* $(X, \tau, \leqslant)$ *y* $(Y, \tau, \leqslant)$ *espacios de Priestley.*

$$f : (X, \tau, \leqslant) \longrightarrow (Y, \tau, \leqslant)$$

es un morfismo en $\mathfrak{P}$*, si y solo si*

$$f : (X, \tau, \leqslant, \leqslant^o) \longrightarrow (Y, \tau, \leqslant, \leqslant^o)$$

es un morfismo en $\mathfrak{U}$

Demostración.

$\Leftarrow$) Por definición $f : (X, \tau, \leqslant) \longrightarrow (Y, \tau, \leqslant)$ es una función continua y el ser isótona se sigue de la Proposición 2.4.1.

$\Rightarrow$) Por definición $f : (X, \tau, \leqslant, \leqslant^o) \longrightarrow (Y, \tau, \leqslant, \leqslant^o)$ es una función continua. Notando $\leqslant_1 = \leqslant$ y $\leqslant_2 = \leqslant^o$, restaría verificar que para cada conjunto doblemente cerrado estable Y de X, $f^*(r(Y)) = rf^*(Y)$ y $f^*(lr(Y)) = lf^*(r(Y))$.

Sea Y un conjunto doblemente cerrado estable, entonces es abierto, cerrado y creciente, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f^*(r(Y)) &= f^*(Y^c) \\ &= (f^*(Y))^c \\ &= (\uparrow_1 f^*(Y))^c \\ &= (\downarrow_2 f^*(Y))^c \\ &= rf^*(Y). \end{aligned}$$

Del mismo modo se verifica que $f^*(lr(Y)) = lf^*(r(Y))$. $\square$

Observación 2.5.4. *De los resultados previos, se concluye que la categoría de los espacios de Priestley y la sub-categoría de los espacios de Urquhart donde los pre-órdenes son uno dual del otro son categorías isomorfas.*

Conclusiones y preguntas

La dualidad entre la categoría de los retículos distributivos acotados y la categoría de los espacios de Priestley se extiende a una dualidad entre la categoría de los retículos acotados y la categoría de los espacios de Urquhart. Para que las cosas funcionen se deben escoger cuidadosamente los morfismos en cada una de las categorías. Para el caso de los retículos acotados se introducen los homomorfismos casi-propios, que generalizan a los homomorfismos propios utilizados en la dualidad de Balbes-Dwinger (ver [1]). En el caso de los espacios de Urquhart se consideran funciones continuas que se comportan bien con los conjuntos doblemente cerrados estables.

Esta extensión de la dualidad de Priestley no dejará satisfechos, sin embargo, a los que prefieren trabajar siempre con espacios de Hausdorff. En efecto, como se ilustró por medio de un ejemplo, los espacios de Urquhart no siempre son espacios de Hausdorff. ¿Podrá entonces extenderse la dualidad de Priestley utilizando espacios de Stone?

Por otro lado, si no queremos imponer esta condición, es natural preguntarse si la dualidad de Stone puede extenderse a una categoría cuyos objetos sean los retículos acotados. Posiblemente sea necesario trabajar con espacios bi-topológicos en lugar de espacios topológicos doblemente pre-ordenados.

Algunos matemáticos se interesan por las construcciones que no requieran el uso de alguna forma del axioma de elección. Es claro que en todos los tipos de representación de los que hemos hablado se utiliza el Teorema del ideal primo o el Lema de Zorn para garantizar la existencia de ciertos filtros e ideales. ¿Será posible introducir una dualidad que no utilice estas herramientas? Una idea sería trabajar con las parejas filtro-ideal sin exigir que sean parejas maximales. En este sentido se puede consultar el artículo de Allwein y Hartonas [2].

Bibliografía

[1] Acosta, L., *Temas de teoría de retículos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2016.

[2] Allwein, G. and Hartonas, C., *Duality for Bounded Lattices*, Indiana University, 1992.

[3] Balbes, R. and Dwinger, P., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[4] Birkhoff, G., *Lattice theory*, American Mathematical Society, 1940.

[5] Davey, B. and Priestley, H., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

[6] Galeano, J., *Una revisión booleana de algunas construcciones relacionadas con el funtor espectro*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[7] Hochster, M., *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc, 1969.

[8] Johnstone, P.T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[9] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, 1998.

[10] Munkres, J.R., *Topology: a First Course*, Englewood Cliffs , N.J, 1974.

[11] Priestley,H., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math.Soc **2** (1970).

[12] Restrepo, M., *Algunos aspectos sobre topologías constructibles*, Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[13] Rubio, I.M., *El funtor espectro y su relación con el proceso de adjunción de unidad*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[14] Stone, M.H., *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. American Mathematical Society (1936).

[15] Stone, M.H, *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics*, Trans.Casopis pest.mat.fys (1937).

[16] Urquhart, A., *A topological representation theory for lattices*, Algebra Universalis (1978).