Identificación del coeficiente de elasticidad de Young de un material, por medio de correlación digital de imágenes

Juan Mario Castro Quintana
Matemático, Magister en Matemática Aplicada
Código: 01830446

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Julio de 2013

Identificación del coeficiente de elasticidad de Young de un material, por medio de correlación digital de imágenes

Juan Mario Castro Quintana
Matemático, Magister en Matemática Aplicada
Código: 01830446

Propuesta de tesis para optar al título de
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director
Jorge Mauricio Ruiz Vera, Ph.D.
Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Julio de 2013

Título en español

Identificación del coeficiente de elasticidad de Young de un material, por medio de correlación digital de imágenes

Title in English

Identification of the Young's modulus of elasticity of a material, via digital image correlation

Resumen: Una alternativa para determinar las propiedades mecánicas de un material es llevando a cabo experimentos basados en técnicas ópticas y procesamiento de imágenes, las cuales tienen la ventaja de no destruir el material en estudio y no ser invasivo. En este trabajo usaremos la Correlación Digital de Imágenes (CDI) para obtener sin contacto, las medidas de desplazamiento y deformación de un material. Proporcionadas estas medidas, planteamos un problema de identificación de parámetros que es resuelto a través de la técnica de regularización de Tikhonov y el método de la adjunta, lo cual se traduce en un considerable ahorro de tiempo y memoria de cálculo. Con el fin de validar el método de obtención del coeficiente de elasticidad, trabajaremos con materiales conocidos como el aluminio. El trabajo propuesto aquí es de gran interés, ya que algunos materiales no conocidos (como el bambú) son usados en la industria de la construcción y fabricación de muebles, están actualmente bajo investigación.

Abstract: An alternative to determine the mechanical properties of a material is conducting experiments based on optical techniques and processing of images, which have the advantage to not destroy the material in study and to not being invasive. In this work we use the correlation on digital images (CDI) to obtain without contact, measures of displacement and deformation of a material. Provided these measurements, we pose an identification of parameters problem that is solved via the technique of regularization of Tikhonov and the adjoint method, which translates into considerable savings of time and memory of calculation. In order to validate the method of obtaining the elasticity coefficient, we work with known materials as aluminum. The work proposed here it is of great interest, since several not well known materials (like bamboo) used in the construction industry and furniture manufacturing, are currently under research.

Palabras clave: Módulo de Young, Correlación Digital de Imágenes, Regularización de Tikhonov, Transformada de Laplace, Mínimos Cuadrados, Método de la Adjunta

Keywords: Young's Modulus, Digital Image Correlation, Regularization of Tikhonov, Laplace transform, Least squares, Adjoint method

Índice general

Índice general **1**

Introducción **2**

1. La Barra de Euler-Bernoulli **1**

1.1. Solución analítica 3

1.2. Solución numérica 5

2. Correlación Digital de Imágenes (DIC) **9**

3. Identificación del Modulo de Young para un material homogéneo **11**

3.1. Simulación 12

3.2. Imágenes reales 15

4. Identificación del Módulo de Young para un material no homogéneo **17**

4.1. Simulación módulo constante 21

4.2. Simulación módulo no constante 22

5. Conclusiones y recomendaciones **23**

5.1. Conclusiones 23

5.2. Recomendaciones 24

Bibliografía **25**

Introducción

A menudo, para hallar las propiedades físicas de materiales, como las mecánicas (rigidez, ductilidad, dureza, elasticidad, entre otras), se realizan ciertos tipos de experimentos los cuales pueden ser destructivos (ver [6]), y en ocasiones los materiales puestos a prueba pueden ser muy costosos o difíciles de conseguir como verificar la resistencia de los automóviles a accidentes de tráfico en distintos tipos de circunstancias.

Existen distintos tipos de experimentos que permiten calcular el módulo de Young, entre los cuales se encuentran los métodos cuasi-estáticos, dinámicos y de ultrasonido. Los métodos cuasi-estáticos, se caracterizan por ser destructivos, es decir, sus muestras suelen ser destruidas después de realizada la prueba; consiste en la aplicación de una carga lentamente, mientras se monitorea la deformación inducida. Los métodos dinámicos proveen datos tanto cuantitativos (como el módulo de Young) como cualitativos; consiste en calcular los módulos elásticos a partir de las frecuencias naturales de vibración del material a prueba. Los métodos de ultrasonido consisten en emitir ondas ultrasónicas (inaudibles para los humanos) y captar el eco generado, calculando después la velocidad con la que viaja la onda de sonido, seguido del módulo de Young. Aunque los métodos dinámicos y de ultrasonido no son destructivos, se requiere un equipo especializado para su aplicación, elevando el costo de los experimentos (vease [3]).

Una alternativa para superar este inconveniente, es la Correlación Digital de Imágenes (DIC), la cual puede suministrar la información de ciertos tipos de deformaciones en varias etapas del experimento por medio de comparación de imágenes, tanto antes, como después de realizada la prueba, además de tener la ventaja de trabajar a niveles de escala que el ojo humano no puede reconocer con facilidad.

El propósito de esta tesis es suministrar algoritmos con los cuales se puede hallar el módulo de Young de un material (sea homogéneo o no). Este problema se enmarca como un problema inverso, en el sentido que obtenemos los datos de deformación de un material desconocido a partir de la correlación de imágenes del experimento, para luego encontrar el módulo de elasticidad del material resolviendo un problema de identificación de parámetros de un ecuación diferencial con condiciones de frontera determinadas por el tipo de experimento

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1, se desarrollará el modelo de Euler-Bernoulli, tanto su solución analítica como su numérica, para una barra que se encuentra empotrada en uno de sus extremos y en su extremo libre se aplica una determinada carga.
- En el Capítulo 2, se presenta el proceso de correlación digital de imágenes, con el cual se obtienen los datos de la deflexión realizada por la barra al aplicar la carga.
- En el Capítulo 3, se desarrolla un algoritmo basado en el método de mínimos cuadrados que se puede aplicar para materiales cuya morfología es homogénea, en este caso, el módulo de Young será constante.
- En el Capítulo 4, se propone un algoritmo de identificación del módulo de Young para materiales cuya morfología no es homogénea empleando el método de regularización de Tikhonov y cálculo adjunto.
- Finalmente, en el Capítulo 5 se encontraran las conclusiones a las que se llego en la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 1

La Barra de Euler-Bernoulli

La teoría de la barra de Euler-Bernoulli, es una parte de la teoría de la elasticidad lineal, que proporciona las características de la deflexión de una barra sujeta a una carga. Es aplicable cuando la deformación de la barra debido a su peso es despreciable, las dimensiones de la sección transversal de la barra son muy pequeñas con relación a su longitud y además las deformaciones en la barra no alteran la sección transversal de la barra, es decir el espesor de la barra es muy pequeño comparado con el radio de curvatura. Es por tanto, un caso particular de la teoría de la barra de Timoshenko (véase [18]).

Consideremos una viga de longitud L homogénea tal que para cualquier corte transversal se obtiene secciones uniformes, sin aún ubicar una carga, la curva que une los centroides de todas las secciones transversales se denomina *eje de simetría*. Al aplicar una carga vertical a la viga, la viga sufrirá una distorsión y la curva que une a los centroides genera la curva denominada *curva de deflexión o curva elástica*, tal como se puede observar en la *Figura* **1-1**.

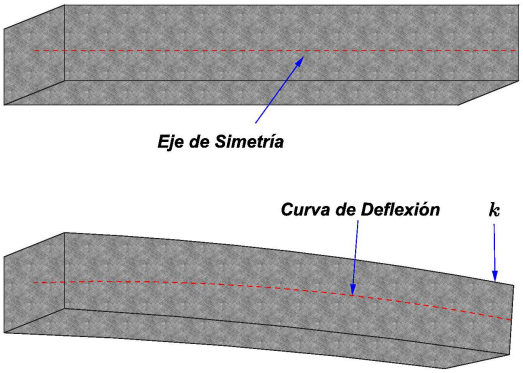

FIGURA **1-1**. Curva de Deflexión

Con el fin de determinar la curva de deflexión de la viga sometida a una carga (véase [21]), se supondrá que el eje se simetría coincide con el eje x del plano cartesiano, además a partir de este eje, la media de la curva de deflexión $y(x)$, se mide hacia abajo, siendo este sentido el positivo del eje y. Teniendo en cuenta la teoría de la elasticidad, el momento de

flexión $M(x)$ de un punto x de la viga, se relaciona con la carga en dicho punto $\omega(x)$, por medio de la expresión:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \omega(x) \tag{1-1}$$

Por otro lado, el momento de flexión $M(x)$ es proporcional a la curvatura κ de la curva de deflexión,

$$M(x) = \kappa E(x) I, \tag{1-2}$$

donde $E(x)$ es el *módulo de Young* del material de la viga e I es el *Momento de Inercia* de una sección transversal dada por

$$I = \int\int y^2 dydz.$$

Así, el momento de inercia de una barra rectangular se calcula por medio de la formula

$$I = \frac{ancho \cdot (alto)^3}{12}$$

Teniendo en cuenta que la curvatura está definida como $\kappa = y''/\left[1+(y')^2\right]^{3/2}$, y, dado que la deflexión de la viga $y(x)$ crece lentamente, es decir, $y' \approx 0$, entonces $\left[1+(y')^2\right]^{3/2} \approx 1$, de donde se concluye que $\kappa \approx y''$, así, la expresión (1-2) se convierte en $M = IE(x)y''$. Derivando dos veces con respecto a x,

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(IE(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{1-3}$$

e igualando con la expresión (1-1) obtenemos finalmente la ecuación de Euler-Bernoulli

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(IE(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \omega(x), \qquad \text{para } 0 < x < L \tag{1-4}$$

Con el objetivo que el problema este bien planteado, es necesario adicionar condiciones de frontera a (1-4), las cuales dependen del empotramiento de la viga y de la ubicación de la carga. Para este trabajo, se tendrá en cuenta una viga empotrada solo en uno de sus dos extremos, el otro extremo se encontrará libre, como se aprecia en la *Figura **1-2***. Suponga que el empotramiento se encuentra en $x = 0$. La carga k, estará ubicada en dos posiciones distintas: en $x = c$, con $c \in (0, L)$ y en $x = L$.

Las dos situaciones sobre la barra son las siguientes:

Caso 1. **Carga en $x = c$ con $c \in (0, L)$:** La carga $\omega(x)$ esta definida por:

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq c \\ k, & \text{si } x = c \end{cases} \tag{1-5}$$

Las condiciones de frontera para este caso son:

- $y(0) = 0$, dado que este extremo de la viga se encuentra empotrado, no hay flexión en este punto.

FIGURA **1-2**. Montaje del experimento

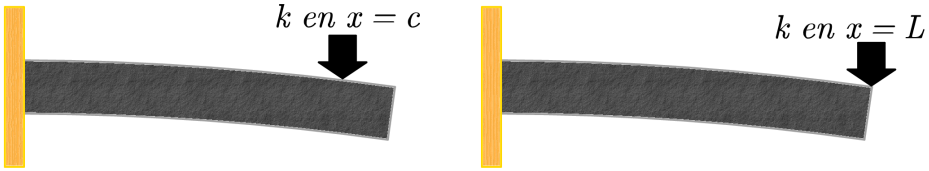

FIGURA **1-3**. Deflexiones con distintas ubicación de carga

- $y'(0) = 0$, pues la curva de deflexión es tangente al eje de simetría, es decir, al eje x. En otras palabras, la pendiente de la curva es cero en este punto.
- $E(L)Iy''(L) = 0$, porque el momento de flexión es cero.
- $(E(L)Iy''(L))' = 0$, ya que la fuerza cortante. $\left(F(x) = \dfrac{dM}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(IE(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\right)$ es cero.

Caso 2. **Carga en $x = L$:** La expresión (1-4) adopta la siguiente forma:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\left(E(x)I\right)\right) = 0, \qquad \text{para } 0 < x < L \tag{1-6}$$

Las condiciones de frontera son:

- $y(0) = 0$, dado que este extremo de la viga se encuentra empotrado, no hay flexión en este punto.
- $y'(0) = 0$, pues la curva de deflexión es tangente al eje de simetría, es decir, al eje x. En otras palabras, la pendiente de la curva es cero en este punto.

- $E(L)Iy''(L) = 0$, porque el momento de flexión es cero.
- $(E(L)Iy''(L))' = -k$, ya que la fuerza cortante es $-k$.

La ecuacion diferencial (1-4), con sus respectivas condiciones de frontera poseen solución única, esto se puede demostrar utilizando el método de las soluciones inferiores y superiores, (véase [15]). En las siguientes secciones, se resuelve el *problema directo*, esto es, dados los datos del problema (la carga k, y conocido el módulo de Young del material), se resuelve la ecuación diferencial (1-4), encontrando así, la curva de deflexión.

1.1. Solución analítica

A continuación, se considerara el Modulo de Young $E(x)$ constante, convirtiendo los problemas de valor en la frontera (1-4) y (1-6) en ecuaciones lineales con coeficientes constantes , lo cual permite emplear el método de la transformada de Laplace para hallar sus soluciones.

Carga en $x = c$ con $c \in (0, L)$

Dado que la carga es aplicada en un punto de la barra, la función de carga $\omega(x)$ puede ser definida por:

$$\omega(x) = \begin{cases} k, & \text{si } x = c \\ 0, & \text{si } x \neq c \end{cases} = k\delta(x-c),$$

donde $\delta(x-c)$ es la función *Delta de Dirac*, dada por:

$$\delta(x-c) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq c \\ \text{“}\infty\text{”}, & \text{si x=c} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que E es constante, la ecuación (1-4) se convierte en:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = k\delta(x-c) \tag{1-7}$$

Para resolver (1-7) con mayor facilidad, se aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad,

$$EI\mathcal{L}\left\{\frac{d^4y}{dx^4}\right\} = k\mathcal{L}\left\{\delta(x-c)\right\} \tag{1-8}$$

con condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$. Desarrollando (1-8),

$$EI\left(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right) = ke^{-cs},$$

introduciendo las condiciones de frontera se obtiene

$$EI\left(s^4Y(s) - sA - B\right) = ke^{-cs},$$

despejando $Y(s)$ tenemos la expresión:

$$Y(s) = \frac{ke^{-cs}}{EIs^4} + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4}$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace en la ecuación anterior para obtener finalmente

$$y(s) = \frac{k}{6EI}(x-c)^3\mathcal{U}(x-c) + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3, \tag{1-9}$$

donde la función $\mathcal{U}(x-c)$ es la función *escalón unitario* definida por

$$\mathcal{U}(x-c) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < c \\ 1, & \text{si } x > c \end{cases}$$

Para hallar los valores de A y B, se encuentran las derivadas de segundo y tercer orden de (1-9) y se evalúa en $x = L$

$$y''(L) = \frac{k}{EI}(L-c)\mathcal{U}(L-c) + A + BLy'''(L) = \frac{k}{EI}\mathcal{U}(L-c) + B$$

donde, teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$, se concluye que $A = \dfrac{ck}{EI}$ y $B = -\dfrac{k}{EI}$, reemplazando estos valores en (1-9), finalmente se obtiene

$$y(x) = \frac{k}{6EI}\left((x-c)^3\mathcal{U}(x-c) - x^3 + 3cx^2\right)$$

y así, la curva de deflexión $y(x)$ esta dada por

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{6EI}\left(-x^3 + 3cx^2\right), & \text{si } x < c \\ \dfrac{k}{6EI}\left(3c^2x - c^3\right), & \text{si } x \geq c \end{cases} \tag{1-10}$$

Carga en $x = L$

Para hallar la solución de (1-6), basta integrar cuatro veces la ecuación y así se obtiene la expresión

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx + D\right),$$

donde aplicando las condiciones de frontera respectivas, se concluye $A = -k$, $B = kL$, $C = 0$ y $D = 0$, remplazando se tiene la siguiente expresión para la curva de deflexión

$$y(x) = -\frac{k}{6EI}x^3 + \frac{kL}{2EI}x^2 \tag{1-11}$$

1.2. Solución numérica

Para solucionar numéricamente las ecuación (1-6), será necesario usar la discretización de una ecuación diferencial de segundo orden por medio de *Diferencias Finitas Centrales*. Con este fin, se construye una partición de longitud h, y se desarrolla la función de deflexión y de la serie de Taylor hasta el tercer orden para $x + h$ y $x - h$, esto es

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{iv}(\zeta) \tag{1-12}$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{iv}(\eta) \tag{1-13}$$

para algunos $\zeta \in (x, x+h)$ y $\eta \in (x-h, x)$. Sumando (1-12) y (1-13) se obtiene

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + \frac{h^4}{24}(y^{iv}(\zeta) + y^{iv}(\eta))$$

de donde finalmente se tiene que

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^4}{24}y^{iv}(\xi)$$

para algún $\xi \in (x-h, x+h)$ Notando como $y_i = y(x_i)$, la deflexión de la barra en el punto x_i, se concluye que la aproximación esta dada por:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{1-14}$$

Para discretizar (1-6), se tendrá en cuenta la formula

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \tag{1-15}$$

donde

$$w = E(x)I\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1-16}$$

Aplicando la discretización (1-14) en las ecuaciones (1-15) y (1-16) se obtiene

$$w_i'' = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = 0 \tag{1-17}$$

y

$$w_i = IE_i\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 0 \tag{1-18}$$

donde E_i y y_i son el Modulo de Young y la deflexión en el punto x_i de la barra respectivamente e I es el Momento de Inercia.

Remplazando (1-18) en (1-17) se tiene

$$\frac{I}{h^4}\left(E_{i+1}y_{i+2} - 2(E_{i+1} + E_i)y_{i+1} + (E_{i+1} + 4E_i + E_{i-1})y_i - 2(E_i + E_{i-1})y_{i-1} + E_{i-1}y_{i-2}\right) = 0,$$

Teniendo en cuenta que I tanto como h son constantes, la expresión anterior se puede ver como

$$E_{i+1}y_{i+2} - 2(E_{i+1} + E_i)y_{i+1} + (E_{i+1} + 4E_i + E_{i-1})y_i - 2(E_i + E_{i-1})y_{i-1} + E_{i-1}y_{i-2} = 0, \tag{1-19}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

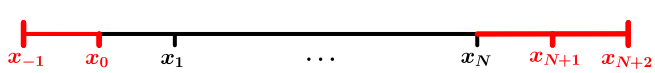

FIGURA **1-4**. Puntos ficticios y_{-1}, y_{N+1} y y_{N+2}

En cuanto a las condiciones de frontera, consideraremos puntos ficticios, *Figura* **1-4**, y diferencias centrales para mantener el orden de consistencia del esquema:

- $y(0) = 0$,
$$y_0 = 0 \tag{1-20}$$
- $y'(0) = 0$,
$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0,$$
de donde
$$y_{-1} = y_1 \tag{1-21}$$
- $E(x)Iy''(L) = 0$,
$$\frac{E_N I(y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1})}{h^2} = 0,$$
simplificando,
$$E_N(y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}) = 0 \tag{1-22}$$
- $(E(x)Iy''(L))' = -k$. Para esta condicion de frontera, se aplica la derivada de segundo orden
$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$
en la expresión Y_i definida por
$$Y_i = IE_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^3}$$
para obtener la igualdad
$$I\frac{E_{N+1}(y_{N+2} - 2y_{N+1} + y_N) - E_{N-1}(y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2})}{2h^3} = -k,$$
donde desarrollando un poco el álgebra se obtiene
$$E_{N+1}y_{N+2} - 2E_{N+1}y_{N+1} + (E_{N+1} - E_{N-1})y_N + 2E_{N-1}y_{N-1} - E_{N-1}y_{N-2} = -\frac{2kh^3}{I} \tag{1-23}$$

Teniendo en cuenta la discretización de las condiciones iniciales (1-20), (1-21), (1-22), (1-23), y la discretización (1-19) de (1-6), se obtiene un sistema de N ecuaciones con N variables:

$$\begin{aligned}
(E_2 + 4E_1 + 2E_0)y_1 - 2(E_2 + E_1)y_2 + E_2y_3 &= 0 \\
-2(E_2 + E_1)y_1 + (E_3 + 4E_2 + E_1)y_2 - 2(E_3 + E_2)y_3 + E_3y_4 &= 0 \\
E_{i-1}y_{i-2} - 2(E_i + E_{i-1})y_{i-1} + (E_{i+1} + 4E_i + E_{i-1})y_i - 2(E_{i+1} + E_i)y_{i+1} + E_{i+1}y_{i+2} &= 0 \\
\text{para } i = 3, \ldots N-2 \\
E_{N-2}y_{N-3} - 2(E_{N-1} + E_{N-2})y_{N-2} + (4E_{N-1} + E_{N-2})y_{N-1} - 2E_{N-1}y_N &= 0 \\
E_{N-1}y_{N-2} - 2E_{N-1}y_{N-1} + E_{N-1}y_N &= \frac{kh^3}{I}
\end{aligned} \tag{1-24}$$

Así, la ecuación (1-6) se puede ver como el sistema lineal $My = b$, con M una matriz pentadiagonal simétrica

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & M_3 \end{pmatrix}, \tag{1-25}$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_2 + 4E_1 + 2E_0 & -2(E_2 + E_1) & E_2 & \\ -2(E_2 + E_1) & E_3 + 4E_2 + 2E_1 & -2(E_3 + E_2) & E_3 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & -2(E_3 + E_2) & E_4 + 4E_3 + 2E_2 & -2(E_4 + E_3) & E_4 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & E_{N-3} & -2(E_{N-2} + E_{N-3}) & E_{N-1} + 4E_{N-2} + 2E_{N-3} & -2(E_{N-1} + E_{N-2}) & E_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} E_{N-2} & -2(E_{N-1} + E_{N-2}) & 4E_{N-1} + 2E_{N-2} & -2E_{N-1} \\ & E_{N-1} & -2E_{N-1} & E_{N-1} \end{pmatrix}$$

y $b_i = 0$ para $i = 0, \ldots, N-1$ y $b_N = \dfrac{kh^3}{I}$. M_1 representa discretización en la frontera del extremo empotrado, M_2 la discretización en el interior de la barra y M_3 la discretización en la frontera del extremo voladizo.

Proposición 1. *El sistema $My = b$ tiene solución, donde M es como se describe en (1-25)*

Demostración. Se demostrará que la matriz M es definida positiva, esto es, que para cualquier vector no nulo $z \in \mathbb{R}^N$, se tiene que $z^T M z > 0$. Sea $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)^T$, el producto $z^T M z > 0$ esta dado por:

$$\begin{aligned} z^T M z &= 2E_1 z_1^2 + E_2\left(4z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2\right) + \sum_{i=3}^{N} E_i\left(z_{i-2}^2 + 4z_{i-1}^2 + z_i^2 - 4z_{i-2}z_{i-1} + 2z_{i-2}z_i - 4z_{i-1}z_i\right) \\ &= 2E_1 z_1^2 + E_2\left(\frac{15}{4}z_1^2 + \left(\frac{z_1}{2} + z_2\right)^2\right) + \sum_{i=3}^{N} E_i\left(z_{i-2} - 2z_{i-1} + z_i\right)^2 && \text{(1-26)} \\ &\geq 0 && \text{(1-27)} \end{aligned}$$

Este ultimo se debe a que el módulo de Young $E(x)$ es positivo, así, M es semidefinida positiva. Ahora, se vera que es definida positiva. Suponga que existe un vector no nulo $z \in \mathbb{R}^N$ tal que (1-26) sea igual a cero. Como (1-26) es suma de términos no negativos, se tiene que

$$2E_1 z_1^2 = 0 \tag{1-28}$$

$$E_2\left(\frac{15}{4}z_1^2 + \left(\frac{z_1}{2} + z_2\right)^2\right) \tag{1-29}$$

$$E_i\left(z_{i-2} - 2z_{i-1} + z_i\right)^2 = 0 \quad \text{para } i = 3, \ldots N \tag{1-30}$$

Dado que $E_1 > 0$, por (1-28) se tiene que $z_1 = 0$. De (1-29) se concluye que $z_2 = 0$, pues $z_1 = 0$ y $E_2 > 0$. Sea $j \in \{3, \ldots, N\}$. Suponga que para $i < j$ se tiene que $z_i = 0$, se demostrara que $z_j = 0$. Tomando $i = j$, de (1-30), se tiene la ecuación $E_j\left(z_{j-2} - 2z_{j-1} + z_j\right)^2 = 0$, como $z_{j-2} = zj - 1 = 0$, y además, $E_j > 0$, se concluye que $z_j = 0$. Así, se ha demostrado que $z = 0$, lo cual contradice el hecho de que z sea un vector no nulo. Por lo tanto, M es una matriz definida positiva, y por lo tanto el sistema lineal $My = b$ tiene solución. $\square$

CAPÍTULO 2

Correlación Digital de Imágenes (DIC)

Un método útil para obtener datos de determinados tipos de experimentos es la *Correlación Digital de Imágenes (DIC)*, ya que facilita la obtención de características de distintos tipos de materiales sin la necesidad de repeticiones experimentales ni de contacto, además de que permite trabajar con una gran diversidad de escalas, las cuales dependen de la calidad de la resolución de la cámara con la cual se toman las fotografías. La DIC, suministra el campo de desplazamiento entre dos superficies planas por medio de la comparación de las imágenes del antes y después del experimento.
Una imagen se puede considerar como una matriz, donde cada entrada, es un número positivo que indica la cantidad de brillo, estas entradas se llaman pixeles y su valor depende de la cámara digital con la que fue tomada la imagen. El método DIC, busca comparar y encontrar el campo de desplazamiento que hay entre los pixeles de las dos imágenes. Para esto, examina las dos imágenes por medio de pequeñas zonas de las imágenes original y deformada, tal como se puede apreciar en la *Figura* **2-1**.

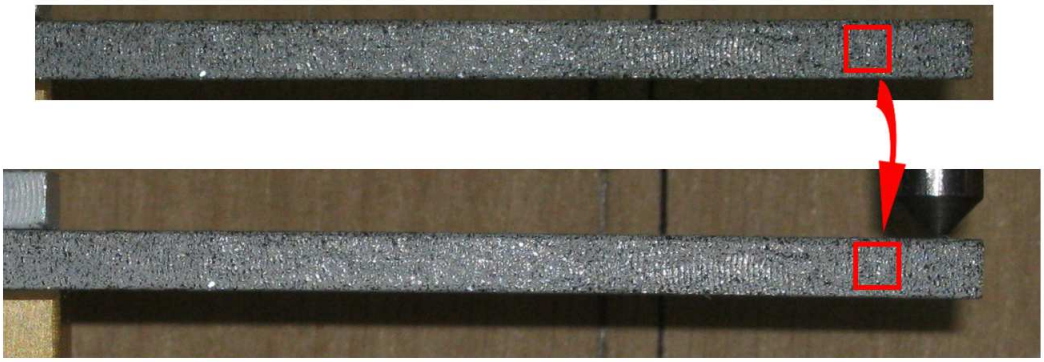

FIGURA **2-1**. Comparación de imágenes

Para hallar el campo de desplazamiento es muy común utilizar el método de la *correlación cruzada*, para el cual se utilizan las imágenes en escalas de grises. Sean $\overline{f}$ y $\overline{g}$ el promedio de escalas en grises de las imágenes original y deformada respectivamente (Véase

[10]). La función de correlación cruzada está dada por:

$$C(u,v) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[f\left(x_i,y_j\right)-\overline{f}\right]\left[g\left(x_i',y_j'\right)-\overline{g}\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[f\left(x_i,y_j\right)-\overline{f}\right]^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[g\left(x_i',y_j'\right)-\overline{g}\right]^2}} \tag{2-1}$$

donde (x_i, y_i) y (x_i', y_i') son los las coordenadas de un punto de las selecciones de la imagen original y deformada respectivamente, $f(x_i, y_j)$ es el valor de gris en la coordenada (x_i, y_j) en la imagen original, $g(x_i', y_j')$ el valor de gris en la imagen deformada en la coordenada (x_i', y_j'), y (u, v) es la coordenada del centro de la región desplazada. Además se tiene que las coordenadas (x_i', y_i') de la imagen deformada se relacionan con las coordenadas (x_i, y_i) de la imagen original por medio de

$$x' = x + u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \qquad \text{y} \qquad y' = y + v + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy, \tag{2-2}$$

donde dx y dy son las componentes direccionales x y y de la distancia desde el centro de la selección al punto (x, y) respectivamente. En la *Figura 2-2* los puntos P y Q de la imagen original se trasladan a los puntos P' y Q' en la imagen deformada respectivamente. Así, la distancia de traslación del punto P al punto P', se interpreta como el desplazamiento y la posición del punto Q' a través de la ecuación(2-2) (Véase [20]).

El coeficiente de correlación C, es una función de los componentes de desplazamientos u y v y de los gradientes de desplazamiento $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$. El desplazamiento se determina realizando una búsqueda del mejor conjunto de desplazamiento y gradientes de desplazamiento que maximice el coeficiente de correlación C.

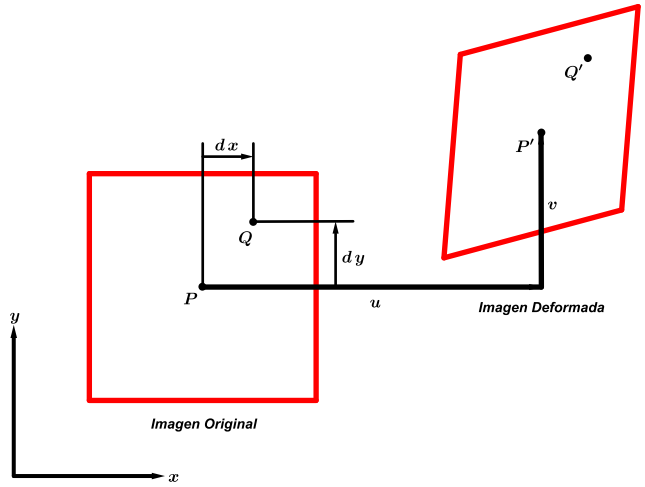

FIGURA **2-2**. Distorsión de la imagen y ubicación de los centros de las secciones

En la *Figura 2-3*, se puede apreciar como funciona la correlación. Se desea identificar la cruz seleccionada en la *Figura 2-3 a)* en la Figura *2-3 b)*. Con este fin, se realiza un barrido de secciones en la imagen deformada del tamaño indicado en la imagen original, tomando como centro cada pixel en la imagen deformada. Este es el proceso más extenso en los algoritmos, dado que este calculo se realiza para cada pixel en la imagen deformada. El

valor de $C(u, v)$ indica la probabilidad de que la sección en la imagen deformada, *Figura 2-3* b*)*, corresponda a la selección de la imagen sin deformar *Figura 2-3* a*)*. Al buscar en cada sección de la imagen deformada, y graficando las coordenadas $(u, v, C(u, v))$, se obtiene la *Figura 2-3* d*)*, en la cual, el pico, nos indica la coordenada (u, v) de la sección en la imagen deformada a la que corresponde la selección buscada de la imagen original. En la *Figura 2-3 c)* se observa en rojo el pixel, centro de la sección de la imagen deformada a la cual corresponde la imagen buscada.

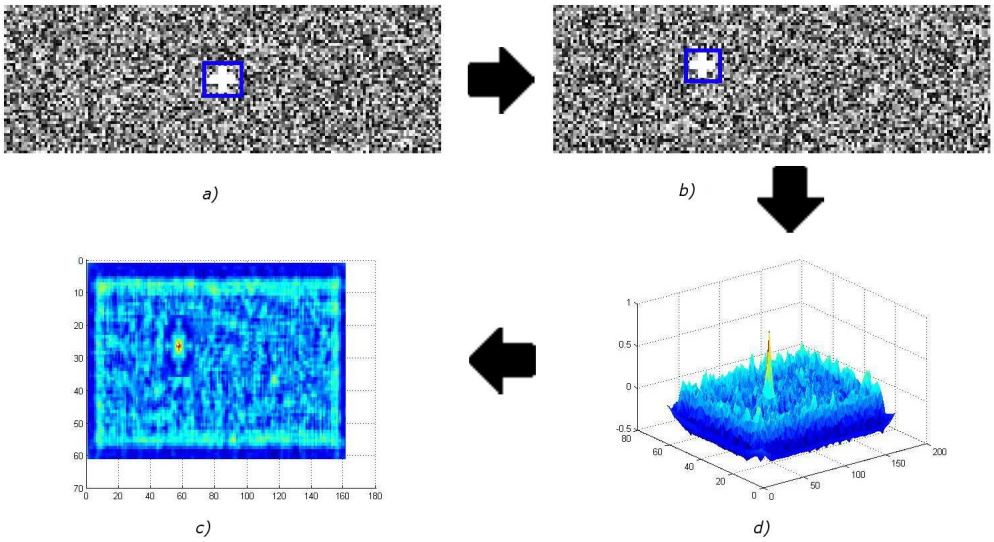

FIGURA **2-3**. Identificación de la cruz

CAPÍTULO 3

Identificación del Modulo de Young para un material homogéneo

En este capítulo, se trabajará un método que permite obtener el Modulo de Young para un material homogéneo como el aluminio. Antes de considerar imágenes reales del experimento, se simulará el experimento para el análisis de su efectividad, a continuación, se tomarán imágenes de una viga homogénea de aluminio, para verificar que el método efectivamente sirve con imágenes de materiales homogéneos y ganar la confianza suficiente para trabajar con distintos tipos de materiales.

Retomando la ecuación de la barra de Euler Bernoulli, empotrada en uno de sus extremos, libre en el otro y sometido a una carga ubicada en $x = c$ con $c \in (0, L)$, se tiene que

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = k\delta(x-c), \tag{3-1}$$

donde las condiciones de frontera son $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $EIy''(L) = 0$ y $EIy'''(L) = 0$

A continuación, se resolverá el problema inverso, es decir, dada la curva de deflexión (obtenida mediante el proceso de correlación digital de imágenes), la carga k, y las respectivas condiciones de frontera, se ha de determinar el módulo de Young.

Como se ilustro en el *Capítulo 1*, al resolver la ecuación (3-1),se obtuvo la solución:

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{cases} \dfrac{k}{6EI}\left(-x^3+3cx^2\right), & \text{si } x < c \\ \dfrac{k}{6EI}\left(3c^2x-c^3\right), & \text{si } x \geq c \end{cases} \\ &= \begin{cases} Ax^3+Bx^2, & \text{si } x < c \\ Cx+D, & \text{si } x \geq c \end{cases}, \end{aligned} \tag{3-2}$$

donde

$$A = -\frac{k}{6EI},\ B = \frac{ck}{2EI},\ C = \frac{c^2k}{2EI} \text{ y } D = -\frac{c^3k}{6EI}. \tag{3-3}$$

La idea fundamental para el caso homogéneo es a partir de la *Correlación Digital de Imágenes* obtener el campo de desplazamiento entre la imagen sin deformar y la imagen deformada. Con este fin, la barra que va a ser puesta a experimento, se le realiza un patrón de puntos aleatorios, los cuales pueden aplicarse con un cepillo en forma de salpicadura, y así poder realizar la correlación entre las imágenes sin deformar y deformada. Teniendo en cuenta que la solución está definida a trozos (antes y después de la ubicación de la carga), por medio del *Método de Mínimos Cuadrados* se construye una solución aproximada del sistema, donde antes de la ubicación de la carga ($x = c$), se comporta como una función cúbica de la forma Ax^3+Bx^2 y después de la ubicación de la carga se trata con una función lineal de la forma $Cx + D$. Dado que se conoce la carga k, de cada expresión de (3-3) se puede despejar el Modulo de Young E, así,

$$E_3 = -\frac{k}{6AI},\ E_2 = \frac{ck}{2BI},\ E_1 = \frac{c^2k}{2CI} \text{ y } E_0 = -\frac{c^3k}{6DI}. \tag{3-4}$$

donde el índice i del término E_i, indica que se obtuvo de la expresión de grado i de la ecuación (3-2).

3.1. Simulación

Para verificar la efectividad del método, se simulará una barra de aluminio cuyo módulo de Young es $69 \cdot 10^9\ N/m^2$. Puesto que en las imágenes mediremos los desplazamientos en pixeles es necesario transformar las unidades de longitud a números de pixeles, y así se obtienen los resultados que se aprecian en la Tabla 3.1

	SI	**Pixeles**
	$1\,cm$	$439\,pix$
Largo	$6{,}47\,cm$	$2844\,pix$
Ancho	$1\,cm$	$439\,pix$
Alto	$0{,}40\,cm$	$176\,pix$
E	$69 \cdot 10^9\ N/m^2$	$35{,}80\ N/pix^2$
I	0,005333333333333	199444138,6666667
c	$6{,}04\,cm$	$2655\,pix$

TABLA **3-1**. Conversión unidades para la simulación

Aplicando una fuerza de $k = 30\,N$, se obtiene una ligera curvatura en la barra, la cual se observa en la *Figura* **3-1**.

A continuación, se realiza la Correlación Digital entre las dos imágenes para hallar el desplazamiento y_i de cada pixel en la posición x_i de la imagen sin deformar. El proceso de correlación proporciona el desplazamiento de los pixeles que se observan en las curvas de defexión experimental en la *Figura 3-2* a). Teniendo en cuenta estos desplazamientos se realiza la aproximación de los datos de desplazamiento experimentales con la curva de desplazamiento teórica dada por (3-2), por medio de mínimos cuadrados (*Figura 3-2* b)),

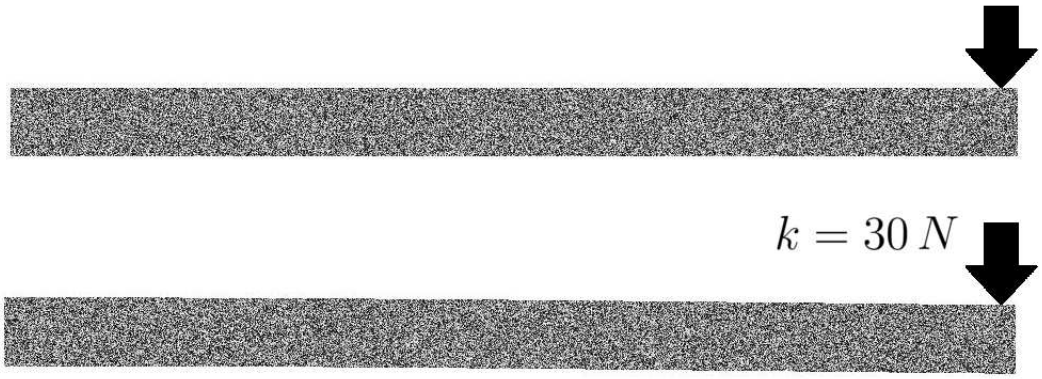

FIGURA **3-1**. Deflexión de la barra con una fuerza de $k = 30N$

esto es, resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & x_N^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ C \\ B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \tag{3-5}$$

Solucionando el sistema anterior mediante el método de *descomposición QR* se obtuvieron los siguientes resultados

$$\begin{aligned} A &= -0{,}000000000272554, & B &= 0{,}000003461896905, \\ C &= 0{,}011198262646909, & D &= -10{,}762871742465137. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Reemplazando en (3-4) se obtienen las aproximaciones del Módulo de Young

$$E_3 = 69{,}7530,\ E_2 = 43{,}7408,\ E_1 = 35{,}9017 \text{ y } E_0 = 33{,}0583. \tag{3-7}$$

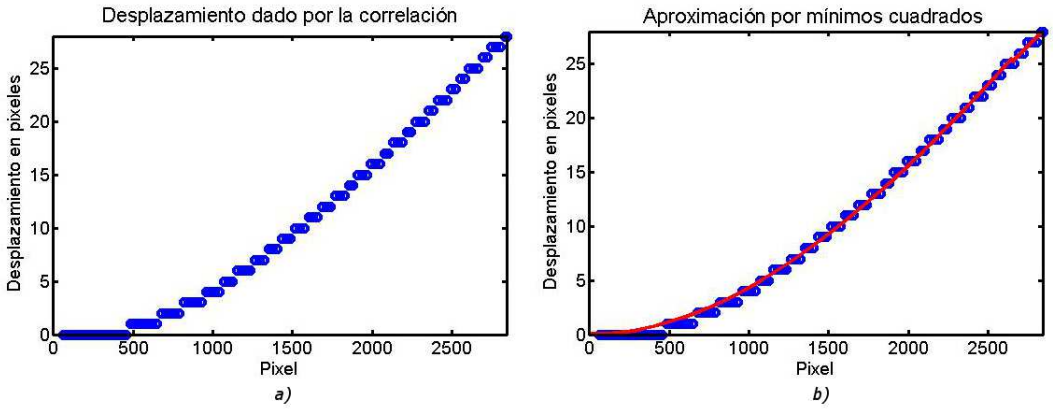

FIGURA **3-2**. Correlación de las imágenes simuladas

Recordando que el valor exacto del Módulo de Young es $E = 35{,}80$, se observa que el valor que mejor lo aproxima es el del término lineal $E_1 = 35{,}9017$. Esto se debe a que el término lineal de la solución aproximada se acerca paralelamente a la solución real.
Aunque se obtiene una gran aproximación, en la *Figura 3-2* a*)*, indica que en ciertos pixeles contiguos se presenta el mismo desplazamiento entre las imágenes sin deformar y deformada. Esto se debe al detalle de la imagen, que en las imágenes reales se debería a la resolución de la fotografía, dado que el desplazamiento entre las dos imágenes es mínimo y su desplazamiento es de menos de un pixel. Para corregir este inconveniente, se trabaja con el primer pixel de cada escalón que sufra un desplazamiento en la imagen deformada, ya que presenta un desplazamiento más realista, además de reducir de tamaño el sistema lineal a resolver (3-5), como se puede observar en la *Figura 3-3*.

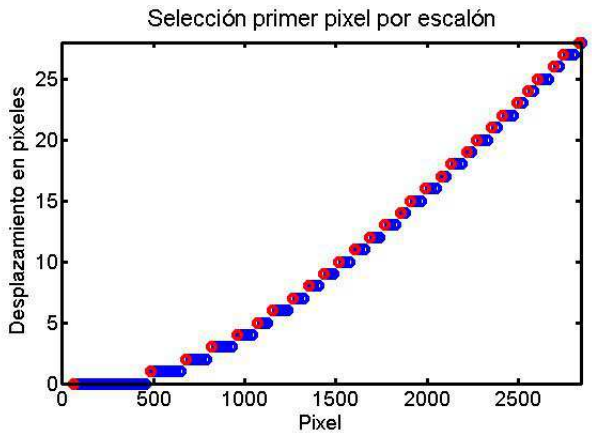

FIGURA **3-3**. Selección primeros escalones

Posteriormente de la selección, se realiza nuevamente una aproximación por mínimos cuadrados de (3-2) obteniendo los siguientes valores para los coeficientes (3-3)

$$\begin{aligned} A &= -0{,}000000000583506, & B &= 0{,}000005177778040, \\ C &= 0{,}013655462184874, & D &= -10{,}656512605042142. \end{aligned} \tag{3-8}$$

los cuales, remplazando en (3-4), se obtienen las aproximaciones del Módulo de Young

$$E_3 = 58{,}9109,\ E_2 = 42{,}0024,\ E_1 = 35{,}6102 \text{ y } E_0 = 32{,}7133. \tag{3-9}$$

donde nuevamente se observa que el valor más cercano al Módulo de Young es E_1, teniendo en cuenta que el valor exacto es de 35.80.

Para realizar un análisis más exhaustivo se repetirá la simulación para diferentes cargas k que van desde los $10N$ hasta los $100N$ y se hallarán los errores relativos con respecto del Modulo de Young real E. Con la barra simulada con las condiciones dadas anteriormente, se obtiene la *Figura 3-4*, donde se aprecia una gran mejora de las aproximaciones del Modulo de Young pasando de errores de casi 500 % hasta menos del 22 %, en el término cúbico E_3. Aunque la mayor mejora se presenta en el término lineal E_1 pasando de tener un error del 30 % hasta tener un error de menos del 1 %, dando así, la certeza de efectividad del método al momento de calcular el módulo de Young para un material homogéneo.

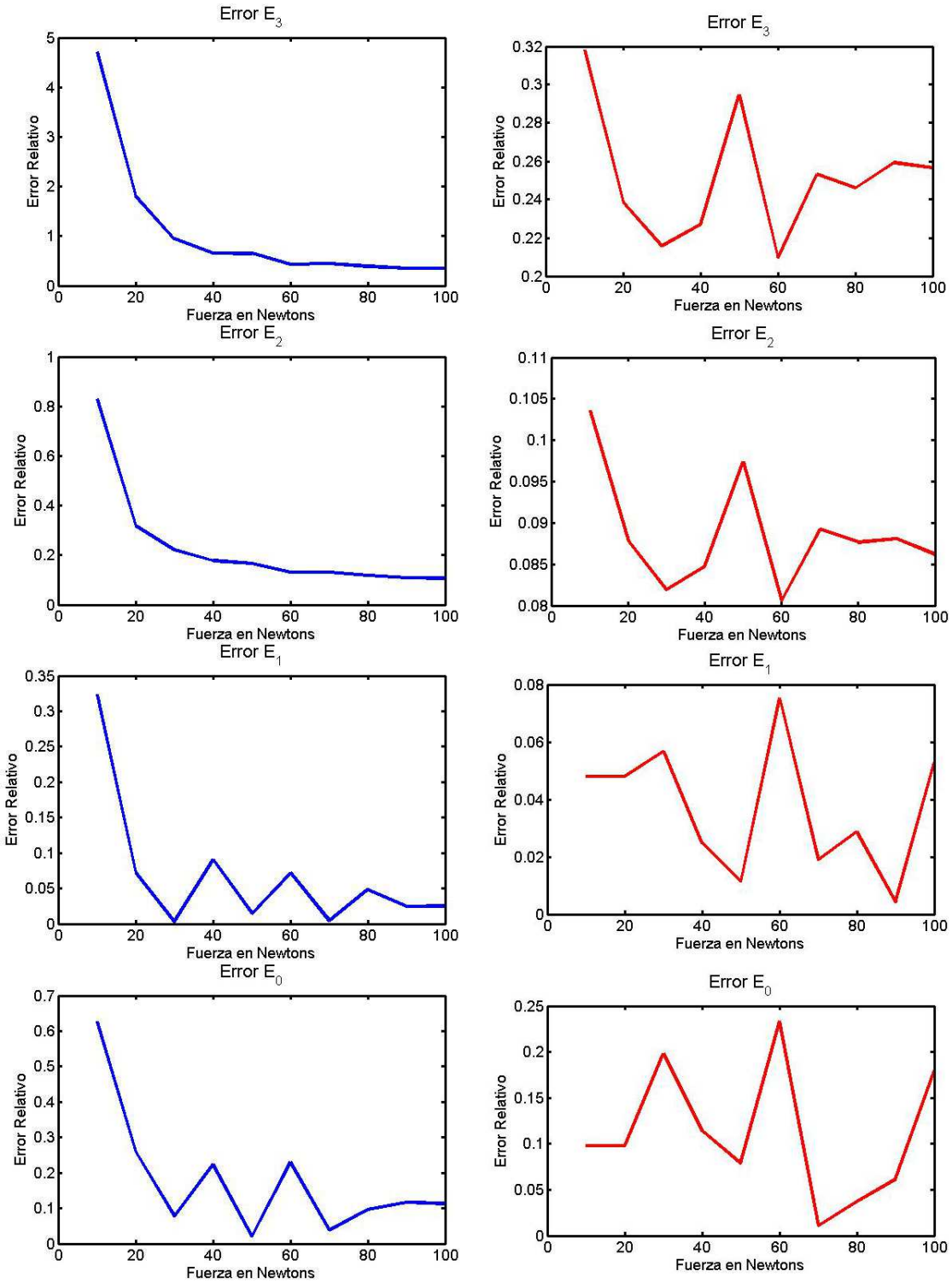

FIGURA **3-4**. Errores relativos de las aproximaciones del Módulo de Young. En azul tomando todos los puntos de la correlación, en rojo los primeros pixeles por escalón para cargas de 10 a 100 N

3.2. Imágenes reales

A continuación, se usará el método explicado en la sección anterior, con imágenes reales de un experimento realizado en una barra de aluminio cuyo Módulo de Young es $E = 69 \cdot 10^9 \quad N/m^2$, aplicando una fuerza de $2,5\, Kilogramo - Fuerza$, y así obtener la deflexión que se puede observar en la *Figura* ***3-5***.

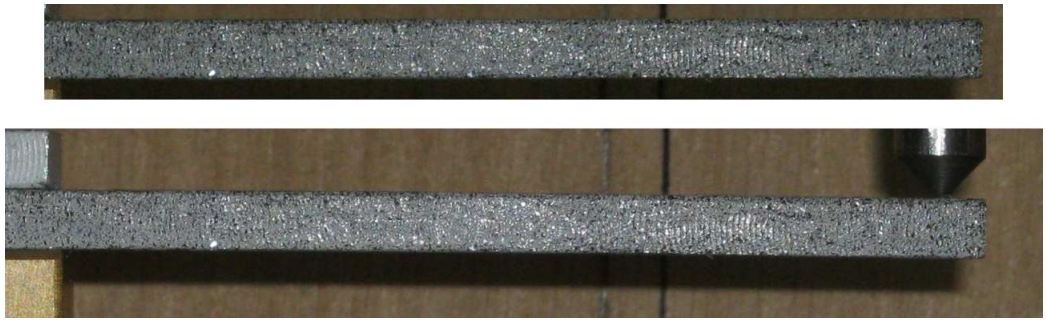

FIGURA **3-5**. Deformación de la barra de aluminio con una carga de $24{,}5\, N$

En la tabla (3.2) se aprecian las unidades en las cuales se obtuvieron de la fotografía y sus respectivas conversiones a pixeles.

	SI	**Pixeles**
	$1\, cm$	$184\, pix$
Largo	$6{,}35\, cm$	$1170\, pix$
Ancho	$1\, cm$	$184\, pix$
Alto	$0{,}44\, cm$	$81\, pix$
E	$69 \cdot 10^9\, N/m^2$	$203{,}8043\, N/pix^2$
I	0,0071	8148762
c	$6{,}05\, cm$	$1114\, pix$

TABLA **3-2**. Conversión unidades del experimento real

Teniendo en cuenta que $1\, Kilogramo - Fuerza = 9{,}8N$, entonces la carga aplicada en Newtons es de $k = 24{,}5\, N$. En la *Figura* **3-6**, se observa el desplazamiento dado por la correlación y sus aproximaciones con el método de mínimos cuadrados tanto con todos los puntos, como con el primer punto de cada escalón.

Los coeficientes de (3-2) para la aproximación con todos los puntos son:

$$\begin{aligned} A &= -0{,}00000000098472294267, & B &= 0{,}402097950141082, \\ C &= 0{,}00000013886972122550, & D &= -9{,}632383383935972. \end{aligned} \tag{3-10}$$

Hallando las aproximaciones del Módulo de Young usando (3-4),

$$E_3 = 508{,}8727,\ E_2 = 416{,}4835,\ E_1 = 134{,}3406 \text{ y } E_0 = 71{,}9192. \tag{3-11}$$

y teniendo en cuenta que el valor real del Módulo de Young es 203.8043, el término lineal nuevamente es el que mejor aproximación suministra, con un error relativo de 0.3408, el cual se puede considerarse muy alto. Por otro lado, tomando el primer punto de cada escalón y utilizando el método de mínimos cuadrados, se tiene que los coeficientes de (3-2)

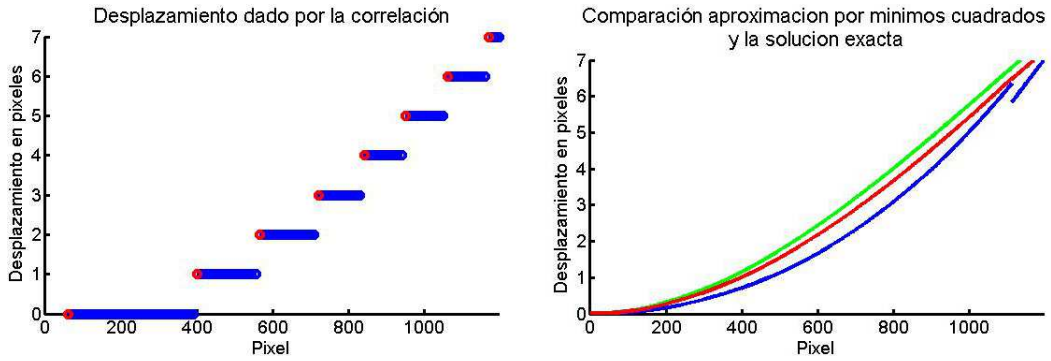

FIGURA **3-6**. Correlación y aproximación por mínimos cuadrados con todos los puntos (azul) y con el primer punto de cada escalón (rojo) y su comparación con la solución exacta (verde).

son:

$$\begin{aligned} A &= -0{,}00000000150119336170, & B &= 0{,}009090909090909, \\ C &= 0{,}00000692040487442545, & D &= -3{,}654545454545454. \end{aligned} \tag{3-12}$$

de donde, nuevamente por (3-4) se tienen las aproximaciones del Módulo de Young

$$E_3 = 333{,}8002,\ E_2 = 241{,}9904,\ E_1 = 205{,}2143 \text{ y } E_0 = 189{,}5594. \tag{3-13}$$

Como en la simulación, se puede observar una mejora notable pues los valores se acercan a un valor más exacto del Módulo de Young, llegando el término lineal E_1 a un error relativo de 0.0069, un error bastante aceptable.

CAPÍTULO 4

Identificación del Módulo de Young para un material no homogéneo

En este capítulo se identificará el Módulo de Young de un material no homogéneo. Para este caso, el Módulo de Young no es constante, y dependerá de la estructura longitudinal espacial de la barra, es decir, el módulo de Young E se expresara en función de la posición x. Un ejemplo de un material no homogéneo puede ser el bambú, ya que puede tener diferente consistencia en este, ya sea por la humedad del material, morfología del bambú, entre otros.

Como se vio en el *Capítulo 1*, la ecuación de la barra de Bernoulli-Euler para la carga k en $x = L$ y en un material no homogéneo esta dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)I\frac{d^2x}{dx^2}\right) = 0, \tag{4-1}$$

sujeta a las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $E(x)Iy''(L) = 0$, $(E(x)Iy''(L))' = -k$.

Al discretizar (4-1), se obtiene el sistema

$$M(E)y = b, \tag{4-2}$$

con $M(E)$ una matriz pentadiagonal simétrica dada por

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & M_3 \end{pmatrix}, \tag{4-3}$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_2 + 4E_1 + 2E_0 & -2(E_2 + E_1) & E_2 & \\ -2(E_2 + E_1) & E_3 + 4E_2 + 2E_1 & -2(E_3 + E_2) & E_3 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & -2(E_3 + E_2) & E_4 + 4E_3 + 2E_2 & -2(E_4 + E_3) & E_4 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & E_{N-3} & -2(E_{N-2} + E_{N-3}) & E_{N-1} + 4E_{N-2} + 2E_{N-3} & -2(E_{N-1} + E_{N-2}) & E_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} E_{N-2} & -2(E_{N-1}+E_{N-2}) & 4E_{N-1}+2E_{N-2} & -2E_{N-1} \\ & E_{N-1} & -2E_{N-1} & E_{N-1} \end{pmatrix}$$

y $b_i = 0$ para $i = 0, \ldots, N-1$ y $b_N = \dfrac{kh^3}{I}$.

La idea fundamental, es buscar los valores de E tal que la solución (numérica) de la ecuacion diferencial (4-1) sea lo más cercana posible a los datos de desplazamiento y, los cuales son suministrados por la *Correlación Digital de Imágenes (DIC)*. Dado que este problema no se puede realizar de forma directa, se usará el *Método de Regularización de Tikhonov* (véase [2]), esto es minimizar la expresión

$$T(E) = \frac{1}{2}\|F(E) - d\|^2_{\mathcal{L}_2} + \alpha J(E) \tag{4-4}$$

donde $E \in \mathcal{Q}$, con $\mathcal{Q}$ el espacio de parámetros que contiene a E, $F(E) = M(E)^{-1}b$ es la solución de la ecuación diferencial (4-1) dependiente de E, d son los datos obtenidos por la *DIC*, α es un parámetro positivo de regularización y $J(E)$ es un funcional de regularización. El término $\frac{1}{2}\|F(E) - d\|^2_{\mathcal{L}_2}$ es el término de mínimos cuadrados y $\alpha J(E)$ es conocido con el nombre de término de regularización.

Para encontrar este mínimo, se hallará la solución a la ecuación $T'(E) = 0$, aplicando el *método de Newton*, y así encontrar el E tal que minimice (4-4). Con este fin, se aplicará iterativamente la expresión

$$E^{n+1} = E^n + (T''(E^n))^{-1}T'(E^n) \qquad \text{para } n = 0, 1, \ldots \text{ y } E^0 \text{ dado} \tag{4-5}$$

donde $T'(E)$ es gradiente y $T''(E)$ es la Hessiana.

Aunque el gradiente se puede hallar por medio de diferencias finitas

$$[grad\, T(E)]_i \approx \frac{T(E + \tau e_i) - T(E)}{\tau} \qquad \text{para i=1,...,N} \tag{4-6}$$

donde e_i es el i-esimo vector unitario de R^N. El cálculo de (4-6), requiere N evaluaciones de $F(E)$, lo cual implica resolver numéricamente N veces una ecuación diferencial, lo cual es muy costoso computacionalmente debido a que en cada iteración de Newton se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales. Por tal razón, dicho cálculo del gradiente se realizará utilizando el *Método de la Adjunta* (véase [19]), como se ilustra a continuación.

Dado que $M(E)M(E)^{-1} = I$, derivando con respecto a E a ambos lados, se tiene que

$$\frac{d}{dE}\left(M(E)M(E)^{-1}\right) = M(E)^{-1}\frac{dM(E)}{dE} + M(E)\frac{dM(E)^{-1}}{dE} = 0,$$

de donde,

$$\frac{d}{dE}M(E)^{-1} = -M(E)^{-1}\frac{dM}{dE}M(E)^{-1} \tag{4-7}$$

Con el fin de calcular el gradiente g_{LS} del término de mínimos cuadrados de (4-4),

$$J_{LS} = \frac{1}{2}\|F(E) - d\|^2_{\mathcal{L}_2}, \tag{4-8}$$

denotemos por e_i como el i-esimo el vector unitario, entonces, $\frac{d}{d\tau}M(E+\tau e_i)|_{\tau=0} = \frac{dM}{dE}e_i$. Ahora, sea $r(E) = F(E) - d$, entonces el i-esimo término del gradiente se obtiene usando (4-7) y aplicando adjuntas en un espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned}
[g_{LS}]_i :&= \frac{d}{d\tau}J_{LS}(E+\tau e_i)|_{\tau=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{d\tau}F(E+\tau e_i)|_{\tau=0}, r(E) \right\rangle_{\mathcal{L}_2} \\
&= -\left\langle M(E)^{-1}\left(\frac{dM}{dE}e_i\right)M(E)^{-1}b, r(E) \right\rangle_{\mathcal{L}_2} \\
&= \left\langle \left(\frac{dM}{dE}e_i\right)M(E)^{-1}b, M^*(E)^{-1}r(E) \right\rangle_{\mathcal{L}_2}
\end{aligned} \tag{4-9}$$

Puesto que $y = M(E)^{-1}b$ es la solución de (4-2) y z la solución de la ecuación adjunta $M^*(E)z = r(E)$, (4-9), se convierte en

$$[g_{LS}]_i = \left\langle \left(\frac{dM}{dE}e_i\right)y, z \right\rangle_{\mathcal{L}_2} \tag{4-10}$$

A diferencia de la aproximación (4-6) se requiere solo un cálculo del operador $M(E)$ y de su adjunta.

Para calcular el producto matricial de la Hessiana de la iteración de Newton (4-5) se aplica una aproximación diferencias finitas sobre el gradiente $g(E)$, esto es

$$H(E)v \approx \frac{g(E+\tau v) - g(E)}{\tau} \tag{4-11}$$

A partir del producto matricial de la Hessiana, se puede construir la matriz Hessiana de la siguiente forma

$$[H(E)]_{ij} = \langle H(E)e_i, e_j \rangle \qquad \text{para } 1 \leq i, j \leq N \tag{4-12}$$

Para calcular el gradiente del término de mínimos cuadrados de (4-4) se requiere calcular

$$\frac{dM}{dE}e_i := \left.\frac{d}{d\tau}M(E+\tau e_i)\right|_{\tau=0} \tag{4-13}$$

Con este fin, se observa que la matriz M (4-3) se puede descomponer como

$$M(E) = P^T diag(E)P \tag{4-14}$$

donde P es la matriz triangular

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4-15}$$

Así, utilizando (4-10), (4-13) y (4-14), se obtiene el gradiente para el término de mínimos cuadrados de (4-4)

$$\begin{aligned} [g_{LS}]_i &= \left\langle \left(\frac{dM}{dE} e_i \right) y, z \right\rangle \\ &= \left\langle P^T diag(e_i) P y, z \right\rangle \\ &= \langle diag(e_i) P y, P z \rangle \\ &= [Py]_i \, [Pz]_i \end{aligned} \tag{4-16}$$

A continuación, se hallarán el gradiente y la Hessiana del término de regularización de (4-4). El término de regularización esta dado por:

$$J_{reg}(E) = \frac{\alpha}{2} \int_0^L \left(\frac{dE}{dx_i} \right)^2 dx \tag{4-17}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{dE}{dx_i} \right)^2 dx \tag{4-18}$$

$$\approx \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(E_{i+1} - E_i)^2}{h^2} h \tag{4-19}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(E_{i+1} - E_i)^2}{h} \tag{4-20}$$

$$= \frac{\alpha}{2} E^T L E, \tag{4-21}$$

donde L es una matriz de tamaño $N \times N$ dada por:

$$L = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

El gradiente y la Hessiana del término de regularización han de ser

$$g_{reg} = \alpha L E \tag{4-23}$$

$$H_{reg} = \alpha L \tag{4-24}$$

Finalmente, el Algoritmo 1 resume el proceso para la identificación del parámetro $E(x)$.

Algoritmo 1 Determinación del módulo de Young

Entrada: Modulo de Young inicial E_0, Número máximo de interacciones $maxit$, cargas k_1 y k_2

Salida: El módulo de Young E

1: **para** $n = 0, 1, ..., maxit$ **hacer**
2: Solucionar $M(E^n)y = b$
3: Resolver $M^*(E^n)z = r(E^n)$
4: Hallar el gradiente de $T(E^n)$ usando 4-16 y 4-23
5: Calcular La Hessiana de $T(E^n)$ por medio de 4-12 y 4-24
6: Determinar $E^{n+1} = E^n + (T''(E^n))^{-1}T'(E^n)$
7: **fin para**
8: $E = E^{n+1}$

4.1. Simulación módulo constante

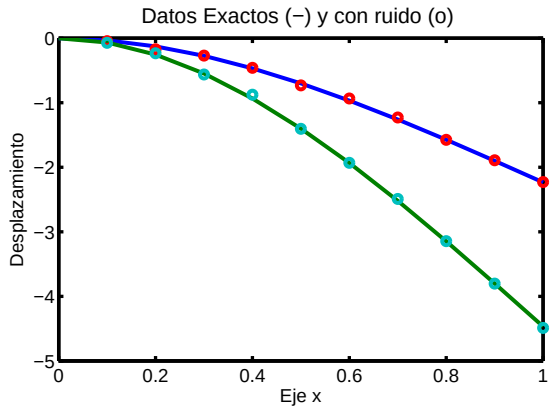

FIGURA **4-1**. Deflexión de la barra fuerzas de 20 y 40 Newtons

Para ver la veracidad del método, se simulá una barra con una unidad de longitud, a la cual se le aplicaran dos cargas distintas de $F_1 = 20\,N$ y $F_2 = 40\,N$ en el extremo libre de la barra, se tendrá un módulo de Young $E = 3$ y momento de inercia $I = 1$. Se le aplica un ruido a cada una de las soluciones para simular el error generado al aplicar la correlación digital de imágenes, tal como se puede apreciar en la *Figura 4-1*.

Aplicando entonces, el método de Newton (4-5), para hallar el valor mínimo de (4-4), se tendrá, la aproximación que se ilustra en la *Figura 4-2*, en la cual se observa un acercamiento considerable al módulo de Young $E = 3$ y en la *Figura 4-3*, se observan dos criterios de parada, la norma del gradiente de $T^n(E)$, y la observación de que la sucesión E^n es de Cauchy, donde se tiene que ambos criterios sirven como guía para la culminación del algoritmo.

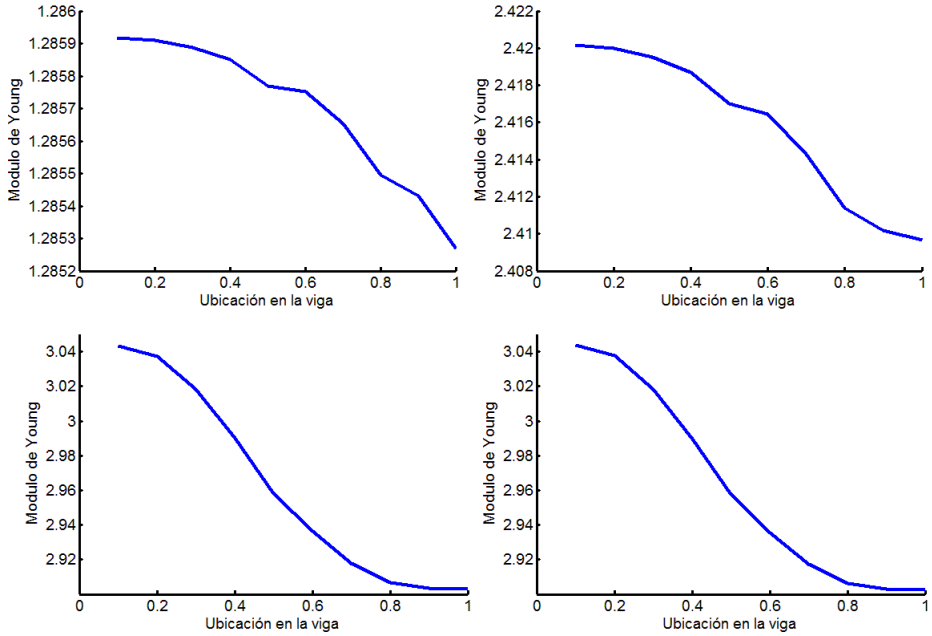

FIGURA **4-2**. Iteraciones de Newton con n=1,4,8 y 12 respectivamente

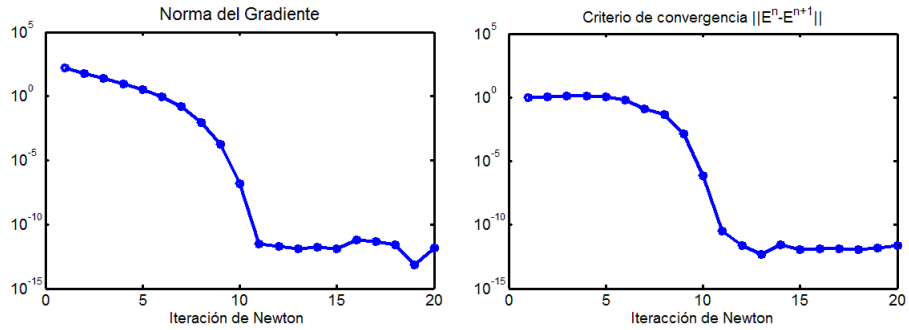

FIGURA **4-3**. Criterios de parada del algoritmo

Dado que en la simulación conocemos el valor real de E, en la *Figura 4-4*, se aprecia el error relativo para cada valor E^n de las iteraciones, así, se observa que el valor aproximado por el Algoritmo 1, llegan a obtener errores realmente bajos, dando así, una aproximación y una certeza de la eficacia del método.

4.2. Simulación módulo no constante

A continuación, se simulará una barra cuyo módulo de Young esta dado por la expresión

$$E(x) = 3 + \frac{x}{1000} \tag{4-25}$$

En la *Figura 4-5 a)*, se observa la aproximación del módulo de Young usando el Algoritmo 1 (en azul) con valor inicial E^0 el vector de unos y la gráfica del valor exacto (en verde), teniendo un acercamiento aceptable. En la *Figura 4-5 b)*, se aprecia el error relativo de cada valor E^n con respecto al valor del módulo de Young real $E(x)$, donde

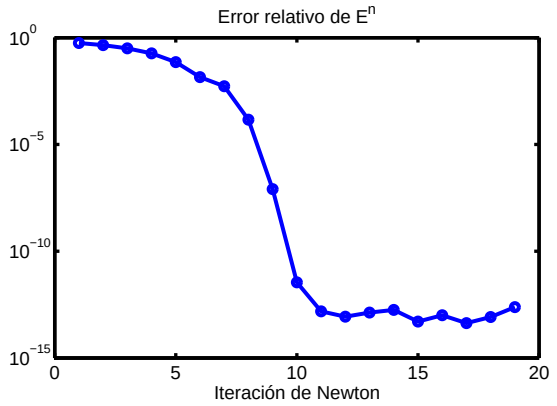

FIGURA **4-4**. Error relativo del método

se detalla que éste a medida de que se realizan más iteraciones el error va disminuyendo llegando a un error del orden de 10^{-2}. En las *Figuras* ***4-5*** *c)* y *d)*, se muestran los criterios de convergencia, usando la norma del gradiente $T^n(E)$ y que la sucesión E^n forma es una sucesión de Cauchy, donde se tiene que cualquiera de los dos criterios nuevamente sirven para detener el algoritmo.

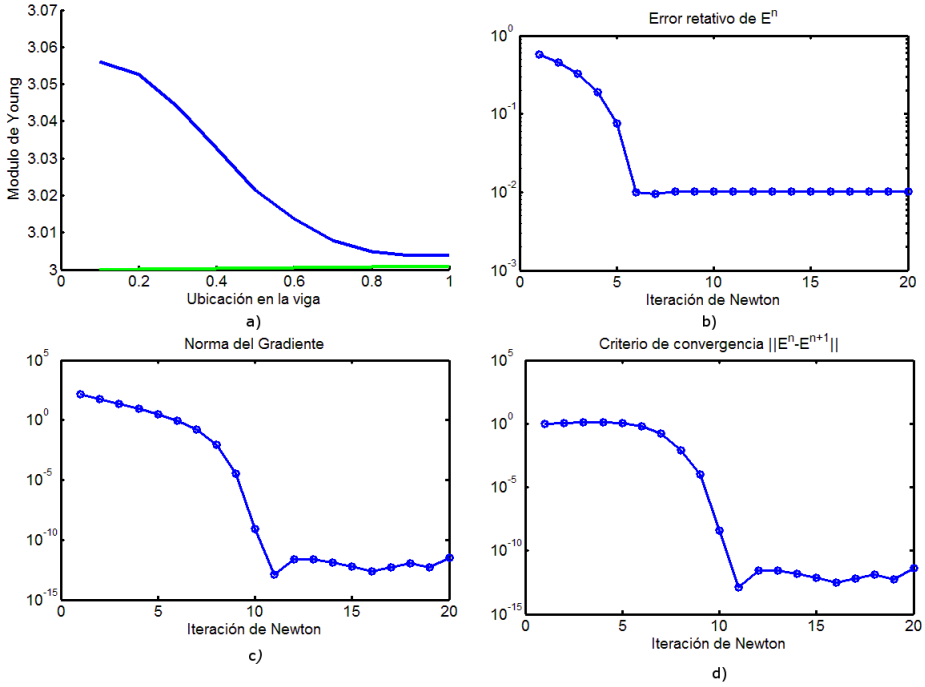

FIGURA **4-5**. *a)* Aproximación del módulo de Young; *b)* Error relativo del módulo de Young en cada iteración; *c)* Norma del gradiente; *d)* Criterio de convergencia

CAPÍTULO 5

Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

1. Los métodos vistos en este trabajo, poseen la ventaja de no requerir experimentos destructivos para su aplicación, ni equipos especializados para la medición y cálculo de los datos, además de no necesitar repeticiones experimentales. Otra ventaja del método se encuentra en la posibilidad de trabajar con distintos tipos de escalas, siempre y cuando la cámara con las que se tomen las fotografías tengan la resolución adecuada.

2. La teoría de la barra de Euler-Bernoulli solo es aplicable cuando se presentan pequeñas deflexiones en la barra y forma parte de la Teoría de la elasticidad de Timoshenko.

3. Para mejores resultados, es recomendable usar una cámara con la mayor resolución posible para que la deflexión sea más notable. Esto es para reducir el error en la correlación, pues con una resolución baja, muchos de los pixeles tendrán desplazamientos menores de un pixel, donde el proceso de correlación no identificará el cambio de deflexión de un pixel a otro.

4. Para una mayor precisión, es conveniente tomar el primer escalón de cada punto antes de aplicar el método visto en el *Capítulo 3*, para así reducir el error dado por los desplazamientos de la imagen de menos de un pixel entre niveles de deformación.

5. El proceso visto en el *Capítulo 3* para materiales homogéneos, es altamente efectivo, en especial, hallando el término E_1, esto se debe que al calcular la aproximación del término lineal, se calcula la pendiente de la parte lineal de la solución exacta, por lo tanto, se esta calculando una recta paralela a esta. Además en el extremo donde se coloca la carga es donde se presenta una mayor deflexión y los datos se diferencian del error de medida del método de correlación, que es de mas o menos un pixel. Por este motivo, basta seleccionar la región de la barra cercana al extremo no empotrado para obtener los datos de desplazamiento, para luego con estos datos aplicar el algoritmo de identificación de parámetros. Por otra parte, esto reduce el tiempo en el proceso de la correlación digital.

6. El algoritmo del *Capítulo 4*, presenta un acercamiento notable al módulo de Young, obteniendo un error relativo del orden de 10^{-13}. Además, el método de la adjunta, es un método cuyo costo computacional y temporal es bastante económico.

5.2. Recomendaciones

En un futuro, se puede realizar estudios similares para distintos tipos de experimentos, como por ejemplo distintas formas de empotramiento (sin extremos libres, con apoyos en el centro de la viga, entre otros), ubicaciones y cantidades de las cargas aplicadas (dos o más, haciendo presión tanto en sentido positivo como negativo en el eje coordenado), entre otros. También se pueden aplicar distintos métodos en la aproximación de la matriz Hessiana como por ejemplo la formula Davidon-Fletcher-Powell, el método BFGS entre otros.

Bibliografía

[1] P. Bourke. *Cross correlation, autocorrelation, 2d pattern identification, http://paulbourke.net/miscellaneous/correlate/*. Aug, 1996.

[2] C. Castro. *El Método de Regularización de Tikhonov y aplicaciones*. Universidad Nacional de Colombia, 2008.

[3] Leiliane Cristina Cossolino and Antônio Henrique Alves Pereira. Módulos elásticos: visão geral e métodos de caracterização. *Informativo Técnico Científico. Disponível em: http://www. atcp. com. br/imagens/produtos/sonelastic/artigos/RT03-ATCP. pdf*, 2011.

[4] C.Su and L. Anand. A new digital image correlation algorithm for wholeeld displacement measurement. *Innovation in Manufacturing Systems and Technology (IMST)*, 2003.

[5] F. Gálvez Díaz-Rubio and V. Sánchez Gálvez. *Caracterización mecánica de materiales cerámicos avanzados a altas velocidades de deformación*. F. Gálvez Díaz-Rubio, 1999.

[6] L. González. Elementos para la caracterización mecánica de la guadua angustifolia kunth. *Revista Virtual Forestal. ISSN: 1900-821X p.*, 2006.

[7] S. C. Hunter. *Mechanics of continuos media*. Wiley & Sons, Incorporated, John, 1980.

[8] Tailie Jin, Nam Seo Goo, Sung-Choong Woo, and Hoon Cheol Park. Use of a digital image correlation technique for measuring the material properties of beetle wing. *Journal of Bionic Engineering*, 2009.

[9] A. Knowlton. *Standard Handbook for Engineers*. McGraw Hill, 1981.

[10] C.F. Matt & P.A.M. dos Santos L.C.S Nunes, D.A. Castellano. Parameter estimation using image correlation and inverse problems. *Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2007.

[11] D Lecompte, S Cooreman, H Sol, J Vantomme, and Anne Habraken. Identification of hardening behavior using inverse modeling and image correlation. In *Proceedings of the SEM annual conference and exposition 2006*, 2006.

[12] Lijie Li, Joao Gomes, Gordon Brown, Deepak Uttamchandani, Wenke Pan, Dominik Weiland, Mark Begbie, Craig Lowrie, and Marc PY Desmulliez. Simultaneous determination of the young's modulus and poisson's ratio in micro/nano materials. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2009.

[13] L. Meirovitch. *Analytical methods in vibrations.* Ed. McMillan, 1976.

[14] DC Moreira, LA Sphaier, JML Reis, and LCS Nunes. Determination of young?s modulus in polyester-al_2o_3 and epoxy-al_2o_3 nanocomposites using the digital image correlation method. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2011.

[15] C. Pao. On fourth-order elliptic boundary value problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(4):1023–1030, 2000.

[16] CM Romo-Kröger. Testing plastic deformations of materials in the introductory undergraduate mechanics laboratory. *European Journal of Physics*, 2012.

[17] W. Seto. *Theory and problems of mechanical vibrations.* Ed. McGraw Hill, 1971.

[18] Stephen P Timoshenko and JN Goodier. Theory of elasticity. *International Journal of Bulk Solids Storage in Silos*, 1(4):567–567, 2011.

[19] C. R. Vogel. *Computational methods for inverse problems*, volume 10. Siam, 2002.

[20] Satoru Yoneyama and Go Murasawa. Digital image correlation. *Experimental Mechanics (Freire, JF, ed.), Eolss Publishers*, 2009.

[21] D. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Thomson Learning, 7 edition, 2001.