III. Construccion del numero e a partir de la funcion Ln.

Para esta parte del trabajo, se usaran argumentos de tipo geometrico en los casos que esto sea posible. y haga las cosas mas sencillas.

A. Estudio de la funcion $f(x) = 1/x$, $(x>0)$.

a1. La funcion f es estrictamente decreciente.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Es decir f es monotona.

a2. f es continua para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, es decir f' existe para todo $x \in \mathbb{R}^+$, entonces

f es diferenciable y por lo tanto continua para todo $x \in \mathbb{R}^+$

a3. f es biyectiva.

Como f es monotona, entonces f es 1 a 1
Como f es continua, entonces f es sobre
Luego f es biyectiva.

a4. Grafica de f.

a41. El eje y es una asintota horizontal.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)' = 0.$$

I.d. a medida que x crece indefinidamente, los valores de la funcion se aproximan cada vez mas a cero. Por lo tanto la recta $y=0$ (eje x) es una asintota horizontal de la funcion.

a12. El eje Y es una asintota vertical.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

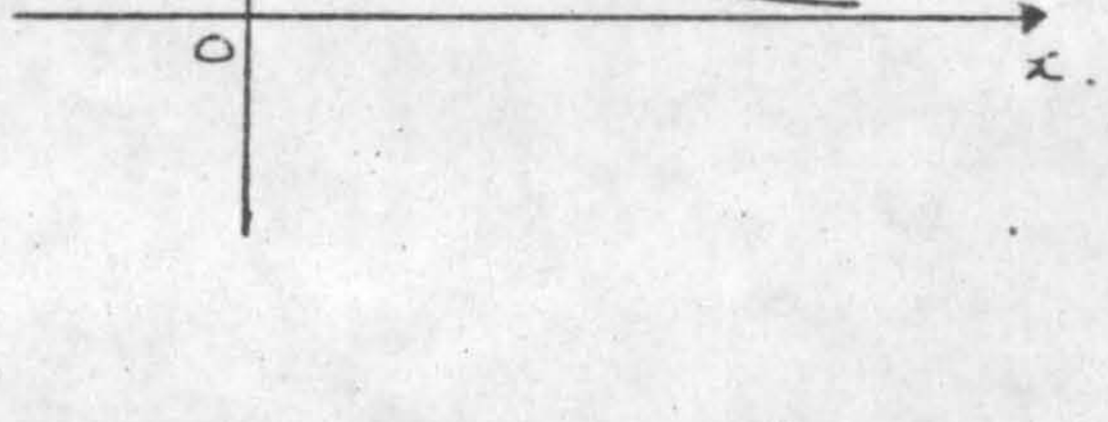
I. d. cuando x se aproxima a cero por la derecha, el valor de la funcion crece indefinidamente; por lo tanto la recta $x=0$ (eje Y) es una asintota vertical de f.

a13. Concavidad.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego f es concava

hacia abajo para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Ahora si construiremos una grafica aproximada de la funcion:



$f(x) = 1/x \;,\; x > 0.$

8. Estudio de la funcion $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, donde $f(t) = 1/t$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Geometricamente podemos interpretar esta funcion como la medida del area bajo la curva $f(t) = 1/t$ y las rectas $t = 1$, $t = x$.

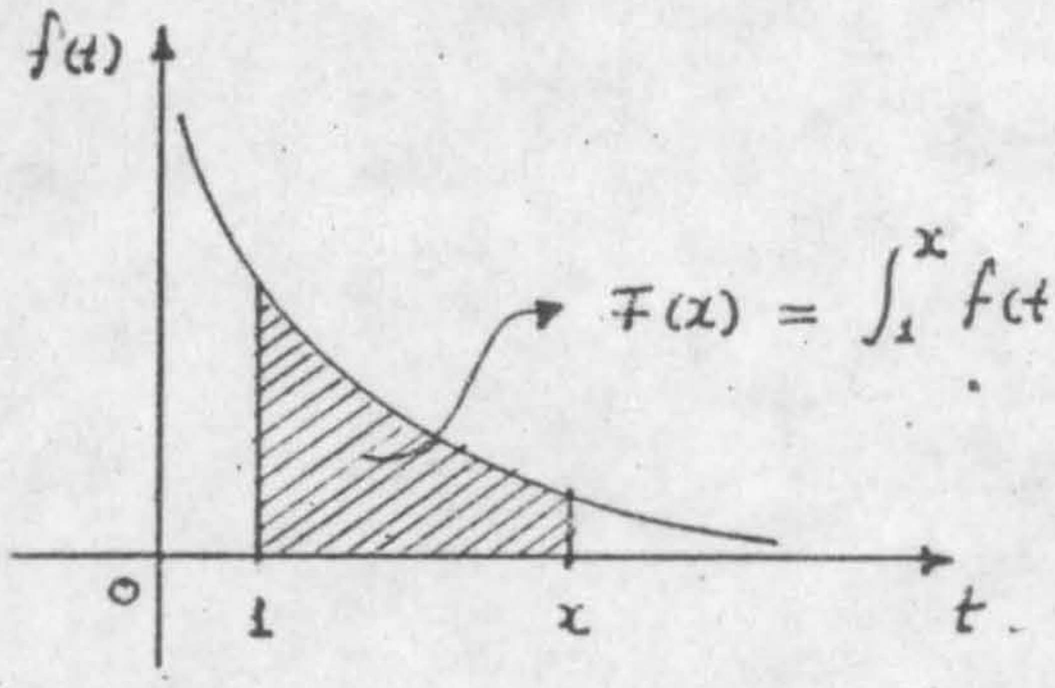


fig. 1.

b1. $F(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

$F'(x) = f(x)$ y como $f(x)$ es cont. para todo $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $F(x)$ es diferenciable y por lo tanto continua para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

b2. $F(x)$ es estrictamente creciente. (Monotona).

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \int_1^{x_1} f(t)\,dt < \int_1^{x_2} f(t)\,dt \quad *$$

$$\Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2.$$

* De la fig. 1. es evidente esta desigualdad.

b3. $F(x)$ es biyectiva.

Como F es continua, entonces f es sobre.
Como F es monotona, entonces f es 1ª1.
Es decir F es biyectiva.

64. $\lim_{x \to \infty} F(x) = +\infty$

De la figura 1. puede verse que a medida que aumenta x, $F(x)$ crece indefinidamente. Es decir $\lim_{x \to \infty} F(x) = +\infty$.

65. $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$

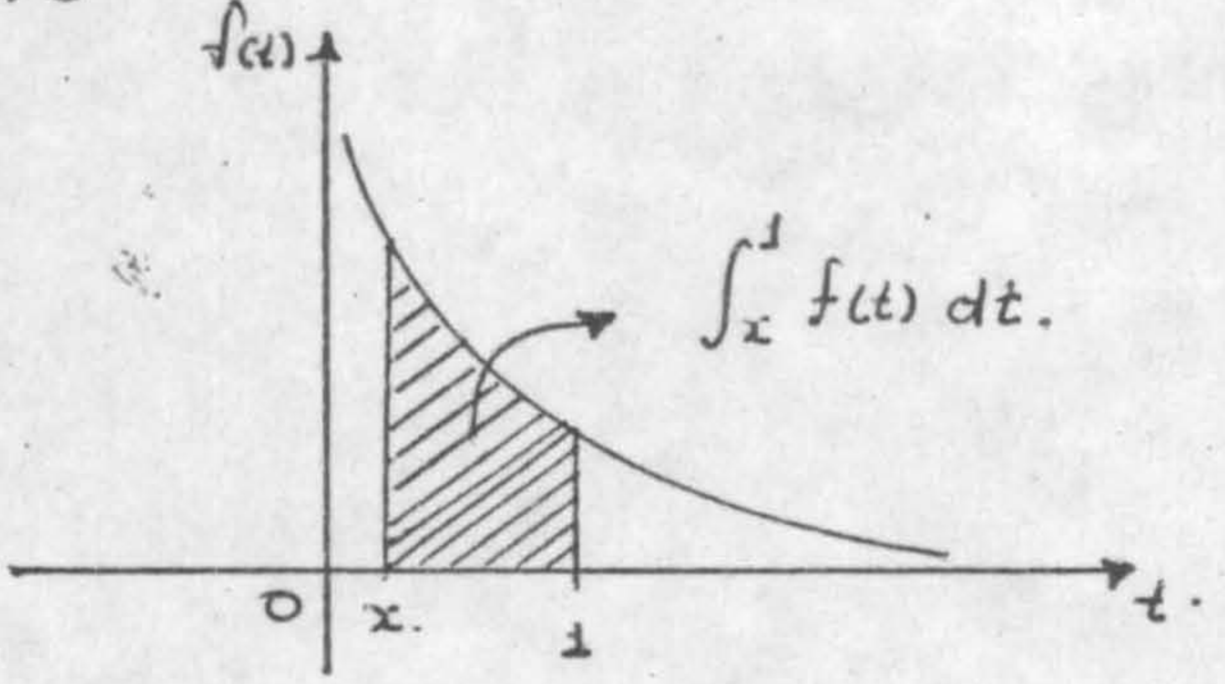


fig. 2.

la fig. 2. ilustra el caso en el cual $x \to 0^+$:
En este caso el area rayada esta dada por:

$$\int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = -F(x).$$

ademas es claro que cuando $x \to 0^+$, el area crece indefinidamente, Es decir $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$.

66. Observacion:

A la funcion F se le nota Ln; és decir $F = Ln$ y se lee logaritmo natural o logaritmo neperiano.

67. Algunas propiedades de la funcion Logaritmo natural.

671. $F(xy) = F(x)+F(y)$. Supondremos que $y > x$ por sencillez.

$$F(xy) = \int_1^{xy} f(t)\,dt = \int_1^{x} f(t)\,dt + \int_x^{xy} f(t)\,dt$$

$$\overset{*}{=} \int_1^{x} f(t)\,dt + \int_1^{y} f(t)\,dt$$

$$= F(x) + F(y)$$

$*$ Veamos que $\int_x^{xy} f(t)\,dt = \int_1^{y} f(t)\,dt$.

Hagamos $t = xu$, entonces $dt = x\,du$.
cuando $t = x$, entonces $u = 1$ y.
cuando $t = xy$, entonces $u = y$.
Luego:

$$\int_x^{xy} f(t)\,dt = \int_1^{y} f(xu)x\,du$$

$$= \int_1^{y} \frac{1}{xu}\,x\,du$$

$$= \int_1^{y} \frac{1}{u}\,du = \int_1^{y} f(u)\,du = \int_1^{y} f(t)\,dt.$$

672. $F(1) = 0$.

$$F(1) = \int_1^{1} f(t)\,dt = 0.$$

68. Definicion de la funcion Exp.

Como F es biyectiva (63) entonces existe F^{-1} que se nota Exp.

d. Construccion de e.

Existe un unico $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $F(x) = 1$, a dicho x

Se le nota e.

Ademas como $F^{-1} = Exp$ y $F(e) = 1$, entonces $Exp(1) = e$.

e1. Observacion:

Es posible, a partir de esta construccion de e, demostrar que $Exp(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$.

e2. Veamos que $Exp'(x) = Exp(x)$.

$x = F(F^{-1}(x))$, e.d. $x = \ln(Exp(x))$.
entonces $1 = \dfrac{1}{Exp(x)} \cdot Exp'(x)$

Luego $Exp(x) = Exp'(x)$. o equivalentemente:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$