que Cantor construye podría escogerse como 0, 548...,etc. Aquí B_1 se escoge como cualquier entero distinto de ocho, la primera cifra decimal del número asociado al uno, (en este caso lo escogimos igual a cinco). B_2 se escoge distinto de la segunda cifra decimal del número asociado al dos, en este caso se escogió cuatro, y se continúa de esta manera. El número así construido no puede estar en correspondencia con ningún entero, ya que difiere del asociado al uno en la primera cifra decimal, del asociado al dos en la segunda, y así sucesivamente. Esto nos muestra que la correspondencia que supusimos existía realmente no pude darse, y por tanto el continuo tendrá una cardinalidad mayor.

En este punto Cantor conjetura que el siguiente infinito ha de estar conformado por todos los puntos del continuo dos-dimensional, y el siguiente infinito por el continuo tres dimensional y así, en forma sucesiva, sería posible encontrar una jerarquía infinita de infinitos cada uno de mayor tamaño que el anterior. Cantor comienza a trabajar sin descanso sobre esta cuestión y descubre, al cabo de tres años de arduo trabajo, que su intuición ¡no es correcta! En una carta que escribe a Dedekind, en Junio 29 de 1877, Cantor escribe: "Je le vois, mais je ne le crois pas", lo veo pero no lo creo. He llegado a una conclusión tan sorprendente como contradictoria, comenta, pero no alcanzo a ver ninguna falacia en mi razonamiento y por tanto me veo obligado a creer en esta conclusión. Pero esto es sólo el comienzo de una lucha que habría de prolongarse por décadas y que finalmente terminaría por llevar a Cantor a un sanatorio, víctima del agotamiento intelectual y de una crisis depresiva recurrente.

El problema al cual Cantor dedicaría el máximo esfuerzo y tiempo es el siguiente: ¿existirá un subconjunto del continuo que posea una cardinalidad intermedia entre aleph cero y c? Cantor conjeturó que un conjunto con

cardinalidad intermedia no podría existir, y así el continuo sería el infinito siguiente a aleph cero, pero jamás pudo probarlo. La conjetura se conoce hoy con el nombre de la hipótesis del continuo HC, y se consideró uno de los problemas más importantes de la matemática, hasta el punto de figurar en primer lugar en la famosa lista de problemas que Hilbert enunció en su conferencia de París, en 1900.

La solución completa de este problema se logró finalmente en 1963, y es uno de los mayores logros de la lógica matemática del siglo XX. Para sorpresa de todos, la solución del problema fue la siguiente: la HC no se puede decidir dentro del marco de la matemática aceptada. Existe una matemática en la cual la HC es cierta, y otra en la cual ésta es falsa, ambas "igualmente válidas", y por tanto la aceptación se convierte en ¡una cuestión de gusto! Esta conclusión plantea un serio problema a la concepción platónica de la matemática. Si nos dejamos guiar por nuestra intuición, uno podría imaginarse que una persona que examinara cada uno de los subconjuntos no numerables de la recta real, en un tiempo infinito, o encontraría uno de ellos con cardinalidad distinta a la del continuo o no lo encontraría, pero sería inconcebible pensar que en últimas todo fuera una cuestión de gusto. Si nos preguntáramos, por ejemplo, si existe vida en algún otro planeta de la Vía Láctea, probablemente nos parecería absurdo que alguien nos dijera que la pregunta no tiene sentido, que si usted quiere que haya vida, hay vida, y si no, no la hay. Más bien diríamos que lo ignoramos, pero que si dispusiéramos de la tecnología adecuada, y pudiéramos escudriñar cada rincón de cada uno de los otros planetas de nuestra galaxia, descubriríamos vida en alguno de ellos, o en ninguno, pero uno de las dos cosas ciertamente tendría que ocurrir. Un fenómeno muy distinto parece ocurrir con las afirmaciones de la matemática que involucran el infinito. Por ejemplo, ¿existirá un numero par que no sea la suma de dos

números primos? Hasta la fecha todos los cientos de miles de millones de números pares que los grandes computadores han examinado han resultado ser la suma de dos primos. Esta conjetura, conocida como la Conjetura de Goldbach, no ha sido demostrada ni refutada, y podría ser otra afirmación indecidible. Para entender con absoluta precisión lo qué esto significa, tenemos que entender cual ha sido la posición de la escuela formalista frente al problema de los fundamentos de la matemática.

El objetivo de Hilbert y sus seguidores fue el de reducir todas las matemáticas a un juego simbólico, en el que las sentencias o afirmaciones no fueran más que simples agregados de símbolos desprovistos de todo significado intuitivo y construidas a partir de un conjunto específico de símbolos, siguiendo unas reglas sintácticas determinadas. En este juego también hay una serie de reglas de inferencia que permiten deducir los teoremas de la teoría a partir de sus axiomas, conjunto de sentencias fijado de antemano. Las afirmaciones verdaderas de la matemática serán aquellas para las cuales existe una deducción a partir de los axiomas, usando exclusivamente las reglas de inferencia. Además, estas reglas tendrán que estar escogidas de tal forma, que una persona aún sin saber nada de matemáticas o inclusive una máquina, podría determinar si la deducción de una sentencia particular es correcta, aplicando un procedimiento puramente mecánico. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel, ZF, los símbolos de la teoría son las letras $x_1, x_2, \ldots, x_n$ etc., los paréntesis, ( ), el símbolo de pertenencia, $\in$, los símbolos lógicos de conjunción, disyunción y negación, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, los cuantificadores existencial y universal $\exists$, $\forall$, y el símbolo de igualdad, $=$. Una sentencia bien construida es por ejemplo la fórmula $\exists z \forall y(\neg(y \in z))$, que intuitivamente afirma que existe un conjunto vacío, z, el cual no contiene ningún elemento. La teoría tiene nueve axiomas

y un esquema axiomático, es decir un procedimiento que permite generar infinitos axiomas usando una especie de molde o patrón fijo. Las reglas de inferencia formalizan las reglas de deducción de la lógica aristotélica, como el modus ponens, el silogismo, etc. Un teorema de la matemática o una sentencia cierta en matemáticas es entonces cualquier sentencia que se derive de estos axiomas usando dichas reglas. Una sentencia falsa será una para la cual su negación se cierta. Una indecidible es entonces una sentencia que no es cierta ni falsa, es decir, el sistema formal no captura la "veracidad o falsedad" de dicha sentencia, si es que estas dos palabras tienen algún sentido absoluto. La posición formalista estricta supone que no lo tienen, y que de lo único que podemos hablar con precisión es de "verdad" en el sentido que acabamos de definir, y que por fuera de un determinado juego formal lo único que tenemos es un mero juego de palabras carente de sentido, en cierta forma, sólo fantasmas creados por el lenguaje.

Por el contrario, un platónico creería que si una determinada sentencia es indecidible en un sistema formal, esto sólo implicaría que la escogencia del sistema o de sus axiomas no fue adecuada para "capturar" la veracidad o falsedad de la sentencia y el problema consistirá entonces en encontrar unos buenos axiomas que permitan decidir la cuestión. Pero el problema es que uno podría perfectamente en este caso suponer como axioma la proposición indecidible (sin introducir ninguna contradicción en el sistema) o su negación, sin que haya ningún criterio a priori de cómo proceder.

Volviendo a nuestra discusión sobre la HC, lo que Gödel demostró en 1939, fue que la negación de HC no se puede demostrar en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fankel pero quedaba abierta aún la posibilidad de que ésta se pudiera probar. Gödel construyo un modelo de la teoría de conjuntos en el cual HC es cierta, llamado el Universo Construible de Gödel. De aquí se deduce que si