Capítulo 5
Implementación del modelo constitutivo

En este capítulo se presenta la implementación del modelo constitutivo de (Hu y Schnobrich 1989) modificado, en el método de los elementos finitos. Para la implementación se desarrollaron varias etapas en las cuales se realizaron algunas modificaciones al modelo original, antes de incluirlo dentro de las rutinas del programa de análisis.

De forma breve tangencial se presentara un marco teórico del método de los elementos finitos y del programa seleccionado para realizar la implementación. También se hace referencia al programa de pre y pos proceso usado para la generación de mallas y posterior el análisis de los resultados.

Finalmente se describen las modificaciones realizadas al modelo y posteriormente se presenta en forma detallada la manera como se implementó.

5.1. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es uno de los métodos existentes para resolver, de forma aproximada, problemas basados en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (Gunzburger y Peterson 2002).

Las tres ideas principales que definen el método de los elementos finitos según (Reddy 2004) son:

- Dividir el continuo en pequeñas partes llamas elementos finitos.
- Al interior de cada elemento, desarrollar las relaciones de variables tales como fuerzas y desplazamientos.

- Ensamblar los elementos para obtener las relaciones de dichas variables a nivel de todo el sistema.

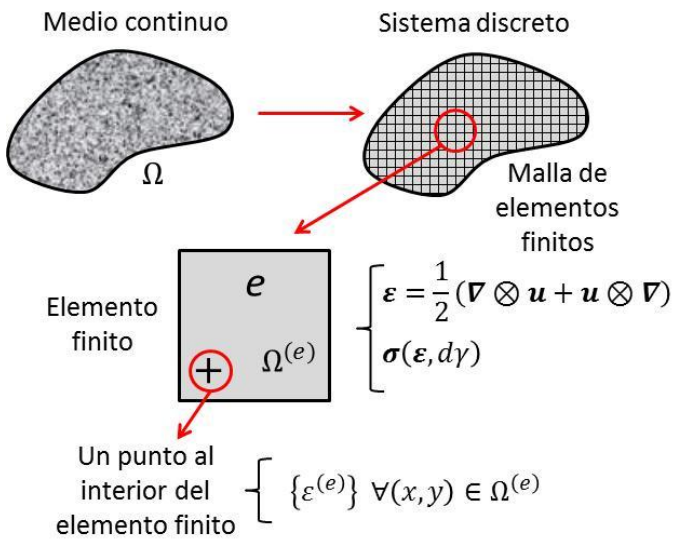


Figura 5-1: Discretización de un medio por medio de elementos finitos.

El medio continuo analizado puede ser un fluido o un sólido, en este caso se centrará en la mecánica de sólidos.

Para resolver los problemas de mecánica de sólidos es necesario tener en cuenta:

- La cinemática del problema: Relaciones deformación – desplazamiento.
- Modelo constitutivo: relaciones esfuerzo – deformación.
- Condición de equilibrio: principio de trabajos virtuales.
- Herramienta: transforma el problema continuo en algo discreto. (Método de los elementos finitos).
- Función de aproximación: Tiene como argumento una cantidad de interés. En el problema mecánico, esta cantidad de interés corresponde al tensor de desplazamientos $\boldsymbol{u}(x,y)$ en cualquier punto del elemento finito.

El tensor de desplazamientos en cualquier punto al interior de un elemento finito se puede expresar como:

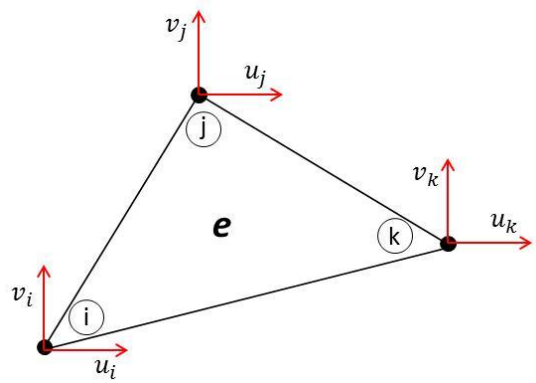
$$\boldsymbol{u}(x,y) \equiv \{u(x,y)\} = [N^e(x,y)]\{u_n^e\} \qquad (5\text{-}1)$$

Donde $\{u(x,y)\}$ es el vector de los desplazamientos que es función de la posición (x,y) al interior del elemento finito, $[N^e(x,y)]$ es una función de forma o de interpolación y $\{u_n^e\}$ es el vector de desplazamientos nodales (en los nudos del elemento finito). El súper índice e hace referencia a elemento finito.

Para el caso de un elemento finito triangular de tres nudos se tiene:

$$\{u_n^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

$$[N^e(x,y)] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$



(5-2)

Reemplazando la ecuación (5-1) en la ecuación (5-2) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \tag{5-3}$$

Con el tensor de desplazamiento se obtiene el tensor de deformación infinitesimal de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}) \tag{5-4}$$

Escribiendo las componentes de la deformación en notación de Voigt se obtiene una matriz columna de la forma:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{5-5}$$

Para un elemento se tiene:

$$\{\varepsilon^e\} = [\nabla]([N^e])\{u_n^e\}$$
$$\{\varepsilon^e\} = [B^e]\{u_n^e\} \tag{5-6}$$

Con el tensor de deformaciones y haciendo uso de las relaciones constitutivas (Modelo constitutivo, M.C.) se puede obtener el esfuerzo en cada punto de cada elemento finito.

$$\{\sigma^e(x,y)\} = M.C.(\{\varepsilon^e(x,y)\}, d\gamma) \tag{5-7}$$

Ahora se puede plantear una ecuación de equilibrio en términos de trabajo usando el principio de los trabajos virtuales:

$$W_{interno} - W_{fuerzas\ de\ cuerpo} - W_{fuerzas\ de\ superficie} = 0$$

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \int_V \{\delta u\}^T\{b\}dV - \int_A \{\delta u\}^T\{t\}dA = 0$$

Para un elemento finito:

$$\int_{Ve} \{\delta u_n^e\}^T[B^e]^T\{\sigma\}dV - \int_{Ve} \{\delta u_n^e\}^T[N^e]\{b\}dV - \int_{Ae} \{\delta u_n^e\}^T[N^e]\{t\}dA = W^e \tag{5-8}$$

El trabajo total será la suma del trabajo en cada elemento finito:

$$W \cong \sum_{e=1}^{n_e} W^e$$

Realizando el ensamblaje para todos los elementos se obtiene:

$$\mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left(\int_{Ve} [B^e]^T\{\sigma\}dV\right) - \mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left(\int_{Ve} [N^e]\{b\}dV + \int_{Ae} [N^e]\{t\}dA\right) = 0 \tag{5-9}$$

En la ecuación **(5-9)**, el primer término corresponde a la fuerza interna del sólido y el segundo término es la fuerza externa.

Donde:

$$\{\delta\varepsilon\} = [\nabla]\{\delta u\} = \{\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\gamma_{xy}\}^T \qquad \text{Deformación virtual}$$

$$\{\delta u\} = \{\delta u \quad \delta v\}^T \qquad \text{Desplazamiento virtual}$$

$$\{b\} = \{bx \quad by\} \qquad \text{Fuerzas de cuerpo} \qquad (5\text{-}10)$$

$$\{t\} = \{tx \quad ty\} \qquad \text{Fuerzas de superficie}$$

$$\{u_n\} \qquad \text{Desplazamientos en los nudos}$$

Organizando los términos y sustituyendo la fuerza externa por las fuerzas en los nudos $\{\mathcal{F}\}$, se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\{\Psi(\{u_n\})\} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left(\int_{Ve}[B^e(\{u_n\})]^T\{\sigma(\{u_n\})\}dV\right) - \{\mathcal{F}(\{u_n\})\} = \{0\} \qquad (5\text{-}11)$$

Siendo $\{\Psi(\{u_n\})\}$ la fuerza residual.

Ahora corresponde encontrar un valor para $\{u_n\}$ que haga $\{\Psi(\{u_n\})\} \longrightarrow \{0\}$.

Esquemáticamente la ecuación **(5-11)** se puede representar como muestra la **Figura 5-2.**

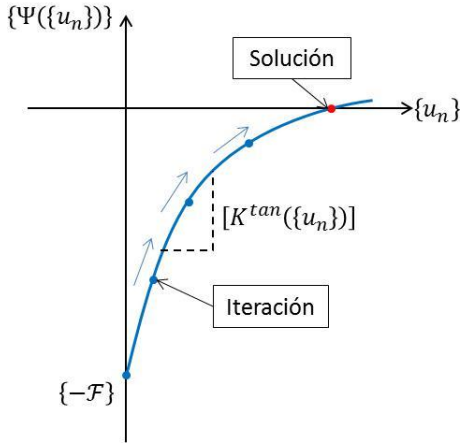


Figura 5-2: Gráfica idealizada para ecuación de equilibrio.

Para encontrar la solución de la ecuación de equilibrio se usan métodos numéricos iterativos. Los métodos que usa el programa HYPLAS son: método de Newton – Raphson y método de Longitud de Arco. Estos métodos se presentan en los numerales **5.1.1** y **5.1.2.**

En los problemas no lineales se requiere una aplicación incremental de la carga, para lo cual se introduce un factor λ que varía entre cero y uno y hace que la carga externa se aplique en incrementos. Incluyendo este factor la ecuación de equilibrio **(5-11)** se trasforma en:

$$\{\Psi(\{u_n\},\lambda)\} = \mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left(\int_{Ve}[B^e(\{u_n\})]^T\{\sigma(\{u_n\})\}dV\right) - \lambda\{\mathcal{F}(\{u_n\})\} = \{0\} \qquad (5\text{-}12)$$

$$\{\Psi(\{u_n\},\lambda)\} = \mathcal{F}^{int}(\{u_n\}) - \lambda\{\mathcal{F}(\{u_n\})\} = \{0\}$$

Ahora para cada incremento o paso de carga p se requiere hacer un proceso iterativo y se obtiene un vector de desplazamientos que es solución a la ecuación de equilibrio para cada paso de carga.

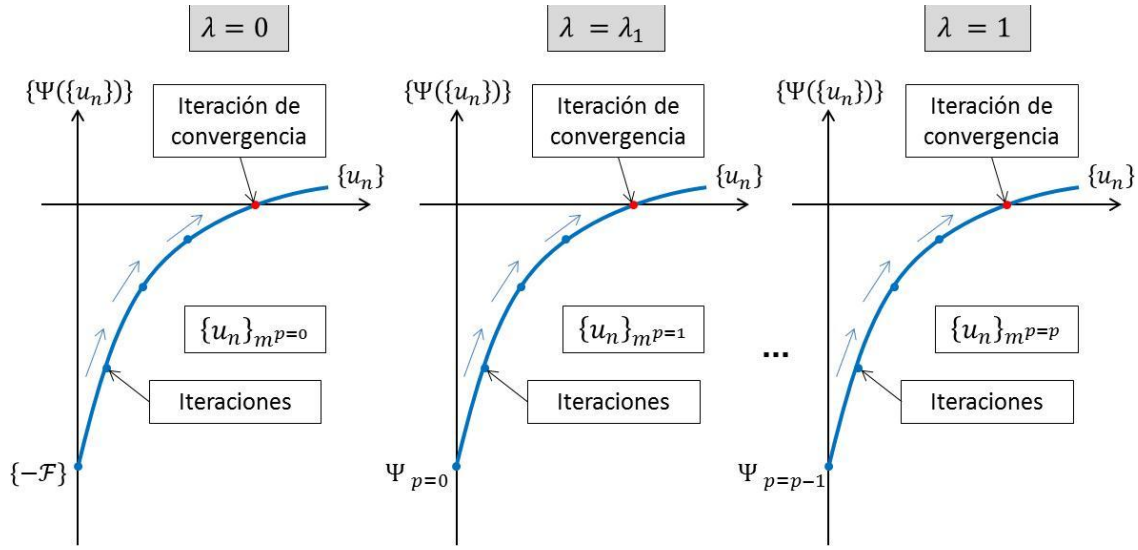


Figura 5-3: Proceso de convergencia en cada paso de carga.

En la **Figura 5-3** se observa el procedimiento de convergencia para cada paso de carga. Inicialmente para el paso de carga $\gamma = 0$ se obtienen luego de m iteraciones, un vector de desplazamientos $\{u_n\}_{m^{p=0}}$. En el siguiente paso de carga $\gamma = \gamma_1$, se repite el mismo proceso de convergencia y se obtiene un vector de desplazamientos $\{u_n\}_{m^{p=1}}$ y así sucesivamente hasta que se aplica la totalidad de la carga externa $\gamma = 1$.

Los vectores de desplazamiento en cada paso de carga se van almacenando para obtener la respuesta estructural a lo largo de la historia de carga. **Figura 5-4.**

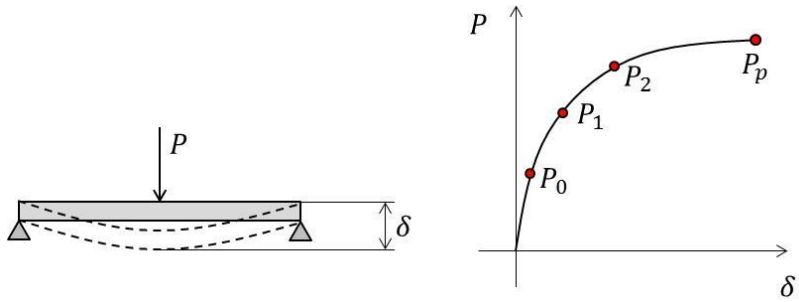


Figura 5-4: Respuesta estructural.

Por último, la matriz de rigidez tangente estará dada por la derivada de la ecuación de equilibrio con respecto al vector de desplazamientos:

$$[K^{tan}] = \frac{\partial\{\Psi(\{u_n\},\lambda)\}}{\partial\{u_n\}}$$

$$[K^{tan}] = \mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left[\int_{Ve}[B^e(\{u_n\})]^T\frac{\partial\{\sigma(\{u_n\})\}}{\partial\{\varepsilon\}}\cdot\frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{u_n\}}dV\right]-\frac{\partial\lambda\{\mathcal{F}(\{u_n\})\}}{\partial\{u_n\}} \tag{5-13}$$

$$[K^{tan}] = \mathbb{A}_{e=1}^{n_e}\left[\int_{Ve}[B^e(\{u_n\})]^T[C^{tan}][B^e(\{u_n\})]dV\right]-\frac{\partial\lambda\{\mathcal{F}(\{u_n\})\}}{\partial\{u_n\}}$$

En la ecuación **(5-13)** el último término es diferente de cero para problemas en los cuales las fuerzas externas son función de los desplazamientos, como por ejemplo para problemas no conservativos. De otro modo, para cargas aplicadas externamente, el último término es cero. El término que está dentro de la función ensamblaje, corresponde a la matriz de rigidez para un elemento finito *e* en una iteración *i*.

5.1.1. Método de Newton – Raphson

Este método toma como solución aproximada una serie truncada de Taylor, expresada como:

$$\{\Psi(\{u_n\}+\Delta\{u_n\})\} = \{\Psi(\{u_n\})\} + \left.\frac{\partial\{\Psi\}}{\partial\{u_n\}}\right|_{\{u_n\}}\cdot\Delta\{u_n\} \cong \{0\}$$

$$\{\Psi(\{u_n\}+\Delta\{u_n\})\} = \{\Psi(\{u_n\})\} + [K^{tan}(\{u_n\})]\cdot\Delta\{u_n\} \cong \{0\} \tag{5-14}$$

El procedimiento numérico para obtener el vector de desplazamientos en un paso de carga, se puede resumir como sigue:

Iteración 1:

$$\{u_n\}^{(0)} = \{0\}$$
$$\Psi\left(\{u_n\}^{(0)}\right) = -\{\mathcal{F}\}$$
$$\{\Delta u_n\}^{(1)} = -\left[K^{tan}\left(\{u_n\}^{(0)}\right)\right]^{-1}\Psi\left(\{u_n\}^{(0)}\right) \tag{5-15}$$
$$\{u_n\}^{(1)} = \{u_n\}^{(0)} + \{\Delta u_n\}^{(1)}$$
$$\Psi\left(\{u_n\}^{(1)}\right)$$

Iteración 2:

$$\{\Delta u_n\}^{(2)} = -\left[K^{tan}\left(\{u_n\}^{(1)}\right)\right]^{-1}\Psi\left(\{u_n\}^{(1)}\right)$$
$$\{u_n\}^{(2)} = \{u_n\}^{(1)} + \{\Delta u_n\}^{(2)} \tag{5-16}$$
$$\Psi\left(\{u_n\}^{(2)}\right)$$

Iteración m:

$$\{\Delta u_n\}^{(m)} = -\left[K^{tan}\left(\{u_n\}^{(m-1)}\right)\right]^{-1}\Psi\left(\{u_n\}^{(m-1)}\right)$$
$$\{u_n\}^{(m)} = \{u_n\}^{(m-1)} + \{\Delta u_n\}^{(m)} \tag{5-17}$$
$$\Psi\left(\{u_n\}^{(m)}\right)$$

Gráficamente el método de puede representar como muestra la **Figura 5-5.**

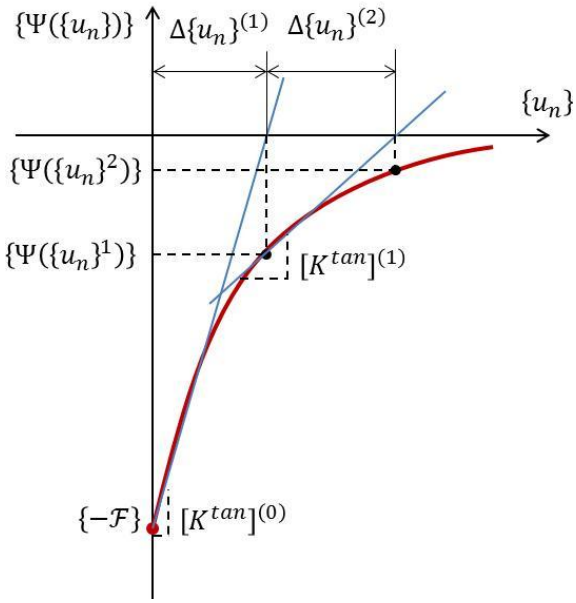


Figura 5-5: Representación gráfica del método de Newton – Raphson.

Una iteración m se considerará convergida en el momento en el cual la fuerza residual sea menor que la tolerancia ϵ.

$$\Psi\left(\{u_n\}^{(m)}\right) < \epsilon \tag{5-18}$$

de lo contrario se procede con la siguiente iteración.

Existe una variación del método de Newton – Raphson, denominado Método de Newton – Raphson Modificado. La diferencia consiste en no actualizar en cada iteración el valor de la pendiente $[K^{tan}]$ para reducir el número de cálculos requeridos. En la **Figura 5-6** se muestra gráficamente el Método de Newton – Raphson Modificado. Comúnmente el este método requiere más iteraciones pero se ahorra el cálculo de $[K^{tan}]$ en cada iteración.

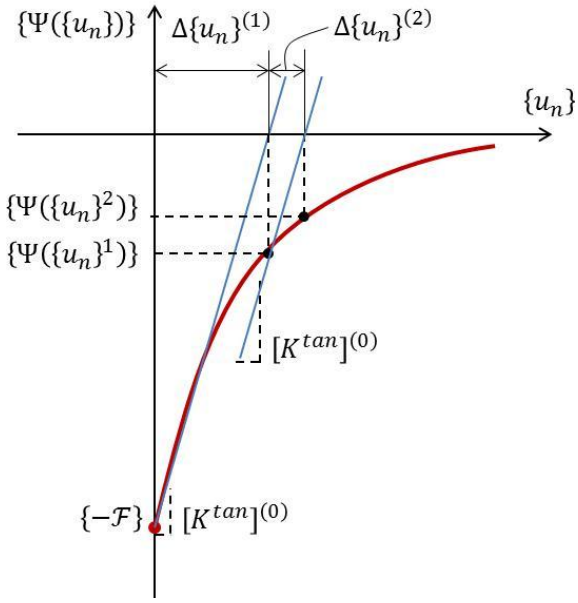


Figura 5-6: Representación gráfica del método de Newton – Raphson modificado.

5.1.2. Método de Longitud de Arco

El método de Newton – Raphson es uno de los de más rápida convergencia pero presenta inconvenientes en casos como donde la derivada de la función es igual a cero o existen raíces reales repetidas, entre otros. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008).

El método de Longitud de Arco tiene la capacidad de realizar el proceso de convergencia en estos casos donde el método de Newton – Raphson presenta inconvenientes.

La ecuación de equilibrio **(5-12)** se puede rescribir de la siguiente forma:

$$\{\Psi(\{u_n^{N+1}\}, \Delta\lambda)\} = \mathcal{F}^{int}(\{u_n^{N+1}\}) - (\lambda_N + \Delta\lambda)\{\mathcal{F}(\{u_n^N\})\} = \{0\} \tag{5-19}$$

donde:

$$\Delta\lambda = \lambda_{N+1} - \lambda_N \tag{5-20}$$

En este método el factor de carga λ es variable y se introduce una restricción adicional que determina la "longitud" del incremento de carga. Existen dos métodos de longitud de arco dependiendo de esa restricción adicional. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)

- Método de longitud de arco esférico.
- Método de longitud de arco cilíndrico.

El programa HYPLAS usa el método de longitud de arco cilíndrico, el cual, la ecuación de restricción $\{\Delta u_n\}^T\{\Delta u_n\} = l^2$ requiere que la norma Euclidiana de la convergencia de los desplazamientos incrementales, es decir, la solución del equilibrio al final del incremento se encuentre en la intersección entre la curva de equilibrio y un cilindro en el espacio $(\{u_n\}, \lambda)$ de radio l y centrado en la condición de equilibrio $\{u_n^N\}$. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008).

Una representación gráfica de este método, en un espacio de dos grados de libertad, se muestra en la **Figura 5-7** en donde se muestra que las dos posibles intersecciones de la ruta de equilibrio y el cilindro, son los puntos A y B.

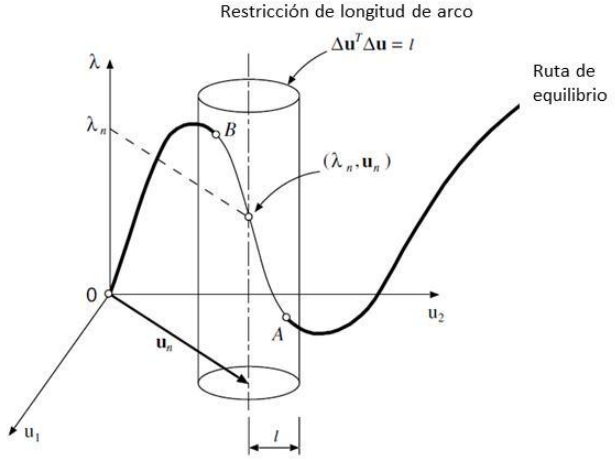


Figura 5-7: Método de longitud de arco cilíndrico. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

5.2. Programa GiD

El programa GiD es una herramienta computacional de pre y post proceso, desarrollada en conjunto por la Universidad Politécnica de Catalunya y el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

Es usada en este trabajo para generar el archivo de datos de entrada y visualizar el archivo de datos de salida. **Figura 5-8.**

5.2.1. Pre proceso

Cuando se utiliza el programa GiD en el modo de pre proceso, el procedimiento se puede resumir como sigue:

- Dibujar la geometría de la estructura a modelar teniendo en cuenta las unidades en las cuales se está trabajando.
- Definir el tipo de problema, para este caso es el definido para HYPLAS.
- Definir las condiciones: Cargas y desplazamientos impuestos. (para apoyos se asignan desplazamiento impuestos con valor cero).
- Definir el material.
- Definir datos del problema como la cinemática (pequeñas o grandes deformaciones). Estado plano de esfuerzos o de deformaciones.
- Definir los intervalos de carga.
- Definir el tipo de elemento finito y la clase de malla a usar.
- General la malla.
- Correr el programa para generar el archivo de entrada de datos para el programa HYPLAS.

5.2.1. Post proceso

Una vez es generado el archivo de datos de entrada para HYPLAS, éste se ejecuta y se obtienen los archivos de salida del programa HYPLAS. Uno de estos archivos de salida es leído nuevamente por el programa GiD, pero ahora en modo de post proceso.

El programa GiD permite ahora visualizar por medio de una interface gráfica, las variables que se encuentran en el archivo de salida de HYPLAS. GiD permite realizar esta visualización por cada paso de carga, de manera que es posible analizar la evolución del problema.

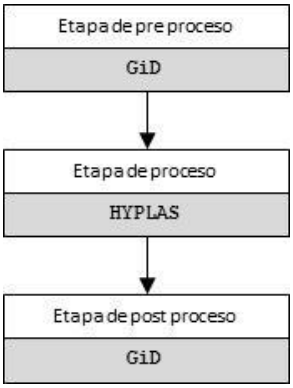


Figura 5-8: Procedimiento de análisis usando los programas Gid y HYPLAS.

5.3. Programa HYPLAS

Es un programa que usa el método de los elementos finitos para resolver problemas no lineales de mecánica de sólidos en estado plano de esfuerzos, plano de deformaciones y axisimétrico. Permite resolver problemas con pequeñas y grandes deformaciones para materiales elásticos, hiper elásticos y elasto plásticos. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008).

Es un programa a código abierto, lo que permite incluir modificaciones o adiciones para incluir nuevos modelos constitutivos.

El programa principal de HYPLAS se divide en tres componentes básicos:

- Entrada e inicialización de datos: En esta etapa se inicializan todos los arreglos y se leen todos los datos relevantes de los archivos de entrada.
- Procedimiento incremental con elementos finitos: En esta etapa se desarrolla el ciclo de pasos de carga (o desplazamientos) que tiene anidado un ciclo de iteraciones de equilibrio.
- Salida de datos convergidos: Finalmente en esta etapa se encuentran las rutinas para imprimir los resultados convergidos para cada elemento finito para luego ser visualizados gráficamente por el programa de post proceso. Estas rutinas se encuentran al interior de la rutina de pasos de carga.

A continuación se hace una breve reseña de cada una de las etapas del programa principal de HYPLAS:

5.3.1. Entrada de datos e inicialización

En esta rutina inicial se leen los datos de entrada requeridos para correr el programa, esta operación se puede realizar de dos maneras:

- Desde un archivo de entrada de datos únicamente.
- Desde un archivo de reinicio y un archivo de entrada de datos.

La segunda opción es usada cuando se requiere resolver un problema teniendo en cuenta unas condiciones iniciales en particular, para lo cual se requiere ejecutar el programa previamente con la primera opción y decirle que genere un archivo de reinicio para luego ser usado en una segunda corrida del programa.

En este trabajo se usó únicamente la primera opción. La rutina general para para entrada de datos e inicialización se resume en la **Figura 5-9**.

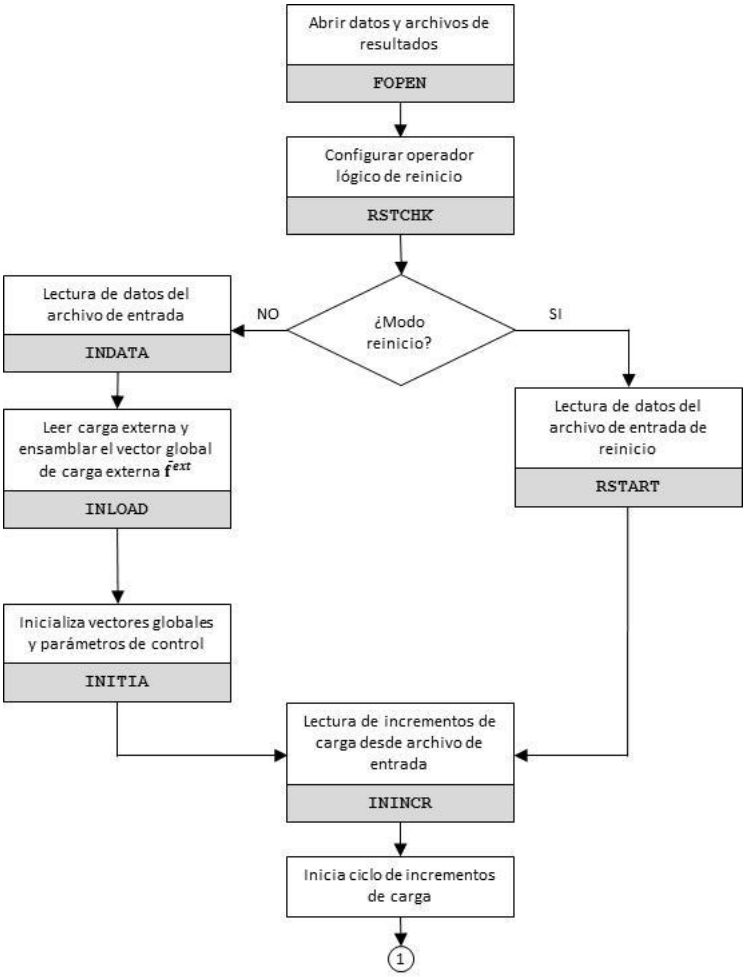


Figura 5-9: Rutina de entrada e inicialización de datos. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

Un ejemplo del archivo de datos que requiere el programa HYPLAS se muestra en la **Figura 5-10.** El ejemplo mostrado es un archivo típico de datos de entrada para HYPLAS pero generado por el programa GiD. El archivo de entrada de datos tiene los siguientes bloques en los cuales se ordenan los datos de entrada. En el primer bloque se encuentra el título, el tipo de análisis, en este caso, es un análisis para estado plano de esfuerzo. Se encuentra también la cinemática del problema, en el ejemplo es para pequeñas deformaciones. Finalmente se encuentra el algoritmo de solución usado para resolver el sistema de ecuaciones, en este caso método de Newton Raphson.

En el segundo bloque se encuentra la información para los elementos. Se definen los grupos y el tipo de elemento. En este trabajo todos los elementos pertenecen a un único grupo. En el tipo de elemento se define el tipo de elemento finito, en este ejemplo se definió cuadrilateral lineal de 4 nudos y 4 puntos de Gauss.

El tercer bloque hace referencia a los materiales, en este caso solo se define un material que tiene por nombre "CONCRETE_PLASTIC". Después del nombre se ingresa la densidad del material para que el programa tenga en cuenta el peso propio, en este caso no se está teniendo en cuenta por lo que se le da un valor de cero. Luego se ingresa en módulo de elasticidad para el rango elástico y la relación de Poisson. Los datos que siguen son el esfuerzo de fluencia en el rango de compresión uniaxial σ_{yc}, la deformación correspondiente a este esfuerzo ε_0. Después se encuentran los valores para R_σ y R_ε y los valores iniciales para $d\gamma_0$ y $d\gamma_1$. Se ingresa también en este bloque el espesor de lo que se está modelando, en este caso era una loseta de 0.05m de espesor.

En el cuarto bloque se define el número de elementos que tiene la malla de elementos finitos, el material que tiene asignado cada uno, y los nudos que lo conforman.

En seguida se encuentra una tabla de nudos con las coordenadas de cada uno y sus desplazamientos prescritos. Los nudos que tienen condiciones de apoyo tendrán impuestos desplazamientos con valores de cero. En el caso de desplazamientos impuestos en lugar de cargas, tendrán valores diferentes de cero.

En el bloque número 5 se encuentran las cargas aplicadas y los incrementos. En el caso de existir cargas se especifica en qué nudo están aplicadas y la dirección que tienen. Si el problema no tiene cargas aplicadas si no desplazamientos, en el bloque de cargas se escribe un cero. En los incrementos hacen referencia al número de pasos en los que se divide la aplicación de todas las cargas. Por ser un análisis no lineal se requiere aplicar las cargas en forma gradual. Cuando se trata de desplazamientos aplicados en lugar de cargas, lo que se divide y se aplica gradualmente son los desplazamientos impuestos. En los incrementos también se especifica la tolerancia para la convergencia y los resultados que se quieren guardar en el archivo de salida. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008) Por último en el bloque 6 se indican las variables que se desean mostrar en archivo de gráficas (Caisedo 2010).

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)

SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)
-------------------------------------------
ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP
-------------------------------------------
MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
31395000 0.3
3
28980 0.0022
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05
-------------------------------------------
ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 11   0.000500  0.000000 0.0
  3 11   0.000500  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0
-------------------------------------------
LOADINGS 0

INCREMENTS 4
   0.0020000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 30 1 0 1 0 0
-------------------------------------------
CURVES 1
3 1 1 3 0 0
```

1 2 3 4 5 6

Figura 5-10: Ejemplo de archivo de entrada de datos para programa HYPLAS.

5.3.2. Procedimiento incremental con elementos finitos

Esta es la parte principal del programa y es donde se realiza el ciclo de incrementos de carga (o desplazamientos). El ciclo se puede realizar usando los siguientes métodos:

- Método de Newton – Raphson: En este método el factor de incremento de carga es fijo y se ingresa en el archivo de entrada de datos). **Figura 5-11.**
- Método de Longitud de arco: En este método el incremento de cada paso se determina mediante el procedimiento de longitud de arco. **Figura 5-12.**

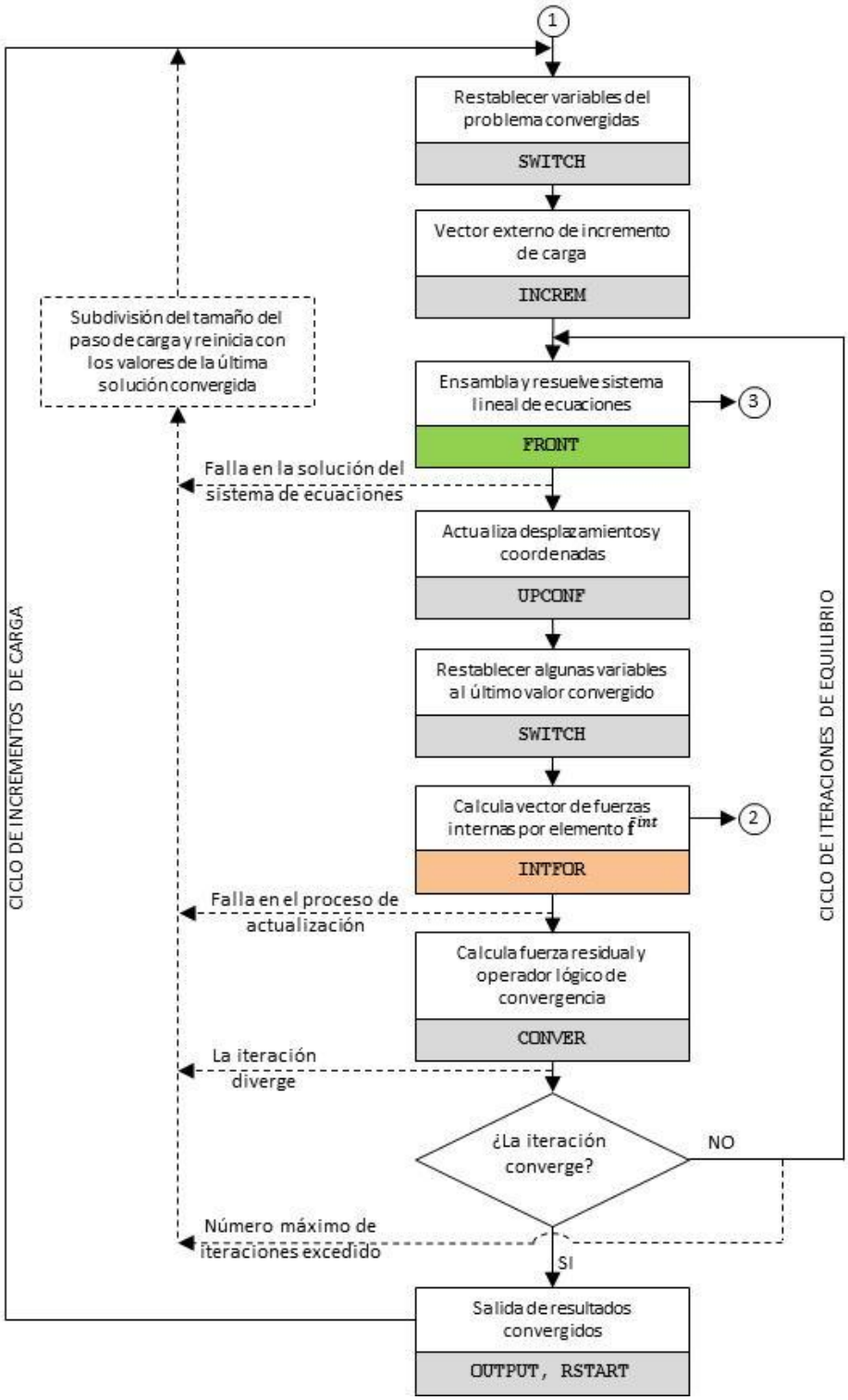


Figura 5-11: Ciclo de incrementos de carga, médodo de Newton – Raphson. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

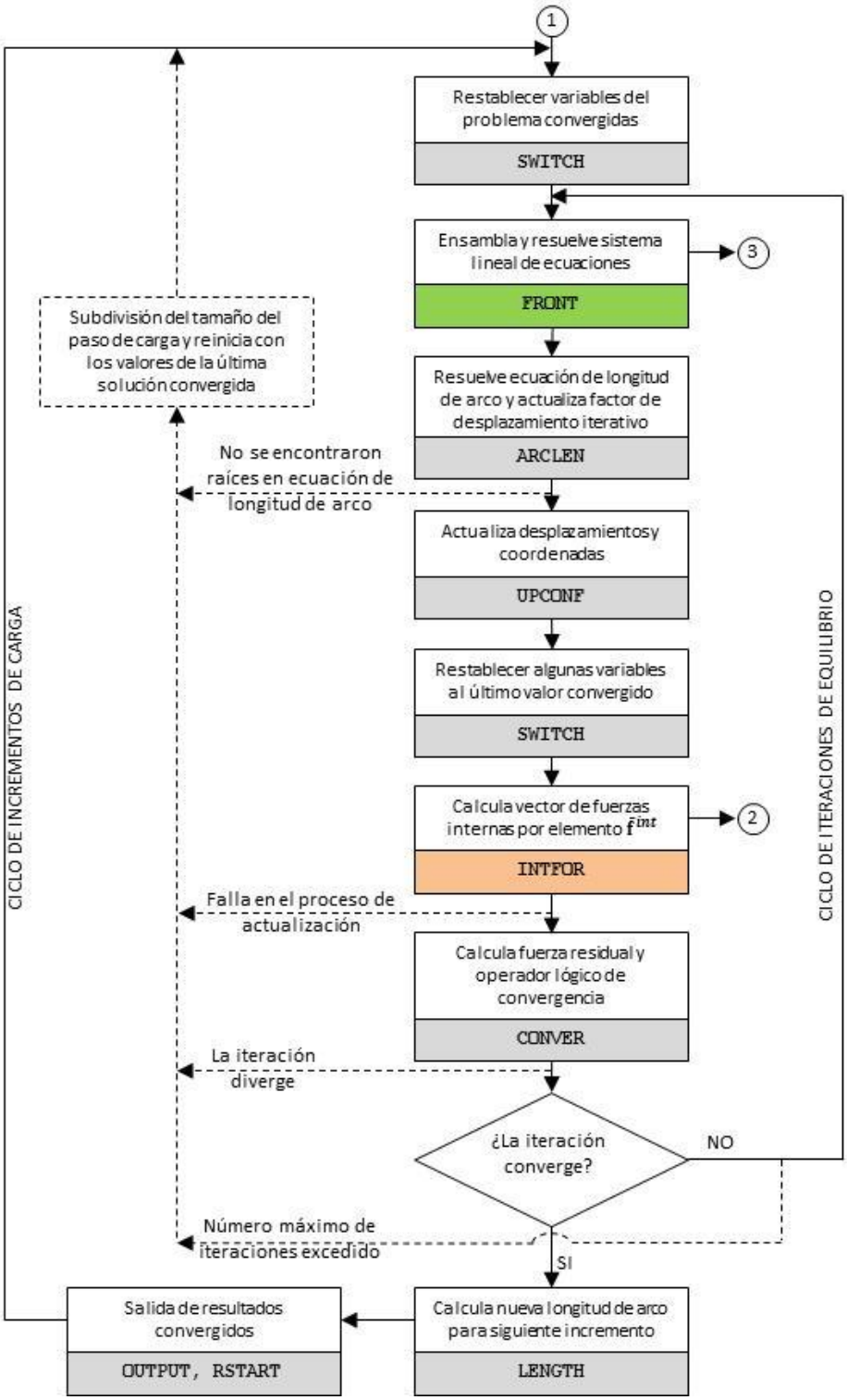


Figura 5-12: Ciclo de incrementos de carga, método de longitud de arco. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

Independientemente del método usado para realizar el ciclo de incrementos de carga (o desplazamientos) se ejecutan 2 rutinas, al interior de las cuales, se adicionaron las rutinas desarrolladas en este trabajo para el modelo implementado:

- Rutina **INFOR**: En esta rutina se calcula el vector de fuerzas internas por cada elemento finito. En dentro de esta rutina que se encuentran ubicadas todas las subrutinas que actualizan las variables del material incluido el estado de esfuerzos y las variables hisóricas. **Figura 5-13.** La rutina incluida en este trabajo para el modelo constitutivo implementado es **SUCOPL**.
- Rutina **FRONT**: En esta rutina se ensambla y se resuelve el sistema de ecuaciones en el nivel de la estructura. En esta rutina se encuentran anidadas las subrutinas para el cálculo del operador constitutivo tangente según el modelo constitutivo correspondiente. **Figura 5-14.** La rutina incluida en este trabajo para el modelo constitutivo implementado es **CTCOPL**.

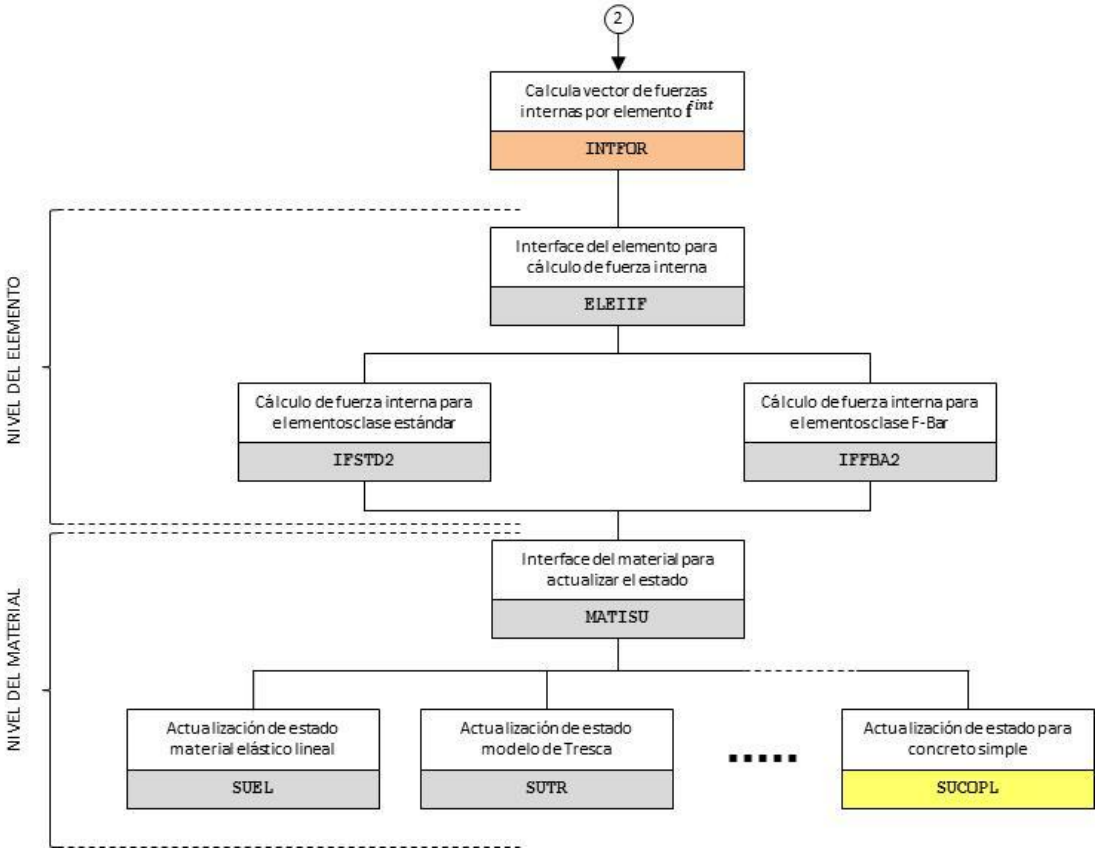


Figura 5-13: Modulación material y elemental, Cálculo de fuerza interna. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

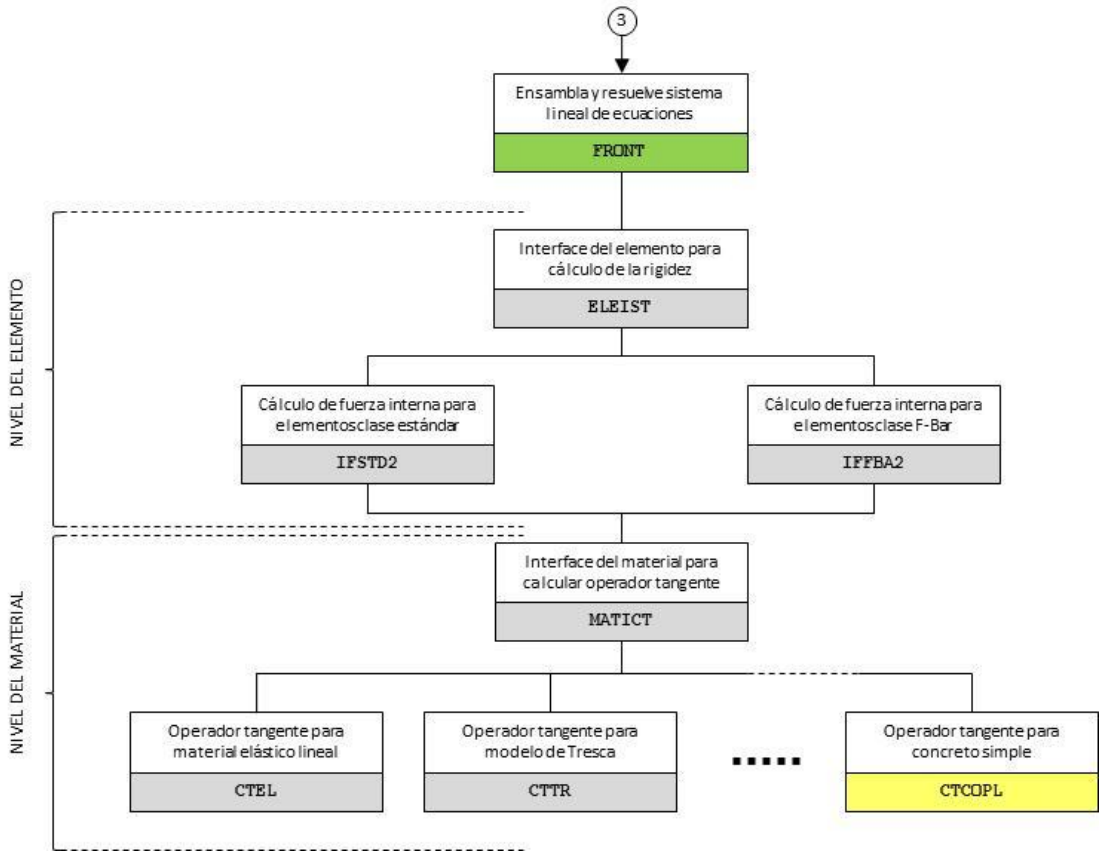


Figura 5-14: Cálculo del módulo tangente. **(de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)**

Estas dos rutinas, SUCOPL y CTCOPL se desarrollan en detalle en el numeral **5.5.**

5.4. Adecuación del modelo constitutivo

Como se mencionó en el capítulo de la formulación del modelo constitutivo, existen varios aspectos que fueron modificados o adecuados en el modelo constitutivo seleccionado para ser implementado en este trabajo. Principalmente las modificaciones son:

- El comportamiento en el rango elástico se transformó de elástico no lineal a elástico lineal.
- La formulación se cambió de un formato explícito a un formato implícito iterativo para el cálculo del incremento del multiplicador plástico $d\gamma$.

- Toda la formulación constitutiva se enmarca dentro del programa de elementos finitos el cual hace verificación de equilibrio para asegurar que la fuerza residual sea igual o muy cercana a cero.

A continuación se desarrollará en detalle cada una de estas modificaciones realizadas.

5.4.1. Comportamiento elástico lineal inicial

Una manera de representar el comportamiento del concreto es suponer que el rango elástico es lineal. Esto trae consigo una serie de ventajas y simplificaciones que son muy útiles a la hora de implementar un modelo constitutivo y representan en gran medida el comportamiento real del material.

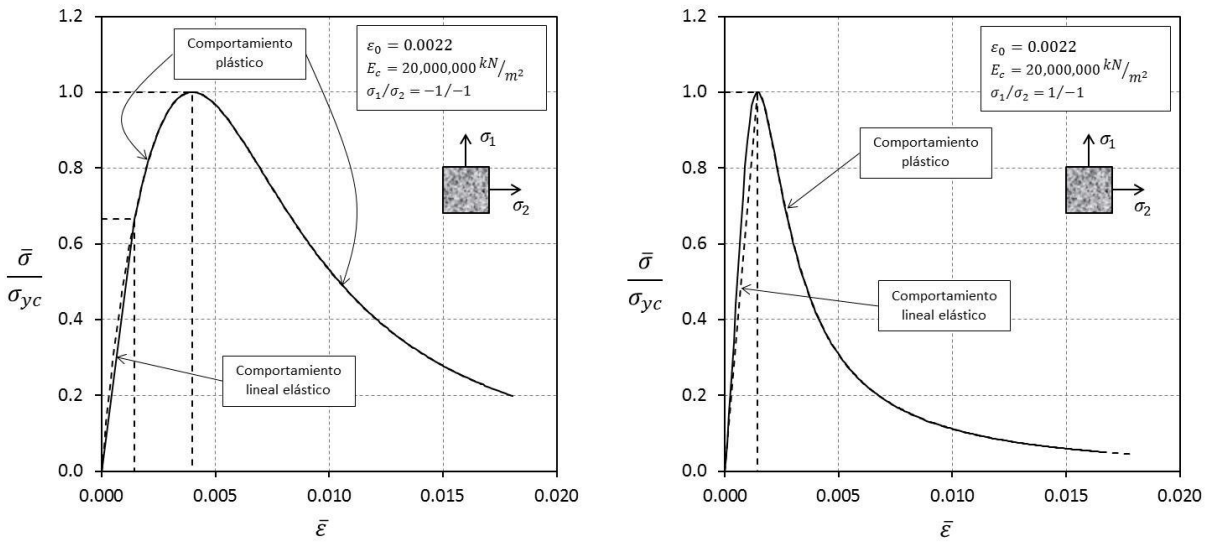
Según (Pauw 1960) el comportamiento en el rango elástico se puede representar usando un módulo de elasticidad que corresponde a la pendiente de una línea secante desde esfuerzo y deformación cero hasta el punto de la curva esfuerzo deformación en donde se alcanza el 45% del esfuerzo de fluencia en compresión.

Esta modificación se muestra en la **Figura 5-15**. En la parte (a) se muestra la curva uniaxial equivalente para el rango de compresión biaxial y superpuesta se muestra la modificación en donde se aprecia el rango lineal elástico inicial. Superado el límite elástico inicia el comportamiento plástico no lineal. Primero hay una zona corta de endurecimiento seguida de la zona de ablandamiento. El punto en el cual finaliza el comportamiento lineal elástico está dado por la deformación y el esfuerzo correspondiente a:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_{yc}}{E_c} \;\; ; \;\; \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) \tag{5-21}$$

Posteriormente el valor del esfuerzo uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$ se calcula con las mismas expresiones presentadas en el **Capítulo 4**. Esta modificación permite reproducir de manera muy cercana el comportamiento experimental usando una formulación lineal en el rango elástico.

De igual manera para el rango de tensión compresión en la parte (b) de la figura, la parte elástica lineal se muestra en línea punteada y luego se presenta el comportamiento plástico con ablandamiento.



a) $\bar{\sigma}/\sigma_{yc}\ vs.\ \bar{\varepsilon}$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$ b) $\bar{\sigma}/\sigma_{yc}\ vs.\ \bar{\varepsilon}$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/-1$

Figura 5-15: Curva esfuerzo – deformación uniaxial equivalente modificada del modelo implementado.

En el rango de tensión biaxial no se realiza ninguna modificación, es decir, el comportamiento se mantiene como plasticidad perfecta según se describió en el **Capítulo 4**.

5.4.2. Formulación implícita iterativa

Como se expuso en el **Capítulo 4,** el modelo implementado posee originalmente una expresión para calcular de forma explícita el incremento del multiplicador plástico.

$$d\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}[C]_e d\{\varepsilon\}^T}{H\frac{G}{\bar{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}[C]_e\frac{\partial G}{\partial\{\sigma\}^T}} \tag{5-22}$$

El valor calculado para $d\gamma$ debe cumplir la siguiente condición:

$$f_{n+1}\big(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(d\gamma)\big) = 0 \tag{5-23}$$

Teniendo en cuenta lo anterior se opta por un procedimiento de cálculo implícito para determinar el valor de $d\gamma$. El valor de $d\gamma$ se obtiene mediante el algoritmo de retorno.

Como se mencionó en el **Capítulo 2**, el algoritmo de retorno**,** consiste en determinar el estado de esfuerzos en el paso de carga siguiente $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ a partir de una proyección elástica de prueba $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$, que luego se corrige para estar sobre la superficie de fluencia del paso de carga siguiente f_{n+1}. El valor de $d\gamma$ debe ser tal que permita ubicar el estado de esfuerzos de prueba, sobre la superficie de fluencia del paso siguiente.

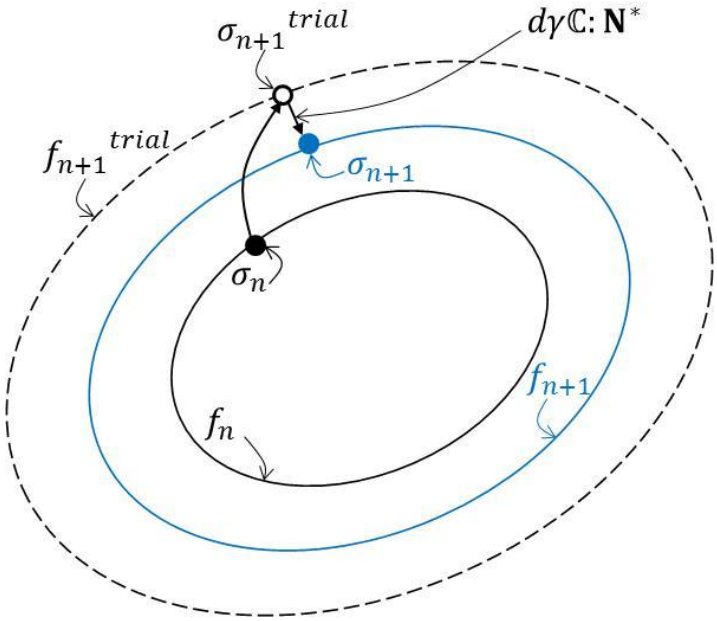


Figura 5-16: Representación gráfica del algoritmo de retorno para el modelo implementado.

En la **Figura 5-16** se muestra esquemáticamente el algoritmo de retorno implementado para determinar el incremento en el multiplicador plástico y el estado de esfuerzos en el paso de carga siguiente. El esfuerzo de prueba en el paso siguiente $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ determina una superficie de fluencia de prueba f_{n+1}^{trial}, para retornar a la superficie de fluencia del paso siguiente f_{n+1} se debe calcular el vector $d\gamma[C]_e\{N^*\}$.

De esta manera es posible obtener una expresión para determinar el estado de esfuerzos en el paso de carga siguiente en función del incremento en el multiplicador plástico:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - d\gamma\mathbb{C}_e: \mathbf{N}^* \\ \{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^{trial}\} - d\gamma[C]_e\{N^*\} \\ \{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^{trial}\} - d\gamma[C]_e \frac{\partial f_{n+1}^{trial}}{\partial \sigma_{n+1}^{trial}}\end{gathered} \tag{5-24}$$

Con esta expresión se determina el valor de $d\gamma$ tal que satisfaga la expresión **(5-23)**. Esto se realiza mediante un procedimiento iterativo usando el método numérico de la regla falsa. Este procedimiento se explica en detalle en el numeral **5.5**.

5.5. Implementación

En este numeral se presenta de forma detallada el funcionamiento del modelo constitutivo dentro del programa de elementos finitos HYPLAS. En el numeral **5.3** se describió el funcionamiento del programa HYPLAS dejando indicado el procedimiento como tal del modelo constitutivo, en este numeral se explicará detalladamente.

El modelo constitutivo interviene en dos puntos específicos al interior del procedimiento general del programa de elementos finitos. Primero se encarga de calcular el vector de componentes de esfuerzo para el nuevo paso de carga y actualizar las variables históricas. En segundo lugar, se encarga de calcular la matriz constitutiva tangente, con el cual, el programa de elementos finitos conforma la matriz de rigidez para cada elemento y finalmente de la estructura.

A continuación se explicará cada procedimiento por separado.

5.5.1. Rutina de actualización de esfuerzos y variables históricas.

Esta rutina se encarga de actualizar el vector de componentes de esfuerzo y las variables históricas para el nuevo paso de carga. A continuación el procedimiento de esta rutina:

a) Dado el incremento en la deformación $\Delta\{\varepsilon\}$ y las variables internas de la iteración anterior n, se calculan las variables del estado de prueba así:

$$\begin{gathered}\left\{\varepsilon_e^{trial}\right\}_{n+1} = \{\varepsilon_e\}_n + \Delta\{\varepsilon\} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p} = \bar{\varepsilon}_n^{p} \\ \left\{\sigma_{n+1}^{trial}\right\} = [C]_e\left\{\varepsilon_e^{trial}\right\}_{n+1}\end{gathered} \tag{5-25}$$

b) Con el estado elástico de prueba se verifica si existe plastificación, evaluando la función de fluencia en el estado de prueba:

$$\begin{gathered}f_{n+1}^{trial} = F\left(\left\{\sigma_{n+1}^{trial}\right\}\right) - \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p} + \frac{\sigma_{yc}}{E_c}\right) \\ Si\ f_{n+1}^{trial} \leq 0\ Entonces \\ Iteración\ en\ rango\ elástico \\ (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \\ Salir \\ Si\ no, Iteración\ en\ rango\ plástico\end{gathered} \tag{5-26}$$

Para verificar si es una iteración en rango elástico o plástico se requiere calcular la función de fluencia como se indicó en el **Capítulo 4**. Si se está en elástico, es decir, la

función de fluencia es menor que cero, entonces los valores de prueba son los valores para la iteración siguiente $n+1$, debido a que los valores de prueba son una proyección elástica.

Si se trata de una iteración en rango plástico el procedimiento continúa:

c) Para las iteraciones en rango plástico se realiza el algoritmo de retorno, en el cual se calcula el valor para el incremento del multiplicador plástico $d\gamma$ el cual debe satisfacer la siguiente condición:

$$\tilde{f}_{n+1}\left(\{\tilde{\sigma}\}_{n+1}(d\gamma)\right) = 0 \tag{5-27}$$

donde:

$$\{\tilde{\sigma}\}_{n+1}(\Delta\gamma) = \left\{\sigma_{n+1}^{trial}\right\} - d\gamma[C]_e \frac{\partial f_{n+1}^{trial}}{\partial \sigma_{n+1}^{trial}} \tag{5-28}$$

Donde $\widetilde{(\cdot)}$ son valores calculados para la iteración siguiente $n+1$ pero no convergidos.

Para resolver la ecuación **(5-27)** a se utiliza el método de la falsa posición. Ver ecuación **(5-30)**.

d) Una vez calculado el incremento del multiplicador plástico se actualizan las variables para la iteración siguiente $n+1$.

$$\begin{gathered} \{\sigma_{n+1}\} = \left\{\sigma_{n+1}^{trial}\right\} - d\gamma[C]_e\{N^*\} \\ \{\varepsilon_e\}_{n+1} = [C]_e^{-1}\{\sigma_{n+1}\} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p} = \bar{\varepsilon}_n^{p} + d\gamma \end{gathered} \tag{5-29}$$

e) Salir.

- El método de la falsa posición para calcular el incremento del multiplicador plástico $d\gamma$ consiste en lo siguiente:

Dados $d\gamma_0$ y $d\gamma_1$, valores iniciales para el primer tanteo:

i. Se requiere inicialmente cumplir:

$$\tilde{f}(d\gamma_0)\tilde{f}(d\gamma_1) < 0$$

ii. Luego:

$$d\gamma = \frac{\tilde{f}(d\gamma_1)d\gamma_0 - \tilde{f}(d\gamma_0)d\gamma_1}{\tilde{f}(d\gamma_1) - \tilde{f}(d\gamma_0)}$$

$$si\ \tilde{f}(d\gamma)\tilde{f}(d\gamma_0) < 0 \quad entonces$$

$$d\gamma_1 = d\gamma \quad si\ no \tag{5-30}$$

$$d\gamma_0 = d\gamma$$

iii. Se verifica el valor calculado:

$$si\ \left|\tilde{f}(d\gamma)\right| < tol \quad entonces$$

$$ir\ al\ literal\ \text{d)}$$

$$si\ no, retornar\ a\ \text{ii}$$

En el paso intermedio que se desarrolla para el cálculo del multiplicador plástico $d\gamma$ se desarrolla un ciclo de tanteos anidado en el ciclo de iteraciones de convergencia de equilibrio.

El procedimiento de implementación se resume esquemáticamente en el diagrama de flujo mostrado en la **Figura 5-17**.

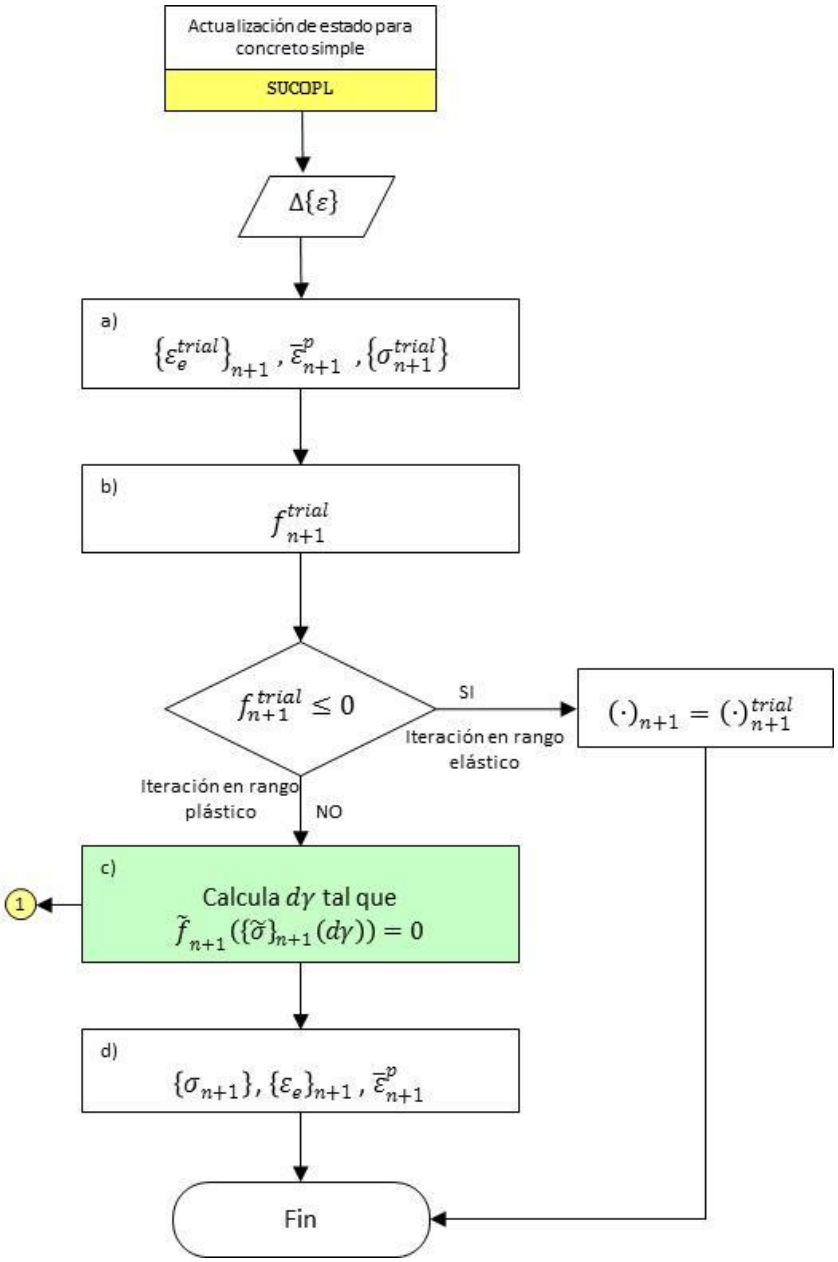


Figura 5-17: Esquema general de la implementación del modelo. Cálculo del esfuerzo, la deformación y deformación plástica equivalente. Rutina SUCOPL.

La subrutina para el cálculo del incremento del multiplicador plástico se muestra en la **Figura 5-18**.

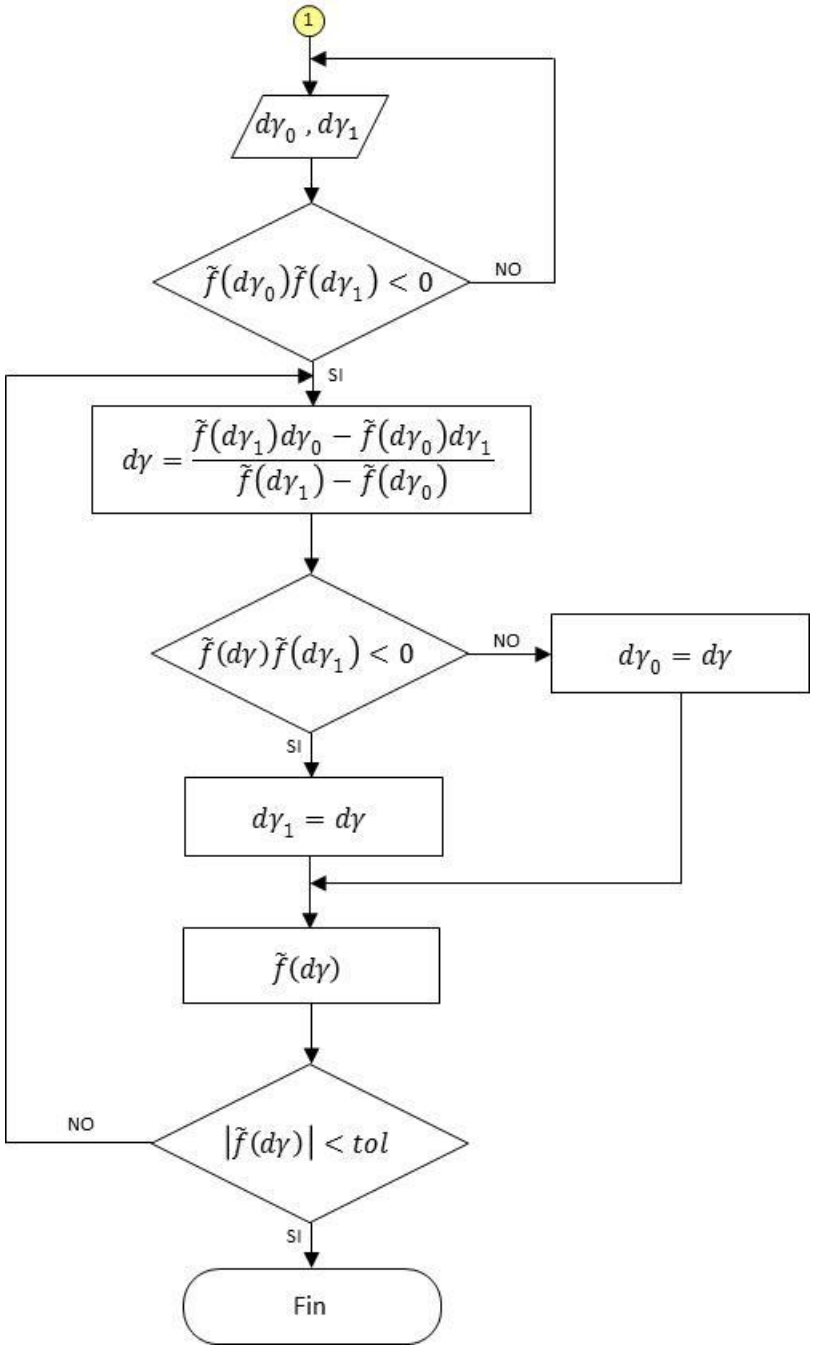


Figura 5-18: Sub rutina para el cálculo del incremento del multiplicados plástico.

En la **Tabla 5-1** se muestra el código en el cual se implementa la rutina resumida en este numeral, para la actualización del esfuerzo y las variables internas.

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
      SUBROUTINE SUCOPL
     1(   DGAMA      ,IPROPS     ,LALGVA     ,NTYPE      ,RPROPS     ,
     2    RSTAVA     ,STRAT      ,STRES      )
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      PARAMETER( IPHARD=4  ,MSTRE=4  ,NSTRE=3 )
      LOGICAL IFPLAS, LALGVA(2), SUFAIL
      DIMENSION
     1    IPROPS(*)           ,RPROPS(*)           ,RSTAVA(MSTRE+1)    ,
     2    STRAT(MSTRE)        ,STRES(MSTRE)
      DIMENSION
     1    EET(MSTRE)          ,STREST(NSTRE)       ,STPRI(NSTRE) ,
    2      AMAT(NSTRE,NSTRE)  ,SIGGO(NSTRE)         ,PRINGO(NSTRE) ,
    3      CE(NSTRE,NSTRE)    ,VN(NSTRE,1)           ,CN(NSTRE,1)
    DIMENSION
     1    FOID(MSTRE,MSTRE)  ,SOID(MSTRE)
      DATA
     1    FOID(1,1),FOID(1,2),FOID(1,3),FOID(1,4)/
     2    1.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    /
     3    FOID(2,1),FOID(2,2),FOID(2,3),FOID(2,4)/
     4    0.0D0    ,1.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    /
     5    FOID(3,1),FOID(3,2),FOID(3,3),FOID(3,4)/
     6    0.0D0    ,0.0D0    ,0.5D0    ,0.0D0    /
     7    FOID(4,1),FOID(4,2),FOID(4,3),FOID(4,4)/
     8    0.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    ,1.0D0    /
      DATA
     1    SOID(1)  ,SOID(2)  ,SOID(3)  ,SOID(4)  /
     2    1.0D0    ,1.0D0    ,0.0D0    ,1.0D0    /
      DATA
     1    R0   ,RP5  ,R1   ,R2   ,R3   ,R4   ,R6   ,TOL   /
     2    0.0D0,0.5D0,1.0D0,2.0D0,3.0D0,4.0D0,6.0D0,1.D-03/
      DATA MXITER / 150 /


C*********************************************************************
C Stop program if not plane stress
      IF(NTYPE.NE.1)CALL ERRPRT('EI0031')
C Initialise some algorithmic and internal variables
    DGAMA=0.0
    DGAMA0=RPROPS(8)
    DGAMA1=RPROPS(9)
      IFPLAS=.FALSE.
      SUFAIL=.FALSE.
C...set previously (equilibrium) converged accumulated plastic strain
      EPBARN=RSTAVA(MSTRE+1)
C Set some material properties
      EC=RPROPS(2)
      POISS=RPROPS(3)
      FPC=RPROPS(4)
      EPSO=RPROPS(5)
      RSIG=RPROPS(6)
      REPS=RPROPS(7)
      NHARD=IPROPS(3)
      YOUNG=EC

C Shear and bulk moduli and other necessary constants
      GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
      BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
      R2G=R2*GMODU
      R4G=R4*GMODU
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
      R1D3=R1/R3
      R1D6=R1/R6
      R2D3=R2*R1D3
      SQR2D3=SQRT(2.0/3.0)
      R4GD3=R4G*R1D3
C Elastic predictor: Compute elastic trial state
C ---------------------------------------------
C Volumetric strain
      FACTOR=R2G/(BULK+R4GD3)
      EEV=(STRAT(1)+STRAT(2))*FACTOR
C Elastic trial deviatoric strain
      EEVD3=EEV/R3
      EET(1)=STRAT(1)-EEVD3
      EET(2)=STRAT(2)-EEVD3
C Convert engineering shear component into physical component
      EET(3)=STRAT(3)*RP5
C Elastic trial stress components
      PT=BULK*EEV
      STREST(1)=R2G*EET(1)+PT
      STREST(2)=R2G*EET(2)+PT
      STREST(3)=R2G*EET(3)

C Calcula el tensor de esfuerzos principales
    CALL TRPRIN(   STREST ,STPRI      )
C STRES--->VECTOR DE ESFUERZOS
C STPRI--->VECTOR DE ESFUERZOS PRNCIPALES
C



C Selector para determinar el estado del tensor de esfuerzos
C usando el tensor de esfuerzos en una base principal.
C 1 : TENSION     -   TENSION
C 2 : TENSION     -   COMPRESION
C 3 : COMPRESION  -   COMPRESION
C
C CALCULA DE LA FUNCION DE FLUENCIA DE PRUEBA (CON SIGMA TRIAL Y SIN DGAMA)
C
    IF(STPRI(1).EQ.0.0)THEN
            S2DS1=0
    ELSE
            S2DS1=STPRI(2)/STPRI(1)
    ENDIF
    IF(STPRI(2).EQ.0.0)THEN
            S1DS2=0
    ELSE
            S1DS2=STPRI(1)/STPRI(2)
    ENDIF
C ESFUERZO UNIAXIAL EQUIVALENTE PARA CUADRANTES C-C Y T-C
C
    CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,STPRI,SIGMAY)
C
C ESFUERZO CORTANTE OCTAEDRICO
    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(STPRI(1)**2.0-STPRI(1)*STPRI(2)+STPRI(2)**2.0)
C ESFUERZO MEDIO
    SIGMM=R1/R3*(STPRI(1)+STPRI(2))
C AA=f´t / f'c = 0.09 (kupfer)
    AA=0.09
    IF(STPRI(2).GT.R0)THEN
C TENSION - TENSION
    ICASO=1
C 1078 FORMAT(/////15X,'TENSION-TENSION')
C      WRITE(*,1078)
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
      C1=1.0-0.4019*(S2DS1)+0.008913*(S2DS1)**2.0
      Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
      Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
      PHI=C1*(Z1+Z2)-SIGMAY
      ELSE
              IF(STPRI(1).GT.R0)THEN
C TENSION - COMPRESION
C 1079 FORMAT(/////15X,'TENSION-COMPRESION')
C      WRITE(*,1079)
                      BB=-0.103
                      IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                              ICASO=2
                              C2=1-0.02886*S2DS1
                              C2=C2-0.006657*(S2DS1)**2
                              C2=C2-0.0002443*(S2DS1)**3
                      ELSE
                              ICASO=3
                              C2=1+6.339*(S1DS2)
                              C2=C2+68.82*(S1DS2)**2
                              C2=C2+183.8*(S1DS2)**3
                      ENDIF
                      Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                      Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                      PHI=C2*(Z1+Z2)-SIGMAY
              ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
      ICASO=4
C 1080 FORMAT(/////15X,'COMPRESION- COMPRESION')
C      WRITE(*,1080)
              C3=1+0.05848*S1DS2-0.05848*(S1DS2)**2.0
              BETA=1.16
              Z1=3.0/SQRT(2.0)*(2.0*BETA-1.0)/BETA*TAOOC
              Z2=3.0*(BETA-1.0)/BETA*SIGMM
              PHI=C3*(Z1+Z2)-SIGMAY
              ENDIF
      ENDIF
C
C Check for plastic admissibility
C -------------------------------
              IF(PHI/SIGMAY.GT.TOL)THEN
C Paso plástico
C ----------------------------------------------------------------
              IFPLAS=.TRUE.
              EPBAR=EPBARN
              B1=R1
              B2=R1
              FMODU=YOUNG/(R3*(R1-POISS))

C INICIA CICLO PARA CALCULAR DGAMA****************************

              DO 10 NRITER=1,MXITER

C **************** SUBRUTINA DE CÁLCULO DE CE:N ***************

C Se requiere el vector de esfuerzos en la base general y en la base principal
c para la primera iteracion DGAMA y CE son cero
              SIGGO(1)=STREST(1)-DGAMA*CN(1,1)
              SIGGO(2)=STREST(2)-DGAMA*CN(2,1)
              SIGGO(3)=STREST(3)-DGAMA*CN(3,1)
              CALL TRPRIN(   SIGGO   ,PRINGO      )

              S1=PRINGO(1)
              S2=PRINGO(2)
              SXX=SIGGO(1)
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
            SYY=SIGGO(2)
            SXY=SIGGO(3)

C Se requiere el tensor elástico CE:
            R4GD3=R4*GMODU/R3
              FACTOR=(BULK-R2G/R3)*(R2G/(BULK+R4GD3))
            DO 26 I=1,NSTRE
                    DO 25 J=I,NSTRE
                      CE(I,J)=R2G*FOID(I,J)+FACTOR*SOID(I)*SOID(J)
   25                     CONTINUE
   26               CONTINUE
C lower triangle
            DO 28 J=1,NSTRE-1
                    DO 27 I=J+1,NSTRE
                           CE(I,J)=CE(J,I)
   27                      CONTINUE
   28               CONTINUE

C CÁLCULO DEL VECTOR N "VN" EN TÉRMINOS DEL TENSOR DE ESFUERZOS EN LA BASE GENERAL
            F1=STPRI(1)**2-STPRI(1)*STPRI(2)+STPRI(2)**2
            VAR1=1-0.4019*S2DS1+0.008913*S2DS1**2
            VAR2=(1+AA)*0.5/SQRT(F1)*(2*S1-S2)+(1-AA)
            VAR3=0.4019*S2/(S1**2)-2*0.008913*S2/S1*S2/(S1**2)
            VAR4=(1+AA)*SQRT(F1)+(1-AA)*(S1+S2)
            VAR5=(1+AA)*0.5/SQRT(F1)*(2*S2-S1)+(1-AA)
            VAR6=-0.4019/(S1)+2*0.008913*S2/S1*(1/S1)
            VAR7=1-0.02886*S2/S1-0.006657*(S2/S1)**2-0.0002443*(S2/S1)**3
            VAR8A=0.02886*S2/(S1**2)+2*0.006657*S2/S1*S2/(S1**2)
            VAR8B=3.0*0.0002443*(S2/S1)**2*S2/(S1**2)
            VAR8=VAR8A+VAR8B
            VAR9A=-0.02886/(S1)-2*0.006657*S2/(S1**2)
            VAR9B=-3.0*0.0002443*S2/(S1**2)
            VAR9=VAR9A+VAR9B
            VAR10=1+6.339*S1/S2+68.83*(S1/S2)**2+183.8*(S1/S2)**3
            VAR11A=6.339/(S2)+2*68.83*S1/(S2**2)
            VAR11B=3.0*183.8*(S1/S2)**2*1/(S2)
            VAR11=VAR11A+VAR11B
            VAR12A=-6.339*S1/(S2**2)-2*68.83*S1/S2*S1/(S2**2)
            VAR12B=-3.0*183.8*(S1/S2)**2*S1/(S2**2)
            VAR12=VAR12A+VAR12B
            VAR13=1+0.05848*S1/S2-0.05848*(S1/S2)**2
            VAR14=(2*BETA-1)*0.5/SQRT(F1)*(2*S1-S2)+(BETA-1)
            VAR15=0.05848*1/S2-2.0*0.05848*S1/(S2**2)
            VAR16=(2*BETA-1)*SQRT(F1)+(BETA-1)*(S1+S2)
            VAR17=(2*BETA-1)*0.5/SQRT(F1)*(2*S2-S1)+(BETA-1)
            VAR18=-0.05848*S1/(S2**2)+2.0*0.05848*S1**2/(S2**3)
            IF(STPRI(2).GE.0.0)THEN
C TENSION - TENSION
                    DFDS1=1/(2*AA)*(VAR1*VAR2+VAR3*VAR4)
                    DFDS2=1/(2*AA)*(VAR1*VAR5+VAR6*VAR4)
            ELSE
                    IF(STPRI(1).GT.0.0)THEN
C TENSION - COMPRESION
                           IF(S1DS2.LT.-0.103) THEN
                                  DFDS1=1/(2*AA)*(VAR7*VAR2+VAR8*VAR4)
                                  DFDS2=1/(2*AA)*(VAR7*VAR5+VAR9*VAR4)
                           ELSE
                                  DFDS1=1/(2*AA)*(VAR10*VAR2+VAR11*VAR4)
                                  DFDS2=1/(2*AA)*(VAR10*VAR5+VAR12*VAR4)
                           ENDIF
                    ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
                           DFDS1=(1/BETA)*(VAR13*VAR14+VAR15*VAR16)
                           DFDS2=(1/BETA)*(VAR13*VAR17+VAR18*VAR16)
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
                    ENDIF
              ENDIF
              LI1=((SXX-SYY)**2+4*SXY**2)**(-0.5)
              LI2=SXX-SYY
              DS1DSXX=0.5+0.5*LI1*LI2
              DS2DSXX=0.5-0.5*LI1*LI2
              DS1DSYY=0.5-0.5*LI1*LI2
              DS2DSYY=0.5+0.5*LI1*LI2
              DS1DSXY=2.0*LI1*SXY
              DS2DSXY=-2.0*LI1*SXY
   C VECTOR N [3X1]
              DFDSXX=DFDS1*DS1DSXX+DFDS2*DS2DSXX
              DFDSYY=DFDS1*DS1DSYY+DFDS2*DS2DSYY
              DFDSXY=DFDS1*DS1DSXY+DFDS2*DS2DSXY
              VN(1,1)=DFDSXX
              VN(2,1)=DFDSYY
              VN(3,1)=DFDSXY
   C NORMALIZA EL VECTOR N EN LA BASE GENERAL
              TAMV=SQRT(DFDSXX**2+DFDSYY**2+DFDSXY**2)
              VN(1,1)=DFDSXX/TAMV
              VN(2,1)=DFDSYY/TAMV
              VN(3,1)=DFDSXY/TAMV
   C SE CALCULA PRODUCTO CE:N EN LA BASE GENERAL
              CALL MV(   CE  ,VN  ,CN   )
   C NORMALIZA EL VECTOR CN
   C          CN1=CN(1,1)
   C          CN2=CN(2,1)
   C          CN3=CN(3,1)
   C          TAMV=SQRT(CN1**2+CN2**2+CN3**2)
   C          CN(1,1)=CN1/TAMV
   C          CN(2,1)=CN2/TAMV
   C          CN(3,1)=CN3/TAMV

   C************************ FINALIZA SUBRUTINA CALCULO DE CE:N *************


   C EVALUACION DE LA FUNCION DE FLUENCIA EN TERMINOS DE DGAMA, SEGUN CADA CASO T-T T-C
O C-C
   C CALCULA DE LA FUNCION DE FLUENCIA GORRO, USANDO ESFUERZOS PRINGO, PRIMERO PARA
DGAMA0 (PHI0) Y LUEGO PARA DGAMA1 (PHI1)


   C PHI GORRO CON DGAMA0
   C_________________________________


       SIGGO(1)=STREST(1)-DGAMA0*CN(1,1)
       SIGGO(2)=STREST(2)-DGAMA0*CN(2,1)
       SIGGO(3)=STREST(3)-DGAMA0*CN(3,1)

   C AHORA SIGMA GORRO SE PASA A PRINCIPALES Y SE OBTIENE (PRINGO)

         CALL TRPRIN(   SIGGO       ,PRINGO      )

   C
       IF(PRINGO(1).EQ.0.0)THEN
              S2DS1=0
       ELSE
              S2DS1=PRINGO(2)/PRINGO(1)
       ENDIF
       IF(PRINGO(2).EQ.0.0)THEN
              S1DS2=0
       ELSE
              S1DS2=PRINGO(1)/PRINGO(2)
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
    ENDIF
C ESFUERZO UNIAXIAL EQUIVALENTE PARA CUADRANTES C-C Y T-C

C EPBAR CON DGAMA0

            A1=(SIGGO(1)+SIGGO(2))*(SIGGO(1)+SIGGO(2))
            A2=(SIGGO(2)-SIGGO(1))*(SIGGO(2)-SIGGO(1))
            A3=SIGGO(3)*SIGGO(3)
           B1=R1+FMODU*DGAMA0
           B2=R1+R2G*DGAMA0
           XI=R1D6*A1/(B1*B1)+(RP5*A2+R2*A3)/(B2*B2)
           SQRTXI=SQRT(XI)

    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(PRINGO(1)**2-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2)
    G=3.0/SQRT(2.0)*TAOOC
    CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY0)
C   EPBAR0=EPBARN+DGAMA0*G/SIGMAY0
C   EPBAR0=EPBARN+DGAMA0*SQR2D3*SQRTXI
    EPBAR0=EPBARN+DGAMA0


C SIGMAY CON DGAMA0
C   SIGMAY=PLFUN(EPBARN,NHARD,RPROPS(IPHARD))
    CALL FUNSY (EPBAR0,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY0)
C
C ESFUERZO CORTANTE OCTAEDRICO
    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    RADI=PRINGO(1)**2.0-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(RADI)
C ESFUERZO MEDIO
    SIGMM=R1/R3*(PRINGO(1)+PRINGO(2))

    IF(PRINGO(2).GT.R0)THEN
C TENSION - TENSION
    ICASO=1
C      WRITE(*,1078)
    C1=1.0-0.4019*(S2DS1)+0.008913*(S2DS1)**2.0
    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
    PHI0=C1*(Z1+Z2)-SIGMAY0
    ELSE
            IF(PRINGO(1).GT.R0)THEN
C TENSION - COMPRESION

C      WRITE(*,1079)
                    BB=-0.103
                    IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                           ICASO=2
                           C2=1-0.02886*S2DS1
                           C2=C2-0.006657*(S2DS1)**2
                           C2=C2-0.0002443*(S2DS1)**3
                    ELSE
                           ICASO=3
                           C2=1+6.339*(S1DS2)
                           C2=C2+68.82*(S1DS2)**2
                           C2=C2+183.8*(S1DS2)**3
                    ENDIF
                    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                    PHI0=C2*(Z1+Z2)-SIGMAY0
            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
    ICASO=4
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
C      WRITE(*,1080)
           C3=1+0.05848*S1DS2-0.05848*(S1DS2)**2.0
           BETA=1.16
           Z1=3.0/SQRT(2.0)*(2.0*BETA-1.0)/BETA*TAOOC
           Z2=3.0*(BETA-1.0)/BETA*SIGMM
           PHI0=C3*(Z1+Z2)-SIGMAY0
           ENDIF
    ENDIF

C PHI GORRO CON DGAMA1
C_____________________________

    SIGGO(1)=STREST(1)-DGAMA1*CN(1,1)
    SIGGO(2)=STREST(2)-DGAMA1*CN(2,1)
    SIGGO(3)=STREST(3)-DGAMA1*CN(3,1)


C AHORA SIGMA GORRO SE PASA A PRINCIPALES Y SE OBTIENE (PRINGO)

      CALL TRPRIN(   SIGGO       ,PRINGO      )

C
    IF(PRINGO(1).EQ.0.0)THEN
           S2DS1=0
    ELSE
           S2DS1=PRINGO(2)/PRINGO(1)
    ENDIF
    IF(PRINGO(2).EQ.0.0)THEN
           S1DS2=0
    ELSE
           S1DS2=PRINGO(1)/PRINGO(2)
    ENDIF

C EPBAR CON DGAMA1

           A1=(SIGGO(1)+SIGGO(2))*(SIGGO(1)+SIGGO(2))
           A2=(SIGGO(2)-SIGGO(1))*(SIGGO(2)-SIGGO(1))
           A3=SIGGO(3)*SIGGO(3)
          B1=R1+FMODU*DGAMA1
          B2=R1+R2G*DGAMA1
          XI=R1D6*A1/(B1*B1)+(RP5*A2+R2*A3)/(B2*B2)
          SQRTXI=SQRT(XI)
           CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY1)
    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(PRINGO(1)**2-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2)
    G=3.0/SQRT(2.0)*TAOOC
    CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY1)
C   EPBAR1=EPBARN+DGAMA1*G/SIGMAY1

C     EPBAR1=EPBARN+DGAMA1*SQR2D3*SQRTXI
    EPBAR1=EPBARN+DGAMA1


C SIGMAY CON DGAMA1
C ESFUERZO UNIAXIAL EQUIVALENTE PARA CUADRANTES C-C Y T-C
C
!   SIGMAY=PLFUN(EPBARN,NHARD,RPROPS(IPHARD))
    CALL FUNSY (EPBAR1,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY1)
C
C ESFUERZO CORTANTE OCTAEDRICO
    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    RADI=PRINGO(1)**2.0-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(RADI)
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
C ESFUERZO MEDIO
    SIGMM=R1/R3*(PRINGO(1)+PRINGO(2))

    IF(PRINGO(2).GT.R0)THEN
C TENSION - TENSION
    ICASO=1

C       WRITE(*,1078)
    C1=1.0-0.4019*(S2DS1)+0.008913*(S2DS1)**2.0
    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
    PHI1=C1*(Z1+Z2)-SIGMAY1
    ELSE
            IF(PRINGO(1).GT.R0)THEN
C TENSION - COMPRESION

C       WRITE(*,1079)
                    BB=-0.103
                    IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                            ICASO=2
                            C2=1-0.02886*S2DS1
                            C2=C2-0.006657*(S2DS1)**2
                            C2=C2-0.0002443*(S2DS1)**3
                    ELSE
                            ICASO=3
                            C2=1+6.339*(S1DS2)
                            C2=C2+68.82*(S1DS2)**2
                            C2=C2+183.8*(S1DS2)**3
                    ENDIF
                    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                    PHI1=C2*(Z1+Z2)-SIGMAY1
            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
    ICASO=4

C       WRITE(*,1080)
            C3=1+0.05848*S1DS2-0.05848*(S1DS2)**2.0
            BETA=1.16
            Z1=3.0/SQRT(2.0)*(2.0*BETA-1.0)/BETA*TAOOC
            Z2=3.0*(BETA-1.0)/BETA*SIGMM
            PHI1=C3*(Z1+Z2)-SIGMAY1
            ENDIF
    ENDIF



C*********************************************************
C  MÉTODO DE LA REGLA FALSA PARA CÁLCULO DE DGAMA

    IF(PHI0*PHI1.LT.0.0)THEN

            DGAMA=(PHI1*DGAMA0-PHI0*DGAMA1)/(PHI1-PHI0)
 1085 FORMAT(34X,'RAIZ DENTRO. DGAMA = ',G15.6)
      WRITE(*,1085) DGAMA

C           PHI GORRO CON DGAMA --> PHI
            SIGGO(1)=STREST(1)-DGAMA*CN(1,1)
            SIGGO(2)=STREST(2)-DGAMA*CN(2,1)
            SIGGO(3)=STREST(3)-DGAMA*CN(3,1)
            CALL TRPRIN(   SIGGO   ,PRINGO      )
            IF(PRINGO(1).EQ.0.0)THEN
                    S2DS1=0
            ELSE
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
                S2DS1=PRINGO(2)/PRINGO(1)
        ENDIF
        IF(PRINGO(2).EQ.0.0)THEN
                S1DS2=0
        ELSE
                S1DS2=PRINGO(1)/PRINGO(2)
        ENDIF
        A1=(SIGGO(1)+SIGGO(2))*(SIGGO(1)+SIGGO(2))
        A2=(SIGGO(2)-SIGGO(1))*(SIGGO(2)-SIGGO(1))
        A3=SIGGO(3)*SIGGO(3)
      B1=R1+FMODU*DGAMA
      B2=R1+R2G*DGAMA
      XI=R1D6*A1/(B1*B1)+(RP5*A2+R2*A3)/(B2*B2)
      SQRTXI=SQRT(XI)

      TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
      TAOOC=TAOOC*SQRT(PRINGO(1)**2-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2)
      G=3.0/SQRT(2.0)*TAOOC
         CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY)
      EPBAR=EPBARN+DGAMA
        CALL FUNSY (EPBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY)
      TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
      RADI=PRINGO(1)**2.0-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2.0
      TAOOC=TAOOC*SQRT(RADI)
      SIGMM=R1/R3*(PRINGO(1)+PRINGO(2))
        IF(PRINGO(2).GT.R0)THEN
                ICASO=1
                C1=1.0-0.4019*(S2DS1)+0.008913*(S2DS1)**2.0
                Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                PHI=C1*(Z1+Z2)-SIGMAY
        ELSE
                IF(PRINGO(1).GT.R0)THEN
                        BB=-0.103
                        IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                                ICASO=2
                                C2=1-0.02886*S2DS1
                                C2=C2-0.006657*(S2DS1)**2
                                C2=C2-0.0002443*(S2DS1)**3
                        ELSE
                                ICASO=3
                                C2=1+6.339*(S1DS2)
                                C2=C2+68.82*(S1DS2)**2
                                C2=C2+183.8*(S1DS2)**3
                        ENDIF
                        Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                        Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                        PHI=C2*(Z1+Z2)-SIGMAY
                ELSE
                        ICASO=4
                        C3=1+0.05848*S1DS2-0.05848*(S1DS2)**2.0
                        BETA=1.16
                        Z1=3.0/SQRT(2.0)*(2.0*BETA-1.0)/BETA*TAOOC
                        Z2=3.0*(BETA-1.0)/BETA*SIGMM
                        PHI=C3*(Z1+Z2)-SIGMAY
                ENDIF
        ENDIF


        IF(PHI*PHI0.LT.0.0)THEN
                DGAMA1=DGAMA
        ELSE
                DGAMA0=DGAMA
        ENDIF
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
    ELSE
 1084 FORMAT(34X,'RAIZ FUERA. DGAMA = ',G15.6)

C   SE AMPLÍA EL INTERVALO, PERO NO PUEDE EXISTIR DGAMA NEGATIVO
            DGAMA1=DGAMA1+0.1*DGAMA1
            DGAMA=(DGAMA0+DGAMA1)/2.0
    WRITE(*,1084) DGAMA
    END IF



C FIN DE MÉTODO DE REGLA FALSA
C*************************************************************


C 1084 FORMAT(34X,'DGAMA = ',G15.6)
C      WRITE(*,1084) DGAMA


C EPBAR CON DGAMA


C PHI GORRO CON DGAMA Y EVALUADA EN PRINGO
C_______________________________


    SIGGO(1)=STREST(1)-DGAMA*CN(1,1)
    SIGGO(2)=STREST(2)-DGAMA*CN(2,1)
    SIGGO(3)=STREST(3)-DGAMA*CN(3,1)



            A1=(SIGGO(1)+SIGGO(2))*(SIGGO(1)+SIGGO(2))
            A2=(SIGGO(2)-SIGGO(1))*(SIGGO(2)-SIGGO(1))
            A3=SIGGO(3)*SIGGO(3)
           B1=R1+FMODU*DGAMA
           B2=R1+R2G*DGAMA
           XI=R1D6*A1/(B1*B1)+(RP5*A2+R2*A3)/(B2*B2)
           SQRTXI=SQRT(XI)
            CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY)

    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(PRINGO(1)**2-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2)
    G=3.0/SQRT(2.0)*TAOOC
    CALL FUNSY (EPBARN,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY)
    EPBAR=EPBARN+DGAMA

C ACTUALIZAR FUNCIÓN DE FLUENCIA PARA NUEVO VALOR DE DGAMA


C AHORA SIGMA GORRO SE PASA A PRINCIPALES Y SE OBTIENE (PRINGO)

      CALL TRPRIN(   SIGGO       ,PRINGO      )
C
    IF(PRINGO(1).EQ.0.0)THEN
            S2DS1=0
    ELSE
            S2DS1=PRINGO(2)/PRINGO(1)
    ENDIF
    IF(PRINGO(2).EQ.0.0)THEN
            S1DS2=0
    ELSE
            S1DS2=PRINGO(1)/PRINGO(2)
    ENDIF
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
C ESFUERZO UNIAXIAL EQUIVALENTE PARA CUADRANTES C-C Y T-C
C

    CALL FUNSY (EPBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,PRINGO,SIGMAY)

C ESFUERZO CORTANTE OCTAEDRICO
    TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
            RADI=PRINGO(1)**2.0-PRINGO(1)*PRINGO(2)+PRINGO(2)**2.0
    TAOOC=TAOOC*SQRT(RADI)
C ESFUERZO MEDIO
    SIGMM=R1/R3*(PRINGO(1)+PRINGO(2))

    IF(PRINGO(2).GT.R0)THEN
C TENSION - TENSION
    ICASO=1
    C1=1.0-0.4019*(S2DS1)+0.008913*(S2DS1)**2.0
    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
    PHI=C1*(Z1+Z2)-SIGMAY
    ELSE
            IF(PRINGO(1).GT.R0)THEN
C TENSION - COMPRESION

C       WRITE(*,1079)
                    BB=-0.103
                    IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                            ICASO=2
                            C2=1-0.02886*S2DS1
                            C2=C2-0.006657*(S2DS1)**2
                            C2=C2-0.0002443*(S2DS1)**3
                    ELSE
                            ICASO=3
                            C2=1+6.339*(S1DS2)
                            C2=C2+68.82*(S1DS2)**2
                            C2=C2+183.8*(S1DS2)**3
                    ENDIF
                    Z1=3.0/(2.0*SQRT(2.0))*(1.0+AA)/AA*TAOOC
                    Z2=3.0/2.0*(1.0-AA)/AA*SIGMM
                    PHI=C2*(Z1+Z2)-SIGMAY
            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
    ICASO=4

C       WRITE(*,1080)
            C3=1+0.05848*S1DS2-0.05848*(S1DS2)**2.0
            BETA=1.16
            Z1=3.0/SQRT(2.0)*(2.0*BETA-1.0)/BETA*TAOOC
            Z2=3.0*(BETA-1.0)/BETA*SIGMM
            PHI=C3*(Z1+Z2)-SIGMAY
            ENDIF
    ENDIF

C Check for convergence
                    RESNOR=ABS(PHI/SIGMAY)
                            IF(RESNOR.LE.TOL)THEN

C 1081 FORMAT(/////15X,'****CONVERGE DEGAMA****')
C       WRITE(*,1081)



 1077 FORMAT(34X,'sigma y = ',G15.6)
      WRITE(*,1077) SIGMAY
```

Tabla 5-1: Rutina SUCOPL

```
C update accumulated plastic strain
                          RSTAVA(MSTRE+1)=EPBAR

                          STRES(1)=STREST(1)-DGAMA*CN(1,1)
                          STRES(2)=STREST(2)-DGAMA*CN(2,1)
                          STRES(3)=STREST(3)-DGAMA*CN(3,1)

C compute corresponding elastic (engineering) strain components
                          FACTG=R1/R2G
                          P=R1D3*(STRES(1)+STRES(2))
                          EEV=P/BULK
                          EEVD3=R1D3*EEV
                          RSTAVA(1)=FACTG*(R2D3*STRES(1)-R1D3*STRES(2))+EEVD3
                          RSTAVA(2)=FACTG*(R2D3*STRES(2)-R1D3*STRES(1))+EEVD3
                          RSTAVA(3)=FACTG*STRES(3)*R2
                          RSTAVA(4)=-POISS/(R1-POISS)*(RSTAVA(1)+RSTAVA(2))
                          GOTO 999
                          ENDIF
   10             CONTINUE

C FINALIZA CICLO PARA CALCULAR DGAMA*************************


C reset failure flag and print warning message if N-R algorithm fails
           SUFAIL=.TRUE.
           CALL ERRPRT('WE0013')
           ELSE
C Elastic step: Update stress using linear elastic law
C 1077 FORMAT(/////15X,'PASO ELASTICO')
C      WRITE(*,1077)

C ----------------------------------------------------
                  STRES(1)=STREST(1)
                  STRES(2)=STREST(2)
                  STRES(3)=STREST(3)

C elastic engineering strain
                  RSTAVA(1)=STRAT(1)
                  RSTAVA(2)=STRAT(2)
                  RSTAVA(3)=STRAT(3)
                  RSTAVA(4)=-POISS/(R1-POISS)*(STRAT(1)+STRAT(2))
           ENDIF
  999             CONTINUE
C Update some algorithmic variables before exit
      LALGVA(1)=IFPLAS
      LALGVA(2)=SUFAIL
C1073  FORMAT(/////15X,'SALIENDO DE SUCOPL')
C      WRITE(*,1073)
    RETURN
    END
```

Ahora se muestran las subrutinas usadas en la rutina SUCOPL. En la **Tabla 5-2**, se muestra la rutina para el cálculo de los esfuerzos principales (Linero, PEFiCA 2007). En la **Tabla 5-3** se muestra el cálculo del esfuerzo uniaxial equivalente.

Tabla 5-2: Rutina TRPRIN para cálculo de esfuerzos principales

```
SUBROUTINE TRPRIN
     1(   ESFUE    ,STPRI      )
C Definir variables
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

Tabla 5-2: Rutina TRPRIN para cálculo de esfuerzos principales

```
      DIMENSION
     1    STPRI(3), ESFUE (3)
C Calcula esfuerzos principales
    S1=ESFUE(1)+ESFUE(2)
    S2=(ESFUE(1)-ESFUE(2))*(ESFUE(1)-ESFUE(2))
    S3=4.0*ESFUE(3)*ESFUE(3)
    STPRI(1)=0.5*(S1+SQRT(S2+S3))
    STPRI(2)=0.5*(S1-SQRT(S2+S3))
    STPRI(3)=0.0
C Ordena los esfuerzos principales de mayor a menor
    IF (STPRI(2).GT.STPRI(1))THEN
            TEMPO=STPRI(1)
            STPRI(1)=STPRI(2)
            STPRI(2)=TEMPO
            STPRI(3)=0.0
    ENDIF
    END
```

Tabla 5-3: Rutina FUNSY para cálculo de esfuerzo uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$

```
    SUBROUTINE FUNSY (EBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,SIGMA,SIGMAY)
C Definir variables
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    SIGMA (4)
    IF(SIGMA(1).EQ.0.0)THEN
            S2DS1=0
    ELSE
            S2DS1=SIGMA(2)/SIGMA(1)
    ENDIF
    IF(SIGMA(2).EQ.0.0)THEN
            S1DS2=0
    ELSE
            S1DS2=SIGMA(1)/SIGMA(2)
    ENDIF
    F1=FPC/(EC*EPSO)
    F2=1.0-F1

    IF(SIGMA(2).GT.0.0)THEN
C TENSION - TENSION
    SIGMAY=FPC
    ICASO=1
    ELSE
    ICASO=2
            IF(SIGMA(1).GT.0.0)THEN
C TENSION - COMPRESION
                    BB=-0.103
                    IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                            F3=0.001231*S2DS1+0.001469*S2DS1**2+0.0000134*S2DS1**3
                    ELSE
                            F3=1.0+13.96*S1DS2+59.21*S1DS2**2+69.24*S1DS2**3
                    ENDIF

            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
                            F3=1.0+1.782*S1DS2+0.5936*S1DS2**2
            ENDIF
    ENDIF
    Q=F1+F2*F3
    EPSAS=Q*EPSO
    EO=FPC/EPSAS
```

Tabla 5-3: Rutina FUNSY para cálculo de esfuerzo uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$

```
      RE=EC/EO
      R=RE*(RSIG-1.0)/((REPS-1.0)**2)-1.0/REPS

      EPSIP=FPC/EC
      DIS=EPSAS-EPSIP

      IF(EBAR.LE.0.0)THEN
              EPSILON=EPSIP
      ELSE
              EPSILON=EBAR+EPSIP
      ENDIF

      FAC1=EC*(EPSILON)
      FAC2=1.0+(R+RE-2.0)*((EPSILON)/EPSAS)
      FAC3=(2.0*R-1.0)*((EPSILON)/EPSAS)**2
      FAC3=FAC3-R*((EPSILON)/EPSAS)**3
              IF(ICASO.EQ.2)THEN
                      SIGMAY=FAC1/(FAC2-FAC3)
              ENDIF

   1078 FORMAT(34X,'epsilon = ',G15.6)
        WRITE(*,1078) EPSILON
      END
```

5.5.2. Rutina para el cálculo de tensor constitutivo tangente.

El procedimiento de cálculo para el tensor constitutivo tangente o tensor constitutivo elasto–plástico $\mathbf{C}_{ep}$, tal como se muestra en el **Capítulo 4,** se mantiene sin alteraciones y es implementado en la rutina CTCOPL.
En forma matricial, se puede escribir el tensor constitutivo elasto–plástico así:

$$[C]_{ep} = \left([C]_e - [C]_p\right) \tag{5-31}$$

Donde $[C]_e$ es la matriz constitutiva elástica y $[C]_p$ es la matriz constitutiva plástica dada por:

$$[C]_p = \frac{[C]_e \dfrac{\partial G}{\partial\{\sigma\}^T} \dfrac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} [C]_e}{H\dfrac{G}{\bar{\sigma}} + \dfrac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} [C]_e \dfrac{\partial G}{\partial\{\sigma\}^T}} \tag{5-32}$$

Esta rutina se muestra en la **Tabla 5-4**. Al interior de esta rutina se calcula adicionalmente el tensor constitutivo tangente para iteraciones elásticas.

Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente

```
   SUBROUTINE CTCOPL
       1(   DGAMA      ,DMATX      ,EPFLAG     ,IPROPS     ,NTYPE      ,
       2    RPROPS     ,RSTAVA     ,STRES      )
        IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
        PARAMETER(IPHARD=4  ,MSTRE=4   ,NSTRE=3)
        LOGICAL EPFLAG
```

Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente

```
C Array arguments
      DIMENSION
     1    DMATX(MSTRE,MSTRE),IPROPS(*)           ,RPROPS(*)          ,
     2    RSTAVA(MSTRE+1)   ,STRES(MSTRE)
C Local arrays
      DIMENSION
     1    FOID(MSTRE,MSTRE)  ,SOID(MSTRE)        ,VECN(3)
    DIMENSION
     1    DG(NSTRE,1)  ,DF(1,NSTRE)  , CE(NSTRE,NSTRE)                ,
    2      CP(NSTRE,NSTRE) , STPRI(NSTRE)
    DIMENSION
     1    Z1(NSTRE,1)  ,Z2(NSTRE,NSTRE)  , Z3(NSTRE,NSTRE)            ,
    2      Z4(1,NSTRE)  ,Z5(1,1)
      DATA
     1    FOID(1,1),FOID(1,2),FOID(1,3),FOID(1,4)/
     2    1.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    /
     3    FOID(2,1),FOID(2,2),FOID(2,3),FOID(2,4)/
     4    0.0D0    ,1.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    /
     5    FOID(3,1),FOID(3,2),FOID(3,3),FOID(3,4)/
     6    0.0D0    ,0.0D0    ,0.5D0    ,0.0D0    /
     7    FOID(4,1),FOID(4,2),FOID(4,3),FOID(4,4)/
     8    0.0D0    ,0.0D0    ,0.0D0    ,1.0D0    /
      DATA
     1    SOID(1)  ,SOID(2)  ,SOID(3)  ,SOID(4)  /
     2    1.0D0    ,1.0D0    ,0.0D0    ,1.0D0    /
      DATA
     1    RP5  ,R1   ,R2   ,R3   ,R4   /
     2    0.5D0,1.0D0,2.0D0,3.0D0,4.0D0/

C1071  FORMAT(/////15X,'ENTRANDO A CTCOPL')
C      WRITE(*,1071)

C*********************************************************************
C Stops program if neither not plane stress
      IF(NTYPE.NE.1)CALL ERRPRT('EI0032')
C Current accumulated plastic strain
      EPBAR=RSTAVA(MSTRE+1)
C Set material properties
      EC=RPROPS(2)
      POISS=RPROPS(3)
    FPC=RPROPS(4)
    EPSO=RPROPS(5)
    RSIG=RPROPS(6)
    REPS=RPROPS(7)

    NHARD=IPROPS(3)

    CALL TRPRIN(   STRES  ,STPRI      )
    CALL FUNSY (EPBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,STPRI,SIGMAY)
    CALL ETAN (EPBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,STPRI,ET)
    YOUNG=EC
C Shear and bulk moduli
      GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
      BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
      R2G=R2*GMODU
      R1D3=R1/R3
      R2D3=R2*R1D3

      IF(EPFLAG)THEN
C CALCULA TENSOR CONSTITUTIVO TANGENTE
C ==========================================================
C Se requiere el tensor elastico:
        R4GD3=R4*GMODU/R3
        FACTOR=(BULK-R2G/R3)*(R2G/(BULK+R4GD3))
```

Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente

```
          DO 20 I=1,NSTRE
            DO 10 J=I,NSTRE
              CE(I,J)=R2G*FOID(I,J)+FACTOR*SOID(I)*SOID(J)
   10       CONTINUE
   20     CONTINUE
C lower triangle
          DO 40 J=1,NSTRE-1
            DO 30 I=J+1,NSTRE
              CE(I,J)=CE(J,I)
   30       CONTINUE
   40     CONTINUE
C

C STRES--->VECTOR DE ESFUERZOS
C STPRI--->VECTOR DE ESFUERZOS PRINCIPALES

      F1=STPRI(1)**2-STPRI(1)*STPRI(2)+STPRI(2)**2
      DGDS1=(1.0/2.0)/(F1**(0.5))*(2*STPRI(1)-STPRI(2))
      DGDS2=(1.0/2.0)/(F1**(0.5))*(2*STPRI(2)-STPRI(1))
C
C Selector para determinar el estado del tensor de esfuerzos
C usando el tensor de esfuerzos en una base principal.
C 1 : TENSION     -   TENSION
C 2 : TENSION     -   COMPRESION
C 3 : COMPRESION  -   COMPRESION
C
C CALCULO DE LAS FUNCIONES DE FLUENCIA DEPENDIENDO DEL ESTADO DE ESFUERZOS
C
      IF(STPRI(1).EQ.0.0)THEN
              S2DS1=0
      ELSE
              S2DS1=STPRI(2)/STPRI(1)
      ENDIF
      IF(STPRI(2).EQ.0.0)THEN
              S1DS2=0
      ELSE
              S1DS2=STPRI(1)/STPRI(2)
      ENDIF
C
C ESFUERZO CORTANTE OCTAÉDRICO
      TAOOC=SQRT(2.0)/3.0
      TAOOC=TAOOC*SQRT(STPRI(1)**2.0-STPRI(1)*STPRI(2)+STPRI(2)**2.0)
C ESFUERZO MEDIO
      SIGMM=R1/R3*(STPRI(1)+STPRI(2))
      AA=0.09
      BETA=1.16
      S1=STPRI(1)
      S2=STPRI(2)
C
      VAR1=1-0.4019*S2DS1+0.008913*S2DS1**2
      VAR2=(1+AA)*0.5/SQRT(F1)*(2*S1-S2)+(1-AA)
      VAR3=0.4019*S2/(S1**2)-2*0.008913*S2/S1*S2/(S1**2)
      VAR4=(1+AA)*SQRT(F1)+(1-AA)*(S1+S2)
      VAR5=(1+AA)*0.5/SQRT(F1)*(2*S2-S1)+(1-AA)
      VAR6=-0.4019/(S1)+2*0.008913*S2/S1*(1/S1)
      VAR7=1-0.02886*S2/S1-0.006657*(S2/S1)**2-0.0002443*(S2/S1)**3
      VAR8A=0.02886*S2/(S1**2)+2*0.006657*S2/S1*S2/(S1**2)
      VAR8B=3.0*0.0002443*(S2/S1)**2*S2/(S1**2)
      VAR8=VAR8A+VAR8B
      VAR9A=-0.02886/(S1)-2*0.006657*S2/(S1**2)
      VAR9B=-3.0*0.0002443*S2/(S1**2)
      VAR9=VAR9A+VAR9B
      VAR10=1+6.339*S1/S2+68.83*(S1/S2)**2+183.8*(S1/S2)**3
      VAR11A=6.339/(S2)+2*68.83*S1/(S2**2)
```

Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente

```
      VAR11B=3.0*183.8*(S1/S2)**2*1/(S2)
      VAR11=VAR11A+VAR11B
      VAR12A=-6.339*S1/(S2**2)-2*68.83*S1/S2*S1/(S2**2)
      VAR12B=-3.0*183.8*(S1/S2)**2*S1/(S2**2)
      VAR12=VAR12A+VAR12B
      VAR13=1+0.05848*S1/S2-0.05848*(S1/S2)**2
      VAR14=(2*BETA-1)*0.5/SQRT(F1)*(2*S1-S2)+(BETA-1)
      VAR15=0.05848*1/S2-2.0*0.05848*S1/(S2**2)
      VAR16=(2*BETA-1)*SQRT(F1)+(BETA-1)*(S1+S2)
      VAR17=(2*BETA-1)*0.5/SQRT(F1)*(2*S2-S1)+(BETA-1)
      VAR18=-0.05848*S1/(S2**2)+2.0*0.05848*S1**2/(S2**3)
C
      IF(STPRI(2).GE.0.0)THEN
C TENSION - TENSION
C

      DFDS1=1/(2*AA)*(VAR1*VAR2+VAR3*VAR4)
      DFDS2=1/(2*AA)*(VAR1*VAR5+VAR6*VAR4)
C
      ELSE
C
            IF(STPRI(1).GT.0.0)THEN
C TENSION - COMPRESION
                  IF(S1DS2.LT.-0.103) THEN
C
                        DFDS1=1/(2*AA)*(VAR7*VAR2+VAR8*VAR4)
                        DFDS2=1/(2*AA)*(VAR7*VAR5+VAR9*VAR4)
                  ELSE
                        DFDS1=1/(2*AA)*(VAR10*VAR2+VAR11*VAR4)
                        DFDS2=1/(2*AA)*(VAR10*VAR5+VAR12*VAR4)
                  ENDIF
            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION

                  DFDS1=(1/BETA)*(VAR13*VAR14+VAR15*VAR16)
                  DFDS2=(1/BETA)*(VAR13*VAR17+VAR18*VAR16)
            ENDIF
      ENDIF

      DG(1,1)=DGDS1
      DG(2,1)=DGDS2
      DG(3,1)=0.0

      DF(1,1)=DFDS1
      DF(1,2)=DFDS2
      DF(1,3)=0.0

      G=3.0*TAOOC/SQRT(2.0)
      GDSY=G/SIGMAY

      CALL MV(CE,DG,Z1)
      CALL VV1(Z1,DF,Z2)
      CALL MM(Z2,CE,Z3)
      CALL VM(DF,CE,Z4)
      CALL VV2(Z4,DG,Z5)

C VARIABLE DE ENDURECIMIENTO / ABLANDAMIENTO
      HSLOPE=EC*ET/(EC-ET)
      Z6=HSLOPE*GDSY+Z5(1,1)
C CÁLCULO DE TENSOR CONSTITUTIVO PLÁSTICO
      CP(1,1)=Z3(1,1)/Z6
      CP(1,2)=Z3(1,2)/Z6
      CP(1,3)=Z3(1,3)/Z6
      CP(2,1)=Z3(2,1)/Z6
```

Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente

```
      CP(2,2)=Z3(2,2)/Z6
      CP(2,3)=Z3(2,3)/Z6
      CP(3,1)=Z3(3,1)/Z6
      CP(3,2)=Z3(3,2)/Z6
      CP(3,3)=Z3(3,3)/Z6
C CÁLCULO DE TENSOR CONSTITUTIVO TANGENTE
        DMATX(1,1)=CE(1,1)-CP(1,1)
        DMATX(1,2)=CE(1,2)-CP(1,2)
        DMATX(1,3)=CE(1,3)-CP(1,3)
        DMATX(2,1)=CE(2,1)-CP(2,1)
        DMATX(2,2)=CE(2,2)-CP(2,2)
        DMATX(2,3)=CE(2,3)-CP(2,3)
        DMATX(3,1)=CE(3,1)-CP(3,1)
        DMATX(3,2)=CE(3,2)-CP(3,2)
        DMATX(3,3)=CE(3,3)-CP(3,3)

        ELSE
C Compute plane stress elasticity matrix
C ==========================================================
          R4GD3=R4*GMODU/R3
          FACTOR=(BULK-R2G/R3)*(R2G/(BULK+R4GD3))
          DO 60 I=1,NSTRE
            DO 50 J=I,NSTRE
              DMATX(I,J)=R2G*FOID(I,J)+FACTOR*SOID(I)*SOID(J)
   50       CONTINUE
   60     CONTINUE
C lower triangle
          DO 80 J=1,NSTRE-1
            DO 70 I=J+1,NSTRE
              DMATX(I,J)=DMATX(J,I)
   70       CONTINUE
   80     CONTINUE
        ENDIF
C1075 FORMAT(/////15X,'HSLOPE',G15.6)
C       WRITE(*,1075)CE(1,1)
C     WRITE(*,1075)CP(1,1)
C     WRITE(*,1075)DMATX(1,1)
C     WRITE(*,1075)HSLOPE
        RETURN
        END
```

Dentro de la rutina CTCOPL se invocan otras subrutinas para operar matrices y vectores y para el cálculo del módulo tangente uniaxial equivalente.

Tabla 5-5: Rutina ETAN para cálculo de módulo tangente uniaxila equivalente.

```
C CALCULO DEL MÓDULO TANGENTE UNIAXIAL EQUIVALENTE (ET)

      SUBROUTINE ETAN (EBAR,FPC,EC,EPSO,RSIG,REPS,SIGMA,ET)
C Definir variables
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
        DIMENSION
       1    SIGMA (4)
      IF(SIGMA(1).EQ.0.0)THEN
             S2DS1=0
      ELSE
             S2DS1=SIGMA(2)/SIGMA(1)
      ENDIF

      IF(SIGMA(2).EQ.0.0)THEN
```

Tabla 5-5: Rutina ETAN para cálculo de módulo tangente uniaxila equivalente.

```
            S1DS2=0
      ELSE
            S1DS2=SIGMA(1)/SIGMA(2)
      ENDIF
      F1=FPC/(EC*EPSO)
      F2=1.0-F1

      IF(SIGMA(2).GT.0.0)THEN
C TENSION - TENSION
      HSLOPE=1.0E-6
      ELSE
            IF(SIGMA(1).GT.0.0)THEN
C TENSION - COMPRESION
                  BB=-0.103
                  IF(S1DS2.LT.BB) THEN
                        F3=0.001231*S2DS1+0.001469*S2DS1**2+0.0000134*S2DS1**3
                  ELSE
                        F3=1.0+13.96*S1DS2+59.21*S1DS2**2+69.24*S1DS2**3
                  ENDIF
            ELSE
C COMPRESION - COMPRESION
                        F3=1.0+1.782*S1DS2+0.5936*S1DS2**2
            ENDIF
      ENDIF

      Q=F1+F2*F3
      Q=1.0
      EPSAS=Q*EPSO
      EO=FPC/EPSAS
      RE=EC/EO
      R=RE*(RSIG-1.0)/((REPS-1.0)**2)-1.0/REPS

      EPSIP=FPC/EC
      EPSILON=EBAR+EPSIP

      W1=1.0+(2.0*R-1.0)*(EPSILON/EPSAS)**2
      W2=2.0*R*(EPSILON/EPSAS)**3
      FAC1=EC*(W1-W2)
      FAC2=1.0+(R+RE-2.0)*EPSILON/EPSAS
      FAC3=(2.0*R-1.0)*(EPSILON/EPSAS)**2-R*(EPSILON/EPSAS)**3
      ET=FAC1/((FAC2-FAC3)**2)

C 1083 FORMAT(34X,'EPS = ',G15.6)
C       WRITE(*,1083) EPSILON
      END
```

Tabla 5-6: Rutinas para operar matrices y vectores

```
C CALCULA LA MULTIPLICACION DE DOS MATRICES 3X3
C
C    C = A x B
C
      SUBROUTINE MM
       1(   A,      B      ,      C        )
C Definir variables
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
        DIMENSION
       1    A(3,3),B(3,3),C(3,3)
      DO 110 I=1,3
            DO 100 J=1,3
                  SUMA=0.0
```

Tabla 5-6: Rutinas para operar matrices y vectores

```
                    DO 90 H=1,3
                            SUMA=SUMA+A(I,H)*B(H,J)
   90                       CONTINUE
                    C(I,J)=SUMA
  100               CONTINUE
  110       CONTINUE
    RETURN
    END


C CALCULA LA MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ 3X3 Y UN VECTOR 3X1
C
C    C = A x B
C
    SUBROUTINE MV
     1(   A,      B      ,      C         )
C Definir variables
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    A(3,3),B(3,1),C(3,1)
    DO 110 I=1,3
            DO 100 J=1,1
                    SUMA=0.0
                    DO 90 H=1,3
                            SUMA=SUMA+A(I,H)*B(H,J)
   90                       CONTINUE
                    C(I,J)=SUMA
  100               CONTINUE
  110       CONTINUE
    RETURN
    END
C
C CALCULA LA MULTIPLICACION UN VECTOR 3X1 CON UN VECTOR 1X3
C
C    C = A x B
C
    SUBROUTINE VV1
     1(   A,      B      ,      C         )
C Definir variables
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    A(3,1),B(1,3),C(3,3)
    DO 110 I=1,3
            DO 100 J=1,3
                    SUMA=0.0
                    DO 90 H=1,1
                            SUMA=SUMA+A(I,H)*B(H,J)
   90                       CONTINUE
                    C(I,J)=SUMA
  100               CONTINUE
  110       CONTINUE
    RETURN
    END
C
C CALCULA LA MULTIPLICACION UN VECTOR 1X3 CON UN VECTOR DE 3X1
C
C    C = A x B
C
    SUBROUTINE VV2
     1(   A,      B      ,      C        )
C Definir variables
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    A(1,3),B(3,1),C(1,1)
```

Tabla 5-6: Rutinas para operar matrices y vectores

```
      DO 110 I=1,1
             DO 100 J=1,1
                    SUMA=0.0
                    DO 90 H=1,3
                           SUMA=SUMA+A(I,H)*B(H,J)
    90                     CONTINUE
                    C(I,J)=SUMA
   100              CONTINUE
   110       CONTINUE
      RETURN
      END



C
C CALCULA LA MULTIPLICACION UN VECTOR 1X3 CON UNA MATRIZ DE 3X3
C
C    C = A x B
C
      SUBROUTINE VM
       1(   A,       B       ,       C          )
C Definir variables
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
        DIMENSION
       1    A(1,3),B(3,3),C(1,3)
      DO 110 I=1,1
             DO 100 J=1,3
                    SUMA=0.0
                    DO 90 H=1,3
                           SUMA=SUMA+A(I,H)*B(H,J)
    90                     CONTINUE
                    C(I,J)=SUMA
   100              CONTINUE
   110       CONTINUE
      RETURN
      END
```

Capítulo 6
Validación del modelo constitutivo

Este capítulo presenta los resultados de la modelación del concreto simple, usando el modelo constitutivo seleccionado, en varios estados de esfuerzos en el plano.

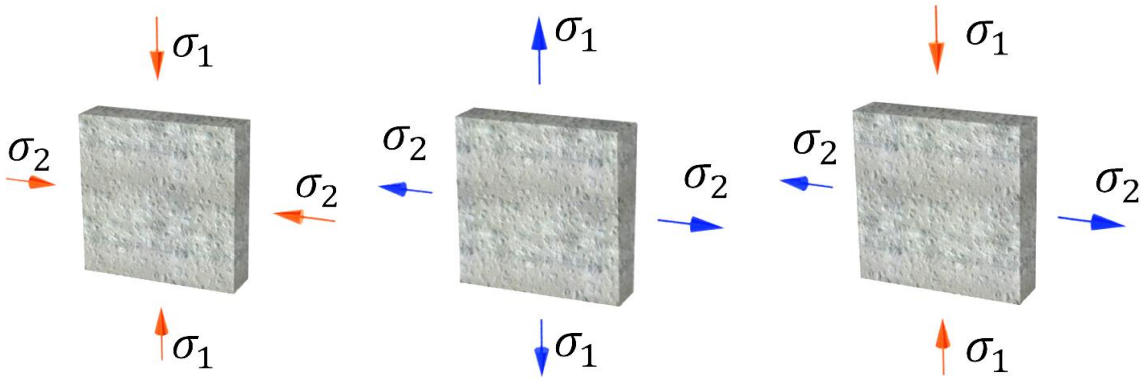
Los resultados obtenidos son posteriormente comparados con datos de ensayos realizados por Helmut Kupfer, Hubert Hilsdorf y Hubert Rusch. (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969). En 1968, estos tres investigadores realizaron ensayos de laboratorio para documentar el comportamiento del concreto simple en distintos estados de esfuerzo plano. Los ensayos consistieron en someter probetas a distintos combinaciones de esfuerzos en el plano y medir las deformaciones resultantes.

Además de almacenar la historia de carga representada en la curva de esfuerzo y deformación en cada una de las dos direcciones principales en el plano, documentaron el tipo de falla para cada uno de los estados de carga.

Finalmente se realiza un ejemplo de aplicación en el cual se analiza una viga en voladizo con una carga puntual en el extremo.

6.1. Ensayos de laboratorio

Un ingenioso sistema de bombas, gatos hidráulicos y palancas se usó para someter las probetas a distintos estados de esfuerzo. En la **Figura 4-4** se muestran los diferentes estados de esfuerzo sobre las probetas, donde se hizo variar la relación entre los esfuerzos σ_1 y σ_2. (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969).



(a) Compresión – compresión. (b) Tensión – tensión. (c) Compresión – Tensión.

Figura 6-1: Probetas sometidas a diferentes estados de esfuerzo plano

El montaje para ensayar cada una de las probetas consistió en un marco rígido sobre el cual se anclaron dos gatos hidráulicos orientados ortogonalmente. Estos gatos identificados en la **Figura 6-2** como gato 4 y 5, son los que directamente aplican la carga sobre la probeta mediante unos cepillos de acero conformados por muchos filamentos que distribuyen uniformemente la carga en la probeta de concreto. Para el caso de trasmitir los esfuerzos de tensión, el cepillo se adhirió al concreto con una resina epóxica.

Los gatos 4 y 5 son alimentados de forma independiente por los gatos 2 y 3 que a su vez son alimentados en forma proporcional por el gato 1. La proporción es función del punto de aplicación de la carga del gato 1 sobre la pequeña viga que trasfiere la carga a los gatos 2 y 3.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_b}{P_a} = \frac{a}{b} \tag{6-1}$$

Finalmente el gato 1 es alimentado por una bomba.

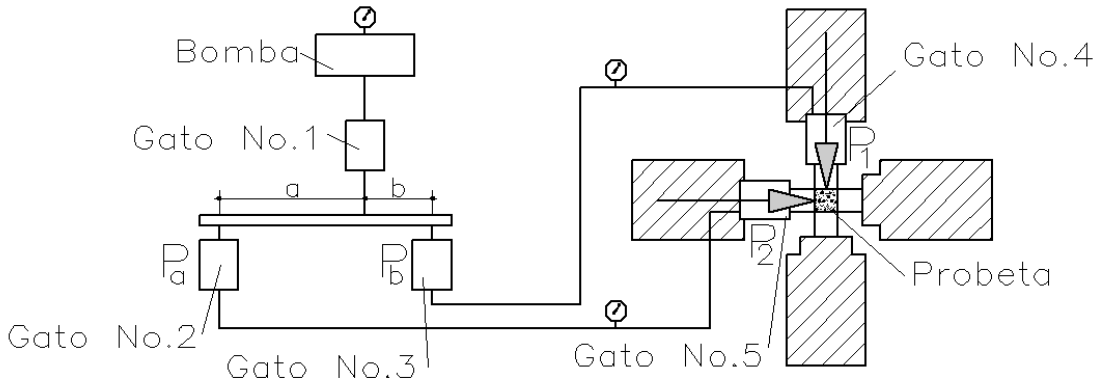


Figura 6-2: Sistema hidráulico para ensayo de probetas. **(Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969)**

De esta manera se mantiene controlada la proporción entre σ_1 y σ_2, variando las distancias a y b sobre la viga, lo cual permite obtener varias combinaciones de esfuerzo plano sobre la probeta.

Los ensayos realizados (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969) se muestran en la **Tabla 6-1.**

	Estado de esfuerzo	$\boldsymbol{\sigma_1/\sigma_2}$	**Resultados recopilados**
I	Compresión biaxial	σ_1 σ_2 1 1	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2
II	Compresión biaxial	σ_1 σ_2 1 0.52	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2
III	Compresión biaxial	σ_1 σ_2 1 0	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2
IV	Tensión - Compresión	σ_1 σ_2 1 0.052	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2
V	Tensión - Compresión	σ_1 σ_2 1 0.103	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2
VI	Tensión - Compresión	σ_1 σ_2 1 0.204	σ_1 ε_1 σ_1 ε_2

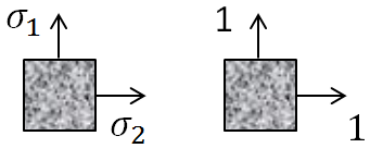
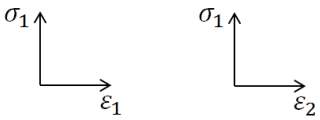
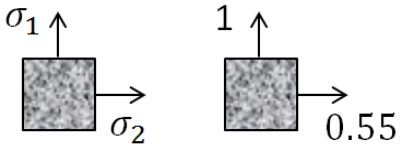
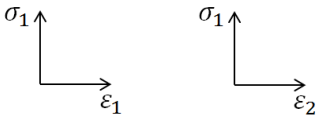
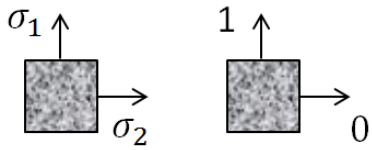
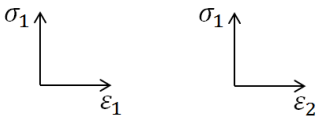
Estado de esfuerzo	σ_1/σ_2	Resultados recopilados
VII Tensión biaxial		
VIII Tensión biaxial		
IX Tensión biaxial		

Tabla 6-1: Ensayos realizados

Adicionalmente de los ensayos se analizó la deformación volumétrica.

Las probetas ensayadas tienen 0.20m x 0.20m x 0.05m y el concreto tiene las siguientes propiedades:

$$E_c = 20{,}965{,}900\frac{kN}{m^2}$$ Módulo de elasticidad secante, medido a $0.45\sigma_{yc}$

$$\nu = 0.20$$ Relación de Poisson.

$$\sigma_{yc} = 28{,}980\frac{kN}{m^2}$$ Esfuerzo de fluencia en compresión. (6-2)

$$\alpha = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} = 0.09$$ Relación entre el esfuerzo de fluencia en tensión y en compresión.

6.2. Simulación numérica

Los ensayos experimentales se simulan numéricamente usando una malla de un elemento finito cuadrilateral lineal de 4 nudos.

Debido a la simetría del problema, se restringe el desplazamiento en la dirección *x* en la cara izquierda y el desplazamiento en dirección *y* sobre la cara inferior del elemento finito, como lo indica la **Figura 6-4**. Se opta por aplicar desplazamientos y no cargas debido a la dificultad que se presenta para la convergencia en problemas con cargas impuestas cuando existe ablandamiento.

Los desplazamientos se imponen en la misma dirección y proporción que tienen los esfuerzos en una cara con respecto a la cara adyacente. Los apoyos se ubican en los nudos y se disponen de manera tal que permiten la libre expansión o contracción del elemento. A continuación se modela numéricamente algunos de los casos experimentales.

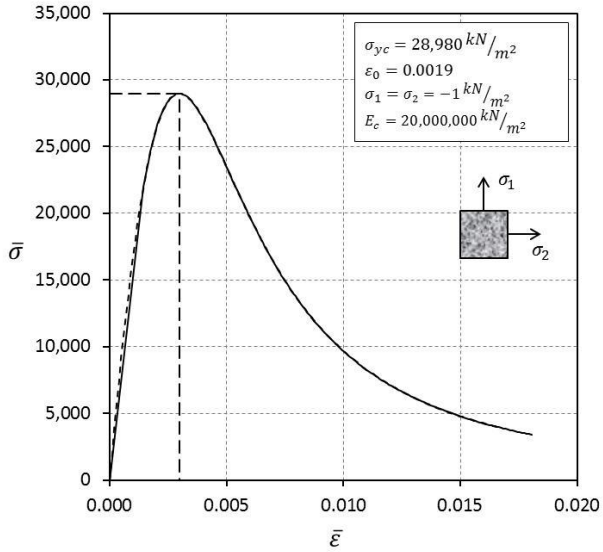
Para todos los casos se usó el mismo elemento con la misma numeración y los mismos apoyos, cambian únicamente los desplazamientos impuestos. Los desplazamientos son aplicados gradualmente en pequeños incrementos simulando la carga gradual de los ensayos de laboratorio. La relación entre el desplazamiento aplicado verticalmente en los nudos 3 y 4 con respecto al desplazamiento horizontal aplicado en los nudos 2 y 3, dependerá de la relación entre σ_1 y σ_2 de cada ensayo, siendo el material es isótropo.

6.2.1. Propiedades mecánicas de la simulación

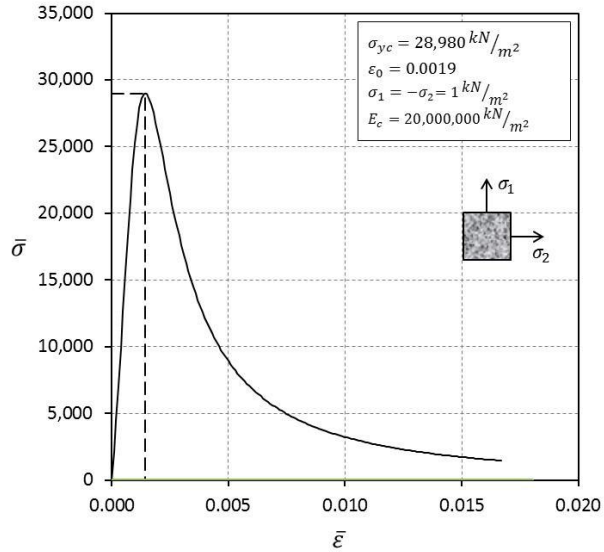
Cómo se describió en el **Capítulo 4**, el modelo numérico requiere específicas del concreto. Las gráficas equivalentes de esfuerzo y deformación que describen el comportamiento del material, superado el límite elástico, se muestran en la **Figura 6-3**, aunque el comportamiento en el rango no lineal depende tanto de las propiedades del material como del estado de esfuerzos actuante.

En términos generales para estados de esfuerzo de compresión biaxial, el modelo numérico presenta ablandamiento al superarse el límite elástico. Para rangos de esfuerzo de tensión – compresión, también se presenta ablandamiento pero con relaciones esfuerzo deformación diferentes a las de compresión biaxial. Finalmente para rangos de tensión biaxial el modelo considera plasticidad perfecta.

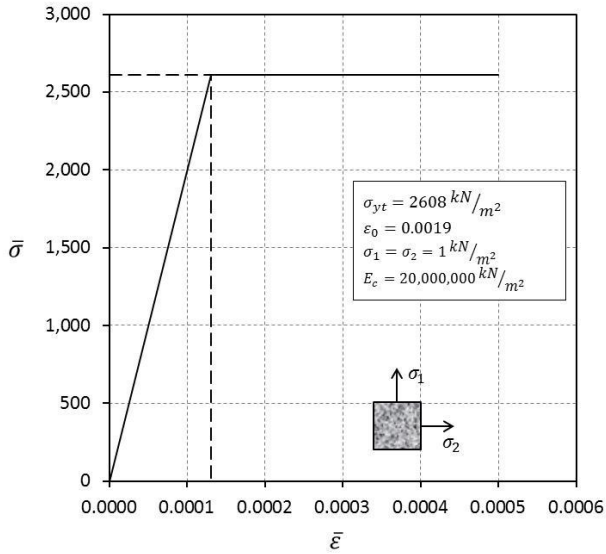
Los datos del concreto son los mismos que se presentaron en la **Ecuación (6-2)**.



(a) Compresión – compresión.



(b) Compresión – tensión.



(c) Tensión – tensión.

Figura 6-3: Curvas de esfuerzo – deformación uniaxial equivalentes.

6.2.2. Probeta sometida a compresión biaxial

El primer ensayo consiste en someter la probeta a un estado de esfuerzos de compresión biaxial en diferentes proporciones, para lo cual como muestra la **Figura 6-4**, se imponen desplazamientos en los nudos 2, 3 y 4.

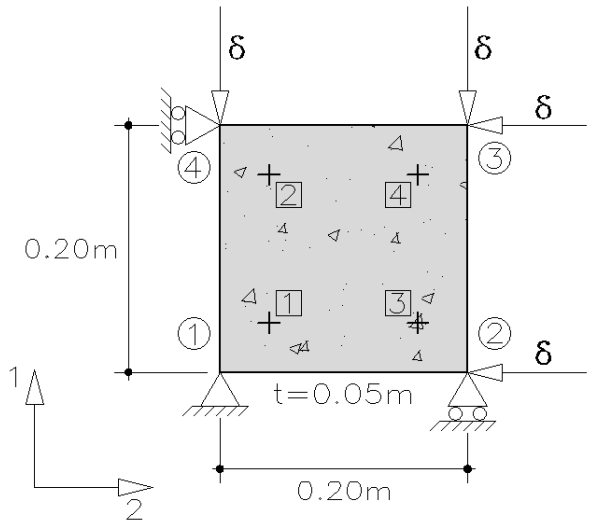
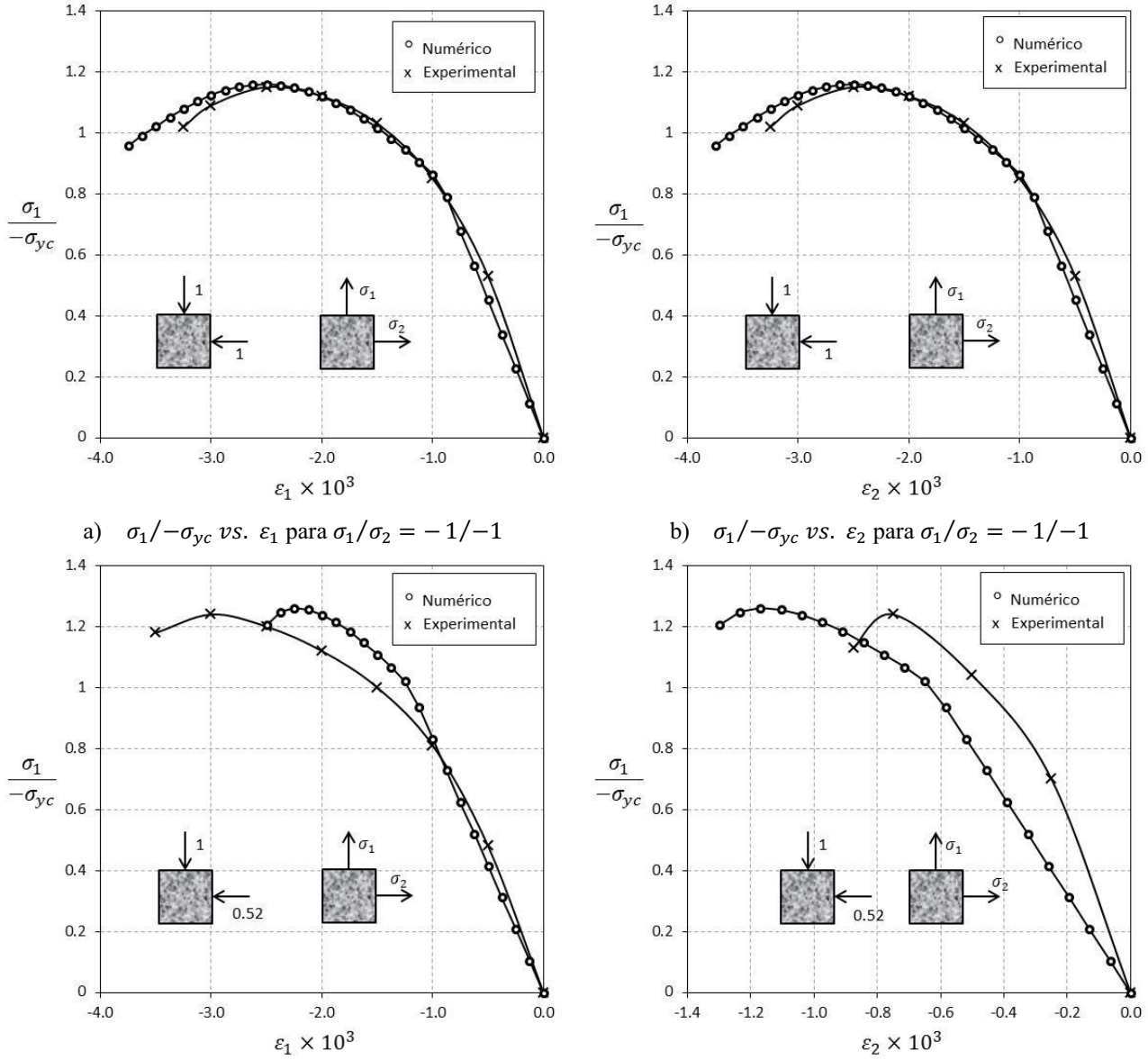


Figura 6-4: Modelo numérico de losa sometida a compresión biaxial.

En la **Figura 6-5 a)** se observa la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 1. Se aprecia en los resultados numéricos un comportamiento lineal elástico hasta el momento de la fluencia, a partir del cual inicia un comportamiento inelástico con ablandamiento. Se observa también que el modelo reproduce en gran medida el comportamiento real de los ensayos de laboratorio. En la parte **b)** de la misma figura se muestra la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 2, esta curva resulta ser igual a la mostrada en la parte **a)** debido a que el material es isótropo y la relación entre σ_1 y σ_2 es 1.

En la parte **c)** de la **Figura 6-5** se encuentra la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 1, para una relación entre $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.52$. Se observa el mismo comportamiento elástico lineal en la primera etapa de los resultados numéricos y la posterior fluencia con ablandamiento. En la parte **d)** se muestra la curva para la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 2 para la relación entre $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.52$.

En todas las curvas de la **Figura 6-5** se observa que el nivel de esfuerzo máximo alcanzado en los resultados numéricos es el mismo alcanzado en los resultados experimentales. Las diferencias radican en las deformaciones, debido a que el modelo no tiene en cuenta la localización de las fisuras. Sin embargo, el modelo describe el comportamiento con un buen grado de aproximación.



a) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$

b) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$

c) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$

d) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$

Figura 6-5: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a compresión biaxial. Resultados numéricos y experimentales.

6.2.3. Probeta sometida a tensión - compresión

Ahora corresponde analizar la probeta bajo esfuerzos de compresión en la dirección 1 y de tensión en la dirección 2. Para esto se induce un desplazamiento negativo en la dirección vertical y un desplazamiento positivo en la dirección horizontal, tal como muestra la **Figura 6-6.** La proporción entre los desplazamientos aplicados obedece a la proporción entre los esfuerzos debido a la isotropía del material.

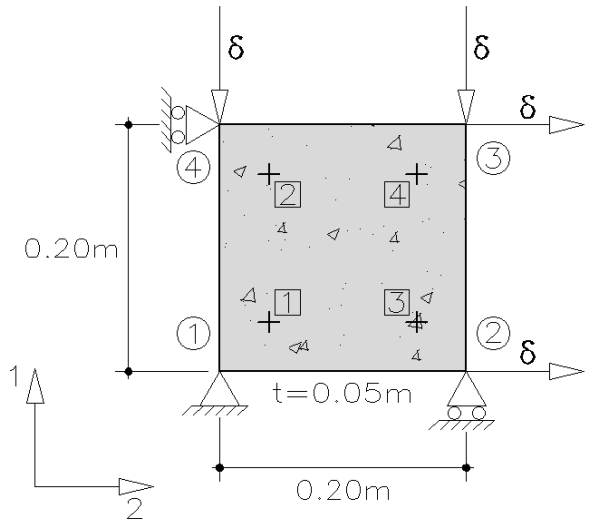
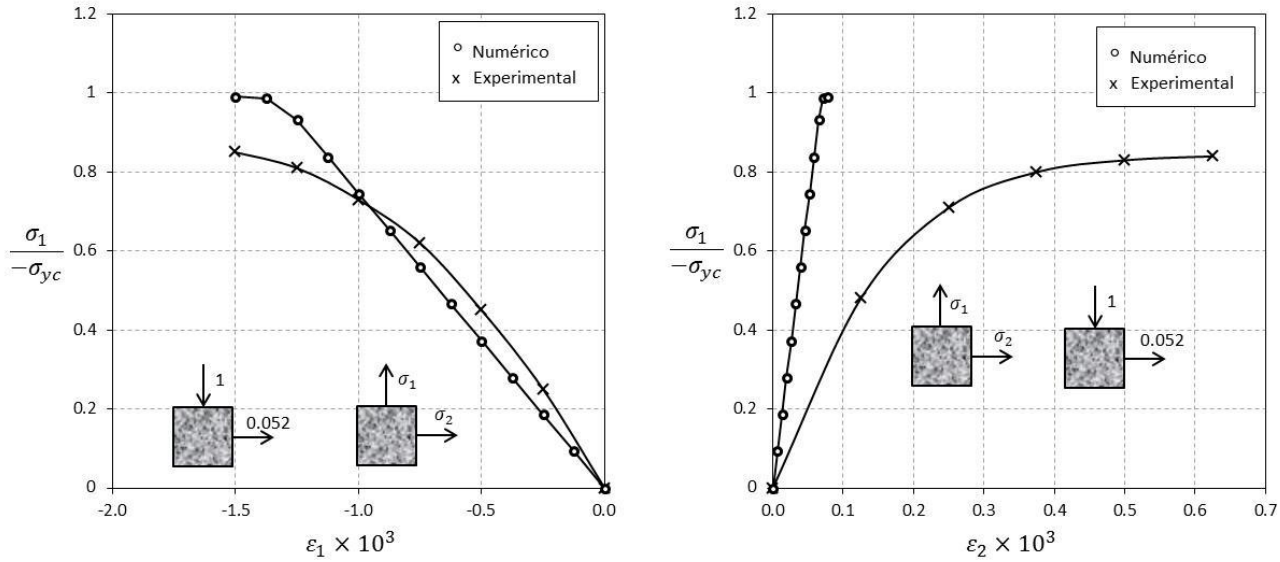


Figura 6-6: Modelo numérico de losa sometida a compresión – tensión.

En la **Figura 6-7** se muestra la comparación de resultados numéricos y experimentales. En la parte **a)** se representa la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 1. En la parte **b)** se muestra la curva esfuerzo normal en dirección 1 vs deformación longitudinal en dirección 2. En este rango de esfuerzos de tensión y compresión, las curvas experimentales de nivel de esfuerzo y deformación muestran un comportamiento elástico no lineal del concreto.

Como se explicó en el **Capítulo 4**, el modelo implementado se modificó considerando un comportamiento elástico lineal, lo cual se acopla muy bien para los rangos de compresión biaxial y tensión biaxial.



a) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0.052$ b) $\sigma_1/-\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0.052$

Figura 6-7: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a tensión – compresión. Resultados numéricos y experimentales.

6.2.4. Probeta sometida a tensión biaxial

Finalmente se analiza la probeta sometida a tensión biaxial. Al igual que los dos casos anteriores, se imponen desplazamientos con direcciones y proporciones acordes al estado de esfuerzos que se quiere representar.

En la **Figura 6-8** se muestra el modelo para la probeta en este caso.

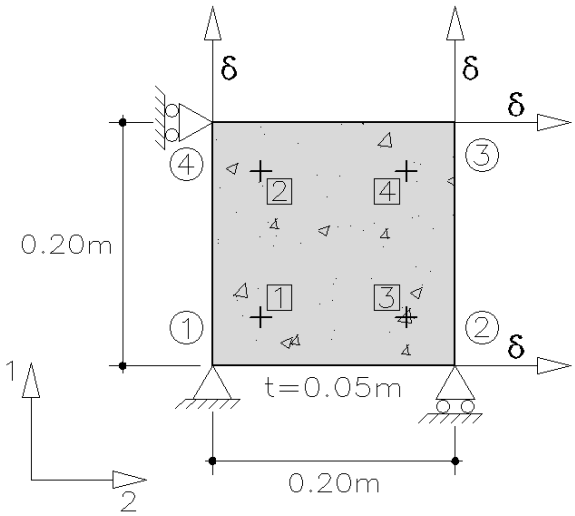
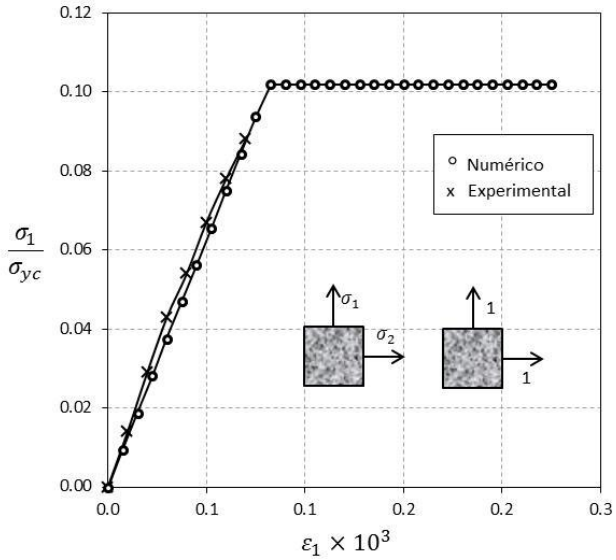


Figura 6-8: Modelo numérico de losa sometida a tensión biaxial.

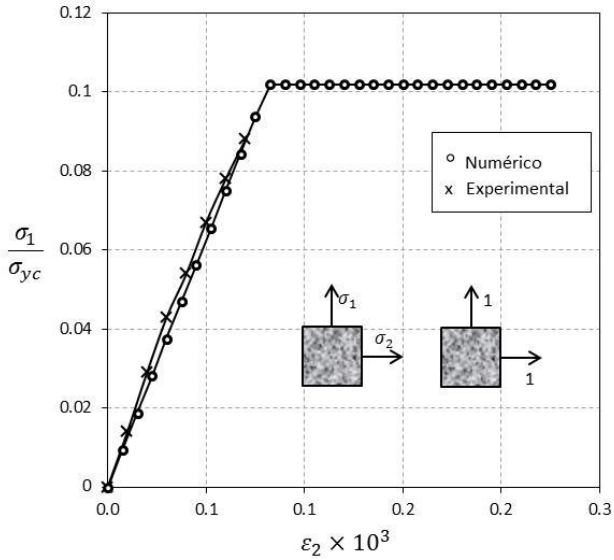
Como se mencionó en el **Capítulo 4**, el modelo constitutivo implementado, usa para el rango de tensión biaxial, la formulación de plasticidad perfecta debido a la proximidad en este rango de la superficie de fluencia y la superficie de falla.

En la **Figura 6-9** se observa que los resultados experimentales alcanzan el nivel de esfuerzo de fluencia y no se aprecia un cambio en la pendiente de la curva. Esto se debe a que en el rango de tensión biaxial, la superficie de fluencia y la superficie de falla están muy próximas la una de la otra y no es apreciable un comportamiento inelástico, la falla se presenta casi en el mismo instante en el cual el límite elástico es superado.

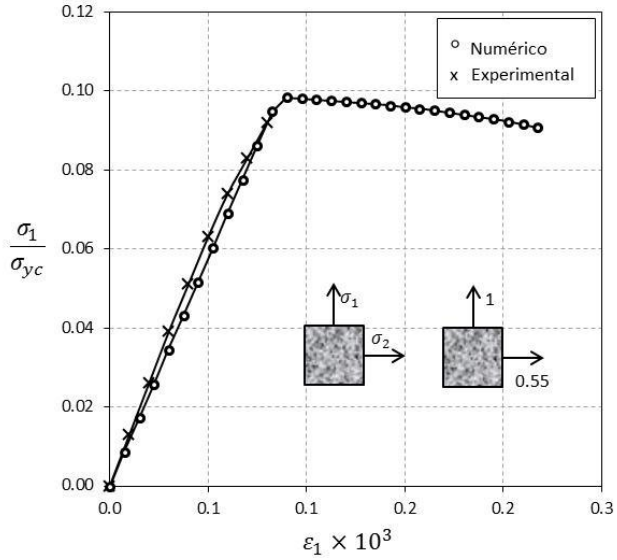
Los resultados numéricos muestran un comportamiento elástico lineal con la misma pendiente que los resultados experimentales. A partir del instante en el cual se supera el límite elástico se aprecia un cambie en la pendiente y se pueden obtener deformaciones mayores que las experimentales. Teóricamente el modelo puede seguir incrementando la deformación indefinidamente, pero en este caso de tensión biaxial, el inicio de la fluencia en el modelo numérico representa el inicio de la falla.



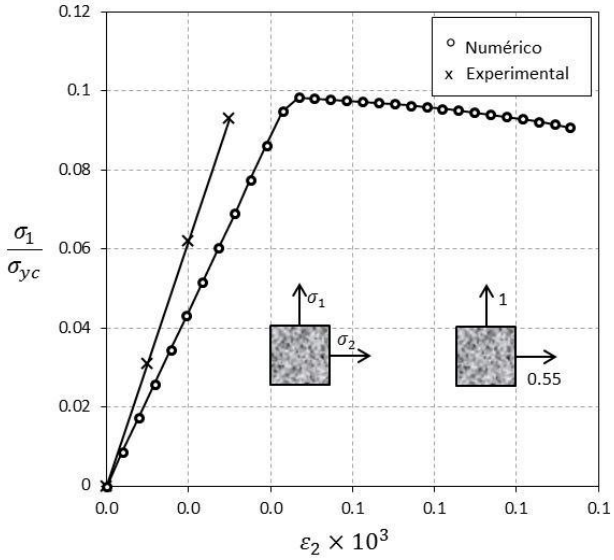
a) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/1$



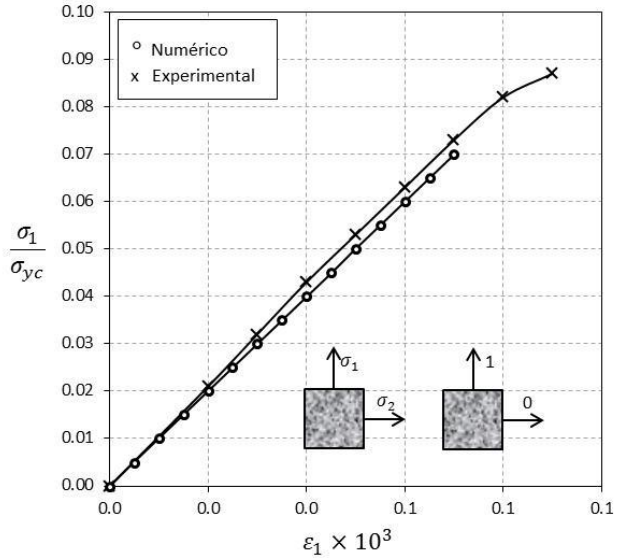
b) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/1$



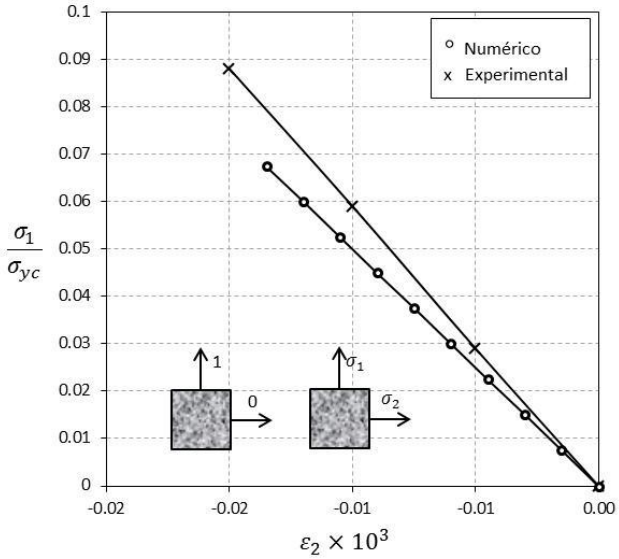
c) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.55$



d) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.55$



e) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_1$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0$



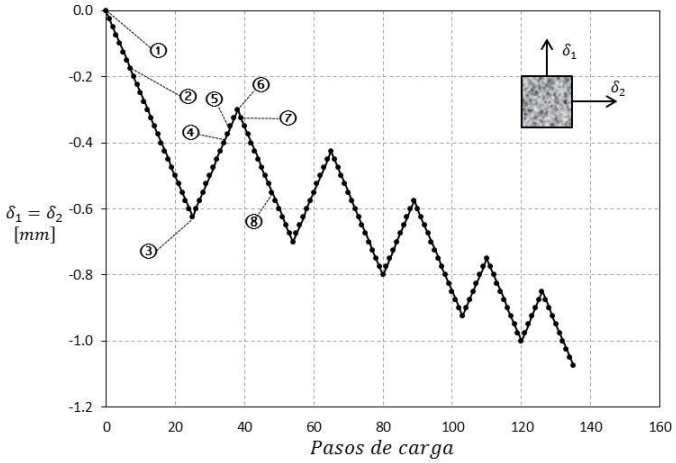
f) $\sigma_1/\sigma_{yc}\ vs.\ \varepsilon_2$ para $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0$

Figura 6-9: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a tensión biaxial. Resultados numéricos y experimentales.

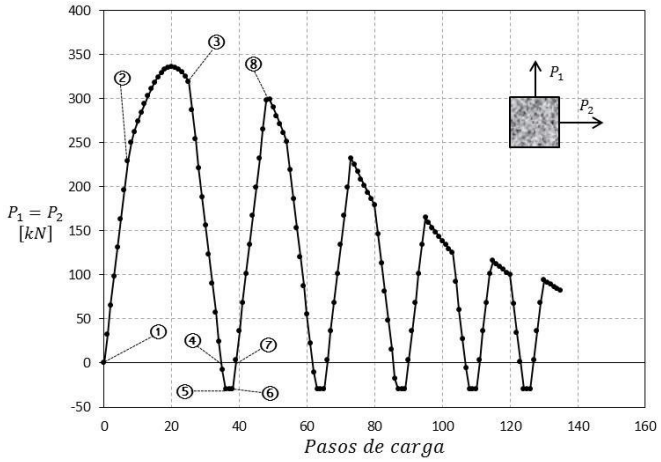
Las gráficas de la **Figura 6-9** se deben interpretar de manera tal, que al llegar al límite elástico, con un ligero incremento en el esfuerzo, se estará muy cerca de la falla.

6.2.5. Probeta sometida a ciclos de carga y descarga

El modelo seleccionado tiene la capacidad de representar la degradación de la resistencia a lo largo de ciclos repetitivos de carga, descarga y recarga. Para ilustrar este efecto se modeló una probeta igual a la ensayada en los numerales anteriores, pero sometida a varios ciclos de carga. En la **Figura 6-10 (a)** se muestran los desplazamientos impuestos y en **(b)** la carga resultante sobre el elemento.



a) Desplazamientos impuestos en la probeta.



b) Fuerza resultante en la probeta.

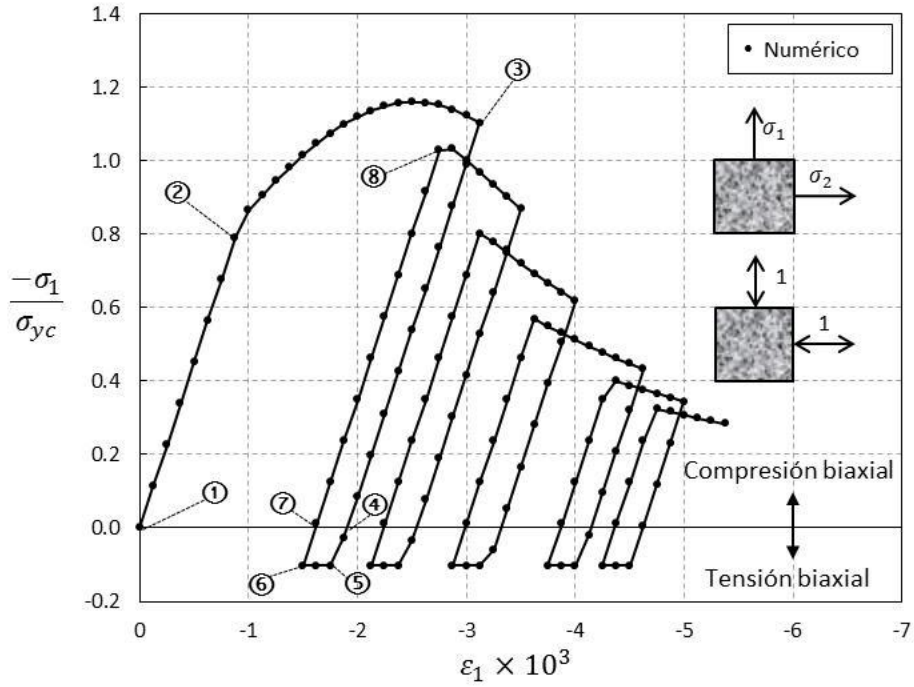
Figura 6-10: Historia de carga biaxial cíclica.

En el intervalo de instantes 1 al 3, la probeta se somete a cargas biaxial de compresión. Del instante 3 al 4 se descarga completamente. A partir del instante 4 y hasta el 6, se somete a carga biaxial de tensión. Del instante 6 al 7 se descarga nuevamente a cero. Esta secuencia se repite nuevamente como indica la **Figura 6-10**.

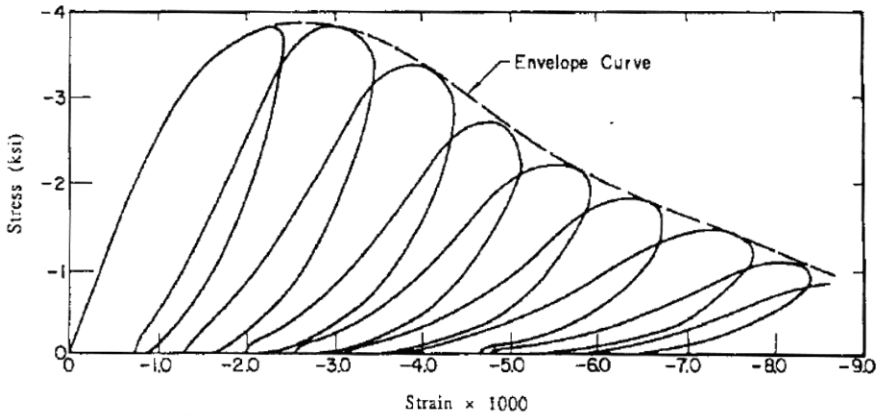
Las propiedades del material son las indicadas en la **Ecuación (6-2)** y la **Figura 6-3**.

Los resultados obtenidos de esta modelación se muestran a continuación.

A medida que se avanzan los ciclos de carga se aprecia la contracción de la superficie de fluencia. En un ensayo real, además de la reducción del límite elástico, se aprecia también reducción en la rigidez. El modelo de plasticidad presentado conserva iguales las pendientes de la rama elástica y de descarga. Los dos efectos se podría obtener con modelos de daño – plasticidad. En la **Figura 6-11** se observa la reducción de la resistencia en el rango de compresión biaxial a medida que trascurren los ciclos de carga.



a) Resultados numéricos en compresión y tensión biaxial.



b) Resultados experimentales en compresión (Sinha, Gerstle y Tulin 1964)

Figura 6-11: Losa sometida a ciclos de carga, descarga y recarga.

En el rango de tensión biaxial, el modelo es de plasticidad perfecta y el límite elástico se mantiene siempre en el mismo valor.

El ejemplo inicia con esfuerzo y deformación nulos en el punto 1 de la **Figura 6-11**, posteriormente se incrementa los esfuerzos σ_1 y σ_2 en igual proporción en el rango de compresión biaxial hasta el punto 2, en el cual inicia el comportamiento plástico (carga plástica) hasta el punto 3, en donde se realiza una descarga hasta esfuerzo cero en el punto 4. Esta descarga tiene la misma pendiente de las zonas de comportamiento elástico.

En el punto 4 el nivel de esfuerzos es cero y se aprecia que ha quedado una deformación permanente.

Del punto 4 al 5 se realiza una recarga pero ahora en el estado de tensión biaxial hasta lograr fluencia entre los puntos 5 y 6. En esta zona de la curva se observa que se contrarresta una porción de la deformación permanente debido a que la fluencia ocurre ahora en sentido contrario.

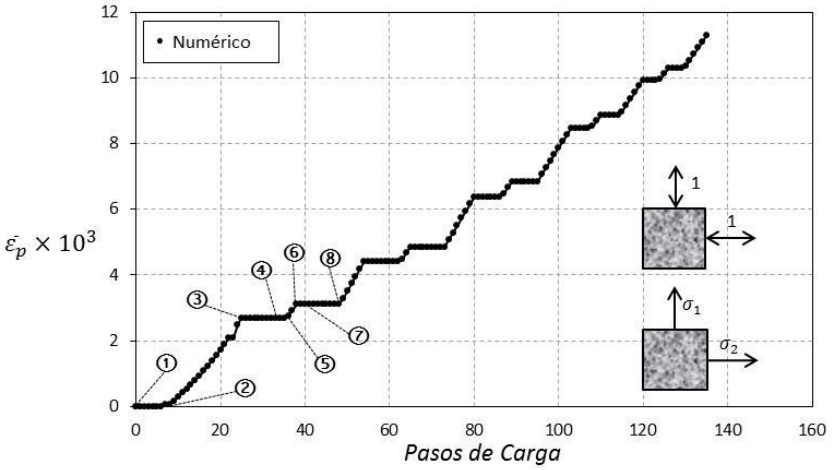
En el punto 6 se realiza nuevamente una descarga hasta esfuerzo cero en el punto 7 para continuar recargando hasta el punto 8 en donde nuevamente se presenta fluencia en el rango de compresión biaxial. Las cargas y descargas se repiten logrando varios ciclos.

En el rango elástico se aprecia que la pendiente de la curva es siempre la misma E_c y se aprecia también la deformación plástica permanente que se va acumulando durante los procesos de carga plástica.

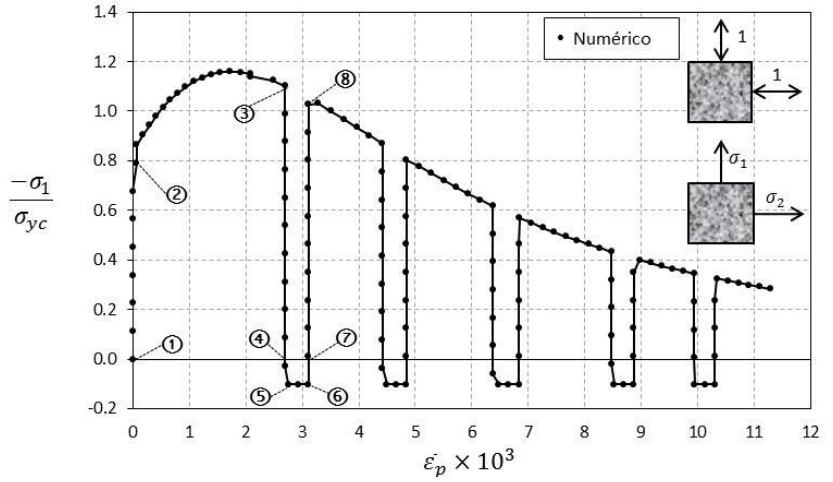
En la **Figura 6-12** se analiza la deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$, en la parte **a)** se analiza frente a los pasos de carga, se observa que durante los pasos elásticos (carga elástica y descarga elástica) la deformación plástica equivalente no aumenta y son las mesetas en la curva. En los pasos de carga plástica la deformación plástica se incrementa.

En la parte **b)** se analiza la deformación plástica equivalente comparada con el esfuerzo σ_1, se observan los incrementos de esta deformación en las zonas de carga plástica tanto en compresión como en tensión biaxial. En la parte **b)** también se aprecia que a medida que se realizan más ciclos de carga y descarga, se requiere de menor nivel de esfuerzo en compresión para llegar a plastificación e incrementar la deformación plástica. En la zona de tensión siempre se requiere del mismo nivel de esfuerzo.

La deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$, a diferencia de la componente plástica de la deformación $\{\varepsilon\}_p$, se incrementa siempre sin importar si la plastificación se presentó en tensión o en compresión. $\bar{\varepsilon}_p$, es una cantidad escalar que aumenta cada vez que se presenta un proceso de carga plástica y quedará de forma permanente en la historia del material.



a) $\bar{\varepsilon}_p \; vs. Pasos\ de\ carga$



b) $-\sigma_1/\sigma_{yc} \; vs. \bar{\varepsilon}_p$

Figura 6-12: Deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$, en losa sometida a ciclos de carga, descarga y recarga.

La deformación plástica equivalente es un indicativo del nivel de plastificación que se presentó en el material y es una variable histórica debido a que influye en el comportamiento del material una vez ha sufrido plastificación en procesos anteriores. Los nuevos procesos de carga estarán en función de lo que causaron en el material procesos de carga anteriores.

6.2.6. Ejemplo de aplicación: viga en voladizo

Este ejemplo consiste en una viga en voladizo, prismática, de concreto simple y de sección rectangular. La viga tiene una longitud de 3.00m y la sección es de 0.25m de ancho por 0.50m de alto. Como se muestra en la **Figura 6-13** en el extremo izquierdo de la viga se encuentra el empotramiento y en el extremo derecho se aplica una carga puntual.

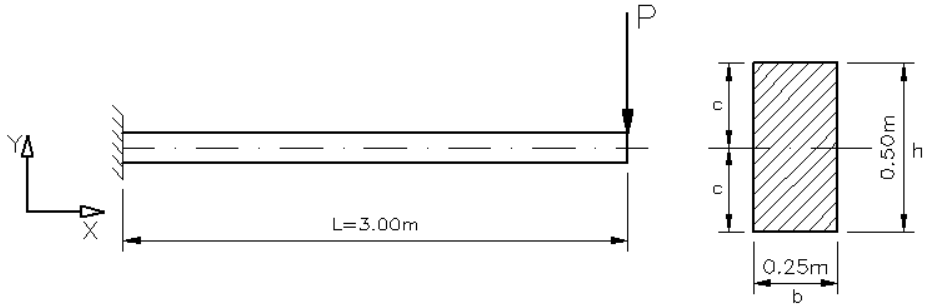


Figura 6-13: Viga en voladizo con carga puntual en el extremo

La carga puntual en el extremo de la viga P evoluciona desde un valor inicial de cero. Primero la carga se dirige en sentido Y negativo superando el nivel de plastificación en el sector con mayor momento (fibras del extremo superior próximas al apoyo), posteriormente la carga disminuye hasta invertir su dirección y causar plastificación nuevamente (ahora en las fibras inferiores próximas al apoyo). Finalmente la carga disminuye a cero. La historia de carga se muestra en la **Figura 6-14**.

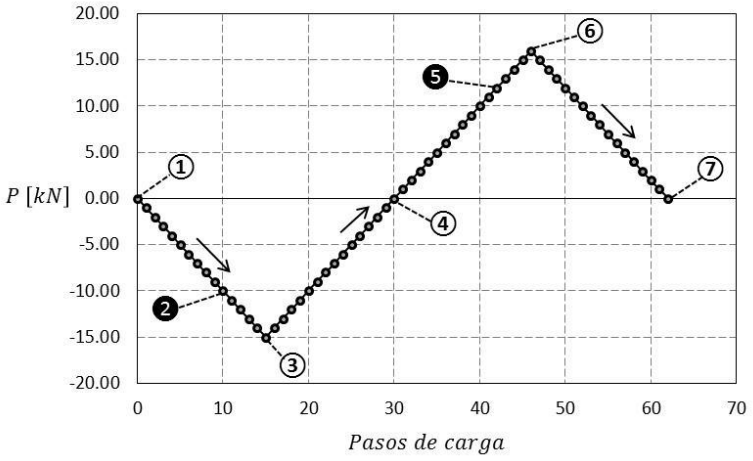


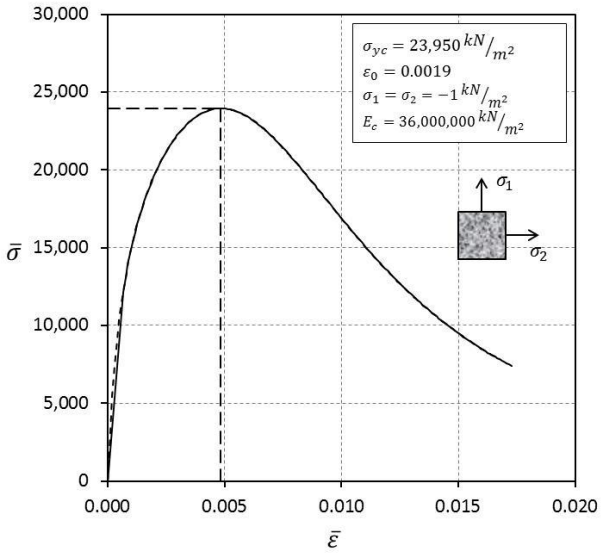
Figura 6-14: Viga en voladizo con carga puntual en el extremo. Historia de carga

Las propiedades del material son:

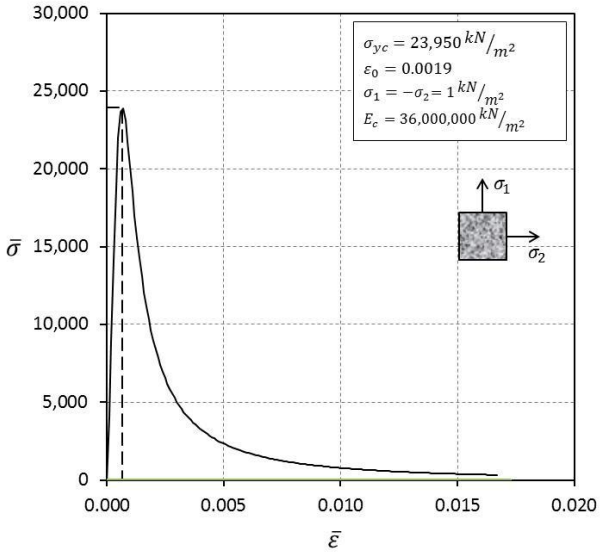
$E_c = 36{,}000{,}000\,\frac{kN}{m^2}$	Módulo de elasticidad secante, medido a $0.45\sigma_{yc}$
$\nu = 0.19$	Relación de Poisson
$\sigma_{yc} = 23{,}950\,\frac{kK}{m^2}$	Esfuerzo de fluencia en compresión
$\alpha = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} = 0.09$	Relación entre el esfuerzo de fluencia en tensión y en compresión.

(6-3)

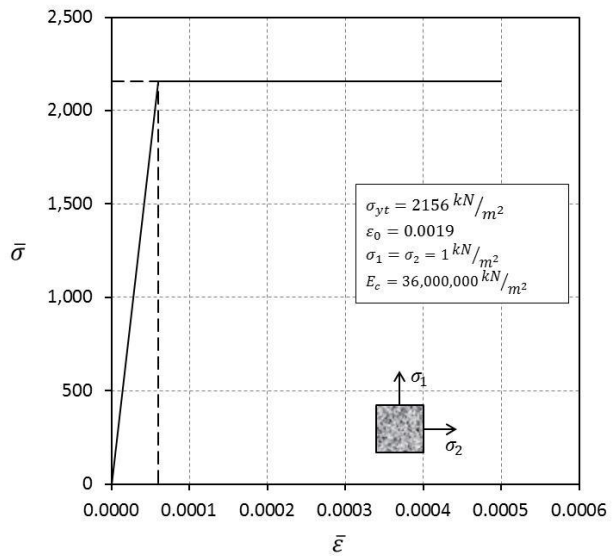
Las curvas de esfuerzo deformación equivalentes se muestran en la **Figura 6-15.**



(a) Compresión – compresión.



(b) Compresión – tensión.



(c) Tensión – tensión.

Figura 6-15: Curvas de esfuerzo – deformación uniaxial equivalentes.

Analíticamente es posible calcular la carga para la cual se espera esfuerzo de fluencia en las fibras más alejadas del eje neutro. Esto con el fin de comparar estos resultados con la solución numérica obtenida con el método de los elementos finitos.

Los esfuerzos normales en las secciones trasversales de las vigas (Gere y Timoshenko 1984) se puede expresar como sigue:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot c}{I} \tag{6-4}$$

Donde σ_x es el esfuerzo normal, M es el momento flector presente en la sección bajo estudio, c es la distancia medida desde el eje neutro hasta la fibra en donde se está evaluando el esfuerzo. Finalmente I es el momento de inercia de la sección analizada, para este caso se tiene:

$$I = \frac{1}{12} bh^3$$
$$I = \frac{1}{12}(0.25m)(0.50m)^3 = 0.0026m^4 \tag{6-5}$$

El momento flector en el voladizo se puede expresar en términos de la carga aplicada y la longitud de la viga como: $M = P \cdot L$

Reemplazando el valor del esfuerzo normal por el esfuerzo de fluencia en tensión del material, se obtiene la carga que se debe aplicar justo antes de iniciar el proceso de plastificación:

$$P_y = \frac{I \cdot \sigma_{yt}}{L \cdot c} = \frac{(0.0026m^4)(2{,}156\,kN/m^2)}{(3.00m)(0.25m)}$$
$$P_y = 7.5kN \tag{6-6}$$

Se define P_y como la carga aplicada cuando el esfuerzo normal máximo adquiere el valor del esfuerzo de fluencia en tensión σ_{yt}. El esfuerzo de fluencia en tensión limita el comportamiento elástico de la viga pues este es diez veces menor que el esfuerzo de fluencia en compresión.

El caso de la viga en voladizo, el lugar donde se presenta el máximo momento es también donde se presenta la máxima fuerza cortante, la carga que se calculó anteriormente es una aproximación debido a que no se están considerando entre otros fenómenos, los efectos de los esfuerzos cortantes.

A continuación se describen los resultados obtenidos del análisis no lineal mediante el método de los elementos finitos.

El empotramiento se modela por medio de tres apoyos, dos apoyos de primer género que solo restringen el movimiento horizontal y un apoyo de segundo género en el centro que restringe los desplazamientos horizontal y vertical. La carga se está aplicando de forma puntual en el nudo central del extremo libre de la viga.

Se usarán para este ejemplo 24 elementos finitos cuadrilaterales de 4 nudos y 4 puntos de Gauss, la malla mostrada posee únicamente dos elementos en cada sección transversal de la viga, pero por el tipo de elemento finito, es suficiente aproximación para captar las variaciones de esfuerzo y deformación en cada sección.

En la **Figura 6-16** se muestra el esquema de la viga y la malla de elementos finitos usada para este caso.

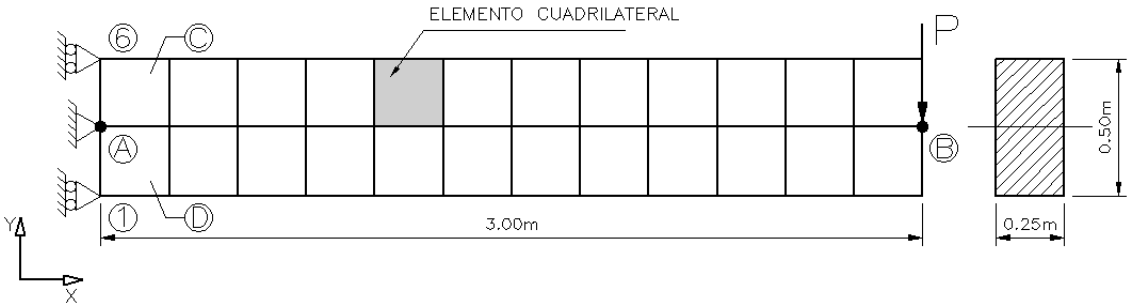


Figura 6-16: Modelo numérico viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

La relación entre la carga aplicada P y el desplazamiento vertical δ en el extremo libre de la viga, se representa en la **Figura 6-17**.

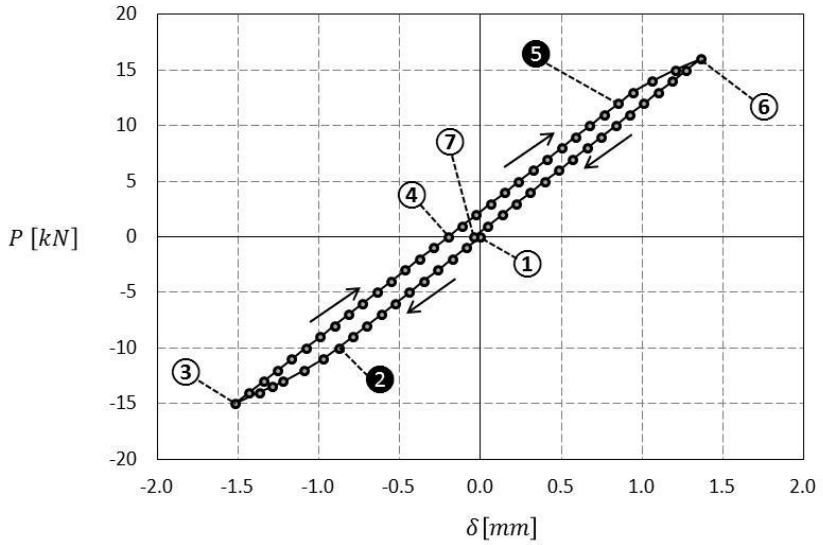


Figura 6-17: Carga – desplazamiento en el extremo de la viga (Resultados numéricos)

En la **Figura 6-17** los puntos resaltados con los numerales 1 al 7 en la curva, hacen referencia a pasos de carga representativos de la **Figura 6-14** que muestra el comportamiento de la carga en el extremo libre de la viga. En el intervalo delimitado por los instantes 1 y 2, el comportamiento es elástico lineal. Superado el instante 2 se presenta fluencia por tensión en las fibras superiores cercanas al empotramiento. En el intervalo de 2 a 3 la carga continúa aumentando en un proceso de carga plástica. Posteriormente se realiza una descarga elástica en el intervalo delimitado entre los puntos 3 y 4. Esta descarga muestra la misma pendiente de la carga en rango elástico.

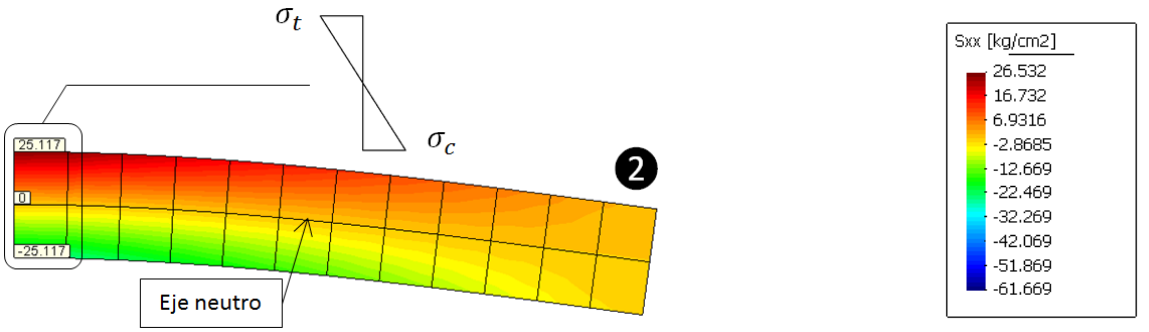
En el instante 4 se observa que la carga aplicada es cero pero ha quedado un desplazamiento permanente aproximadamente igual a 0.2mm en el extremo de la viga.

Del instante 4 al 5 la carga aumenta pero en sentido contrario, realizando una recarga en rango elástico. A continuación, entre los puntos 5 y 6 la carga se incrementa aún más, generando un proceso de carga plástica, pero ahora haciendo que la fluencia a tensión se presente en las fibras inferiores de la viga, cercanas al empotramiento. Del punto 6 al 7 se descarga elásticamente hasta carga cero.

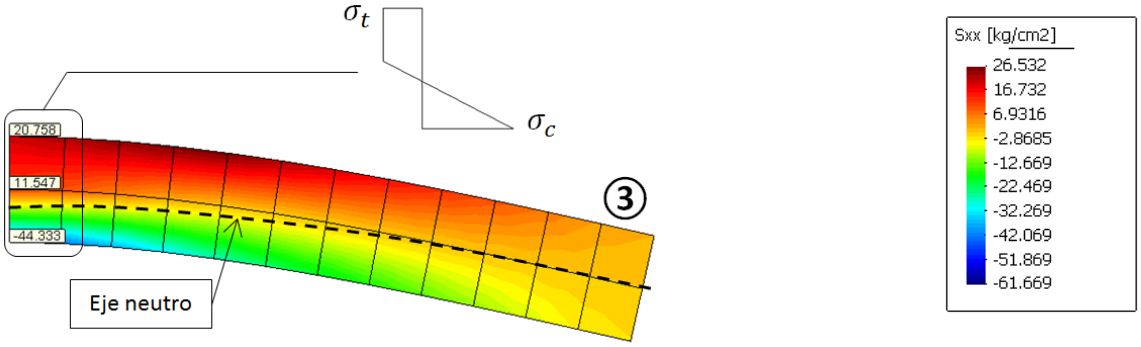
En el instante 7 se observa que ha quedado un desplazamiento permanente en el extremo de la viga, pero éste contrarresta el desplazamiento permanente que había quedado en el instante 4.

El comportamiento en rango inelástico se presenta debido a que se supera el límite elástico en el rango de tensión. En cambio, la magnitud de los esfuerzos de compresión no alcanza a superar el límite elástico en este rango.

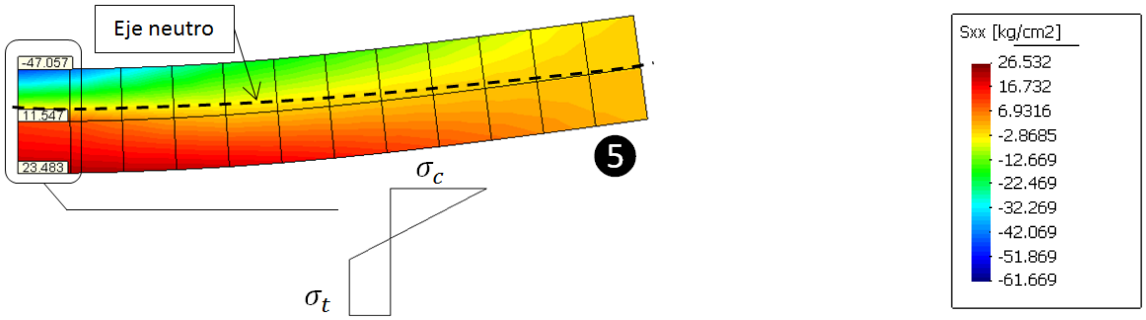
A pesar del ablandamiento que indica el comportamiento del material después del límite elástico a tensión, la curva Carga – desplazamiento exhibe una pendiente positiva en la etapa de carga inelástica. Lo anterior se debe a que la zona de la viga sometida a compresión conserva un comportamiento elástico dada la relación σ_{yt}/σ_{yc}.



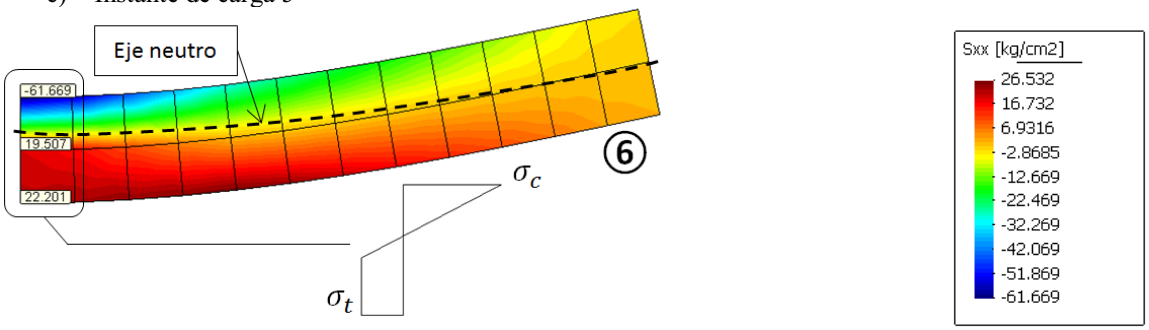
a) Instante de carga 2



b) Instante de carga 3



c) Instante de carga 5



d) Instante de carga 6

Figura 6-18: Esfuerzo normal σ_x viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

En la **Figura 6-18** se muestran con colores los esfuerzos normales en dirección x en toda la viga. En la parte **a)** de la figura se observan los esfuerzos presentes en el instante de carga 2, en este instante se observa un comportamiento elástico. Los esfuerzos son simétricos respecto al eje central longitudinal de la viga y el eje neutro está localizado en el centroide de área de todas las secciones transversales.

En este instante también se observa una distribución de esfuerzos que se incrementa linealmente conforme los puntos se alejan del eje neutro de la viga. Se observa también que los esfuerzos de mayor magnitud se localizan en la zona del empotramiento. En el extremo libre de la viga los esfuerzos tienen magnitud nula.

Al incrementar la carga se llega la instante 3, este instante se muestra en la parte **b)** de la figura. En este instante se presenta plastificación por tensión en las fibras superiores de la viga cercanas al empotramiento. Debido a las propiedades de ablandamiento del material, el esfuerzo en las zonas donde se presenta plastificación, disminuye en el transcurso de la carga plástica. Es por esto que en la parte **a)** de la figura se observa un esfuerzo de tensión de $2{,}512\,kN/m^2$ y en la parte **b)** de la figura se lee un esfuerzo de tensión de $2{,}076\,kN/m^2$ en el mismo punto.

En la parte **b)** de la figura se observa también que la distribución de esfuerzos en las secciones cercanas al empotramiento ya no es lineal y el eje neutro se desplaza hacia abajo para mantener el equilibrio de esfuerzos en cada sección transversal. Los esfuerzos de tensión no pueden aumentar conforme aumenta la carga en el extremo libre de la viga, por el contrario, disminuyen. Debido a esto es que el eje neutro se desplaza hacia abajo haciendo que cada vez un área mayor de la sección transversal se encuentre sometida a esfuerzos de tensión en la parte superior que equilibran los esfuerzos de compresión en la parte inferior de la sección.

Los esfuerzos de compresión aumentan conforme aumenta la carga en el voladizo debido a que el límite elástico en este rango no es superado.

Posteriormente cuando la carga en el extremo libre de la viga cambia de sentido, las fibras sometidas a esfuerzos de tensión son las de la cara inferior de la viga. En el instante de carga 5, mostrado en la parte **c)** de la figura, se muestra que la distribución de esfuerzos se ve alterada por el proceso de carga plástico ocurrido en los instantes anteriores.

En el instante 6, mostrado en la parte **d)** de la **Figura 6-18**, se aprecia el mismo efecto descrito para el instante 3. Los esfuerzos de tensión en las fibras inferiores próximas al empotramiento decrecen conforme se incrementa la carga en el extremo libre de la viga debido al ablandamiento del material. En el instante 5 se lee un esfuerzo de $2{,}348\,kN/m^2$ mientras que en el instante 6 se lee $2{,}220\,kN/m^2$. En este intervalo el esfuerzo de tensión disminuyó en ese punto aunque la carga en el extremo de la viga aumentaba.

El eje neutro de la viga ahora se desplaza hacia la parte superior debido a que los esfuerzos de tensión que no aumentan si no que disminuyen, se encuentran en la parte inferior de la viga cercana al voladizo. Haciendo que se requiera una mayor área de la sección con esfuerzos de tensión en la parte inferior para equilibrar los grandes esfuerzos de compresión en la parte superior de la viga.

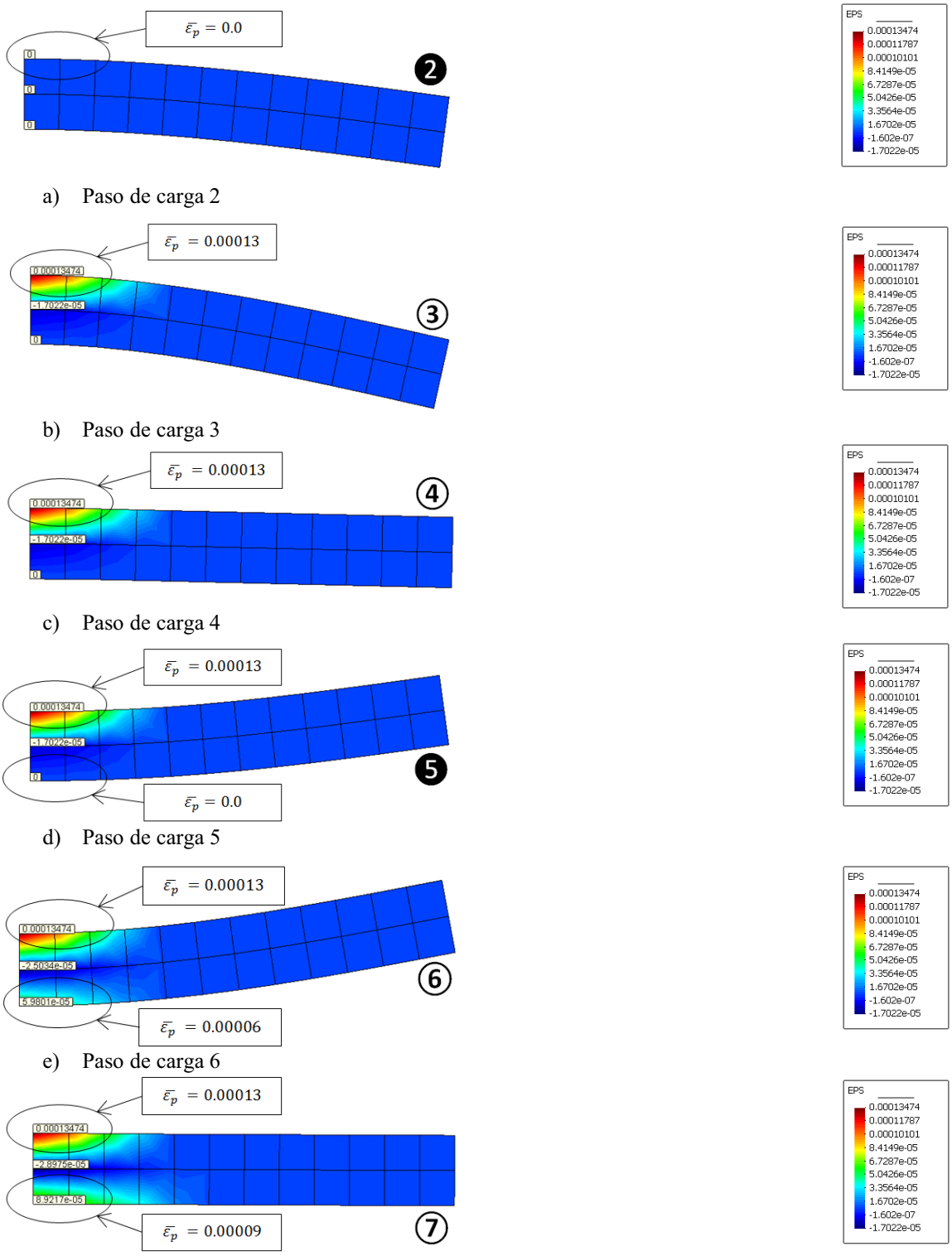


Figura 6-19: Deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$, viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

El proceso de plastificación en la viga se puede representar con la evolución de la deformación plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$, como se muestra en la **Figura 6-19**. En particular se indican los valores de $\bar{\varepsilon}_p$ en los nudos del extremo empotrado, donde se presentan los valores máximos.

En la parte **a)** de la **Figura 6-19**, se muestra el instante de carga 2. Este es el instante previo a la fluencia inicial en la viga. Se observa que la $\bar{\varepsilon}_p$ es cero en toda la viga, el material está virgen, es decir nunca antes ha tenido procesos de carga plástica, siempre se ha mantenido en el rango elástico.

En la parte **b)** se muestra el instante de carga 3 en el cual se ha presentado fluencia en la parte superior de la viga cercana al empotramiento. Como se puede observar, es en esta zona donde el valor de $\bar{\varepsilon}_p$ se incrementa y se torna distinto de cero.

En la parte **c)** se muestra en instante de carga 4 en donde la carga externa es cero pero se mantienen un valor remanente de $\bar{\varepsilon}_p$. Esto indica la afectación histórica del material en la zona donde se presentó la fluencia. Se observa que la viga ha quedado curvada hacia abajo debido a la deformación permanente del material en la zona donde se presentó la fluencia.

Posteriormente en la parte **d)** se muestra el paso de carga 5. Este paso de carga es el instante previo a la fluencia pero ahora en la parte inferior de la viga cercana al empotramiento. Se observa que los valores de $\bar{\varepsilon}_p$ no tienen evolución debido a que no se ha presentado fluencia nuevamente.

En la parte **e)** se muestra el paso de carga 6 en donde se presenta fluencia en la parte inferior de la viga cercana al empotramiento. Se observa que en esta zona se incrementa el valor de $\bar{\varepsilon}_p$, debido a la carga plástica. Ahora el material está afectado tanto en la parte superior por la primera fluencia, como en la parte inferior por la fluencia posterior.

En la parte **f)** de la **Figura 6-19** se muestra el paso de carga 7 donde la carga en el extremo de la viga nuevamente es cero. En esta etapa la $\bar{\varepsilon}_p$ muestra la alteración del material de forma permanente en la zona del empotramiento. Para procesos de carga que se realicen a esta viga ya afectada, se presentará un comportamiento que estará en función del nuevo límite elástico.

Ahora se hará referencia a la **Figura 6-20**, en la cual se analiza la $\bar{\varepsilon}_p$ con respecto a los pasos de carga y a magnitud de la carga aplicada en el extremo de la viga.

Las parte **a)** y **b)** de la figura describen la evolución de la $\bar{\varepsilon}_p$, en la parte superior de la viga próxima al empotramiento, específicamente en el nudo 6. En esta zona, entre los instantes 1 y 2, la $\bar{\varepsilon}_p$ es nula debido a que no se presenta plastificación. A partir del instante 2 se supera el límite elástico en tensión, lo cual genera un incremente en el valor de $\bar{\varepsilon}_p$.

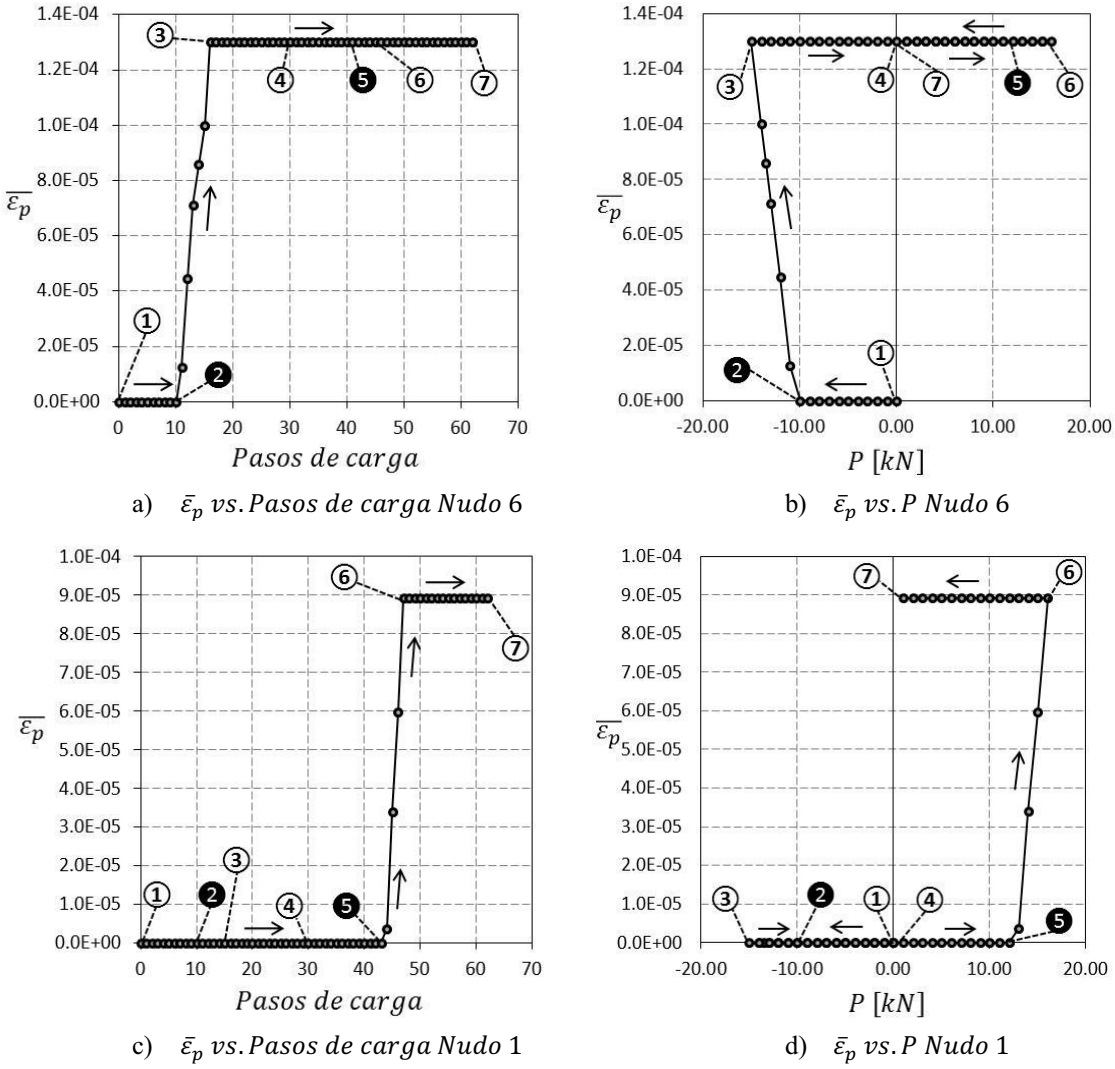
Entre el instante 3 y 7 no se presenta carga plástica en esta zona de la viga, por lo que el valor de $\bar{\varepsilon}_p$ se mantiene en el alcanzado anteriormente.

La parte **a)** de la figura describe este comportamiento a medida que trascurre el tiempo. La parte **b)** de la figura representa la evolución de $\bar{\varepsilon}_p$ conforme aumenta o disminuye la carga en el extremo del voladizo.

La parte **c)** y **d)** de la **Figura 6-20** ilustra la evolución de $\bar{\varepsilon}_p$ en la parte inferior de la viga cercana al empotramiento, en el nudo 1. En esta zona, entre los instantes 1 y 5, la $\bar{\varepsilon}_p$ es

nula porque en este nudo no se ha superado el límite elástico a compresión del material. A partir del instante 5 se supera el límite elástico a tensión del material y esto se refleja en el incremento de $\bar{\varepsilon}_p$.

En el paso 6 finaliza el proceso de carga plástica debido a que la carga en el extremo de la viga disminuye nuevamente. A partir de este punto no se incrementa $\bar{\varepsilon}_p$ y se mantiene constante hasta el paso 7 donde finaliza la historia de carga. En la parte **c)** se representa este comportamiento con el paso del tiempo y en la parte **d)** se representa con la magnitud de la carga aplicada.



a) $\bar{\varepsilon}_p\ vs. Pasos\ de\ carga\ Nudo\ 6$

b) $\bar{\varepsilon}_p\ vs. P\ Nudo\ 6$

c) $\bar{\varepsilon}_p\ vs. Pasos\ de\ carga\ Nudo\ 1$

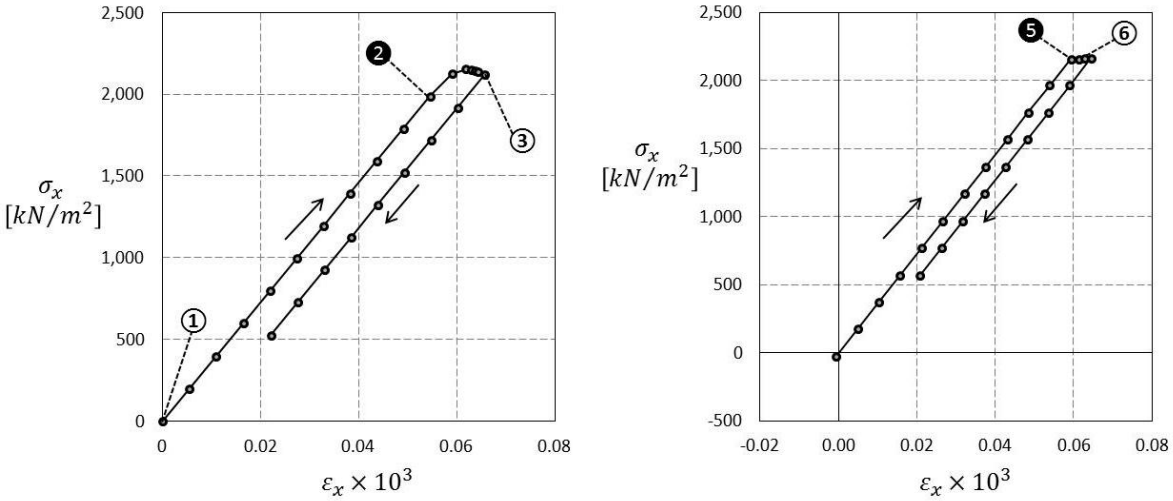
d) $\bar{\varepsilon}_p\ vs. P\ Nudo\ 1$

Figura 6-20: Deformación plástica equivalente viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

En la **Figura 6-21** se muestran las curvas esfuerzo – deformación en los puntos *C* y *D* de la viga analizada. La parte **a)** muestra la curva en el punto *C* para los instantes en los cuales se presenta plastificación en ese punto.

Entre el instante 1 y 2 se presenta comportamiento elástico lineal, en el punto 2 se llega al esfuerzo límite en tensión σ_{yt}. Entre los pasos de carga 2 y 3 se presenta el proceso de carga plástica en donde se puede observar el ablandamiento.

Después del paso de carga 3, se presenta la descarga elástica con la misma pendiente de la carga elástica entre los pasos 1 y 2. Se observa también la deformación permanente que ha quedado después de la plastificación.



a) $\sigma_x vs. \varepsilon_x$ *en el punto C* b) $\sigma_x vs. \varepsilon_x$ *en el punto D*

Figura 6-21: Curvas esfuerzo – deformación viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

En la parte **d)** de la **Figura 6-21**se muestra la curva para el punto *D*, en los pasos de carga donde se presenta la plastificación en este punto.

Antes del paso de carga 5 se aprecia un proceso de carga en el rango elástico, al llegar al paso de carga 5 y hasta el paso de carga 6 se presenta carga plástica debido a que se supera el límite elástico en tensión σ_{yt}. Después del instante 6, la carga en el extremo de la viga decrece y se presenta una descarga, la cual tiene la misma pendiente del rango elástico. Se puede también observar que ha quedado una deformación permanente.

6.3. Comparación entre modelos de plasticidad

Finalmente los resultados obtenidos con el modelo implementado (Hu y Schnobrich 1989), se comparan con resultados obtenidos con otros modelos existentes. En la **Figura 6-22** se presenta la comparación con los modelos de Von Mises y de Tresca. En la misma figura se muestran también los resultados experimentales de (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969).
La figura muestra únicamente el caso de compresión biaxial con relación $\sigma_1/\sigma_2 = 1$.

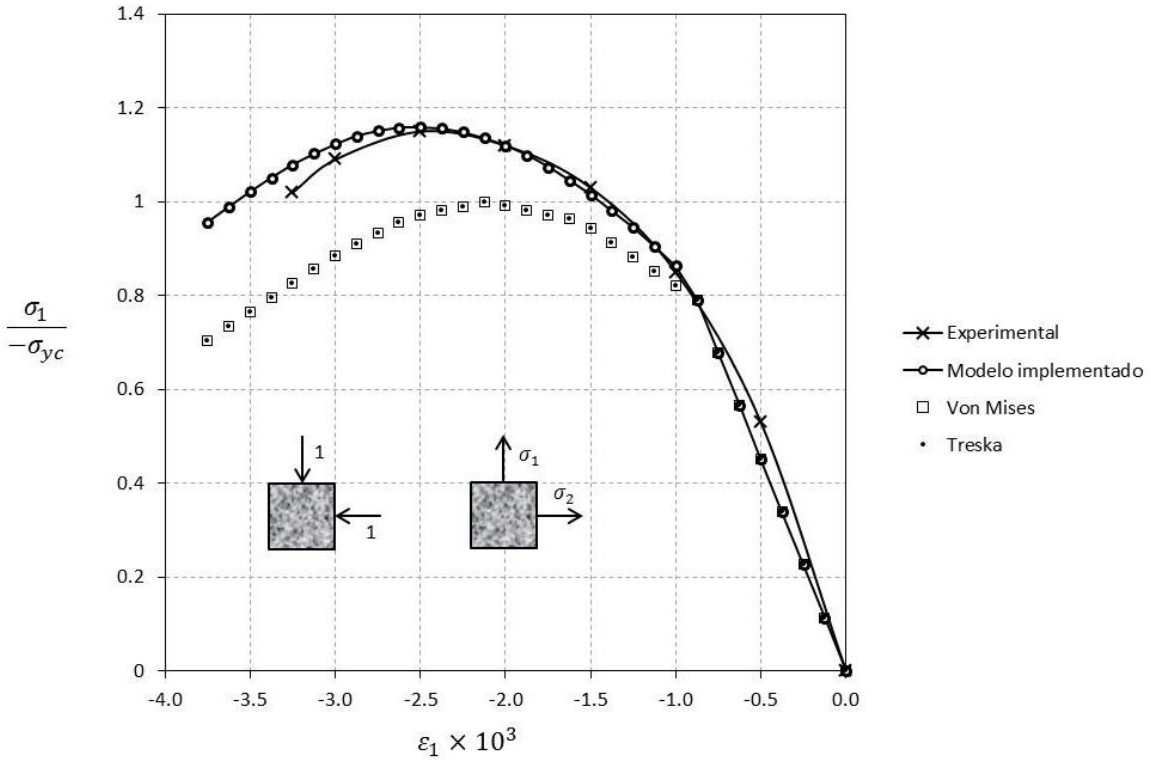


Figura 6-22: Comparación de resultados experimentales (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969), numéricos del modelo implementado (Hu y Schnobrich 1989), Modelo de plasticidad de Von Mises y Modelo de Tresca.

Como se espera, el comportamiento lineal elástico es representado de la misma manera por los tres modelos. El punto donde finaliza el comportamiento elástico lineal y comienza la plastificación coincide en los tres modelos.

En el proceso de carga plástica los modelos de Von Mises y Tresca, poseen la misma curva esfuerzo – deformación, sin embargo la curva se aleja en este rango de los resultados experimentales. El modelo implementado, de plasticidad no asociada, representa con mejor aproximación, el comportamiento experimental.

Capítulo 7
Conclusiones y recomendaciones

Las conclusiones que surgen de este trabajo se relacionan en primer lugar, con la formulación e implementación de modelos constitutivos para el análisis no lineal del concreto. Por otra se analizan los resultados obtenidos de la simulación numérica de probetas de concreto bajo diferentes solicitaciones en estado plano de esfuerzos y se comparan con resultados experimentales de otros autores.

7.1. Conclusiones

- Al considerar una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente del modelo original de (Hu y Schnobrich 1989), se simplifica la implementación del modelo sin que esto signifique un sacrificio en el ajuste de los resultados al ser comparados con datos experimentales.

- El modelo constitutivo implementado usa una regla de flujo no asociada, lo cual hace que los tensores constitutivos tangentes sean no simétricos y a su vez también la matriz de rigidez de la estructura es no simétrica. Este hecho hace que se dificulte la convergencia, pero se obtienen resultados más cercanos a los experimentales que si se usara un modelo con una regla de flujo asociada.

- La teoría de la plasticidad tiene una vasta fundamentación matemática, sin embargo, el modelo de plasticidad de (Hu y Schnobrich 1989) basa sus ecuaciones en regresiones de resultados experimentales. Este hecho hace los resultados obtenidos representen de manera muy acertada el comportamiento real del concreto simple, sin embargo, exige la utilización de técnicas alternativas que faciliten la convergencia hacia la solución.

- El modelo original de (Hu y Schnobrich 1989) no contempla un algoritmo de integración que permita resolver el problema cumpliendo con las condiciones de equilibrio en cada paso de carga. En esta tesis se complementó el modelo haciendo uso de un algoritmo general para modelos de plasticidad, satisfaciendo el equilibrio.

- El modelo implementado permite representar un comportamiento plástico con ablandamiento. En problemas de carga controlada utilizando este tipo de modelos es difísil la convergencia si se usa el método de Newton – Raphson. Se observó que se obtiene un mejor resultado si se usa el método de Newton – Raphson pero aplicando desplazamientos a la estructura en lugar de cargas. También se observó que al usar el método de longitud de arco se pueden aplicar cargas o desplazamientos obteniendo en ambos casos un buen resultado, es decir, convergencia en pocas iteraciones.

- De acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo implementado, se observa que el mejor ajuste se obtiene para el rango de compresión biaxial y tensión biaxial. Para el rango de tensión – compresión no tiene el mismo nivel de concordancia con los resultados experimentales debido a que el modelo no contempla fenómenos propios del concreto como la la fractura.

- El modelo seleccionado supone, para el rango de tensión biaxial, un comportamiento de plasticidad perfecta. Esto con el fin de evitar inestabilidad numérica en la solución, dada cuando decrece rápidamente el esfuerzo con el aumento de la deformación.

7.2. Recomendaciones

Las recomendaciones en seguida citadas hacen referencia al igual que las conclusiones, al ejercicio de implementar modelos constitutivos para análisis no lineal. Además se incluyen recomendaciones para el caso particular del desarrollo de códigos computacionales basadas en la experiencia personal del autor.

- Cuando se usa el método de los elementos finitos se debe tener en cuenta la influencia que tiene en los resultados la discretización. La malla que se genera influye en cierta medida en los resultados obtenidos, por lo que se recomienda realizar varios modelos con distintas densidades de mallas y comparar los resultados.

- El concreto en este modelo se analiza como una matriz homogénea, pero en realidad es una mezcla de varios materiales. Esto influye en su comportamiento mecánico,

por lo cual se recomienda investigar en la influencia de factores como el tamaño del agregado y la relación agua cemento, entre otras, para ajustar los parámetros de los modelos macro y mesoscópicos y lograr captar estas variaciones.

- El modelo implementado en esta tesis representa en buena medida el comportamiento real del concreto. Sin embargo no representa la totalidad de los fenómenos presentes en este material. en trabajos posteriores se pueden incluir los fenómenos que no se incluyen en este trabajo como la pérdida de la rigidez en ciclos de carga y la fisuración.

- La modelación del concreto simple es una etapa inicial para la modelación del concreto reforzado. Para futuros trabajos, el modelo implementado puede ser complementado para lograr representar el comportamiento de estructuras de concreto reforzado.

- En los problemas no lineales y que además tienen modelos constitutivos con expresiones de tipo empírico, se dificulta el proceso de convergencia. Se recomienda hacer simulaciones iniciales con estructuras lo más simples y con el menor número de elementos, para descartar otras fuentes de no convergencia ajenas al modelo constitutivo. Puede ocurrir que algún error fuera del modelo constitutivo no permita obtener convergencia.

- Las pruebas de escritorio son una herramienta útil para detectar errores en la programación y a su vez, permiten validar el programa en sus primeras etapas. Se recomienda hacer pruebas de escritorio a todos los segmentos de código sobre todo si involucran expresiones de gran extensión en donde es factible cometer errores difíciles de detectar con una inspección visual del código.

- Se debe prestar especial atención a los nombre de las variables, sobretodo en el momento en el cual viajan de una rutina a otra dentro de un programa. Un error muy común es invocar una subrutina con los argumentos equivocados.

Bibliografía

Balmer, G. G. «Shearing Strength of Concrete Under High Triaxial Stress - Computation of Mohr's Envelope as a Curve.» *Structural Research Laboratory Report* SP, nº 23 (1949).

Bazant, Z. P. «Crack Band Theory for Fracture of Concrete.» *Materials and Structures* 16, nº 93 (1983): 155-177.

Caisedo, Manuel. *Modelación numérica con elementos finitos del concreto reforzado con fibras cortas mediante un modelo constitutivo de Daño -Plasticidad.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2010.

Chen, Wai-fah, y Da-Jian Han. *Plasticity for Structural Engineers.* New York: J.Ross, 2007.

Darwin, D., y D. A. Pecknold. «Inelastic Model for Cyclic Biaxial Loading for Reinforced Concrete.» *CIVIL ENGINEERING STUDIES, STRUCTURAL RESEARCH SERIES*, nº 409 (1974).

de Souza Neto, EA., D Peric, y DRJ. Owen. *Computational Methods for Plasticity.* West Sussex: WILEY, 2008.

de Souza Neto, EA., D. Peric, y DRJ. Owen. *Computational Methods for Plasticity.* West Sussex: WILEY, 2008.

Drucker, D. C. «A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations.» *First U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME*, 1951: 487-491.

Drucker, D. C. «Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity.» *Q. Appl. Math.* 7, nº 4 (1950): 411-418.

Elwi, A. A., y D. W. Murray. «A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship.» *ASCE* 105, nº 4 (1979): 623-641.

Gere, James M., y Stephen P. Timoshenko. *Mecánica de Materiales.* Stanford: PWS, 1984.

Gunzburger, Max D., y Janet S. Peterson. *Finite Element Methods.* 2002.

Hand, F. R., D. A. Pecknold, y W. C. Schnobirch. «A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shels.» *CIVIL ENGINEERING STUDIES, STRUCTURAL RESEARCH SERIES* 3, nº 389 (1972).

Hsieh, S.S., E. C. Ting, y W. F. Chen. «A Plasticity-Fracture Model for Concrete.» *International Journal of Solids and Structures* (ASCE), nº 113 (1982): 577-593.

Hu, Hsuan-Teh, y William C. Schnobrich. «Constitutive Modeling of Concrete by Using Nonassociated Plasticity.» *JOURNAL OF MATERIALSIN CIVIL ENGINEERING* 1, nº 4 (1989): 199-216.

Kupfer, Helmut, Hubert K. Hilsdorf, y Hubert Rusch. «Behavior of Concfete Under Biaxial Stress.» *ACI JOURNAL* 66, nº 52 (1969): 656-666.

Linero, Dorian Luis. *PEFiCA.* Bogotá, 2010.

Linero, Dorian Luis. *PEFiCA.* Bogotá, 2007.

Lubliner, Jacob. *PLASTICITY THEORY.* California, s.f.

—. *PLASTICITY THEORY.* California, 1990.

Mroz, Z. «Non-associated Flow Laws in Plasticity.» *JOURNAL DE MECANIQUE* 2, nº 1 (1963): 21-42.

Ottosen, N. S. «A Failure Criterion for concrete.» *Journal of Engineering Mechanics Division* (ASCE) 103, nº EM4 (1977): 527-535.

Pauw, Adrian. «Static Modulus of Elasticity of Concreteas Affected dy Density.» *ACI JOURNAL* 57, nº 6 (1960): 679-687.

Peterson, P.E. «CRACK GROWTH AND DEVELOPMENT OF FRACTURE ZONES IN PLAIN CONCRETE AND SIMILAR MATERIALS.» *LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY DIVISION OF aUILDING MATERIALS* TVBM, nº 1006 (1981).

Reddy, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* New York: Oxford, 2004.

Richart, F. E., A Brandtzaeg, y R. L. Brown. «A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stresses.» *University of Ilinois Engineering Experimental Station Bulletin* 185 (1928).

Rodríguez, L. E., L. A. Herrera, y D. L. Linero. «Implementación de un modelo de plasticidad unidimensional en el programa PEFiCA y su aplicación en armaduras planas.» 2009.

Simo, J. C., y T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity.* Stanford: Springer, 1998.

Sinha, B. P., K. H. Gerstle, y L. G. Tulin. «Stress - strain relations for concrete under cyclic loading.» *ACI JOURNAL* 61, nº 2 (1964): 195-211.

Stewart, James. *Cálculo conceptos y contextos.* New York: Thomson, 1998.

Voyiadjis, George Z, y Taher M. Abulebdeh. «Analytical Formulation of the Biaxial Behavior of Concrete Repair Material.» *ACI Materials Journal* 90, nº M4 (1993): 26-33.

William, K. J., y E.P. Warnke. «Constitutive model for the Triaxial Behavior of Concrete.» *International Association of Bridge and Structural Engineers*, 1975.

Winnicki, A., y Cz. Cichon. «New Plastic Plane Stress Model For Concrete.» *Elsevier Science Publishers B.V.* H08, nº 4 (1993): 253-258.

Zaman, M., Y. M. Najjar, y M. O. Faruque. «Modelling of stress-strain behaviour of plain concrete using a plasticity framework.» *Materials and structures* 26 (1993): 129-135.

Zubelewicz, A. «Proposal for New Structural Model of Concrete.» *Archiwum Inzynierii Ladowej* 24, nº 4 (1983): 417-439.

Anexo A
Archivos de datos de entrada

Se presentan los archivos de entrada de datos para los ejemplos resueltos en este trabajo. Estos archivos fueron generados por el programa GiD para ser usados como archivos de entrada por el programa HYPLAS.

- Probeta sometida a compresión biaxial

  - Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
20965900 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
```

```
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11    0.000000   0.000000 0.0
  2 11   -0.000500   0.000000 0.0
  3 11   -0.000500  -0.000500 0.0
  4 11    0.000000  -0.000500 0.0

LOADINGS 0

INCREMENTS 30
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 2 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_2$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)
```

```
LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
20965900 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11    0.000000   0.000000 0.0
  2 11   -0.000500   0.000000 0.0
  3 11   -0.000500  -0.000500 0.0
  4 11    0.000000  -0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0



CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
20965900 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11    0.000000   0.000000 0.0
  2 11   -0.000260   0.000000 0.0
  3 11   -0.000260  -0.000500 0.0
  4 11    0.000000  -0.000500 0.0


LOADINGS 0
```

```
INCREMENTS 30
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 2 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_2$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
20965900 0.2
3
28980 0.0019
4 4
```

```
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11    0.000000   0.000000 0.0
  2 11   -0.000260   0.000000 0.0
  3 11   -0.000260  -0.000500 0.0
  4 11    0.000000  -0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

• Probeta sometida a tensión – compresión

• Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0.052$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
20965900 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000   0.000000 0.0
  2 11   0.000026   0.000000 0.0
  3 11   0.000026  -0.000500 0.0
  4 11   0.000000  -0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 40
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000   0.000000 0.0
  2 11   0.000026   0.000000 0.0
  3 11   0.000026  -0.000500 0.0
  4 11   0.000000  -0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 40
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0500000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

- Probeta sometida a tensión biaxial

  - Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = 1/1$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
28980000 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 11   0.000500  0.000000 0.0
  3 11   0.000500  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
```

```
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 11   0.000500  0.000000 0.0
  3 11   0.000500  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.55$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
```

```
ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
28980000 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 11   0.000260  0.000000 0.0
  3 11   0.000260  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 2 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0.55, \sigma_1\ vs. \varepsilon_2$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
28980000 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 11   0.000260  0.000000 0.0
  3 11   0.000260  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0
```

```
INCREMENTS 30
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_1$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
28980000 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 5.0E-05
```

```
THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 01   0.000000  0.000000 0.0
  3 01   0.000000  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0
   0.0020000 1e-03 80 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 2 1 4 0 0
```

- Probeta con $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0$, $\sigma_1\ vs.\ \varepsilon_2$

```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD
```

```
ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)


SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
28980000 0.2
3
28980 0.0019
4 4
0.0 1.0E-05

THICKNESS UNIFORM
0.05

ELEMENTS     1
          1       1     1     2     3     4

NODE_COORDINATES     4   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2         0.20000         0.00000
        3         0.20000         0.20000
        4         0.00000         0.20000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       4
  1 11   0.000000  0.000000 0.0
  2 01   0.000000  0.000000 0.0
  3 01   0.000000  0.000500 0.0
  4 11   0.000000  0.000500 0.0


LOADINGS 0


INCREMENTS 30
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
```

```
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0
   0.0030000 1e-03 30 1 0 1 0 0

CURVES 1
3 1 1 4 0 0
```

- Viga en voladizo con carga puntual en el extremo

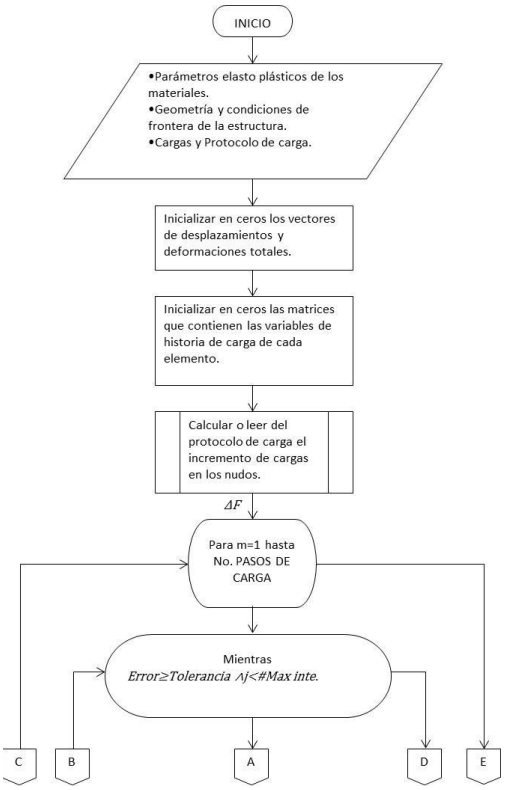
```
TITLE
Archivo de datos para HYPLAS generado por GiD

ANALYSIS_TYPE 1 (PLANE STRESS)

LARGE_STRAIN_FORMULATION OFF (SMALL STRAIN)

SOLUTION_ALGORITHM 2 (NEWTON_TANG_STIF)

ELEMENT_GROUPS 1
1 1 1

ELEMENT_TYPES 1
1 QUAD_4
4 GP

MATERIALS 1
1 CONCRETE_PLASTIC
0
360000.00 0.19
3
239.50 0.0019
4 4
0.0 1E-05

THICKNESS UNIFORM
25

ELEMENTS      24
          1       1       2       4       3       1
          2       1       5       8       4       2
          3       1      10      11       8       5
          4       1      13      14      11      10
          5       1      16      17      14      13
          6       1      19      20      17      16
          7       1      22      23      20      19
          8       1      25      26      23      22
          9       1      28      29      26      25
         10       1      31      32      29      28
         11       1      34      35      32      31
         12       1      37      38      35      34
         13       1       4       7       6       3
         14       1       8       9       7       4
         15       1      11      12       9       8
         16       1      14      15      12      11
         17       1      17      18      15      14
         18       1      20      21      18      17
```

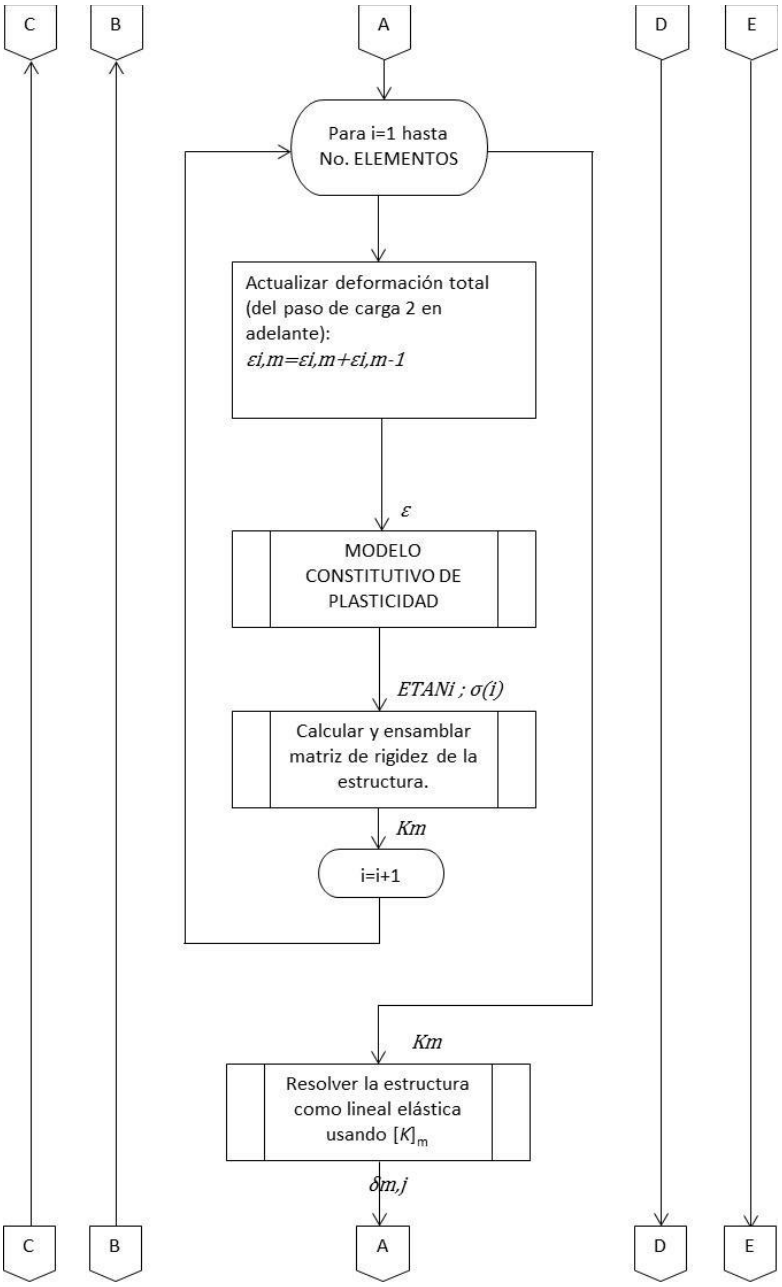
```
         19       1      23      24      21      20
         20       1      26      27      24      23
         21       1      29      30      27      26
         22       1      32      33      30      29
         23       1      35      36      33      32
         24       1      38      39      36      35

NODE_COORDINATES      39   CARTESIAN
        1         0.00000         0.00000
        2        25.00000         0.00000
        3         0.00000        25.00000
        4        25.00000        25.00000
        5        50.00000         0.00000
        6         0.00000        50.00000
        7        25.00000        50.00000
        8        50.00000        25.00000
        9        50.00000        50.00000
       10        75.00000         0.00000
       11        75.00000        25.00000
       12        75.00000        50.00000
       13       100.00000         0.00000
       14       100.00000        25.00000
       15       100.00000        50.00000
       16       125.00000         0.00000
       17       125.00000        25.00000
       18       125.00000        50.00000
       19       150.00000         0.00000
       20       150.00000        25.00000
       21       150.00000        50.00000
       22       175.00000         0.00000
       23       175.00000        25.00000
       24       175.00000        50.00000
       25       200.00000         0.00000
       26       200.00000        25.00000
       27       200.00000        50.00000
       28       225.00000         0.00000
       29       225.00000        25.00000
       30       225.00000        50.00000
       31       250.00000         0.00000
       32       250.00000        25.00000
       33       250.00000        50.00000
       34       275.00000         0.00000
       35       275.00000        25.00000
       36       275.00000        50.00000
       37       300.00000         0.00000
       38       300.00000        25.00000
       39       300.00000        50.00000

NODES_WITH_PRESCRIBED_DISPLACEMENTS       3
    1 10  0.000000 0.000000 0.0
    3 11  0.000000 0.000000 0.0
    6 10  0.000000 0.000000 0.0


LOADINGS  POINT
POINT_LOADS       1
   38 0.000000 -1000.0


INCREMENTS 62
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
```

```
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
  -0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0
   0.10000 1e-03 200 1 0 1 0 0

CURVES 1
38 2 3 4 0 0
```

Anexo B
Implementación de armaduras planas con plasticidad en programa PEFiCA

- Diagrama de flujo




C
B
A
D
E
Para i=1 hasta
No. ELEMENTOS
Actualizar deformación total
(del paso de carga 2 en
adelante):
εi,m=εi,m+εi,m-1
ε
MODELO
CONSTITUTIVO DE
PLASTICIDAD
ETANi ; σ(i)
Calcular y ensamblar
matriz de rigidez de la
estructura.
Km
i=i+1
Km
Resolver la estructura
como lineal elástica
usando [K]m
δm,j
C
B
A
D
E

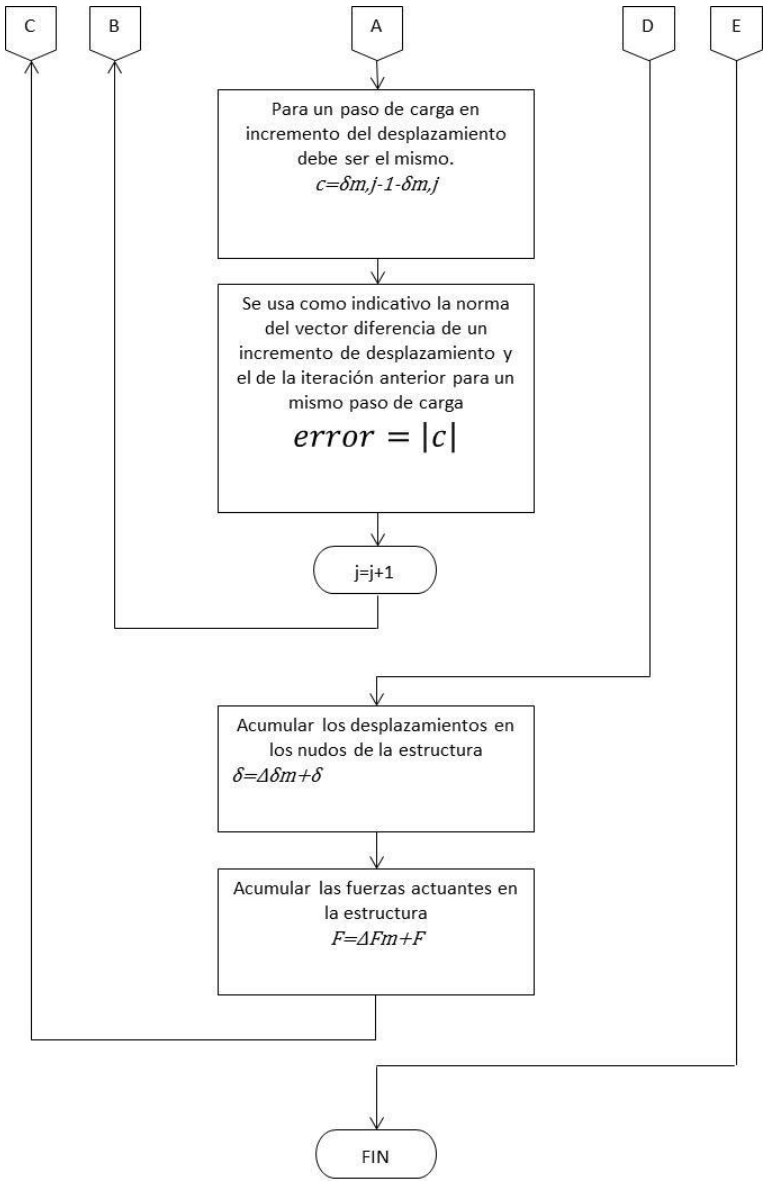


Figura 0-1: Diagrama de flujo rutina de análisis no lineal para armaduras planas con material elasto – plástico bilineal con endurecimiento isótropo.

- Rutina principal de cálculo

```
' Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería.
' Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola. Unidad Académica de Estructuras.
' Dorian Luis Linero Segrera
' Todos los derechos reservados. 2007
'
'-------------------------------------------------------------------------------
' PEFICA():    RUTINA PRINCIPAL DE CÁLCULO
'Modificado para análisis no lineal en tesis maestria bajo autorización de Dorial Luis
Linero

'-------------------------------------------------------------------------------
'
'opciones generales
Option Explicit     'forzar la declaración de todas las variables
Option Base 1        'declarar el límite inferior predeterminado para subíndices de matriz
igual a 1

Public Sub PEFICA()

    'declaración de variables escalares
    Dim NNUD As Integer, NELE As Integer, NGLE As Integer, NGLN As Integer, _
        NNUE As Integer, NGLD As Integer, NGLC As Integer, NDIM As Integer, _
        NMAE As Integer
    Dim EYOU As Double, YIEL As Double, AREA As Double, PXEL As Double, PYEL As Double, _
        LADO As Integer, SP As Double, TP As Double
    Dim i As Integer, j As Integer, FILA As Integer, COLM As Integer, IELE As Integer, _
        IDST As Integer, CONV As Double
    Dim PASOS  As Integer, NC As Double, ITEMAX As Double, ERRO As Double, _
        S As Integer, L As Double, DEFU As Double, ETANP As Double, SIGMAP As Double
    Dim nudo As Integer, dire As Integer, nudoc As Integer, direc As Integer

    'NNUD       número de nudos
    'NELE       número de elementos
    'NGLE       número de grados de libertad por elemento
    'NGLN       número de grados de libertad por nudo
    'NNUE       número de nudos por elemento
    'NGLD       número de grados de libertad desconocidos
    'NGLC       número de grados de libertad conocidos
    'NDIM       número de dimensiones del problema
    'NMAE       cantidad máxima de elementos asociados a un mismo nudo
    'EYOU       módulo de Young
    'POIS       relación de Poisson
    'ESPE       espesor (condición plana de esfuerzos)
    'PXEL       componente en x de la presión aplicada sobre un lado del elemento
    'PYEL       componente en x de la presión aplicada sobre un lado del elemento
    'PASOS      número de pasos de carga
    'NC         Norma del incremento de desplazamientos
    'ITEMAX     Número máximo de iteraciones
    'ERRO       Error = dezplazamiento i - desplazamiento i+1
    'S          contador para numero de iteraciones
    'L          Longitud del elemento analizado en el paso i
    'DEFU       Defpormación unitaria
    'ETAMP      Módulo tangente
    'SIGMAP     esfurzo de plastificación
    'nudo       Nudo en el cual se quiere ver el desplazamiento: curva carga desplazamiento
    'dire            Dirección en la que se quiere ver el desplazamiento: curva carga
desplazamiento
    'nudoc      Nudo en el cual esta la carga a graficar: curva carga desplazamiento
    'direc      Dirección en la que esta la carga a graficar: curva carga desplazamiento
```

```
    'declaración de matrices
    Dim ELE() As Integer, MGL() As Integer, INC() As Integer, MRE() As Integer, NUD() As
Integer
    Dim LNU() As Integer, LEL() As Integer
    Dim XYZ() As Double, KEL() As Double, KGL() As Double, FGT() As Double, FGL() As Double
    Dim FEL() As Double, FEA() As Double, TEL() As Double, FIN() As Double
    Dim DGL() As Double, DGC() As Double, DGT() As Double, DXY() As Double
    Dim DEL() As Double, BEL() As Double, EPE() As Double, CEL() As Double, STE() As Double
    Dim SXX() As Double, SPE() As Double, TPE() As Double
    Dim NXX() As Double, FXY() As Double, VO() As Double, DNU() As Double, NAB() As Double
    Dim EAB() As Double
    Dim GEM(10, 1) As Double, GRA() As Integer, TM1() As Double, TM2() As Double
    Dim MEC() As Double, DDGT() As Double, LAM() As Double, DELOC() As Double, DEF() As
Double, ETAN() As Double
    Dim C() As Double, PDELTA() As Double, U() As Double

    'XYZ()      matriz de coordenadas de los nudos
    'ELE()      matriz de nudos asociados a cada elemento
    'MGL()      matriz de grados de libertad por nudo
    'INC()      matriz de incidencias o matriz de grados de libertad por nudo
    'MRE()      matriz de restricciones
    'NUD()      matriz de nudos asociados a cada elemento
    '
    'KEL()      matriz de rigidez elemental
    'KGL()      matriz de rigidez de la estructura (reducida)
    'FEL()      vector de fuerzas equivalentes en los elementos
    'FGL()      vector de fuerzas en la estructura
    'FXY()      tabla fx, fy de las fuerzas en los nudos de la estructura
    'DGL()      vector de desplazamientos de la estructura (desconocidos)
    'DGC()      vector de desplazamientos de la estructura (conocidos)
    'DGT()      vector de desplazamientos de la estructura (total)
    'DXY()      tabla UX, UY de desplazamientos de la estructura
    'DEL()      vector de desplazamientos del elemento
    'BEL()      matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma
    'EPE()      vector de deformaciones del elemento
    'CEL()      matriz de constantes elásticas del material
    'STE()      vector de esfuerzos del elemento
    'SPE()      vector de esfuerzos principales del elemento
    'TPE()      vector de direcciones principales del elemento
    'SXX()         tabla de valores de una componente de esfuerzos en los nudos de cada
elemento
    '           según IDST
    '
    'GEM()      parámetros de generación de malla
    'GRA()      parámetros gráficos
    'MEC()      parametros de sección y material por elemento
    'C()        diferencia en los desplazamientos
    'PDELTA()   Relación carga desplazamiento de la estructura

    'parámetros predefinidos
    'posición inicial de la fila en la hoja TB_OUT
    Debug.Print "PEFICA - Programa de Elementos Finitos a Código Abierto"
    Debug.Print "Universidad Nacional de Colombia. 2008"
    Debug.Print "-------------------------------------------------------"
    Debug.Print "calculando ..."
    FILA = 2
    COLM = 1
    EDLIMH "TB_OUT" 'limpiar la hoja de salida

    'leer parámetros generales
    EDLECE "TB_GEN", 5, 2, NNUD     'número de nudos
    EDLECE "TB_GEN", 6, 2, NELE     'número de elementos
    EDLECE "TB_GEN", 7, 2, NGLN     'grados de libertad por nudo
    EDLECE "TB_GEN", 8, 2, NNUE     'número de nudos por elemento
    EDLECE "TB_GEN", 9, 2, NDIM     'número de dimensiones
```

```
    'leer parámetros de convergencia y protocolo de carga

    EDLECE "TB_GEN", 12, 2, EYOU    'módulo de ela
    EDLECE "TB_GEN", 16, 2, PASOS   'número de pasos de carga
    EDLECE "TB_GEN", 20, 2, CONV    'tolerancia para convergencia
    EDLECE "TB_GEN", 21, 2, ITEMAX  'número máximo de iteraciones

    'leer parametro para grafica carga desplazamiento de la estructura

    EDLECE "TB_GEN", 25, 2, nudo
    EDLECE "TB_GEN", 26, 2, dire
    EDLECE "TB_GEN", 28, 2, nudoc
    EDLECE "TB_GEN", 29, 2, direc

    'leer geometría, propiedades mecánicas y de sección por elemento
    EDLECR "TB_XYZ", 5, 2, XYZ(), NNUD, NDIM    'leer matriz de coord. nudos
    EDLECI "TB_ELE", 5, 2, ELE(), NELE, NNUE    'leer matriz de conectividades
    EDLECR "TB_ELE", 5, 5, MEC(), NELE, 5        'leer matriz con propiedades de sección y
material

        'EDTABR "TB_FUN", 5, 2, FXY(), NNUD, NGLN    'leer vector de cargas y las ordena de
acuerdo al nudo en el cual se aplican

    '(opcional) escribir geometría
    'EDIMPR "TB_OUT", "XYZ()", FILA, COLM, XYZ() 'escribir matriz de coord. nudos
    'EDIMPI "TB_OUT", "ELE()", FILA, COLM, ELE() 'escribir matriz de conectividades

    '(opcional) dibujar geometría
    'GRAFDE GRA()    'si no tiene parámetros de dibujo puede activar esta línea
    EDLECI "TB_GEN", 33, 2, GRA(), 14, 1        'leer parámetros de dibujo
    'GRAGEO XYZ(), ELE(), GRA(), 2              'dibuja elementos
    Debug.Print "dibujar geometría"


    'matriz de restricciones
    EDTABI "TB_RES", 5, 2, MRE(), NNUD, NGLN         'leer matriz de restricciones
    'EDIMPI "TB_OUT", "MRE()", FILA, COLM, MRE()      'escribir matriz de restric.

    '-------------------------------------------------------------------------------

    'construcción de la matriz de incidencias
    NGLNUD MGL(), MRE()        'construir la matriz de grados de libertad por nudo
    'EDIMPI "TB_OUT", "MGL()", FILA, COLM, MGL() '(opcional) escribir la matriz
    NGLELE INC(), MGL(), ELE() 'construir la matriz de gl por elemento
                               'o matriz de incidencias
    'numero de grados de libertad
    NGLC = MTSUCI(MRE())        'número de grados de libertad conocidos
    NGLD = NNUD * NGLN - NGLC   'número de grados de libertad desconocidos

    Debug.Print "construcción de la matriz de incidencias"
    '-------------------------------------------------------------------------------

    'INICIA PROCEDIMIENTO NO LINEAL
    '_____________________________________________________

    Dim ALPHA() As Double, GAMMA() As Double, DEFP() As Double, SIGMA() As Double
    Dim m As Integer
    Dim FXYA() As Double, FF() As Double, EPSI() As Double


    Dim aaa As Double
    Dim gam As Double
    ReDim EPSI(NELE, PASOS)
    ReDim PDELTA(PASOS, 2)

    'FXYA() cargas en los nudos en el paso de carga corriente
```

```
    'FF() MATRIZ AUXILIAR
    'EPSI() Matriz de deformación total por elemento y por paso de carga
    'Se inicializa todo en cero.

    MTCONS ALPHA(), 0, NELE, PASOS
    MTCONS GAMMA(), 0, NELE, PASOS
    MTCONS DEFP(), 0, NELE, PASOS
    MTCONS SIGMA(), 0, NELE, PASOS
    MTCONS FXYA(), 0, NNUD, NGLN
    MTCONS DGL(), 0, NGLC, 1
    MTCONS DGC(), 0, NGLD, 1
    MTCONS ETAN(), 0, NELE, 1
    MTCONS U(), 0, NNUD * NGLN, 1
    MTCONS FF(), 0, NNUD, NGLN

    'crea tabla con fuerzaas en nudos para cada nudo asi sean cero

    For i = 1 To NNUD
       ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4 + i, 1) = i
       ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4 + i, 2) = 0
       ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4 + i, 3) = 0
    Next i


'CICLO PARA PASOS DE CARGA
'En este caso es un vector de cargas en los nudos que varían en el tiempo

For m = 1 To PASOS

    'llenar la tabla de cargas en lso nudos con las cargas del paso actual
    For i = 1 To NNUD
       ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4         +         i,         2)         =
ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4 + i, 7 + m)
       ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(4         +         i,         3)         =
ThisWorkbook.Worksheets("TB_FUN").Cells(21 + i, 7 + m)
    Next i


    'leer vector de cargas correspondinente a cada paso de carga
    'leer vector de cargas y las ordena deacuerdo al nudo en el cual se aplican
    EDTABR "TB_FUN", 5, 2, FXY(), NNUD, NGLN

    'MTPORE FXY(), 1 / PASOS, LAM()
    'MTCOPA LAM(), FXYA()

    MTCOPA FXY(), FXYA()
    ReDim LAM(NNUD, NGLN)

    MTCOPA FXY(), LAM()

    'vector de fuerzas de la estructura (subvector de cálculo Fd)
    ORFUGL FGT(), FXYA(), MGL()                 'crear vector de fuerzas completo
    MTSUBM FGT(), FGL(), 1, 1, NGLD, 1          'crear vector de fuerzaz Fd


    ERRO = 1000
    S = 0
    Debug.Print "-------------------------------------------------------"
    Debug.Print "PASO DE CARGA #" & m


    While ERRO >= CONV And S < ITEMAX
        S = S + 1
        Debug.Print "iteración  #" & S

        'matriz de rigidez de la estructura (submatriz de cálculo Kdd)
```

```
        MTCONS KGL(), 0, NGLD, NGLD 'crea matriz de rigidez llena de ceros de tamaño
                                    '(gl desconocidos)x(gl desconocidos)
        MTADJU DGT(), DGL(), DGC()  'construir vector de desplazamientos (desc y con)

        For IELE = 1 To NELE
            'Debug.Print "elemento  #" & IELE
            EXTRAV DGT(), DEL(), INC(), IELE
            TRARXY TEL(), XYZ(), ELE(), IELE
            MTMULT TEL(), DEL(), DELOC()
            L = PBDIST(XYZ(), ELE(IELE, 1), ELE(IELE, 2))   'Longitud del elemento
            BUNID2 BEL(), L
            MTMULT BEL(), DELOC(), DEF()

            'EDIMPR "TB_OUT", "DEF() paso de carga #" & m, FILA, COLM, DEF()
            'EDIMPR "TB_OUT", "BEL() paso de carga #" & m, FILA, COLM, BEL()
            'EDIMPR "TB_OUT", "DELOC() paso de carga #" & m, FILA, COLM, DELOC()

            DEFU = DEF(1, 1)
'___________

            If m = 1 Then
               EPSI(IELE, m) = DEFU
            Else
                EPSI(IELE, m) = DEFU + EPSI(IELE, m - 1)
            End If
'___________

            'Debug.Print "DEFU  ____________________________________________________" & DEFU
            'Modelo constitutivo

            If m > 1 Then
                 DEFP(IELE, m) = DEFP(IELE, m - 1)
                 ALPHA(IELE, m) = ALPHA(IELE, m - 1)
            End If

            PLAS EPSI(IELE, m), GAMMA(IELE, m), ALPHA(IELE, m), MEC(IELE, 2), MEC(IELE, 3),
DEFP(IELE, m), MEC(IELE, 5), ETANP, SIGMAP, S

            ETAN(IELE, 1) = ETANP
            SIGMA(IELE, m) = SIGMAP

            aaa = EPSI(IELE, m)
            Debug.Print "EPSI  ____________________________________________________" & aaa

            'Opción que desactiva modelo constitutivo y deja todo elástico
            'ETAN(IELE, 1) = EYOU
            'SIGMA(IELE, 1) = EYOU * DEFU

            'Crear matriz de rigidez del elemento
            KARMAG KEL(), XYZ(), ELE(), IELE, ETAN(IELE, 1), MEC(IELE, 1)
            'ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento
            ENSAMK KGL(), KEL(), INC(), IELE
            '(opcional) escribir matriz de rigidez de cada elemento
            'EDIMPR "TB_OUT", "KEL() paso carga #" & m & " iteracion # " & S & " elemento #"
& IELE, FILA, COLM, KEL()

         Next IELE

    'Imprime matriz de rigidez de la estructura
    'EDIMPR "TB_OUT", "KGL() paso de carga #" & m, FILA, COLM, KGL()

    'Desplazamientos nodales en la estructura
    SOCHLK KGL(), FGL(), DGL()  'solucionar sistema de ecuaciones
    MTCONS DGC(), 0, NGLC, 1    'vector de desplazamientos conocidos
    MTADJU DDGT(), DGL(), DGC() 'construir vector de nuevos desplazamientos (desc y con)
    'ORGLFU DXY(), DDGT(), MGL() 'ordenar desplazamientos en el formato
```

```
                                '(NUDO),(UX),(UY)

    'Guarda resultados de desplazamiento en el nudo y dirección seleccionados pro el usuario
    'para generar la curba histórica carga desplazamiento de la estructura

    'EDIMPR "TB_OUT", "FGL()", FILA, COLM, FGL()     'escribir vector de fuerzas completo
    'EDIMPR "TB_OUT", "DGL()", FILA, COLM, DGL()       'escribir vector de desplazamientos
nudos libres
    'EDIMPR "TB_OUT", "DGT()", FILA, COLM, DGT()     'escribir desplazamientos
    'EDIMPR "TB_OUT", "DDGT()", FILA, COLM, DDGT()   'escribir nuevos desplazamientos

    MTREST DGT(), DDGT(), C() 'calcula la diferencia entre los desplazamientos (incremento)
    'EDIMPR "TB_OUT", "C()", FILA, COLM, C() 'escribir incremento de desplazamientos
    MTNORM C(), NC

    If m = 1 And S = 1 Then
        ERRO = CONV
    Else
        ERRO = NC
    End If

    Debug.Print "ERROR =" & ERRO & ""
    'Debug.Print "norma incremento desplazamiento =" & NC & ""

    Wend 'fin del ciclo de iteraciones

'___________

'___________


    Dim xx() As Double
    MTSUMA DDGT(), U(), xx()
    MTCOPA xx(), U()

    'U(1, 1) = U(1, 1) + DDGT(1, 1)

    'EDIMPR "TB_OUT", "U()", FILA, COLM, U()

    ORGLFU DXY(), U(), MGL() 'ordenar desplazamientos en el formato
                             '(NUDO),(UX),(UY)


    Dim yy() As Double
    MTSUMA FF(), LAM(), yy()
    MTCOPA yy(), FF()


    PDELTA(m, 1) = FF(nudoc, direc)
    PDELTA(m, 2) = DXY(nudo, dire)

Next m 'fin del ciclo de pasos de carga

    'escribir VECTORES de variables constitutivas por cada elemento

    EDIMPR "TB_OUT", "ALPHA()", FILA, COLM, ALPHA()
    EDIMPR "TB_OUT", "DEFP()", FILA, COLM, DEFP()
    EDIMPR "TB_OUT", "EPSI()", FILA, COLM, EPSI()
    EDIMPR "TB_OUT", "SIGMA()", FILA, COLM, SIGMA()
    EDIMPR "TB_OUT", "DXY()", FILA, COLM, DXY()
    EDIMPR "TB_OUT", "PDELTA()", FILA, COLM, PDELTA()
    EDIMPR "TB_OUT", "GAMMA()", FILA, COLM, GAMMA()

    '-------------------------------------------------------------------------------
End Sub
```

• Rutina del modelo constitutivo

```
Public Sub PLAS(DEF As Double, GAMMA As Double, ALPHA As Double, E As Double, _
K As Double, DEFP As Double, SIGMY As Double, ETAN As Double, SIGMA As Double, _
S As Integer)

Dim STRIAL As Double, DGAMMA As Double, FTRIAL As Double

'CÁLCULO DE SIGMA Y VARIABLES INTERNAS'

STRIAL = E * (DEF - DEFP)
FTRIAL = Abs(STRIAL) - (SIGMY + K * ALPHA)

'Debug.Print "DEF  ____________________________________________________" & DEF
'Debug.Print "DEFP  ___________________________________________________" & DEFP
'Debug.Print "STRIAL  __________________________________________________" & STRIAL
Debug.Print "FTRIAL  __________________________________________________" & FTRIAL

If FTRIAL > 0 Then

    DGAMMA = FTRIAL / (E + K)

    'Debug.Print "DGAMMA  ____________________________________________________" & DGAMMA

    SIGMA = (1 - DGAMMA * E / Abs(STRIAL)) * STRIAL
    DEFP = DEFP + DGAMMA * SIGMA / Abs(SIGMA)
    ALPHA = ALPHA + DGAMMA
    GAMMA = GAMMA + DGAMMA
    'Debug.Print "ALPHA  ___________________________________________________" & ALPHA
    'Debug.Print "GAMMA  ___________________________________________________" & GAMMA
Else
    SIGMA = STRIAL
End If
'CÁLCULO DEL MÓDULO DE RIGIDEZ TANGENTE'
If FTRIAL >= 0 Then
    ETAN = E * K / (E + K)
Else
    ETAN = E
End If
End Sub
```

Los modelos de plasticidad tienen la capacidad de representar el comportamiento mecánico de materiales como el concreto, debido a que poseen una fundamentación matemática rigurosa, la cual es complementada con teorías provenientes de la experimentación, que en conjunto le otorgan la posibilidad de predecir la respuesta mecánica de diversos materiales.

Esta tesis consiste en la modificación, implementación y validación del modelo constitutivo de plasticidad de Hu y Schnobrich para concreto simple. La modificación realizada en esta tesis al modelo constitutivo, consistió en convertir el comportamiento elástico no lineal inicial en un comportamiento elástico lineal. Adicionalmente la formulación se cambió de un formato explícito de cálculo a un formato implícito iterativo. Para lograr esto, se enmarcó el modelo constitutivo en el método de los elementos finitos, para garantizar el equilibrio durante los procesos de carga.

La implementación se realizó en el programa HYPLAS de análisis no lineal con el método de los finitos. Este proceso se realizó incluyendo nuevas rutinas de cálculo para el modelo constitutivo.

La validación se realizó comparando los resultados obtenidos numéricamente del modelo implementado, con resultados experimentales de Kupfer, Hilsdorf y Rusch y con resultados de otros modelos constitutivos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA
150 años
construyendo nación con ingenio propio
1861 2011
BOGOTÁ: FACULTAD DE INGENIERÍA, MEDELLÍN: FACULTAD DE MINAS, MANIZALES: FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA, PALMIRA: FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN